ALEXANDRE FERNANDES BATISTA COSTA LEITE

PARACONSISTÊNCIA, MODALIDADES E COGNOSCIBILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 28/04/2003.

BANCA

Walter Car

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. André Fuhrmann

Andreas Brunner

Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner

ABRIL/2003

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Costa Leite, Alexandre Fernandes Batista

C 824p Paraconsistência, Modalidades e Cognoscibilidade / Alexandre Fernandes Batista Costa Leite. - - Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica - Filosofia. 2. Lógica não clássica. 3. Linguagem - Filosofia. 4. Epistemologia - Modelos matemáticos. 5. Paradoxo. I. Carnielli, Walter A. (Walter Alexandre), 1952- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Alexandre Fernandes Batista Costa Leite

Paraconsistência, Modalidades e Cognoscibilidade

Resumo

Este texto tem por objetivo o estudo sintático e semântico das lógicas da inconsistência formal (**LFIs**), as quais são lógicas paraconsistentes que permitem o uso de operadores para formalizar as noções de consistência e inconsistência. Além das **LFIs**, são estudadas as lógicas modais normais, as quais possuem operadores para formalizar as noções modais de necessidade, possibilidade e conhecimento. Para estas, mostramos como construir o vários sistemas modais disponíveis na literatura, bem como interpretá-los diante da semântica usual de mundos possíveis.

A partir dos estudos acima, apresentamos uma lógica que é, ao mesmo tempo, paraconsistente e modal chamada $\mathbf{Ci}^{T}$. Investigamos algumas propriedades da lógica, como por exemplo, a completude. Tal lógica foi utilizada para evitar o paradoxo da cognoscibilidade, o qual ocorre em lógicas modais com base na lógica clássica.

Abstract

This text has the purpose of studying the syntatical and semantical status of logics of formal inconsistency (**LFIs**), which are paraconsistent logics with linguistic operators to formalize the notions of consistency and inconsistency. It also investigates normal modal logics, which have operators to formalize the modal concepts of necessity, possibility and knowledge. For these logics, we show how to construct modal systems, as well how to interpret them using possible-world semantics.

Given the two studies above, the main purpose of this dissertation is to show a modal paraconsistent logic called $\mathbf{Ci}^{T}$. We investigate some properties of this logic, for example, completeness. The logic is used to avoid a trouble with usual modal reasoning based on classical logic: the knowability paradox.

À Narjara

Agradecimentos

Sem uma certa participação de algumas pessoas, este trabalho não teria sido possível. Mas como ele foi possível, nada mais razoável que agradecer aqui aqueles que ajudaram, de algum modo, a efetivação da dissertação.

Aos meus pais, Jardel e Cleuza, sem os quais não teria percorrido nem a metade do caminho pelo qual já passei. E aos outros familiares: Adriana, Marley, Maria Fernandes, Eufrásio, Antônio, Ione e Little.

Ao Walter, orientador, só tenho uma dívida infinita. Ele foi responsável por tudo. Sem ele, claro, ainda não saberia nem mesmo o tema desta dissertação.

Ao Jean-Yves, pois três anos antes de chegar em Campinas para estudar lógica, já me enviava pacotes e mais pacotes com vários textos, os quais foram responsáveis pelo impulso inicial nos caminhos da paraconsistência.

Aos professores do IFCH, Marcelo e Ítala, pelo constante carinho que sempre demonstraram por mim, e pelos belos cursos de Teoria dos Conjuntos e Lógica.

Ao colega João, pelas várias observações, comentários e correções ao texto.

Aos professores André Fuhrmann, Claudio Pizzi, Michael Wrigley e Andreas Brunner pelas várias sugestões.

Aos meus antigos professores da UFG pelas aulas de Filosofia.

Aos meus amigos da UNICAMP, pela amizade e ajuda, são eles: Víctor, Daniel e Pit.

Aos funcionários do CLE, pelas várias ajudas: Augusto, Marcos e Nilza.

À amiga Narjara, pela paciência.

Sou muito grato a todos vocês.

Esta dissertação foi financiada pelo CNPq

Sumário

Introdução

> "E foi assim que o *philósophos* se proclamou não-filósofo e disse um adeus nostálgico ao *Lógos* em que durante tanto tempo se perdera. Foi quando a velha paixão pela lógica se reavivou em mim. As linguagens formais pareceu-me exibirem toda a perfeição de que a linguagem natural era essencialmente incapaz. Encontrei nos sistemas lógicos muitas das virtudes que eu buscara em vão nos discursos filosóficos. Mas eu tinha consciência do preço que pagava por essas virtudes e perfeições. Aquelas linguagens me apaixonavam enquanto não diziam nada sobre o Mundo."
>
> Oswaldo Porchat, *Vida Comum e Ceticismo*

O leitor deve procurar nas próximas páginas um estudo acerca das lógicas paraconsistentes e das lógicas modais, mas também uma tentativa filosófica de resolver um problema, ou melhor, uma variedade de problemas que nascem na filosofia da lógica, passam pela lógica e terminam em ontologia e epistemologia. Tais problemas ficam, cedo ou tarde, clarificados. O leitor perceberá que este texto se situa entre a Filosofia e a Lógica, se existe alguma distinção entre as duas disciplinas.

O leitor já familiarizado com lógicas da inconsistência formal e com lógicas modais pode poupar seu tempo e, simplesmente, pular os capítulos 1 e 2, os quais têm poucos resultados originais, e ler somente a introdução e o capítulo 3, pois as principais contribuições deste texto se encontram nessas partes. O texto que segue resulta em uma tentativa de apresentar uma extensão modal de uma lógica paraconsistente, ou melhor, de uma lógica da inconsistência formal. Esta é utilizada para esclarecer problemas filosóficos tanto do âmbito da ontologia quanto da epistemologia. Deste modo, realiza-se um empreendimento dentro da chamada *filosofia analítica,* isto é, filosofia da análise lógica[1]. Para tanto, a dissertação foi dividida em várias partes, as quais possuem uma intrínseca conexão.

[1]Ferrater Mora sugere em seu livro *A Filosofia Analítica: Mudança de Sentido em Filosofia* que "Muitos dos que praticam uma 'boa' análise filosófica - os 'bons' analíticos, não se preocupam em

Nesta introdução, além de um itinerário da jornada, são apresentadas características do método e do estilo de fazer filosofia que é adotado ao longo do texto, com a finalidade de salientar a importância do uso da lógica formal pelos filósofos no esclarecimento de seus conceitos e argumentos. Mostra-se uma pequena história acerca do surgimento das lógicas não-clássicas, em especial das lógicas paraconsistentes, e do seu impacto na visão tradicional da racionalidade, com o intento de ilustrar a importância de uma lógica universal. Algumas relações entre lógica e áreas da filosofia, tais como a ontologia, a epistemologia e a ética, são exibidas.

O capítulo 1 consiste em um estudo das lógicas da inconsistência formal (**LFIs**), as quais foram propostas a partir do texto *A Taxonomy of C-systems* de Walter Carnielli e João Marcos. Alguns princípios abstratos úteis na compreensão das **LFIs** e de outras lógicas da literatura são iluminados. Conceitos que aparecem no decorrer da dissertação são clarificados, quais sejam: relações de conseqüência, contraditoriedade, explosão, trivialidade, finitamente trivializável, partículas minimais. Em seguida, são discutidos os chamados princípios de não-contradição, não-trivialidade e as formas de explosão. Algumas definições vigentes de paraconsistência são analisadas e, em seguida, são definidas as **LFIs** e, em particular, os C-sistemas. Após elucidados alguns conceitos inicia-se uma abordagem sintática e semântica da lógica $\mathbf{C}_{\mathrm{min}}$, visto que é a partir dela que as **LFIs** estudadas nesta dissertação são construídas. São exibidas, tanto axiomaticamente quanto semanticamente, a lógica "básica" da inconsistência formal **bC** e algumas de suas extensões até à lógica **Ci**. Com isso, os operadores de consistência e inconsistência são analisados e sua relevância é centrada no fato de que em **bC** é possível traçar uma distinção entre inconsistência e contradição. Nota-se, mais adiante, que a lógica **Ci** tem a propriedade de criar uma equivalência entre aqueles conceitos, sendo, por isso, responsável pela origem de grande parte das lógicas paraconsistentes existentes na literatura. São apresentados resultados acerca da impossibilidade de redução de operadores de (in)consistências. Por fim, é esclarecida a formulação de várias lógicas paraconsistentes tradicionais, os dC-sistemas, tais como a hierarquia $\mathbf{C}_n$ de Newton da Costa, a partir de uma base fundamental e da peculiaridade do modo de propagação de (in)consistências.

O capítulo 2 pode aparecer como um desvio de percurso, mas o seu estudo e compreensão são úteis para a formação do capítulo 3, no qual se concentra uma parte importante do trabalho. No capítulo 2, investiga-se lógicas modais, isto é, aquelas que gostamos de chamar de metafísica bem feita e que formalizam os conceitos de necessidade, possibilidade, impossibilidade e contingência. Assim, faz-se um estudo da

anunciar que fazem filosofia analítica, e sempre resistem a ser considerados como analíticos, sem mais, a fim de não se verem equiparados com os que, à falta de outras virtudes, insistem em que têm de ser adeptos da 'análise'." Apesar da observação do autor, ainda gostaríamos de deixar claro que estamos inseridos no âmbito da filosofia analítica.

formação e do funcionamento de vários sistemas de lógica modal alética, tanto por via de suas respectivas axiomáticas e modelos quanto provas de corretude e completude. A importância da lógica modal para a filosofia é salientada, via uma aplicação com o uso do argumento de Kripke para a elaboração de verdades necessárias *a posteriori*. Em seguida, são abordadas, brevemente, contrapartes epistêmicas das lógicas modais aléticas, ou seja, as lógicas do conhecimento. Para estas são apresentadas as axiomatizações padrões e os respectivos modelos. Uma exposição da relevância da lógica epistêmica para a epistemologia é introduzida com base em problemas tais como a definição de conhecimento, o paradoxo de Moore, os problemas do conhecimento e da introspecção, os quais são examinados à luz da lógica.

O Capítulo 3 usa o instrumental fornecido pelos dois capítulos precedentes, visto que é nele que é exibida uma lógica que é paraconsistente e, ao mesmo tempo, modal. Nesta parte, estende-se a **LFI Ci** com o operador modal de necessidade para a construção de uma lógica modal da inconsistência formal. Para esta, elucida-se sua axiomática, semântica e provas de corretude e completude. Por fim, utiliza-se a lógica proposta para o exame de problemas epistemológicos, tais como: o paradoxo da cognoscibilidade e o conhecimento de consistências. O paradoxo da cognoscibilidade tem recebido muita atenção porque ele mostra um modo de gerar o colapso do operador de conhecimento com a verdade, isto é, uma proposição é conhecida se e somente se é verdadeira. A intenção é mostrar que é possível aceitar a tese verificacionista de que "se uma proposição é verdadeira, então ela pode ser conhecida", bem como a sua versão alética, desde que a lógica base seja alterada para uma lógica paraconsistente. Na lógica modal paraconsistente não é lícito concluir que ocorre o conhecimento de consistências.

Na conclusão, é feito um resumo de nossas principais contribuições e são exibidos os problemas que pretendemos abordar em futuras investigações.

Uma filosofia da análise lógica

Existem vários modos possíveis de se pensar filosoficamente ou fazer filosofia. Neste texto, a preocupação consiste em apresentar um desses modos, o qual se difere dos demais não em relação ao objeto de estudo, mas antes na maneira pela qual tal objeto é compreendido e explorado. Mas se se deseja elucidar modos de fazer filosofia é porque antes já se tem claramente o que ela significa.

A filosofia não se define por via das maneiras de efetivá-la, e nem possui apenas uma definição. Para os objetivos almejados neste texto, por "filosofia" entende-se uma área do conhecimento que se ocupa em elucidar conceitos ontológicos, epistemológicos e referentes ao âmbito da ética. A abordagem de tais noções é que vai diferir. E é nesse movimento de distinção que vai aparecer uma maneira possível de fazer filosofia, a qual denomina-se *filosofia analítica*[2].

Mesmo sabendo que existem vários tipos de análise[3], e que não existe uma maneira única de identificá-la, os textos de filosofia analítica podem ser identificados a partir de suas propriedades cruciais:

- Clareza e univocidade conceitual;
- Uso da lógica formal;
- Uso da argumentação;
- Preocupação com a solução de problemas filosóficos.

É preciso que fique transparente ao leitor que este texto valoriza as propriedades acima. Compartilhamos da crença de que podemos, se não acabar com, pelo menos diminuir, as "ambiguidades, confusões, faltas de sentido, obscuridades e afirmações exageradas ou gratuitas"[4] se aceitarmos as propriedades acima. Deste modo, é útil um breve comentário acerca de cada uma delas.

A presente análise almeja a clareza e a univocidade dos conceitos[5]. As duas noções estão interligadas e, por isso, se se tem qualquer uma delas, tem-se, automaticamente a outra. De um lado, a univocidade dos conceitos significa que estes se referem, em qualquer uma de suas ocorrências, sempre ao mesmo objeto, a não ser que alteração expressa de referência seja mencionada. E por terem uma referência invariável ao longo do texto se ganha clareza. Esta também se obtém com tentativas de dar semânticas aos conceitos, isto é, esclarecer a que eles se referem e, conseqüentemente, qual o

[2]A terminologia *filosofia analítica* não é de nossa autoria e também não temos conhecimento acerca de quando aparece pela primeira vez.

[3] "Em suma, a filosofia analítica não é uma 'escola' nem sequer uma tendência, e o mais a que se pode parecer é a um conjunto de correntes caracterizadas por numerosas 'técnicas', 'estratégias', 'estilos' e 'maneiras de fazer filosofia ' que se articulam bem com o exame de certos problemas, mas que não dependem de um determinado grupo de problemas. Não existe nem 'a' filosofia analítica, nem 'os' problemas da filosofia analítica; existem modos de analisar problemas filosoficamente " Ferrater Mora, p. 31.

[4]Mora, Ferrater. p.9.

[5]Em *Naming and Necessity* de Saul Kripke verifica-se a presença da clareza e univocidade dos conceitos.

seu sentido. Tanto a clareza quanto a univocidade são indispensáveis para que exista comunicação e troca de informações, fatos difíceis de serem encontrados em alguns filósofos não-analíticos, como J. Derrida e G. Deleuze[6].

A lógica formal é capaz de auxiliar o trabalho filosófico porque consegue abstrair a forma dos conceitos por meio da formalização, e porque ao fazer isso é capaz de elucidar algumas propriedades que, de outro modo, permaneceriam escondidas. Aqui podem aparecer dois tipos de filósofos analíticos: aqueles que fazem uso da lógica clássica e os que, para efetuar a análise, dispõem de um instrumental não-clássico.

O uso de argumentos é traço fundamental da filosofia analítica. Os argumentos são formados por premissas e por conclusão ou conclusões. Em geral, depois de explicar o significado dos conceitos, estes são colocados em argumentos e em demonstrações com o intento de chegar aos resultados desejados. Uma argumentação tem por objetivo justificar a verdade de certa conclusão com o uso de proposições, se não verdadeiras, ao menos razoáveis.

Os filósofos analíticos, freqüentemente, tentam resolver problemas filosóficos. Por esse motivo, esclarecem os conceitos que são usados nos argumentos e, por via da lógica, fazem uma análise destes com o intento de resolvê-los.

A mais adequada espécie de filosofia é aquela que contém as propriedades acima[7]. Deste modo, o estilo deste texto pode ser visto como analítico. Não é difícil perceber que o presente texto satisfaz as propriedades acima. A clareza e a univocidade conceitual são obtidas com o uso das definições. Utiliza-se a lógica formal, em especial a paraconsistente, para elucidar conceitos e problemas filosóficos tanto da epistemologia quanto da ontologia. Cada demonstração pode ser vista como uma argumentação cujo único fim é a análise de algum problema ou conceito filosófico.

É comum que textos de filosofia analítica façam uso da lógica quantificacional clássica e, por isso, poucas são as tentativas de usar outros tipos de lógica, distintas da clássica, para a análise lógica de conceitos filosóficos[8]. Este texto, se faz algum tipo de análise, então a faz por via das lógicas paraconsistentes. Deste modo, tenta-se utilizar outros cânones da razão na esperança de que isso não nos leve ao rótulo de

[6]Basta ir até o livro *Mil Platôs* para se certificar de um exemplo acerca do que consiste a ausência de precisão e clareza conceitual.

[7]É claro, não é lugar-comum que os textos de filosofia devem valorizar as propriedades acima. Por exemplo, o matemático Gian-Carlo Rota em seu texto *The pernicious influence of mathematics upon philosophy* defende o contrário do que gostaríamos que fosse o caso. Lamentável é o fato de que o autor pouco consegue avançar em seus argumentos.

[8]Apesar de poucas, as tentativas existem. Por exemplo, na parte acerca do paradoxo da cognoscibilidade comentamos algumas tentativas de usar lógicas não-clássicas para solucionar o paradoxo da cognoscibilidade propostas por Heinrich Wansing e Timothy Williamson.

iconoclastas. Por isso, gostaríamos que o tipo de trabalho aqui apresentado fosse visto como uma filosofia analítica não-clássica, pois é exatamente uma lógica não-clássica, isto é, a lógica paraconsistente que é o instrumento de análise.

O estilo deste texto é o analítico. Mas qual o nosso método? Uma vez que a investigação filosófica deve nascer a partir da investigação lógica, segue-se que são estudados os vários sistemas formais e suas múltiplas propriedades para depois inferir as conseqüências filosóficas. Deste modo, obtém-se a filosofia a partir da lógica[9].

Princípios lógicos

Durante cerca de vinte séculos, os filósofos se apoiaram em alguns princípios lógicos considerados os pilares para o bom funcionamento da razão. Tais máximas são usualmente conhecidas como:

- Princípio da não-contradição;
- Princípio do terceiro-excluído;
- Princípio da identidade;
- Princípio da bivalência.

Sem a presença de tais "leis da razão", o exercício do pensamento se apresentava como algo inalcançável. De fato, basta um exame da história da filosofia e da lógica para se certificar da importância daquelas "leis do pensamento". Pode-se considerar Aristóteles como aquele que disseminou pela cultura lógico-filosófica o mito da necessidade de princípios lógicos universais[10]. No final de século XIX, com a algebrização da lógica feita por G. Boole e com a tentativa de derivar a matemática a partir da lógica feita por G. Frege, os princípios lógicos já imaginados por Aristóteles ganharam ainda mais confiança e poder. Mas o que nos garante cada um dos princípios acima?

Tradicionalmente, o princípio de não-contradição assegura que não é o caso que A e, ao mesmo tempo, $\sim A$[11]. Isto é, não pode ser verdade que, concomitantemente,

[9] Inferir a filosofia a partir da lógica já era tarefa imaginada por Russell, uma vez que o autor afirmava que os problemas da filosofia são problemas da lógica e o modo de filosofia que se obtém depende da lógica subjacente adotada.

[10] Em seu livro *A Metafísica,* Aristóteles formula de três modos distintos o princípio de não-contradição, e em todas elas (ontológica, psicológica e lógica) percebemos uma defesa do mesmo.

[11] O símbolo $\sim$ é utlizado para denotar a negação clássica.

uma certa sentença e a sua negação sejam verdadeiras. Portanto, a essência de tal princípio é asserir que uma contradição deve ser evitada. Ou seja, não é possível ter uma afirmação do tipo $A\wedge\sim A$[12]. É fácil observar que tal princípio é fundamental naquele tipo de raciocínio bastante usado por filósofos, lógicos, juristas e matemáticos e denominado raciocínio por absurdo. Tal forma de inferência diz que se é derivada uma certa contradição, então pode-se inferir exatamente a negação daquilo que fez chegar até ela. Entre os filósofos, Sócrates[13] usava tal tipo de estratégia argumentativa no seu método maiêutico. E Kant[14] não fica atrás ao tentar compreender as antinomias da razão pura. Já na comunidade composta por lógicos e matemáticos, é fácil ver provas por redução ao absurdo na demonstração de teoremas de lógica proposicional clássica e teoria dos conjuntos. Do ponto de vista da intuição, parece que uma condição de possibilidade para pensar os objetos da experiência em geral é que tais objetos não sejam contraditórios. Nem sequer é possível representar, isto é, imaginar conjuntos de fatos contraditórios sob, e sempre, os mesmos aspectos. Na linguagem-objeto de uma lógica munida com negação e conjunção o princípio de não-contradição foi enunciado pela tradição do seguinte modo: $\sim(A\wedge\sim A)$[15].

Outro princípio caracterizado como vital para o funcionamento preciso da razão é o do terceiro-excluído. Este sugere que dada uma certa proposição A, então segue-se A ou então $\sim A$. Isso significa que ou A é verdadeira ou então a sua negação o é, de modo que não é possível uma terceira opção ou escolha. Obtém-se o *tertium non datur* a partir da negação de uma contradição. De fato, se não é o caso que A e $\sim A$, então é porque ou A ou $\sim A$. Tal imperativo também encontra respaldo na intuição, visto que sempre é possível optar pela construção de ontologias dicotômicas, ou seja, é fácil dividir o mundo em duas partes. O terceiro-excluído na forma $A\vee\sim A$, assim como o princípio da não-contradição, também é fundamental para a inferência de redução ao absurdo, pois ao se colocar B como hipótese e se ele leva até uma contradição, é exatamente porque B não deve valer. Portanto, se não vale B, então vale a negação de B.

O princípio da identidade também possui alto grau de amparo empírico. Grosso modo, ele diz que dado um certo objeto O, segue-se que O é idêntico a si mesmo, ou seja, $O = O$. Isto é, O conserva a sua identidade. Não é demais esclarer que todos os princípios aqui apresentados podem ser formulados de outros modos. A identidade, por exemplo, além de ser algo que se dá entre objetos, pode ser também estendida para as proposições. Deste modo, o princípio da identidade se revela em proposições do tipo:

[12]O símbolo $\wedge$ é a conjunção.

[13]Veja o diálogo *Teeteto* de Platão.

[14]Veja a *Crítica da Razão Pura*.

[15]No capítulo 1 mostramos que a formulação do princípio de não-contradição como $\sim(A\wedge\sim A)$ é apenas uma apresentação possível.

"$A \rightarrow A$" e ainda "$A \leftrightarrow A$"[16]. Parece que sem a identidade ao longo do tempo, os agentes não seriam, do mesmo modo que acima, capazes de representar os objetos da experiência. Também seriam incapazes de dizer de um objeto que ele é algo, à medida que o próprio objeto não teria uma essência e, por isso, seria muito duvidoso acreditar em sua existência.

O princípio da bivalência fornece pistas para acreditar que dada uma certa proposição A, então deve existir um objeto, para falar como Frege, ligado à ela chamado valor-verdade ou valor-lógico. Tais valores, de acordo com a bivalência, podem ser divididos em apenas dois: o verdadeiro e o falso. Conseqüentemente, se se tem uma proposição A, conclui-se que o valor lógico de A é a verdade ou então a falsidade. É bastante estreita a relação entre a bivalência e o terçeiro-excluído, como se constata.

Cada um dos princípios acima desempenhou papel importante ao longo do pensamento ocidental. Seria visto como uma loucura duvidar da validade de algum desses princípios. Até mesmo nos tempos atuais, ainda é fácil encontrar pesquisadores que defendem a inviolabilidade dos princípios lógicos[17]. Dada então a confiança nos princípios lógicos e na lógica clássica, como foi possível o nascimento de lógicas não-clássicas?

Lógicas não-clássicas

Apesar do fato de que a lógica clássica estava bem consolidada na transição do século XIX para o XX, ainda assim foi possível que alguns investigadores questionassem a validade dos princípios lógicos. Mas como isso aconteceu? Com o nascimento da teoria dos conjuntos de Cantor e com as investigações de Frege, muitas pessoas ficaram interessadas nos fundamentos da matemática. Um desses interessados era Bertrand Russell, o qual levantou a suspeita da existência de uma contradição derivada a partir da teoria dos conjuntos, isto é, até o aparecimento do paradoxo de Russell. A grande quantidade de paradoxos[18] que surgiu na transição dos séculos foi responsável, por um lado, pelo nascimento de três grandes escolas: o formalismo (David Hilbert), o logicismo (Bertrand Russell) e o intuicionismo (Brouwer). Todas tentavam evitar e aniquilar com os paradoxos que estavam aparecendo nas investigações acerca dos fundamentos da matemática. Por outro lado, começaram a aparecer pensadores que não desejavam

[16]O símbolo $\rightarrow$ refere-se à implicação ao passo que $\leftrightarrow$ é a equivalência.

[17]Kripke afirma "Already when I worked on modal logic it had seemed to me, as Wiggins has said, that the Leibnitzian principle of the indiscernibility of identicals was as self-evident as the law of contradiction. That some philosophers could have doubted it always seemed to me bizarre."

[18]Por exemplo, o paradoxo de Russell, o paradoxo do mentiroso e o paradoxo de Grelling-Nelson . O paradoxo de Russell mostra que existe um conjunto que pertence a si mesmo se e somente se não pertence a si mesmo. O paradoxo do mentiroso é fundado em uma proposição que é verdadeira se e somente se é falsa. Já o paradoxo de Grelling-Nelson nos mostra que uma dada proposição tem certa propriedade A se e somente se não tem certa propriedade A.

aniquilar as contradições, mas sim compreendê-las e estudar sistemas dedutivos que, de algum modo, suportassem tais paradoxos. Jan Lukasiewicz é visto, por alguns, como o fundador das lógicas não-clássicas, uma vez que foi um dos primeiros a lançar dúvidas sobre a validade universal do princípio de não-contradição e outros princípios lógicos. Lukasiewicz apresenta um texto intitulado *O princípio de não-contradição de Aristóteles* no qual ataca as formulações do princípio de não-contradição e ainda investiga alguns sistemas polivalentes. Na mesma época, Vasiliev, com sua lógica imaginária, levanta a suspeita de que seria possível a construção de lógicas capazes de rejeitar os princípios lógicos tradicionais. Estava aberto o caminho para as lógicas não-clássicas e, conseqüentemente, para as lógicas paraconsistentes.

Stanlislaw Jaskowski, aluno de Lukasiewicz, na Polônia, estudava as lógicas discussivas, as quais seriam caracterizadas como lógicas paraconsistentes. As principais motivações de Jaskowski, de acordo com Ayda Arruda[19], eram:

- A sistematização de teorias que contém contradições;
- O estudo de teorias contendo contradições originadas pela falta de clareza;
- O estudo de teoria empíricas cujos postulados são contraditórios.

Pode-se considerar Jaskowski como o primeiro lógico que imaginou um sistema formal capaz de suportar fórmulas contraditórias, mas o autor não investigou além da lógica proposicional. Por isso, o Brasil é considerado o local onde ocorreu o nascimento das chamadas lógicas paraconsistentes. Estas foram desenvolvidas pelo filósofo e lógico Newton da Costa, o qual além de propor infinitos sistemas proposicionais paraconsistentes, conseguiu estendê-los para a lógica de primeira-ordem . Inicialmente, as lógicas paraconsistentes foram definidas como lógicas capazes de suportar teorias contraditórias, sem que tais teorias fossem levadas à trivialização, isto é, sem que as teorias fossem capazes de demonstrar todas as fórmulas. Deste modo, uma lógica seria paraconsistente se ela fosse contraditória e não-trivial. Esta definição pode ser vista de várias maneiras, e uma noção um pouco mais particular de paraconsistência foi definida por Walter Carnielli e João Marcos: uma lógica é paraconsistente se ela é não-explosiva, embora gentilmente explosiva, ou seja, se apesar de conter contradições ainda assim não for capaz de se tornar trivial, mas torna-se trivial se contém uma contradição (ao envolver a fórmula A e a sua negação) e mais alguma fórmula específica que dependa exclusivamente de A, por exemplo, a consistência de A.

Tanto com base na primeira quanto na segunda definição é possível caracterizar vários sistemas formais como lógicas paraconsistentes. Mas sabe-se que a enorme quantidade de lógicas existentes na literatura não se esgota apenas no ambiente paraconsistente (existem lógicas polivalentes, intuicionistas, relevantes, etc.). E mais, a partir

[19]Em *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*.

da lógica clássica, tanto proposicional quanto de primeira-ordem, é possível construir extensões modais, epistêmicas, deônticas, dentre outras. Portanto, existem infinitas manifestações de sistemas lógicos, inclusive incompatíveis entre si. Essa pluralidade de lógicas mostra a riqueza o universo das lógicas não-clássicas e leva ao pluralismo lógico. Segundo N. da Costa, "um dos acontecimentos mais revolucionários das ciências formais foi o desabrochar, em nossa era, das lógicas alternativas da clássica, na acepção de que derrogam ou limitam leis centrais da mesma."[20]

Mas o que faz, diante de toda essa multiplicidade de lógicas existentes, ser ainda possível determinar o que é uma lógica? Isto é, qual a natureza (essência) da lógica? Existem propriedades gerais que são comuns a todos os sistemas formais?[21]

As questões acima só podem ser respondidas com o uso de uma teoria geral das lógicas, ou em geral, de uma lógica capaz de mostrar quais são as propriedades minimais fundamentais que todos os sistemas formais devem ter para receber a qualificação de "lógica". Ora, é exatamente aqui que entra o papel da lógica universal. Esta foi desenvolvida por um ex-aluno de Newton da Costa chamado Jean-Yves Béziau. A lógica universal é o estudo geral das estruturas lógicas e se apresenta como uma lógica unificadora capaz de obter ferramentas lógicas abstratas hábeis o suficiente para definir as propriedades mais gerais que qualquer sistema lógico deve ter para ser considerado como uma lógica. Assim, a lógica universal pode ser vista como a lógica das lógicas com as seguintes características:

- Unidade;
- Generalidade;
- Abstração;
- Indeterminação

[20] Em *O Conhecimento Científico*, p.85.

[21] A crença em princípios lógicos universais capazes de determinar aquilo que é a lógica é caracterizada por Béziau como o estágio religioso da lógica: "We can jump from absoluteness to relativity, saying that there are no absolute laws but relative laws and various logics, but if we stay at this level we are still at the "religious stage": we have just swapped monotheism for polytheism (and this is not necessarily a progress)." em *Universal Logic*. Nesse sentido, é preciso dar um salto para a lógica universal, se de algum modo deseja-se situar fora do nível religioso.

Segundo Béziau, não existe uma única lógica, seja clássica, intuicionista ou paraconsistente, e também não existem leis absolutas da lógica, tais como o princípios lógicos. E dada a possibilidade de infinitos sistemas de lógica, é fundamental encontrar um método para tratar toda essa multiplicidade de um ponto de vista abstrato e operativo, apesar da pluralidade de sistemas.

Vimos, rapidamente, como se deu o desenvolvimento das lógicas não-clássicas. Agora, precisamos mostrar como essas lógicas, inclusive a lógica clássica, são capazes de ajudar a filosofia na sua tarefa de elucidação dos conceitos.

Lógicas e Filosofia

Se a filosofia é elaborada a partir da lógica e se esta se constitui como a essência da filosofia, então é plausível tentar mostrar ao leitor as relações que as lógicas têm com a filosofia. O objetivo aqui é mostrar que as lógicas não-clássicas, em especial a paraconsistente, podem ser utilizadas para abordar alguns problemas em ontologia, epistemologia e ética. Contudo, a própria lógica clássica é fundamental para a análise filosófica.

Ontologia

O termo "lógica" pode ser, e na verdade é, utilizado em mais de um sentido. Alguém poderia afirmar: "Isso não tem lógica", com o intento de exprimir o fato de que algo não tem uma ordem ou que não se adequa aos cânones do senso comum. Outros poderiam enunciar expressões do tipo: "a lógica da produção" ou "a lógica do sentido" para se referir aos processos inerentes à produção e ao sentido. Aqui não é usada a palavra "lógica" para designar algo distinto daquilo que os lógicos atuais fazem. Mas, então, o que os lógicos fazem? O que é lógica? É claro, não existe um consenso.

"Pode a lógica ser ontológica?" Para que seja apresentada uma resposta à questão crucial é preciso esclarecer o que se entende por "lógica" bem como "teoria ontológica" ou "ontologia" ou ainda "caráter ontológico". Pois sem saber, claramente, o que está sendo assumido como "lógica" e como "ontologia" não se separa do risco de cair em pântanos de confusões e mal-entendidos, os quais geram mistérios que deveriam ser substituídos por transparências. Na tentativa de responder se a lógica tem um caráter ontológico, deve-se, sem dúvida, responder, antes, as questões acerca da natureza da lógica e da ontologia. Isto é, deve-se tentar explicar o que é lógica e o que é ontologia.

O que é lógica? Vários filósofos e lógicos já se defrontaram com essa questão. Pode-se afirmar que não existe um acordo, mas uma pré-disposição de aceitar esta ou aquela definição de acordo com fim almejado. Para Quine, a lógica é o estudo sistemático das verdades lógicas [22], enquanto para Chateaubriand a lógica é a filosofia estudada e desenvolvida matematicamente[23] .

É comum que o termo "lógica" seja compreendido como se referindo tanto à disciplina quanto aos sistemas formais. Como disciplina, a lógica é vista como formada por diversas unidades como a teoria dos modelos e da teoria da demonstração, também chamada de teoria da prova, ou então como o estudo das inferências válidas, ou ainda como o estudo das leis do pensamento. Já como sistema formal, pode-se dizer que temos uma lógica quando temos um conjunto de fórmulas e uma relação de conseqüência lógica sobre esse conjunto . Se quiséssemos apresentar uma definição de lógica enquanto sistema formal, poderíamos proceder do seguinte modo:

Dado um conjunto For de fórmulas, e dada uma relação de conseqüência lógica $\Vdash$ [24], seja sintática ou semântica, sobre esse conjunto, uma lógica $\mathbf{L}$ é um par do tipo $< For, \Vdash >$ [25].

Poderíamos argumentar que $\mathbf{L}$ somente seria uma lógica se tivéssemos um conjunto de axiomas e modelos capazes de interpretar os axiomas. Se fôssemos mais exigentes poderíamos dizer que a cidadania lógica só seria obtida se tivéssemos também provas de corretude e completude. Enfim, é possível encontrar várias definições de lógica, inclusive incompatíveis entre si.

Mas para o escopo do presente texto, enquanto um sistema formal, uma lógica é edificada a partir de uma linguagem, a qual contém alguns operadores, construída indutivamente. As linguagens formais possuem uma parte referente à sintaxe e outra referente à semântica. Deste modo, a lógica é uma linguagem que possui tanto uma sintaxe quanto uma semântica.

A sintaxe cuida da gramática da lógica e também da noção de demonstração ou prova. A gramática é responsável por determinar quais são as proposições com sentido da linguagem formal, isto é, quais são as fórmulas bem-formadas. É por via da gramática que somos capazes de dizer de um conjunto de símbolos se ele tem ou não significado em uma determinada linguagem. Depois de definido o conjunto de fórmulas, leva-se em conta a relação de conseqüência lógica. Em geral, quando pensamos em conseqüência estamos pensando em uma relação de conseqüência clássica, a qual segue os cânones propostos por A.Tarski , isto é, a relação deve ser reflexiva, monotônica e transitiva. A relação de conseqüência do ponto de vista sintático $\vdash$ é a noção de demonstração. Uma demonstração é uma seqüência de fórmulas da linguagem na qual

[22]Em *Filosofia da Lógica.*

[23]Em *Logical Forms.*

[24]No capítulo 1 mostramos como definir a relação de conseqüência lógica.

[25]É comum denominar uma lógica definida como um par como "lógica abstrata".

cada termo é ou um axioma, ou uma hipótese ou foi deduzida dos axiomas via aplicação de alguma regra de inferência.

A semântica de uma linguagem é dada a partir da noção de modelo. Quando pensamos em dar uma semântica para uma dada linguagem estamos pensando em quando podemos dizer de uma fórmula que ela é verdadeira, ou seja, especificar uma semântica é o mesmo que determinar as condições de verdade dos enunciados. Deste modo, após obtida a linguagem pode-se dizer quando as fórmulas são verdadeiras. Uma semântica é constituída por valorações, isto é, funções que levam fórmulas aos valores-lógicos. A partir das valorações somos capazes de definir uma noção semântica importante, a saber: validade. Uma inferência é válida se para todas as premissas verdadeiras for impossível obter uma conclusão falsa. Ou seja, uma inferência é válida quando é verdadeira para qualquer valoração. Para a noção de validade utiliza-se em geral o símbolo $\models$ o qual significa que sempre que todas as fórmulas do lado esquerdo da relação forem verdadeiras, segue-se que as fórmulas do lado direito também são verdadeiras. Quando uma dada fórmula A se segue de Γ dizemos que Γ é modelo de A. Nesse sentido, uma valoração é um modelo quando satisfaz todos os axiomas da teoria em questão. Atentemos ao fato de que é imprescindível para que seja definida corretamente a noção de validade que se tenha especificado um conceito mais básico, qual seja: o conceito de verdade. Sabe-se, porém, que existem várias teorias da verdade ao longo da história da filosofia. Com isso, qual seria a mais adequada para definir a noção de validade?[26] É comum que se faça uso da noção tarskiana de verdade. Em geral, a verdade é vista como uma propriedade de enunciados responsável por ligar as linguagens formais às suas interpretações .

No interior de uma dada linguagem, poderíamos ser capazes de encontrar um conjunto de axiomas os quais devem ser satisfeitos pelas valorações. E se conseguíssemos achar uma determinação entre a parte sintática e a parte semântica teríamos as provas de completude e corretude. As provas de completude nos garantem que todas as fórmulas verdadeiras, ou válidas, possuem demonstração. Já a corretude é capaz de assegurar que todas as fórmulas que podem ser demonstradas são válidas.

Deste modo, para os fins do presente texto, a lógica é vista como um sistema formal dotado de uma linguagem que possui uma sintaxe e uma semântica, além de existir uma determinação entre as duas partes.

O que é ontologia? A ontologia, diferentemente do que acontece com a lógica, pelo menos do ponto de vista do senso comum, já não tem tantos usos distintos. Contudo, do ponto de vista filosófico, a ontologia pode, inicialmente, ser vista como um

[26]Uma teoria da verdade precisa, no mínimo, ser capaz de responder duas questões, quais sejam: O que é a verdade? Qual o critério para determinar quando uma proposição é verdadeira?

estudo acerca do conceito de ser, isto é, como uma teoria do ser . Mas o que é o ser? Essa questão, quase banida dos discursos atuais, recebeu várias designações. Pode-se pensar a ontologia como uma teoria do real. Tal concepção implica aceitar uma categorização da realidade. Todavia, não é tão fácil obter uma resposta à questão. Uma maneira distinta de ver a ontologia é como o estudo da estrutura geral da realidade (mundo). Outros usos podem ser feitos: ontologia enquanto mundo (conjunto de objetos). Nesse sentido, determinar uma ontologia é o mesmo que determinar os critérios a partir dos quais é possível gerar um conjunto de objetos. Sabe-se também que sob o rótulo "ontologia" repousam vários estudos sobre existência, propriedades, fatos, etc.

Um conjunto de objetos é modelo para alguma sentença aberta desde que a leve até à verdade . Imagine a quase-proposição: "x é uma cidade do Brasil." Um conjunto de objetos particulares, por exemplo, de canetas, independente da escolha do objeto, qualquer um de nosso domínio que ocupasse a lacuna da quase-proposição a transformaria em uma proposição, mas falsa. Daí, o conjunto de canetas não é um modelo para a proposição. Um modelo é facilmente obtido com o domínio A tal que A = {Goiânia, Campinas}. A noção de modelo é, eminentemente, uma noção ontológica.

Neste texto, a ontologia é vista como uma estrutura que comporta um conjunto de objetos. Para falarmos como Wittgenstein: "Os objetos consituem a substância do mundo"[27] . Para os objetivos pretendidos, uma ontologia, ou teoria ontológica, é vista como uma teoria acerca daquilo que é a estrutura da realidade.

Após estabelecidos os significados de "lógica" e de "ontologia" estamos preparados para responder àquela questão acerca do caráter ontológico da lógica . Notemos apenas que as definições que apresentamos de lógica e de ontologia não são as únicas. Todavia, nosso interesse é supor que sejam realmente razoáveis tais definições e ver o que acontece a partir da aceitação dos pressupostos.

Podemos imaginar que a lógica seja o espelho do mundo. Para Wittgenstein, no *Tractatus*, proposição 6.13, a lógica não é uma teoria, mas uma imagem especular do mundo. Para Russell, existe uma complexidade objetiva no mundo, e a complexidade das proposições a espelha. No livro *Logical Forms* de Oswaldo Chateaubriand encontra-se uma tentativa de responder a seguinte questão: Qual é a relação entre um enunciado e a realidade? É comum que seja separada a linguagem, de um lado, e o mundo, de outro lado. Do lado da linguagem temos as proposições, as sentenças e os enunciados[28]. Do lado do mundo, temos os objetos, as propriedades, a relações e os fatos. O estudo da relação entre linguagem e mundo é essencialmente um estudo semântico-ontológico.

[27] *Tractatus Logico-Philosophicus*, proposição 2.021.

[28] As três expressões são aqui tomadas como sinônimas.

Cada objeto encontrado no mundo deveria ter uma contraparte na linguagem e vice-versa. Temos um espelhamento se para cada objeto do mundo existe uma e somente uma imagem na linguagem. Um espelhamento é uma semelhança formal entre duas coisas, com pequenas diferenças. A tese de que "Uma verdade é lógica se e somente se é uma verdade ontológica" enuncia a tese do espelhamento. Se toda verdade lógica é também uma verdade ontológica, então a partir do estudo das verdades lógicas podemos descobrir o funcionamento da estrutura do mundo via verdades ontológicas.

Mas o que desejamos exatamente dizer quando afirmamos que existe um espelhamento estrutural entre a lógica e a realidade? Ora, queremos afirmar que a estrutura apresentada pelas formas lógicas das proposições revela a estrutura da realidade, isto é, a arquitetura mais geral possível daquilo que é o caso. Afirmamos que a forma lógica das proposições é o espelho da estrutura do mundo. Ilustremos com um caso simples: consideremos o enunciado do princípio de não-contradição na linguagem-objeto, tal como formulado pela antiga tradição. Se a lógica é ontológica, então, pelo espelhamento entre forma lógica e realidade, podemos afirmar que uma vez que o que acontece no espaço lógico deve ser o espelho do que acontece na realidade, segue-se que na própria realidade não pode ser verdade que ocorra um fato A e, ao mesmo tempo, a sua negação. Suponha, por exemplo, que seja exeqüível a demonstração em nossa lógica de um esquema do tipo : "é possível A e é possível a negação de A". Pela tese do espelhamento estrutural podemos inferir que o mundo é contingente, isto é, tudo que é o caso pode vir a não ser o caso. Suponha, agora, que seja possível demonstrar que ou A ou não A. Deste modo, dada a tese acima, segue-se que se um dado fato A é o caso, não pode ser, ao mesmo tempo e no mesmo lugar, que seja o caso a negação de A. Com isso, neste exemplo, pode-se dizer que a nossa ontologia é bipartida. Argumentos similares podem ser facilmente obtidos.

Em *A Filosofia do Atomismo Lógico* de Bertrand Russell e no *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein é constante encontrar teses defendendo a existência de um espelhamento estrutural entre lógica e realidade. Para Russell, é possível inferir a partir da estrutura da linguagem a estrutura do mundo. E o mesmo pode ser dito a respeito de Wittgenstein, pois o autor defende que a proposição mostra a forma lógica da realidade. A proposição é capaz de mostrar como estão as coisas no mundo, desde que seja verdadeira. Além disso, é responsável por construir um mundo com a ajuda de uma armação lógica. A tese do espelhamento nos permite descobrir como é a estrutura de um conjunto de fatos a partir do comportamento das formas lógicas de nosso sistema formal. Além disso, também garante que a lógica é ontológica, isto é, que o estudo dos sistemas formais e suas propriedades é, de algum modo, um estudo acerca da estrutura mais geral do mundo.

É bem verdade que para facilitar o entendimento é razoável separar de um lado a linguagem e do outro lado o mundo constituído por fatos. Segundo Russell, um fato seria exatamente aquela ocorrência de um estado de coisas que faz uma proposição ser verdadeira ou falsa. A distinção é meramente teórica, mas bastante útil para visualizar as coisas. As proposições seriam espelhos do real[29].

Desde muito tempo a lógica se vê ligada ao conceito de verdade. E a verdade não é outra coisa senão aquilo que expressa o que é o caso. E se, como queria Frege, a lógica enuncia as leis da verdade, então, a lógica enuncia também as leis daquilo que é o caso, isto é, a realidade.[30]

Não parece ser possível decidir, de modo último, se a lógica realmente é uma teoria ontológica, ainda assim a lógica pode ser vista como uma teoria ontológica e, neste texto, estamos dispostos a compreendê-la desse modo. Mas dada a multiplicidade de lógicas da literatura, não seria razoável supor então uma pluralidade de estruturas da realidade? Sim. Nossa tarefa consiste em supor que a lógica é ontológica e observar o que se segue se, realmente, a lógica é uma teoria ontológica. E é exatamente esse pressuposto que está em nossa dissertação. Aceitamos que a lógica seja o espelho da forma mais geral possível da realidade.

A lógica não revela somente as propriedades atuais da estrutura do mundo, mas

[29]Chateaubriand afirma: "It seems to me, therefore, that the combination of propositional and predicate logic should be seen as an investigation of the general structure of reality, including possible and necessary features of it, an account of propositional structure, an account of truth relations between propositions, and an account of properties and operations that are specifically logical properties and operations. This is essentially what I mean by logic as an ontological theory." Ora, o autor infere a estrutura da realidade por via da investigação lógica. Um fato bastante curioso é o de que uma postura como a de Chateaubriand dá à lógica um caráter ontológico, pois acredita que as leis da lógica expressem características fundamentais da realidade. Por isso, a sua visão é essencialmente uma visão realista e metafísica. Para ele, a lógica é metafísica, antes que lingüística. Isto é, a lógica é uma teoria ontológica capaz de desvendar as características mais gerais e universais da realidade.

[30]Mas seria possível uma lógica sem ontologia? Ernest Nagel é o grande defensor da visão segundo a qual a lógica não é ontológica. Para o autor, a lógica é, por natureza, despida de ontologia. No texto *Logic without ontology* encontramos essa posição. Para Nagel, interpretações ontológicas dos princípios lógicos não funcionam, ou seja, Nagel nega a existência de conteúdo factual aos princípios lógicos. De acordo com Nagel, a forma clássica de naturalismo acredita que princípios tais como o de não-contradição são verdades necessárias, as quais descrevem a estrutura de todas as coisas atuais e possíveis. Richard Rorty, em *A filosofia e o espelho da natureza,* também defende que não podemos confiar na linguagem para obtermos uma imagem do mundo: "Putnam agora concorda com Goodman e Wittgenstein: pensar na linguagem como uma imagem do mundo...a linguagem como imagem não foi uma imagem útil para compreender como se usa a linguagem, mas foi útil para explicar o sucesso da inquirição exatamente como 'um mapa tem sucesso se corresponde de um modo apropriado a uma porção particular de terra."'

sim todas as propriedades possíveis e necessárias dessa estrutura, como argumenta Chateaubriand. Contudo, dada a multiplicidade de lógicas, é fácil supor que não temos somente uma estrutura, mas uma pluralidade de estruturas. Aceitamos que a lógica pode ser vista enquanto uma teoria ontológica. Todavia, uma vez que não temos somente uma lógica, mas infinitas lógicas, segue-se que temos infinitas estruturas e infinitos mundos.

Quando falamos de ontologia queremos dizer algo acerca da estrutura geral do mundo ou daquilo que existe. A existência de fatos ou objetos contraditórios é uma questão que desperta interesse freqüente entre aqueles que se ocupam da relação entre a paraconsistência e a ontologia. A tese segundo a qual existem contradições verdadeiras e presentes no mundo é chamada dialeteísmo e defendida por Priest e Routley[31]. E mais, podemos ter contradições consistentes. Uma outra questão estritamente relacionada com a ontologia, e que analisamos, é a de determinar se fatos atômicos[32] podem ou não ser consistentes ou inconsistentes.

Epistemologia

A lógica formal está relacionada também com a epistemologia[33]. Quanto às relações entre epistemologia e a paraconsistência pode-se citar o paradoxo da cognoscibilidade, o qual se manifesta em qualquer lógica epistêmica modal que tenha por base a lógica clássica. Tal paradoxo nos leva até o colapso do conhecimento, pois temos algo do tipo: "Uma dada proposição A é verdadeira se e somente se A é conhecida". Para o paradoxo da cognoscibilidade, mostramos que é possível apresentar uma lógica modal com base paraconsistente na qual o colapso do conhecimento seja evitado. Uma outra questão que desejamos elucidar com a ajuda do arsenal paraconsistente é questão de saber se é ou não possível conhecer consistências.

Ética

A lógica pode ajudar, além da Ontologia e da Epistemologia, também uma outra área da filosofia: a Ética. Por exemplo, a lógica deôntica é capaz de formalizar conceitos como o de "obrigatoriedade", "ilicitude", dentre outros. Somente com o intento de dar um exemplo, podemos citar uma relação entre a paraconsistência e o problema da fundamentação da ética. Os filósofos já há muito tempo tentam contribuir com a seguinte questão: é possível dar uma fundamentação tal dos juízos morais que justifique

[31]Ver *The Philosophical Significance and Inevitability of Paraconsistency.*

[32]No sentido de Russell em *A Filosofia do Atomismo Lógico* e Wittgenstein no *Tractatus.*

[33]No capítulo 2, mostramos outras relações entre lógica e epistemologia.

a obrigatoriedade de uma determinada ação?[34] Do ponto de vista jurídico, é fácil perceber que o fundamento da obrigatoriedade reside na força da lei. Já na visão religiosa, o fundamento da ação se reduz a Deus. As duas visões acima apresentam uma fundamentação autoritária da ação. Ambas são fundadas em alguma autoridade. Em filosofia, não se deseja dar fundamentações arbitrárias. Mas como então exibir uma fundamentação na ética? A resposta não parece bastante animadora. Não é claro que seja possível dar uma fundamentação da ética, pois é muito duvidoso que alguém seja capaz de construir um enunciado tal que ele justifique o modo de agir de qualquer indivíduo, em qualquer ponto temporal e lugar. O imperativo categórico de Kant[35] se apresenta como uma tentativa de dar tal fundamentação. Mas justificar a obrigatoriedade de uma ação de modo último não é realmente tarefa muito fácil, por motivos tais como a busca pelo fundamento do fundamento do fundamento...

Assim, é comum que os filósofos rejeitem os projetos de fundamentação da ética adotando, então, a postura segundo a qual o que resta é somente descrever a estrutura da justificação moral. Assim, só temos que apresentar descrições e jamais argumentos normativos. Aceitemos, portanto, que não é possível fundamentar a ética, mas somente descrever como seria possível dar justificações para as obrigações morais. Parece lugar-comum que os filósofos afirmariam que quaquer fundamentação da ética, se fosse possível, ou justificação das ações morais não poderia ser contraditória, pois se assim fosse os agentes não seriam capazes de agir ou agiriam de qualquer modo, provocando, consequentemente, o colapso do sistema moral. Apresentariam como fundamento para esse argumento o fato de que em lógica clássica se temos uma contradição, então qualquer conclusão como demonstrável.

Com a ajuda da paraconsistência é possível mostrar que a fundamentação na ética (se fosse possível), ou justificação moral, pode ser contraditória sem que isso cause o colapso do sistema moral. Para tanto, basta argumentar que uma sutil alteração em nosso sistema formal de modo que não seja possível, a partir de contradições, derivar qualquer coisa nos esclarece o fato de que a fundamentação pode ser contraditória. Se substituíssemos a lógica clássica pela lógica paraconsistente, então a nossa fundamentação seria capaz de suportar contextos contraditórios, estando, assim, mais apta a lidar com questões éticas, as quais são guiadas principalmente pelo grande número de contradições.

[34]Para um estudo acerca de questões atuais em ética recomenda-se a leitura do livro *Lições sobre Ética*, de E. Tugendhat.

[35]Encontra-se uma das formulações do imperativo na *Fundamentação da Metafísica dos Costumes*.

Capítulo 1

Lógicas da inconsistência formal

> "De um modo impreciso, poderíamos afirmar que a razão humana parece atingir o ápice de sua potência quanto mais se aproxima do perigo da trivialização."
>
> Newton da Costa , *Sistemas Formais Inconsistentes*

As lógicas paraconsistentes são responsáveis pela investigação de teorias contraditórias, todavia não-triviais. De acordo com a noção usual de paraconsistência, são usadas para explorar teorias inconsistentes e que, contudo, não são capazes de deduzir qualquer proposição a partir de contradições. Conforme mostramos, durante longo período, a lógica foi vista como uma ciência formal estabelecida em certos princípios fundamentais do raciocínio, tais como o princípio do terceiro-excluído e o princípio de não-contradição. Todavia, tais princípios não são cruciais para a natureza da lógica, ou seja, podem existir sistemas formais que merecem cidadania lógica e que não compartilham a mesma concepção tradicional.

As lógicas paraconsistentes foram apresentadas pelo polonês Stanislaw Jaskowski e pelo brasileiro Newton da Costa. Inicialmente, tais lógicas deveriam servir de fulcro para sistemas capazes de possuir contradições, sem que estas fossem capazes de trivializar a lógica, isto é, de duas fórmulas contraditórias não deveria se seguir uma conclusão qualquer. Além disso, não deveria ser válido o tão famoso, e alvo de várias disputas, princípio de não-contradição, o qual era enunciado por Newton da Costa como: $\sim (A \wedge \sim A)$.

Newton da Costa introduziu a hierarquia de lógicas paraconsistentes: a família $C_n, 1 \leq n \leq \omega$. A partir de então, iniciava-se o estudo da primeira "lógica" paraconsistente existente: o sistema C_1. Para esta lógica, foi dada uma semântica, denominada semântica de valorações. Além de ser capaz de demonstrar a correção e completude de C_1 e de todas as outras lógicas da mesma família, a semântica de valorações era ainda capaz de apresentar um procedimento de decisão para cada um dos cálculos da hierarquia. Mesmo sendo capaz de realizar já muitas tarefas, a semântica acima não era intuitiva. Diante de tal fato, fez-se urgente o nascimento de outros tipos de semântica. Walter Carnielli propôs as chamadas semânticas de traduções possíveis, as quais são fundadas em lógicas trivalentes, para todos os cálculos da hierarquia C_n. João Marcos auxiliou no esclarecimento de tal semântica em sua dissertação de mestrado *Semânticas de Traduções Possíveis* . O ganho teórico obtido é que, além de mais intuitiva, as semânticas de traduções possíveis possibilitam obter os mesmos resultados que as semânticas de valorações.

Em seguida, Walter Carnielli uniu seus esforços ao trabalho do seu discípulo João Marcos e juntos instauraram as denominadas lógicas da inconsistência formal (**LFIs**) e, em particular, apresentaram uma definição conveniente para o estudo dos C-sistemas. Tais lógicas são capazes de introduzir na linguagem-objeto operadores de consistência e inconsistência de tal modo que seja possível realizar uma distinção fundamental entre inconsistência e contradição, bem como evitar a dualidade entre os operadores, em alguns de seus sistemas. As lógicas paraconsistentes são vistas, a partir daqui, como lógicas não-explosivas, que podem ou não ter em a velha formulação do princípio de não-contradição. Nos dias de hoje, tenta-se, além de dar às **LFIs** uma semântica de traduções possíveis, elucidar alguns paradoxos e problemas em certos ramos da filosofia tais como a epistemologia (paradoxo da cognoscibilidade/conhecimento de consistências).

1.1 Lógicas e relações de conseqüência

Aqui fazemos uma coleção dos principais ganhos teóricos que se encontram na nova abordagem das lógicas paraconsistentes feita por Walter Carnielli e João Marcos no texto *A Taxonomy of C-systems* e tentamos tirar desse fato o maior número possível de conclusões filosóficas.

É lugar-comum entre os lógicos que a noção crucial capaz de determinar a essência da lógica é a de *derivação* ou *conseqüência lógica.* Neste texto, assim como no *Taxonomy,* é usada uma relação de conseqüência do seguinte modo:

Definição 1.1.1. *Dado um conjunto For de fórmulas, $\Vdash \subseteq \wp(For) \times For$ é uma relação de conseqüência lógica sobre For se, para quaisquer fórmulas A e B, e subconjuntos Γ e Δ de For, as seguintes condições são satisfeitas:*

$(RC1)$ $A \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \Vdash A$

$(RC2)$ $(\Delta \Vdash A$ e $\Delta \subseteq \Gamma) \Longrightarrow \Gamma \Vdash A$
$(RC3)$ $(\Delta \Vdash A$ e $\Gamma, A \Vdash B) \Longrightarrow \Delta, \Gamma \Vdash B$

Deste modo, uma lógica **L** é compreendida como uma estrutura da forma $< For, \Vdash >$, isto é, como algo que contém um conjunto de fórmulas e uma relação de conseqüência definida sobre o conjunto. Temos duas maneiras de expressar a relação de conseqüência lógica. Podemos dizer que se trata de uma relação sintática $\vdash$ ou uma relação semântica $\models$. A primeira nos diz que se $\Gamma \vdash A$ então existe uma demonstração de A a partir de Γ. Já a segunda se $\Gamma \models A$ então todas as vezes que as fórmulas que estão em Γ forem verdadeiras é porque, necessariamente, A vai ser verdadeira. Mas e a relação $\Vdash$? Usamos $\Vdash$ para expressar, de modo abstrato, tanto as relações sintáticas quanto semânticas.

Em *A Survey of General Abstract Logic,* J.Y-Béziau apresenta uma tabela de estruturas lógicas, cada uma diferindo da outra em virtude de peculiaridades inerentes ou à relação sobre o conjunto ou às restrições na relação de consequência lógica. Nesse sentido, temos:

Estrutura de Tarski

$< S, Cn >$

S é qualquer conjunto;

$Cn : \wp(S) \longrightarrow \wp(S)$

Cn obedece os três axiomas para a conseqüência lógica (reflexividade, monotonicidade e transitividade).

Estrutura de Scott

$< S, \Vdash >$

S é qualquer conjunto;

$\Vdash$ é uma relação definida sobre $\wp(S) \times \wp(S)$

$\Vdash$ obedece os três axiomas tarskianos

Estrutura de Béziau

$< S, \vdash >$

S é qualquer conjunto;

$\vdash$ é uma relação definida sobre $\wp(S)\times S$

Sem axiomas

Poderíamos dar exemplos de vários outros tipos de estruturas. Contudo, para os fins do presente texto, basta que consideremos a estrutura simples como $< For, \Vdash >$ de modo que $\Vdash \subseteq \wp(For) \times For$ seja capaz de satisfazer $(RC1) - (RC3)$. Não trabalhamos com múltiplas conclusões, mas somente com a relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas. Para ter mais generalidade, é recomendável optar por uma relação entre conjuntos de fórmulas e conjuntos de fórmulas, isto é, por algo do tipo $\Vdash \subseteq \wp(For) \times \wp(For)$

Vejamos algumas definições que se encontram no *Taxonomy*:

Definição 1.1.2. *Qualquer conjunto* $\Gamma \subseteq For$ *é uma* ***teoria*** *de* L, *inclusive* $\Gamma = \emptyset$. *Um teoria* Γ *é* ***própria*** *se* $\Gamma \neq For$. *Uma teoria* Γ *é* ***fechada*** *se ela contém todas as suas conseqüências:* $\Gamma \Vdash A \Longrightarrow A \in \Gamma$.

Uma teoria Γ é fechada desde que seja válida a recíproca de $(RC1)$. Na relação de conseqüência lógica definida acima temos a reflexividade, a monotonicidade e a transitividade. Todavia, não é o caso que todas as lógicas respeitam aquelas condições. Por exemplo, se não for válido $(RC2)$, então trata-se de uma lógica não-monotônica. Para o estudo que aqui se apresenta, as propriedades $(RC1)$ – $(RC3)$ são assumidas como válidas. São conseqüências imediatas de $(RC2)$ e $(RC3)$:

Proposição 1.1.3. *As seguintes propriedades valem para quaisquer lógicas, quaisquer teorias* Γ *e* Δ, *e para quaisquer fórmulas* A *e* B :

(i) $\Gamma\ ,\Delta \nVdash A \Longrightarrow \Gamma \nVdash A$
(ii)($\Gamma \Vdash A$ e $A \Vdash B$) $\Longrightarrow \Gamma \Vdash B$
(iii)($\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma, A \Vdash B$) $\Longrightarrow \Gamma \Vdash B$.

Demonstração: (i) Por contraposição, basta aplicar (RC2).
(ii) e (iii) são casos particulares de (RC3) □

Como dito, uma lógica **L** é um par $< For, \Vdash >$. Assim, dadas duas lógicas $\mathbf{L1} =< For_1, \Vdash_1 >$ e $\mathbf{L2} =< For_2, \Vdash_2 >$ pode-se estabelecer algumas relações entre elas de modo que temos:

Definição 1.1.4. **L1** *é uma* ***extensão lingüística*** *de* **L2** *se* For_2 *é um subconjunto de* For_1. *E* **L1** *é uma* ***extensão dedutiva*** *de* **L2** *se* $\Vdash_2$*é um subconjunto de* $\Vdash_1$. *E se* **L1** *é uma extensão tanto lingüística quanto dedutiva de* **L2**, *e se a restrição da relação de conseqüência de* **L1** *ao conjunto* For_2 *a fizer ser equivalente à relação* $\Vdash_2$, *então* **L1** *é uma* ***extensão conservativa*** *de* **L2**. *Deste modo,* **L1** *é uma extensão de* **L2** *ou que* **L2** *é um fragmento de* **L1**.

Dizer que a restrição da relação de conseqüência lógica de **L1** ao conjunto For_2 a faz ser equivalente à relação $\Vdash_2$ é o mesmo que afirmar, em símbolos, $For_2 \subset For_1$ e para quaisquer $\Gamma \cup \{A\} \subseteq For_2$ temos $\Gamma \Vdash_1 A \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_2 A$.

1.2 Contradição, explosão e trivialização

Durante muito tempo as contradições foram vistas como fantasmas do pensamento. Para qualquer teoria, se ela apresentasse uma contradição, então seria capaz de demonstrar todas as proposições. Quando Russell descobriu o paradoxo que levou Frege a abandonar a lógica e se dedicar somente à filosofia, fundou sua argumentação na existência de um conjunto que pertence a si mesmo se e somente se não pertence a si mesmo. Uma contradição. Por isso, argumentava que a teoria de Frege era contraditória. Vários outros argumentos da história da filosofia e da lógica são fundados na presença de uma contradição em algum conjunto de enunciados. Mas o que é uma contradição? Quando podemos dizer de uma teoria que ela é contraditória?

Ora, uma contradição pode ser vista como uma fórmula do tipo $A\wedge \sim A$, se temos, ao menos, uma linguagem munida com símbolos de negação e de conjunção. Já as teorias contraditórias são capazes de derivar tanto uma fórmula quanto a sua negação.

W. Carnielli e J. Marcos mostram que as teorias possuem, assim como as lógicas, algumas características, tais como as mencionadas nas definições abaixo:

Definição 1.2.1. *Seja Γ uma teoria de* $\boldsymbol{L}$. *Γ é* ***contraditória*** *, se ela é tal que, para alguma fórmula A, tem-se $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \neg A$.*

Se uma teoria Γ demonstra tanto A quanto $\neg A$, então dizemos que a teoria Γ é contraditória em relação à formula A ou que Γ é A-contraditória.

Proposição 1.2.2. *Para uma dada teoria* Γ :

(i) Se $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$, então Γ é A-contraditória.

(ii) Se Γ é A-contraditória e fechada, então $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$.

Demonstração: (i) Pela definição de $\subseteq$ temos $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$ sse $\forall x(x \in \{A, \neg A\}$ implica $x \in \Gamma)$. Pelo axioma do par da teoria axiomática dos conjuntos, sabemos que $x \in \{A, \neg A\}$ sse $x = A$ ou $x = \neg A$. Com isso, temos duas possibilidades: Se $(x = A)$, então $A \in \{A, \neg A\}$. Daí, $A \in \Gamma$. Se $(x = \neg A)$, então $\neg A \in \{A, \neg A\}$. Resulta que $\neg A \in \Gamma$. Deste modo, seja $x = A$ ou $x = \neg A$, temos, pela reflexividade que $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \neg A$. Conseqüentemente, Γ é contraditória para a fórmula A. (ii) Se Γ é A-contraditória e fechada, então $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \neg A$, bem como $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$. Portanto, se $x \in \{A, \neg A\}$ então $x = A$ ou $x = \neg A$. Em ambos casos $x \in \Gamma$. Daí, $\{A, \neg A\} \subseteq \Gamma$. $\square$

Vimos acima que uma teoria contraditória é aquela capaz de derivar uma certa fórmula e também a sua negação. Mas o que significa dizer de uma teoria que ela é trivial? As teorias triviais, ou super-completas, são aquelas capazes de derivar todas as fórmulas.

Definição 1.2.3. *Um teoria Γ é* ***trivial*** *se para toda fórmula B, $\Gamma \Vdash B$.*

Se uma teoria é trivial, então ela não faz diferença entre as fórmulas da linguagem, de tal modo que qualquer uma delas pode ser inferida da teoria[1]. As teorias triviais não são, em geral, aceitas, uma vez que permitem derivar todas as fórmulas como teoremas. Tal fato nos faz lembrar o enunciado de Newton da Costa conhecido como princípio de tolerância em matemática segundo o qual "toda teoria é admissível, desde que não seja trivial"[2]. Nota-se que a teoria *For* é trivial, uma vez que todas as fórmulas são conseqüências de si mesmas.

Proposição 1.2.4. *Se uma dada teoria é trivial, então é contraditória.*
Demonstração: *Por hipótese, $\Gamma \Vdash B$, para qualquer que seja o B, segue-se $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \neg A$, para um $B = A$ e outro igual a $\neg A$.* □

Definição 1.2.5. *Uma teoria Γ é* ***explosiva*** *se para toda fórmula A e para toda fórmula B, $\Gamma, A, \neg A \Vdash B$*

Deste modo, uma teoria é dita explosiva se ela é trivializada quando entra em contato com um fórmulas contraditórias. W. Carnielli e J. Marcos concluem, dadas as definições de teorias contraditórias, triviais e explosivas que é possível relacionar as propriedades acima. Por exemplo:

Proposição 1.2.6. *(i) Se uma teoria Γ é trivial, então ela é explosiva; (ii) Se uma teoria Γ é contraditória e explosiva, então ela é trivial.*

Demonstração: (i) Uma vez que a teoria Γ é trivial, ou seja, $\Gamma \Vdash B$, para um B arbitrário, segue-se, dado (RC2) que $\Gamma \cup \{A, \neg A\}$ também demonstra B. Logo, a teoria Γ é explosiva.

Para (ii), basta usar um caso particular da transitividade. □

[1] Uma lógica pode ser inconsistente sem ser trivial.
[2] Em *O Conhecimento Científico.*

1.3 Princípios de não-contradição, não-trivialidade e explosão

W. Carnielli e J. Marcos observam que em se tratando de uma lógica, o que está em jogo é o comportamento inferencial de um conjunto de teorias. Foi definido quando uma teoria é contraditória, trivial e explosiva. Agora, faz-se útil estender essas definições à noção de lógica. Assim:

Definição 1.3.1. *Uma lógica é* ***contraditória*** *se todas as suas teorias são contraditórias; uma lógica é* ***trivial****, ou* ***explosiva****, se todas suas teorias são triviais, ou explosivas.*

Podemos demonstrar que uma lógica trivial é uma lógica tarskiana, isto é, sua relação de conseqüência lógica satisfaz todos os requisitos determinados no início deste capítulo. Além de tarskiana, qualquer função de valoração que interprete todas as fórmulas como falsas, ligada à lógica trivial, é modelo para a mesma.

Proposição 1.3.2. *Uma lógica* $\mathbf{L}$ *é contraditória / trivial / explosiva se, e somente se sua teoria vazia é contraditória/ trivial / explosiva.*

Demonstração: Vejamos o caso em que $\mathbf{L}$ é trivial. Se uma lógica é trivial, então para toda teoria Γ e para toda fórmula B ($\Gamma \Vdash B$). Deste modo, vale para $\Gamma = \varnothing$. Assim, sua teoria vazia é trivial. Assumindo que sua teoria vazia é trivial e como $\varnothing \subseteq \Gamma$, pela monotonicidade segue que a lógica será trivial. Com raciocínio análogo se demonstram os outros resultados. □

A partir de então, W. Carnielli e J. Marcos apresentam algumas definições formais dos denominados princípios lógicos. O leitor vai notar que existe uma certa diferença entre os princípios abaixo e aqueles utilizados pela tradição. Esta em geral enunciava os princípios lógicos na linguagem-objeto.

Definição 1.3.3. *(Princípio de não-contradição para lógicas - PNC) Uma lógica é* ***não-contraditória*** *se existe uma teoria* Γ *tal que para toda fórmula* A, $\Gamma \nVdash A$ *ou* $\Gamma \nVdash \neg A$.

Definição 1.3.4. *(Princípio de não-trivialidade para lógica - PNT) Uma lógica é* ***não-trivial*** *se existe uma teoria* Γ *e existe uma fórmula* B *tal que* $\Gamma \nVdash B$*).*

Definição 1.3.5. *(Princípio de explosão para lógicas - PE) Uma lógica é* ***explosiva*** *se para toda teoria* Γ*, para todas fórmulas* A *e* B, $\Gamma, A, \neg A \Vdash B$

Intuitivamente, podemos compreender os princípios acima como afirmando algo acerca de como deve ser o comportamento de alguma lógica arbitrária **L**. Por isso, não é estranho afirmar que tais princípios são máximas morais cujos agentes são lógicas. Neste sentido, ao fazer lógica estamos, de algum modo, fazendo também ética. Assim, (PNC) diz que **L** deve ser não-contraditória, já (PNT) afirma que a lógica **L** deve ser não-trivial. Todavia, (PE) afirma que **L** deve ser explosiva. Notamos que os princípios acima são definidos para lógicas, mas é o caso que a tradição, em geral, caracterizava os princípios via fórmulas da linguagem-objeto. Assim, por exemplo, o princípio de não-contradição era a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$. O princípio de não-trivialidade não era formulado na linguagem-objeto, mas imaginamos que poderia ser enunciado, para algum sistema X, como $\nvdash_X A$, ou seja, em X existe alguma fórmula que não é teorema. Já o princípio de explosão pode ser visto como $(A \to (\neg A \to B))$.

Tratando os princípios na versão aplicada às lógicas, de fato, temos:

Proposição 1.3.6. *(i) Uma lógica explosiva é contraditória se, e somente se, ela é trivial; (ii) Uma lógica trivial é tanto contraditória quanto explosiva; (iii) Uma lógica explosiva é trivial se, e somente se, é contraditória.*

Demonstração: Consequência imediata da proposição e das definições acima. □

O caminho da paraconsistência, pelo menos do ponto de vista das LFIs, consiste em buscar lógicas não-explosivas, mas gentilmente explosivas, que possuam ou não a velha formulação do princípio de não-contradição. Lógicas tais que suas teorias contraditórias não levem necessariamente à trivialização.

Se tivéssemos como escopo analisar a lógica clássica a partir dos princípios acima, poderíamos dizer que ela os satisfaz integralmente.

1.4 Definições de paraconsistência

Como estamos interessados em lógicas paraconsistentes, nada mais justo que dar uma definição acerca daquilo que significa ser um sistema paraconsistente.

Podemos definir as lógicas paraconsistentes de várias maneiras. Por exemplo:

Definição 1.4.1. *(PL0) Uma lógica é paraconsistente se e somente se ela contém uma negação paraconsistente.*

A definição acima não fica muito clara se não explicarmos o que estamos entendendo por negação paraconsistente. Segundo J-Y.Béziau, uma negação $\neg$ é paraconsistente se e somente existe uma teoria Γ e fórmulas A e B tal que:

$\Gamma, A, \neg A \nVdash B$

A definição acima é, claramente, fundada na rejeição do princípio *ex-contradictione sequitur quodlibet,* isto é, o princípio de explosão ou ainda Pseudo-Escoto. Deste modo,

uma negação paraconsistente seria uma negação enfraquecida, pois uma fórmula e a sua negação paraconsistente não são capazes de derivar todas as proposições, e distinta da negação clássica, uma vez que não tem todas as propriedades que uma negação deveria ter para ser considerada uma negação clássica.

Os criadores das lógicas paraconsistentes – Jaskowski e Newton da Costa – também tinham definições:

Definição 1.4.2. *(PL1 ') Uma lógica é paraconsistente se e somente se é inconsistente e não-trivial.*

A definição acima é a mesma que aparece logo em (PL1). Contudo, tanto para da Costa quanto para Jaskowski, contradição e inconsistência eram conceitos equivalentes.

Sabe-se que a motivação inicial da lógica paraconsistente era a construção de sistemas formais capazes de acomodar teorias contraditórias não-triviais. Desta maneira, pode-se definir uma lógica paraconsistente como:

Definição 1.4.3. *(PL1) Uma lógica L é paraconsistente se existe uma teoria Γ tal que para alguma fórmula A e alguma fórmula B,* $\Gamma \Vdash A$ *e* $\Gamma \Vdash \neg A$ *e* $\Gamma \nVdash B$

Todavia, pode-se dar uma definição alternativa:

Definição 1.4.4. *(PL2) Uma lógica L é paraconsistente se existe uma teoria Γ tal que para alguma fórmula A e alguma fórmula B,* $(\Gamma, A, \neg A \nVdash B)$

Imediatamente se constata que (PL0) e (PL2), bem como (PL1 ') e (PL1) são duas maneiras distintas de dizer a mesma coisa. E mais, (PL1) e (PL2) também são definições equivalentes.

O significado de (PL1) é que uma lógica paraconsistente deve ter pelo menos uma teoria que seja contraditória e não-trivial, ao passo que (PL2) afirma que a lógica deve possuir uma teoria que não seja explosiva.

Modernamente, pode-se interpretar (PL1) como a definição canônica de paraconsistência já existente na obra de Newton da Costa. Já (PL2) se aproxima mais de Jaskowski. Na literatura, outros autores tentaram dar definições de paraconsistência, como Igor Urbas e Jean-Yves Béziau[3].

[3]Veja o texto *What is a Paraconsistent Logic?* e *The Future of Paraconsistent Logic* de Jean-Yves Béziau. Para mais definições pode-se recorrer ao livro *Logiques Classiques et non-Classiques* de Newton da Costa.

Em *Sistemas Formais Inconsistentes* , N. da Costa afirma que nas suas lógica C_n não deveria ser válido o princípio de não-contradição enunciado como: $\neg(A \wedge \neg A)$. Tal fato gerou a seguinte definição:

Definição 1.4.5. *Uma lógica L é paraconsistente se e somente se ela derroga o princípio de não-contradição.*

Sabe-se, porém, que a definição acima não é muito boa, uma vez que é possível a existência de lógicas paraconsistentes que aceitam como teorema o princípio de não-contradição na linguagem-objeto. Assumir a definição seria, portanto, reduzir em demasia o universo das lógicas paraconsistentes.

Segundo J-Y.Béziau, podemos ainda formular a definição de paraconsistência fundada na rejeição da explosão em ambiente semântico do seguinte modo:

Definição 1.4.6. *Uma lógica L é paraconsistente se existe um modelo e uma fórmula A tais que A e $\neg A$ são ambas verdadeiras nesse modelo.*

Observemos que se definíssemos o princípio de não-contradição como

Uma proposição e sua negação não podem ser ambas verdadeiras em um dado modelo.

Então seríamos levados a crer na definição de paraconsistência como lógica que derroga o princípio de não-contradição.

Neste texto, compreendemos as lógicas paraconsistentes como lógicas não-explosivas, mas gentilmente explosivas. Nem todas lógicas paraconsistentes precisam ser gentilmente explosivas.

1.5 Finitamente trivializável e partículas minimais

Precisamos de mais definições:

Definição 1.5.1. *Uma lógica* ***L*** *é* ***finitamente trivializável*** *quando existir pelo menos uma fórmula que a trivializa. E* ***L*** *é* ***infinitamente trivializável*** *se não existe nenhuma fórmula que a ela adicionada como axioma a torne trivial.*

Proposição 1.5.2. *Se uma lógica é explosiva, então ela é finitamente trivializável.*

Demonstração: Se para toda teoria Γ e para todas fórmulas A e B $(\Gamma, A \neg A \Vdash B)$, então a lógica é explosiva. Deste modo, para qualquer A, a teoria finita $\{A, \neg A\}$ é trivial. Daí, se a lógica é explosiva então tem pelo menos uma fórmula que a trivializa.

□

Todavia, deve-se salientar que nem todas lógicas paraconsistentes são finitamente trivializáveis. Por exemplo, a lógica não-explosiva C_ω. Nestas, não é possível obter conjuntos de fórmulas que façam a lógica se tornar trivial. Newton da Costa dizia de uma lógica que ela é infinitamente trivializável exatamente da maneira que foi definida acima. Já Walter Carnielli e João Marcos definem o finitamente trivializável a partir da existência de teorias triviais finitas.

Definição 1.5.3. *Uma lógica **L** tem uma **partícula minimal** se existe alguma fórmula C em **L** que pode trivializar a lógica. Isto é: existe uma fórmula C e para toda teoria* Γ *e para toda fórmula B é o caso que* $\Gamma, C \Vdash B$.

Ora, no caso clássico, a partícula acima nada mais é que a constante de falsidade, frequentemente denotada por $\perp$. Já para as lógicas paraconsistentes, em virtude de fato

de serem não-explosivas, não é verdade que a partícula minimal seja a mesma coisa que uma contradição. Na lógica clássica, as partículas minimais, em geral, são fórmulas falsas em qualquer valoração possível. Com o uso da definição de N. da Costa de finitamente trivializável, pode-se argumentar que toda lógica finitamente trivializável tem partícula minimal.

Se uma dada lógica **L** tem partícula minimal, W. Carnielli e J. Marcos afirmam, então, que ela satisfaz o princípio *ex falso,* de acordo com o qual **L** deve ter uma partícula minimal.

Por outro lado, temos o seguinte:

Definição 1.5.4. *Uma lógica **L** tem uma **partícula maximal** se existe alguma fórmula C em **L** que é conseqüência de todas suas teorias, ou seja, existe uma fórmula C e para toda teoria* Γ *segue-se que* $\Gamma \Vdash C$.

Como usual, tal partícula é denotada por $\top$. É fácil ver, dadas a transitividade e a monotonicidade da relação, que ($\Gamma, \top \Vdash B$) se e somente se ($\Gamma \Vdash B$). Isso nos mostra que a constante de verdade é inócua: não importa se aparece ou não, aquilo que é derivado continua a ser derivado.

Seja agora uma lógica **L**. Seja $\sigma : For \longrightarrow For$ uma função tal que $\sigma(A)$ denota uma fórmula que depende apenas de A. Isto é, $\sigma(A)$ é uma fórmula construída usando o próprio A e algum símbolo puramente lógico. Assim, dada uma seqüência de fórmulas $A_1, A_2, ..., A_n$, a notação $\sigma(A_1, A_2, ..., A_n)$ denota um conjunto de fórmulas, o qual depende somente de cada uma das fórmulas da seqüência. O mesmo vale para o esquema $\Gamma(A)$, só que em relação a um esquema de teorias. W. Carnielli e J. Marcos definem a negação forte como:

Definição 1.5.5. *Uma lógica* $\boldsymbol{L}$ *tem uma* ***negação forte*** *se para cada fórmula* A *existe um esquema* $\sigma(A)$ *que não denota uma partícula minimal e que não pode ser adicionado a nenhuma teoria que infere* A *sem causar trivialização. Isto é: existe uma fórmula* A *tal que* $\sigma(A)$ *não é uma partícula minimal, e para todo* A, Γ *e* B $[\Gamma, A, \sigma(A) \Vdash B)$

A negação forte de uma fórmula A é denotada como $\sim A$. Agora, W. Carnielli e J. Marcos estão prontos para definir o fato de Γ ser contraditória em relação à negação forte, ou seja, existe uma fórmula A ($\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \sim A$). Nesse sentido, diz-se de Γ que é contraditória em relação à negação forte $\sim$.

Ora, se uma dada lógica tem negação forte, então ela satisfaz aquilo que os autores chamam de princípio de explosão suplementar.

Inúmeras conseqüências surgem da definição acima:

Proposição 1.5.6. *(i) Se uma lógica tem ou partícula minimal ou negação forte, então ela é finitamente trivializável. (ii) Se uma lógica não-trivial tem uma partícula minimal, então ela tem negação forte. (iii) Se uma lógica é explosiva e não-trivial, então ela é explosiva suplementar.*

Demonstração: (i) Se a lógica tem partícula minimal, então o conjunto que contém tal partícula é uma teoria trivial finita. Se a lógica tem negação forte, então podemos dizer que o conjunto $\{A, \sigma(A)\}$ é uma teoria trivial finita.

(ii) Se a lógica é não-trivial é porque existe uma fórmula B tal que B não se segue de alguma teoria. E se tem partícula minimal é porque existe uma fórmula que se acrescentada à teoria causa sua trivialização. Uma teoria com essas propriedades tem negação forte. Vejamos: defina a negação forte $\sim A$ de uma fórmula A de tal maneira que, para quaisquer teorias Γ e Δ, temos: a) $(\Gamma, \Delta \Vdash \sim A)$ sse $(\Gamma, \Delta, A \Vdash \bot)$; b) $(\Gamma, \Delta, \sim A \Vdash \bot)$ sse $(\Gamma, \Delta \Vdash A)$. Por (RC1), temos $(\Gamma, \sim A \Vdash \sim A)$ e daí, por (a), infere-se $(\Gamma, \sim A, A \Vdash \bot)$, para um $\Delta = \{\sim A\}$. Mas sabemos que $\bot$ é uma partícula minimal e, por isso, para todo B, $\bot \Vdash B$. Deste modo, pelo caso particular da transitividade, temos que $(\Gamma, \sim A, A \Vdash B)$, para todo B. É claro que a negação forte acima definida não é uma partícula minimal, pois temos, como casos particulares de B, que $\sim A \Vdash \bot$ sse $\Vdash A$. Se $\sim A = \bot$, então $\sim A \Vdash \bot$ e, assim, A seria uma tese da lógica. Mas isso não pode acontecer uma vez que a teoria é não-trivial.

(iii) Qualquer lógica não-trivial e explosiva tem, por construção, uma negação forte. □

Proposição 1.5.7. *Seja uma lógica* $\boldsymbol{L}$ *com negação forte* $\sim$. *(i) Toda teoria contraditória em relação à negação forte é explosiva e trivial. (ii) Uma lógica é contraditória em relação à negação forte se, e somente se, ela é trivial.*

Demonstração: (i) Seja Γ uma teoria contraditória com relação à negação forte, isto é, existe um A tal que ($\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash \sim A$). Pela definição de negação forte, temos $\Gamma, A, \sim A \Vdash B$. Daí, por (RC3), $\Gamma \Vdash B$, para um B arbitrário.

(ii) Se **L** é contraditória em relação à negação forte, segue-se que todo Γ é trivial. Logo, **L** é trivial. Para a volta, basta aplicar a definição de trivialidade. □

Definição 1.5.8. *Uma teoria Γ é gentilmente explosiva se: a) existe uma fórmula A tal que $\Delta(A) \cup \{A\}$ não é trivial, $\Delta(A) \cup \{\neg A\}$ não é trivial, e b) para quaisquer fórmulas A eB temos que* $[\Gamma, \Delta(A), A, \neg A \Vdash B]$

A definição acima apresentada por W. Carnielli e J. Marcos pode ser generalizada para lógicas, desde que todas as teorias de uma dada lógica sejam gentilmente explosivas, podemos então dizer que a lógica é gentilmente explosiva e, portanto, satisfaz o princípio de explosão gentil.

Neste ponto, pode-se usar a definição de explosão gentil para mostrar como $\Delta(A)$ pode expressar a consistência de A.

Temos:

Definição 1.5.9. *Uma lógica **L** será consistente se: a) **L** é gentilmente explosiva, e b) para toda fórmula A e para toda teoria* $\Gamma(\forall B \in \Delta(A))(\Gamma \Vdash B)$

A lógica clássica é tanto uma lógica gentilmente explosiva quanto uma lógica consistente, conforme notamos com o uso das **LFIs** para expressar a lógica clássica.

1.6 Explosão parcial e controlável

Como já se percebeu, existem vários modos capazes de fazer uma determinada teoria/lógica explodir. Vimos até agora a explosão "pura", a suplementar e a gentil. Todavia, a partir do *Taxonomy*, conhecemos mais duas formas de explosão: a parcial e a controlável.

Para entender o que é uma explosão parcial, W.Carnielli e J. Marcos introduzem o conceito de teoria parcialmente trivial.

Definição 1.6.1. *Uma teoria Γ é parcialmente trivial em relação a um dado esquema $\sigma(C_{1,\ldots,}C_n)$ se: a) $\exists C_1 \ldots C_n$ tal que $\sigma(C_{1,\ldots,}C_n)$ não é uma partícula maximal, e b)* $\forall C_1 \ldots \forall C_n[\Gamma \Vdash \sigma(C_{1,\ldots,}C_n)]$

Definição 1.6.2. *Uma teoria Γ é parcialmente explosiva em relação a um dado esquema $\sigma(C_{1,\ldots,}C_n)$ se: a) $\exists C_1 \ldots C_n$ tal que $\sigma(C_{1,\ldots,}C_n)$ não é uma partícula maximal, e b)* $\forall C_1 \ldots \forall C_n \forall A[\Gamma, A, \neg A \Vdash \sigma(C_{1,\ldots,}C_n)]$

Uma lógica tem as propriedades acima quando todas as suas teorias tiverem.

Se uma lógica realiza o princípio de explosão parcial, então **L** deve ser parcialmente explosiva.

Ora, estamos habilitados a ver que:

Proposição 1.6.3. *(i) Qualquer teoria/lógica parcialmente trivial é parcialmente explosiva. (ii) Toda lógica explosiva não-trivial é parcialmente explosiva.*

Mas uma lógica com cidadania entre as lógicas paraconsistentes deve, além de evitar a trivialização, excluir de seu caminho a trivialização parcial.

W. Carnielli e J. Marcos explicam o que significa dizer de uma teoria/lógica que ela não é explosiva, embora seja controlavelmente explosiva.

Definição 1.6.4. *Uma teoria é controlavelmente explosiva em relação a um dado esquema $\sigma(C_{1,\ldots,}C_m)$ se: a) $\exists C \ldots C_m$ tal que $\sigma(C_{1,\ldots,}C_m)$ e $\neg\sigma(C_{1,\ldots,}C_m)$ não são partículas minimais, e b) $\forall C_1 \ldots \forall_m \forall B[\Gamma, \sigma(C_{1,\ldots,}C_m), \neg\sigma(C_{1,\ldots,}C_m) \Vdash B]$*

Surge um novo tipo de princípio de explosão, qual seja: **L** deve ser controlavelmente explosiva. W. Carnielli e J. Marcos chamam esse princípio de princípio de explosão controlável.

Dado o princípio de explosão controlável, infere-se que:

Proposição 1.6.5. *(i) Qualquer teoria/lógica explosiva não-trivial é controlavelmente explosiva.*

Proposição 1.6.6. *(i) Qualquer teoria/ lógica controlavelmente explosiva é finitamente trivializável; (ii) Qualquer teoria/lógica gentilmente explosiva é finitamente trivializável, e não-trivial.*

Várias são as maneiras que fazem uma dada teoria/lógica se tornar trivial perante um conjunto de fórmulas contraditórias. Existem muitos modos, portanto, de se causar explosão: suplementar, gentil, controlável, parcial. Se desejássemos definir novas espécies de explosão, poderíamos combinar as já vigentes. Naquilo que se refere à explosão gentil, o esquema que acrescido às fórmulas contraditórias causa explosão não precisa ser, obrigatoriamente, a consistência de uma fórmula. Poderia ser, por exemplo, as fórmulas do tipo $\Box A$ (explosão gentil modal). Se optássemos por uma explosão modal, daríamos origem a uma outra hierarquia de lógicas paraconsistentes.

Passemos à compreensão do que são as **LFIs** e os C-sistemas.

1.7 LFIs e C-sistemas

Deseja-se, então, elucidar a definição de *lógicas da inconsistência formal.* Em um certo sentido, pode-se dizer que tais lógicas são lógicas paraconsistentes capazes de mapear os operadores de consistência e inconsistência na linguagem-objeto. Isto é, são lógicas capazes de falar acerca da consistência. De modo mais claro, uma **LFI** é qualquer lógica não-trivial na qual a consistência, apesar de não valer, seja capaz de ser expressada. Contudo, uma **LFI** deve ser não-explosiva, embora seja gentilmente explosiva.

A partir do exposto, temos um critério para determinar se uma lógica é ou não uma **LFI**.

Dada uma lógica $\mathbf{L} =< For, \Vdash>$, seja $For^+ \subseteq For$ o conjunto das fórmulas positivas de $\mathbf{L}$, isto é, o fragmento destituído de negação de For.

Definição 1.7.1. *Uma determinada lógica* $\mathbf{L}_1 =< For_1, \Vdash_1>$ ***preserva positivamente*** *a lógica* $\mathbf{L}_2 =< For_2, \Vdash_2>$ *se:*

a) $For_1^+ = For_2^+$

b) $(\Gamma \Vdash_1 A \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash_2 A)$, *para todo* $\Gamma \cup \{A\} \subseteq For_1^+$

Conclui-se que se $\mathbf{L}_1$ preserva positivamente $\mathbf{L}_2$, então $\mathbf{L}_1$ é uma extensão conservativa do fragmento positivo de $\mathbf{L}_2$.

Para observarmos que o conceito proposto por W. Carnielli e J. Marcos de **LFIs** é capaz de colocar inúmeras lógicas paraconsistentes sob o mesmo rótulo, vejamos o que se apresenta:

Proposição 1.7.2. *Qualquer lógica paraconsistente que preserva positivamente a lógica clássica e possui partícula minimal pode ser caracterizada como uma **LFI**.*

Demonstração: Seja $\circ A =^{def.} (A \to \bot) \vee (\neg A \to \bot)$. Deve-se observar que $\circ A$ não é uma partícula maximal, assim como $\{\circ A, A\}$ e $\{\circ A, \neg A\}$ não são triviais. Todavia, $\{\circ A, A, \neg A\}$ é uma teoria trivial. Com efeito, a definição acima vale para toda lógica que tenha uma disjunção adjuntiva-esquerda, isto é, um conectivo binário $\vee$ tal que $(B \vee C)$ não é partícula minimal, e para fórmulas B e C tais que para quaisquer fórmulas B e C e D e quaisquer teorias Γ e Δ $\{[(\Gamma, B \Vdash D)$ e $(\Delta, C \Vdash D)]$ implica $[\Gamma, \Delta, (B \vee C) \Vdash D]\}$, bem como *modus ponens:* $\forall\Gamma\forall A\forall B[\Gamma, A, A \to B \vdash B]$, é suficiente. Basta escolher $\Gamma = \{A\}$, $B = (A \to \bot)$, $\Delta = \{\neg A\}$ e $C = (\neg A \to \bot)$ e notar que tanto $(\Gamma, B \Vdash \bot)$ e $(\Delta, C \Vdash \bot)$, por *modus ponens.* □

Atentemos, agora, à definição proposta por W. Carnielli e J. Marcos do que significa ser um C-sistema.

Definição 1.7.3. *Uma lógica* $\mathbf{L}_1$ *é um C-sistema baseado em* $\mathbf{L}_2$ *se:*

a) L_1 *é uma LFI na qual a consistência ou inconsistência são expressadas por operadores (no nível da linguagem-objeto);*

b) L_2 *não é paraconsistente;*

c) L_1 *preserva positivamente* L_2.

Apresentamos, na próxima parte, o comportamento sintático e semântico da lógica $\mathbf{C}_{\min}$, a lógica "básica" da inconsistência, suas extensões, e a lógica **Ci**.

1.8 Algumas lógicas da inconsistência formal

Nesta parte, estudamos propriedades sintáticas e semânticas de várias lógicas da inconsistência formal, as quais foram propostas por Walter Carnielli e João Marcos no texto *A Taxonomy of C-systems.* Os autores consideram as **LFIs** a partir da lógica $\mathbf{C}_{\text{min}}$ com o acréscimo de uma regra de inferência. Neste texto, mostramos que tal regra é, na verdade, conseqüência de um novo axioma. Isso nos permite continuar com uma única regra de inferência, ou seja, a regra de *modus ponens.*

1.8.1 Uma lógica minimal paraconsistente

Em *Limits for Paraconsistent Calculi*, W. Carnielli e J. Marcos apresentam a lógica $\mathbf{C}_{\text{min}}$. Esta pode ser denotada por $C_{\text{min}} = < For, \Vdash_{\text{min}} >$ e é formada pelos seguintes axiomas:

(Min1) $\vdash_{\text{min}} (A \rightarrow (B \rightarrow A))$;
(Min2) $\vdash_{\text{min}} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;
(Min3) $\vdash_{\text{min}} (A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$;
(Min4) $\vdash_{\text{min}} ((A \wedge B) \rightarrow A))$;
(Min5) $\vdash_{\text{min}} ((A \wedge B) \rightarrow B))$;
(Min6) $\vdash_{\text{min}} (A \rightarrow (A \vee B))$;
(Min7) $\vdash_{\text{min}} (B \rightarrow (A \vee B))$;
(Min8) $\vdash_{\text{min}} ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$;
(Min9) $\vdash_{\text{min}} (A \vee (A \rightarrow B))$;
(Min10) $\vdash_{\text{min}} (A \vee \neg A)$;
(Min11) $\vdash_{\text{min}} (\neg\neg A \rightarrow A)$;

E mais a regra de modus ponens: $A, A \rightarrow B \vdash B$

Ao analisar o conjunto de axiomas percebe-se que de (Min1)–(Min8) temos a lógica positiva intuicionista[4], também denominada de lógica positiva de Hilbert-Bernays. Se acrescentássemos à lógica positiva intuicionista a lei de Dummett $(A \vee (A \rightarrow B))$,o princípio do terceiro-excluído, a lei de redução da dupla negação, daríamos origem ao sistema conhecido como $\mathbf{C}_{\text{min}}$. Pode-se, de imediato, constatar que vale o teorema de dedução.

Teorema 1.8.1. $[\Gamma, A \vdash_{\text{min}} B \Rightarrow \Gamma \vdash_{\text{min}} A \rightarrow B]$

Demonstração: Em qualquer lógica que contém os axiomas (Min1) e (Min2) e a regra de *modus ponens* pode-se demonstrar, por indução sobre o comprimento da prova,

[4] A lógica positiva de Hilbert-Bernays é o ponto de partida para Newton da Costa na construção da lógica C_1.

a validade do teorema da dedução[5]. □

O teorema da dedução continua válido na lógica modal paraconsistente do último capítulo.

Com uma relação de consequência que seja monotônica e transitiva, e ainda a regra acima, pode-se demonstrar a recíproca do teorema da dedução. Isso nos permite compreender os axiomas como regras de inferência.

Usando também o teorema e sua recíproca, é possível apresentar uma demonstração para o fato de que:

Teorema 1.8.2. *Em $C_{\min}$ o princípio de explosão na forma $(A \to (\neg A \to B))$ não é demonstrável.*

O resultado acima nos mostra que $\mathbf{C}_{\min}$ é, realmente, uma lógica paraconsistente. Observemos que os axiomas (Min3)-(Min5) nos mostram que a lógica $\mathbf{C}_{\min}$ satisfaz a adjuntividade, e mesmo a disadjuntividade[6].

Atentemos ao fato de que a lógica C_ω , isto é, a lógica que Newton da Costa considerou o limite da hierarquia C_n, não é outra coisa além da lógica $\mathbf{C}_{\min}\backslash\{(\text{Min9})\}$ e não é uma lógica da inconsistência formal, dado que não possui partícula minimal.

W. Carnielli e J. Marcos provam ainda mais algumas propriedades acerca de $\mathbf{C}_{\min}$.

Proposição 1.8.3. $[(\Gamma, A \vdash_{\min} B)$ *e* $(\Delta, \neg A \vdash_{\min} B)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta \vdash_{\min} B)]$.

Demonstração: Pelos axiomas (Min8) e (Min10), *modus ponens*, monotonicidade e o teorema da dedução, obtemos o resultado desejado. □

Se retirássemos de $\mathbf{C}_{\min}$ o axioma (Min10), com o intento de obter uma lógica que rejeita o terceiro-excluído, isto é, uma lógica paracompleta, então não estaríamos aptos a demonstrar a validade da *prova por casos* apresentada na proposição acima. Conseqüentemente, qualquer lógica da inconsistência formal e C-sistema construídos tendo por base uma lógica intuicionista seria incapaz de demonstrar o resultado anterior. Demonstrações que usam a prova por casos seriam perdidas.

Temos agora o seguinte:

---

[5]Veja por exemplo o livro *Introduction to mathematical logic* de E. Mendelson.

[6]Segundo W. Carnielli e J. Marcos, uma lógica $\mathbf{L}$ é adjuntiva-esquerda se para quaisquer duas fórmulas A e B existe um esquema $\sigma(A, B)$, dependendo somente de A e B , com o seguinte comportamento: $\exists A \exists B$ tal que $\sigma(A, B)$ não é uma partícula minimal, e $\forall A \forall B \forall \Gamma \forall D[\Gamma, A, B \Vdash D \Longrightarrow \Gamma, \sigma(A, B) \Vdash D]$.

Uma lógica $\mathbf{L}$ é disadjuntiva-esquerda se para quaisquer duas fórmulas A e B existe um esquema $\sigma(A, B)$, dependendo somente de A e B, com o seguinte comportamento: $\exists A \exists B$ tal que $\sigma(A, B)$ não é uma partícula maximal, e se $\forall A \forall B \forall \Gamma \forall D[\Gamma, \sigma(A, B) \Vdash D \Longrightarrow \Gamma, A, B \Vdash D]$

Proposição 1.8.4. *Os axiomas (Min1)-(Min11), o esquema* $(A \to (\neg A \to B))$ *e mais a regra de modus ponens constituem uma axiomatização correta e completa da lógica proposicional clássica.*

Quanto à semântica, $\mathbf{C}_{\min}$ possui provas de corretude e completude.

A semântica, a qual é formada por um conjunto de valorações, para a $\mathbf{C}_{\min}$ é tal que:

$v1)$ $v(A \wedge B) = 1 \iff v(A) = 1$ e $v(B) = 1$;

$v2)$ $v(A \vee B) = 1 \iff v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$;

$v3)$ $v(A \to B) = 1 \iff v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$;

$v4)$ $v(\neg A) = 0 \Rightarrow v(A) = 1$;

$v5)$ $v(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1$;

As valorações acima são capazes de gerar uma completude para $\mathbf{C}_{\min}$. Para tanto, precisamos de definições intermediárias:

Definição 1.8.5. *Um conjunto de fórmulas* $\Delta \cup \{G\}$ *em* $\mathbf{C}_{\min}$ *é G-saturado se* $\Delta \nvdash_{C_{\min}} G$ *e para qualquer fórmula* A *de* $\mathbf{C}_{\min}$ *tal que* $A \notin \Delta$, *for o caso que* $\Delta \cup \{A\} \vdash_{C_{\min}} G$.

Qualquer conjunto não-trivial Γ de fórmulas de $\mathbf{C}_{\min}$ tal que $\Gamma \nvdash_{C_{\min}} B$ pode ser estendido a um conjunto G-saturado, conforme o lema de Lindenbaum.

Lema 1.8.6. *Seja* $\Delta \cup \{G\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\mathbf{C}_{\min}$ *tal que* Δ *é G-saturado. Então:*

(i) $\Delta \vdash A \Leftrightarrow A \in \Delta$;

(ii) $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ e $B \in \Delta$;

(iii) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$;

(iv) $A \to B \in \Delta \Leftrightarrow A \notin \Delta$ e $B \in \Delta$;

(v) $A \notin \Delta \Rightarrow \neg A \in \Delta$;

(vi) $\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$;

Demonstração: (i) Se $\Delta \vdash A$ e $A \notin \Delta$, então $\Delta \cup \{A\} \vdash G$, uma vez que Δ é G-saturado. Pelo teorema da dedução, temos que $\Delta \vdash A \to G$ e por isso, $\Delta \vdash G$. Tal fato não pode acontecer, pois Δ é G-saturado. A volta é imediata.

(ii) Se $A \wedge B \in \Delta$ então $\Delta \vdash A$ e $\Delta \vdash B$. Daí, $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$. Se $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$ segue-se que $\Delta \vdash A \wedge B$ e, com isso, $A \wedge B \in \Delta$.

(iii) Se $A \vee B \in \Delta$ então $\Delta \vdash A$ ou $\Delta \vdash B$. Daí, $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$. Se $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$ segue-se que $\Delta \vdash A \vee B$ e, com isso, $A \vee B \in \Delta$.

Para (iv), (v) e (vi) deve-se proceder como acima. □

Constata-se que uma valoração para $\mathbf{C}_{\min}$ é uma função característica de um conjunto G-saturado tal que:

$v(Y) = 1$, se $Y \in \Delta$,

$v(Y) = 0$, se $Y \notin \Delta$

A função acima satisfaz todas as cláusulas do lema.

Teorema 1.8.7. *A lógica $C_{\min}$ é completa em relação à semântica paraconsistente de $C_{\min}$: $(\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A)$*

Demonstração: Suponha, por contraposição, que $\Gamma \nvdash A$. Como Γ é não-trivial, pode ser estendido a um conjunto A-saturado Δ. Como $\Delta \nvdash A$, por (i), sabemos que $A \notin \Delta$. A função característica apresenta uma valoração que é modelo de Δ e é tal que $v(A) = 0$. Como corolário, $\Delta \nvDash A$. Mas como $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Gamma \nvDash A$ $\square$

1.8.2 A lógica básica da (in)consistência

Acrescentemos ao conjunto For de $\mathbf{C}_{\min}$ um novo operador capaz de mapear o conceito de *consistência*. O operador de consistência é unário, parecido como as modalidades da lógica modal. Adicionemos ainda um novo axioma, a qual concretiza o ideal do princípio de explosão gentil:

(bc1) $\vdash_{bC} (\circ A \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)))$

Como imediato se constata, a regra $\circ A, A, \neg A \vdash_{bC} B$ que está no *Taxonomy* é conseqüência imediata da aplicação da recíproca do teorema da dedução ao axioma (bc1). Ao longo deste capítulo, não usamos mais que a regra de inferência modus ponens. Todas as regras do *Taxonomy* são vistas aqui como conseqüências dos axiomas. O motivo de fazer a mudança é que é possível encontrar extensões da lógica bC+$\circ A, A, \neg A \vdash_{bC} B$ nas quais não vale o teorema da dedução ao passo que não é possível obter tais extensões se temos bC+$\vdash_{bC} (\circ A \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)))$.

O operador $\circ$ aplicado à fórmula A nos diz que "A é consistente." A regra afirma que se uma fórmula A é consistente e, ao mesmo tempo, contraditória, então ela explode. Mas podemos dizer de uma fórmula que ela explode e é contraditória? essas propriedades não são somente de teorias? podemos considerar fórmulas como teorias unitárias?

De todo modo, a lógica que surge com o acréscimo do axioma (bc1) ao sistema $\mathbf{C}_{\min}$ é a lógica básica da (in)consistência, ou seja, **bC**. Não é claro o motivo de chamar **bC** de lógica básica da inconsistência, uma vez que ela nem sequer tem um operador de inconsistência. Mas é **bC** uma **LFI**? Para respondermos a esta questão precisamos observar os requisitos para se ter uma lógica da inconsistência formal. Ora, a lógica em questão não é explosiva, uma vez que não vale o princípio de explosão. Todavia, é gentilmente explosiva, dada a regra (bc1). Pode-se definir uma negação forte $\sim$ para **bC** do seguinte modo: $\sim A =^{def.} (\neg A \wedge \circ A)$. Como consequência, temos $[A, \sim A \vdash_{bC} B]$. Dada a adjuntividade de **bC**, temos que uma partícula minimal seria $(A \wedge \sim A)$, para qualquer A. Deste modo, **bC** é uma LFI.

Das duas negações, pode-se dizer que a paraconsistente $\neg$ é uma negação fraca, uma vez que é não-explosiva. Já $\sim$ é forte, pois, além de ser explosiva, é a paraconsistente acrescida com a consistência. Temos critérios seguros para determinar quando uma negação é paraconsistente?

W. Carnielli e J. Marcos provam mais alguns resultados acerca de **bC**:

Teorema 1.8.8. *bC não tem teoremas da forma $\circ A$.*

Demonstração: De fato, pois se tivesse teoremas da forma $\circ A$, teríamos, dado o axioma (bc1) e modus ponens, $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ de modo que a nossa lógica perderia seu caráter paraconsistente. □

W. Carnielli e J. Marcos apresentam resultados que realizam uma interação entre a lógica clássica proposicional (**LPC**) e a lógica **bC**, quais sejam:

Teorema 1.8.9. $[\Gamma \vdash_{LPC} A] \Leftrightarrow [\circ(\Delta), \Gamma \vdash_{bC} A]$, *onde* $\circ(\Delta) = \{\circ B : B \in \Delta\}$ *e* Δ *é um conjunto finito de fórmulas.*

Demonstração: Para ver que $[\Gamma \vdash_{LPC} A] \Rightarrow [\circ(\Delta), \Gamma \vdash_{bC} A]$ repare que é possível reproduzir linha por linha de uma prova em **LPC** no interior da lógica **bC**, de modo que quando for preciso utilizar $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, deve-se, ao contrário, recorrer à regra (bc1), adicionando como hipótese a consistência da fórmula. A recíproca é imediata. □

A lógica **bC** é uma extensão tanto linguística quanto dedutiva de $\mathbf{C}_{\min}$. De fato:

Teorema 1.8.10. *bC é uma extensão conservativa de $C_{\min}$.*

A apresentação original, feita por Newton da Costa, das lógicas paraconsistentes da família $C_n, 1 \leqslant n \leqslant \omega$, não apresentava uma forma de explosão gentil, mas fazia uma restrição na regra de redução ao absurdo.

(RA0) $\circ B, (A \rightarrow B), (A \rightarrow \neg B) \vdash \neg A$

Para a redução ao absurdo funcionar seria preciso que a fórmula contraditória fosse ainda consistente. Como é fácil de se notar, (RA0) pode ser vista como a própria regra (bc1) .

Consideremos agora duas versões alternativas das regras (bc1) e (RA0):

(bc0) $\circ A, A, \neg A \vdash_{bC} \neg B$;

(RA1)$\circ B, (\neg A \rightarrow B), (\neg A \rightarrow \neg B) \vdash A$;

Claramente, (bc0) realiza o princípio de explosão parcial, além do princípio de explosão gentil. Acontece a explosão somente em relação a um dado esquema. No caso acima, somente em relação às fórmulas negadas.

Segundo W. Carnielli e J. Marcos, algumas formas restritas de redução ao absurdo valem em **bC**:

Teorema 1.8.11. *Vale em* **bC**:

(i) $[(\Gamma \vdash_{bC} \circ A)$ e $(\Delta, B \vdash_{bC} A)$ e $(\Lambda, B \vdash_{bC} \neg A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta, \Lambda \vdash_{bC} \neg B)]$;
(ii) $[(\Gamma, B \vdash_{bC} \circ A)$ e $(\Delta, B \vdash_{bC} A)$ e $(\Lambda, B \vdash_{bC} \neg A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta, \Lambda \vdash_{bC} \neg B)]$;
(iii) $[(\Gamma, \neg B \vdash_{bC} \circ A)$ e $(\Delta, \neg B \vdash_{bC} A)$ e $(\Lambda, \neg B \vdash_{bC} \neg A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta, \Lambda \vdash_{bC} B)]$;

Demonstração: (i) Segue-se imediatamente de (RA0).
(ii) Infere-se de (i) com o auxílio da reflexividade e da prova por casos.
(iii) É apenas uma variação de (ii), desde que se faça uso de (Min11). □

O teorema abaixo é responsável por enunciar algumas das propriedades cruciais da lógica **bC**.

Teorema 1.8.12. *Temos:*

(i) $(A \wedge \neg A)$ não é partícula minimal em qualquer lógica que seja extensão paraconsistente de bC.
(ii) $\neg(A \wedge \neg A)$ e $\neg(\neg A \wedge A)$ não são partículas maximais em **bC**.

Demonstração: (i) Veja que $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ não é válido. Daí, pela disadjuntividade-esquerda, $(A \wedge \neg A) \neq \bot$
(ii) Deve-se recorrer às matrizes trivalentes da lógica $\mathbf{P}^1$. □

Do ponto de vista da lógica clássica, é comum, e bastante intuitivo, o fato de que as contradições não são objetos consistentes. Em **bC**, W. Carnielli e J. Marcos expressam algumas relações entre contraditoriedade e consistência. Como a seguir:

Teorema 1.8.13. *São teoremas em* *bC*:

(i) $\vdash_{bC} (A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \circ A))$;
(ii)$\vdash_{bC} (A \wedge \neg A) \rightarrow \neg \circ A$;
(iii)$\vdash_{bC} (\circ A \rightarrow \neg(A \wedge \neg A))$;
(iv)$\vdash_{bC} (\circ A \rightarrow \neg(\neg A \wedge A))$.

Em **bC**, consistência implica não-contradição, mas a volta não acontece. Contradição implica não-consistência, mas não vale a volta.

A forma regular tradicional de raciocínio por contraposição não vale em **bC**. Todavia, temos algumas restrições, tais como:

Teorema 1.8.14. *São formas restritas de contraposição que valem em* **bC**:

(i) $\vdash_{bC} (\circ B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)))$;
(ii)$\vdash_{bC} (\circ B \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)))$;
(iii)$\vdash_{bC} (\circ B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)))$;
(iv)$\vdash_{bC} (\circ B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)))$;

Um fato interessante que acontece em **bC** é que [$\circ B, (A \rightarrow B) \vdash_{bC} (\neg B \rightarrow \neg A)$], ou seja, dada a consistência de B, e se A implica B, então pode-se inferir contrapositivamente. Contudo, se for dada a consistência de A, tal raciocínio não se segue. Assim, não vale em **bC** [$\circ A, (A \rightarrow B) \vdash_{bC} (\neg B \rightarrow \neg A)$].

Acontece que muitas propriedades que são válidas no contexto da lógica clássica não são válidas em *bC*, e, conseqüentemente, em nenhuma extensão desta lógica. Reparemos alguns "defeitos" inatos de **bC**. Considere, por exemplo, os conectivos $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$ de **bC**. Eles não podem ser interdefinidos:

Em **bC**, vale: (i) $(\neg A \rightarrow B) \vdash_{bC} (A \vee B)$.

Mas não vale:

(ii) $(A \vee B) \vdash_{bC} (\neg A \rightarrow B)$;

(iii) $\neg(\neg A \rightarrow B) \vdash_{bC} \neg(A \vee B)$;

(iv) $\neg(A \vee B) \vdash_{bC} \neg(\neg A \rightarrow B)$;

(v) $(A \rightarrow B) \vdash_{bC} \neg(A \wedge \neg B)$;

(vi) $\neg(A \wedge \neg B) \vdash_{bC} (A \rightarrow B)$;

(vii) $\neg(A \rightarrow B) \vdash_{bC} (A \wedge \neg B)$;

(viii) $(A \wedge \neg B) \vdash_{bC} \neg(A \rightarrow B)$;

(ix) $\neg(A \wedge B) \vdash_{bC} (\neg A \vee \neg B)$;

(x) $(\neg A \vee \neg B) \vdash_{bC} \neg(A \wedge B)$;

(xi) $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_{bC} (A \wedge B)$;

(xii) $(A \wedge B) \vdash_{bC} \neg(\neg A \vee \neg B)$;

Para demonstrar os resultados acima pode-se utilizar o procedimento de decisão, via tableaux, para a lógica **bC** o qual é capaz de dizer, de cada fórmula, se ela é ou não uma tautologia[7]. W. Carnielli e J. Marcos provam vários teoremas, dentre eles:

Teorema 1.8.15. *O silogismo disjuntivo* [$A, (\neg A \vee B) \vdash B$] *não vale em nenhuma extensão paraconsistente da lógica clássica ou intuicionista positiva.*

Demonstração: Assuma que [$A, (\neg A \vee B) \vdash B$] seja válido. A partir de (Min6), [$\neg A \vdash (\neg A \vee B)$]. Pela transitividade de $\vdash$ teríamos [$A, \neg A \vdash B$].

Teorema 1.8.16. *A forma usual de contraposição* [$(A \rightarrow B) \vdash_{bC} (\neg B \rightarrow \neg A)$] *não vale em nenhuma extensão paraconsistente de* ***bC****.*

□

Demonstração: Suponha que a lei acima seja válida em algum extensão paraconsistente de **bC**. Por (Min1), temos que [$B \vdash A \rightarrow B$] e, *pela transitividade* [$B \vdash_{bC} (\neg B \rightarrow \neg A)$] . Assim, a lógica **bC** seria parcialmente explosiva em relação às

[7]O procedimento de decisão para a lógica **bC** se encontra no texto *Tableaux System for Logic of Formal Inconsistency* de W. Carnielli e J. Marcos.

fórmulas negadas. Assumindo $A = \neg C$, $[B, \neg B \vdash_{bC} C]$, com o uso de (Min11). Portanto, chegaríamos até o colapso de **bC** com a lógica clássica. □

Notemos que o resultado acima pode ser estendido para qualquer lógica que seja extensão da lógica clássica positiva e que não seja parcialmente explosiva em relação à negação paraconsistente.

Assumindo que não seja válida a lei de contraposição, segue-se que também não é válida a lei de intersubstitutividade dos equivalentes demonstráveis (IpE).

Com efeito, dado um determinado esquema $\sigma(A_1, ..., A_n)$, a lei acima pode ser enunciada como:

$\forall B_1 ... \forall B_n[(A_1 \leftrightarrow B_1)$ e...e $(A_n \leftrightarrow B_n)] \Rightarrow [\sigma(A_1, ..., A_n) \leftrightarrow \sigma(B_1, ..., B_n)]$

Teorema 1.8.17. *Vale em* ***bC***:

(i) $(A \wedge B) \leftrightarrow_{bC} (B \wedge A)$;
(ii) $(A \vee B) \leftrightarrow_{bC} (B \vee A)$;
(iii) $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow_{bC} (\neg A \wedge A)$;
Mas não vale:
(i') $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow_{bC} \neg(B \wedge A)$;
(ii') $\neg(A \vee B) \leftrightarrow_{bC} \neg(B \vee A)$;
(iii') $\neg(A \wedge \neg A) \leftrightarrow_{bC} \neg(\neg A \wedge A)$;

Demonstração: Para (i), (ii), (iii) é suficiente utilizar as leis da lógica clássica positiva. Para (i'), (i") (i"') veja *Taxonomy.* □

Tais fatos já eram esperados, uma vez que não vale (IpE).

Corolário 1.8.18. *(IpE) não vale em* ***bC***.

Sabemos que a lógica **bC** é correta e completa em relação à semântica de valorações[8]. Com o fim de apresentarmos a demonstração, consideremos, inicialmente, uma bC-valoração como uma função do tipo $v_{bC} : For_{bC} \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

$v1)$ $v_{bC}(A \wedge B) = 1 \iff v_{bC}(A) = 1$ e $v_{bC}(B) = 1$;
$v2)$ $v_{bC}(A \vee B) = 1 \iff v_{bC}(A) = 1$ ou $v_{bC}(B) = 1$;
$v3)$ $v_{bC}(A \rightarrow B) = 1 \iff v_{bC}(A) = 0$ ou $v_{bC}(B) = 1$;
$v4)$ $v_{bC}(\neg A) = 0 \Rightarrow v_{bC}(A) = 1$;
$v5)$ $v_{bC}(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow v_{bC}(A) = 1$;
$v6)$ $v_{bC}(\circ A) = 1 \Rightarrow v_{bC}(A) = 0$ ou $v_{bC}(\neg A) = 0$;

A semântica para **bC** é dada pelo conjunto das valorações que respeitam as cláusulas acima. É fácil ver que as valorações de $\mathbf{C}_{\text{min}}$ e **bC** têm um núcleo comum, mas **bC**

[8]Para um estudo semântico das **LFIs** pode-se estudar os textos de W. Carnielli e J. Marcos, em preparação, *Semantics for C-Systems*, bem como *Logics of Formal Inconsistency*, com a participação de M.E.Coniglio.

possui uma cláusula a para o operador de consistência. A demonstração de corretude, como usual, é imediata.

Teorema 1.8.19. *Se $\Gamma \cup \{A\}$ é um conjunto de fórmulas de* ***bC****, então $\Gamma \vdash_{bC} A$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_{bC} A$.*

Demonstração: Basta mostrar que todos os axiomas de **bC** assumem somente o valor 1 em qualquer bC-valoração e que o (MP) preserva a validade. □

Para demonstrar a completude precisamos de algumas definições e de alguns lemas.

Definição 1.8.20. *Um conjunto de fórmulas $\Delta \cup \{G\}$ em bC é B-saturado se $\Delta \nvdash_{bC} G$ e para qualquer fórmula A de bC tal que $A \notin \Delta$, for o caso que $\Delta \cup \{G\} \vdash_{bC} B$.*

Daí, temos:

Lema 1.8.21. *Qualquer conjunto não-trivial Γ de fórmulas de* ***bC*** *tal que $\Gamma \nvdash_{bC} B$ pode ser estendido a um conjunto B-saturado.*

Lema 1.8.22. *Seja $\Delta \cup \{G\}$ um conjunto de fórmulas de* ***bC*** *tal que Δ é G-saturado. Então:*

(i) $\Delta \vdash_{bC} A \Leftrightarrow A \in \Delta$;
(ii) $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ e $B \in \Delta$;
(iii) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$;
(iv)$A \to B \in \Delta \Leftrightarrow A \notin \Delta$ e $B \in \Delta$;
(v) $A \notin \Delta \Rightarrow \neg A \in \Delta$;
(vi) $\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$;
(vii) $\circ A \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$ ou $\neg A \notin \Delta$;

Demonstração: Consequência direta dos axiomas de **bC**. Vejamos a cláusula (vii), a qual ainda não foi demonstrada. Suponhamos que $\circ A \in \Delta$ e $A \in \Delta$ e $\neg A \in \Delta$. Por (i) $\Delta \vdash_{bC} \circ A$, $\Delta \vdash_{bC} A$ e $\Delta \vdash_{bC} \neg A$. Mas assim $\Delta \vdash_{bC} G$, para todo G. Só que Δ é G-saturado. □

Lema 1.8.23. *A função característica de um conjunto G-saturado de fórmulas de* ***bC*** *define uma bC-valoração tal que $v_{bC}(B) = 0$.*

Teorema 1.8.24. $\Gamma \vDash_{bC} A$ *implica* $\Gamma \vdash_{bC} A$.

Demonstração: A prova é usual e feita por contraposição. Suponhamos que $\Gamma \nvdash_{bC} A$. E mais, Γ pode ser estendido a um conjunto A-saturado Δ. Desde que $\Delta \nvdash_{bC} A$, então $A \notin \Delta$, pelo lema. Pelo lema da função característica de Δ temos que para qualquer $B \in \Delta$, $v_{bC}(B) = 1$ enquanto o $v_{bC}(A) \neq 1$. Portanto, $\Delta \nvDash_{bC} A$ e, em particular,

$\Gamma \nvDash_{bC} A$. $\square$

Neste momento, faz-se útil estender a linguagem de **bC** com um outro conectivo. A lógica **bC** é somente a primeira de uma série de lógicas paraconsistentes capazes de formular na própria linguagem-objeto os operadores de (in)consistência. Desta vez, iremos usar o operador unário $\bullet$, o qual representa a inconsistência de uma fórmula. Assim, "$\bullet A$" lê-se como "A é inconsistente". Desde já, são apresentadas vários axiomas que interagem $\bullet$ e $\circ$. Tais regras, quando unidas à regra de (bc1), dão origem a vários sistemas intermediários entre as lógicas **bC** e **Ci**.

Assim:

(bc2) $\vdash_{bbC} \neg \bullet A \to \circ A$;

(bc3) $\vdash_{bbC} \neg \circ A \to \bullet A$;

(bc4) $\vdash_{bbbC} \bullet A \to \neg \circ A$;

(bc5) $\vdash_{bbbC} \circ A \to \neg \bullet A$;

(bc6n) $\vdash_{bbbbC} \neg^{n} \circ A \to \neg^{n+2} \circ A$;

(bc7n) $\vdash_{bbbbC} \neg^{n} \bullet A \to \neg^{n+2} \bullet A$;

Em (bc6n) e (bc7n), temos hiperliterais nos quais n representa o número de ocorrências do símbolo de negação $\neg$.

Vejamos como obter as lógicas bbC, $bbbC$ e $bbbbC$ a partir de **bC**:

$bbC =$ **bC**+(bc2) + (bc3)

$bbbC = bbC +$ (bc4) + (bc5)

$bbbbC = bbbC$+(bc6) + (bc7)

Até este momento, seria possível obter uma dualidade entre os operadores $\circ$ e $\bullet$, isto é, eles são interdefiníveis?

Poderíamos definir a consistência em função da inconsistência e vice-versa em **bC** e bbC? De fato, ainda que fizéssemos valer $\circ A =^{def} \neg \bullet A$ e $\bullet A =^{def} \neg \circ A$, não teríamos a garantia de que $\circ A \vdash \neg \bullet A$.

Como resultado bastante curioso e tipicamente distinto dos resultados tradicionais, W. Carnielli e João Marcos concluem que a contradição implica a inconsistência, mas não se dá, como se sabe, que a inconsistência implique a contradição. Portanto, não se tem necessariamente a equivalência entre os conceitos de contradição e inconsistência. E a dualidade entre os operadores $\circ$ e $\bullet$ ainda não é alcançada. Mas e se tivéssemos por escopo atingir a identificacão entre contradição e inconsistência? E a dualidade? Pois então, a lógica **Ci** é uma resposta as duas perguntas.

1.8.3 A lógica Ci

A busca pela equivalência e pela dualidade não se esgota nas lógicas da família **bC**. Consideremos o seguinte esquema de axioma:

(ci) $\vdash_{Ci} (\bullet A \to (A \wedge \neg A))$;

A lógica **Ci** é a lógica obtida acrescentando (ci) à lógica **bbbC**.

Assim:

Ci = **bbbC**+(ci)

Mas quantas lógicas exatamente existem entre **bC** e **Ci**?

Conseqüentemente, pela própria construção da lógica **Ci**, a equivalência entre $\bullet A$ e $(A \wedge \neg A)$ pode ser obtida. Na lógica **Ci** os conceitos de contradição e inconsistência se encontram e a dualidade entre $\circ$ e $\bullet$ é estabelecida. Além dessas duas propriedades, podemos dizer, dada a abordagem usual das **LFIs**, que a partir de **Ci** podemos erguer vários sistemas paraconsistentes. Inclusive, a lógica modal paraconsistente que propomos têm por base a lógica **Ci.**

Um teorema que facilita algumas demonstrações e nos mostra o porquê da lógica **Ci** ter a dualidade entre inconsistência e consistência é:

Teorema 1.8.25. *Uma axiomatização equivalente para **Ci** é dada se considerarmos somente os axiomas (Min1)-(Min11), (bc1), (ci), e (MP), e uma das duas definições* $\bullet A =^{def.} \neg \circ A$ *ou* $\circ A =^{def.} \neg \bullet A$

Mesmo assim, muitas inferências e propriedades não valem em **Ci**: Examinemos a proposição abaixo:

Proposição 1.8.26. *Vale em **Ci**:*

(i)$\vdash_{Ci} (\neg \circ A \rightarrow (A \wedge \neg A))$
mas:
(ii) $\nvdash_{Ci} (\neg(A \wedge \neg A) \rightarrow \circ A)$;
(iii) $\nvdash_{Ci} (\neg(\neg A \wedge A) \rightarrow \circ A)$.

Demonstração: (i) Como temos a regra $\bullet A \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$ e o teorema acima segue-se $\neg \circ A \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$.

Para (ii) e (iii) pode-se recorrer ao procedimento de decisão ou a algumas matrizes trivalentes que aparecem em *Taxonomy*. □

O princípio de não-contradição em sua formulação na linguagem-objeto não é uma tautologia em **Ci**:

Teorema 1.8.27. $\neg(A \wedge \neg A)$ *e* $\neg(\neg A \wedge A)$ *não são partículas maximais em **Ci**.*

Podemos verificar que em **Ci** temos novos de modos de explosão gentil e redução ao absurdo, como se constata em:

Proposição 1.8.28. *Valem em **Ci** o seguinte:*

(i) $\circ A, \bullet A \vdash_{Ci} B$;
(ii) $\circ A, \neg \circ A \vdash_{Ci} B$;

(iii) $\bullet A, \neg \bullet A \vdash_{Ci} B$;
(iv) $[(\Gamma, B \vdash_{Ci} \circ A)$ e $(\Delta, B \vdash_{Ci} \bullet A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta \vdash_{Ci} \neg B)$;
(v) $[(\Gamma, B \vdash_{Ci} \circ A)$ e $(\Delta, B \vdash_{Ci} \neg \circ A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta \vdash_{Ci} \neg B)$;
(vi) $[(\Gamma, B \vdash_{Ci} \bullet A)$ e $(\Delta, B \vdash_{Ci} \neg \bullet A)] \Rightarrow (\Gamma, \Delta \vdash_{Ci} \neg B)$;

Demonstração: Por (ci) $\bullet A \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$ e por (bc1) $\circ A, A, \neg A \vdash_{bC} B$ demonstra-se (i) $\circ A, \bullet A \vdash_{Ci} B$. (ii) e (iii) são conseqüências de (i) e (bc2)-(bc5). Os outros itens são da regra de redução ao absurdo para a lógica **Ci**. □

W. Carnielli e J. Marcos mostram também relações entre a consistência e o fato da fórmula ser controlavelmente explosiva.

Teorema 1.8.29. *Um dado esquema em **Ci** é demonstravelmente consistente se, e somente se, **Ci** é controlavelmente explosiva em relação ao esquema. Formalmente,* $[(\Gamma \vdash_{Ci} \circ A) \Leftrightarrow (\Gamma, A, \neg A \vdash_{Ci} B)]$.

Demonstração: Para $[(\Gamma \vdash_{Ci} \circ A) \Rightarrow (\Gamma, A, \neg A \vdash_{Ci} B)$ deve-se aplicar (bc1) e a transitividade da relação de conseqüência. Já para a volta, observemos que de (ci) , (bc3) e transitividade, segue-se que $\neg \circ A \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$. Mas pela hipótese de que $(\Gamma, A, \neg A \vdash_{Ci} B)$. conclui-se que $\neg \circ A = \perp$. Por isso, $\vdash_{Ci} \neg\neg \circ A$ e, por (Min11), $\vdash_{Ci} \circ A$. □

O teorema acima é uma ferramenta para fazermos demonstrações tais como:

Proposição 1.8.30. *Alguns teoremas de Ci* :

(i) $\vdash_{Ci} \circ \circ A$;
(ii)$\vdash_{Ci} \neg \bullet \circ A$;
(iii)$\vdash_{Ci} \circ \bullet A$;
(iv)$\vdash_{Ci} \neg \bullet \bullet A$.
(v) $\vdash_{Ci} \circ\neg \circ A$;
(vi) $\vdash_{Ci} \neg \bullet \neg \circ A$;
(vii) $\vdash_{Ci} \circ\neg \bullet A$;
(viii) $\vdash_{Ci} \neg \bullet \neg \bullet A$;

Observemos que tanto fórmulas consistentes quanto inconsistentes são consistentes.

Quanto à contraposição, podemos estipular também em **Ci** algumas formas mais restritas que as que ocorrem na lógica **bC**. W. Carnielli e J. Marcos mostram que:

Proposição 1.8.31. *São formas de contraposição introduzidas por **Ci**:*

(i) $(A \rightarrow \circ B) \vdash_{Ci} (\neg \circ B \rightarrow \neg A)$;
(ii) $(A \rightarrow \neg \circ B) \vdash_{Ci} (\circ B \rightarrow \neg A)$;
(iii) $(\neg A \rightarrow \circ B) \vdash_{Ci} (\neg \circ B \rightarrow A)$;
(iv) $(\neg A \rightarrow \neg \circ B) \vdash_{Ci} (\circ B \rightarrow A)$.

Proposição 1.8.32. *Se adicionássemos à* $\mathbf{Ci}$ $[(A \vdash B) \Rightarrow (\neg B \vdash \neg A)]$, *causaríamos o colapso de* $\mathbf{Ci}$ *na lógica clássica.*

Demonstração: De (ci1), (ci2) e (bc3) obtemos $\neg \circ A \vdash_{Ci} A$ e $\neg \circ A \vdash_{Ci} \neg A$. Suponha que $[(A \vdash B) \Rightarrow (\neg B \vdash \neg A)]$. Como temos (Min11), infere-se $\neg A \vdash_{Ci} \circ A$ e $\neg\neg A \vdash_{Ci} \circ A$. Daí, pela demonstração por casos, $\vdash_{Ci} \circ A$, para todo A. Mas isso faz **Ci** perder sua personalidade paraconsistente. $\square$

Teorema 1.8.33. *Em* $\mathbf{Ci}$*: (i) (bc2) prova (bc3) e vice-versa; (ii) (bc4) prova (bc5) e vice-versa.*

Proposição 1.8.34. $\mathbf{Ci}$ *prova o seguinte:*

(i) $\circ A \vdash_{Ci} \circ\neg A$;
(ii)$\bullet\neg A \vdash_{Ci} \bullet A$.

Demonstração: De (ci) e (bc4), temos que $[\neg \circ \neg A \vdash_{Ci} (\neg A \wedge \neg\neg A)]$. De $C_{\min}$ temos que $[(\neg A \wedge \neg\neg A) \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)]$. Contudo, sabemos que $(A \wedge \neg A) \vdash_{Ci} \neg \circ A$. Portanto, $[\neg \circ \neg A \vdash_{Ci} \neg \circ A]$. Agora, por (bc3) e (bc4) provamos (ii). Para (i), pode-se seguir a mesma regra e utilizar $(\neg A \rightarrow \neg \circ B) \vdash_{Ci} (\circ B \rightarrow A)$ $\square$

Proposição 1.8.35. *Em* $\mathbf{Ci}$*:*

(i) $\circ A \vdash_{Ci} \neg\neg \circ A$;
(ii)$\bullet A \vdash_{Ci} \neg\neg \bullet A$.

Deste modo, fica fácil perceber que obtivemos a dualidade pretendida.

Notamos, com efeito, que **Ci** é capaz de suportar definições do tipo:

$\bullet A =^{def.} \neg \circ A$

$\circ A =^{def.} \neg \bullet A$

Podemos facilmente demonstrar que as fórmulas $\neg(\circ A \wedge \neg \circ A), \neg(\circ A \wedge \bullet A), \neg(\neg \bullet A \wedge \neg \circ A)$ e $\neg(\neg \bullet A \wedge \bullet A)$ são todas equivalentes.

Para demonstrarmos a completude de **Ci** devemos acrescentar às valorações de **bC** uma cláusula tal que:

$v_{Ci}(\bullet A) = 1 \Rightarrow v_{Ci}(A) = 1$ e $v_{Ci}(\neg A) = 1$

E provar que:

Lema 1.8.36. $\bullet A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$ *e* $\neg A \in \Delta$

Demonstração: Suponhamos que $\bullet A \in \Delta$. Daí, $\Delta \vdash \bullet A$. Pelo axioma (ci), temos que $\Delta \vdash A \wedge \neg A$. Com isso, $A \wedge \neg A \in \Delta$ e daí $A \in \Delta$ e $\neg A \in \Delta$. $\square$

Depois basta proceder como na lógica **bC**.

Acerca da redução de (in)consistências

Leis de redução na lógica modal S5 Em uma lógica modal conhecida como **S5** é o caso que se temos uma modalidade M e uma fórmula bem-formada A, pode ser demonstrado o fato que $M\Box A$ é equivalente a $\Box A$ e $M\Diamond A$ é equivalente a $\Diamond A$. Portanto, em **S5** existem derivações das seguintes regras de redução:

(R1) $\Box\Box A \equiv \Box A$;
(R2) $\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond A$;
(R3) $\Box\Diamond A \equiv \Diamond A$;
(R4) $\Diamond\Box A \equiv \Box A$;

O resultado acima pode, claramente, ser estendido a M^n, onde n denota o número de ocorrências de uma modalidade.

Nossa questão é saber se podemos obter leis análogas de redução, mas usando a lógica **Ci**.

Reduções impossíveis

Proposição 1.8.37. *Fórmulas como* $\bullet\bullet A$ *e* $\bullet\circ A$ *são partículas minimais em* Ci.

Demonstração: Apenas note que $\bullet A \vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$ e que $\circ A, \neg\circ A \vdash_{Ci} B$ e $\bullet A, \neg\bullet A \vdash_{Ci} B$. □

Corolário 1.8.38. *As seguintes fórmulas são todas partículas minimais em* ***Ci***:

(i) $\bullet\neg\bullet A$;
(ii) $\bullet\neg\circ A$;
(iii)$\neg\circ\circ A$;
(iv)$\neg\circ\bullet A$;
(v)$\neg\circ\neg\circ A$;
(vi) $\neg\circ\neg\bullet A$;

Demonstração: Examine a proposição acima. □

Teorema 1.8.39. *Não existem leis de redução, como na lógica modal* ***S5***, *em* ***Ci***. *De fato, não valem:*

(i) $\circ\circ A \equiv \circ A$;
(ii) $\bullet\bullet A \equiv \bullet A$;
(iii)$\circ\bullet A \equiv \bullet A$;
(iv)$\bullet\circ A \equiv \circ A$;

Demonstração: Para (i) observe que se $\vdash_{Ci} \circ\circ A \equiv \circ A$, então, por (bc1) e substituição uniforme, $\circ\circ A, A, \neg A \vdash_{Ci} B$; Contudo, temos que $\vdash_{Ci} \circ\circ A$ e isso nos leva até ao princípio de explosão $A, \neg A \vdash_{Ci} B$ causando, portanto, o colapso de **Ci** com a lógica proposicional clássica, e, por essa razão, perdendo o seu caráter paraconsistente.

Para (ii), se $\bullet\bullet A \equiv \bullet A$, e como em **Ci** $(A \wedge \neg A) \equiv \bullet A$. Mas $\bullet\bullet A \equiv \bullet A \wedge \neg\bullet A$. Por isso, em **Ci** $\bullet A \wedge \neg\bullet A \equiv \perp$. Logo, $(A \wedge \neg A) \equiv \perp$.

Para (iii), supondo $\circ\bullet A \equiv \bullet A$. Em Ci, $\circ\bullet A \equiv \top$. Logo, $\bullet A \equiv \top$ e do axioma (ci) concluímos que $(A \wedge \neg A) \equiv \top$ e, portanto, para um A arbitrário. Assim, deriva-se a trivialidade.

Para (iv), supondo $\bullet\circ A \equiv \circ A$ e uma vez que $\circ\circ A \equiv \top$, segue-se que $\circ\circ A \equiv \bullet\circ\circ A$. Mas em **Ci** $\bullet\circ\circ A \equiv \circ\circ A \wedge \neg\circ\circ A$ e como $\circ\circ A \wedge \neg\circ\circ A \equiv \perp$. Segue-se que $\perp$ é partícula maximal e assim temos a trivialidade. □

Proposição 1.8.40. *Em Ci, muitas reduções são impossíveis, por exemplo:*

(i) $\circ\bullet A \equiv \circ A$;
(ii)$\neg\bullet\bullet A \equiv \circ A$;

Interessante é notar que em **bC** não temos fatos ou proposições atômicas que sejam, elas mesmas, consistentes, pois vimos que não é possível demonstrar coisas do tipo $\vdash_{bC} \circ A$. Isso nos leva até à ontologia. Por outro lado, a consistência pode ser atribuída a fatos consistentes, se estivéssemos em **Ci** uma vez que temos $\vdash_{Ci} \circ\circ A$.

Na próxima etapa, expressamos, no interior de **Ci**, a lógica clássica proposicional. Abordamos extensões da lógica **Ci**, isto é, **dC**-sistemas.

1.8.4 A lógica eLPC e os dC-sistemas

LFIs e a lógica proposicional clássica estendida (eLPC)

Existe um modo bastante simples de causar o colapso das **LFIs** baseadas na lógica clássica com a própria lógica clássica - basta que seja possível demonstrar o esquema $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. Isso quer dizer que podemos expressar a lógica clássica do interior das **LFIs**.

W. Carnielli e J. Marcos começam a partir da construção de um sistema que será uma extensão de **LPC**. Esta é obtida com o acréscimo de operadores de consistência e inconsistência. Estes possuem matrizes tais que $\circ$ sempre toma o valor distinguido 1. Por outro lado, $\bullet$ é constante e igual a 0. A lógica obtida é designada por **eLPC**.

Dada qualquer axiomatização de **LPC** (Hilbert, Frege, Lukasiewicz e Tarski) obtém-se uma axiomatização para **eLPC** com o acréscimo do seguinte esquema de axioma:[9]

(ext) $\vdash_{eLPC} \circ A$

O operador de inconsistência $\bullet$ pode ser apresentado pela seguinte definição:

$\bullet A =^{def} \neg\circ A$;

[9]Já aqui tem sentido falar em fatos atômicos consistentes.

Ou seja, a inconsistência em **eLPC** é definida como em **Ci**. Além disso, a regra $[\circ A, A, \neg A \vdash_{eLPC} B]$ vale, de tal modo que se pode expressar o princípio de explosão gentil. Todavia, deve-se atentar ao fato de que $\vdash_{eLPC} \circ A$ faz **eLPC** ser, além de gentilmente explosiva, explosiva pura. Ora, por isso, **eLPC** não pode ser uma **LFI**, mas somente uma lógica consistente, pois é gentilmente explosiva e $\forall A \forall \Gamma (\forall B \in \Delta(A))(\Gamma \Vdash B)$.

É importante ressaltar que a lógica **Ci** é um fragmento de uma formulação alternativa da lógica clássica. É garantido o fato de **Ci** ser uma lógica não-contraditória.

Tanto **bC** quanto **Ci** apresentam negações fortes, ambas definidas do mesmo modo, qual seja: $\sim A =^{def} (\neg A \wedge \circ A)$. Todavia, tal negação não se comporta do mesmo modo nas duas lógicas.

Consideremos, novamente, qualquer axiomatização da lógica clássica. Uma negação comporta-se classicamente se, para qualquer conectivo da forma $\div$, acontecer o seguinte:

(Alt10) $\vdash_{Alt} (A \vee \div A)$;

(Alt11) $\vdash_{Alt} (\div \div A \rightarrow A)$;

(Alt12) $\vdash_{Alt} (A \rightarrow (\div A \rightarrow B))$.

Conseqüentemente, para mostrar que a negação forte em **Ci** tem comportamento clássico, basta demonstrar que (Alt10)-(Alt12) são válidos em **Ci**, se se troca $\div$ por $\sim$. A cláusula (Alt11) segue-se de (Alt10) e (Alt12).

Com efeito, W. Carnielli e J. Marcos provam o seguinte lema:

Proposição 1.8.41. *São teoremas de **Ci**:*

(i) $\vdash_{Ci} (A \vee \circ A)$;

(ii) $\vdash_{Ci} (\neg A \vee \circ A)$.

Demonstração: (i) Por (Min7), conclui-se que $[\circ A \vdash_{Ci} (A \vee \circ A)]$. De (ci) segue-se que $[\neg \circ A \vdash_{Ci} A]$. Com isso, por (Min6) e transitividade $[\neg \circ A \vdash_{Ci} (A \vee \circ A)]$. Por casos, conclui-se $(A \vee \circ A)$. Para demonstrar (ii) deve-se operar do mesmo modo, só que usando (ci). □

A partir da proposição acima, não se tem dificuldade de apresentar uma demonstração para o fato de que:

Teorema 1.8.42. *A negação forte $\sim$, em **Ci**, é clássica.*

Demonstração: Temos que mostrar que (Alt10)–(Alt12) são verdadeiros para a negação de **Ci**, a qual é definida como $(\neg A \wedge \circ A)$. Para vermos que (Alt10) vale para $\sim$ é preciso que (Alt10) $\vdash_{Alt} (A \vee \div A)$ seja o caso substituindo $\div$ por $\sim$. Assim, temos $\vdash_{Ci} (A \vee (\neg A \wedge \circ A))$. Esta é equivalente à $\vdash_{Ci} (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \circ A))$, a qual é uma partícula maximal. (Alt12) segue-se da definição de negação forte bem como da regra (bc1). Já (Alt11) é o caso porque $[\sim \sim A, A \vdash_{Ci} A]$ (reflexividade) e, por (Alt12) temos $[\sim\sim A, \sim A \vdash_{Ci} A]$. Com isso, usando uma variação da prova por casos obtida por (Alt10), resulta que $[\sim\sim A \vdash_{Ci} A]$. □

Interessante é que temos, como mostram W. Carnielli e J. Marcos, a partir da negação forte, uma tradução conservativa de **LPC** em **Ci**, conforme se nota abaixo.

Teorema 1.8.43. *A função abaixo é uma tradução conservativa de LPC em Ci :*

(t1.1) $t_1(p) = p$, se p é uma fórmula atômica;
$(t1.2)$ $t_1(A\sharp B) = t_1(A)\sharp t_1(B)$, se $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
$(t1.3)$ $t_1(\neg A) = \sim t_1(A)$.
Deste modo, é o caso que $[\Gamma \vdash_{LPC} A] \iff [t_1[\Gamma] \vdash_{Ci} t_1(A)]$.

Corolário 1.8.44. *Pode-se traduzir conservativamente* ***eLPC*** *em Ci :*

Para tanto, é necessário estender a função acima com o acréscimo de:
$(t1.4)$ $t_1(\circ A) = \circ\circ\, t_1(A)$.

Teorema 1.8.45. *A lógica bC tem uma negação clássica.*

Demonstração: Sabemos que $A\wedge (\neg A \wedge \circ A) =\perp$. Se uma lógica é não-trivial e tem partícula minimal, então ela admite negação forte, conforme demonstrado anteriormente. Por isso, podemos definir uma negação forte em bC como $\bowtie A =^{def.} (A \rightarrow\perp)$. A negação $\bowtie$ é clássica, pois $\vdash_{bC} (A \vee ((A \rightarrow\perp))$ é uma instância do axioma (Min9). E $(\bowtie\bowtie A \rightarrow A)$ também é verdadeiro, assumindo que $[((A \rightarrow\perp) \rightarrow\perp), (A \rightarrow\perp) \vdash_{bC}\perp]$, por modus ponens. Mas temos que $[\perp\vdash_{bC} A]$ e que $[(A \rightarrow\perp) \rightarrow\perp), A \vdash_{bC} A$. Com isso, pela prova por casos introduzida nesta demonstração chegamos até $[(A \rightarrow\perp) \rightarrow\perp) \vdash_{bC} A]$. □

Temos ainda que:

Proposição 1.8.46. *Em Ci as duas negações fortes são clássicas e equivalentes (todavia, nem todas negações fortes de Ci são clássicas).*

1.8.5 Os dC-sistemas

Apesar das lógicas paraconsistentes serem, pelo seu próprio caráter e conteúdo, caracterizadas como lógicas heterodoxas, a nova abordagem feita do universo dos C-sistemas, nos permite concluir que existe o ortodoxo no heterodoxo, e ainda, o clássico no não-clássico. Ora em se tratando de paraconsistência, a abordagem tradicional é aquela que identifica contraditoriedade com inconsistência. E a não-clássica aquela que aceita ser a distinção entre contraditoriedade e inconsistência viável em vários níveis.

Recordemos como funcionam as coisas em Ci :

(i) $\bullet A \dashv\vdash_{Ci} (A \wedge \neg A)$, mas $\circ A \dashv\nvdash_{Ci} \neg(A \wedge \neg A)$.

Percebe-se que em Ci os conceitos de contradição e inconsistência são equivalentes. Todavia, não se pode definir nem $\bullet$ nem $\circ$ com a ajuda apenas dos outros conectivos. E aí está o motivo pelo qual a lógica Ci não pode ser vista como um dC-sistema.

Os dC-sistemas são C-sistemas. Duas propriedades fundamentais daqueles são:

1) Os conceitos de contradição e inconsistência são identificados;

2) Os operadores $\circ$ e $\bullet$ são definíveis a partir dos outros conectivos.

Com isso, Ci não é um dC-sistema, uma vez que não satisfaz a cláusula 2.

Consideremos o seguinte:

Os axiomas (Min1)-(Min11), (bc1), (ci), (MP) e a definição de $\circ$ em função de $\bullet$ mais a seguinte regra:

(cl) $\neg(A \wedge \neg A) \vdash \circ A$;

A lógica dada pela axiomatização acima é denominada de **Cil**. O axioma (cl) é o que falta para termos os dois operadores definidos a partir dos outros conectivos. Com isso, temos o primeiro dC-sistema.

Proposição 1.8.47. *Nenhuma extensão paraconsistente de Cil pode ter* $\neg(A \wedge \neg A)$ *como teorema.*

Demonstração: Se $\neg(A \wedge \neg A)$ fosse teorema, então teríamos a consistência da fórmula A. E isso seria suficiente para destruir a paraconsistência. □

É fundamental ressaltar que nem todas as lógicas paraconsistentes rejeitam a validade de $\neg(A \wedge \neg A)$. Por exemplo, existe uma extensão de Ci chamada $LFI1$ na qual a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$ vale. ($LFI1$ é comumente caracterizada como J_3). Por isso, não se deve sustentar a crença de que uma lógica é paraconsistente se derroga $\neg(A \wedge \neg A)$.

Teorema 1.8.48. *Em* ***Cil*** *pode-se definir o operador de inconsistência como* $\bullet A =^{def} (A \wedge \neg A)$. *E o operador de consistência pode ser definido como* $\circ A =^{def} \neg(A \wedge \neg A)$.

Demonstração: É imediato que as regras (bc1), (ci) e (cl) continuariam válidas se substituíssemos todas as ocorrências de $\bullet$ e $\circ$ pelas suas novas definições. □

A formulação original dos C-sistemas, feita no texto de W. Carnielli e J. Marcos, os constrói a partir de uma base clássica, especificamente, da lógica proposicional clássica. Ou seja, ao iniciar da parte positiva da lógica clássica, os autores instauram a lógica $\mathbf{C}_{\text{min}}$ para depois lançaram extensões conservativas desta, tais como as lógicas da família **bC**. Conseqüentemente, a lógica **Ci** e todas as que nascem de **Ci** também são subsistemas da lógica clássica. Os dC-sistemas se constituem apenas enquanto subsistemas dos C-sistemas. E, por isso, também possuem uma base clássica. Todavia, se iniciássemos nossa jornada assumindo a lógica positiva intuicionista, veríamos que outras lógicas apareceriam. Contudo, estas teriam várias propriedades dos C-sistemas.

Como seriam C-sistemas com base em lógicas distintas da clássica? Uma axiomatização para a lógica positiva intuicionista de Hilbert-Bernays é dada, como já sabemos, pelos axiomas (Min1)-(Min8). Se acrescentássemos (bc1) a tal sistemas, teríamos a lógica *ibC*. Esta possui inúmeras propriedades de **bC**, mas perde outras, tal como a prova por casos. Interessante é o fato de que *ibC* se transforma na lógica clássica se a ela acrescentarmos a regra (*ibc*) $\circ A \dashv\vdash_{ibC} (A \vee \neg A)$.

De fato:

Teorema 1.8.49. *Os axiomas (Min1)-(Min8) mais* $(A \vee \neg A)$ *e* $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ *fornecem uma axiomatização correta e completa para LPC.*

Proposição 1.8.50. *ibC não tem teoremas da forma* $\circ A$.

Nota-se que *ibC* não é explosiva, e nem parcialmente explosiva, mas sim gentilmente explosiva. É também uma lógica adjuntiva e disadjuntiva. Ora, não nos cabe aqui, mas é razoável estudar as propriedades sintáticas e semânticas das lógicas que surgem de $ibC : ibbC, ibbbC, ibbbbC, iCi$, etc.

A lógica **Cil** possui a propriedade abaixo:

Daqui adiante, as lógicas são vistas como extensões de **Cil** pelo acréscimo da algumas regras de inferência.

W. Carnielli e J. Marcos consideram mais alguns axiomas:

(cd) $\neg(\neg A \wedge A) \vdash \circ A$;

(cb) $(\neg(A \wedge \neg A) \vee \neg(\neg A \wedge A)) \vdash \circ A$.

Temos a lógica **Cib** definida pelo acréscimo de (cb), isto é, o axioma bidirecional para contraditoriedade, à lógica Ci.

(cg) $(B \leftrightarrow (A \wedge \neg A)) \vdash (\neg B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A))$;

O axioma (cg) é denominado de axioma global para contraditoriedade.

(RG) $[B \dashv\vdash (A \wedge \neg A)] \Rightarrow [\neg B \dashv\vdash \neg(A \wedge \neg A)]$.

(ce) $A \vdash \neg\neg A$.

A lógica **Cie** é axiomatizada por Ci e a regra (ce). Tal regra é algumas vezes chamada de expansão das duplas negações.

A propagação da consistência

A abordagem tradicional das lógicas paraconsistentes definia A^o como, exatamente, $\neg(A \wedge \neg A)$. E de tal fórmula dizia-se que era "bem-comportada". Mas no território dos C-sistemas, onde estão as lógicas $C_n, 1 \leq n < \omega$? Não tão distante de **Cil**. Aliás, muito perto. Aceitemos que:

(ca1) $(\circ A \wedge \circ B) \vdash \circ(A \wedge B)$

(ca2) $(\circ A \wedge \circ B) \vdash \circ(A \vee B)$

(ca3) $(\circ A \wedge \circ B) \vdash \circ(A \rightarrow B)$

Se adicionássemos os axiomas (ca1)-(ca3) à lógica **Cil**, obteríamos o sistema **Cila**, também conhecido como a lógica C_1 de Newton da Costa. W. Carnielli e J. Marcos observam que:

Teorema 1.8.51. $[\Gamma \vdash_{LPC} A] \Leftrightarrow [\circ(\Pi), \Gamma \vdash_{Cia} A]$, *onde* $\circ(\Pi) = \{\circ p : p$ *é uma fórmula atômica que ocorre como subfórmula em* $\Gamma \cup \{A\}\}$.

Corolário 1.8.52. *A função abaixo traduz conservativamente eLPC na lógica* ***Cia***.

$(t2.1)$ $t_2(p) = \circ p$, se p é uma fórmula atômica;
$(t2.2)$ $t_2(A\sharp B) = t_2(A)\sharp t_2(B)$, se $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
$(t2.3)$ $t_1(\neg A) = \neg t_2(A)$;
$(t2.4)$ $t_2(\circ A) = \circ t_2(A)$.

Além de propagar a consistência como **Cila**, pode-se imaginar outros modos de propagação. E isso é o que foi feito por Newton da Costa, Jean-Yves Béziau e Otávio Bueno:

(co1) $(\circ A \vee \circ B) \vdash \circ(A \wedge B)$;
(co2) $(\circ A \vee \circ B) \vdash \circ(A \vee B)$;
(co3) $(\circ A \vee \circ B) \vdash \circ(A \rightarrow B)$;

A lógica obtida pela adição de (co1)-(co3) à lógica **Cil** é chamada de **Cilo**.

Cio, por sua vez, é axiomatizada a partir de **Cil** sem adicionar o esquema (c1).

Teorema 1.8.53. $[\Gamma \vdash_{Cio} \circ A]$ *sempre que* $[\Gamma \vdash_{Cio} \circ B]$, *para alguma subfórmula* B *de* A.

W. Carnielli e J. Marcos consideram várias formas de propagação:

(cr1) $\circ(A \wedge B) \vdash (\circ A \vee \circ B)$;
(cr2) $\circ(A \vee B) \vdash (\circ A \vee \circ B)$;
(cr3) $\circ(A \rightarrow B) \vdash (\circ A \vee \circ B)$.

E mais:

(cv1) $\vdash \circ(A \wedge B)$;
(cv2) $\vdash \circ(A \vee B)$;
(cv3) $\vdash \circ(A \rightarrow B)$;
(cw) $\vdash \circ(\neg A)$.

E ainda:

(cj1)$\bullet(A \wedge B) \dashv\vdash ((\bullet A \wedge B) \vee (\bullet B \wedge A))$;
(cj2)$\bullet(A \vee B) \dashv\vdash ((\bullet A \wedge \neg B) \vee (\bullet B \wedge \neg A))$;
(cj3) $\bullet(A \rightarrow B) \dashv\vdash (A \wedge \bullet B)$.

Vários C-sistemas podem ser caracterizados a partir do modo de propagação da consistência:

Cila = **Cil** + (ca1)-(ca3);
Cilo= **Cil** + (co1)-(co3);

Cibvw= **Ci** + (cv) + (cw);
Ciborw= **Ci**+ (co1)-(co3) + (cr1)-(cr3) + (cw);
Cij= **Ci** + (cj1)-(cj3);
Cije= **Cij** + (ce);
Ciore= **Ci** + (co1)-(co3) + (cr1)-(cr3) + (ce);
Cive= **Ci** + (cv) + (ce).

Enfim, várias combinações são possíveis. Todavia, o curioso é notar que para as lógicas paraconsistentes trivalentes, W. Carnielli e J. Marcos provaram que as matrizes de P^1 são axiomatizadas por **Civw**; as matrizes de P^2 por **Cive**; as matrizes de P^3 por **Ciorw**; as matrizes de LFI2 por **Ciore**; as matrizes de LFI1 por **Cije**. Nem todas os as lógicas que estendem a lógica **Ci** são dC-sistemas.

Quais outros sistemas da literatura acerca da lógica paraconsistente podem ser vistos como **LFIs**? Uma conclusão que se apresenta como evidente: A abordagem apresentada por Walter Carnielli e João Marcos é capaz de unificar sob o mesmo rótulo uma grande variedade de lógicas paraconsistentes. Como se percebe, os famosos sistemas C_n , bem como lógicas corriqueiras no âmbito paraconsistente (P^1e J^3), aqui imaginados como os dC-sistemas, são apenas um subsistema de algo maior. E esse algo é exatamente aquilo que chamamos de **LFIs**.

A partir do estudo das **LFIs**, pretendemos, ao longo de nossa jornada, responder o problema abaixo:

Existem extensões modais das lógicas bC e Ci que são corretas e completas? Sabemos que uma resposta satisfatória a essa questão é também uma solução ao paradoxo da cognoscibilidade.

Para tanto, é fundamental, antes, um estudo das lógicas modais.

Capítulo 2

Lógicas modais - axiomatização e modelos

> "Não há coerção em virtude da qual, porque algo aconteceu, algo mais deva acontecer. So há necessidade lógica."
> Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*

É notório o uso da lógica modal como instrumento capaz para auxiliar os filósofos na compreensão de vários conceitos filosóficos. Sem ela, não teria sido possível a Kripke expressar aquilo que chamou verdades necessárias *a posteriori*[1]. Não seria possível dar soluções formais a paradoxos famosos, tais como o *paradoxo da cognoscibilidade* descoberto por Fitch[2]. O uso da linguagem modal permite um maior entendimento de conceitos da linguagem natural, uma vez que é, assim como as lógicas em geral, capaz de formalizá-los e demonstrar várias propriedades inerentes a tais conceitos que, de outro modo, passariam despercebidas.

Apesar de formulações dos conceitos modais já serem encontradas em Aristóteles e nos lógicos medievais, a intuição básica da lógica modal é devida a Leibniz[3]. Mas qual o objeto da lógica modal? Como o próprio nome já sugere, a lógica modal trata das modalidades, sejam elas metafísicas, epistêmicas, deônticas ou temporais. Os conceitos de necessidade e possibilidade são formalizados em uma linguagem de tal

[1]Em *Naming and Necessity.*

[2]Veja *A Logical Analysis of Some Value Concepts.*

[3]Em *A Monadologia* pode-se encontrar as definições de verdade de fato e verdade de razão. Para Leibniz, as verdades de razão "são necessárias e o seu oposto, impossível; as de fato são contingentes, e o seu oposto, possível." Tal formulação acerca do conceito de verdade foi capaz de gerar a idéia de que algo necessário é verdadeiro em todos os mundos possíveis, ao passo que o possível é verdadeiro em pelo menos um mundo possível.

modo que seja possível elucidar o significado daquilo que é necessário e daquilo que é possível. Conseqüentemente, pode-se também definir o contingente e o impossível[4], além de todas as outras modalidades. Mas, enfim, o que é uma modalidade? Uma modalidade é uma maneira ou modo de alterar uma proposição.

A lógica modal é um sistema formal construído a partir de um conjunto de fórmulas e uma relação de conseqüência lógica sobre esse conjunto. Os operadores modais se dividem em várias categorias, tais como: operadores aléticos, epistêmicos, deônticos e temporais. E ainda existem lógicas modais com modalidades interpretadas de muitos outros modos possíveis[5]. Sabe-se que os operadores tradicionais da lógica clássica são todos funcionais-veritativos (verofuncionais), isto é, dada alguma informação acerca do valor-verdade das proposições elementares então determina-se o valor-verdade das proposições que contém tais operadores. Os operadores modais não são verofuncionais, uma vez que o valor-verdade das proposições modais não pode ser determinado a partir do valor das proposições elementares. O mesmo acontece com a negação paraconsistente, visto que se $v(A) = 0$, então $v(\neg A) = 1$. Mas nada se sabe se $v(A) = 1$.

Os operadores aléticos foram as primeiras modalidades formalizadas em sistemas lógicos. São eles o $\Box$ (é necessário) e o $\Diamond$ (é possível). As outras modalidades nascem a partir de interpretações peculiares feitas, em geral, da necessidade. Com isso, tem-se o operador de conhecimento K_i (O agente i conhece), o de crença B_i (O agente i acredita), além de noções deônticas e temporais. Com o uso do operador de possibilidade, pode-se definir o operador de contingência ∇ do seguinte modo: $\Diamond A \wedge \Diamond \sim A$.

Na presente dissertação,usa-se fundamentalmente lógicas que têm na linguagem-objeto operadores modais aléticos. Deste modo, tenta-se construir uma lógica modal com base em uma lógica paraconsistente, como no próximo capítulo se constata. Contudo, o objetivo, neste capítulo, consiste em explicar o funcionamento sintático e semântico de lógicas modais aléticas, isto é, aquelas que tratam da necessidade e da possibilidade. Para tanto, mostra-se como elaborar axiomáticas de lógicas modais e, ao mesmo tempo, como dar interpretações a tais conjuntos de enunciados. Mais adiante, encontra-se com uma abordagem epistêmica dos conceitos modais.

2.1 Lógicas modais aléticas

Nesta parte, o livro *Modalità e Multimodalità* de Carnielli e Pizzi é o guia[6]. Com a intenção de definir as lógicas modais, é razoável, antes, estipular uma linguagem para as lógicas. Com isso:

[4]Para um estudo acerca da história da lógica modal é recomendado a leitura de *The genesis of possible world semantics* de Jack Copeland.

[5]Por exemplo, veja *An Essay in Modal Logic* de G.H. von Wright.

[6]Isso não impede, vez ou outra, que ocorra o uso de outros livros como, por exemplo, o de Hughes e Cresswell e o de Brian Chellas.

Definição 2.1.1. *A **linguagem de uma lógica modal proposicional** contém os seguintes símbolos:*

a) Um conjunto enumerável de variáveis proposicionais.
b) Operadores: $\vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \Box$ e $\Diamond$
c) Símbolos auxiliares: "(" e ")".

A linguagem da lógica modal deve incluir ou operador de necessidade ou o operador de possibilidade, uma vez que são interdefiníveis. A definição de fórmula é obtida como no caso clássico, só que agora com o acréscimo de uma cláusula para construir fórmulas modais. Em geral, as lógicas modais podem ser normais ou não-normais, como definido a seguir:

Definição 2.1.2. *Uma lógica modal é **normal** se contém:*

a) a lógica proposicional clássica;
b) o axioma K;
c) a regra MP;
d) a regra de substituição.
e) a regra de necessitação.

Fato que merece destaque é o de que poderíamos apresentar as lógicas modais como extensões da lógica **eLPC** que vimos no capítulo anterior, uma vez que **eLPC** é exatamente a lógica proposicional clássica, pois como sabemos **eLPC** tem como esquema de axioma $\vdash \circ A$. Nesse sentido, sempre que estamos falando de **LPC** estamos também falando de **eLPC**. Por isso, não é estranho afirmar que as lógicas modais normais são todas extensões de **eLPC**.

Nos preocupamos, neste capítulo, apenas com lógicas modais normais. O menor sistema de lógica modal normal é o sistema **K**, o qual está contido em todas as lógicas modais normais. As outras lógicas modais nascem a partir de **K** com o acréscimo de novos axiomas e de restrições nas relações de acessibilidade.

2.1.1 Axiomatização de lógicas modais

A lógica modal K

A axiomatização da lógica modal **K** é dada pelo seguinte:

1) Todos os teoremas do cálculo proposicional clássico;
2) O esquema de axioma (K): $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
3) As seguintes regras de inferência:

A regra de *modus ponens* como no capítulo anterior.

(Nec) Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$;

Observamos que as lógicas modais estudadas neste capítulo são fundadas na lógica clássica, ao passo que as lógicas modais do próximo capítulo são fundadas em lógicas paraconsistentes. Precisamos ainda de uma das duas definições: ou (Def. $\Diamond$) $\Diamond A \leftrightarrow \sim \Box \sim A$ ou (Def. $\Box$) $\Box A \leftrightarrow \sim \Diamond \sim A$; Para nossos propósitos, aceitemos a definição de $\Diamond$. Vejamos, então, algumas propriedades sintáticas bastante conhecidas da lógica **K** e suas respectivas demonstrações (Hughes e Cresswell). As propriedades abaixo continuam válidas na nossa lógica modal $\mathbf{Ci}^T$, apresentada no próximo capítulo:

Proposição 2.1.3. *(RN)* $\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$

Demonstração: –

(1) $\vdash A \to B$	Premissa
(2) $\vdash \Box(A \to B)$	(1) Necessitação
(3) $\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	Axioma K
(4) $\vdash (\Box A \to \Box B)$	MP

$\Box$

Proposição 2.1.4. *(M)* $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

Demonstração: –

(1) $\vdash (A \wedge B) \to A$	LPC
(2) $\vdash (A \wedge B) \to B$	LPC
(3) $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$	(1) RN
(4) $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box B$	(2) RN
(5) $\vdash \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$	(1) e (2) LPC

$\Box$

Proposição 2.1.5. *(RM)* $\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Diamond A \to \Diamond B}$

Demonstração: –

(1) $\vdash A \to B$	Premissa
(2) $\vdash \sim B \to \sim A$	LPC
(3) $\vdash \Box \sim B \to \Box \sim A$	RN
(4) $\vdash \sim \Box \sim A \to \sim \Box \sim B$	LPC
(5) $\vdash \Diamond A \to \Diamond B$	Def.$\Diamond$

$\Box$

Proposição 2.1.6. *(Def.$\Box$)* $\Box A \leftrightarrow \sim \Diamond \sim A$

Demonstração: –

(1) $\Diamond \sim A \leftrightarrow \sim \Box \sim\sim A$	Def.$\Diamond$
(2) $\Box \sim\sim A \leftrightarrow \sim \Diamond \sim A$	LPC
(3) $A \leftrightarrow \sim\sim A$	LPC
(4) $\Box A \leftrightarrow \Box \sim\sim A$	(3) RN

(5) $\Box A \leftrightarrow \sim \Diamond \sim A$ (2) e (4) LPC $\Box$

É simples observar que se eliminássemos (K) e (Nec) obteríamos a lógica proposicional clássica. De outro modo, se acrescentarmos ao sistema **K** outros axiomas, iremos ao encontro dos sistemas modais mais sofisticados.

As lógicas modais D, T, B, S4 e S5

Como dito, o acréscimo de esquemas de axiomas ao sistema **K** dá origem a novos sistemas modais. Aqui mencionamos apenas cinco:

D = K + D;
KT(=T) = K + T;
B = KT + B;
S4 = KT + 4 ;
S5 = S4 + 5 .
Mas quem é quem?
(D) $\Box A \rightarrow \Diamond A$;
(T) $\Box A \rightarrow A$;
(B) $A \rightarrow \Box\Diamond A$;
(4) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$;
(5) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$.

Notemos que todos os teoremas de **K** são também teoremas das lógicas modais que estendem **K**. Mas o que podemos dizer das lógicas modais normais com o uso daqueles princípios que elucidamos no capítulo 1? Ora, as lógicas modais acima são lógicas não-contraditórias, uma vez que para toda fórmula A existe uma teoria Γ tal que $\Gamma \nVdash A$ ou $\Gamma \nVdash \sim A$. São também lógicas não-triviais, pois existe uma teoria Γ e existe uma fórmula B tal que $\Gamma \nVdash B$. Como acontece na lógica clássica, as lógicas modais são explosivas, assumindo que na presença de um conjunto contraditório de fórmulas se tornam triviais. São lógicas finitamente trivializáveis, pois existem fórmulas, as contraditórias, capazes de trivializá-las. A conjunção de tais fórmulas nos mostra que possuem particulas minimais.

Existe um sistema de lógica modal conhecido como **Ban**, o qual é construído do seguinte modo:

Ban = **D** + $A \rightarrow \Box A$;
Ban = **K** + $A \leftrightarrow \Box A$;

Em **Ban**, verificamos que acontece o colapso do operador de necessidade e, deste modo, a lógica se transforma na lógica proposicional clássica. Um outro sistema interessante é **Ver**, no qual é acrescentado, ao sistema **K**, como teorema $\Box A$, para toda fórmula A. Deste modo, em **Ver** todas as fórmulas são teoremas e, por isso, **Ver** é uma lógica trivial. Como Hughes e Cresswell observaram, os sistemas **Ban** e **Ver** são dois sistemas incompatíveis, uma vez que **K+Ver+Ban** é trivial[7]. Por quê? porque se temos $\vdash A \leftrightarrow \Box A$ e $\vdash \Box A$, então $\vdash A$, para toda fórmula A. Deste modo, podemos afirmar que **Ver** e **Ban** não são comparáveis. Os autores ainda observam que:

a) Toda lógica modal normal está contida ou em **Ver** ou em **Ban**;

b) Tanto **Ver** quanto **Ban** são maximais, pois para qualquer fórmula que não é teorema dos sistemas se a eles for acrescentada torna a lógica trivial. Percebemos, portanto, que ambos são casos limite das lógicas modais normais.

O paradoxo da cognoscibilidade que recebe atenção no último capítulo da dissertação é problemático exatamente porque permite a derivação no sistema formal da proposição $A \rightarrow \Box A$, a partir de alguns pressupostos que são mencionados mais na frente. Com isso, finalizamos a exposição axiomática das lógicas modais.

Vejamos, então, como prover algumas das lógicas modais acima[8] com semântica de mundos possíveis e como, a partir de tal semântica, obter provas de corretude e completude.

Semântica para lógicas modais

Para que seja possível definir modelos para lógicas modais pode-se levar em consideração o fato de que os operadores modais tratam de situações possíveis e de valorações em mundos possíveis. Por isso, é razoável que tenhamos modelos capazes de determinar as condições de verdade dos operadores modais. Os modelos para a lógica modal foram construídos em duas partes. No estágio inicial, temos aqueles modelos chamados carnapianos, nos quais não existe uma relação de acessibilidade[9]; em virtude disso, tais modelos despertam pouco interesse, visto que desejamos compreender os modelos com relação de acessibilidade. Deste modo, utilizamos apenas os modelos de Kripke, nos quais existe uma relação de acessibilidade definida entre mundos e que varia de uma lógica modal para a outra.

Assim, precisamos de algumas definições:

Definição 2.1.7. *$M = < W, R, v >$ é um* ***modelo de Kripke*** *se e somente se:*

(1) W é um conjunto de mundos possíveis e $W \neq \emptyset$;
(2) R é uma relação de acessibilidade tal que $R \subseteq W \times W$;
(3) v é uma valoração tal que $v : For \times W \rightarrow \{0, 1\}$.

[7]Os autores consideram o sistema resultante como sendo inconsistente, uma vez que para eles um sistema é inconsistente se e somente se é trivial. Como sabemos, os dois conceitos não são equivalentes.

[8]Jean-Yves Béziau mostrou que podemos definir uma negação com todas as propriedades da negação paraconsistente no interior da lógica modal $S5$. Veja *$S5$ is a paraconsistent logic and so is classical first-order logic* e também *Paraconsistent logic from a modal viewpoint.*

[9]Veja *Modalità e Multimodalità*

Dada a definição de modelo de Kripke, é natural estabelecer uma semântica para os operadores $\Box$ e $\Diamond$. Isto é, podemos estabelecer uma semântica formal capaz de determinar as condições de verdade para os operadores modais do seguinte modo:

Definição 2.1.8. *Considere um mundo w em um modelo $M =< W, R, v >$. Uma relação de satisfação $\Vdash$ na qual $\Vdash \subseteq W \times For$ é definida como:*

(1) $M, w \Vdash A$ sse $v(w, A) = 1$, para A atômica;
(2) $M, w \Vdash {}^{\neg}A$ sse $M, w \nVdash A$
(3) $M, w \Vdash A \wedge B$ sse $M, w \Vdash A$ e $M, w \Vdash B$;
(4) $M, w \Vdash A \vee B$ sse $M, w \Vdash A$ ou $M, w \Vdash B$;
(5) $M, w \Vdash A \rightarrow B$ sse $M, w \nVdash A$ ou $M, w \Vdash B$;
(6) $M, w \Vdash \Box A$ se e somente se para todo w' em M tal que $wRw', M, w' \models A$;
(7) $M, w \Vdash \Diamond A$ se e somente se existe algum w' em M tal que $wRw', M, w' \models A$;

Assim, sabemos agora o que é um modelo de Kripke e como dar uma semântica a um operador que esteja inserido em tal modelo. Mas como as coisas estão, os modelos acima são capazes de validar apenas os axiomas do sistema **K**, o qual não possui nenhuma restrição na relação de acessibilidade. Notemos que uma relação de acessibilidade R é definida como $R \subseteq W \times W$. Deste modo, como todas a relações, têm as propriedades usuais. Com isso, em um modelo de Kripke $M =< W, R, v >$ a relação R pode ser:

K: R é arbitrária, isto é, não tem restrições
D: R é serial
T: R é reflexiva
4: R é transitiva
B: R é simétrica
5: R é euclidiana

Notemos que as propriedades acima podem ser descritas com o uso da linguagem de primeira-ordem[10]. Assim, temos:

R é serial sse $\forall x \exists y(xRy)$
R é reflexiva sse $\forall x(xRx)$
R é transitiva sse $\forall xyz((xRy \wedge yRz) \rightarrow (xRz))$
R é simétrica sse $\forall xy(xRy \rightarrow yRx)$
R é euclidiana sse $\forall xyz((xRy \wedge xRz) \rightarrow (yRz))$

[10] É possível ainda traduzir as lógicas modais na lógica de primeira-ordem (teoria da correspondência), pois existe uma semelhança muito grande entre os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ com os quantificadores, tais como o $\forall$ e $\exists$, o que possibilita a construção de uma função de tradução das fórmulas de lógica modal **S5** na lógica de primeira-ordem **FOL** $t : For_{S5} \rightarrow For_{FOL}$tal que:
$t(p_n) = P_n x$
$t(\Box A) = \forall x t(A)$
$t(\Diamond A) = \exists x t(A)$

O curioso é notar que os axiomas das lógicas modais são válidos somente na classe de modelos na qual as relações forem compatíveis. Assim, o axioma (5) é válido se e somente se a relação de acessibilidade for euclidiana, do mesmo modo que o axioma K é válido em todas as estruturas sem restrição na relação de acessibilidade. Tais fatos podem ser demonstrados.

Vejamos a estratégia para demonstrar a completude dos sistemas modais. Podemos optar por provar que cada um dos sistemas acima é correto e completo ou, de modo mais abstrato, dar uma prova geral de completude por via do esquema $G\infty$. Apresentamos apenas o primeiro caminho.

Completude das lógicas modais

Com a intenção de demonstrar a completude de lógicas modais normais em relação a uma determinada classe de modelos C é suficiente provar que C contém o modelo canônico. Com isso, como Brian Chellas observou[11], o problema de encontrar uma prova de completude para uma lógica modal consiste no problema de encontrar um modelo canônico para a lógica, o qual deve estar na classe de modelos. Por isso, a questão crucial da completude é mostrar que para toda lógica modal normal **L** existe um tipo especial de modelo chamado modelo canônico (M^*) para **L**, cuja propriedade mais relevante é que uma dada fórmula é válida no modelo canônico de **L** se e somente se a fórmula é teorema de **L**.

Para obter uma prova de completude, a definição de validade é estabelecida. Vamos seguir o livro de Hughes e Cresswell na prova de completude.

Definição 2.1.9. *Se $M =< W, R, v >$ é um modelo de Kripke, então uma dada fórmula bem formada A é válida em $< W, R, v >$ sse $v(A, w) = 1$, para todo $w \in W$. Mais geral, dizemos que uma fórmula bem formada A é* ***C-válida em uma classe de modelos*** *C sse para todo modelo $v(A, w) = 1$, para todo $w \in W$.*

Mas qual é a relação entre a propriedade fundamental do modelo canônico e a completude?

Ora, seguindo Hughes e Cresswell, se temos uma classe de modelos e queremos mostrar que se uma fórmula A é válida nessa classe de modelos sse $\vdash_{\mathbf{L}} A$, o nosso primeiro passo deve ser mostrar a corretude, ou seja, que todos os axiomas da nossa lógica assumem valor 1 sob qualquer valoração e que as suas regras preservam a validade. Em seguida, suponha que $M^* \subseteq C$. Com isso, se uma fórmula é C-válida, então será válida no modelo canônico. Mas é válida em M^* sse $\vdash_{\mathbf{L}} A$. Deste modo, nossa tarefa consiste em construir para cada sistema **L** um modelo canônico e mostrar que ele está na classe de modelos.

Para tanto, é útil acrescentar mais algumas definições:

[11] Em *Modal logic - an Introduction.*

Definição 2.1.10. *Se* Π *é um conjunto de fórmulas de uma lógica modal baseada na lógica clássica, então* Π *é* ***L-inconsistente*** *sse existem* $A_1, ..., A_n \in \Pi$ *tal que* $\vdash_L \sim (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$. $\nvdash_L \sim A$ *se e somente se* A *é consistente com a lógica* $\boldsymbol{L}$. *De modo mais geral, o conjunto de fórmulas* $\{A_1, ..., A_n\}$ *é* ***consistente*** *em relação à lógica* $\boldsymbol{L}$ *se e somente se* $\nvdash_L \sim (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$.

Os conjuntos consistentes podem ser maximais. Mas o que é um conjunto consistente maximal?

Definição 2.1.11. *Um conjunto* W *de proposições é* ***consistente maximal*** *em um determinado sistema* $\boldsymbol{L}$ *se e somente se* $\boldsymbol{L}$ *é consistente e tem apenas extensões* $\boldsymbol{L}$*-inconsistentes. Um conjunto consistente maximal é aquele que se alguma fórmula for a ele acrescentada, então o conjunto se torna inconsistente e, por isso, trivial*[12]. *Formalmente:*

a) $\mathbf{L} \subseteq W$;
b) W é consistente;
c) Para toda fórmula A, ou A ou $\sim A$ pertence ao conjunto W.

Os conjuntos consistentes maximais, assim como os conjuntos saturados do capítulo 1, têm várias propriedades cruciais para a completude, dentre elas (Hughes & Cresswell):

Proposição 2.1.12. *Se* W *é um conjunto consistente maximal em relação à lógica* $\boldsymbol{L}$, *então valem as seguintes propriedades:*

(i) Para toda fórmula A, somente um elemento do conjunto $\{A, \sim A\}$ está em W;
(ii) $A \vee B \in W \Leftrightarrow A \in W$ ou $B \in W$;
(iii) $A \wedge B \in W \Leftrightarrow A \in W$ e $B \in W$;
(iv) $A \rightarrow B \in W$ e $A \in W \Rightarrow B \in W$;
(v) *Se* $\vdash_L A$, então $A \in W$;
(vi) *Se* $A \in W$ e $\vdash_L A \rightarrow B$, então $B \in W$.

Demonstração: O item (i) é imediato a partir da definição de maximalidade de W. Uma vez que W é consistente, segue-se que A e $\sim A$ não podem estar, ao mesmo tempo, em W. Se ambos estivessem em W, então $\{A, \sim A\} \subseteq W$. Sabemos que $\{A, \sim A\}$ é inconsistente, pois $\vdash_L \sim (A \wedge \sim A)$. Deste modo, o próprio W seria inconsistente. Para (ii), suponhamos que $A \vee B \in W$ mas que $A \notin W$ e $B \notin W$. Daí, por (i), $\sim A$ e $\sim B$ estão em W. Por isso, $\{A \vee B, \sim A, \sim B\} \subseteq W$. Mas isso faria W ser inconsistente, pois $\vdash_L \sim ((A \vee B) \wedge \sim A \wedge \sim B)$. Suponhamos que ou $A \in W$ ou $B \in W$ e que $A \vee B \notin W$. Com isso, $\{\sim (A \vee B), A\} \subseteq W$. Novamente, isso faria W inconsistente, assumindo que $\vdash_L \sim (\sim (A \vee B) \wedge A)$. Para (iii) suponhamos que $A \wedge B \in W$ e que ou

[12] Aqui não fazemos a distinção entre inconsistente e trivial, uma vez que a lógica em questão é explosiva.

$A \notin W$ ou $B \notin W$. Se $A \notin W$ então $\sim A \in W$ e daí $\{A \wedge B, \sim A\} \subseteq W$ e assim W seria inconsistente assumindo que $\vdash_L \sim ((A \wedge B) \wedge \sim A)$. Seja agora $A \in W$ e $B \in W$ mas $A \wedge B \notin W$. Daí, $\sim (A \wedge B) \in W$ e, por isso, $\sim A \in W$ ou $\sim B \in W$. Se $\sim A \in W$, então $\{\sim A, B, A\} \subseteq W$ e W seria inconsistente. Para (iv), seja $A \rightarrow B \in W$ e $A \in W$ e $B \notin W$. Daí, $\{A \rightarrow B, A, \sim B\} \subseteq W$ e, mais uma vez, W seria inconsistente. Com o intento de demonstrar (v), suponhamos que $\vdash_L A$. Com isso, $\{\sim A\}$ é L-inconsistente. Claramente, $\sim A \notin W$ e, por (i), $A \in W$. Como conseqüência de (v), segue-se (vi). □

O próximo passo consiste em mostrar que dado um conjunto consistente, ele pode ser estendido, via construção de Lindenbaum, a um conjunto consistente maximal. Isso vai garantir a existência de um conjunto consistente maximal, o qual vai ser usado para a construção do modelo canônico. Mas como construir um modelo canônico? Os mundos do modelo canônico devem ser conjuntos consistentes maximais em relação a algum sistema particular L. Daí, é conveniente fazer uma indução no comprimento das fórmulas e concluir que uma dada fórmula pertence ao conjunto consistente maximal associado à determinado mundo possível se e somente se a fórmula pode ser derivada a partir do mundo. Contudo, voltemos ao lema de Lindenbaum.

Lema 2.1.13. *(Lindenbaum) Se Π é um conjunto L-consistente de fórmulas, então existe um conjunto W L-consistente maximal tal que $\Pi \subseteq W$*[13].

Demonstração: Inicialmente, convém enumerar as fórmulas da lógica modal proposicional do seguinte modo: $A_1, A_2, ...$ Queremos que o conjunto Π se transforme em maximal porque ou colocaremos nele uma fórmula ou sua negação. Deste modo, definimos uma seqüência de $W_0, W_1, W_2, ...$ de conjuntos de fórmulas do seguinte modo:

(1) $W_0 = \Pi$;

(2) Dado W_n, definimos $W_{n+1} = \begin{cases} W_n \cup \{A_{n+1}\}, \text{ se consistente} \\ W_n \cup \{\sim A_{n+1}\}, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Precisamos mostrar que se W_n é L-consistente então W_{n+1}também é L-consistente. Por contraposição, suponhamos que W_{n+1} não seja L-consistente. Daí, nem $W_n \cup \{A_{n+1}\}$ e nem $W_n \cup \{\sim A_{n+1}\}$ são L-consistentes. E isso significa que existem fórmulas $B_1, ..., B_m$ em W_n de modo que

(i) $\vdash_L \sim (B_1 \wedge ... \wedge B_m \wedge A_{n+1})$

e que também existem fórmulas $C_1, ..., C_n$ em W_n tal que:

(ii)$\vdash_L \sim (C_1 \wedge ... \wedge C_k \wedge \sim A_{n+1})$

De (i) e (ii) segue-se por LPC, que:

$\vdash_L \sim (B_1 \wedge ... \wedge B_m \wedge C_1 \wedge ... \wedge C_k)$

Ou seja, o conjunto $\{B_1, ..., B_m, C_1, ..., C_k\}$ é L-inconsistente. Sabemos que tal conjunto é um subconjunto de W_n. Deste modo, W_n é inconsistente.

[13] O leitor verá mais adiante que para demonstrarmos a completude de lógicas modais paraconsistentes faremos uso de uma versão um pouco diferente desta do teorema de Lindenbaum .

Seja W a união de todos os W_n. Deste modo, (a) W é consistente. De fato, pois se W fosse inconsistente então algum subconjunto finito de W seria inconsistente. E sabemos que todo subconjunto finito de W é subconjunto de algum W_n. Mas foi mostrado que nenhum W_n é inconsistente. (b) W é maximal. Para tanto, considere qualquer fórmula A_i. Pela construção de W_i , ou $A_i \in W_i$ ou $\sim A_i \in W_i$. Assumindo que $W_i \subseteq W$ ou $A_i \in W$ ou $\sim A_i \in W$.

Como corolário, W é um conjunto consistente maximal o qual contém Π. □

Agora, precisamos definir um modelo canônico. Mas como? o modelo canônico é uma espécie peculiar de modelo de Kripke. Denotaremos o modelo canônico como W^*. Assim:

Definição 2.1.14. *Um modelo* $W^* = < W^\#, R^\#, v^\# >$ *é dito* ***canônico*** *se:*

a) $W^\# = \{W : W \text{ é consistente maximal}\}$

b) Para todo W em $W^\#$, $\Box A \in W$ sse para todo W' em $W^\#$ tal que $WR^\#W', A \in W'$

c) $v^\#(p, W') = 1$ se $p \in W'$; de modo contrário, $v^\#(p, W') = 0$

Ora, com isso vemos que os mundos no modelo canônico são todos conjuntos consistentes maximais. Construir um modelo no qual os mundos são conjuntos consistentes maximais nos leva a especificar quando um mundo é acessível a partir de outro (cláusula b). Para abreviar a notação, considere $den(W) = \{A : \Box A \in W\}$.

Proposição 2.1.15. *Seja* $\boldsymbol{L}$ *qualquer lógica modal proposicional. Seja* W *um conjunto L-consistente de fórmulas o qual contém* $\sim \Box B$*. Então,* $den(W) \cup \{\sim B\}$ *é L-consistente.*

Demonstração: A demonstração é por contraposição. Devemos mostrar que se $den(W) \cup \{\sim B\}$ não é L-consistente, então W não é L-consistente. Se $den(W) \cup \{\sim B\}$ não é L-consistente então existe um subconjunto finito de $den(W)$ tal que $\vdash_L \sim (A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge \sim B)$. Por LPC, $\vdash_L (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$. Por (RN), $\vdash_L \Box(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow \Box B$, e daí, $\vdash_L (\Box A_1 \wedge ... \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box B$. Novamente, por LPC, $\vdash_L \sim (\Box A_1 \wedge ... \wedge \Box A_n \wedge \sim \Box B)$.

Ora, mas isso significa exatamente que o conjunto $\{\Box A_1, ..., \Box A_n, \sim \Box B\}$ não é L-consistente. Mas como tal conjunto é subconjunto de W segue-se que W não é L-consistente. □

Conforme mencionamos anteriormente, a nossa questão vai se resumir à questão de encontrar um modelo canônico para o sistema modal em questão. Como já definimos o modelo canônico, estamos em condição de provar o teorema fundamental do modelo canônico, o qual garante imediatamente uma prova de completude.

Teorema 2.1.16. *(Modelo Canônico) Seja* $W^* = < W^{\#}, R^{\#}, v^{\#} >$ *o modelo canônico para uma lógica modal proposicional L. Então, para qualquer fórmula A e para qualquer* $W \in W^{\#}$ *, temos que:* W^*, $W \models A$ *sse* $A \in W$.

Demonstração: A demonstração é por indução sobre a complexidade da fórmula. Deste modo, precisamos examinar se o teorema acima vale para fórmulas atômicas e complexas. Assim, vejamos os casos:

1) Se A é uma proposição atômica P, então o teorema vale pela definição de satisfatibilidade: $M, w \Vdash P$ sse $v(w, P) = 1$

2) Se A é da forma $\sim B$, então $W^*, W \models\sim B$ sse $W^*, W \not\models B$. Pela hipótese de indução, $B \notin W$. Pela propriedade de $W, \sim B \in W$.

3) Se A é da forma $B \wedge C$, então $W^*, W \models B \wedge C$ sse $W^*, W \models B$ e $W^*, W \models C$. Pela hipótese de indução, $B \in W$ e $C \in W$. Pela propriedade de $W, B \wedge C \in W$.

Com o mesmo raciocínio provamos para A da forma $B \vee C$ e da forma $B \rightarrow C$.

4) Se A é da forma $\Box B$ então $W^*, W \models \Box B$ sse para todo $W'RW, W' \models B$. Pela

hipótese de indução, para todo$W'RW$, $B \in W'$. Pela definição de relação de acessibilidade do modelo canônico, temos que $\Box B \in W$. □

Teorema 2.1.17. *Qualquer fórmula A é válida no modelo canônico de* **L** *sse* $\vdash_L A$.
Demonstração: *Seja* $W^* = < W^{\#}, R^{\#}, v^{\#} >$ *o modelo canônico para uma lógica modal proposicional* **L**. *Assumamos que* $\vdash_L A$. *Pela propriedade dos conjuntos maximais consistentes,* $A \in W$. *Pelo teorema fundamental do modelo canônico, então* $W^*, W \models A$. *Por isso, A é válida no modelo canônico de* **L**. *Suponhamos agora que* $\nvdash_L A$. *Deste modo,* $\{\sim A\}$ *é L-consistente. Daí, pelo lema de Linbenbaum, existe um conjunto consistente maximal W tal que* $\sim A \in W$. *Portanto,* $A \notin W$. *Por isso,* $W^*, W \not\models A$. *E daí, A não é válida no modelo canônico de* **L**. □

Os resultados acima estabelecem uma completude imediata para a lógica modal **K**, uma vez que esta não possui restrições na relação de acessibilidade, isto é, é a classe de todos os modelos. Mas e a completude das outras lógicas modais como **D**, **T**, **B**, **S4** e **S5**? Para tanto, precisamos demonstrar que em cada uma das lógicas acima temos a completude em relação à uma classe determinada de modelos. Com isso:

Teorema 2.1.18. *T é completo em relação à classe de todos os modelos reflexivos;*

Demonstração: É preciso mostrar que a relação do modelo canônico é reflexiva, isto é, para qualquer fórmula A, se $\Box A \in W$ então $A \in W$. Pelo axioma T, temos que $\vdash \Box A \rightarrow A$ mas como $\Box A \in W$ segue-se $A \in W$. □

Teorema 2.1.19. *D é completo em relação à de todos os modelos seriais.*

Teorema 2.1.20. *S4 é completo em relação à classe de todos os modelos reflexivos e transitivos.*

Teorema 2.1.21. *B é completo em relação à classe de todos os modelos reflexivos e simétricos.*

Teorema 2.1.22. *S5 é completo em relação à classe de todos os modelos reflexivos, simétricos e transitivos.*

Com isso, finalizamos a apresentação da completude para as lógicas modais normais. Agora, mencionamos os resultados acerca da completude só que de um ponto de vista mais abstrato, isto é, é possível dar uma prova geral de completude que vale para infinitos sistemas de lógica modal.

O esquema G∞ e a completude de Henkin É possível ganhar generalidade na prova de completude das lógicas modais normais. Mas como? Todos os axiomas apresentados aqui a partir do axioma (K) devem ser vistos como simples casos particulares de uma axioma geral chamado G∞. Com a finalidade de introduzirmos o esquema G∞ recordemos que quando afirmamos wRw' estamos dizendo que w' é acessível a partir de w. E se afirmássemos wR^nw' estaríamos sustentando que w' é n-passos acessível a partir de w.

G∞ : $\Diamond^k\Box^l A \rightarrow \Box^m\Diamond^n A$ $(k, l, m, n \geq 0)$

Nota-se que as letras k, l, m, n denotam o número de ocorrências de cada um dos operadores modais indexados.

Assim:

D: $G^{0,1,0,1}$

T: $G^{0,1,0,0}$

B: $G^{0,0,1,1}$

4: $G^{0,1,2,0}$

5: $G^{1,0,1,1}$

Vimos que os modelos relacionais de Kripke validam cada um dos axiomas dos inúmeros sistemas modais de acordo com a restrição na relação de acessibilidade. Mas e o esquema de axioma G∞? Qual tipo de estrutura é capaz de o validar?

Ora, do mesmo que anteriormente, precisamos de um tipo de relação específica. Neste caso, a condição que incide sobre R é do tipo:

C∞ : $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 R^k x_2) \wedge (x_1 R^l x_3)) \rightarrow \exists x_4(x_2 R^m x_4 \wedge x_3 R^n x_4))$

Intuitivamente, temos que se um mundo acessa dois outros mundos, então estes devem acessar um quarto mundo. Agora, acessa sempre em número finito de passos determinado pelas letras no índice das relações.

Com algumas adaptações na demonstração anterior, a completude para infinitos sistemas de lógicas modais normais resulta imediata.[14]

Lógicas modais e Filosofia

A lógica modal tem se transformado, ao longo dos anos, em um paraíso dos filósofos analíticos, pois possibilita a análise de conceitos filosóficos com tanta clareza e precisão que torna real aquilo que parecia um disparate. Isso foi o que aconteceu quando Kripke propôs um conhecimento *a posteriori* de verdades necessárias. Vejamos:

Kripke assume que uma determinada proposição é conhecida de modo *a posteriori* quando sua verdade pode ser determinada depois de qualquer experiência. E se uma proposição A é verdadeira ela é dita necessária quando sua verdade persiste ao longo de todos os mundos possíveis. Assumiu ainda que os nomes próprios são designadores rígidos, isto é, se referem sempre ao mesmo objeto em qualquer uma de sua ocorrências. Deste modo, quando analisou enunciados de identidade da forma $a = b$ mostrou, com o uso da lógica modal, que se $a = b$ é verdadeiro, então $\Box(a = b)$. Para determinarmos o valor de um enunciado da forma $a = b$ precisamos recorrer à experiência. Mas quando descobrimos que o enunciado é verdadeiro descobrimos também que se trata, de fato, de uma relação do objeto consigo mesmo e, por isso, uma relação de necessidade. Por isso, é uma verdade necessária *a posteriori*. O argumento de Kripke é sutil e faz uso de alguns pressupostos, tais como o princípio da identidade, a lei de Leibniz da indiscernibilidade do idênticos e a tese da designação rígida dos nomes próprios.

2.2 Lógicas epistêmicas

A pergunta pela essência do conhecimento, isto é, acerca daquilo que o conhecimento é, já é antiga na história da cultura lógico-filosófica. Basta examinarmos o famoso *Teeteto* de Platão, para perceber quão antiga é a questão: o que é o conhecimento? Depois, se decidíssemos percorrer a história da filosofia, poderíamos observar pensadores detidos, de algum modo, na questão do conhecimento. Por exemplo, Descartes tentou encontrar bases sólidas para garantir a possibilidade de um conhecimento claro e bem iluminado pela luz natural[15], já Kant nos mostra como é possível conhecer e quais os limites do conhecimento[16]. Outros tentam elucidar o tipo de conhecimento, se ele é *a priori* ou *a posteriori,* e com que tipo de conceito tais modos de conhecimento são compatíveis. Kripke, por exemplo, como vimos, aponta a possibilidade de um con-

[14] Para uma análise de todos os passos para provar a completude para as lógicas K+G∞ basta ir até *Modalitá e Multimodalitá*

[15] Em *Discurso sobre o Método* e também nas *Meditações.*

[16] Veja *Crítica da Razão Pura.*

hecimento *a posteriori* de verdades necessárias[17]. Todavia, não estamos interessados aqui nessas questões, mas sim em, segundo Mortari em *Lógicas Epistêmicas*, elucidar os conceitos epistêmicos e investigar as leis que os governam. Daí, podemos garantir que ao fazermos lógica epistêmica não estamos interessados em definir de modo último o que é o conhecimento, ou qual é a sua natureza e seu alcance, mas sim em fazer uma análise formal das noções epistêmicas básicas, isto é, examinar o conhecimento determinando as relações lógicas que envolvem proposições que fazem uso dessa noção.

A lógica epistêmica tem por objetivo a formalização de situações onde há a presença de um ou mais agentes capazes de conhecer (ou acreditar) em certos fatos em alguns estados do mundo. Essa idéia intuitiva de agentes epistêmicos pode ser aplicada em situações onde estiverem presentes conceitos como "alguém sabe alguma coisa" ou "alguém acredita em alguma coisa". A formalização baseada nos conceitos tradicionais da lógica modal é possível utilizando-se, além de uma linguagem proposicional, também do acréscimo de certos operadores modais K_i e B_i, os quais representam o *conhecimento* e a *crença* de um certo agente i, onde $i = 1, ..., m$ e m é o número de agentes considerados no sistema. Assim, $K_i p$ deve ser entendido como "o agente i conhece p" e $B_j p$ como "o agente j acredita que vale p."

O conhecimento é comumente definido como crença verdadeira e justificada. Isso significa que algum agente conhece a proposição p se e somente se ele acredita em p, p é verdadeira e a crença em p é justificada[18]. Ao examinarmos as noções epistêmicas nos depararemos com alguns problemas tradicionais que se referem às propriedades do conhecimento.

- O problema do conhecimento:

É possível conhecer alguma coisa que não seja verdadeira? Isto é, o conhecimento de uma dada proposição implica que esta é verdadeira ou podemos conhecer proposições falsas?

- O problema da introspeção positiva:

Quem conhece deve necessariamente saber(ou conhecer) aquilo que conhece? Se um dado agente i tem acesso ao seu próprio estado epistêmico de conhecer podemos afirmar que ele conhece que conhece?

- O problema da introspeção negativa:

[17] *Naming and necessity*

[18] A definição de conhecimento é inicialmente proposta por Platão. Edmund Gettier apontou situações onde é possível falar em crença verdadeira e justificada sem, contudo, ser possível falar em conhecimento.

Quem conhece deve necessariamente conhecer aquilo que não conhece?

É comum respondermos às questões acima a partir de axiomas tradicionais das lógicas epistêmicas, como, por exemplo, o axioma do conhecimento: $K_iA \rightarrow A$, o qual significa que o indivíduo i sabe ou conhece que A e isso implica a verdade de A. Facilmente se constata que o axioma do conhecimento é uma resposta à questão levantada pelo axioma do conhecimento.

Uma questão bastante recorrente, e tão discutida quanto as outras acima, é a questão da onisciência lógica (onicredência lógica para o operador de crença). Tal problema surge a partir do seguinte ponto:

Seja a generalização do axioma K para o caso epistêmico:

$(K_iA \wedge K_i(A \rightarrow B)) \rightarrow K_iB$, para todo i.

Ora, dada a regra acima pode-se inferir que a coleção de todas as proposições conhecidas por um agente é dedutivamente fechada. Isto é, suponhamos que alguém conheça todos os axiomas da aritmética, daí, seria obrigado a conhecer todas as conseqüências de tais axiomas!

Do mesmo modo, aceite a generalização da regra de necessitação para o caso epistêmico: $\vdash A$ implica logicamente $\vdash K_iA$, para todo i. Isso significa que se A é um teorema, então, cada indivíduo deve saber que A.

Iremos instaurar um sistema minimal do conhecimento a partir da noção básica de conhecimento para facilitar o entendimento do último capítulo.

2.2.1 Uma lógica minimal do conhecimento

A construção das lógicas epistêmicas é feita à maneira das lógicas modais aléticas, isto é, aquelas que estendem a lógica clássica adicionando à linguagem os operadores $\Diamond$ (possivelmente) e $\Box$ (necessariamente) . Contudo, é comum fazermos uso nas lógicas epistêmicas dos operadores K e B [19], os quais são lidos, respectivamente, como *conhecimento* e *crença*. Qualquer que seja a lógica, ela precisa de uma linguagem. Mesmo considerando uma pluralidade de lógicas, a sintaxe para elas será a mesma.

Os operadores epistêmicos não são verofuncionais, pois o valor de verdade de proposições envolvendo tais operadores não pode ser determinado a partir do valor de verdade das proposições elementares. Já é sabido que o mesmo fenômeno acontece originariamente com os operadores modais de necessidade e possibilidade.

Dada uma proposição verdadeira não é possível deduzir que um certo agente terá conhecimento sobre a mesma. Raciocínio análogo se aplica quanto à crença do agente sobre uma proposição verdadeira. Por outro lado, ao assumir um valor falso, a proposição p nunca poderá ser conhecida pelo agente, dado o axioma do conhecimento.

A intuição básica que sustenta a modelagem do conhecimento se funda na semântica de mundos possíveis de Kripke. Podemos usar, do mesmo modo que nas lógicas modais

[19] Não consideraremos o operador de crença, mas somente o de conhecimento.

aléticas, a semântica de Kripke para modelar o conhecimento.

As lógicas $\mathbf{K}^m$, $\mathbf{KT}^m$, $\mathbf{S4}^m$e $\mathbf{S5}^m$

Definição 2.2.1. *A lógica minimal do conhecimento com m agentes K^m possui os seguintes axiomas:*

1) Todas as tautologias do cálculo proposicional clássico;
2) (K^m) $(K_iA \wedge K_i(A \rightarrow B)) \rightarrow K_iB$, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$;

É um sistema fechado pela a regra de *modus ponens*.

4)Necessitação generalizada: $\vdash A$ implica $\vdash K_iA$,para todo i.

A demonstração de completude para a lógica $\mathbf{K}^m$ é análoga à demonstração de completude para a lógica modal $\mathbf{K}+\mathbf{G}\infty$.

Formamos extensões do sistema $\mathbf{K}^m$ do seguinte modo:

$\mathbf{KT}^m = \mathbf{K}^m + \mathbf{T}^m$

$\mathbf{S4}^m = \mathbf{T}^m + \mathbf{4}^m$

$\mathbf{S5}^m = \mathbf{S4}^m + \mathbf{5}^m$

Mas quem é quem?

O axioma T^mé exatamente a generalização do axioma T, isto é, T^m é o axioma do conhecimento. O axioma 4^m é a resposta ao problema da introspecção positiva, ou seja, é o axioma da introspecção positiva, qual seja: $K_iA \rightarrow K_iK_iA$. E 5^m é a o axioma da introspecção negativa, a resposta ao problema da instrospecção negativa. Tal axioma pode ser apresentado do seguinte modo: $\neg K_iA \rightarrow K_i\neg K_iA$.

Acrescentando tais axiomas, podemos criar todos aqueles sistemas de lógica epistêmica. É claro que podemos ir além, adicionando axiomas para o operador de crença. Por exemplo, podemos ter axiomas da introspecção para a crença.

A semântica para os operadores epistêmicos é a mesma que para os operadores modais. O conhecimento é visto como o operador de necessidade.

É comum que se faça uso da lógica epistêmica em filosofia analítica, em especial na análise lógica de alguns paradoxos, pois uma tarefa fundamental da filosofia é realizar uma análise da estrutura lógica dos argumentos. Vejamos casos conhecidos:

- Paradoxo de Moore: Um agente i não pode afirmar que alguma proposição seja o caso, mas ele não acredita que ela seja o caso.

- A definição de conhecimento e o contra-exemplo de Gettier: O conhecimento é definido como crença verdadeira e justificada. Todavia, Gettier mostrou situações nas quais temos crença verdadeira e justificada e ainda assim não podemos falar em conhecimento.

Para solver as duas questões é conveniente o uso do instrumental da lógica epistêmica.

Capítulo 3

Lógicas modais paraconsistentes

> "Com efeito, tudo o que se faz com a lógica e a matemática comuns pode ser efetuado por meio da lógica paraconsistente."
>
> Newton da Costa, *O conhecimento científico.*

Nos capítulos 1 e 2 foram estudadas, separadamente, lógicas paraconsistentes e lógicas modais. Vimos o funcionamento de várias lógicas, tanto na parte sintática quanto na parte semântica. Os sistemas paraconsistentes são subsistemas da lógica clássica, ao passo que as lógicas modais normais estudadas até aqui são todas extensões da lógica clássica. Sabemos que para transformar as **LFIs** baseadas na lógica clássica na própria lógica clássica devemos acrescentar como esquema de axioma $\vdash \circ A$. Já para transformar as lógicas modais extensões da lógica **K** na lógica clássica precisamos inserir o esquema de axioma segundo o qual proposições verdadeiras são necessárias, ou seja, $\vdash A \rightarrow \Box A$. Para transformar **K** em **LPC** devemos fazer uso de $\vdash A \leftrightarrow \Box A$, pois **K** não tem como teorema $\Box A \rightarrow A$.

Para desenvolver um sistema que seja ao mesmo tempo paraconsistente e modal, iniciamos a construção de um sistema lógico a partir da lógica paraconsistente **Ci**, a qual é assumida, neste capítulo, como a lógica de base. Em seguida, acrescentamos a ela o operador modal de necessidade. Assim, temos uma lógica modal que não estende a lógica clássica, mas sim uma lógica paraconsistente. Como W. Carnielli e N. da Costa observaram, tanto em *On Paraconsistent Deontic Logic* quanto em *Kantian and non-Kantian logics,* qualquer sistema de lógica modal pode ser adaptado de modo a tornar-se paraconsistente. O que é preciso fazer é alterar a lógica subjacente por uma lógica paraconsistente. E esse é exatamente nosso objetivo.

Notamos que nossa abordagem é distinta do método de traduzir e definir lógicas modais no interior de lógicas paraconsistentes e vice-versa. Apesar de não desenvolvermos aqui o método, ainda assim é razoável uma explicação acerca do mesmo[1].

O método de tradução e definição de lógicas modais no interior de lógicas paraconsistentes e vice-versa pode ser encontrado em *S5 is a Paraconsistent Logic and so is Classical First-Order Logic* de J-Y.Béziau. O autor aceita que uma negação paraconsistente $*$ é um conectivo unário que não satisfaz o princípio de explosão, isto é, $A, *A \nvdash B$, para todo B. E ao mesmo tempo define uma lógica paraconsistente como sendo uma lógica que possui uma negação paraconsistente. Deste modo, é capaz de definir no ambiente da lógica modal **S5** uma negação capaz de ter todas as propriedades para ser chamada de negação paraconsistente. Tal negação será definida como:

$$\neg A =^{def.} \Diamond \sim A$$

Com isso, J-Y.Béziau é capaz de mostrar que a negação acima é uma negação paraconsistente construída em **S5**, pois satisfaz a propriedade básica que uma negação deve ter para ser considerada paraconsistente, qual seja:

$$A, \Diamond \sim A \nvdash_{S5} B$$

A partir de tal fato conclui que a própria lógica modal **S5** é uma lógica paraconsistente.

Com o mesmo argumento acima J-Y.Béziau mostra que podemos definir uma negação paraconsistente na lógica clássica de primeira-ordem:

$$\neg A =^{def.} \exists \sim A$$

E daí:

$$A, \exists \sim A \nvdash B$$

Concluindo que a lógica clássica de primeira-ordem é paraconsistente.

Curioso é o fato de que o próprio J-Y.Béziau afirma, como vimos na parte acerca das definições de lógicas paraconsistentes, que não é bom utilizar somente o critério negativo para determinar se uma negação é ou não paraconsistente, pois "according to these negative criteria a lot of unary connectives are paraconsistent, for example all the standard modal operators are paraconsistent. The identity function is also paraconsistent in this sense, so classical logic is paraconsistent " e conclui que "Speaking

[1] Existem outras técnicas para combinarmos sistemas lógicos, dentre elas o método de *Fibrilação* desenvolvido por Gabbay e a semântica de traduções possíveis inventada por W. Carnielli.

of a paraconsistent negation just as a unary connective not obeying *ex contradictione* without stating any positive principles is a highly ambiguous and controversial way of speaking "[2] . Contudo, notamos que as últimas observações ocorrem somente em um texto mais tardio.

Os dois argumentos acima mostram como definir uma lógica paraconsistente no interior de uma lógica modal e da lógica de primeira-ordem. J-Y.Béziau constrói funções que traduzem lógicas paraconsistentes em lógicas modais e vice-versa. Para tanto, opera do seguinte modo:

Utiliza uma função $*$ do conjunto de fórmulas G construído com $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow$ no conjunto de fórmulas F construído com $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \Diamond$ de modo que:

$A^* = A$, se A é atômica.
$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$, onde $\otimes \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
$(\neg A)^* = \Diamond \sim (A)^*$

O procedimento de tradução é capaz de extrair lógicas paraconsistentes de lógicas modais. Uma questão que surge é a de saber se alguma das lógicas paraconsistentes estudadas no capítulo 1, tais como bC e Ci, podem ser definidas a partir de alguma lógica modal ou podem ter alguma interpretação modal.

Não usamos o método acima, mas realizamos uma combinação artesanal de dois sistemas lógicos. Deixamos para investigá-los em trabalhos futuros.

Com o alvorecer do século XXI, não deveriam ser raras as tentativas de se resolver problemas em áreas da filosofia tais como a epistemologia, a ontologia e a ética, pois o século XX teve como paradigma crucial a linguagem e essa, depois de formalizada, é regulada por algum tipo de lógica. Com isso, percebe-se o papel que a lógica desempenhou na filosofia da linguagem contemporânea, em especial naquelas abordagens conhecidas como analíticas. Basta, por exemplo, examinar os textos de Frege, Russell e, mais atualmente, os de Kripke, para se constatar quão importante é a lógica para a filosofia.

Na verdade, pode-se mesmo afirmar que a lógica é capaz de apresentar respostas a certos problemas filosóficos que antes, com o uso somente da linguagem natural, permaneciam sem solução.

Com o uso do instrumental fornecido por um tipo especial de lógica tenta-se solucionar um problema eminentemente epistemológico. Mais concretamente, definimos uma lógica paraconsistente para evitar o paradoxo da cognoscibilidade. Para tanto, é preciso que elaboremos tal lógica e ainda elucidemos o que significa o paradoxo acima. Comecemos pela última opção.

[2]Em *What is Paraconsistent Logic?*

3.1 O paradoxo da cognoscibilidade

Atribui-se a Fitch a descoberta do paradoxo da cognoscibilidade. Desde então, vários filósofos e lógicos têm dedicado tempo de seu traballho à tentativa de apresentar soluções à inferência indesejada. Um exemplo é o caso de Heinrich Wansing: em um artigo denominado *Diamonds are a Philosopher's Best Friends*, o autor apresenta uma lógica modal epistêmica relevante capaz de evitar a inferência paradoxal. Seguindo a influência de Wansing, desejamos construir uma lógica modal que tenha por base a lógica da inconsistência formal que estudamos no capítulo 2, qual seja: a lógica **Ci** . Mas o que é o paradoxo da cognoscibilidade? Vamos discutir, no que se segue, o argumento de Fitch e como ele é capaz de gerar o paradoxo da cognoscibilidade.

3.1.1 O argumento de Fitch

Em 1963, no *Journal of Symbolic Logic,* foi publicado um artigo chamado *A Logical Analysis of Some Value Concepts* de autoria de Frederic Fitch. O que tinha de importante no artigo supracitado? o paradoxo da cognoscibilidade, originado a partir do argumento de Fitch, o qual surge na forma de um teorema[3]:

Suponhamos que A seja uma proposição verdadeira e que não seja conhecida, isto é, aceitemos que os agentes não sejam oniscientes:

(NO) $A \wedge \sim KA$

Denominamos (NO) de tese da não-onisciência. Aceitemos também mais dois pressupostos, a saber:

(1) $K(A \wedge B) \rightarrow (KA \wedge KB)$;

(2) $KA \rightarrow A$;

(1) afirma acerca do conhecimento que ele se propaga em conjunções, (2) que o conhecimento implica a verdade[4].

Devemos supor também que temos as duas versões da regra de necessitação:

(3) $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

(4) $\vdash \sim A$ então$\vdash \sim \Diamond A$

Assim, temos o argumento de Fitch:

i) $K(A \wedge \sim KA)$	hipótese
ii) $KA \wedge K \sim KA$	i. (1)
iii) KA	ii.
iv) $K \sim KA$	ii.
v) $\sim KA$	iv. (2)

[3]O teorema 5 é: "If there is some true proposition which nobody knows (or has known or will know) to be true, then there is a true proposition which nobody can know to be true."

[4]Resposta ao famoso problema do conhecimento, o qual ocorre na discussão filosófica desde o tempo do *Teeteto* de Platão.

vi) $KA \wedge \sim KA$ iii. e v. contradição
vii) $\sim K(A \wedge \sim KA)$ i-vi. redução ao absurdo
viii) $\sim \Diamond K(A \wedge \sim KA)$ vii. necessitação[5]

Se aceitamos uma lógica proposicional modal e se o operador de necessidade é visto como o operador de conhecimento, então, com base na lógica clássica, podemos formular o seguinte:

(TV) $A \rightarrow \Diamond KA$.

Observemos que (TV) é a tese verificacionista, ou princípio da cognoscibilidade[6], segundo a qual todas as proposições verdadeiras podem ser conhecidas. Se a tese é verdadeira ou falsa, não nos cabe aqui decidir. Notamos que entre os positivistas lógicos do Círculo de Viena vários defendiam o princípio acima, mencionamos M. Schilick no artigo *Sentido e Verificação:* "A verificabilidade significa a possibilidade de verificação.". É bem verdade que conhecer, pelo menos aqui, também significa verificar. Se o argumento de Fitch é válido, então vai diretamente de encontro à tese verificacionista, e gera o paradoxo da cognoscibilidade:

(i ') $(A \wedge \sim KA) \rightarrow \Diamond K(A \wedge \sim KA)$ instância da tese verificacionista
(ii ') $\sim \Diamond K(A \wedge \sim KA)$ argumento de Fitch
(iii ') $\sim (A \wedge \sim KA)$ i ' e ii 'contraposição

Podemos evitar a contraposição e gerar o paradoxo usando a regra de redução ao absurdo do seguinte modo:

(i") $A \wedge \sim KA$ hipótese
(ii")$\Diamond K(A \wedge \sim KA)$ i" e tese verificacionista
(iii")$\sim \Diamond K(A \wedge \sim KA)$ argumento de Fitch
(iv") $\sim (A \wedge \sim KA)$ i"-iii "redução ao absurdo

Tanto (iii') quanto (iv") contradizem (NO). Por isso, ou temos (NO) ou então (TV).

Concluímos também que em vista do argumento de Fitch a tese verificacionista é problemática. Por quê? visto que teríamos o seguinte: a negação de $(A \wedge \sim KA)$, mas isso realmente não pode acontecer, pois teríamos $\sim A \vee KA$ e daí $A \rightarrow KA$. Mas como já temos $KA \rightarrow A$ segue-se que $KA \leftrightarrow A$ e, por isso, o colapso do operador de conhecimento.

Portanto, ou aceitamos a tese verificacionista ou o argumento de Fitch. Queremos, sim, assumir que a tese verificacionista seja verdadeira e ver o que se segue se, de fato, tal suposição for lançada. Pouco nos importa a verdade ou falsidade da tese.

[5]Fitch afirma "This same sort of argument also applies to the class of logically necessary propositions, since this is a truth class closed with respect to conjunction elimination. "

[6]A tese verificacionista recebe, algumas vezes a denominação de princípio da cognoscibilidade o qual afirma: "Qualquer proposição verdadeira pode ser conhecida". Por isso, algumas vezes a tese verificacionista também recebe o nome de tese anti-realista, uma vez que o anti-realista aceita o princípio da cognoscibilidade.

O paradoxo da cognoscibilidade nasce da união da tese verificacionista com o argumento de Fitch.

É fácil perceber que o argumento de Fitch também se aplica às modalidades aléticas, dado que os pressupostos para a derivação do argumento valem na lógica modal **KT**. Assim, consideremos a versão alética de (TV):

(TA) $A \rightarrow \Diamond\Box A$

A tese acima nos garante que qualquer proposição verdadeira é possivelmente necessária.

Observemos que a tese central capaz de gerar o paradoxo é a tese verificacionista de que "Se uma dada proposição A é verdadeira, então A pode ser conhecida". Tal proposição pode ser formalizada por (TV) e pode também ser lida como (TA), do ponto de vista alético. Em qual ambiente lógico (4) nos causa problemas? qual é a lógica do paradoxo, isto é, qual é a lógica que dá origem ao paradoxo? Segundo Wansing, qualquer lógica modal que tenha por base a lógica clássica e que possua um operador de possibilidade pelo menos tão forte quanto a possibilidade da lógica modal **K** e possua um operador de conhecimento pelo menos tão forte quanto a necessidade em **KT**, é a lógica do paradoxo da cognoscibilidade. Ou seja, (TV) e (TA) são problemáticas em qualquer lógica cujo ambiente seja preenchido pelas propriedades acima.

C. Pizzi afirmou, em comunicação pessoal, que se adicionássemos à lógica modal **KT** o esquema de axioma (IV) $\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$, o qual é uma versão enfraquecida de (TA), então também seríamos levados ao colapso do operador de necessidade, pois em **KT** temos $A \rightarrow \Diamond A$, mas como $\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$ segue-se a tese alética $A \rightarrow \Diamond\Box A$ e, a partir daí, os argumentos usuais para o fim da modalidade de necessidade.

A versão acima do paradoxo utiliza a regra clássica de *redução ao absurdo,* ou faz uso da *lei de contraposição.* Com isso, se se deseja, de algum modo, evitar as inferências, é razoável que se faça uso de uma lógica que não respeite nem *reductio* e nem *contrapositio.* E essa é a nossa missão. A lógica que vamos apresentar é uma lógica que pode ser usada pelo verificacionista que se sente ameaçado com o argumento de Fitch.

Segundo Wansing, podemos encontrar várias reações ao paradoxo da cognoscibilidade na literatura:

a) A tese verificacionista deve ser rejeitada.

b) A tese verificacionista deve ser substituída por algum outro enunciado que não cause o colapso do operador de conhecimento.

c) A tese verificacionista deve sofrer alguma restrição.

d) Deve-se substituir a lógica clássica subjacente por alguma lógica não-clássica.

Como no texto de Wansing, vamos perseguir a última meta. Wansing propõe uma lógica na qual a redução ao absurdo e contraposição não valem. Faremos a mesma coisa, mas com uma lógica mais simples, isto é, com menos compromissos ontológicos que a de Wansing, uma vez que temos uma linguagem menos enriquecida.

3.1.2 Solução ao paradoxo

Iniciemos, então, a construção de uma lógica modal paraconsistente. Para tanto, a lógica **Ci** é o nosso ponto de partida. Daí, estendemos a linguagem de **Ci** com o operador modal alético de necessidade $\Box$[7]. Acrescentemos os axiomas **K** e **T** das lógicas modais aléticas e mais a regra de necessitação. A lógica obtida deste modo é denotada por $\mathbf{Ci}^T$. Tal lógica é apresentada sintaticamente, com sua respectiva axiomática, e depois semanticamente, com a demonstração de que se trata de uma lógica completa. A lógica $\mathbf{Ci}^T$ é capaz de evitar o paradoxo da cognoscibilidade.

Sintaxe

Linguagem A linguagem da lógica $\mathbf{Ci}^T$ é formada pelos seguintes símbolos primitivos:

Conectivos: $\neg$ (negação paraconsistente), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (implicação), $\circ$ (consistência) e $\Box$ (necessidade).

Variáveis proposicionais: um conjunto enumerável: $\{A, B, C, ...\}$.

Símbolos auxiliares: (,) (parênteses)

O operador de possibilidade é definido com o uso da negação forte de **Ci**:

$\Box A =^{def} \sim \Diamond \sim A$

$\Diamond A =^{def} \sim \Box \sim A$

Fórmulas Fórmulas são definidas indutivamente do seguinte modo:

i) Todas as variáveis proposicionais são fórmulas;

ii) Se A é uma fórmula, então $(\neg A)$ é uma fórmula;

iii) Se A e B são fórmulas, então $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ também são fórmulas.

iv) Se A é uma fórmula, então $\circ A$ e $\Box A$ são fórmulas.

É possível definir uma negação forte em $\mathbf{Ci}^T$:

$\sim A =^{def.} (\circ A \wedge \neg A)$.

Axiomática para $\mathbf{Ci}^T$ A axiomática da lógica $\mathbf{Ci}^T$ é formulada a partir da lógica **Ci**. Deste modo, assumamos os axiomas de **Ci**. Desejamos que nossa lógica modal seja, além de paraconsistente, também uma lógica parcialmente normal, isto é, deve valer a famosa lei de Kripke no ambiente paraconsistente, a qual é conhecida como axioma K. Assim, temos:

Com a finalidade de apresentar novas abordagens a certas questões acerca da cognoscibilidade, extensões de **Ci** se mostram como alternativas interessantes. Em particular, o sistema $\mathbf{Ci}^T$ cuja axiomática é definida como:

[7]Usaremos o $\Box$ no lugar do K pois sabemos que ambos têm as mesmas propriedades. A vantagem é que deste modo temos uma linguagem com menos símbolos.

$(1\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (A \rightarrow (B \rightarrow A));$
$(2\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)));$
$(3\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)));$
$(4\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} ((A \wedge B) \rightarrow A));$
$(5\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} ((A \wedge B) \rightarrow B));$
$(6\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (A \rightarrow (A \vee B));$
$(7\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (B \rightarrow (A \vee B));$
$(8\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)));$
$(9\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (A \vee (A \rightarrow B);$
$(10\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (A \vee \neg A);$
$(11\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (\neg\neg A \rightarrow A);$
$(12\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (\circ A \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)))$
$(13\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} (\neg \circ A \rightarrow (A \wedge \neg A))$
$(14\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
$(15\mathrm{Ci}^T) \vdash_{Ci^T} \Box A \rightarrow A$

Temos vários conectivos definidos:

$A \leftrightarrow B =^{def.} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$\bullet A =^{def.} \neg \circ A$

$\sim A =^{def.} \circ A \wedge \neg A$

$\Diamond A =^{def.} \sim \Box \sim A$

E mais as seguintes regras de inferência:

$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ $\qquad$ $\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$

O paradoxo da cognoscibilidade pode ser derivado sintaticamente até o momento da inferência paradoxal. Todavia, como não temos nem a redução ao absurdo clássica e nem a contraposição, segue-se que não somos capazes de dar o salto rumo ao colapso do operador de conhecimento ou necessidade. O argumento de Fitch também acaba por ser evitado, uma vez que a lei de redução não vale em nossa lógica.

Para atingirmos lógicas modais paraconsistentes mais sofisticadas, devemos proceder da mesma maneira que na lógica modal clássica. Assim, devemos estender a lógica base com outros axiomas modais, tais como (D), (B), (4), (5), etc.

Atente-se ao fato de que a lógica $\mathbf{Ci}^T$ é dada simplesmente por **Ci** adicionado de (K), (T) e (Nec).

Semântica para $\mathbf{Ci}^T$ Começemos por uma conjectura: A lógica $\mathbf{Ci}^T$ é correta e completa em relação à uma semântica de mundos possíveis com Ci^T-valorações em cada um dos mundos.

Consideremos uma estrutura do seguinte tipo:

$< W, R, v >$, onde:

i) W é um conjunto não-vazio de mundos possíves;

ii) R é uma relação binária de acessibilidade definida entre mundos possíveis: $R \subseteq W \times W$.

iii) v é uma Ci-valoração;

Uma estrutura da forma $< W, R, v >$ é dita uma Ci^T-estrutura quando, para quaisquer dois mundos $w, w' \in W$, e fórmulas A e B, for o caso que:

0) $M, w \Vdash A$ sse $v(w, A) = 1$, para A atômica;

1) $M, w \Vdash A \wedge B$ sse $M, w \Vdash A$ e $M, w \Vdash B$;

2) $M, w \Vdash A \vee B$ sse $M, w \Vdash A$ ou $M, w \Vdash B$;

3) $M, w \Vdash A \rightarrow B$ sse $M, w \nVdash A$ ou $M, w \Vdash B$;

4) $M, w \nVdash A$ então $M, w \Vdash \neg A$;

5) $M, w \nVdash A$ então $M, w \nVdash \neg\neg A$;

6) $M, w \Vdash \circ A$ sse $M, w \nVdash A$ ou $M, w \nVdash \neg A$;

7) $M, w \nVdash A$ ou $M, w \nVdash \neg A$ sse $M, w \nVdash \neg \circ A$

A semântica acima, como já vimos, apresenta provas de corretude e completude para a lógica **Ci**[8]. Contudo, queremos uma semântica capaz de validar todos os axiomas não somente de **Ci**, mas sim de **Ci**^{T}. Para tanto, deve-se interpretar o operador de necessidade de maneira usual, ou seja, seguindo a versão intuitiva de Leibniz, a qual mais tarde foi formalizada por vários lógicos. Assim, temos:

7) $M, w \Vdash \Box A$ sse para todo w' tal que $wR\, w'$, $M, w' \Vdash A$.

Os conceitos de validade de uma fórmula em relação à semântica descrita, assim como o de conseqüência semântica são definidos de maneira usual.

Completude de Ci^T O próximo passo é mostrar que o sistema **Ci**^{T} é correto e completo em relação às Ci^T-estruturas. A prova de completude é devida à Walter Carnielli.

Devemos construir um modelo canônico para **Ci**^{T} e depois seguir como no caso clássico. A nossa dificuldade consiste, no modelo canônico, em demonstrar que as fórmulas consistentes pertencem ao conjunto associado ao mundo do modelo canônico. Se isso for possível, então com o uso de alguns reparos na demonstração tradicional, tal como o lema de Lindenbaum, qualquer conjunto não-trivial de fórmulas de **Ci**^{T} está contido em um conjunto saturado de fórmulas, então é também possível demonstrar a conjectura.

Qualquer sistema de lógica modal clássica pode ser adaptado de modo que se torne paraconsistente. Tal adaptação consiste em substituir a lógica subjacente por alguma lógica paraconsistente, como de imediato se constata.

Ainda mais, a lógica **Ci** é somente a primeira lógica de uma vasta família de lógicas. Após **Ci** temos os dC-sistemas, isto é, uma infinita hierarquia de lógicas inconsistentes

[8] Curioso é notar que a lógica *bC* possui uma semântica de bivalorações, mas não se sabe se se tem uma semântica de traduções possíveis.

não-triviais, tais como as famosas lógicas C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Qualquer uma dessas lógicas poderia ser usada como base para uma lógica modal paraconsistente.

Temos que, inicialmente, propor uma axiomática capaz de inibir o avanço do argumento de Fitch e do paradoxo da cognoscibilidade. Deveríamos, com o intento de obter a mesma linguagem que o argumento, partir de uma linguagem munida tanto do K quanto do $\Diamond$? Não. Pois podemos imaginar que o K nada mais é que uma máscara do $\Box$. Com isso, poderíamos reconstruir as premissas do paradoxo em nossa linguagem substituindo cada ocorrência do operador de conhecimento por uma do operador de necessidade. Com isso, gostaria que o leitor aceitasse a nossa lógica $\mathbf{Ci}^T$ como uma solução ao paradoxo. Por quê?

Porque podemos reconstruir na linguagem de $\mathbf{Ci}^T$ todo o argumento. Contudo, não chegaremos ao momento da inferência por redução que gera a impossibilidade de conhecer uma proposição e não conhecê-la , a nossa lógica não permitiria tal inferência salvando, assim, o conhecimento, uma vez que a tese verificacionista sem o argumento de Fitch é inofensiva. $\mathbf{Ci}^T$ não valida nem a regra de contraposição e nem a regra de redução ao absurdo. Deste modo, é perfeita para o nosso empreendimento. O único problema que alguém poderia argumentar naquilo que se refere à nossa lógica $\mathbf{Ci}^T$ seria a sua ausência de completude - contudo, temos uma prova de completude. E mais, temos uma família de lógicas capazes de evitar a inferência paradoxal supostamente completas. Com o objetivo de demonstrarmos a completude para a lógica $\mathbf{Ci}^T$ precisamos de alguns passos intermediários. Podemos provar imediatamente em $\mathbf{Ci}^T$ o seguinte lema, adaptando as demonstrações de $\mathbf{Ci}$ e mantendo a mesma definição de conjunto saturado para alguma fórmula.

Lema 3.1.1. *Seja $\Delta \cup \{G\}$ um conjunto de fórmulas de $\mathbf{Ci}^T$ onde Δ é um conjunto G-saturado. Então:*

(i) $\Delta \vdash A \Leftrightarrow A \in \Delta$;
(ii) $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ e $B \in \Delta$;
(iii) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$;
(iv)$A \rightarrow B \in \Delta \Leftrightarrow A \notin \Delta$ e $B \in \Delta$;
(v) $A \notin \Delta \Rightarrow \neg A \in \Delta$;
(vi) $\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$;
(vii) $A \in \Delta$ ou $\neg A \in \Delta$;
(viii) $\circ A \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$ ou $\neg A \notin \Delta$;
(ix) $A \notin \Delta$ ou $\neg A \notin \Delta$ então $\neg \circ A \notin \Delta$;
(x) $A \wedge \neg A \in \Delta$ ou $\circ A \wedge \neg A \in \Delta$ ou $\circ A \wedge A \in \Delta$

Demonstração: Para (i)-(ix) como nas lógicas paraconsistentes $\mathbf{C}_{\text{min}}$,$\mathbf{bC}$ e $\mathbf{Ci}$. O caso (x) demonstramos do seguinte modo: Se $\neg \circ A \in \Delta$ então como $\vdash_{Ci} (\neg \circ A \rightarrow (A \wedge \neg A))$ segue-se que $A \wedge \neg A \in \Delta$. Se $\neg \circ A \notin \Delta$ então por (v) segue-se que $\circ A \in \Delta$

e por (vii) $\circ A \wedge \neg A \in \Delta$ ou $\circ A \wedge A \in \Delta$. $\square$

Um modelo de Kripke para Ci^T é uma tripla $M =< W, R, V >$ na qual W é um conjunto não-vazio de mundos, R é uma relação reflexiva e V é uma classe de valorações modais tal que, para cada $v \in V$:

1) v é uma Ci-valoração.

2) $v(\square A) = 1 \Leftrightarrow v'(A) = 1$ para toda $v'Rv$, isto é, $M, w \models \square A$ sse para todo wRw', $M, w' \models A$

Se $v(A) = 1$ para $v \in V$ em M , escrevemos $M, v \models A$ ou então $M, w \models A$[9]. As noções usuais de fórmula válida num modelo M, fórmula válida, etc, são as usuais.

Podemos demonstrar, também de maneira usual, que $\mathbf{Ci}^T$ é correto em relação aos seus modelos de Kripke. Com vistas ao teorema da completude, introduzimos a seguir alguns conceitos e lemas de forma a produzir um argumento análogo ao teorema da completude pelo método dos modelos canônicos, conforme estudamos no capítulo 2.

Seja S a classe de todos os conjuntos G-saturados; definimos, para cada $w \in S$, a denecessitação $Den(w)$ de w como o conjunto:

$Den(w) = \{A : \square A \in w\}$

Um modelo canônico para $\mathbf{Ci}^T$ é uma tripla $M_S =< W_S, R_S, V_S >$ na qual W_S é a classe de todos os conjuntos G-saturados, R_S é a relação definida como $\Delta R_S \Delta'$ se e somente se $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e cada $v \in V_S$ é uma valoração modal definida a partir de algum $\Delta \in W_S$ como:

$v_\Delta(A) = 1$ sse $A \in \Delta$

Observemos que o axioma (T) $\square A \rightarrow A$ garante a reflexividade da relação R_S, pois $A \in Den(\Delta)$ então $\square A \in \Delta$, e como Δ é saturado, pelo axioma (T) e modus ponens, $A \in \Delta$.

Antes de demonstrarmos o resultado principal, precisamos demonstrar um importante lema auxiliar:

Lema 3.1.2. *Seja Δ um conjunto de fórmulas G-saturado de Ci^T tal que $\square A \notin \Delta$. Então, $Den(\Delta) \cup \{\circ A, \neg A\}$ é não-trivial.*

Demonstração: Se $Den(\Delta) \cup \{\circ A, \neg A\}$ é trivial, então $Den(\Delta), \circ A, \neg A \vdash_{Ci^T} A$ e $Den(\Delta), \circ A, A \vdash_{Ci^T} A$. Com isso, aplicando o procedimento de prova por casos, o qual é válido em Ci^T obtemos $Den(\Delta), \circ A \vdash_{Ci^T} A$. Por outro lado, de $\vdash_{Ci} (\neg \circ A \rightarrow (A \wedge \neg A))$, temos $Den(\Delta), \neg \circ A \vdash_{Ci^T} A$ e, novamente, pela prova por casos, obtemos $Den(\Delta) \vdash_{Ci^T} A$. Por conseqüência, pelo axioma (K) e pela regra de necessitação, $\Delta \vdash_{Ci^T} \square A$ e $\square A \in \Delta$. $\square$

Estamos agora em posição de demonstrar o:

[9]Claramente, os mundos possíveis são vistos enquanto valorações e vice-versa.

Teorema 3.1.3. *(Completude para Ci^T) $\Gamma \vDash_{Ci^T} A$ implica $\Gamma \vdash_{Ci^T} A$.*

Demonstração: Por contraposição dada uma fórmula A de Ci^T tal que $\Gamma \nvdash_{Ci^T} A$, podemos, através do argumento de Lindenbaum, estender Γ a um conjunto A-saturado Δ. Como $\Delta \nvdash_{Ci^T} A$, então $A \notin \Delta$. Considere v_Δ a função característica de Δ. É claro que:

(i) v_Δ é um Ci-valoração.

Temos que mostrar que, para toda fórmula B :

(ii) $v_\Delta(\Box B) = 1 \Leftrightarrow v_\Gamma(B) = 1$, para toda v_Γ tal que $\Delta R \Gamma$.

De fato:

a) Se $\Box B \in \Delta$ então $B \in den(\Delta)$; portanto, se $\Delta R \Gamma$, por definição, $den(\Delta) \subseteq \Gamma$ e $B \in \Gamma$. Conseqüentemente (já que Γ é A-saturado) $v_\Gamma(B) = 1$.

b) Se $\Box B \notin \Delta$ então $\Sigma = den(\Delta) \cup \{\circ B, \neg B\}$ é não-trivial e obviamente $\Sigma \nvdash_{Ci^T} B$. Aplicando novamente o argumento de Lindenbaum existe um conjunto Γ que é A-saturado e estende Σ. Dessa forma, $den(\Delta) \subseteq \Gamma$ e, por definição, $\Delta R_s \Gamma$; ainda mais, como Γ é B-saturado, $v_\Gamma(B) = 0$. Isso demonstra o que queríamos. $\Box$

Podemos adaptar a demonstração acima para várias outras lógicas modais que estendem **Ci**. Quase todas são capazes de evitar o paradoxo da cognoscibilidade. Em geral, poderíamos demonstrar que a maior parte das lógicas que estendem **Ci** com o K+G∞ é correta e completa e é também capaz de inibir o paradoxo da cognoscibilidade.

Algumas propriedades de $\mathbf{Ci}^T$

Aceitando a tese do espelhamento entre forma lógica e mundo que defendemos na introdução, seria interessante disponibilizar ao leitor alguns resultados curiosos, tais como:

Proposição 3.1.4. *Em Ci^T não é possível conhecer consistências, isto é, $\nvdash_{Ci^T} \Box \circ A$, para alguma fórmula A atômica.*

Demonstração: Suponhamos que $\vdash_{Ci^T} \Box \circ A$. Pelo axioma T sabemos que $\vdash_{Ci^T} \Box \circ A \rightarrow \circ A$ e por modus ponens $\vdash_{Ci^T} \circ A$, para todo A. Mas isso causa o colapso de $\mathbf{Ci}^T$ com a lógica modal **KT**. $\Box$

No resultado acima estamos interpretando o operador de necessidade como se fosse o operador de conhecimento e isso é legítimo pois ambos respeitam as mesmas regras.

Proposição 3.1.5. *Não são partículas minimais em Ci^T :*

(i) $\Box A \wedge \neg \Box A$

(ii) $\Box A \wedge \Box \neg A$

(iii) $\Diamond A \wedge \neg \Diamond A$

Deste modo, podemos reconstruir boa parte do argumento de Fitch na linguagem de $\mathbf{Ci}^T$ sem, contudo, derivarmos a conseqüência paradoxal, uma vez que ele fica encerrado no momento de aplicar as regras que não são válidas na lógica proposta. Ou temos o argumento de Fitch ou a tese verificacionista. Optamos pela segunda. O nosso sistema formal pode suportar a tese verificacionista porque impede o desenvolvimento do argumento de Fitch.

A lógica $\mathbf{Ci}^T$ é uma versão paraconsistente da lógica modal $\mathbf{T}(=\mathbf{KT})$. Sabemos que a lógica modal $\mathbf{KT}$ acrescida com a tese verificacionista (TV): $A \rightarrow \Diamond\Box A$ é uma lógica que gera o colapso do operador de necessidade, visto que podemos aplicar o argumento de Fitch e , conseqüentemente, dar origem ao paradoxo da cognoscibilidade. Contudo, $\mathbf{Ci}^T$+ **TV** não elimina a modalidade de necessidade, dado que não temos o argumento de Fitch. Em $\mathbf{Ci}^T$+**TA** também não elimina a modalidade.

André Fuhrmann caracterizou a lógica $\mathbf{Ci}^T$+(TV) ou (TA) como um *verificacionismo paraconsistente(VP)*. Argumentou ainda que este não é suficiente para evitar o paradoxo da cognoscibilidade, uma vez que seria possível reestruturá-lo na linguagem de $\mathbf{Ci}^T$. Contudo, notamos que a negação usada para tal "reconstrução" é paraconsistente.

Para tanto, apresentou o seguinte argumento que considera:

T: $\Box A \rightarrow A$

P2: $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

M^C: $\neg(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \neg\Box(A \wedge B)$

V^C: $\neg\Diamond A \rightarrow \neg A$

V : $A \rightarrow \Diamond\Box A$

e mais as usuais regras de modus ponens, necessitação, a def.$\Diamond$ e a redução $\neg\neg A \rightarrow A$.

Segundo Fuhrmann, em VP + M^C + P2 + V^C podemos reconstruir o paradoxo da cognoscibilidade sem utilizar redução ou contraposição. Mas é claro que a lógica acima não é equivalente à lógica Ci^T, uma vez que não temos nem M^C nem P2 e nem V^C como teoremas, como se constata via Ci^T-modelos. E mais, não podemos definir $\Diamond$ com o uso da negação paraconsistente. Notemos que se o argumento acima é construído em $\mathbf{Ci}^T$ então cada ocorrência de $\neg$ é uma negação paraconsistente. Logo, várias das inferências não são válidas. Todavia, seriam válidas se a negação em questão estivesse se comportando como a negação clássica.

A. Fuhrmann mostrou dois problemas que ele considera importantes para a investigação:

1° Problema: VP + M^C evita o paradoxo da cognoscibilidade?

2° Problema: VP + V^C evita o paradoxo da cognoscibilidade?

Façamos, então, um resumo do que aconteceu:

a) O Argumento de Fitch nos mostra que $\vdash_{KT} \sim \Diamond\Box(A \wedge \sim \Box A)$.

b) Em KT+(TA) segue-se $\vdash_{KT+(TA)} A \rightarrow \Box A$, isto é, aquilo conhecido como paradoxo da "cognoscibilidade".

c) O Argumento de Fitch não acontece em Ci^T+(TV).

d) Em Ci^T+(TA) não se segue $\vdash_{Ci^T+(TA)} A \rightarrow \Box A$.

e) Com adaptações óbvias, pode-se demonstrar os mesmos fatos para uma versão epistêmica da tese alética, isto é, com a tese verificacionista.

W.Carnielli, M.E.Coniglio e J. Marcos apresentaram uma demonstração construtiva de que existe um modelo capaz de validar todos os axiomas de Ci^T, bem como todas as instâncias da (TA) sem, contudo, validar $A \rightarrow \Box A$, visto que para uma fórmula A e para um mundo $w \in W$ segue-se que $M, w \Vdash A$ e $M, w \nVdash \Box A$. [10]

Assim, quando um anti-realista se sentir em perigo diante do argumento de Fitch, ele será convidado a usar a lógica Ci^T para finalmente se ver livre da ameaça.

[10]Em *Logics of Formal Inconsistency.*

Conclusão

A primeira contribuição da nossa dissertação consiste na proposta de uma *filosofia analítica* capaz de utilizar uma lógica não-clássica para a análise lógica. Esta é um tipo de filosofia analítica que se diferencia do modo usual de fazer análise lógica da linguagem porque, ao invés de manipular somente as lógicas proposicional e quantificacional clássicas, explora e faz uso das lógicas não-clássicas na elucidação de questões filosóficas. Argumentamos também que a lógica possui um *status* ontológico, mas dado que existem várias lógicas, segue-se também a existência de vários mundos.

A partir do estudo das lógicas da inconsistência formal e das lógicas modais, foi possível a construção de uma lógica modal da inconsistência formal, isto é, uma lógica modal paraconsistente. A segunda contribuição se funda exatamente no estabelecimento de uma lógica modal paraconsistente com a prova de que possui demonstração de completude. Tal lógica é usada para mostrar como a tese verificacionista, se verdadeira, não leva necessariamente ao colapso do operador de conhecimento, uma vez que não vale o argumento de Fitch e visto que é possível encontrar um modelo que valide todas os axiomas de $\mathbf{Ci}^T$+TA e não valide a conclusão de que $A \rightarrow \Box A$.

Também apresentamos um argumento acerca da impossibilidade de se conhecer consistências.

Um dos problemas que permanece em aberto e que pretendemos investigar em textos futuros é a construção de sistemas modais corretos e completos que estendam a nossa lógica modal paraconsistente com o esquema G∞. Assim, desejamos provar completude de infinitas lógicas modais paraconsistentes e mostrar que a maior parte delas impede o argumento de Fitch. Pretendemos também investigar as relações entre as lógicas modais e paraconsistentes do ponto de vista categorial e da lógica universal.

Por fim, é importante salientar que os caminhos para a filosofia no século XXI ainda não estão elaborados. Por isso, não seria demasiado sugerir ao leitor que utilize a lógica formal para pensar filosoficamente, malgrado essa não ser a única possibilidade de se fazer filosofia. Apesar dos limites da lógica, ainda assim ela se constitui enquanto uma importante ferramenta para o trabalho filosófico.

Bibliografia

- Arruda, A. Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic. Philosophia Verlag, 1989. em *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*

- Béziau, J. Y.What is Paraconsistent Logic? *Frontiers of paraconsistent logic: proceedings of the I World Congress on Paraconsistency,* Ghent, julho 1998. Londres.

- Béziau, J. Y.From Paraconsistent Logic to Universal Logic - relatórios de pesquisa e desenvolvimento do Laboratório Nacional de Computação Científica, 98

- Béziau, J. Y.Paraconsistent Logic in a Historical Perspective. Com Newton da Costa e Otávio Bueno - relatório do Laboratório Nacional de Computação Científica, 9

- Béziau, J. Y.Universal Logic, in Logica 94 - Proceedings of the 8th International Symposium, T. Childers and o. Majer, Czech Academy of Sciences, Prague.

- Béziau, J. Y. S5 is a Paraconsistent Logic and so is Classical First-Order Logic.

- Béziau, J. Y.Paraconsistent Logic from a Modal Viewpoint. Em *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent - Proceedings of WCP2000 (*editores W.A.Carnielli, M.E.Coniglio e I.M.L. D 'Ottaviano) Marcel Dekker, Nova Iorque, 1-94. Versão preliminar disponível em CLE e-Prints, vol 1, n°05, 2001.

- Carnielli, W.A. Marcos, J. Taxonomy of C-systems. Em *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent - Proceedings of WCP2000 (*editores W.A.Carnielli, M.E.Coniglio e I.M.L. D 'Ottaviano) Marcel Dekker, Nova Iorque, 1-94. Versão preliminar disponível em CLE e-Prints, vol 1, n°05, 2001. URL: http://www.cle.unicamp.b prints/abstract_5.htm

- Carnielli, W.A. Coniglio, M.E. Marcos, J. Logics of Formal Inconsistency. Em preparação.

- Carnielli, W.A. Da Costa, N. C. Puga, L. Kantian and Non-Kantian Logics. Logique et Analyse. 1988.

- Carnielli, W.A.Limits for Paraconsistent Calculi. Notre Dame Journal of Formal Logic, 40(3):375-390, 1999.

- Carnielli, W.A. Da Costa, N. C. On Paraconsistent Deontic Logic. Philosophia (1986)

- Carnielli, W.A. Pizzi, C. Modalità e Multimodalità. 2001. Franco Angeli, 2001.

- Carnielli, W.A.Possible-translations semantics for paraconsistent logics. *Frontiers in Paraconsistent logic: proceedings of the I WCP, Ghent, 1998, edited by D.Batens, C.Mortensen. G.Priest and J.-P.van Bendegem, King's College Publications, 2000, pp.149-63.*

- Carnielli, W.A. Marcos, J. Semantics for C-systems. A aparecer.

- Carnielli, W.A. Marcos, J. Tableau Systems for Logics of Formal Inconsistency. In: H. R. Arabnia, editor, Proceedings of the 2001 International Conference on Artifical Inteligence., USA, 2001.

- Chateaubriand, O. Logical Forms. Coleção CLE. 2001.

- Chellas, B. *Modal Logic, 1980,* Cambridge, Cambridge University Press.

- Copeland, J. The Genesis of Possible World Semantics. Journal of Philosophical Logic, volume 31, n°02, abril 2002

- Da Costa, N. C. A. *Sistemas Formais Inconsistentes.* Curitiba, 1963. Tese Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras - Universidade Federal do Paraná. Curitiba: Editora da UFPR, 1993.

- Da Costa, N. C. A. *O Conhecimento Científico.* São Paulo: Discurso Editorial, 1999.

- Da Costa, N. C. A. *Logiques Classiques et non Classiques.* Masson, Paris, 1997.

- Costa, M.M.C. Introdução à Lógica Modal aplicada à Computação. Porto Alegre, UFRGS, 1992.

- Deleuze, G. *Mil Platôs.* Editora 34, 1998.

- Descartes, R. *Discurso sobre o método.* Editora Nova Cultural, 1996.

- Descartes, R. Meditações. Editora Nova Cultural, 1996.
- Fitch, F. A Logical Analysis of some Value Concepts. Journal of Symbolic Logic, volume 20, número 02, 1963.
- Halpern, J., Moses, Y. A Guide to Completeness of Modal Logics of Knowledge and Belief. Artificial Intelligence, 54:1992.
- Hughes, G. E. Cresswell, M. J. A New Introduction to Modal Logic. London: Routledge.
- Kant, I. *Crítica da Razão Pura.* Editora Nova Cultural, 1996.
- Kant, I. *Fundamentação da Metafísica dos Costumes.* Tradução de Paulo Quintela. Portugal.
- Kripke, S. *Naming and Necessity. 1972,* Harvard University Press, 1980.
- Leibniz, G. W. *A Monadologia.* Editora Nova Cultural.
- Lindström, S. A Situation-theoretic Analysis of a Paradox of Fitch. On-line paper.
- Lukasiewicz, J. On the principle of Contradiction in Aristotle. Review of Metaphysics XXIV (1971).
- Marcos, J. *Semânticas de Traduções Possíveis.* Dissertação de mestrado IFCH-UNICAMP, 1999.
- Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. 1987, Wadsworth.
- Mora, F. A Filosofia Analítica: Mudança de Sentido em Filosofia. Editora Rés, Portugal.
- Mortari, C. Lógicas Epistêmicas. Rumos da Epistemologia, volume 1. Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.
- Nagel, E. Logic without Ontology. Em Kikorian, Y. H.: Naturalism and the Human Spirit (New York, 1994).
- Platão. *Teeteto.* Diálogos, Biblioteca Clássica Editorial Gredos, Madrid, 1992.
- Priest, G. Routley, R. The Philosophical Significance of Paraconsistency. Em Paraconsistent Logic: Essays on the inconsistent. 1989
- Quine, W.V.O. Filosofia da Lógica. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1972.

- Rorty, R. A Filosofia e o Espelho da Natureza. Relume Dumará, 1994. Trad. A. Trânsito.
- Rota, G. C. The pernicious influence of mathematics upon philosophy em *Indiscrete thoughts*.
- Russell, B. *A Filosofia do Atomismo Lógico*. Abril Cultural, 1978.
- Schlick. Sentido e Verificação. Abril Cultural. 2ª ed.,1985. Trad. L.J. Baraúna e P. R. Mariconda.
- Tugendhat, E. Lições sobre Ética. Editora Vozes.
- Wansing, H. Diamonds are philosopher's best friends - the knowability paradox and modal epistemic relevance logic. Versão preliminar disponível em CLE e-Prints, vol 1, nº05, 2001.
- Williamson, T. Two Incomplete Anti-Realist Modal Epistemic Logics. Journal of Symbolic Logic, Volume 55, nº01, Março 1990
- Williamson, T. On Intuitionistic Modal Epistemic Logic. Journal of Philosophical Logic. Volume 21, 1992.
- Wittgenstein, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1994.
- Wright, G. H. *An Essay on Modal Logic*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1951. North-Holland.