Milton Augustinis de Castro

O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL APLICADO ÀS LÓGICAS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES C_n

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, da Universidade Estadual de Campinas, como requisito à obtenção do título de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência na área de Lógica e Epistemologia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Lungarzo

Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da UNICAMP
1998

FICHA CATALOGRÁFICA PREPARADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

	Castro, Milton Augustinis de
C 279 m	**O método de dedução natural aplicado às lógicas proposicionais paraconsistentes C_n / Milton Augustinis de Castro . - - Campinas, SP : [s.n.], 1998.**
	Orientador: Carlos Alberto Lungarzo.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Lógica. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Lógica matemática não-clássica. I. Lungarzo, Carlos, 1943- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada, em 27 de abril de 1998, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Carlos Alberto Lungarzo - Orientador

Prof.ª Dr.ª Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Prof.ª Dr.ª Andrea Maria Altina de Campos Loparic

(Suplente)

Agradecimentos

Ao amigo e orientador professor Carlos Alberto Lungarzo.

Ao profissionalismo e à dedicação que encontrei nos professores / pesquisadores que ministram os cursos de Lógica e Filosofia da Ciência no Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas.

À minha família, aos colegas de curso e à CAPES.

Às bibliotecárias do CLE, sempre disponíveis e eficientes.

Aos autores/pesquisadores dos livros citados na bibliografia.

A Gottlob Frege.

YHWH

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO 6

2 O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL (DN) 10

2.1 O método de DN 10
2.1.1 O método de provas subordinadas 15

3 AS LÓGICAS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES $\mathbf{C_n}$ ... 17

3.1. A linguagem para os diversos sistemas $\mathbf{C_n}$($0 \leq n \leq \omega$) 17
3.1.0 O sistema $\mathbf{C_0}$ 17
3.1.1 O sistema $\mathbf{C_1}$ 19
3.1.2 Os sistemas $\mathbf{C_n}$ ($1<n<\omega$) 20
3.1.3.O sistema $\mathbf{C_\omega}$ 20

4 O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL APLICADO AOS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS $\mathbf{C_n}$ 21

4.0 O método de DN aplicado em $\mathbf{C_0}$ 21
4.0.1 As regras de dedução de **DNC**$_0$ 21
4.1 O método de DN aplicado em $\mathbf{C_1}$ 26
4.1.1 Regras de formação para **DNC**$_1$ 26
4.1.2 A estrutura das provas(deduções) em **DNC**$_1$ 26
4.1.3 As regras de dedução de **DNC**$_1$ 26
4.1.4 A equivalência lógica entre o sistema $\mathbf{C_1}$ e o sistema **DNC**$_1$ 33
4.1.4.1 Todo teorema do sistema $\mathbf{C_1}$ é dedutível no sistema de dedução natural **DNC**$_1$ 33
4.1.4.2 A regra da substituição 38
4.1.4.3 Todo regra de dedução do sistema de dedução natural **DNC**$_1$ é dedutível no sistema axiomático $\mathbf{C_1}$ 39
4.1.5 Consistência do sistema **DNC**$_1$ 65
4.1.6 Completude do sistema **DNC**$_1$ 66
4.1.6.1 Teorema da corretude forte do sistema **DNC**$_1$ 66
4.1.6.2 Teorema da completude forte do sistema **DNC**$_1$ 78
4.1.7 Equivalência entre o sistema **DNC**$_1$ e o sistema de *tableau* **TDNC**$_1$ .. 85
4.1.7.1 Toda regra de dedução no sistema de dedução natural **DNC**$_1$ é gerada pelas regras de expansão do sistema de *tableau* **TDNC**$_1$. 127
4.1.7.2 Toda regra de expansão do sistema de *tableau* **TDNC**$_1$ é dedutível no sistema de dedução natural **DNC**$_1$. 131

4.1.7.3 Corretude do sistema de *tableau* **TDNC$_1$** 134
4.1.7.4 Decidibilidade do sistema **DNC$_1$** 135
4.2 O método de DN aplicado em **C$_n$**($1<n<\omega$) 135
4.2.1 As regras de dedução dos **DNC$_n$**($1<n<\omega$) 136
4.3 O método de DN aplicado em **C$_\omega$** 141
4.3.1 As regras de dedução de **DNC$_\omega$** 142
4.4 A hierarquia dos sistemas **DNC$_n$** 143

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO 147

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS 151

7 ANEXOS 154

ANEXO A 154

Textos originais

ANEXO B 156

B1 Metateorema da dedução em **C$_n$**($0\leq n\leq\omega$) 156
B2 Equivalência lógica entre o postulado A10 de **C$_0$** e a regra de introdução da negação de **DNC$_0$** 157
B3 Demonstração de $\Gamma \vdash A\&\neg A\supset B$, a partir de $\Gamma \vdash \neg A$ em **DNC$_1$** 158
B4 Demonstração de $\Gamma \vdash A^0\&A\&\neg A\supset B$ em **C$_1$** 159

ANEXO C 160

C1 Sistema de dedução natural logicamente equivalente a **DNC$_1$**. 160
C2 Outro sistema de dedução natural logicamente equivalente a **DNC$_1$** 162

ANEXO D 163

Princípio de construção da hierarquia não trivial **C$_n$** ($n\geq0$, $n\in$ **N**).

ANEXO E 163

Aplicações do *tableau* **TDNC$_1$**.

ANEXO F 165

Aplicação do sistema **DNC$_1$** numa teoria formal.

RESUMO

A aplicação do método de dedução natural, via o método de provas subordinadas, nas lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ ($1 \leq n \leq \omega$) é apresentada neste trabalho. Através desse método elabora-se uma hierarquia de sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC_n}$, constituídos exclusivamente por regras de dedução (ou esquemas de dedução), dispensando, quaisquer esquemas de postulados. Provamos que esses sistemas $\mathbf{DNC_n}$($0 \leq n < \omega$) são logicamentes equivalentes aos sistemas $\mathbf{C_n}$($0 \leq n < \omega$) de DA COSTA. Elaboramos uma valoração bivalente e provamos vários temas sintáticos e semânticos referentes aos sistemas formais, tais como, consistência, corretude forte, completude forte no caso dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$($1 \leq n \leq \omega$). Provamos a decidibilidade dos sistemas paraconsistentes de dedução natural $\mathbf{DNC_n}$($1 \leq n < \omega$) pelo método de *tableau*. Provamos a equivalência entre os sistemas $\mathbf{DNC_n}$ ($1 \leq n < \omega$) e o sistemas de *tableau* $\mathbf{TDNC_n}$ ($1 \leq n < \omega$), a corretude e a decidibilidade desses sistemas. Duas novas formulações para a hierarquia de sistemas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ ($0 \leq n \leq \omega$) são apresentadas.

SUMMARY

In this paper, we present an application of the method of natural deduction, *via* the method of subordinate proofs. By using this method, we develop a hierarchy of logical systems of natural deduction $\mathbf{DNC_n}$ containing just deduction rules (or schemes of deduction) with no axioms schemes. We proved that these systems $\mathbf{DNC_n}$($0 \leq n \leq \omega$) are logically equivalent to the da Costas's systems $\mathbf{C_n}$ ($0 \leq n \leq \omega$). By introducing of a special bivalent valuation concept, we prove some the standard syntactical as well as semantical properties of formal systems, like consistency, strong soundness, and strong completeness in the case of the $\mathbf{DNC_n}$($1 \leq n \leq \omega$). The decidability of the paraconsistent systems of natural deduction $\mathbf{DNC_n}$($1 \leq n < \omega$) is proved by specifically introduced systems of *tableau*. We prove the logical equivalence between the systems $\mathbf{DNC_n}$($1 \leq n < \omega$) and the *tableau* system $\mathbf{TDNC_n}$ ($1 \leq n < \omega$) and also prove the soundness and decidability of these systems. Two new formulations for the hierarchy of da Costa's systems $\mathbf{C_n}$ ($0 \leq n \leq \omega$) are introduced.

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa parte inicialmente da observação de que o método mais empregado no estudo das lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ do professor Newton Carneiro Affonso da Costa é o axiomático, estilo Hilbert-Frege, sugerindo então a questão: o que acontece se aplicamos o método de dedução natural a estes sistemas? O que podemos obter, tanto em resultados técnicos quanto nos teóricos, a partir desse enfoque da teoria da prova?

Do ponto de vista lógico temos mais um enfoque, diferente do que até aqui tem sido normalmente realizado, para analisarmos as propriedades dos ditos sistemas, onde serão abertas questões do ponto de vista da dedução natural. Quando as decidibilidades dos sistemas $\mathbf{C_n}$ não estavam ainda demonstradas, RAGGIO (1968) construiu cálculos de *sequentes*[1] (por ele denominados $\mathbf{CG_n}$ ($1 \leq n \leq \omega$)) para tentar resolver aquela questão. Os cálculos proposicionais $\mathbf{CG_n}$ não foram demonstrados decidíveis, embora, sejam equivalentes aos sistemas $\mathbf{C_n}$, e de terem as mesmas propriedades que $\mathbf{C_n}$, além de constituirem uma hierarquia[2]. Sistemas de dedução natural para C_1 e C_ω foram estabelecidos por ALVES (1976), onde só foram empregadas regras de dedução, mas, infelizmente, ele não se aprofundou no estudo do sistema. Uma nova axiomatização foi elaborada por RAGGIO (1978) para o sistema $\mathbf{C_\omega}$ (por êle denominado $\mathbf{NC_\omega}$*) tendo $A \vee \neg A$ como o seu único axioma, e onde é usado o método de dedução natural. Naquele trabalho fica demonstrada a equivalência entre $\mathbf{NC_\omega}$* e $\mathbf{C_\omega}$* (o asterisco faz referência a sistema axiomático de lógica paraconsistente quantificacional sem igualdade), portanto, os sistemas proposicionais correspondentes são equivalentes. Recentemente PEREIRA e MOURA (1997), usando o método de dedução natural, elaboraram um sistema de dedução natural $\mathbf{NNC_\omega}$ usando unicamente regras de dedução o qual é equivalente a $\mathbf{NC_\omega}$. Devemos citar que um sistema de dedução natural já foi aplicado à lógica discussiva D_2 (KOTAS e DA COSTA, 1979). Neste trabalho elabora-

---

[1] Um *sequente* é uma expressão da forma $A_1, A_2, ..., A_n \rightarrow B_1, B_2, ..., B_j$, onde A_i e B_i ($1 \leq i,j \leq n$) representam fórmulas quaisquer e tem a mesma "interpretação" que $A_1 \& A_2 \& ... \& A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_j$. O cálculo de *sequentes* pode ser considerado como um meta-cálculo para o sistema de dedução natural. Nesse cálculo é explicitado a relação de derivabilidade a partir de regras de estrutura e de dedução(somente regras de introdução) para *sequentes*.

[2] Um resumo mais detalhado encontra-se em D'OTTAVIANO, 1995, p. 1-24.

remos e aprofundaremos estudos de sistemas de dedução natural que sejam logicamente equivalentes a $\mathbf{C_n}$ ($1 \leq n \leq \omega$) e que só usem regras de dedução, embora, não empreguemos *sequentes*.

Aplicaremos o método de dedução natural, estilo Jaśkowski-Gentzen, através do método das provas subordinadas (cf. FITCH, 1952) nas lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$. A escolha desse estilo pode ser resumida no seguinte parágrafo:

> "A escolha de apresentação é um assunto de gosto e/ou conveniência. As provas no estilo de dedução natural nas teorias matemáticas são freqüentemente apresentadas na forma linear, visto que as apresentações na forma de árvore tornam-se de difícil manuseio para argumentos complicados" (TROELSTRA e VAN DALE, 1988, p.48) [3].

Abordaremos preferencialmente o aspecto sintático dessas lógicas, e respeitaremos as duas condições básicas dessas lógicas:

> " I - Em C_1 não deve ser válido, em geral, o princípio da não contradição" (DA COSTA, 1993, p.7).
>
> "II - De duas proposições contraditórias não deve ser geralmente possível deduzir qualquer proposição" (DA COSTA, 1993, p.7).

A importância do nosso enfoque advém do fato que normalmente ao demonstrarmos uma proposição não fazemos uso do método axiomático. Mesmo os matemáticos que lidam com sistemas axiomáticos, em suas provas fazem uso de outros métodos de raciocínio. A partir dessa observação, Jaśkowski elaborou o que hoje denominamos por dedução natural, ou dedução natural linear.

Como será visto, os procedimentos que constituem a dedução natural são uma abor dagem natural e segura para o estudo de um sistema axiomático, assim como também cons tituem uma base sólida para a análise das propriedades deste.

Com esse objetivo desenvolveremos esta dissertação da seguinte maneira:

---

[3] Os originais das traduções mencionadas neste trabalho encontram-se no anexo A.

No capítulo 2 deste trabalho descrevemos a nossa principal ferramenta, ou seja, o método de dedução natural, logo após explicitamos a noção de dedução que usaremos e descrevemos o método de provas subordinadas.

No capítulo 3 são descritos os sistemas axiomatizados $\mathbf{C_n}$, aos quais aplicaremos o método de dedução natural.

No capítulo 4 aplicamos o método de dedução natural nos sistemas $\mathbf{C_n}$ ($1 \leq n \leq \omega$), elaborando sistemas lógicos, que abreviaremos por $\mathbf{DNC_n}$, constituídos exclusivamente por regras de dedução (ou esquemas de dedução) formuladas no estilo Fitch, dispensando quaisquer esquemas de postulados de $\mathbf{C_n}$. Vários dos principais temas sintáticos e semânticos referentes aos sistemas formais, tais como, consistência, corretude forte, completude forte, etc. são aqui estudados. Demonstraremos que estes sistemas constituem uma verdadeira hierarquia e que são logicamente equivalentes aos sistemas $\mathbf{C_n}$. A equivalência entre o sistema $\mathbf{C_1}$ e o sistema $\mathbf{DNC_1}$ é demonstrada exaustivamente, tendo-se o cuidado de restringir a noção de dedução para podermos efetivamente compararmos o sistema axiomático $\mathbf{C_1}$ com o sistema $\mathbf{DNC_1}$. Esboçamos os procedimentos necessários para demonstrá-las para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$($1<n \leq \omega$). A consistência de cada sistema $\mathbf{DNC_n}$ ($1 \leq n \leq \omega$) é demonstrada. Usando uma valoração bivalente (cf. DA COSTA e ALVES, 1977), estilo Henkin, demonstramos a corretude e a completude fortes do sistema $\mathbf{DNC_1}$ e esboçamos os procedimentos necessários para demonstrá-las para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$ ($1<n<\omega$), mesmo sabendo que a equivalência entre $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{DNC_1}$ me garanta tais resultados. Embora a equivalência dos sistemas garanta a transferência das propriedades entre eles, realizamos as demonstrações dos principais temas sintáticos e semânticos, em virtude de termos definidos uma interpretação própria, não existente na literatura, para esses sistemas. A existência de certo limite do método de dedução natural[4] nos levou a optar método de *tableaux* para provar a decidibilidade do sistema $\mathbf{DNC_1}$, e esboçamos os procedimentos necessários para demonstrá-la para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$ ($1<n <\omega$). Escolhemos esse método em virtude da nossa preocupa-

---

[4] Caso desejamos saber , num tempo útil, se uma fórmula C é conseqüência sintática de outras fórmulas P_1, P_2, ..., P_n (simbólicamente $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash C$) e se após um tempo razoável de tentativas não for encontrada nenhuma dedução que confirme a relação de conseqüência, não saberemos se tentamos o tempo suficiente ou de fato não existe tal relação.

ção em usar a lógica paraconsistente em sistemas de inteligência artificial. Devemos citar que CARNIELLI (1992), e BUCHSBAUM & PEQUENO (1993) elaboraram sistemas de *tableau*, e que os sistemas que elaboramos complementam aqueles. Demonstramos uma propriedade da relação conseqüência analítica ($\vdash_{TDNC_1}$) para o sistema de *tableau* para que possamos introduzir uma versão da Regra do Corte nesse sistema, a partir da qual provamos a equivalência entre o sistema $\mathbf{DNC_1}$ e o sistema de *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$. Esboçamos os procedimentos necessários para demonstrar a equivalência entre cada um dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$ ($1<n<\omega$) e seus respectivos sistemas de *tableau*.

No capítulo 5 discutiremos alguns resultados advindos dos capítulos anteriores, como por exemplo, a eficiência do sistema $\mathbf{DNC_1}$ diante do sistema de ALVES (1976).

No capítulo 7 colocaremos os anexos, os quais contêm elementos para serem consultados caso o leitor sinta necessidade de detalhes.

Com este trabalho esperamos mostrar que o enfoque dado pelo método de dedução natural através dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$ é suficientemente fértil para o estudo aprofundado das lógicas $\mathbf{C_n}$, e que a partir disso podemos obter resultados que são fecundos não só para a lógica paraconsistente, mas, também para a Lógica como um todo, o que poderá ser comprovado pelo leitor.

2 O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL (DN)

2.1 O método de DN

O método de dedução natural origina-se dos trabalhos de Stanisław Jaśkowski (JAŚKOWSKI, 1967) e de Gerhard Gentzen (GENTZEN, 1969) a partir da análise dos procedimentos envolvidos nas provas matemáticas. Em 1934, Stanisław Jaśkowski publicou o seu trabalho sobre dedução natural, com base no seminário de lógica de J. Lukasiewicz, realizado desde 1926. Jaśkowski afirma

> "Em 1926 o Professor J. Lukasiewicz chamou atenção para o fato que os matemáticos nas suas provas não apelam para as teses da teoria da dedução, mas fazem uso de outros métodos de raciocínio" (JAŚKOWSKI, 1967, p. 232).

E conclui

> " O principal recurso usado em seus métodos é o de uma suposição arbitrária" (JAŚKOWSKI, 1967, p. 232).

A partir daí, Jaśkowski elabora um sistema lógico cuja característica principal é a de não requerer axiomas,

> " Assim formulamos todas as regras do nosso sistema, o qual tem a peculiaridade de não requerer axiomas" (JAŚKOWSKI, 1967, p.238)[5].

No que concerne ao processo de dedução no sistema axiomático, David Hilbert pondera

> "...com freqüência é muito difícil e requer muitas tentativas a dedução de uma determinada expressão da qual sabemos, por exemplo, que tem validade universal." (HILBERT e ACKERMANN, 1975, p.36).

---

[5] As regras de dedução do sistema de lógica proposicional de Jaśkowski são: Eliminação da implicação, Introdução da implicação, Introdução de suposição e Eliminação da negação(*Reductio ad absurdum*) (cf. JAŚKOWSKI, 1967, p. 236-238).

E citando o trabalho de Gerhard Gentzen, eles afirmam que neste são introduzidos desde o início todas as conexões fundamentais, além de satisfazer as seguintes exigências formais na construção de um sistema de axiomas:

"... que esteja imediatamente visível o processo de dedução de todas as fórmulas universalmente válidas, e que, em geral, partindo das regras se saiba imediatamente de uma forma proposicional arbitrária se é dedutível ou não no sistema." (HILBERT e ACKERMANN, 1975, p.36).

Referindo-se ao método de dedução natural como um cálculo, Hilbert afirma

"o cálculo não contem axiomas lógicos, mas somente figuras de inferência que indicam quais inferências podem ser extraídas a partir de hipóteses dadas" (HILBERT e ACKERMANN, 1950, p.30).

No trabalho a que se refere Hilbert, publicado em 1934, Gentzen estabeleceu o seguinte propósito

" Pretendemos elaborar um formalismo que reflita tão exato quanto possível o efetivo raciocínio lógico envolvido nas provas matemáticas" (GENTZEN, 1969, p.74).

E, no que concerne à diferença entre o processo de prova matemática nos sistemas axio-mático e de dedução natural afirma

"A dedução natural, porém, não parte,em geral,de proposições lógicas básicas, mas de *suposições* (cf. exemplos no §1)nas quais são aplicadas deduções lógicas. Por meio de uma inferência posterior o resultado é então novamente feito independente da suposição "(GENTZEN, 1969, p.75)[6].

Assim, entendemos que no método de dedução natural todas as conexões funda mentais, entenda-se regras (ou esquemas) de dedução, são introduzidas desde o início, e a partir destas e só destas são realizadas as demonstrações. Entre essas regras temos a de

[6] As regras de dedução do sistema de lógica proposicional de Gentzen são: as regras de eliminação da negação, da conjunção, da disjunção e da implicação; as regras de introdução da negação (*Reductio ad absurdum*), da conjunção, da disjunção e da implicação (cf. GENTZEN, 1969, p. 77).

transporte de fórmulas (que justifica o movimento da mesma fórmula de um ponto a outro numa dedução), as de introdução e de eliminação de conectivos lógicos e quantificadores (que justificam a dedução de uma nova fórmula a partir de uma ou mais fórmulas já pre sentes na dedução). Existe uma regra de introdução e de eliminação para cada um dos conectivos lógicos e cada um dos quantificadores. Nesse trabalho só nos interessa as regras relativas aos conectivos lógicos.

Uma **dedução formal (ou demonstração formal)**, em tal método, é entendida como uma seqüência finita de itens (normalmente escrita como uma lista vertical) onde cada um deles é:

(a) uma premissa (ou premissa dada) ; ou

(b) uma premissa provisória (ou suposição provisória) ; ou

(c) uma fórmula que se deriva logicamente de outro ou de outros itens anteriores na seqüência, por meio da aplicação de uma só regra de dedução.

Cada fórmula da seqüência constitui um *item de dedução*. O último item da dedução é a *conclusão*.

Descreveremos os três tipos de itens de dedução[7]:

a) Premissa, que são fórmulas que se consideram hipoteticamente dadas desde o princípio da dedução. Pode também ocorrer o caso de demonstrações isentas de premissas.

b) Itens que procedem de outro ou de outros itens anteriores na seqüência, pela aplicação de uma regra de dedução. Destes itens dizemos que são *conseqüências lógicas imediatas de outro item ou de outros itens anteriores*.

c) Itens que se introduzem provisoriamente no curso de uma demonstração e que devem ser cancelados antes do estabelecimento da conclusão. A estes itens damos o nome de *premissas provisórias(ou suposições)*.

Para identificar e ordenar os itens de uma dedução empregaremos as seguintes convenções:

1) Numeração dos itens.

Numa dedução cada um dos seus itens será numerado à sua esquerda a partir de 1,

[7] Adaptamos a descrição que se segue de GARRIDO, 1986, p.68-73.

de tal forma que o último número será o que corresponde à conclusão.

2) Indicação dos itens iniciais.

Os itens desse tipo serão indicados à direita com a expressão *premissa*. Se o segundo item de uma dedução consiste da fórmula A, indicaremos isso da seguinte maneira:

2	A	premissa

3) Comentário referente às conseqüências imediatas de uma regra de dedução.

Esses itens serão seguidos à sua direita por um comentário justificativo da sua presença. Neste comentário indicar-se-á abreviadamente a regra de dedução que fundamenta esse item e o(s) número(s) do(s) item(ns) da dedução que serviu(viram) de antecedente(s) na aplicação da regra. Se o item *n+1* de uma dedução consiste da fórmula B e esta fórmula é uma conseqüência imediata de itens anteriores *m* e *n* por meio da aplicação da regra de eliminação da implicação, indicaremos isso da seguinte maneira:

:	:	
m	$A \supset B$	
:	:	
n	A	
n+1	B	m, n, E - $\supset$

O item B é justificado da seguinte maneira: a fórmula B foi obtida pela aplicação da regra de eliminação da implicação(E - $\supset$) nos itens que ocorrem na linha m e n.

Como estamos descrevendo a estrutura de uma dedução, e não sabemos qual o número exato da linha, estamos indicando esse fato com m, n e n+1. Os pontos que ocorrem entre as linhas da dedução sempre deverão ser entendidos como possíveis itens obtidos na dedução (no caso acima eles ocorrem antes da linha m, e entre m e n).

4) Indicação da premissa provisória.

Esse item deverá apresentar como indicação, à direita após o número do item, um segmento de reta vertical que só será interrompido quando esse item for eliminado, e à direita a indicação da premissa provisória. Só é permitido introduzir uma premissa de cada vez. Se o item que ocorre na linha 3 de uma dedução consiste da fórmula A e esta é uma premissa provisória, indicaremos isso colocando-a entre colchetes, da seguinte maneira:

3	[[A]]	premissa provisória
:	:	

O significado intuitivo disso é: suponhamos no momento, como item de número 3, a fórmula A.

5) Cancelamento das premissas provisórias.

O uso de premissa (ou suposição) provisória requer o seu *cancelamento* ou a sua *eliminação*, pois, para que uma fórmula seja considerada demonstrada, caso existam premissas provisórias, todas elas devem ter sido eliminadas. Uma premissa provisória situada numa linha *n* de uma dedução é cancelada ou eliminada quando posteriormente, numa linha *n+k* dessa dedução, obtém-se um item que é completamente independente da referida premissa provisória e cujo número da linha na derivação será, portanto, *n+k*.

A fórmula que ocorre na linha *n+k* pode ser considerada a conclusão de uma dedução que começa com a premissa provisória que ocorre em *n*. Uma tal dedução recebe o nome de *dedução* (ou *prova) subordinada*. Uma *dedução subordinada* aparece dentro de outra dedução de dimensões maiores. A(s) fórmula(s) que ocorre(m) numa *dedução subordinada* são afetadas pelo cancelamento da premissa provisória, já que dela dependem, e só podem ser usadas naquela dedução. Como exemplo de uma demonstração, na lógica clássica, vejamos:

Se o item que ocorre na linha *n* consiste da premissa provisória A, a qual dá inicio a uma *dedução subordinada*, e se posteriormente aparecer na linha n+k-1(n+k-1>n) uma contradição B&¬B, podemos deduzir na linha seguinte a negação de A, interrompendo imediatamente a linha vertical correspondente à prova subordinada,

n	[[A]]	premissa provisória
:	:	
n+k-1	B&¬B	
n+k	¬A	n - n+k-1, I - ¬

O item que ocorre em n+k é o resultado da *dedução subordinada* na qual A é a premissa provisória e B&¬B é uma conclusão nessa dedução, justificando que ¬A resulta da aplicação da regra de introdução da negação(I-¬), do passo n *ao passo* n+k-1 (representan-do '*ao passo*' com um hífen). O item em n+k já não está subordinado a dedução que vai de n a n+k-1, dessa maneira ele não deve ocorrer dentro do traço vertical que indica uma *dedução subordinada*. Podemos expressar esse fato, como no exemplo acima, deslocando para a esquerda (em relação ao traço vertical) o item que ocorre na linha n+k.

NOTA: Não empregaremos os duplos colchetes nas demonstrações para indicar a introdução de uma premissa provisória, pois, à direita, após o número da linha, haverá um segmento de reta vertical para indicar uma dedução subordinada àquela premissa. Todavia, eles continuarão a serem usados nas formulações das regras de dedução.

2.1.1 O método de provas subordinadas.

Empregaremos o procedimento de provas subordinadas, elaborado por FITCH (1952), cuja vantagem reside em tratar simultaneamente com várias deduções subordinadas, permitindo escrever diversas deduções como parte de uma outra. Vejamos por exemplo, a dedução da fórmula $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$.

1	$\mid A\supset B$	premissa provisória
2	$\mid\ \mid A\supset(B\supset C)$	premissa provisória
3	$\mid\ \mid\ \mid A$	premissa provisória
4	$\mid\ \mid\ \mid A\supset(B\supset C)$	2, repetição
5	$\mid\ \mid\ \mid B\supset C$	3, 4, E - $\supset$
6	$\mid\ \mid\ \mid A\supset B$	1, repetição
7	$\mid\ \mid\ \mid B$	3, 6, E - $\supset$
8	$\mid\ \mid\ \mid C$	5, 7, E - $\supset$
9	$\mid\ \mid A\supset C$	3-8, I - $\supset$
10	$\mid ((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$	2-9, I - $\supset$
11	$(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$	1-10, I - $\supset$

Na demonstração acima existem três deduções subordinadas cada uma com a sua própria suposição. A primeira dedução subordinada inicia com o item que ocorre na linha 1, a segunda com o item que ocorre na linha 2 e a terceira com o item que ocorre na linha 3. Lembre-se que cada premissa provisória dá inicio a uma dedução subordinada e que posteriormente deverá ser eliminada. A dedução principal da qual as deduções subordinadas fazem parte contem dois itens, a saber, a primeira dedução subordinada, cuja extensão vai da linha de número 1 até a de número 10, e a fórmula $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$, que nesse caso corresponde a própria conclusão. A primeira dedução subordinada é constituída por três itens, a saber, o item que ocorre na linha de número 1, a segunda dedução subordinada (que é considerado um item), cuja extensão vai da linha de número 2 até a de número 9, e o item que ocorre na linha de número 10. A segunda dedução subordinada é constituída por três itens, a saber, o item que ocorre na linha de número 2, a segunda dedução subordinada (que é considerado um item), cuja extensão vai da linha de número 3 até a de número 8, e o item que ocorre na linha de número 9. A terceira dedução subordinada é constituída por seis itens, a saber, os itens que ocorrem nas linhas de números 3 a 8. A partir de agora será permitido usar deduções subordinadas como itens de outras deduções. Permitiremos usar deduções subordinadas como itens de outras deduções subordinadas que são itens de outra dedução subordinada, e assim por diante.

Nas deduções subordinadas é permitida, através da regra de repetição, que uma dedução subordinada possa ter um ou mais itens que são repetições de itens da dedução à qual ela esta subordinada. É permitido repetir um item na mesma dedução, bem como repeti-lo de uma prova à uma outra que lhe é subordinada, entretanto, nunca podemos repetir um item de uma dedução subordinada à uma dedução a qual a dedução subordinada é um item.

Assim, entenderemos que uma dedução é subordinada a uma outra quando ela é um item daquela, ou um item de um item daquela (quando temos deduções subordinadas em outras deduções subordinadas) ou um item de um item de um item daquela, e assim por diante. Dessa maneira, uma dedução é dita principal quando não é subordinada.

Uma demonstração de uma determinada fórmula está encerrada quando esta fórmula é um item que é uma conclusão na dedução principal.

3 AS LÓGICAS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES C_n DE da COSTA

3.1 A linguagem para os diversos sistemas C_n.($0 \leq n \leq \omega$)

As diferentes lógicas (ou sistemas) proposicionais paraconsistentes C_n apresentam em comum a seguinte linguagem $\mathscr{L}$:

(1) Alfabeto

Símbolos:

variáveis(proposicionais): p, q, r, s, p', q', r', s', p'', q'', ... [8]

conectivos(lógicos): $\neg$, &, $\vee$ e $\supset$.

símbolos auxiliares: (,), [,].

(2) Expressão de $\mathscr{L}$.

É uma sucessão finita de símbolos.

(3) Regras de formação das fórmulas(ou fórmulas-bem-formadas) de $\mathscr{L}$.

(i)Toda variável proposicional é uma fórmula de $\mathscr{L}$;

(ii)Se A é uma fórmula, $\neg$A é uma fórmula de $\mathscr{L}$;

(iii)Se A e B são fórmulas, (A&B), (A$\vee$B) e (A$\supset$B) são fórmulas de $\mathscr{L}$;

(iv)As fórmulas de $\mathscr{L}$ são obtidas apenas por (i)-(iii).

Uma variável proposicional é dita uma fórmula atômica.

As fórmulas $\neg$A, (A&B), (A$\vee$B) e (A$\supset$B) são denominadas fórmulas moleculares.

A linguagem $\mathscr{L}$ consiste de símbolos e expressões que satisfazem as regras dadas.

3.1.0 O sistema C_0.

Esse sistema é àquele que denominamos como o da lógica proposicional clássica. Os seus esquemas de postulados são os encontrados em KLEENE (1958), cujas convenções, terminologia, simbologia, etc., empregaremos sem comentários:

A fim de que possamos realizar a demonstração de equivalência lógica entre o método axiomático e o método de dedução natural dada em 4.1.4, iremos a partir de agora

[8] A, B, C, etc. indicam metavariáveis proposicionais.

considerar que,

Definição 6 Dedução formal (ou demonstração formal)

Uma **dedução formal (ou demonstração formal)** é uma seqüência finita de itens onde cada uma deles satisfaz uma das seguintes condições:

(a) uma premissa (ou premissa dada) ; ou

(b) uma premissa provisória (ou suposição provisória) ; ou

(c) um item que deriva-se logicamente de outro ou de outros anteriores na seqüência, por meio da aplicação de uma só regra de dedução.

Cada fórmula da seqüência constitui um *item de dedução.* O último item da dedução é a *conclusão.*

Uma **prova (formal)** é uma **dedução (formal)** sem premissas. No caso a conclusão será denominada um **teorema (formal)**.

Se $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_n$ representam premissas (premissas dadas) e **C** a conclusão de um **dedução (formal)**, indicaremos isso por $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_n \vdash \mathbf{C}$. (O símbolo ' $\vdash$ ' , introduzido por Frege em 1879, indica uma *conseqüência sintática*, e pode ser lido *'de* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ *deduz-se* **C**' ou ' $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_n$ tem como conseqüência **C**'). No caso de não haver premissas (premissas dadas) e **C** é a conclusão de uma **dedução (formal)**, indicaremos isso por $\vdash \mathbf{C}$ (dizemos que **C** é um **teorema**)[9].

Os esquemas de postulados de $\mathbf{C}_0$ são:

A1 $\vdash_{C_0} A \supset (B \supset A)$

A2 $\vdash_{C_0} (A \supset B) \supset (((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

A3 $\vdash_{C_0} A \& B \supset A$

A4 $\vdash_{C_0} A \& B \supset B$

A5 $\vdash_{C_0} A \supset (B \supset A \& B)$

A6 $\vdash_{C_0} A \supset A \vee B$

[9] O símbolo ' $\vdash$' será acompanhado de um subíndice, por exemplo ' $\vdash_{C_0}$ ', a fim de indicar qual sistema estamos tratando(nesse caso o sistema é $\mathbf{C}_0$).

A7 $\vdash_{C_0} B \supset A \vee B$

A8 $\vdash_{C_0} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

A9 $\vdash_{C_0} \neg\neg A \supset A$

A10 $\vdash_{C_0} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

a Regra de dedução E - $\supset$ (Eliminação da implicação) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$

Regra do intercâmbio (*replacement*);

Regra de Substituição.

3.1.1 O sistema C_1.

É o primeiro de uma série de sistemas de lógicas proposicionais paraconsistentes apresentado por Newton C.A. da Costa (DA COSTA, 1993) na sua tese para a cátedra em Análise Matemática e Análise Superior na Universidade Federal do Paraná.

Consta das seguintes definições que se seguem:

Definição 1 $A^0 =_{df} \neg(A \& \neg A)$;

Definição 2 $\sim A =_{df} \neg A \& A^0$;

Definição 3 $A \equiv B =_{df} (A \supset B) \& (B \supset A)$;

Definição 4 A^n representa $A^{0...0}$ (^{0} - n vezes)

Definição 5 $A^{(1)}$ representa A^0

$A^{(n)}$ representa $A^1 \& A^2 \& ... \& A^n$ (com $n \geq 1$)

onde A^1 indica A^0, A^2 indica A^{00}; A^3 indica A^{000}, ..., A^n indica $A^{00...0}$ (*o* n-vezes)

Uma fórmula A^0 será a partir de agora denominada de **fórmula bem comportada** ou **regular**.

E dos esquemas de postulados A1 a A9 de $\mathbf{C_0}$, além da lei do terceiro excluído

A10 $\vdash_{C_1} A \vee \neg A$

e altera o A10 de $\mathbf{C_0}$ para

A11 $\vdash_{C_1} B^0 \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

Acrescentam-se mais três postulados, aos anteriores:

A12 $\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (A \& B)^0$

A13 $\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (A \vee B)^0$

A14 $\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (A \supset B)^0$

A Regra de dedução (E - $\supset$) e a Regra da Substituição

3.1.2 Os sistemas $\mathbf{C_n}$. ($1<n<\omega$)

Esses sistemas são definidos pelos esquemas de postulados A1 a A9 de $\mathbf{C_0}$, além da lei do terceiro excluído

A10 $\vdash_{C_n} A \vee \neg A$

e por mais os seguintes esquemas, onde, $1 \leq n < \omega$:

A11 $\vdash_{C_n} B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

A12 $\vdash_{C_n} A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \& B)^{(n)}$

A13 $\vdash_{C_n} A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \vee B)^{(n)}$

A14 $\vdash_{C_n} A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \supset B)^{(n)}$

A Regra de dedução (E - $\supset$) e Regra da Substituição.

3.1.3 O sistema $\mathbf{C_\omega}$.

Esse sistema é constituído pelos esquemas de postulados A1 a A10 de $\mathbf{C_1}$, a Regra de dedução E - $\supset$ e a Regra da Substituição.

4 O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL APLICADO AOS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS.

O método de dedução natural que adotamos, e que aplicaremos nas diferentes lógicas (ou sistemas axiomáticos) proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$, construirá sistemas lógicos que usam apenas regras de dedução (ou esquemas de dedução) para realizar demonstrações, dispensando, portanto, os esquemas de postulados de $\mathbf{C_n}$. Tanto os sistemas axiomáticos paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ quanto os de dedução natural tem em comum: o alfabeto de $\mathcal{L}$, as expressões de $\mathcal{L}$, as regras de formação das fórmulas de $\mathcal{L}$ e as definições. Nesse trabalho será visto que eles também tem em comum as fórmulas dedutíveis.

Abreviaremos, onde for necessário, a expressão '*sistema de dedução natural* C_n' por 'DNC_n'.

4.0 O método de DN aplicado em C_0.

Aplicando o método de dedução natural em C_0 elaboramos um sistema lógico constituído por nove regras de dedução.

4.0.1 As regras de dedução de DNC_0 [10]

As regras de dedução, no estilo Fitch, para esse sistema são:

4.0.1.1 Regra de transporte

Repetição (R)

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
⋮	⋮	
n	A_n	premissa
⋮	⋮	
k	A_i	(R, i), onde $1 \leq i \leq n$

[10] Peço ao leitor que aceite no momento que $\mathbf{C_0}$ e $\mathbf{DNC_0}$ são logicamente equivalentes. Em 4.1.4 provaremos a equivalência dos sistemas $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{DNC_1}$, e como os esquemas de postulados A1-A9 são comuns aos sistemas $\mathbf{C_n}$ bem como as respectivas regras dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$, aproveitam-se para a prova da equivalência entre $\mathbf{C_0}$ e $\mathbf{DNC_0}$ os procedimentos demonstrativos ali realizados. E como no anexo B2 é demonstrado que a regra de introdução da negação(I - $\neg$) de $\mathbf{DNC_0}$ e o esquema de postulado A10 de $\mathbf{C_0}$ são equivalentes, podemos concluir pela equivalência entre $\mathbf{C_0}$ e $\mathbf{DNC_0}$.

4.0.1.2 Regras de introdução

Introdução da implicação(I-⊃)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k		| [[B]]	premissa provisória
:		| :	
s		| C	
s+1	$B \supset C$		k-s, I - ⊃

Introdução da conjunção(I-&)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k	B	(ou C)	
:	:		
s	C	(ou B)	
:	:		
u	B&C		k, s, I - &

Introdução da disjunção(I-$\vee$)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k	B	(ou C)	
:	:		
s	$B \vee C$	(ou $C \vee B$)	k, I - $\vee$

Introdução da negação [ou *Reductio ad Absurdum*](I - $\neg$)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k		| [[B]]	premissa provisória
:		| :	
r		| C (ou $\neg$C)	
:		| :	
t		| $\neg$C (ou C)	
v	$\neg$B		k-t, I - $\neg$

4.0.1.3 Regras de eliminação

Eliminação da implicação (E - ⊃)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	B⊃C	(ou B)	
:	:		
q	B	(ou B⊃C)	
:	:		
r	C		p, q, E - ⊃

Eliminação da conjunção(E - &)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	B&C		
:	:		
q	B	(ou C)	p, E - &

Eliminação da disjunção(E - ∨)

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
:	:	
n	A_n	premissa
:	:	
p	B∨C	
:	:	
q	| [[B]]	premissa provisória
:	| :	
r	| D	
s	| [[C]]	premissa provisória
:	| :	
t	| D	
t+1	D	p, q-r, s-t, E - ∨

Eliminação da dupla negação(E - ¬¬)

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
:	:	
n	A_n	premissa
:	:	
p	¬¬B	
:	:	
q	B	p, E - ¬¬

4.1 O método de DN aplicado em C_1

O método de dedução natural aplicado ao sistema axiomático de lógica paraconsistente $\mathbf{C}_1$, que abreviaremos por $\mathbf{DNC}_1$, construirá um sistema lógico constituído exclusivamente por regras de dedução(ou esquemas de dedução), dispensando, os esquemas de postulados de $\mathbf{C}_1$. Adotaremos um total de treze regras de dedução, e estas permitirão deduzir todas as fórmulas dedutíveis no sistema axiomático $\mathbf{C}_1$. $\mathbf{DNC}_1$ é o primeiro de uma série de sistemas de dedução natural para as lógicas proposicionais paraconsistentes.

A diferença de $\mathbf{DNC}_1$ para $\mathbf{DNC}_0$ não está somente na quantidade de regras que são adotadas como primitivas (ou básicas), mas, também nas restrições impostas a determinadas regras de dedução, como por exemplo, em $\mathbf{DNC}_1$ a aplicação da *reductio ad absurdum* está condicionada a que já se tenha uma determinada fórmula regular, enquanto, em $\mathbf{DNC}_0$ isso não ocorre.

4.1.1 Regras de formação para $\mathbf{DNC}_1$

Tendo um alfabeto comum com $\mathbf{C}_1$, as regras que produzem as fórmulas para $\mathbf{DNC}_1$ são as mesmas que $\mathbf{C}_1$, a saber,

(i)Toda variável proposicional é uma fórmula de $\mathcal{L}$;

(ii)Se A é uma fórmula, $\neg$A é uma fórmula de $\mathcal{L}$;

(iii)Se A e B são fórmulas, (A&B), (A$\vee$B) e (A$\supset$B) são fórmulas de $\mathcal{L}$;

(iv)As fórmulas de $\mathcal{L}$ são obtidas apenas por (i)-(iii).

4.1.2 A estrutura das provas (deduções) em $\mathbf{DNC}_1$

A estrutura das deduções foi descrita em *2.1.1*, e é válida para todos os sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$.

4.1.3 As regras de dedução de $\mathbf{DNC}_1$

As regras de dedução para esse sistema são:

4.1.3.1 Regra de transporte

Repetição (R)

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa

:	:	
n	A_n	premissa
:	:	
k	A_i	(R, i), onde $1 \le i \le n$

4.1.3.2 Regras de introdução

Introdução da implicação (I-$\supset$)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k		[[B]]	premissa provisória
:		:	
s		C	
s+1	$B \supset C$		k-s, I - $\supset$

Introdução da conjunção (I-&)

1	A_1		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k	B	(ou C)	
:	:		
s	C	(ou B)	
:	:		
u	B&C		k, s, I - &

Introdução da disjunção (I-∨)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
k	B	(ou C)	
:	:		
s	$B \vee C$	(ou $C \vee B$)	k, I - ∨

Introdução restringida da negação [ou *Reductio ad Absurdum* restringido] (I - ¬ (rest))

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	B^0		
:	:		
k		| [[C]]	premissa provisória
:		| :	
r		| B (ou ¬B)	
:		| :	
t		| ¬B (ou B)	
v	¬C		p, k-t, I - ¬(rest)

Distribuição da negação na conjunção (DM)

1	A_1	premissa
⋮	⋮	
n	A_n	premissa
⋮	⋮	
p	$\neg(A\&B)$	
⋮	⋮	
q	$\neg A\vee\neg B$	p, DM

Distribuição restringida da negação na disjunção (DND(rest))

1	A_1	premissa
⋮	⋮	
n	A_n	premissa
⋮	⋮	
p	A^0 (ou B^0)	
⋮	⋮	
q	B^0 (ou A^0)	
⋮	⋮	
r	$\neg(A\vee B)$	
⋮	⋮	
s	$\neg A\&\neg B$	p, q, r, DND(rest)

Distribuição restringida da negação na implicação (DNI(rest))

1	A_1		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	A^0	(ou B^0)	
:	:		
q	B^0	(ou A^0)	
:	:		
r	$\neg(A \supset B)$		
:	:		
s	$A \& \neg B$		p, q, r, DNI(rest)

Dilema não-construtivo (DNC)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p		[[B]]	premissa provisória
:		:	
r		D	
s		[[$\neg$B]]	premissa provisória
:		:	
t		D	
t+1	D		p-r, s-t, DNC

4.1.3.3 Regras de eliminação

Eliminação da implicação (E - ⊃)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	$B \supset C$	(ou B)	
:	:		
q	B	(ou $B \supset C$)	
:	:		
r	C		p, q, E - ⊃

Eliminação da conjunção (E - &)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	B&C		
:	:		
q	B	(ou C)	p, E - &

Eliminação da disjunção (E - ∨)

1	A_1		premissa
2	A_2		premissa
⋮	⋮		
n	A_n		premissa
⋮	⋮		
p	$B \vee C$		
⋮	⋮		
q		[[B]]	premissa provisória
⋮		⋮	
r		D	
s		[[C]]	premissa provisória
⋮		⋮	
t		D	
t+1	D		p, q-r, s-t, E - ∨

Eliminação da dupla negação (E - ¬¬)

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
⋮	⋮	
n	A_n	premissa
⋮	⋮	
p	$\neg\neg B$	
⋮	⋮	
q	B	p, E - ¬¬

4.1.4 A equivalência lógica entre o sistema C_1 e o sistema DNC_1.

Iremos demonstrar que todo teorema de C_1 é dedutível em DNC_1, e que toda regra de dedução do sistema DNC_1 é dedutível no sistema axiomático C_1.

4.1.4.1 Todo teorema do sistema C_1 é dedutível no sistema de dedução natural DNC_1.

Demonstração:

Sejam os esquemas de postulados de C_1 e a Regra de dedução E - $\supset$ e a Regra de substituição, então

4.1.4.1.1 A regra E - $\supset$ encontra-se na mesma forma tanto em C_1 quanto em DNC_1

Como todo postulado de C_1 é um teorema de C_1, e a partir deles deduzimos todos os teoremas, então demonstraremos que cada postulado de C_1 é um teorema no sistema de DNC_1.

4.1.4.1.2 A1 $\vdash_{DNC_1} A\supset(B\supset A)$

1	A	premissa provisória
2	B	premissa provisória
3	A	1, repetição
4	$B\supset A$	2-3, I - $\supset$
5	$A\supset(B\supset A)$	1-4, I - $\supset$

4.1.4.1.3 A2 $\vdash_{DNC_1} (A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$

1	$A\supset B$	premissa provisória
2	$A\supset(B\supset C)$	premissa provisória
3	A	premissa provisória
4	$A\supset(B\supset C)$	2, repetição
5	$B\supset C$	3, 4, E - $\supset$
6	$A\supset B$	1, repetição
7	B	3, 6, E - $\supset$
8	C	5, 7, E - $\supset$

9 $A\supset C$ 3-8, I - $\supset$

10 $((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$ 2-9, I - $\supset$

11 $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$ 1-10, I - $\supset$

4.1.4.1.4 A3 $\vdash_{DNC_1} A\&B\supset A$

1 $A\&B$ premissa provisória

2 A 1, E - &

3 $A\&B\supset A$ 1-2, I - $\supset$

4.1.4.1.5 A4 $\vdash_{DNC_1} A\&B\supset B$

1 $A\&B$ premissa provisória

2 B 1, E - &

3 $A\&B\supset B$ 1, 2, I - $\supset$

4.1.4.1.6 A5 $\vdash_{DNC_1} A\supset(B\supset A\&B)$

1 A premissa provisória

2 B premissa provisória

3 A 1, repetição

4 $A\&B$ 2, 3, I - &

5 $B\supset A\&B$ 2-4, I - $\supset$

6 $A\supset(B\supset A\&B)$ 1-5, I - $\supset$

4.1.4.1.7 A6 $\vdash_{DNC_1} A\supset A\vee B$

1 A premissa provisória

2 $A\vee B$ 1, I - $\vee$

3 $A\supset A\vee B$ 1-2, I - $\supset$

4.1.4.1.8 A7 $\vdash_{DNC_1} B\supset A\vee B$

1 B premissa provisória

2 $A\vee B$ 1, I - $\vee$

3 $B\supset A\vee B$ 1-2, I - $\supset$

4.1.4.1.9 A8 $\vdash_{DNC_1} (A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$

1	$A\supset C$	premissa provisória
2	$B\supset C$	premissa provisória
3	$A\vee B$	premissa provisória
4	A	premissa provisória
5	$A\supset C$	1, repetição
6	C	4, 5, E - $\supset$
7	B	premissa provisória
8	$B\supset C$	2, repetição
9	C	7, 8, E - $\supset$
10	C	3, 4-6, 7-9, E - $\vee$
11	$A\vee B\supset C$	3-10, I - $\supset$
12	$(B\supset C)\supset(A\vee B\supset C)$	2-11, I - $\supset$
13	$(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$	1-12, I - $\supset$

4.1.4.1.10 A9 $\vdash_{DNC_1} A\vee\neg A$

1	A	premissa provisória
2	$A\vee\neg A$	1, I - $\vee$
3	$\neg A$	premissa provisória
4	$A\vee\neg A$	3, I - $\vee$
5	$A\vee\neg A$	1-2, 3-4, DNC

4.1.4.1.11 A10 $\vdash_{DNC_1} \neg\neg A\supset A$

1	$\neg\neg A$	premissa provisória
2	A	1, E - $\neg\neg$
3	$\neg\neg A\supset A$	1-2, I - $\supset$

4.1.4.1.12 A11 $\vdash_{DNC_1} B^0\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$

1	B^0	premissa provisória
2	$A\supset B$	premissa provisória
3	$A\supset\neg B$	premissa provisória
4	A	premissa provisória

5	$A\supset B$	2, repetição
6	B	4, 5, E - $\supset$
7	$A\supset\neg B$	3, repetição
8	$\neg B$	4, 7, E - $\supset$
9	$\neg A$	1, 4 – 8, I - $\neg$(rest)
10	$(A\supset\neg B)\supset\neg A$	3-10, I - $\supset$
11	$(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$	2-11, I - $\supset$
12	$B^0\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$	1-12, I - $\supset$

4.1.4.1.13 A12 $\vdash_{DNC_1} A^0\&B^0\supset(A\&B)^0$

1	$A^0\&B^0$	premissa provisória
2	A^0	1, E - &
3	B^0	1, E - &
4	$\neg[(A\&B)^0]$	premissa provisória
5	$\neg[\neg[(A\&B)\&\neg(A\&B)]]$	4, definição 1
6	$[(A\&B)\&\neg(A\&B)]$	5, E - $\neg\neg$
7	$A\&B$	6, E - &
8	A	7, E - &
9	B	7, E - &
10	$\neg(A\&B)$	6, E - &
11	$\neg A\vee\neg B$	10, DM
12	$\neg A$	premissa provisória
13	$\neg A$	12, repetição
14	$\neg B$	premissa provisória
15	A	premissa provisória
16	B	9, repetição
17	$\neg B$	14, repetição
18	$\neg A$	3, 15-17, I - $\neg$(rest)
19	$\neg A$	11, 12-13, 14-18, E - $\vee$
20	$\neg\neg[(A\&B)^0]$	2, 4-19, I - $\neg$(rest)

21	$(A\&B)^0$	20, E - $\neg\neg$
22	$A^0\&B^0 \supset (A\&B)^0$	1-21, I - $\supset$

4.1.4.1.14 A13 $\vdash_{DNC_1} A^0\&B^0 \supset (A\vee B)^0$

1	$A^0\&B^0$	premissa provisória
2	A^0	1, E - &
3	B^0	1, E - &
4	$\neg[(A\vee B)^0]$	premissa provisória
5	$\neg[\neg[(A\vee B)\&\neg(A\vee B)]]$	4, definição 1
6	$[(A\vee B)\&\neg(A\vee B)]$	5, E - $\neg\neg$
7	$\neg(A\vee B)$	6, E - &
8	$A^0\&B^0$	1, repetição
9	$\neg(A\vee B)$	7, repetição
10	$\neg A\&\neg B$	8, 9, DND(rest)
11	$\neg A$	10, E - &
12	$\neg B$	10, E - &
13	$A\vee B$	6, E - &
14	A	premissa provisória
15	A	14, repetição
16	B	premissa provisória
17	$\neg A$	premissa provisória
18	B	16, repetição
19	$\neg B$	12, repetição
20	$\neg\neg A$	3, 17-19, I - $\neg$(rest)
21	A	20, E - $\neg\neg$
22	A	13, 14-15, 16-21, E - $\vee$
23	$\neg A$	11, repetição
24	$\neg\neg[(A\vee B)^0]$	2, 4 –23, I - $\neg$(rest)
25	$(A\vee B)^0$	24, E - $\neg\neg$
26	$A^0\&B^0 \supset (A\vee B)^0$	1-25, I - $\supset$

4.1.4.1.15 A14 $\vdash_{DNC_1} A^0\&B^0 \supset (A\supset B)^0$

1	$A^0\&B^0$	premissa provisória
2	A^0	1, E - &
3	B^0	1, E - &
4	$\neg[(A\supset B)^0]$	premissa provisória
5	$\neg[\neg[(A\supset B)\&\neg(A\supset B)]]$	4, definição 1
6	$[(A\supset B)\&\neg(A\supset B)]$	5, E - $\neg\neg$
7	$\neg(A\supset B)$	6, E - &
8	$A^0\&B^0$	1, repetição
9	$A\&\neg B$	7, 8, DNI(rest)
10	A	9, E - &
11	$\neg B$	9, E - &
12	$A\supset B$	6, E - &
13	A	premissa provisória
14	$A\supset B$	12, repetição
15	B	13, 14, E - $\supset$
16	$\neg B$	11, repetição
17	$\neg A$	3, 13-16, I - $\neg$(rest)
18	$\neg\neg[(A\supset B)^0]$	2, 4-17, I - $\neg$(rest)
19	$(A\supset B)^0$	18, E - $\neg\neg$
20	$A^0\&B^0\supset(A\supset B)^0$	1-19, I - $\supset$

4.1.4.2 A Regra de Substituição (RS)

Como demonstramos que todo postulado de $\mathbf{C_1}$ é teorema em $\mathbf{DNC_1}$, e tendo em vista que a RS , em última instância, permite escrever os postulados de $\mathbf{C_1}$ com outra letras, basta que em $\mathbf{DNC_1}$ usemos o mesmo procedimento de demonstração usado no postulado original.[11]

OBS: A regra do intercâmbio (*Replacement*) , embora válida em $\mathbf{C_0}$ não vale, *em geral*,

[11] Por exemplo: se '$\vdash_{DNC_1} p \supset q$' é um teorema numa demonstração em $\mathbf{DNC_1}$, também conseguiremos uma demonstração de '$\vdash_{DNC_1} r \supset s$' , o que equivale a aplicação de Regra de Substituição, em $\mathbf{C_1}$, com p/r e q/s.

em C_1 , ou seja, pode existir uma fórmula A com B sub-fórmula de A, tal que, exista uma fórmula B' , com $\vdash_{C_1}$ B ≡ B' , mas, $\nvdash_{C_1}$ A≡ A', sendo A' a fórmula resultante ao intercambiarmos B por B' em A.

Observamos aqui que uma das aplicações do método de *tableaux* para C_1 que desenvolveremos em **4.1.7**, será a de determinar de forma sistemática e mecânica a não validade do *Replacement* em C_1, pois, o método de matrizes (cf. DA COSTA, 1993, p. 12), torna-se muito trabalhoso para tal determinação.

A partir de **4.1.4.1** e **4.1.4.2** concluímos que

Se $\vdash_{C_1}$ A, então $\vdash_{DNC_1}$ A, ☒

e pela *propriedade do afirmador* (PA) (cf. demonstração em **4.1.4.3.2**) vem:

Se $\Gamma \vdash_{C_1}$ A, então $\Gamma \vdash_{DNC_1}$ A. ☒

4.1.4.3. Toda regra de dedução do sistema DNC_1 é dedutível no sistema axiomático C_1

Demonstração:

4.1.4.3.1 A regra E - ⊃ encontra-se na mesma forma tanto em **DNC_1** quanto em **C_1**

4.1.4.3.2 Lembremos que da mesma forma que em **C_1**, em **DNC_1**:

Se $\vdash_{DNC_1}$ A , então $\Gamma \vdash_{DNC_1}$ A [12], para todo Γ.

O qual denominaremos de *propriedade do afirmador (PA).*

4.1.4.3.3 A Regra I - ⊃.

Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \supset B$ (por I -⊃), então $\Gamma \vdash_{C_1} A \supset B$ (pelo metateorema da dedução[13]).

A presença da regra (I - ⊃) em **DNC_1** representa a diferença essencial entre este sistema e **C_1**, pois, a única regra de dedução que temos em **C_1** é a de eliminação da implicação(E - ⊃).

O metateorema da dedução (demonstração no anexo B1) irá garantir que para toda

[12] Usaremos, por brevidade, a notação $A_1, A_2, ..., A_n \vdash_{C_1} A$, embora, sempre deva ser entendido como $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash_{C_1} A$. Nesse teorema temos que $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$

[13] Vide demonstração do metateorema (ou teorema metalógico) da dedução, para todo sistema C_n ($0 \leq n \leq \omega$), no anexo B1. A partir de agora êle será usado livremente nas demonstrações.

fórmula dedutível em $\mathbf{DNC_1}$ pela regra I - $\supset$, existe em $\mathbf{C_1}$ uma demonstração dessa fórmula .

Evitaremos a aplicação da regra de substituição sobre as premissas, pois, para o método de dedução natural (tal como estamos usando), isso significa introduzir disfarçadamente novas premissas que não existiam, portanto para demonstrar a equivalência entre esses dois métodos faz-se necessário que isso seja levado em conta. Assim, imporemos uma *restrição*[14] à noção de demonstração no método axiomático a partir de premissas, obrigando a realização de cada demonstração com premissas. Dessa maneira faremos a seguinte restrição:

*Uma demonstração **d** de B em $\mathbf{C_1}$ é dita uma demonstração restringida de B a partir de premissas $\Gamma \cup \{A\}$ em $\mathbf{C_1}$ **see**[15] **d** é uma demonstração de $A \supset B$ em $\mathbf{C_1}$ a partir de Γ , onde nem em Γ e nem em A ocorrem variáveis proposicionais que sejam objetos de substituições.*

4.1.4.3.4 $A \vdash_{C_1} A$[16]

Aplicação imediata de PA e pela definição 6, pois, $A \in \{A\}$.

4.1.4.3.5 $A \& B \vdash_{C_1} A$

1	$A \& B \vdash_{C_1} A \& B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A \& B \supset A$	A3, RS
3	$A \& B \vdash_{C_1} A \& B \supset A$	2, PA
4	$A \& B \vdash_{C_1} A$	1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.6 $A \& B \vdash_{C_1} B$

1	$A \& B \vdash_{C_1} A \& B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A \& B \supset B$	A4, RS
3	$A \& B \vdash_{C_1} A \& B \supset B$	2, PA

[14] Cf. SACRISTAN, 1976, p.163-165.
[15] A expressão 'se, e somente se' será abreviada por 'see'.
[16] De **4.1.4.3.4** até **4.1.4.3.17** converteremos as regras de dedução nos respectivos esquemas de argumentos.

4 $A\&B \vdash_{C_1} B$ 1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.7 $A, B \vdash_{C_1} A\&B$

1	$A \vdash_{C_1} A$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$A, B \vdash_{C_1} A$	1, PA
3	$B \vdash_{C_1} B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
4	$A, B \vdash_{C_1} B$	3, PA
5	$\vdash_{C_1} A\supset(B\supset A\&B)$	A5, RS
6	$A, B \vdash_{C_1} A\supset(B\supset A\&B)$	5, PA
7	$A, B \vdash_{C_1} B\supset A\&B$	2, 6, E - $\supset$
8	$A, B \vdash_{C_1} A\&B$	4, 7, E - $\supset$

4.1.4.3.8 $A, B \vdash_{C_1} B\&A$

Aplicação da regra de substituição em **4.1.4.3.7**.

4.1.4.3.9 $A \vdash_{C_1} A\vee B$

1	$A \vdash_{C_1} A$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A\supset A\vee B$	A6, RS
3	$A \vdash_{C_1} A\supset A\vee B$	2, PA
4	$A \vdash_{C_1} A\vee B$	1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.10 $B \vdash_{C_1} A\vee B$

1	$B \vdash_{C_1} B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} B\supset A\vee B$	A6, RS
3	$B \vdash_{C_1} B\supset A\vee B$	2, PA
4	$B \vdash_{C_1} A\vee B$	1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.11 $\neg\neg A \vdash_{C_1} A$

1	$\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg A$	premissa (por 4.1.4.3.4)

2	$\vdash_{C_1} \neg\neg A \supset A$	A9, RS
3	$\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg A \supset A$	2, PA
4	$\neg\neg A \vdash_{C_1} A$	1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.12 $A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} C$

1	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} A \vee B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} A \supset C$	premissa (por 4.1.4.3.4)
3	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} B \supset C$	premissa (por 4.1.4.3.4)
4	$\vdash_{C_1} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$	A8, RS
5	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$	4, PA
6	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$	2, 5, E - $\supset$
7	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} (A \vee B \supset C)$	3, 6, E - $\supset$
8	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{C_1} C$	1, 7, E - $\supset$

4.1.4.3.13 $(A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{C_1} C$

1	$(A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{C_1} (A \supset C)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$(A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{C_1} (\neg A \supset C)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
3	$\vdash_{C_1} (A \supset C) \supset ((\neg A \supset C) \supset ((A \vee \neg A) \supset C))$	A8, RS
4	$(A \supset C), ((\neg A \supset C)) \vdash_{C_1} (A \supset C) \supset ((\neg A \supset C) \supset ((A \vee \neg A) \supset C))$	3, PA
5	$(A \supset C), ((\neg A \supset C)) \vdash_{C_1} (\neg A \supset C) \supset ((A \vee \neg A) \supset C))$	1, 4, E - $\supset$
6	$(A \supset C) \supset ((\neg A \supset C)) \vdash_{C_1} (A \vee \neg A) \supset C$	2, 5, E - $\supset$
7	$\vdash_{C_1} (A \vee \neg A)$	A10
8	$(A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{C_1} (A \vee \neg A)$	7, PA
9	$(A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{C_1} C$	6, 8, E - $\supset$

4.1.4.3.14 $\vdash_{C_1}$ (A⊃B)⊃((B⊃C)⊃(A⊃C)) **[transitividade da implicação]**

1	A⊃B $\vdash_{C_1}$ A⊃B	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	B⊃C $\vdash_{C_1}$ B⊃C	premissa (por 4.1.4.3.4)
3	A $\vdash_{C_1}$ A	4.1.4.3.4
4	A⊃B, A $\vdash_{C_1}$ A⊃B	1, PA
5	A⊃B, A $\vdash_{C_1}$ A	3, PA
6	A⊃B, A $\vdash_{C_1}$ B	4, 5, E - ⊃
7	B⊃C, A $\vdash_{C_1}$ B⊃C	2, PA
8	A⊃B, B⊃C, A $\vdash_{C_1}$ B⊃C	7, PA
9	A⊃B, B⊃C, A $\vdash_{C_1}$ B	6, PA
10	A⊃B, B⊃C, A $\vdash_{C_1}$ C	8, 9, E - ⊃
11	A⊃B, B⊃C $\vdash_{C_1}$ A⊃C	10, teorema da dedução
12	A⊃B $\vdash_{C_1}$ (B⊃C)⊃(A⊃C)	11, teorema da dedução
13	$\vdash_{C_1}$ (A⊃B)⊃((B⊃C)⊃(A⊃C))	12, teorema da dedução

4.1.4.3.15 ¬(A&B) $\vdash_{C_1}$ ¬A∨¬B

A demonstração de ¬(A&B) $\vdash_{C_1}$ ¬A∨¬B, necessita de várias deduções anteriores, na seguinte seqüência:

(a) (A&B) $\vdash_{C_1}$ (B⊃(A⊃(A&B)))

(b) ¬(A&B) $\vdash_{C_1}$ (B⊃(A⊃¬(A&B)))

(c) $\vdash_{C_1}$ B&A⊃A&B

(d) $\vdash_{C_1}$ (A⊃(B&A))⊃((B&A⊃A&B) ⊃(A⊃A&B))

(e) $(A\&B)^0$ $\vdash_{C_1}$ (¬(A&B)⊃(B⊃¬A))

(f) $(A\&B)^0$ $\vdash_{C_1}$ (¬(A&B)⊃(B⊃(¬A∨¬B)))

(g) $(A\&B)^0$ $\vdash_{C_1}$ (¬(A&B)⊃(¬B⊃(¬A∨¬B)))

(h) $(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$

(i) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(A\&B)^0$

(j) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$

(k) $\vdash_{C_1} \neg A \supset(B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)))$

(l) $\vdash_{C_1} A^0\supset(B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)))$

(m) $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset A\&\neg A$

(n) $\vdash_{C_1} A\&\neg A \supset \neg A\vee A^0$

(o) $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset \neg A\vee A^0$

(p) $\vdash_{C_1} \neg A\vee A^0$

(q) $\vdash_{C_1} B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$

(r) $\vdash_{C_1} \neg B\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$

(s) $\vdash_{C_1} \neg B\vee B^0$

(t) $\vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$

(u) $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\vee\neg B$

Assim,

(a) $(A\&B) \vdash_{C_1} (B\supset(A\supset(A\&B)))$

1	$(A\&B) \vdash_{C_1} (A\&B)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} (A\&B)\supset(A\supset(A\&B))$	A1, RS
3	$(A\&B) \vdash_{C_1} (A\&B)\supset(A\supset(A\&B))$	2, PA
4	$(A\&B) \vdash_{C_1} A\supset(A\&B)$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} (A\supset(A\&B))\supset(B\supset(A\supset(A\&B)))$	A1, RS
6	$(A\&B) \vdash_{C_1} (A\supset(A\&B))\supset(B\supset(A\supset(A\&B)))$	5, PA
7	$(A\&B) \vdash_{C_1} B\supset(A\supset(A\&B))$	4, 6, E - $\supset$

(b) $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B\supset(A\supset\neg(A\&B)))$

1	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(A\supset\neg(A\&B))$	A1, RS
3	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(A\supset\neg(A\&B))$	2, PA
4	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} A\supset\neg(A\&B)$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} (A\supset\neg(A\&B))\supset(B\supset(A\supset\neg(A\&B)))$	A1, RS
6	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} (A\supset\neg(A\&B))\supset(B\supset(A\supset\neg(A\&B)))$	5, PA
7	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\supset(A\supset\neg(A\&B))$	4, 6, E - $\supset$

(c) $\vdash_{C_1} B\&A\supset A\&B$

1	$B\&A \vdash_{C_1} B\&A$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} B\&A\supset A$	A4, RS
3	$B\&A \vdash_{C_1} B\&A\supset A$	2, PA
4	$\vdash_{C_1} B\&A\supset B$	A3, RS
5	$B\&A \vdash_{C_1} B\&A\supset B$	4, PA
7	$B\&A \vdash_{C_1} A$	1, 3, E - $\supset$
8	$B\&A \vdash_{C_1} B$	1, 5, E - $\supset$
9	$\vdash_{C_1} A\supset(B\supset A\&B)$	A5, RS
10	$B\&A \vdash_{C_1} A\supset(B\supset A\&B)$	9, PA
11	$B\&A \vdash_{C_1} (B\supset A\&B)$	7, 10, E - $\supset$
12	$B\&A \vdash_{C_1} A\&B$	8, 11, E - $\supset$
13	$\vdash_{C_1} B\&A\supset A\&B$	12, Teorema da dedução

(d) $\vdash_{C_1} (A\supset(B\&A))\supset((B\&A\supset A\&B)\supset(A\supset A\&B))$

1	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} A\supset(B\&A)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)

2	$\vdash_{C_1} (A\supset(B\&A))\supset(((A\supset((B\&A)\supset(A\&B)))\supset(A\supset A\&B))$	A2, RS
3	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} (A\supset(B\&A))\supset(((A\supset((B\&A)\supset(A\&B)))\supset(A\supset A\&B))$	2, PA
4	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} ((A\supset((B\&A)\supset(A\&B)))\supset(A\supset A\&B)$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} B\&A\supset A\&B$	4.1.4.3.14 (c)
6	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} B\&A\supset A\&B$	5, PA
7	$\vdash_{C_1} (B\&A\supset A\&B)\supset(A\supset(B\&A\supset A\&B))$	A1, RS
8	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} (B\&A\supset A\&B)\supset(A\supset(B\&A\supset A\&B))$	7, PA
9	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} (A\supset(B\&A\supset A\&B))$	6, 8, E - $\supset$
10	$A\supset(B\&A), B\&A\supset A\&B \vdash_{C_1} A\supset A\&B$	4, 9, E - $\supset$
11	$A\supset(B\&A) \vdash_{C_1} ((B\&A\supset A\&B)\supset(A\supset A\&B))$	10, teorema da dedução
12	$\vdash_{C_1} (A\supset(B\&A))\supset((B\&A\supset A\&B)\supset(A\supset A\&B))$	11, teorema da dedução

(e) $(A\&B)^0 \vdash_{C_1} (\neg(A\&B)\supset(B\supset\neg A))$

1	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} (A\&B)^0$	premissa (4.1.4.3.4)
2	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} (A\&B)^0 \supset[((A\supset(A\&B))\supset((A\supset\neg(A\&B))\supset\neg A))]$	A11, RS, PA
3	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} [((A\supset(A\&B))\supset((A\supset\neg(A\&B))\supset\neg A))]$	1, 2, E - $\supset$
4	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} [((A\supset(A\&B))\supset((A\supset\neg(A\&B))\supset\neg A))]$	3, PA
5	$\vdash_{C_1} A\supset(B\supset(A\&B))$	A5, RS
6	$\vdash_{C_1} B\supset(A\supset(B\&A))$	A5, RS
7	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} B\supset(A\supset(B\&A))$	6, PA
8	$B \vdash_{C_1} B$	(4.1.4.3.4)
9	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} B$	8, PA
10	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} A\supset(B\&A)$	7, 9, E - $\supset$

11	$\vdash_{C_1} B\&A \supset A\&B$	4.1.4.3.15 (c)
12	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} B\&A \supset A\&B$	11, PA
13	$\vdash_{C_1} (A \supset (B\&A)) \supset ((B\&A \supset A\&B) \supset (A \supset A\&B))$	4.1.4.3.15 (d)
14	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} (A \supset (B\&A)) \supset ((B\&A \supset A\&B) \supset (A \supset A\&B))$	13, PA
15	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} ((B\&A \supset A\&B) \supset (A \supset A\&B))$	10, 14, E - $\supset$
16	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} A \supset A\&B$	12, 15, E - $\supset$
17	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} ((A \supset \neg(A\&B)) \supset \neg A))$	4, 16, E - $\supset$
18	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
19	$\vdash_{C_1} (\neg(A\&B)) \supset (A \supset \neg(A\&B))$	A1, RS
20	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} (\neg(A\&B)) \supset (A \supset \neg(A\&B))$	19, PA
21	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} A \supset \neg(A\&B)$	18, 20, E - $\supset$
22	$(A\&B)^0, \neg(A\&B), B \vdash_{C_1} \neg A$	17, 21, E - $\supset$
23	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \supset \neg A$	22, Teorema da dedução
24	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A)$	23, Teorema da dedução

(f) $(A\&B)^0 \vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (B \supset (\neg A \vee \neg B)))$

1	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A)$	4.1.4.3.15 (e)
3	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A)$	2, PA
4	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \supset \neg A$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} B \vee \neg B$	A10, RS
6	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \vee \neg B$	5, PA
7	$\vdash_{C_1} \neg B \supset (\neg A \vee \neg B)$	A7, RS

8	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg B \supset (\neg A \vee \neg B)$	7, PA
9	$\vdash_{C_1} B \supset B$	teorema[17]
10	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \supset B$	9, PA
11	$\vdash_{C_1} \neg A \supset (\neg A \vee \neg B)$	A6, RS
12	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A \supset (\neg A \vee \neg B)$	11, PA
13	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B \supset \neg A) \supset [(\neg A \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset (B \supset (\neg A \vee \neg B))]$	4.1.4.3.14, RS, PA
14	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} [(\neg A \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset (B \supset (\neg A \vee \neg B))]$	4, 13, E - $\supset$
15	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \supset (\neg A \vee \neg B)$	12, 14, E - $\supset$
16	$\vdash_{C_1} (B \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset [(\neg B \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset (B \vee \neg B \supset \neg A \vee \neg B)]$	A8, RS
17	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset [(\neg B \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset (B \vee \neg B \supset \neg A \vee \neg B)]$	16, PA
18	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} [(\neg B \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset (B \vee \neg B \supset \neg A \vee \neg B)]$	15, 17, E - $\supset$
19	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B \vee \neg B \supset \neg A \vee \neg B$	8, 18, E - $\supset$
20	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A \vee \neg B$	6, 19, E - $\supset$
21	$\vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset (B \supset \neg A \vee \neg B)$	A1, RS
22	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset (B \supset \neg A \vee \neg B)$	21, PA
23	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B \supset \neg A \vee \neg B)$	20, 22, E - $\supset$
24	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A \vee \neg B)$	23, teorema da dedução

(g) $(A\&B)^0 \vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg B \supset (\neg A \vee \neg B)))$

1	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A)$	4.1.4.3.15 (e)

---

[17] Esse teorema é obtido da seguinte forma:

1	$B \vdash_{C_1} B$	4.1.4.3.4
2	$\vdash_{C_1} B \supset B$	1, teorema da dedução

3	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B\supset\neg A)$	2, PA
4	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\supset\neg A$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} B\vee\neg B$	A10, RS
6	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B$	5, PA
7	$\vdash_{C_1} \neg B\supset(\neg A\vee\neg B)$	A7, RS
8	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg B\supset(\neg A\vee\neg B)$	7, PA
9	$\vdash_{C_1} B\supset B$	teorema
10	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\supset B$	9, PA
11	$\vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg A\vee\neg B)$	A6, RS
12	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg A\vee\neg B)$	11, PA
13	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B\supset\neg A)\supset[(\neg A\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\supset(\neg A\vee\neg B))]$	4.1.4.3.14, RS, PA
14	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} [(\neg A\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\supset(\neg A\vee\neg B))]$	4, 13, E - $\supset$
15	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\supset(\neg A\vee\neg B)$	12, 14, E - $\supset$
16	$\vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	A8, RS
17	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	16, PA
18	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} [(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	15, 17, E - $\supset$
19	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B$	8, 18, E - $\supset$
20	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\vee\neg B$	6, 19, E - $\supset$
21	$\vdash_{C_1} (\neg A\vee\neg B) \supset (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	A1, RS
22	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (\neg A\vee\neg B) \supset (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	21, PA
23	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	20, 22, E - $\supset$
24	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	23, teorema da dedução

(h) $(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$

1	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A\vee\neg B)$	4.1.4.3.15 (f)
3	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (B \supset \neg A\vee\neg B)$	2, PA
4	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	4.1.4.3.15 (g)
5	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	4, PA
7	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B \supset \neg A\vee\neg B)$	1, 3, E - $\supset$
8	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (\neg B \supset \neg A\vee\neg B)$	1, 5, E - $\supset$
9	$\vdash_{C_1} B\vee\neg B$	A10, RS
10	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B$	9, PA
11	$\vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	A8, RS
12	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	11,PA
13	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} [(\neg B\supset(\neg A\vee\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B)]$	7, 12, E - $\supset$
14	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B\supset\neg A\vee\neg B$	8, 13, E - $\supset$
15	$(A\&B)^0, \neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\vee\neg B$	10, 14, E - $\supset$
16	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$	15, teorema da dedução

(i) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(A\&B)^0$ A12

(j) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$

1	$\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(A\&B)^0$	A12
2	$(A\&B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$	4.1.4.3.14 (h)
3	$\vdash_{C_1} (A\&B)^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$	2, teorema da dedução
4	$\vdash_{C_1} (A^0\&B^0\supset(A\&B)^0)\supset[((A\&B)^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)))\supset(A^0\&B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)))]$	4.1.4.3.14, RS

5 $\vdash_{C_1}$ $[((A\&B)^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))) \supset (A^0 \& B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))]$ 1,4,E-$\supset$

6 $\vdash_{C_1}$ $A^0 \& B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$ 3, 5, E - $\supset$

(k) $\vdash_{C_1}$ $\neg A \supset (B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$

1	$\neg A \vdash_{C_1} \neg A$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} \neg A \supset \neg A \vee \neg B$	A6, RS
3	$\neg A \vdash_{C_1} \neg A \supset \neg A \vee \neg B$	2, PA
4	$\neg A \vdash_{C_1} \neg A \vee \neg B$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset [\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)]$	A1, RS
6	$\neg A \vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset [\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)]$	5, PA
7	$\neg A \vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)$	4, 6, E - $\supset$
8	$\vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset [B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))]$	A1, RS
9	$\neg A \vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)) \supset [B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))]$	8, PA
10	$\neg A \vdash_{C_1} B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	7, 9, E - $\supset$
11	$\vdash_{C_1} \neg A \supset (B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$	10, teorema da dedução

(l) $\vdash_{C_1}$ $A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$

1	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} B^0$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} A^0$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
3	$\vdash_{C_1} A^0 \supset (B^0 \supset (A^0 \& B^0))$	A5, RS
4	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} A^0 \supset (B^0 \supset (A^0 \& B^0))$	3, PA
5	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} B^0 \supset (A^0 \& B^0)$	2, 4, E - $\supset$
6	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} A^0 \& B^0$	1, 5, E - $\supset$

7	$\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$	4.1.4.3.15 (j)[18]
8	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$	7, PA
9	$A^0, B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$	6, 8, E - $\supset$
10	$A^0 \vdash_{C_1} B^0 \supset (\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$	9, teorema da dedução
11	$\vdash_{C_1} A^0\supset(B^0\supset(\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)))$	10, teorema da dedução

(m) $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset A\&\neg A$

1	$\neg(A^0) \vdash_{C_1} \neg(A^0)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\neg(A^0) \vdash_{C_1} \neg(\neg(A\&\neg A))$	1, definição 1
3	$\vdash_{C_1} \neg(\neg(A\&\neg A))\supset(A\&\neg A)$	A9, RS
4	$\neg(A^0) \vdash_{C_1} \neg(\neg(A\&\neg A))\supset(A\&\neg A)$	3, PA
5	$\neg(A^0) \vdash_{C_1} (A\&\neg A)$	2, 4, E - $\supset$
6	$\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset(A\&\neg A)$	5, teorema da dedução

(n) $\vdash_{C_1} A\&\neg A \supset \neg A\vee A^0$

1	$A\&\neg A \vdash_{C_1} A\&\neg A$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A\&\neg A \supset \neg A$	A4, RS
3	$A\&\neg A \vdash_{C_1} A\&\neg A \supset \neg A$	2, PA
4	$A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg A$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} \neg A \supset \neg A\vee A^0$	A6, RS
6	$A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg A \supset \neg A\vee A^0$	5, PA
7	$A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg A\vee A^0$	4, 6, E - $\supset$
8	$\vdash_{C_1} A\&\neg A \supset \neg A\vee A^0$	7, teorema da dedução

[18] Para obter esta fórmula, basta empregar a demonstração 4.1.4.3.15 (j).

(o) $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset \neg A \vee A^0$

1 $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset (A \& \neg A)$ 4.1.4.3.15 (m)

2 $\vdash_{C_1} A \& \neg A \supset \neg A \vee A^0$ 4.1.4.3.15 (n)

3 $\vdash_{C_1} (\neg(A^0) \supset (A \& \neg A)) \supset [(A \& \neg A \supset \neg A \vee A^0) \supset (\neg(A^0) \supset \neg A \vee A^0)]$ 4.1.4.3.13, RS

5 $\vdash_{C_1} [(A \& \neg A \supset \neg A \vee A^0) \supset (\neg(A^0) \supset \neg A \vee A^0)]$ 1, 3, E - $\supset$

6 $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset \neg A \vee A^0$ 2, 5, E - $\supset$

(p) $\vdash_{C_1} \neg A \vee A^0$

1 $\vdash_{C_1} A^0 \vee \neg(A^0)$ A10, RS

2 $\vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A \vee A^0)$ A7, RS

3 $\vdash_{C_1} \neg(A^0) \supset \neg A \vee A^0$ 4.1.4.3.15 (o)

4 $\vdash_{C_1} (A^0 \supset (\neg A \vee A^0)) \supset [(\neg(A^0) \supset (\neg A \vee A^0)) \supset (((A^0 \vee \neg(A^0)) \supset (\neg A \vee A^0))]$ A8

5 $\vdash_{C_1} [(\neg(A^0) \supset (\neg A \vee A^0)) \supset (((A^0 \vee \neg(A^0)) \supset (\neg A \vee A^0))]$ 2, 4, E - $\supset$

6 $\vdash_{C_1} (A^0 \vee \neg(A^0)) \supset (\neg A \vee A^0)$ 3, 5, E - $\supset$

7 $\vdash_{C_1} (\neg A \vee A^0)$ 1, 6, E - $\supset$

(q) $\vdash_{C_1} B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))$

1 $\vdash_{C_1} \neg A \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$ 4.1.4.3.15 (k)

2 $\vdash_{C_1} A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$ 4.1.4.3.15 (l)

3 $\vdash_{C_1} \neg A \vee A^0$ 4.1.4.3.15 (p)

4 $\vdash_{C_1} (\neg A \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset$
$[(A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset (\neg A \vee A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))))]$ A8

5 $\vdash_{C_1} [(A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset (\neg A \vee A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))))]$
1, 4, E - $\supset$

6 $\vdash_{C_1} (\neg A \vee A^0 \supset (B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))))$ 2, 5, E - $\supset$

7 $\vdash_{C_1} B^0 \supset (\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))$ 3, 6, E - $\supset$

(r) $\vdash_{C_1} \neg B \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$

1	$\neg B \vdash_{C_1} \neg B$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} \neg B \supset \neg A \vee \neg B$	A7, RS
3	$\neg B \vdash_{C_1} \neg B \supset \neg A \vee \neg B$	2, PA
4	$\neg B \vdash_{C_1} \neg A \vee \neg B$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	A1, RS
6	$\neg B \vdash_{C_1} (\neg A \vee \neg B) \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	5, PA
7	$\neg B \vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	4, 6, E - $\supset$
8	$\vdash_{C_1} \neg B \supset (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	7, teorema da dedução

(s) $\vdash_{C_1} \neg B \vee B^0$

1	$\vdash_{C_1} \neg A \vee A^0$	4.1.4.3.15 (p)
2	$\vdash_{C_1} \neg B \vee B^0$	1, RS

(t) $\vdash_{C_1} \neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)$

1	$\vdash_{C_1} \neg B \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$	4.1.4.3.15 (r)
2	$\vdash_{C_1} B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))$	4.1.4.3.15 (q)
3	$\vdash_{C_1} \neg B \vee B^0$	4.1.4.3.15 (s)
4	$\vdash_{C_1} (\neg B \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset$ $[(B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset (\neg B \vee B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))))]$	A8, RS
5	$\vdash_{C_1} [(B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)))) \supset (\neg B \vee B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))))]$	1,4, E-$\supset$
6	$\vdash_{C_1} (\neg B \vee B^0 \supset ((\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))))$	2, 5, E - $\supset$
7	$\vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	3, 6, E - $\supset$

(u) $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A \vee \neg B$

1	$\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg(A\&B)$	premissa (por 4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} (\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B))$	4.1.4.3.15 (t)

3 $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} (\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B))$ 2, PA

4 $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\vee\neg B$ 1, 3, E - $\supset$

4.1.4.3.16 $A^0\& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$

A sua demonstração é obtida na seguinte seqüência de deduções formais:

(a) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(B\supset(\neg A\&\neg B)))$

(b) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg B\supset(\neg A\&\neg B)))$

(c) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$

(d) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$

(e) $A^0\& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$

Assim,

(a) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(B\supset(\neg A\&\neg B)))$

1 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

2 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} B$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

3 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} (A\vee B)^0$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

4 $\vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(B\supset\neg(A\vee B))$ A1, RS

5 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(B\supset\neg(A\vee B))$ 4, PA

6 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} B\supset\neg(A\vee B)$ 1, 5, E - $\supset$

7 $\vdash_{C_1} B\supset(A\vee B)$ A7, RS

8 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} B\supset(A\vee B)$ 7, PA

9 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(B\supset(A\vee B))\supset((B\supset\neg(A\vee B))\supset\neg B)]$ A11, RS

10 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(B\supset(A\vee B))\supset((B\supset\neg(A\vee B))\supset\neg B)]$ 9, PA

11 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} [(B\supset(A\vee B))\supset((B\supset\neg(A\vee B))\supset\neg B)]$ 3, 10, E - $\supset$

12 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B)\ , B \vdash_{C_1} (B\supset\neg(A\vee B))\supset\neg B$ 8, 11, E - $\supset$

13 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} \neg B$ 6, 12, E - $\supset$

14 $\vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(A\supset\neg(A\vee B))$ A1, RS

15 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(A\supset\neg(A\vee B))$ 14, PA

16 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} A\supset\neg(A\vee B)$ 1, 15, E - $\supset$

17 $\vdash_{C_1} A\supset(A\vee B)$ A6, RS

18 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} A\supset(A\vee B)$ 17, PA

19 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$ A11, RS

20 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$ 19, PA

21 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} [(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$ 3, 20, E - $\supset$

22 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} ((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A$ 18, 21, E - $\supset$

23 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} \neg A$ 16, 22, E - $\supset$

24 $\vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg B\supset\neg A\&\neg B)$ A5, RS

25 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg B\supset\neg A\&\neg B)$ 24, PA

26 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} (\neg B\supset\neg A\&\neg B)$ 23, 25, E - $\supset$

27 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), B \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$ 13, 26, E - $\supset$

28 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} B \supset \neg A\&\neg B$ 27, teorema da dedução

29 $(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset [B \supset \neg A\&\neg B]$ 28, teorema da dedução

30 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(B\supset(\neg A\&\neg B)))$ 29, teorema da dedução

(b) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg B\supset(\neg A\&\neg B)))$

1 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

2 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg B$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

3 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} (A\vee B)^0$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

4	$\vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(A\supset\neg(A\vee B))$	A1, RS
5	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(A\supset\neg(A\vee B))$	4, PA
6	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} A\supset\neg(A\vee B)$	1, 5, E - $\supset$
7	$\vdash_{C_1} A\supset(A\vee B)$	A6, RS
8	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} A\supset(A\vee B)$	7, PA
9	$\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$	A11, RS
10	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset[(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$	9, PA
11	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} [(A\supset(A\vee B))\supset((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A)]$	3, 10, E - $\supset$
12	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} ((A\supset\neg(A\vee B))\supset\neg A$	8, 11, E - $\supset$
13	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg A$	6, 12, E - $\supset$
14	$\vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg B\supset\neg A\&\neg B)$	A5, RS
15	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg A\supset(\neg B\supset\neg A\&\neg B)$	14, PA
16	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} (\neg B\supset\neg A\&\neg B)$	13, 15, E - $\supset$
17	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B), \neg B \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$	2, 16, E - $\supset$
18	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg B \supset \neg A\&\neg B$	17, teorema da dedução
19	$(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset [\neg B \supset \neg A\&\neg B\ ]$	18, teorema da dedução
20	$\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg B\supset(\neg A\&\neg B)))$	19, teorema da dedução

(c) $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$

1	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset (B \supset \neg A\&\neg B)$	item 29 de 4.1.4.3.16 (a)
3	$(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset (B \supset \neg A\&\neg B)$	2, PA
4	$(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset (\neg B \supset \neg A\&\neg B)$	item 19 de 4.1.4.3.16 (b)

5 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset (\neg B \supset \neg A \& \neg B)$ 4, PA

6 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} (B \supset \neg A \& \neg B)$ 1, 3, E - $\supset$

7 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg B \supset \neg A \& \neg B)$ 1, 5, E - $\supset$

8 $\vdash_{C_1} B\vee\neg B$ A10, RS

9 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B$ 8, PA

10 $\vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\&\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\&\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\&\neg B)]$ A8, RS

11 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} (B\supset(\neg A\&\neg B))\supset[(\neg B\supset(\neg A\&\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\&\neg B)]$ 10, PA

12 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} [(\neg B\supset(\neg A\&\neg B))\supset(B\vee\neg B\supset\neg A\&\neg B)]$ 6, 11, E - $\supset$

13 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} B\vee\neg B\supset\neg A\&\neg B$ 7, 12, E - $\supset$

14 $(A\vee B)^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$ 8, 13, E - $\supset$

15 $(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)$ 14, teorema da dedução

16 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$ 15, teorema da dedução

(d) $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$

1 $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(A\vee B)^0$ A13, RS

2 $(A\vee B)^0 \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)$ item 16 de 4.1.4.3.16 (c)

3 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$ 2, teorema da dedução

4 $\vdash_{C_1} (A^0\&B^0\supset(A\vee B)^0)\supset[((A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)))\supset(A^0\&B^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)))]$

4.1.4.3.14, RS

5 $\vdash_{C_1} [((A\vee B)^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)))\supset(A^0\&B^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B)))]$ 1, 4, E - $\supset$

6 $\vdash_{C_1} A^0\&B^0\supset(\neg(A\vee B)\supset(\neg A\&\neg B))$ 3, 5, E - $\supset$

(e) $A^0\& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg A\&\neg B$

1 $A^0\& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} A^0\& B^0$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

2 $A^0\& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(A\vee B)$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

3 $\vdash_{C_1} (A\vee B)^0 \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))$ 4.1.4.3.16 (c)

4 $\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (A\vee B)^0$ A13, RS

5 $\vdash_{C_1} (A^0 \& B^0 \supset (A\vee B)^0) \supset ((A\vee B)^0 \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))) \supset ((A^0 \& B^0) \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))))$

4.1.4.3.14, RS

6 $\vdash_{C_1} (((A\vee B)^0 \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))) \supset ((A^0 \& B^0) \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))))$ 4,5,E-$\supset$

7 $\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))$ 3, 6, E - $\supset$

8 $A^0 \& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset (\neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B))$ 1, PA

9 $A^0 \& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(A\vee B) \supset (\neg A \& \neg B)$ 1, 8, E - $\supset$

10 $A^0 \& B^0, \neg(A\vee B) \vdash_{C_1} \neg A \& \neg B$ 2, 9, E - $\supset$

4.1.4.3.17 $A^0 \& B^0, \neg(A \supset B) \vdash_{C_1} (A \& \neg B)$

A sua demonstração é obtida na seguinte seqüência de deduções formais:

(a) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} \neg A \vee B \supset (A \supset B)$

(b) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A \vee B \supset (A \supset B)) \supset (\neg(A \supset B) \supset \neg(\neg A \vee B))$

(c) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} \neg(A \supset B) \supset \neg(\neg A \vee B)$

(d) $A^0 \vdash_{C_1} (\neg A \& \neg\neg A) \supset (A \& \neg A)$

(e) $\vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A)^0$

(f) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0 \& B^0$

(g) $A^0 \& B^0, \neg(\neg A \vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A \& \neg B)$

(h) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A \vee B) \supset (A \& \neg B)$

(i) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} \neg(A \supset B) \supset (A \& \neg B)$

(j) $A^0 \& B^0, \neg(A \supset B) \vdash_{C_1} (A \& \neg B)$

Assim,

(a) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} \neg A \vee B \supset (A \supset B)$

1	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} \neg A\vee B$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
3	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} A^0$	4.1.4.3.5, RS
4	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0$	3, PA
5	$\vdash_{C_1} A^0\supset(A\supset A^0\&A)$	A5, RS
6	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0\supset(A\supset A^0\&A)$	5, PA
7	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} (A\supset A^0\&A)$	4, 6, E - $\supset$
8	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0\&A$	2, 7, E - $\supset$
9	$\vdash_{C_1} A^0\&A \supset((\neg A\vee B)\supset((A^0\&A)\&(\neg A\vee B)))$	A5, RS
10	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0\&A \supset((\neg A\vee B)\supset((A^0\&A)\&(\neg A\vee B)))$	9, PA
11	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} ((\neg A\vee B)\supset((A^0\&A)\&(\neg A\vee B)))$	8, 10, E - $\supset$
12	$A^0\&B^0, \neg A\vee B, A \vdash_{C_1} (A^0\&A)\&(\neg A\vee B)$	1, 11, E - $\supset$
13	$\vdash_{C_1} ((A^0\&A)\&(\neg A\vee B))\supset((A^0\&A\&\neg A)\vee(A^0\&A\&B))$	teorema (distributividade)
14	$A^0\&B^0,\neg A\vee B, A \vdash_{C_1} ((A^0\&A)\&(\neg A\vee B))\supset((A^0\&A\&\neg A)\vee(A^0\&A\&B))$	13, PA
15	$A^0\&B^0,\neg A\vee B, A \vdash_{C_1} (A^0\&A\&\neg A)\vee(A^0\&A\&B)$	12, 14, E - $\supset$
16	$\vdash_{C_1} A^0\&A\&\neg A\supset B$	teorema [19]
17	$A^0\&B^0,\neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0\&A\&\neg A\supset B$	16, PA
18	$\vdash_{C_1} A^0\&A\&B\supset B$	A4, RS
19	$A^0\&B^0,\neg A\vee B, A \vdash_{C_1} A^0\&A\&B\supset B$	18, PA
20	$\vdash_{C_1} (A^0\&A\&\neg A\supset B)\supset[(A^0\&A\&B\supset B)\supset(((A^0\&A\&\neg A)\vee(A^0\&A\&B))\supset B)]$	A8
21	$A^0\&B^0,\neg A\vee B,A\vdash_{C_1}(A^0\&A\&\neg A\supset B)\supset[(A^0\&A\&B\supset B)\supset(((A^0\&A\&\neg A)\vee(A^0\&A\&B))\supset B)]$	20, PA

[19] Veja a demonstração no anexo B4.

22	$A^0\&B^0, \neg A\lor B, A \vdash_{C_1} [(A^0\&A\&B\supset B)\supset(((A^0\&A\&\neg A)\lor(A^0\&A\&B))\supset B)]$	17, 21, E - $\supset$
23	$A^0\&B^0, \neg A\lor B, A \vdash_{C_1} [((A^0\&A\&\neg A)\lor(A^0\&A\&B))\supset B)]$	19, 22, E - $\supset$
24	$A^0\&B^0, \neg A\lor B, A \vdash_{C_1} B$	15, 23, E - $\supset$
25	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \vdash_{C_1} A \supset B$	24, teorema da dedução
26	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg A\lor B \supset (A\supset B)$	25, teorema da dedução

(b) $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg A\lor B \supset (A\supset B))\supset(\neg(A\supset B) \supset\neg(\neg A\lor B))$

1	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} A^0\&B^0$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
2	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} \neg A\lor B \supset (A\supset B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
3	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} \neg(A\supset B)$	premissa (4.1.4.3.4 e PA)
4	$\vdash_{C_1} (A\supset B)^0 \supset[(\neg A\lor B \supset (A\supset B))\supset((\neg A\lor B \supset \neg(A\supset B)\supset(\neg(\neg A\lor B))))]$	A11, RS
5	$A^0\&B^0, \neg A\lor B\supset(A\supset B), \neg(A\supset B)\vdash_{C_1}(A\supset B)^0\supset[(\neg A\lor B\supset(A\supset B))\supset((\neg A\lor B\supset(A\supset B)\supset(\neg(\neg A\lor B))))]$	4, PA
6	$\vdash_{C_1} (\neg(A\supset B))\supset[(\neg A\lor B)\supset(\neg(A\supset B))]$	A1, RS
7	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} (\neg(A\supset B))\supset[(\neg A\lor B)\supset(\neg(A\supset B))]$	6, PA
8	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} [(\neg A\lor B)\supset(\neg(A\supset B))]$	3, 7, E - $\supset$
9	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (A\supset B)^0$	A14, RS
10	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} (A\supset B)^0$	9, PA
11	$A^0\&B^0, \neg A\lor B\supset(A\supset B), \neg(A\supset B)\vdash_{C_1}[(\neg A\lor B\supset(A\supset B))\supset((\neg A\lor B\supset\neg(A\supset B)\supset(\neg(\neg A\lor B))))]$	5, 10, E - $\supset$
12	$A^0\&B^0, \neg A\lor B\supset(A\supset B), \neg(A\supset B)\vdash_{C_1} ((\neg A\lor B\supset\neg(A\supset B)\supset(\neg(\neg A\lor B))))$	2, 11, E - $\supset$
13	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B), \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} \neg(\neg A\lor B))$	8, 12, E - $\supset$
14	$A^0\&B^0, \neg A\lor B \supset (A\supset B) \vdash_{C_1} (\neg(A\supset B) \supset\neg(\neg A\lor B))$	13, teorema da dedução
15	$A^0\&B^0\vdash_{C_1} (\neg A\lor B \supset (A\supset B))\supset(\neg(A\supset B) \supset\neg(\neg A\lor B))$	14, teorema da dedução

(c) $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset\neg(\neg A\lor B)$

1	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg A\lor B \supset (A\supset B))$	4.1.4.3.17 (a)

2	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg A \vee B \supset (A \supset B)) \supset (\neg(A \supset B) \supset \neg(\neg A \vee B))$	4.1.4.3.17 (b)
3	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A \supset B) \supset \neg(\neg A \vee B)$	1, 2, E - $\supset$

(d) $A^0 \vdash_{C_1} (\neg A\&\neg\neg A) \supset (A\&\neg A)$

1	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg A\&\neg\neg A$	premissa (4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} \neg A\&\neg\neg A \supset \neg A$	A3, RS
3	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg A\&\neg\neg A \supset \neg A$	2, PA
4	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg A$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} \neg A\&\neg\neg A \supset \neg\neg A$	A4, RS
7	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg A\&\neg\neg A \supset \neg\neg A$	5, PA
8	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg A$	1, 7, E - $\supset$
9	$\vdash_{C_1} \neg\neg A \supset A$	A9, RS
10	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg A \supset A$	9, PA
11	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} A$	8, 10, E - $\supset$
12	$\vdash_{C_1} A \supset (\neg A \supset (A\&\neg A))$	A5, RS
13	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} A \supset (\neg A \supset (A\&\neg A))$	12, PA
14	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} \neg A \supset (A\&\neg A)$	11, 13, E - $\supset$
15	$\neg A\&\neg\neg A \vdash_{C_1} A\&\neg A$	4, 14, E - $\supset$
16	$\vdash_{C_1} (\neg A\&\neg\neg A) \supset (A\&\neg A)$	15, teorema da dedução
17	$A^0 \vdash_{C_1} (\neg A\&\neg\neg A) \supset (A\&\neg A)$	16, PA

(e) $\vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A)^0$

1	$A^0 \vdash_{C_1} A^0$	premissa (4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A^0 \supset [(\neg A\&\neg\neg A) \supset (A\&\neg A) \supset [((\neg A\&\neg\neg A) \supset A^0) \supset (\neg(\neg A\&\neg\neg A))]]$	A11, RS
3	$A^0 \vdash_{C_1} A^0 \supset [(\neg A\&\neg\neg A) \supset (A\&\neg A) \supset [((\neg A\&\neg\neg A) \supset A^0) \supset (\neg(\neg A\&\neg\neg A))]]$	2, PA

4	$A^0 \vdash_{C_1} [((\neg A \& \neg\neg A) \supset (A \& \neg A)) \supset [((\neg A \& \neg\neg A) \supset A^0) \supset (\neg(\neg A \& \neg\neg A))]]$	1,3, E - $\supset$
5	$A^0 \vdash_{C_1} (\neg A \& \neg\neg A) \supset (A \& \neg A)$	4.1.4.3.17 (d)
6	$A^0 \vdash_{C_1} [((\neg A \& \neg\neg A) \supset A^0) \supset (\neg(\neg A \& \neg\neg A))$	4, 5, E - $\supset$
7	$\vdash_{C_1} A^0 \supset ((\neg A \& \neg\neg A) \supset A^0)$	A1, RS
8	$A^0 \vdash_{C_1} A^0 \supset ((\neg A \& \neg\neg A) \supset A^0)$	7, PA
9	$A^0 \vdash_{C_1} (\neg A \& \neg\neg A) \supset A^0$	1, 8, E - $\supset$
10	$A^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A \& \neg\neg A)$	6, 9, E - $\supset$
11	$A^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0$	10, definição 1
12	$\vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A)^0$	11, teorema da dedução

(f) $A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0 \& B^0$

1	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} A^0 \& B^0$	premissa (4.1.4.3.4)
2	$\vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset A^0$	A3, RS
3	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} A^0 \& B^0 \supset A^0$	2, PA
4	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} A^0$	1, 3, E - $\supset$
5	$\vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A)^0$	4.1.4.3.17 (e)
6	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} A^0 \supset (\neg A)^0$	5, PA
7	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0$	4, 6, E - $\supset$
8	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} B^0$	A4, RS
9	$\vdash_{C_1} (\neg A)^0 \supset [B^0 \supset (\neg A)^0 \& B^0]$	A5, RS
10	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0 \supset [B^0 \supset (\neg A)^0 \& B^0]$	9, PA
11	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} [B^0 \supset (\neg A)^0 \& B^0]$	7, 10, E - $\supset$
12	$A^0 \& B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0 \& B^0$	8, 11, E - $\supset$

(g) $A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)$

1	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0\&B^0$	4.1.4.3.17 (f)
2	$\vdash_{C_1} A^0\&B^0 \supset(\neg(\neg A\vee B)\supset(\neg\neg A\&\neg B))$	4.1.4.3.16 (d), RS
3	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg A)^0\&B^0\supset(\neg(\neg A\vee B)\supset(\neg\neg A\&\neg B))$	2, PA
4	$A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)\supset(\neg\neg A\&\neg B)$	1, 3, E - $\supset$
6	$\neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)$	premissa (4.1.4.3.4)
7	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)$	6, PA
8	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)\supset(\neg\neg A\&\neg B)$	4, PA
9	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)$	7, 8, E - $\supset$

(h) $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B)$

1	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)$	4.1.4.3.17 (g)
2	$\vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)\supset\neg\neg A$	A3, RS
3	$\vdash_{C_1} \neg\neg A\supset A$	A9, RS
4	$\vdash_{C_1} ((\neg\neg A\&\neg B)\supset\neg\neg A)\supset((\neg\neg A\supset A)\supset((\neg\neg A\&\neg B)\supset A))$	4.1.4.3.14, RS
5	$\vdash_{C_1} (\neg\neg A\supset A)\supset((\neg\neg A\&\neg B)\supset A)$	2, 4, E - $\supset$
6	$\vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)\supset A$	3, 5, E - $\supset$
7	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)\supset A$	6, PA
8	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} A$	1, 7, E - $\supset$
9	$\vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)\supset\neg B$	A4, RS
10	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg\neg A\&\neg B)\supset\neg B$	9, PA
11	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} \neg B$	1, 10, E - $\supset$
12	$\vdash_{C_1} A\supset(\neg B\supset(A\&\neg B))$	A5, RS
13	$A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} A\supset(\neg B\supset(A\&\neg B))$	12, PA

14 $A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} (\neg B\supset(A\&\neg B))$ 8, 13, E - $\supset$

15 $A^0\&B^0, \neg(\neg A\vee B) \vdash_{C_1} A\&\neg B$ 11, 14, E - $\supset$

16 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B)$ 15, teorema da dedução

(i) $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset(A\&\neg B)$

1 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset\neg(\neg A\vee B)$ 4.1.4.3.17 (c)

2 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B)$ 4.1.4.3.17 (h)

3 $\vdash_{C_1} (\neg(A\supset B)\supset\neg(\neg A\vee B))\supset((\neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B))\supset(\neg(A\supset B)\supset(A\&\neg B)))$ 4.1.4.3.14, RS

4 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} (\neg(A\supset B)\supset\neg(\neg A\vee B))\supset((\neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B))\supset(\neg(A\supset B)\supset(A\&\neg B)))$ 3, PA

5 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} ((\neg(\neg A\vee B)\supset(A\&\neg B))\supset(\neg(A\supset B) \supset(A\&\neg B)))$ 1, 4, E - $\supset$

6 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset(A\&\neg B)$ 2, 5, E - $\supset$

(j) $A^0\&B^0, \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} (A\&\neg B)$

1 $A^0\&B^0, \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} \neg(A\supset B)$ premissa (4.1.4.3.4 e PA)

2 $A^0\&B^0 \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset(A\&\neg B)$ 4.1.4.3.17 (i)

3 $A^0\&B^0, \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} \neg(A\supset B) \supset(A\&\neg B)$ 2, PA

4 $A^0\&B^0, \neg(A\supset B) \vdash_{C_1} (A\&\neg B)$ 2, 3, E - $\supset$

Por PA, podemos generalizar 4.1.4.3.4. a 4.1.4.3.17 para qualquer Γ, ou seja, $\Gamma \vdash_{C_1} C$, portanto, concluímos que **se $\Gamma \vdash_{DNC_1} C$, então $\Gamma \vdash_{C_1} C$.** ⊠

De 4.1.4.1, 4.1.4.2 e 4.1.4.3 temos que

$\Gamma \vdash_{DNC_1} C$ see $\Gamma \vdash_{C_1} C$. ⊠

4.1.5 Consistência do sistema DNC_1.

Antes de demonstrarmos a consistência do sistema **DNC_1**, necessitaremos definir o que deve ser entendido por um conjunto inconsistente de fórmulas:

Definição 7 Conjunto inconsistente de fórmulas

Um conjunto de fórmulas bem formadas Γ é inconsistente see existe pelo menos uma fórmula bem formada A tal que ela e a sua negação são dedutíveis de Γ.

NOTA. A partir daqui convencionaremos que $\mathcal{F}$ sempre indicará o conjunto das fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$ de $\mathbf{DNC_1}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.

Agora podemos demonstrar a consistência do sistema $\mathbf{DNC_1}$, como se segue:

Demonstração:

Como $\mathbf{C_0}$ é consistente (KLEENE, 1952, p.129) e devido a que $\mathbf{C_0}$ é logicamente equivalente a $\mathbf{DNC_0}$ (vide explicação na nota de rodapé 10), temos que $\mathbf{DNC_0}$ é consistente.

Como em (4.4.1) demonstramos que $\mathbf{DNC_0}$ é dedutivamente mais forte que $\mathbf{DNC_1}$. Faremos uso desta propriedade e do fato que a negação '~' é equivalente a negação '¬' em $\mathbf{DNC_0}$ (vide anexo E) para demonstrarmos a consistência $\mathbf{DNC_1}$, como se segue:

Suponhamos que $\mathbf{DNC_1}$ seja inconsistente, então, existe uma fórmula A, tal que, $\vdash_{DNC_1} A \& \neg A$, definição 7, ou seja,

1	$\vdash_{DNC_1} A \& \neg A$	premissa provisória
2	$\vdash_{DNC_1} A$	1, E - &
3	$\vdash_{DNC_1} \neg A$	1, E - &
4	$\vdash_{DNC_0} A$	2, 4.4.1
5	$\vdash_{DNC_0} \neg A$	3, 4.4.1
6	$\vdash_{DNC_0} A \& \neg A$	4, 5, I - &

mas, $\mathbf{DCN_0}$ é consistente. Logo, não existe A tal que $\vdash_{DNC_1} A \& \neg A$. ⊠

4.1.6 Completude do sistema $\mathbf{DNC_1}$.

4.1.6.1 Teorema da corretude forte do sistema $\mathbf{DNC_1}$.

Demonstraremos que se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$, então $\Gamma \vDash_{DNC_1} A$.

Antes da demonstração desse teorema necessitamos de algumas definições.

Definição 8 Interpretação paraconsistente para $\mathbf{DNC_1}$

Uma interpretação (ou valoração) paraconsistente das proposições de $\mathbf{DNC_1}$ é uma função ϖ: $\mathrm{F} \rightarrow \{0,1\}$, definida indutivamente pelas seguintes cláusulas:

8.a Se $\varpi(A) = 0$, então $\varpi(\neg A) = 1$;

8.b Se $\varpi(\neg\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 1$;

8.c Se $\varpi(B^0) = 1$ e $\varpi(A \supset B) = 1$ e $\varpi(A \supset \neg B) = 1$, então $\varpi(A) = 0$;

8.d $\varpi(A \supset B) = 1$ see $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(B) = 1$;

8.e $\varpi(A \& B) = 1$ see $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(B) = 1$;

8.f $\varpi(A \vee B) = 1$ see $\varpi(A) = 1$ ou $\varpi(B) = 1$;

8.g Se $\varpi(\neg(A \& B)) = 1$, então $\varpi(\neg A) = 1$ ou $\varpi(\neg B) = 1$;

8.h Se $\varpi((A)^0) = 1$ e $\varpi((B)^0) = 1$ e $\varpi(\neg(A \vee B)) = 1$, então $\varpi(\neg A \& \neg B) = 1$;

8.i Se $\varpi((A)^0) = 1$ e $\varpi((B)^0) = 1$ e $\varpi(\neg(A \supset B)) = 1$, então $\varpi(A \& \neg B) = 1$.

OBS: devemos realçar que essa valoração é própria para esse sistema, e apresenta claúsulas diferentes daquelas originalmente definidas para $\mathbf{C}_1$.

Definição 9 Fórmula válida

Uma fórmula bem formada A é válida see para toda valoração ϖ, $\varpi(A) = 1$.

Definição 10 Modelo

A valoração ϖ é um modelo do conjunto de fórmulas bem formadas Γ de $\mathcal{L}$ see para toda fórmula A de Γ , $\varpi(A) = 1$.

Definição 11 Conseqüência semântica

$\Gamma \vDash A$ (lê-se A é conseqüência semântica do conjunto de fórmulas bem formadas Γ de $\mathcal{L}$) see para toda valoração ϖ que é um modelo de Γ, $\varpi(A) = 1$.

Demonstraremos algumas propriedades de uma valoração ϖ que serão úteis para a demonstração do Teorema da Corretude:

Se ϖ é uma valoração em $\mathbf{DNC}_1$, ϖ tem as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1.6.1.a $\varpi(A^0) = 0$ see $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$.

Propriedade 4.1.6.1.b $\varpi(A) = 1$ see $\varpi(\sim A) = 0$.

Propriedade 4.1.6.1.c $\varpi(A) = 0$ então $\varpi(\sim A) = 1$.

Propriedade 4.1.6.1.d $\varpi(A^0) = 1$ see $\varpi(A) \neq \varpi(\neg A)$.

Demonstração[20] dessas propriedades:

Propriedade 4.1.6.1.a.

a) Seja $\varpi(A^0) = 0$, então $\varpi(\neg(A\&\neg A)) = 0$ [definição 1]. Assim $\varpi(\neg\neg(A\&\neg A))=1$ por [definição 8.a] e por [definição 8.b], vem $\varpi(A\&\neg A) = 1$, portanto $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$ [definição 8.e]. Assim, se $\varpi(A^0) = 0$, então $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$.

b) Sejam $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$ e admitamos que $\varpi(A^0) = 1$. Se $\varpi(A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(A) = 1$, que por [definição 8.d] é $\varpi(A\supset A)=1$, e se $\varpi(\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi\neg(A) = 1$, que por [definição 8.d] é $\varpi(A\supset\neg A) = 1$. Assim, temos que $\varpi(A^0) = 1$ e $\varpi(A\supset A) = 1$ e $\varpi(A\supset\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ [definição 8.c], o que é uma contradição, logo $\varpi(A^0) = 0$.

De (a) e (b) resulta a propriedade desejada.

Propriedade 4.1.6.1.b.

a) Seja $\varpi(A) = 1$, e admitamos que $\varpi(\sim A) = 1$, i.é., $\varpi(\neg A\&A^0) = 1$ [definição 2], portanto, $\varpi(\neg A)= 1$ e $\varpi(A^0) = 1$. Se $\varpi(\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(\neg A) = 1$, ou seja, $\varpi(A\supset\neg A) = 1$ [definição 8.d] , e como $\varpi(A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(A) = 1$, ou seja, $\varpi(A\supset A) = 1$ [definição 8.d] , portanto $\varpi(A^0) = 1$ e $\varpi(A\supset A) = 1$ e $\varpi(A\supset\neg A) = 1$, e como conseqüência $\varpi(A) = 0$ [definição 8.c], o que é uma contradição, pois, admitimos que $\varpi(A) = 1$, logo $\varpi(\sim A) = 1$.

b) Seja $\varpi(\sim A) = 0$, e admitamos que $\varpi(A) = 0$, portanto $\varpi(\neg A\&A^0) = 0$ [definição 2], ou seja, $\varpi(\neg A)= 0$ ou $\varpi(A^0) = 0$ [definição 8.e], mas como $\varpi(A) = 0$, então $\varpi(\neg A) = 1$ [definição 8. a], portanto $\varpi(A^0) = 0$. Se $\varpi(A^0) = 0$, $\varpi(\neg(A^0)) = 1$ [definição 8.a]. Assim, $\varpi(\neg(\neg(A\&\neg A))) = 1$, que por [definição 8.b] resulta $\varpi(A\&\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$ [definição 8.e], portanto $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(A) = 0$[pela hipótese], o que é uma com tradição, logo $\varpi(A) = 1$.

De (a) e (b) resulta a propriedade desejada.

Propriedade 4.1.6.1.c.

a) Seja $\varpi(A) = 0$, e admitamos que $\varpi(\sim A) = 0$, i.é., $\varpi(\neg A\&A^0) = 0$ [definição 2],

---

[20] A lógica da nossa metalinguagem é a clássica, portanto usaremos as suas propriedades nas demonstrações.

portanto $\varpi(\neg A)= 0$ ou $\varpi(A^0) = 0$ [definição 8.e] . Se $\varpi(\neg A) = 0$, então $\varpi(\neg\neg A) = 1$ [definição 8.a] , e daí, $\varpi(A) = 1$ [definição 8. b], portanto $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(A) = 0$. Por outro lado, se $\varpi(A^0) = 0$, $\varpi(\neg(A^0)) = 1$ [definição 8.a], ou seja, $\varpi(\neg(\neg(A\&\neg A))) = 1$ [definição 1], que por [definição 8.b] resulta $\varpi(A\&\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$ [definição 8.e], portanto $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(A)=0$. Resultando em ambos os casos uma contradição, logo $\varpi({\sim}A)=1$.

b) Seja $\varpi({\sim}A) = 1$ e admitamos que $\varpi(A) = 1$, i.é., $\varpi(\neg A\&A^0) = 1$ [definição 2], portanto $\varpi(\neg A)= 1$ e $\varpi(A^0) = 1$ [definição 8.e]. Se $\varpi(\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(\neg A) = 1$, ou seja, $\varpi(A\supset\neg A) = 1$ [definição 8.d] , e como $\varpi(A) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(A) = 1$, ou seja, $\varpi(A\supset A) = 1$ [definição 8.d] , portanto $\varpi(A^0) = 1$ e $\varpi(A\supset A) = 1$ e $\varpi(A\supset\neg A) = 1$, e como conseqüência, $\varpi(A) = 0$ [definição 8.c] , o que é uma contradição, pois, admitimos que $\varpi(A) = 1$, logo $\varpi(\neg A) = 0$.

De (a) e (b) resulta a propriedade desejada.

Propriedade 4.1.6.1.d.

a) Seja $\varpi(A^0) = 1$, então $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(\neg A) = 0$ [propriedade 4.1.6.1.a]. Admitamos que $\varpi(A) = \varpi(\neg A)$, portanto, $\varpi(A) = 0$ e $\varpi(\neg A) = 0$, ora, se $\varpi(A) = 0$, então $\varpi(\neg A)= 1$ [definição 8.a], assim, $\varpi(\neg A) = 0$ e $\varpi(\neg A) = 1$, o que é uma contradição, logo $\varpi(A) \neq \varpi(\neg A)$.

b) Seja $\varpi(A) \neq \varpi(\neg A)$, então $\varpi(A) = 0$ e $\varpi(\neg A) = 1$, ou $\varpi(A) =1$ e $\varpi(\neg A) = 0$. Ora, se $\varpi(A) = 0$ e $\varpi(\neg A) = 1$, então $\varpi(A^0)= 1$ [propriedade 4.1.6.1.a], e se $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 0$, então $\varpi(A^0) = 1$ [propriedade 4.1.6.a] , logo $\varpi(A^0) = 1$.

De (a) e (b) resulta a propriedade desejada.

Agora, demonstraremos o *Teorema da Corretude*. Essa demonstração será realizada por indução sobre o comprimento da dedução da fórmula D a partir do conjunto de fórmulas Γ em $\mathbf{DNC_1}$.

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{DNC_1} \mathbf{D}$, portanto existe uma dedução de **D** a partir de Γ. Seja $D_1, D_2, ..., D_n$ tal dedução, onde $\mathbf{D} = D_n$, então para cada D_i , $(1\leq i\leq n)$, temos:

1 $D_k \in \Gamma$ e D_k resulta de Γ através da aplicação da regra de repetição.

2 D_k resulta de fórmulas precedentes na dedução através da aplicação de uma regra de introdução ou de eliminação.

Vamos a demonstração desses dois casos:

1 D_k representa uma fórmula de Γ e D_k resulta de Γ, pela regra de repetição.

Seja $D_k \in \Gamma$, ou seja, uma premissa dada, então, pela nossa suposição $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_k$. Portanto, por hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_k) = 1$, ou seja, para qualquer ϖ que seja um modelo de Γ, temos que $\varpi(D_k) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].□

2 D_k resulta de fórmulas precedentes através da aplicação de uma ou várias regras de dedução, a saber:

2. 1 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por D_i e D_j, onde $D_k = D_i \supset D_j$, pela regra I - $\supset$ [regra de introdução da implicação].

Sejam D_i e D_j, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_j$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i) = \varpi(D_j) = 1$.

Sejam $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_j) = 1$ e admitamos que exista ϖ tal que $\varpi(D_k) = 0$. Assim, $\varpi(D_i \supset D_j) = 0$, portanto $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_j) = 0$ [definição 8.d]. Segue-se $\varpi(D_j) = 1$ e $\varpi(D_j)=0$, o que é uma contradição, então para toda ϖ, $\varpi(D_k) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.2 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por D_i e D_j,onde $D_k = (D_i \ \& \ D_j)$, por I- & [regra de introdução da conjunção].

Sejam D_i e D_j , então, $\vdash_{DNC_1} D_i$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_j$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i) = \varpi(D_j) = 1$.

Seja $\varpi(D_i) = 1$, $\varpi(D_j) = 1$ e admitamos que exista ϖ tal que $\varpi(D_k) = 0$. Assim, $\varpi(D_i \ \& \ D_j) = 0$, portanto $\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 0$ [definição 8.e], mas, como $\varpi(D_i) = 1$, temos que $\varpi(D_j) = 0$, o que é uma contradição, pois, $\varpi(D_j) = 0$, então para toda ϖ , $\varpi(D_k)= 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.3 D_k é conseqüência da fórmula precedente representada por D_i , onde $D_k = (D_i \vee D_j)$, por I - $\vee$ [regra de introdução da disjunção].

Seja D_i , então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i) = 1$.

Seja $\varpi(D_i) = 1$ e admitamos que exista ϖ tal que $\varpi(D_k) = 0$. Assim, $\varpi(D_i \vee D_j) = 0$, portanto, $\varpi(D_i) = 0$ e $\varpi(D_j) = 0$ [definição 8.f], mas, como $\varpi(D_i) = 1$, temos uma contradição, então para toda ϖ , $\varpi(D_k)= 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11] [21].

2.4 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por $(D_i)^0$, $D_j \supset D_i$, $D_j \supset \neg D_i$, onde $D_k = \neg D_j$, por I - $\neg$(rest) [regra de introdução restringida da negação].

Sejam $(D_i)^0$, $D_j \supset D_i$, $D_j \supset \neg D_i$, onde $D_k = \neg D_j$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_i)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_j \supset D_i$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_j \supset \neg D_i$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que , para toda $\varpi((D_i)^0) = \varpi(D_j \supset D_i) = \varpi(D_j \supset \neg D_i) = 1$.

Seja $\varpi((D_i)^0) = \varpi(D_j \supset D_i) = \varpi(D_j \supset \neg D_i) = 1$, e admitamos que $\varpi(D_k) = 0$, ou seja, $\varpi(\neg D_j) = 0$, assim, $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.a e definição 8.b], mas, se $\varpi(D_j \supset D_i) = \varpi(D_j \supset \neg D_i) = 1$, então $\varpi(D_j) = 0$ ou $\varpi(D_i) = 1$, e $\varpi(D_j) = 0$ ou $\varpi(\neg D_i) = 1$ [definição 8.d], mas, como $\varpi(D_j)=1$, segue-se que $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(\neg D_i) = 1$ e como $\varpi((D_i)^0) = 1$, então $\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(\neg D_i)=0$ [propriedade 4.1.6.1.a], mas, $\varpi(D_i) = 1$, então $\varpi(\neg D_i) = 0$, e como deduzimos anteriormente que $\varpi(\neg D_i) = 1$, obtemos uma contradição, portanto $\varpi(D_k) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.5 D_k é conseqüência da fórmulas precedente representada por $\neg(D_i \,\&\, D_j)$, onde $D_k = \neg D_i \vee \neg D_j$, por DM [regra de distribuição da negação na conjunção] [22].

Seja $\neg(D_i \,\&\, D_j)$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg(D_i \,\&\, D_j)$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(\neg(D_i \,\&\, D_j)) = 1$.

[21] Omitimos a demonstração de D_k é conseqüência da fórmula precedente D_j,onde $D_k = (D_i \vee D_j)$, por I- $\vee$ [Introdução da Disjunção], pois, o procedimento de prova é idêntico.

[22] Como é a primeira vez que DM, DND(rest) e DNI(rest) são propostas como regras de dedução para as lógicas proposicionais paraconsistentes, iremos realizar as demonstrações da corretude destas com mais detalhes (em 2.5, 2.6 e 2.7, respectivamente).

Seja $\varpi(\neg(D_i \,\&\, D_j)) = 1$, isto é,

1	$\varpi(\neg(D_i \,\&\, D_j)) = 1$	premissa
2	$\varpi(\neg D_i \vee \neg D_j) = 0$	premissa provisória
3	$\varpi(\neg D_i) = 0$ e $\varpi(\neg D_j) = 0$	2, definição 8.f
4	$\varpi(\neg D_i) = 0$	3, E - &
5	$\varpi(\neg D_j) = 0$	3, E - &
6	$\varpi(\neg\neg D_i) = 1$	4, definição 8.a
7	$\varpi(D_i) = 1$	6, definição 8.b
8	$\varpi(\neg\neg D_j) = 1$	5, definição 8.a
9	$\varpi(D_j) = 1$	8, definição 8.b
10	$\varpi(\neg(D_i \,\&\, D_j)) = 1$	1, repetição
11	$\varpi(\neg D_i) = 1$ ou $\varpi(\neg D_j) = 1$	10, definição 8.g
12	$\varpi(\neg D_j) = 1$	4, 11, silogismo disjuntivo[23]
13	$\varpi(\neg D_i \vee \neg D_j) = 1$	2-12, *Reductio ad Absurdum* [24]

assim, $\varpi(D_k) = 1$(pois, D_k é $\neg D_i \vee \neg D_j$), logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.6 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por $(D_i)^0$, $(D_j)^0$, $\neg(D_i \vee D_j)$, onde $D_k = (\neg D_i \,\&\neg D_j)$, por DND(rest) [regra de distribuição restringida da negação na disjunção].

Sejam $(D_i)^0$, $(D_j)^0$, $\neg(D_i \vee D_j)$, onde $D_k = (\neg D_i \,\&\neg D_j)$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_i)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_j)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg(D_i \vee D_j)$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que , para toda $\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \vee D_j))= 1$.

Sejam $\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \vee D_j)) = 1$ .... (a)

Antes de prosseguirmos devemos demonstrar o seguinte argumento, o qual denominaremos *argumento I*, que será útil na demonstração da proposição **2.6** :

---

[23] Uma formulação dessa regra da lógica clássica é :
De uma disjunção e da negação de um dos seus componentes, deduz-se o outro componente da disjunção.
[24] Cf. nota de rodapé 20.

$(D_i)^0, (D_j)^0 \vdash_{DNC1} (D_i \vee D_j)^0$. [*argumento I*]

Sejam $(D_i)^0$, $(D_j)^0$, onde $D_k = (D_i \vee D_j)^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_i)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_j)^0$. Então, sob hipótese de indução, temos que, para toda $\varpi((D_i)^0)=\varpi((D_j)^0)= 1$.

1	$\varpi((D_i)^0) = 1 \ \& \ \varpi((D_j)^0) = 1$	premissa
2	$\varpi((D_i \vee D_j)^0) = 0$	premissa provisória
3	$\varpi(\neg(D_i \vee D_j)^0) = 1$	2, definição 8.a
4	$\varpi(\neg(\neg((D_i \vee D_j) \ \& \ \neg(D_i \vee D_j)))) = 1$	3, definição 1
5	$\varpi((D_i \vee D_j) \ \& \ \neg(D_i \vee D_j)) = 1$	4, definição 8.b
6	$\varpi((D_i \vee D_j)) = 1$ e $\varpi(\neg(D_i \vee D_j)) = 1$	5, definição 8.e
7	$\varpi(\neg(D_i \vee D_j)) = 1$	6, E - &
8	$\varpi(\neg D_i \ \& \ \neg D_j) = 1$	1, 7, definição 8.h
9	$\varpi(\neg D_i) = 1$ e $\varpi(\neg D_j) = 1$	8, definição 8.e
10	$\varpi(\neg D_i) = 1$	9, E - &
11	$\varpi((D_i)^0) = 1$	1, E - &
12	$\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(\neg D_i) = 0$	11, propriedade 4.1.6.1.a
13	$\varpi(D_i) = 0$	10, 12, silogismo disjuntivo
14	$\varpi((D_j)^0) = 1$	1, E - &
15	$\varpi(D_j) = 0$ ou $\varpi(\neg D_j) = 0$	14, propriedade 4.1.6.1a
16	$\varpi(\neg D_j) = 1$	9, E - &
17	$\varpi(D_j) = 0$	15, 16, silogismo disjuntivo
18	$\varpi(D_i) = 0$ e $\varpi(D_j) = 0$	13, 17, I - &
19	$\varpi((D_i \vee D_j)) = 0$	18, definição 8.f
20	$\varpi((D_i \vee D_j)) = 1$	6, E - &
21	$\varpi((D_i \vee D_j)^0) = 1$	2-20, *Reductio ad absurdum*

Demonstração da proposição 2.6:

1	$\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \vee D_j)) = 1$	premissa (por (a))
2	$\varpi(\neg D_i \,\&\, \neg D_j) = 0$	premissa provisória
3	$\varpi(\neg D_i) = 0$ ou $\varpi(\neg D_j) = 0$	2, definição 8.e
4	$\varpi(\neg D_i) = 0$	premissa provisória
5	$\varpi(\neg\neg D_i) = 1$	4, definição 8.a
6	$\varpi(D_i) = 1$	5, definição 8.b
7	$\varpi(D_i) = 1$ ou $\varpi(D_j) = 1$	6, I - $\vee$
8	$\varpi(D_i \vee D_j) = 1$	7, definição 8.f
9	$\varpi(\sim D_i \vee D_j)) = 0$	8, propriedade 4.1.6.1.b
10	$\varpi(\neg D_j) = 0$	premissa provisória
11	$\varpi(\neg\neg D_j) = 1$	10, definição 8.a
12	$\varpi(D_j) = 1$	11, definição 8.b
13	$\varpi(D_i) = 1$ ou $\varpi(D_j) = 1$	12, I - $\vee$
14	$\varpi(D_i \vee D_j) = 1$	13, definição 8.f
15	$\varpi(\sim(D_i \vee D_j)) = 0$	14, propriedade 4.1.6.1.b
16	$\varpi(\sim(D_i \vee D_j)) = 0$	3, 4-9, 10-15, E - $\vee$
17	$\varpi(\neg(D_i \vee D_j) \,\&\, (D_i \vee D_j)^0) = 0$	16, definição 2
18	$\varpi(\neg(D_i \vee D_j)) = 0$ ou $\varpi((D_i \vee D_j)^0) = 0$	17, definição 8.e
19	$\varpi((D_i \vee D_j)^0) = 0$	1, 18, silogismo disjuntivo
20	$\varpi((D_i \vee D_j)^0) = 1$	1, *argumento I*
21	$\varpi(\neg D_i \,\&\, \neg D_j) = 1$	2-20, *Reductio ad absurdum*

logo, $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.7 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes $(D_i)^0$, $(D_j)^0$, $\neg(D_i \supset D_j)$, onde $D_k = (D_i \,\&\, \neg D_j)$, por DNI(rest)[regra de distribuição restringida da negação na implicação].

Sejam $(D_i)^0$, $(D_j)^0$, $\neg(D_i \supset D_j)$, onde $D_k = (D_i \,\&\, \neg D_j)$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_i)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_j)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg(D_i \supset D_j)$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que , para toda $\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$.

Sejam $\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$ .... (b)

Antes de prosseguirmos devemos demonstrar o seguinte argumento, o qual denominaremos *argumento II*, que será útil na demonstração da proposição **2.7** :

$(D_i)^0, (D_j)^0 \vdash_{DNC_1} (D_i \supset D_j)^0$. [*argumento II*]

Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_i)^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (D_j)^0$. Então, sob hipótese de indução, temos que, para toda $\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = 1$.

1	$\varpi((D_i)^0) = 1$ e $\varpi((D_j)^0) = 1$	premissa
2	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 0$	premissa provisória
3	$\varpi(\neg(D_i \supset D_j)^0) = 1$	2, definição 8.a
4	$\varpi(\neg(\neg((D_i \supset D_j) \& \neg(D_i \supset D_j)))) = 1$	3, definição 1
5	$\varpi((D_i \supset D_j) \& \neg(D_i \supset D_j)) = 1$	4, definição 8.b
6	$\varpi((D_i \supset D_j)) = 1$ e $\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	5, definição 8.e
7	$\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	6, E - &
8	$\varpi(D_i \& \neg D_j)) = 1$	1, 7, definição 8.i
9	$\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(\neg D_j) = 1$	8, definição 8.e
10	$\varpi(D_i) = 1$	9, E - &
11	$\varpi((D_i)^0) = 1$	1, E - &
12	$\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(\neg D_i) = 0$	11, propriedade 4.1.6.1.a
13	$\varpi(\neg D_i) = 0$	10, 12, silogismo disjuntivo
14	$\varpi((D_j)^0) = 1$	1, E - &
15	$\varpi(D_j) = 0$ ou $\varpi(\neg D_j) = 0$	14, propriedade 4.1.6.1.a
16	$\varpi(\neg D_j) = 1$	9, E - &
17	$\varpi(D_j) = 0$	15, 16, silog. disjuntivo
18	$\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_j) = 0$	10, 17, I - &
19	$\varpi((D_i \supset D_j)) = 0$	18, definição 8.d
20	$\varpi((D_i \supset D_j)) = 1$	6, E - &
21	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 1$	2-20, I-*Reductio ad absurdum*

Demonstração da proposição 2.7:

1	$\varpi((D_i)^0) = \varpi((D_j)^0) = \varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	premissa (por (b))
2	$\varpi(D_i \,\&\, \neg D_j) = 0$	premissa provisória
3	$\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(\neg D_j) = 0$	2, definição 8.e
4	$\varpi(D_i) = 0$	premissa provisória
5	$\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$	4, I - $\vee$
6	$\varpi(D_i \supset D_j) = 1$	5, definição 8.d
7	$\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	1, E - &
8	$\varpi(D_i \supset D_j) = 1$ e $\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	6, 7, I - &
9	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 0$	8, propriedade 4.1.6.1.a
10	$\varpi(\neg D_j) = 0$	premissa provisória
11	$\varpi(\neg\neg D_j) = 1$	10, definição 8.a
12	$\varpi(D_j) = 1$	11, definição 8.b
13	$\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$	12, I - $\vee$
14	$\varpi(D_i \supset D_j) = 1$	13, definição 8.d
15	$\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	1, E - &
16	$\varpi(D_i \supset D_j) = 1$ e $\varpi(\neg(D_i \supset D_j)) = 1$	14, 15, I - &
17	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 0$	16, propriedade 4.1.6.1.a
18	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 0$	3, 4-9, 10-17, E - $\vee$
19	$\varpi((D_i \supset D_j)^0) = 1$	1, E - &, *argumento II*
20	$\varpi(D_i \,\&\, \neg D_j) = 1$	2-19, I- *Reductio ad absurdum*

logo, $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.8 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por D_i e $D_i \supset D_j$, onde $D_k = D_j$, por E - $\supset$ [regra de eliminação da implicação].

Sejam D_i e $D_i \supset D_j$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i \supset D_j$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i) = \varpi(D_i \supset D_j) = 1$.

Sejam $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_i \supset D_j) = 1$, então $\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.d], mas, como $\varpi(D_i) = 1$, segue-se $\varpi(D_j) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.9 D_k é conseqüência da fórmula precedente representada por $D_i \& D_j$, onde $D_k = D_i$, por E - & [regra de eliminação da conjunção].

Seja $D_i \& D_j$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i \& D_j$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i \& D_j) = 1$.

Seja $\varpi(D_i \& D_j) = 1$ e admitamos que $\varpi(D_k) = 0$, i.é., $\varpi(D_i) = 0$, mas, $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_j) = 1$[definição 8.e], então $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(D_i) = 0$, o que é uma contradição, logo $\varpi(D_k) = 1$, daí, $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11][25].

2.10 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por $D_i \supset D_j$, $D_m \supset D_j$ e $D_i \vee D_m$ onde $D_k = D_j$, por E - $\vee$ [regra de eliminação da disjunção].

Sejam $D_i \supset D_j$, $D_m \supset D_j$ e $D_i \vee D_m$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i \supset D_j$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_m \supset D_j$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i \vee D_m$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i \supset D_j) = \varpi(D_m \supset D_j) = \varpi(D_i \vee D_m) = 1$.

Sejam $\varpi(D_i \supset D_j) = \varpi(D_m \supset D_j) = \varpi(D_i \vee D_m) = 1$ e admitamos que $\varpi(D_j) = 0$, i.é, $\varpi(D_j) = 0$, mas, $\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.d], e $\varpi(D_m) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.d], portanto $\varpi(D_i) = 0$ e $\varpi(D_m) = 0$, consequentemente $\varpi(D_i \vee D_m) = 0$ [definição 8.f], o que é uma contradição, assim $\varpi(D_j) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

2.11 D_k é conseqüência da fórmula precedente representada por $\neg\neg D_i$,onde $D_k = D_i$, por E - $\neg\neg$[regra de eliminação da dupla negação].

Seja $\neg\neg D_i$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg D_i$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(\neg\neg D_i) = 1$.

Seja $\varpi(\neg\neg D_i) = 1$ e admitamos que $\varpi(D_k) = 0$, i.é, $\varpi(D_i) = 0$. Então $\varpi(D_i) = 1$ [definição 8.b], o que é uma contradição, pois, havíamos admitido que $\varpi(D_k) = 0$, portanto $\varpi(D_k) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

---

[25] Omitimos a demonstração de D_k é conseqüência de fórmulas precedentes representadas por $D_i \& D_j$, onde $D_k = D_j$, por E - & [Eliminação da Conjunção], pois, a demonstração é idêntica.

2.12 D_k é conseqüência das fórmulas precedentes representadas por $D_i \supset D_j$, $\neg D_i \supset D_j$ onde $D_k = D_j$, por DNC [regra do dilema não construtivo].

Sejam $D_i \supset D_j$, $\neg D_i \supset D_j$, então, $\Gamma \vdash_{DNC_1} D_i \supset D_j$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg D_i \supset D_j$. Portanto, sob hipótese de indução, temos que para toda ϖ, $\varpi(D_i \supset D_j) = \varpi(\neg D_i \supset D_j) = 1$.

Sejam $\varpi(D_i \supset D_j) = 1$, $\varpi(\neg D_i \supset D_j) = 1$ e admitamos que $\varpi(D_k) = 0$, i. é, $\varpi(D_j) = 0$. Então $\varpi(D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.f] e $\varpi(\neg D_i) = 0$ ou $\varpi(D_j) = 1$ [definição 8.f], todavia, $\varpi(D_j) = 0$, portanto $\varpi(D_i) = 0$ e $\varpi(\neg D_i) = 0$, dai, $\varpi(\neg D_i) = 1$ [definição 8.a], assim, $\varpi(\neg D_i) = 0$ e $\varpi(\neg D_i) = 1$, o que é uma contradição, portanto $\varpi(D_k) = 1$, logo $\Gamma \vDash_{DNC_1} D_k$ [definição 11].

Assim, de 1 e 2.1-2.12, demonstramos que:

Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$, então $\Gamma \vDash_{DNC_1} D$. ⊠

4.1.6.2 Teorema da completude forte do sistema DNC_1

Antes de demonstrarmos esse teorema, necessitaremos de algumas definições e propriedades de conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$.

Definição 12 Conjunto trivial

Um conjunto Γ de fórmulas bem formadas de **DNC_1** é trivial see $\{A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash_{DNC_1} A\} = \mathcal{F}$; caso contrário, Γ é dito não trivial.

Definição 13 Conjunto não trivial maximal

Um conjunto Γ de fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$ de **DNC_1** é não trivial maximal see (a) Γ é não trivial, e

(b) para toda fórmula bem formada A, se $A \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial.[26]

Propriedades dos conjuntos não triviais maximais:

Seja Γ um conjunto não trivial maximal de fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$ de **DNC_1**,

Propriedade 4.1.6.2 $A \in \Gamma$ see $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$.

[26] No caso, a negação usada na relação de pertinência é a clássica.(cf. nota de rodapé 20).

Demonstração:

a) Seja $A \in \Gamma$ e como $\{A\} \vdash_{DNC_1} A$ [4.1.4.3.4], segue-se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{DNC_1} A$ [PA].

b) Sejam $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ e $A \notin \Gamma$. Assim, como $A \notin \Gamma$, temos que $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial [definição 13.b], então $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{DNC_1} A \& \sim A$ [definição 12], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \supset A \& \sim A$[teorema da dedução], logo $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \sim A$ [E - ⊃], todavia, esse resultado contraria a hipótese de que Γ é não trivial maximal, pois, de $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \sim A$[27], temos que qualquer fórmula bem formada B é deduzida em $\mathbf{DNC_1}$. ⊠

Propriedades

*4.1.6.**2.a*** Se $A \supset B \in \Gamma$ e $A \in \Gamma$, então $B \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.b*** $A \& B \in \Gamma$ see $A \in \Gamma$ e $B \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.c*** $A \vee B \in \Gamma$ see $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.d*** $A \supset B \in \Gamma$ see $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.e*** Se $A \notin \Gamma$, então $\neg A \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.f*** Se $A \notin \Gamma$, então $\neg\neg A \notin \Gamma$.

*4.1.6.**2.g*** $A^0 \in \Gamma$ see $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$.

*4.1.6.**2.h*** Se $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$, então $\neg A^0 \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.i*** Se $A \notin \Gamma$ e $\neg A \notin \Gamma$, então $A^0 \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.j*** Se ($A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$) e ($B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$), então $A \& B \notin \Gamma$ ou $\neg(A \& B) \notin \Gamma$.

*4.1.6.**2.k*** Se ($A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$) e ($B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$), então $A \vee B \notin \Gamma$ ou $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$.

4.1.6.2.l Se ($A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$) e ($B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$), então $A \supset B \notin \Gamma$ ou $\neg(A \supset B) \notin \Gamma$.

*4.1.6.**2.m*** Se $(A^0 \& B^0) \in \Gamma$, então $(A \& B)^0 \in \Gamma$.

*4.1.6.**2.n*** Se $(\neg A \vee \neg B) \notin \Gamma$, então $\neg(A \& B) \notin \Gamma$.

Demonstração dessas propriedades:

2.a Sejam $A \supset B \in \Gamma$ e $A \in \Gamma$, segue-se que $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \supset B$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [*propriedade*

[27] A demonstração de $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \sim A \supset B$, encontra-se no Anexo B4.

1], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ (E - $\supset$). Daí, $B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

2.b Seja que $A\&B\in\Gamma$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\&B$ [propriedade 4.1.6.2], assim, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [por E - &]. Daí, $A\in\Gamma$ e $B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

Sejam A, $B\in\Gamma$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [propriedade 4.1.6.2], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\&B$ [por I - &]. Daí, $A\&B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

2.c Admitamos que $A\vee B\in\Gamma$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\vee B$ [propriedade 4.1.6.2], portanto, se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ e se $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [E - &]. Daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ ou $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$, portanto, $A\in\Gamma$ ou $B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

Seja $A\in\Gamma$ ou $B\in\Gamma$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ ou $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [propriedade 4.1.6.2], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\vee B$ [por I - $\vee$], daí, $A\vee B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

2.d Seja $A\supset B\in\Gamma$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\supset B$ [propriedade 4.1.6.2]. Admitamos, por absurdo, que $A\in\Gamma$ e $B\notin\Gamma$, assim $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [propriedade 4.1.6.2] e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$[por E- $\supset$]. Daí, $B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2], mas, $B\notin\Gamma$ [por hipótese], o que é uma contradição.

Seja $A\notin\Gamma$ ou $B\in\Gamma$. Segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1\ DNC1} A$ ou $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [propriedade 4.1.6.2], mas, se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$, então $\Gamma \cup\{A\} \vdash_{DNC_1} B$ [por Γ ser não trivial maximal , definição 13.b], assim, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\supset B$ [teorema da dedução]. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ e como $\Gamma\vdash_{DNC_1} B\supset (A\supset B)$, vem $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\supset B$ [por E - $\supset$].

2.e Seja $A\notin\Gamma$, mas, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\vee\neg A$, e pela propriedade 4.1.6.2, $(A\vee\neg A)\in\Gamma$, assim, $A\in\Gamma$ ou $\neg A\in\Gamma$[propriedade 4.1.6.2.c]. Como $A\notin\Gamma$, vem $\neg A\in\Gamma$.

2.f Seja $A\notin\Gamma$, e admitamos, por absurdo, que $\neg\neg A\in\Gamma$. Assim, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg A$ [*propriedade 1*], e como $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg A\supset A$, temos que , $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [E - $\supset$], segue-se $A\in\Gamma$, mas, $A\notin\Gamma$, logo $\neg\neg A\notin\Gamma$.

2.g Seja $A^0\in\Gamma$. Admitamos, por absurdo, que $A\in\Gamma$ e $\neg A\in\Gamma$, portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$

e $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ [propriedade 4.1.6.2], então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \& A \& \neg A$ [I - &], mas, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \& A \& \neg A \supset B$ (qualquer que seja B) , assim Γ é trivial, todavia, Γ é não trivial, logo $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$.

Seja $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$. Suponhamos, por absurdo, que $A^0 \notin \Gamma$, então $\neg A^0 \in \Gamma$ [pro priedade 2. e] , portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A^0$. Todavia, $\neg A^0 \vdash_{DNC_1} A \& \neg A$, portanto, $\vdash_{DNC_1} \neg A^0 \supset A \& \neg A$ [teorema da dedução], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A^0 \supset A \& \neg A$ [PA], mas como $\vdash_{DNC_1} \neg A^0$, segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \neg A$ [E - $\supset$], logo $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$ *[propriedade* 4.1.6.2 e propriedade 4.1.6.2.c]. Todavia, como $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$, então $\neg A \notin \Gamma$, mas, $\neg A \in \Gamma$, logo $A^0 \in \Gamma$.

2.h Sejam $A \in \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$ e admitamos que $\neg A^0 \notin \Gamma$. Segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ [propriedade 1] e $\Gamma \cup \{\neg A^0\} \vdash_{DNC_1} A \& \neg A \& A^0$ [definição 2]. Portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A^0 \supset A \& \neg A \& A^0$ [teorema da dedução], mas como $A \in \Gamma$, $\neg A \in \Gamma$, então $A^0 \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], assim, $\Gamma \cup \{A^0\} \vdash_{DNC_1} A \& \neg A \& A^0$ [definição 2], dai, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \supset A \& \neg A \& A^0$ [teorema da dedução]. De $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A^0 \supset A \& \neg A \& A^0$, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \supset A \& \neg A \& A^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \vee \neg A^0$ [demonstrável em **DNC₁**], temos, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \neg A \& A^0$, portanto Γ é trivial [definição 13], todavia, Γ é não trivial maximal, logo $\neg A^0 \in \Gamma$.

2.i Sejam $A \notin \Gamma$ e $\neg A \notin \Gamma$, e suponhamos que $A^0 \notin \Gamma$. Assim, $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], mas, por hipótese, $A \notin \Gamma$ e $\neg A \notin \Gamma$, o que é uma contradição, logo $A^0 \in \Gamma$.

2.j Sejam ($A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$) e ($B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$), assim $A^0 \in \Gamma$ e $B^0 \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], daí , $(A^0 \& B^0) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b]. Pela propriedade 4.1.6.2 , $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \& B^0$, e como $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \& B^0 \supset (A \& B)^0$ [28] , então $\Gamma \vdash_{DNC_1} (A \& B)^0$[regra E - $\supset$], segue-se $(A \& B)^0 \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2]. Então $A \& B \notin \Gamma$ ou $\neg(A \& B) \notin \Gamma$[propriedade 4.1.6.2.g].

2.k Sejam ($A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$) e ($B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$), assim $A^0 \in \Gamma$ e $B^0 \in \Gamma$ [propriedade 2.g], daí , $(A^0 \& B^0) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b]. Pela propriedade 4.1.6.2, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0 \& B^0$,

[28] Bastando que em 4.1.4.1.13 (i) apliquemos PA.

e como $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0\&B^0\supset(A\vee B)^0$ [29], então $\Gamma \vdash_{DNC_1} (A\&B)^0$[regra E - $\supset$], segue-se $(A\vee B)^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2]. Então $A\vee B\notin\Gamma$ ou $\neg(A\vee B)\notin\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g].

2.l Sejam ($A\notin\Gamma$ ou $\neg A\notin\Gamma$) e ($B\notin\Gamma$ ou $\neg B\notin\Gamma$), assim $A^0\in\Gamma$ e $B^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], daí , $(A^0\&B^0)\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b]. Pela propriedade 4.1.6.2, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0\&B^0$, e como $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0\&B^0\supset(A\supset B)^0$ [30], então $\Gamma \vdash_{DNC_1} (A\&B)^0$[regra E - $\supset$], segue-se $(A\supset B)^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2]. Então $A\supset B\notin\Gamma$ ou $\neg(A\supset B)\notin\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g].

2.m Seja $(A^0\&B^0)\in\Gamma$, então $A^0\in\Gamma$ e $B^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b] , daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B^0$[propriedade 4.1.6.2]. Portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0\&B^0$ e como $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0\&B^0\supset(A\&B)^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} (A\&B)^0$ [regra E - $\supset$], segue-se $(A\&B)^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2].

2.n Seja $(\neg A\vee\neg B)\notin\Gamma$, então $\neg A\notin\Gamma$ e $\neg B\notin\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.c], assim, $\neg\neg A\in\Gamma$ e $\neg\neg B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], dai, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg B$ [propriedade 4.1.6.2]. Mas, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg A\supset A$ [4.1.4.1.11] e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\neg A\supset A$ [4.1.4.1.11], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [E - $\supset$], segue-se $A\in\Gamma$ e $B\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2], então $(A\&B)\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b]. Se $\neg A\notin\Gamma$, então $A\notin\Gamma$ ou $\neg A\notin\Gamma$, portanto $A^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], e se $\neg B\notin\Gamma$, então $B\notin\Gamma$ ou $\neg B\notin\Gamma$, portanto $B^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], dai, $(A\&B)^0\in\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.m]. Assim, $(A\&B)\notin\Gamma$ ou $\neg(A\&B)\notin\Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], mas, $(A\&B)\in\Gamma$, portanto $\neg(A\&B)\notin\Gamma$. ⊠

Propriedade 4.1.6.3. Todo conjunto de fórmulas não trivial está contido em um conjunto não trivial maximal. (ALVES, 1976, p.60) ⊠

Definição 14 Seja Γ um conjunto não trivial maximal e g: $\mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, para toda fórmula A, $A\in\Gamma$ see $g(A) = 1$.

Iremos demonstrar que

Propriedade 4.1.6.4. Todo conjunto não trivial maximal Γ tem modelo.

[29] Bastando para isso, que em 4.1.4.1.14 apliquemos PA.
[30] Bastando para isso, que em 4.1.4.1.15 apliquemos PA.

Para tanto demonstraremos que g satisfaz as condições (a) - (i) da definição 8.

Demonstração:

Assim, seja Γ um conjunto não trivial maximal, então

5.a Se $g(A) = 0$, então $g(\neg A) = 1$.

Seja $g(A) = 0$, então $A \notin \Gamma$[31] [definição 14]. Segue-se $\neg A \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], portanto $g(\neg A) = 1$ [definição 14].

5.b Se $g(\neg\neg A) = 1$, então $g(A) = 1$.

Seja $g(\neg\neg A) = 1$, então $\neg\neg A \in \Gamma$ [definição 14], segue-se $A \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.f], portanto $g(A) = 1$[definição 14].

5.c Se $g(B^0) = 1$ e $g(A \supset B) = 1$ e $g(A \supset \neg B) = 1$, então $g(A) = 0$.

Sejam $g(B^0) = 1$ e $g(A \supset B) = 1$ e $g(A \supset \neg B) = 1$. Segue-se $B^0 \in \Gamma$, $(A \supset B) \in \Gamma$ e $(A \supset \neg B) \in \Gamma$ [definição 14], daí, $B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.h], e $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], e $A \notin \Gamma$ ou $\neg B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e]. Admitamos, por absurdo, que $g(A)=1$, então $A \in \Gamma$ [definição 14] , mas, como ($A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$) e ($A \notin \Gamma$ ou $\neg B \in \Gamma$), segue-se $B \in \Gamma$ e $\neg B \in \Gamma$, todavia, $B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$, portanto $\neg B \notin \Gamma$ e $\neg B \in \Gamma$, o que é uma contradição, logo $g(A) = 0$ [definição 14].

5.d $g(A \supset B) = 1$ see $g(A) = 0$ ou $g(B) = 1$.

Seja $g(A \supset B) = 1$, então $(A \supset B) \in \Gamma$ [definição 14], segue-se $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.d], portanto $g(A) = 0$ ou $g(B) = 1$ [definição 14].

Seja $g(A) = 0$ ou $g(B) = 1$, então $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ [definição 14], portanto $(A \supset B) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.d], logo $g(A \supset B) = 1$ [definição 14].

5.e $g(A \& B) = 1$ see $g(A) = 1$ e $g(B) = 1$.

Seja $g(A \& B) = 1$, então $(A \& B) \in \Gamma$ [definição 14], segue-se $A \in \Gamma$ e $B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b], portanto $g(A) = 1$ e $g(B) = 1$ [definição 14].

Admitamos que $g(A) = 1$ e $g(B) = 1$, então $A \in \Gamma$ e $B \in \Gamma$ [definição 14], portanto $(A \& B) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b], logo $g(A \& B) = 1$ [definição 14].

5.f $g(A \vee B) = 1$ see $g(A) = 1$ ou $g(B) = 1$.

---

[31] Veja a observação na nota de rodapé 20.

Seja $g(A \vee B) = 1$, então $(A \vee B) \in \Gamma$ [definição 14], segue-se $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.c], portanto $g(A) = 1$ ou $g(B) = 1$ [definição 14].

Seja $g(A) = 1$ ou $g(B) = 1$, então $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$ [definição 14], portanto $(A \vee B) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.c], logo $g(A \vee B) = 1$ [definição 14].

5.g Se $g(\neg(A \& B)) = 1$, então $g(\neg A) = 1$ ou $g(\neg B) = 1$.

Seja $g(\neg(A \& B)) = 1$, então $\neg(A \& B) \in \Gamma$ [definição 14]. Daí, $(\neg A \vee \neg B) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.n], ou seja, $\neg A \in \Gamma$ ou $\neg B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.c], daí $g(\neg A) = 1$ ou $g(\neg B) = 1$[definição 14].

5.h Se $g((A)^0) = 1$, $g((B)^0) = 1$ e $g(\neg(A \vee B)) = 1$, então $g(\neg A \& \neg B) = 1$.

Sejam $g((A)^0) = 1$ e $g((B)^0) = 1$ e $g(\neg(A \vee B)) = 1$, então $((A)^0) \in \Gamma$ e $((B)^0) \in \Gamma$ e $(\neg(A \vee B)) \in \Gamma$ [definição 14]. Segue-se $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], e $B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], então $(A \vee B)) \notin \Gamma$ ou $(\neg(A \vee B)) \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.k], logo, $(A \vee B)) \notin \Gamma$, pois, $(\neg(A \vee B)) \in \Gamma$. Desse resultado e pela propriedade 4.1.6.2.c temos, $A \notin \Gamma$ e $B \notin \Gamma$, portanto $\neg A \in \Gamma$ e $\neg B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], ou seja, $(\neg A \& \neg B) \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b], logo $g(\neg A \& \neg B) = 1$ [definição 14].

5.i Se $g((A)^0) = 1$, $g((B)^0) = 1$ e $g(\neg(A \supset B)) = 1$, então $g(A \& \neg B) = 1$.

Sejam $g((A)^0) = 1$ e $g((B)^0) = 1$ e $g(\neg(A \supset B)) = 1$, então $((A)^0) \in \Gamma$ e $((B)^0) \in \Gamma$ e $(\neg(A \supset B)) \in \Gamma$ [definição 14], segue-se $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], e $B \notin \Gamma$ ou $\neg B \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g], então $(A \supset B)) \notin \Gamma$ ou $(\neg(A \supset B)) \notin \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.l], logo, como $(\neg(A \supset B)) \in \Gamma$, vem $(A \supset B)) \notin \Gamma$. Pela propriedade 4.1.6.2.d, temos $A \in \Gamma$ e $B \notin \Gamma$, portanto $A \in \Gamma$ e $\neg B \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], ou seja, $(A \& \neg B) \in \Gamma$[propriedade 4.1.6.2.b], logo $g(A \& \neg B) = 1$ [definição 14].

Agora podemos demonstrar o *teorema da completude forte*, isto é,

$$se\, \Gamma \vDash_{DNC_l} A,\ então\, \Gamma \vdash_{DNC_l} A.$$

Demonstração:

Admitamos que $\Gamma \vDash_{DNC_l} A$, e de acordo com **4.1.6.3** podemos considerar Γ um conjunto não trivial maximal , então, pela definição 11, para toda valoração ϖ que é um modelo de Γ, $\varpi(A) = 1$. Suponhamos, por absurdo, $\Gamma \nvdash_{DNC_l} A$ então $A \notin \Gamma$ [propriedade

4.1.6.2] , daí, $A \notin \Gamma$ ou $\neg A \notin \Gamma$, portanto $A^0 \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.g]. E como $A \notin \Gamma$, temos $\neg A \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.e], assim $\neg A \in \Gamma$ e $A^0 \in \Gamma$, logo $\neg A \& A^0 \in \Gamma$ [propriedade 4.1.6.2.b], daí $\sim A \in \Gamma$ [definição 2]. Segue-se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim A$ [propriedade 4.1.6.2], portanto $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \& \neg A \supset B$[32], mas, $\Gamma \nvdash_{C_1} A \& \neg A \supset B$ (DA COSTA, 1974, p.499, teorema 2) e pela equivalência entre $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{DNC_1}$ (cf. 4.1.4), temos $\Gamma \nvdash_{DNC_1} A \& \neg A \supset B$, portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$. Assim, demonstramos que

Se $\Gamma \vDash_{DNC_1} A$, ***então*** $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$. ⊠

E pelos resultados obtidos em 4.1.6.1 e 4.1.6.2 , segue-se

$\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ ***see*** $\Gamma \vDash_{DNC_1} A$. ⊠

4.1.7 Equivalência entre o sistema DNC₁ e o sistema de *tableau* TDNC₁

Empregaremos para a decidibilidade do sistema $\mathbf{DNC_1}$ o método dos *tableaux* analíticos, na versão de SMULLYAN (1968), com as devidas adaptações ao escopo deste trabalho. Sucintamente esse método se caracteriza por um procedimento de busca sistemático e mecânico da refutação de uma fórmula, a partir da sua negação. A busca pode terminar com fórmulas da forma A, $\sim A$ ou A^0, A e $\neg A$, garantindo assim que a fórmula é dedutível no sistema. O conjunto de regras de expansão do *tableau* é similar as regras primitivas e teoremas do sistema $\mathbf{DNC_1}$. Essas regras são de três tipos: **A**, **B** ou **C**, sendo que na aplicação destas, as regras **C** devem sempre serem aplicadas antes que as regras **A**, e as regras **A** antes das regras **B**. Escreveremos abreviadamente $\mathbf{TDNC_1}$ para o *tableau* de $\mathbf{DNC_1}$

A linguagem $\mathcal{L}$, as regras de formação de fórmulas, as definições (exceto a definição 2, pois, em $\mathbf{TDNC_1}$ a negação forte é primitiva) e as convenções notacionais são as mesmas que as adotadas para $\mathbf{DNC_1}$ (ou $\mathbf{C_1}$). Usaremos os símbolos α e β como meta-esquemas, com ou sem índices, para indicar qualquer fórmula de $\mathcal{L}$. Os símbolos Γ, Σ e Δ, indicarão conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$. As letras A, B, C, D, sem negrito, indicam esquemas de fórmulas.

Antes de demonstrarmos a equivalência entre $\mathbf{DNC_1}$ e $\mathbf{TDNC_1}$ necessitaremos de

[32] Veja dedução desse resultado no anexo B3.

algumas definições e propriedades do *tableau*.

Definição 15 Configuração vertical (ou ramo)

Uma **configuração vertical** (ou **ramo**) é um seqüência finita de fórmulas.

Definição 16 Nó (ou item)

Um nó (ou item) de uma configuração é um elemento da configuração.

Definição 17 Tableau

Um **tableau** para um conjunto Δ de fórmulas é uma seqüência de configurações verticais (ou ramos) $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$, onde cada item de cada configuração é obtido do nó anterior por aplicação de uma regra de expansão , exceto o primeiro item de todas as configurações verticais.

O **critério de inicialização** do *tableau* é definido pela aplicação da negação forte '~' na fórmula a ser verificada, ou seja, para se construir um *tableau* para uma fórmula D, partimos da negação forte dessa fórmula, i.é, ~D, aplicando-se as regras dadas a seguir.

Definição 18 Regras de expansão do tableau para **DNC$_1$ (TDNC$_1$)**

As **regras** de **TDNC$_1$** são

1. Regra da forma **A**: $\dfrac{\begin{matrix}\alpha \\ \alpha_1\end{matrix}}{\alpha_2}$

α	α_1	α_2	por aplicação da regra
$A \& B$	A	B	E&
$\neg\sim A$	A	A	E$\neg\sim$
$\neg\neg A$	A	A	E$\neg\neg$
$\sim\sim A$	A	A	E$\sim\sim$
$\sim\neg A$	A	A	E$\sim\neg$
$\neg(A \& \neg A)$	A^0	A^0	Io
$\neg(A^0)$	A	$\neg A$	Eo$\neg$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$	R$\equiv$
$A^0, B^0, \neg(A \vee B)$ **[33]	$\neg A$	$\neg B$	DND$\neg$

**[33] Onde a vírgula indica que essa regra aplica-se (da mesma maneira) quando temos A^0, B^0 e $\neg(A \vee B)$, ou quando A^0, B^0 e $\neg(A \vee B)$ ocorrem em nós diferentes num mesmo ramo, não necessariamente nesta ordem. Idem para as outras regras.

$A^0, B^0, \neg(A \supset B)$	A	$\neg B$	DNI¬
$\sim(A \vee B)$	$\sim A$	$\sim B$	DND~
$\sim(A \supset B)$	A	$\sim B$	DNI~
$\sim(A^0)$	$\neg A$	A	Eo~

2. Regra da forma **B** $\dfrac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$

b	b_1	b_2	por aplicação da regra
$A \vee B$	A	B	R$\vee$
$A \supset B$	$\sim A$	B	R$\supset$
$\neg(A \& B)$	$\neg A$	$\neg B$	DM
$\sim(A \& B)$	$\sim A$	$\sim B$	DM~
$\sim(A \equiv B)$	$A, \sim B$	$B, \sim A$	E≡~
$A^0, B^0, \neg(A \equiv B)$	$A, \neg B$	$B, \neg A$	DNE¬

3. Regra da forma **C**

Qualquer dos esquemas A^n, B^n , ... ($n \geq 2$) podem ser introduzidos em qualquer nó do *tableau*.

Definição 19 Configuração vertical fechada

Uma **configuração vertical** é dita **fechada** see contém fórmulas da forma A e ~A, ou A^0, A e $\neg A$[34]; caso contrário é dita aberta.

Definição 20 Tableau fechado

Um **tableau é fechado** see todas as suas configurações verticais o forem, caso contrário é dito aberto.

Definição 21 Conseqüência analítica

A é **conseqüência analítica** de Γ see existe um *tableau* fechado para Γ, ~A[35]. (de-

[34] Portanto o **critério de fechamento** do ramo é quando neste ocorrer como itens A e ~A, ou A, $\neg A$ e A^0.
[35] Onde Γ, ~A é uma abreviação para $\Gamma \cup \{\sim A\}$.

notaremos isso por $\Gamma \vdash_{\mathrm{TDNC}_1} A$).

Definição 22 Fórmula fechada

Uma **fórmula** A é dita **fechada** see existe um *tableau* fechado para A.

Definição 23 Conjunto de fórmulas fechado

Um **conjunto de fórmulas** Γ é dito **fechado** see a conjunção das fórmulas de Γ é uma fórmula fechada; caso contrário é dito aberto.

Definição 24 Aplicação de uma regra

Por uma **aplicação de uma regra A, B** ou **C** numa fórmula α ou β entendemos:

Se $\alpha = A \& B$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = B$. [aplicação da regra E&]

Se $\alpha = \neg{\sim}A$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = A$. [aplicação da regra E$\neg\sim$]

Se $\alpha = \neg\neg A$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = A$. [aplicação da regra E$\neg\neg$]

Se $\alpha = {\sim}{\sim}A$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = A$. [aplicação da regra E$\sim\sim$]

Se $\alpha = {\sim}\neg A$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = A$. [aplicação da regra E$\sim\neg$]

Se $\alpha = \neg(A \& \neg A)$, então $\alpha_1 = A^0$ e $\alpha_2 = A^0$. [aplicação da regra Io]

Se $\alpha = \neg(A^0)$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = \neg A$. [aplicação da regra Eo$\neg$]

Se $\alpha = (A \equiv B)$, então $\alpha_1 = (A \supset B)$ e $\alpha_2 = (B \supset A)$. [aplicação da regra R$\equiv$]

Se $\alpha = A^0, B^0$ e $\neg(A \vee B)$, então $\alpha_1 = A^0, B^0, \neg A$ e $\alpha_2 = A^0, B^0, \neg B$.[aplicação de DND$\neg$]

Se $\alpha = A^0, B^0$ e $\neg(A \supset B)$, então $\alpha_1 = A^0, B^0, A$ e $\alpha_2 = A^0, B^0, \neg B$.[aplicação de DNI$\neg$]

Se $\alpha = {\sim}(A \vee B)$, então $\alpha_1 = {\sim}A$ e $\alpha_2 = {\sim}B$. [aplicação da regra DND$\sim$]

Se $\alpha = {\sim}(A \supset B)$, então $\alpha_1 = A$ e $\alpha_2 = {\sim}B$. [aplicação da regra DNI$\sim$]

Se $\alpha = {\sim}(A^0)$, então $\alpha_1 = \neg A$ e $\alpha_2 = A$. [aplicação da regra Eo$\sim$]

Se $\beta = A \vee B$, então $\beta_1 = A$ e $\beta_2 = B$. [aplicação da regra R$\vee$]

Se $\beta = A \supset B$, então $\beta_1 = {\sim}A$ e $\beta_2 = B$. [aplicação da regra R$\supset$]

Se $\beta = \neg(A \& B)$, então $\beta_1 = \neg A$ e $\beta_2 = \neg B$. [aplicação da regra DM]

Se $\beta = {\sim}(A \& B)$, então $\beta_1 = {\sim}A$ e $\beta_2 = {\sim}B$. [aplicação da regra DM$\sim$]

Se $\beta = {\sim}(A \equiv B)$, então $\beta_1 = A, {\sim}B$ e $\beta_2 = B, {\sim}A$. [aplicação da regra E$\equiv\sim$]

Se $\beta = A^0, B^0$ e $\neg(A \equiv B)$, então $\beta_1 = A, \neg B$ e $\beta_2 = B, \neg A$.[aplicação da regra DNE$\neg$]

Aplicamos a regra C da seguinte maneira: se no argumento a ser verificado, encontramos fórmulas regulares com n bolas como sobre-índices, então, podemos acrescentar como premissas as mesmas fórmulas regulares com $n+1$ bolas, tantas quanto forem essas fórmulas.

Definição 25 Grau de uma fórmula

O **grau de uma fórmula** A, g(A), é 0 se A é atômica; $g(\neg A) = g(A) + 1$; $grau(A*B) = g(A)+ g(B) + 1$ (onde * é &, $\vee$ ou $\supset$).

Propriedade 4.1.7.1 Se $\Sigma \vdash_{TDNC_1} A$ e $\Sigma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash_{TDNC_1} A$.

Demonstração:

Seja $\Sigma \vdash_{TDNC_1} A$ e $\Sigma \subseteq \Delta$, então existe um *tableau* fechado para $\Sigma \cup \{\sim A\}$ [definição 21], segue-se que existe um *tableau* fechado para $\Delta \cup \{\sim A\}$(ou $\Delta \cup \{A, \neg A, A^0\}$), bastando para isso acrescentar $(\Delta\text{-}\Sigma) \cup \{\sim A\}$, a cada nó das configurações da árvore de $\Sigma \cup \{\sim A\}$.⊠

Propriedade 4.1.7.2 $\Gamma \vdash_{TDNC_1} A$ see existe $\Sigma \subseteq \Gamma$, com Σ finito e $\Sigma \vdash_{TDNC_1} A$.

Demonstração:

i) Seja $\Gamma \vdash_{TDNC_1} A$, então existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\sim A\}$[definição 21], segue-se que todos os seus ramos são fechados[definição 20], e portanto finitos, dessa maneira, basta escolhermos somente as fórmulas em que foram aplicadas as regras de expansão para obtermos o conjunto finito de fórmulas Σ, com $\Sigma \subseteq \Gamma$ e $\Gamma \vdash_{TDNC_1} A$.

ii) Seja $\Sigma \subseteq \Gamma$, com Σ finito e $\Sigma \vdash_{TDNC_1} A$, então existe um *tableau* fechado para $\Sigma \cup \{\sim A\}$[definição 21], segue-se que existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\sim A\}$, bastando para isso acrescentar $(\Gamma\text{-}\Sigma) \cup \{\sim A\}$, a cada nó de cada ramo da árvore de $\Sigma \vdash_{TDNC_1} A$. ⊠

Precisamos demonstrar uma propriedade da relação $\vdash_{TDNC_1}$ para que possamos introduzir a Regra do Corte no sistema de *tableau*. Essa propriedade é uma versão do teorema de Eliminação do Corte de Gentzen , a partir da qual poderemos demonstrar a equivalência entre $\mathbf{DNC_1}$ e $\mathbf{TDNC_1}$.

Propriedade 4.1.7.3 Se existem tableaux fechados para $\Gamma\cup\{\alpha\}$ *e* $\Gamma\cup\{\neg\alpha, \alpha^0\}$ *ou* $\Gamma\cup\{\alpha\}$ *e* $\Gamma\cup\{\sim\alpha\}$, então *existe um tableau fechado para* Γ. [Regra do Corte][36]

Demonstração:

Demonstraremos por *indução na soma dos graus das fórmulas* que, i) se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\alpha\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\alpha, \alpha^0\}$, ou $\Gamma\cup\{\alpha\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\alpha\}$ então existe um *tableau* fechado para Γ.

1) α é um esquema atômico, isto é, α é da forma A.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$, ou $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$, então

1.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$, então

1° caso: $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$ são fechados com $A, \sim A\in\Gamma$; ou

2° caso: $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$ são fechados, mas $A, \sim A\notin\Gamma$; ou

3° caso: $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$ são fechados, mas $A\in\Gamma$ e $\sim A\notin\Gamma$; ou

4° caso: $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\sim A\}$ são fechados, mas $A\notin\Gamma$ e $\sim A\in\Gamma$.

No 1° caso temos que $\Gamma\cup\{A\}\cup\{\sim A\} = \Gamma$, logo existe um *tableau* fechado para Γ [definição 20].

No 2° caso, se $\Gamma\cup\{A\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim A$, ou $\neg A$ e A^0.

Se $\Gamma\cup\{\sim A\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por A, ou $\sim\sim A$, ou $\neg\sim A$ e $(\sim A)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim A$, ou $\neg A$ e A^0 e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por A, ou $\sim\sim A$, ou $\neg\sim A$ e $(\sim A)^0$, temos[37]:

i) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado, temos que $\sim A$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado, a partir dele.

[36] Nesse teorema 'α' representará um meta-esquema. A recíproca dessa propriedade é imediata a partir de 4.1.7.1

[37] Obteremos, neste caso, o resultado procurado através de 6 sub-casos.

E de $\Gamma \cup \{\sim A\}$ fechado , temos que o esquema A é gerado pelas regras de expansão a partir de fórmulas de Γ , pois, como A em $\sim A$ é um esquema atômico não podemos de $\sim A$ gerar o esquema A a partir das regras de expansão.

Assim os esquemas A e $\sim A$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

ii) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado, temos que o esquema $\sim A$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema $\sim A$ é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\sim A\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim A$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, e de de $\sim\sim A$ geramos A[E$\sim\sim$], todavia, como o esquema A em $\sim A$ é atômico não podemos de $\sim A$ gerar os esquemas $\sim\sim A$ e A, a partir das regras de expansão.

Assim A e $\sim A$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

iii) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado, temos que o esquema $\sim A$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\sim A\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\sim A$ e $(\sim A)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg\sim A$ geramos A[E$\neg\sim$], todavia, como A em $\sim A$ é atômico não podemos de $\sim A$ gerar os esquemas $(\sim A)^0$, $\neg\sim A$ e A a partir das regras de expansão.

Assim A e $\sim A$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

iv) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\sim A\}$ fechado , temos que A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A em $\sim A$ é atômico não podemos gerar um esquema atômico A a partir das regras de expansão e de $\sim A$.

Assim A, $\neg$A e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg$A e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\sim A\}$ fechado , temos que o esquema $\sim\sim$A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de de $\sim\sim$A geramos A[E$\sim\sim$], todavia, como o esquema A em $\sim$A é atômico não podemos de $\sim$A gerar um esquema $\sim\sim$A e A a partir das regras de expansão.

Assim A e $\sim$A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg$A e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\sim A\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\sim$A e $(\sim A)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg\sim$A geramos A[E$\neg\sim$], todavia, como A em $\sim$A é atômico não podemos de $\sim$A gerar os esquemas $(\sim A)^0$, $\neg\sim$A e A a partir das regras de expansão.

Assim A, $\neg$A e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

De $\Gamma\cup\{A\}$, $\Gamma\cup\{\sim A\}$ fechados, A atômico e i-vi segue-se que A e $\sim$A já estão em Γ ou são gerados a partir de esquemas de Γ, logo é Γ é fechado.

No 3º caso, $\sim$A foi gerado pelas regras de expansão **A** ou **B** a partir de Γ, pois, como A é atômico, nenhuma esquema é gerado a partir dele, portanto, retornamos aos casos i-vi já estudados. Segue-se que A e $\sim$A já estão em Γ ou $\sim$A é gerado a partir de esquemas de Γ, logo é Γ é fechado.

No 4º caso, o esquema A foi gerado pelas regras de expansão **A** ou **B**, a partir de Γ, pois, como A em $\sim$A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir de $\sim$A pelas regras de expansão, portanto, retornamos aos casos já estudados anteriormente. Segue-se que A e ~A já estão em Γ ou A é gerado a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

1.2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$, analizaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{A\}$ e $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ são fechados, mas A, ¬A, $A^0 \notin \Gamma$.[38]

Se $\Gamma\cup\{A\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por ~A, ou ¬A e A^0.

Se $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por A, ou ~¬A, ou ¬¬A e $(\neg A)^0$, ou ~(A^0), ou $\neg(A^0)$ e $(A^0)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por ~A, ou ¬A e A^0 e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por A, ou ~¬A, ou ¬¬A e $(\neg A)^0$, ou ~(A^0), ou $\neg(A^0)$ e $(A^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado , temos que o esquema ~A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que o esquema A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A em ¬A, A^0 é atômico não podemos de ¬A, A^0 gerar, pelas regras de expansão, um esquema atômico A.

Assim A e ~A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

ii) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado , temos que o esquema ~A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que o esquema ~¬A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de ~¬A geramos A[E~¬], todavia, como A em ¬A, A^0 é atômico não podemos de ¬A, A^0 gerar, pelas regras de expansão, ~¬A e A.

Assim A e ~A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

iii) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado, temos que o esquema ~A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

[38] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que $\neg\neg A$ e $(\neg A)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg\neg A$ geramos A[E$\neg\neg$], todavia, como A em $\neg\neg A$, $(\neg A^0)$ é atômico não podemos de $\neg A$, A^0 gerar, a partir das regras de expansão, os esquemas $\neg\neg A$, A e $(\neg A)^0$.

Assim A e ~A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

iv) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado, temos que o esquema ~A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que ~$(A)^0$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de ~$(A)^0$ geramos A[Eo~, E&], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos gerar os esquemas ~(A^0) e A , a partir das regras de expansão e de $\neg A$, A^0.

Assim A e ~A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado , temos que o esquema ~A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que $\neg(A^0)$ e $(A^0)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg(A)^0$ geramos A[Eo$\neg$, E&], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos gerar $\neg(A^0)$, $(A^0)^0$ e A, a partir das regras de expansão e de $\neg A$, A^0 .

Assim A e ~A são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que o esquema A é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos de $\neg A$, A^0 gerar, pelas regras de expansão, um esquema atômico A.

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

vii) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que o esquema $\sim\neg A$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\sim\neg A$ geramos A[E$\sim\neg$], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos de $\neg A$, A^0 gerar, pelas regras de expansão, $\sim\neg A$ e A.

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

viii) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado dele.

E de $\Gamma \cup \{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que $\neg\neg A$ e $(\neg A)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg\neg A$ geramos A[E$\neg\neg$], todavia, como A em $\neg\neg A$, $(\neg A^0)$ é atômico não podemos de $\neg A$, A^0 gerar, a partir das regras de expansão, os esquemas $\neg\neg A$, A e $(\neg A)^0$.

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

ix) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que $\sim(A)^0$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, e de $\sim(A)^0$ geramos A e $\neg$A[Eo$\sim$], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos gerar os esquemas $\sim(A^0)$, A e $\neg A$, a partir das regras de expansão e de $\neg A$, A^0.

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

ix) De $\Gamma \cup \{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma \cup \{\neg A, A^0\}$ fechado, temos que $\sim(A)^0$ é gerado pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ, e de $\sim(A)^0$ geramos A e $\neg$A[Eo$\sim$], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos gerar os esquemas $\sim(A^0)$, A e $\neg A$, a partir das regras de expansão, de $\neg A$ e de A^0.

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

x) De $\Gamma\cup\{A\}$ fechado , temos que $\neg A$ e A^0 são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , pois, como A é atômico, nenhum esquema é gerado a partir dele.

E de $\Gamma\cup\{\neg A, A^0\}$ fechado , temos que $\neg(A^0)$ e $(A^0)^0$ são gerados pelas regras de expansão a partir de esquemas de Γ , e de $\neg(A)^0$ geramos A e $\neg A$ [Eo$\neg$], todavia, como A em $\neg A$, A^0 é atômico não podemos gerar $\neg(A^0)$, $(A^0)^0$, A e $\neg A$, a partir das regras de expansão e de $\neg A$, A^0

Assim A, $\neg A$ e A^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo Γ é fechado.

Portanto, de 1.1 e 1.2, Γ é fechado.

2) α é da forma $\sim$B.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\sim B\}$, ou $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\sim B, (\sim B)^0\}$. Então

2.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\sim B\}$, então existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{B\}$ [E$\sim\sim$], logo, sob hipótese de indução, Γ é fechado.

2.2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\sim B, (\sim B)^0\}$, então existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ [E$\neg\sim$], onde E$\neg\sim$ é a única regra que pode atuar sobre $\neg\sim$B.

Analisaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ são fechados, mas $\sim B, B, (\sim B)^0 \notin \Gamma$. [39]

Se $\Gamma\cup\{\sim B\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por B, ou $\sim\sim$B , ou $\neg\sim$B e $(\sim B)^0$.

Se $\Gamma\cup\{B , (\sim B)^0\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim$B, ou $\neg$B e B^0, ou $\sim(\sim B)^0$, ou $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$.

[39] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por B, ou $\sim\sim B$, ou $\neg\sim B$ e $(\sim B)^0$ e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim B$, ou $\neg B$ e B^0, ou $\sim(\sim B)^0$, ou $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema B poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim B$, poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$.

Assim, B e $\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado.

ii) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema B poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\sim B)^0$.

Assim, B e $\neg B$ e B^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado.

iii) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema B poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(\sim B)^0$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\sim(\sim B)^0$ geramos $\sim B$ e $\neg\sim B$[Eo~], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\sim B)^0$.

Assim, B e $\sim B$, $(\sim B)^0$ e $\neg\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

iv) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema B poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\neg(\sim B)^0$ geramos $\sim B$ e $\neg\sim B$[Eo~], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$.

Assim, B, $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$, $\sim B$ e $\neg\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$, mas, de $\sim\sim B$ geramos B [E~~], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$.

Assim, $\sim\sim B$ e B, $\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$, mas, de $\sim\sim B$ geramos B [E~~], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado temos, nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$.

Assim, $\sim\sim B$, B, $\neg B$ e B^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B, $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

vii) De $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$, mas, de $\sim\sim B$ geramos B [E~~], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim(\sim B)^0$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\sim(\sim B)^0$ geramos $\sim B$ e $\neg\sim B$ [Eo~], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B, $(\sim B)^0$.

Assim, $\sim\sim B$, B, $\sim(\sim B)^0$, B, $\sim B$ e $\neg\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim B$, mas, de $\sim\sim B$ geramos B [E$\sim\sim$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\neg(\sim B)^0$ geramos $\sim B$ e $\neg\sim B$ [Eo$\sim$], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B, $(\sim B)^0$.

Assim, $\sim\sim B$, B, $\neg(\sim B)^0$, $((\sim B)^0)^0$, $\sim B$ e $\neg\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\sim B$ e $(\sim B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim B$, mas, de $\neg\sim B$ geramos B [E$\neg\sim$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$.

Assim, $\neg\sim B$, $(\sim B)^0$, B, $\sim B$ são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

x) De $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\sim B$ e $(\sim B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim B$, mas, de $\neg\sim B$ geramos B [E$\neg\sim$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\sim B)^0$.

Assim, $\neg\sim B$, $(\sim B)^0$, B, $\neg B$ e B^0 são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B, $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

xi) De $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\sim B$ e $(\sim B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de ~B, mas, de ¬¬~B geramos B [E¬~], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de ~B.

E de $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos nenhum esquema $\sim(\sim B)^0$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\sim(\sim B)^0$ geramos ~B e B [Eo~, E¬~], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B, $(\sim B)^0$.

Assim, ¬~B, $(\sim B)^0$, $\sim(\sim B)^0$, ~B e B são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e ~B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

xii) De $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas ¬~B e $(\sim B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de ~B, mas, de ¬~B geramos B [E¬~], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de ~B.

E de $\Gamma\cup\{B, (\sim B)^0\}$ fechado, temos nenhum dos esquemas $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\sim B)^0$, mas, de $\neg(\sim B)^0$ geramos ~B e B [Eo~, E¬~], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B, $(\sim B)^0$.

Assim, ¬~B, $(\sim B)^0$, B, $\neg(\sim B)^0$ e $((\sim B)^0)^0$, ~B e B são gerados, pelas regras de expansão, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e ~B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

Portanto, de 2.1 e 2.2, Γ é fechado.

3) α é da forma ¬B.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\neg B\}$, ou $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\}$, então

3.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\neg B\}$, analisaremos os seguintes casos[40]:

1° caso: $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\neg B\}$ são fechados com $\neg B, \sim\neg B \in \Gamma$; ou

2° caso: $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim\neg B\}$ são fechados, mas $\neg B, \sim\neg B \notin \Gamma$; ou

No 1° caso, temos que $\Gamma\cup\{\neg B\}\cup\{\sim\neg B\}$ é fechado, e pela propriedade 4.1.7.1, po-

[40] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

demos acrescentar B^0 em Γ [41]. De $\Gamma \cup \{\neg B\} \cup \{{\sim}\neg B\}$ é fechado geramos $\Gamma \cup \{\neg B\} \cup \{B\}$ [E${\sim}\neg$], mas, como temos B^0 em Γ, sob indução, Γ é fechado.

No 2° caso, se $\Gamma \cup \{\neg B\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por ${\sim}\neg B$, ou $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, ou B e B^0.

Se $\Gamma \cup \{{\sim}\neg B\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\neg B$, ou ${\sim}{\sim}\neg B$, ou $\neg{\sim}\neg B$ e $({\sim}\neg B)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por ${\sim}\neg B$, ou $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, ou B e B^0, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\neg B$, ou ${\sim}{\sim}\neg B$, ou $\neg{\sim}\neg B$ e $({\sim}\neg B)^0$, temos:

i) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema ${\sim}\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de ${\sim}\neg B$ geramos B[E${\sim}\neg$]. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{{\sim}\neg B\}$ fechado, temos $\Gamma \cup \{B\}$ fechado [E${\sim}\neg$], todavia, que nenhum esquema $\neg B$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de ${\sim}\neg B$ e de B.

Assim, ${\sim}\neg B$, B e $\neg B$ são gerados, e pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar ${\sim}\neg B$ e $\neg B$, ou B e $\neg B$ gerados a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado [devido a B^0 em Γ].

ii) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema ${\sim}\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de ${\sim}\neg B$ geramos B[E${\sim}\neg$]. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{{\sim}\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema ${\sim}{\sim}\neg B$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de ${\sim}\neg B$, mas, de ${\sim}{\sim}\neg B$ geramos $\neg B$ [E${\sim}{\sim}$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de ${\sim}\neg B$.

Assim, ${\sim}\neg B$, B, ${\sim}{\sim}\neg B$ e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar ${\sim}\neg B$ e $\neg B$, ou B e $\neg B$ gerados a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado [devido a B^0 em Γ].

---

[41] Devemos lembrar ao leitor que ${\sim}\neg B$ não é gerado, a partir das regras de expansão **A**, **B** e **C**, de B^0. Daqui em diante toda introdução de esquemas em Γ será justificada da mesma maneira.

iii) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de $\sim\neg B$ geramos $B[E\sim\neg]$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\sim\neg B$ e $(\sim\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$, mas, de $\neg\sim\neg B$ geramos $\neg B$ $[E\neg\sim]$, o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, $\sim\neg B$, B, $\neg\sim\neg B$ e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar $\sim\neg B$ e $\neg B$, ou B e $\neg B$ gerados a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado [devido a B^0 em Γ].

iv) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$, mas, de $\neg\neg B$ geramos B $[E\neg\neg]$, o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\neg B$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\neg B$ poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, $\neg\neg B$, $(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ gerados, então sob indução, Γ é fechado[pois B^0 ocorre em Γ].

v) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$, mas, de $\neg\neg B$ geramos B $[E\neg\neg]$, o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\neg B$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado temos, que nenhum esquema $\sim\sim\neg B$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$, mas, de $\sim\sim\neg B$ geramos $\neg B$ $[E\sim\sim]$, o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, de $\neg\neg B$, $(\neg B)^0$, B, $\sim\sim\neg B$ e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ gerados. Então, sob indução, Γ é fechado[pois B^0 ocorre em Γ].

vi) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$, mas, de $\neg\neg B$ geramos B [E$\neg\neg$], o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\neg B$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado temos, nenhum dos esquemas $\neg\sim\neg B$ e $(\sim\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$, mas, de $\neg\sim\neg B$ geramos $\neg B$ [E$\neg\sim$], o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, $\neg\neg B$, $(\neg B)^0$, B, $\neg\sim\neg B$, $(\sim\neg B)^0$ e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ gerados. Então, sob indução, Γ é fechado[pois B^0 ocorre em Γ].

vii) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\neg B$ poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, B, B^0 e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Então, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\sim\neg B$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$, mas, de $\sim\sim\neg B$ geramos $\neg B$ [E$\sim\sim$], o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$.

Assim, de B, B^0 , $\sim\sim\neg B$ e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B, B^0, $\neg B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{\sim\neg B\}$ fechado temos, nenhum dos esquemas $\neg\sim\neg B$ e $(\sim\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim\neg B$, mas, de $\neg\sim\neg B$ geramos $\neg B$

[E$\neg\sim$], o qual não poderia ter sido gerado , a partir das regras de expansão, de $\sim\neg$B.

Assim, de B, B^0 , $\neg\sim\neg$B, $(\sim\neg B)^0$ e $\neg$B são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B, B^0 e $\neg$B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

3.2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\}$, analisaremos os seguintes casos[42]:

1° caso: $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\}$ são fechados com $\neg B, \neg\neg B, (\neg B)^0 \in \Gamma$; ou

2° caso: $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\}$ são fechados, mas $\neg B, \neg\neg B, (\neg B)^0 \notin \Gamma$; ou

No 1° caso temos que $\Gamma\cup\{\neg B\}\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\} = \Gamma$, logo $\Gamma\cup\{\neg B\}\cup\{B, (\neg B)^0\}=\Gamma$ [E$\neg\neg$]. De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg$B gerados a partir de esquemas de Γ, logo, sob indução, Γ é fechado [devido a B^0 em Γ].

No 2° caso, se $\Gamma\cup\{\neg B\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim\neg B$, ou $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, ou B e B^0.

Se $\Gamma\cup\{\neg\neg B, (\neg B)^0\}$ é fechado, então $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ é fechado[E$\neg\neg$]. Logo, existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim$B, ou $\neg$B e B^0, ou $\sim((\neg B)^0)$, ou $\neg((\neg B)^0)$ e $((\neg B)^0)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim\neg B$, ou $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, ou B e B^0 , e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim$B, ou $\neg$B e B^0, ou $\sim((\neg B)^0)$, ou $\neg((\neg B)^0)$ e $((\neg B)^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg$B, mas, de $\sim\neg B$ geramos B [E$\sim\neg$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg$B.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema $\sim$B poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\sim\neg B$, B, $\sim$B são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\sim$B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

---

[42] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

ii) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de $\sim\neg B$ geramos B [E$\sim\neg$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\sim\neg B$, B, $\neg B$ e B^0 são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

iii) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de $\sim\neg B$ geramos B [E$\sim\neg$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema $\sim((\neg B)^0)$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$, mas, de $\sim((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo$\sim$], os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B{Eo$\neg$, E$\neg\neg$], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\sim\neg B$, B, $\sim((\neg B)^0)$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas $\sim\neg B$ e $\neg B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado[vide 1° caso].

iv) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\sim\neg B$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg B$, mas, de $\sim\neg B$ geramos B [E$\sim\neg$], o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg((\neg B)^0)$ e $((\neg B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$ .De $\neg((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo$\neg$, os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B{Eo$\neg$, E$\neg\neg$], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\neg\neg B$, B, $\neg((\neg B)^0)$, $((\neg B)^0)^0$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas $\neg\neg B$ e $\neg B$ gerados, logo, sob indução, Γ é fechado[vide 1° caso].

v) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema ~B poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, B, B^0, ~B são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e ~B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, B, B^0, $\neg B$ e B^0 são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

vii) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $\neg B$.

E de $\Gamma\cup\{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema $\sim((\neg B)^0)$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$, mas, de $\sim((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo~], os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B{Eo$\neg$, E$\neg\neg$], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, B, B^0, $\sim((\neg B)^0)$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma\cup\{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas B e B^0 poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg((\neg B)^0)$ e $((\neg B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$ .De $\neg((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo¬, os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B{Eo¬, E¬¬], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, B, B^0, $\neg((\neg B)^0)$, $((\neg B)^0)^0$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de ter sido gerados. De $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ geramos B e $(\neg B)^0$[E¬¬], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema ~B poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, B, ~B são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e ~B gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

x) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de ter sido gerados.De $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ geramos B e $(\neg B)^0$ [E¬¬], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$.

E de $\Gamma \cup \{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg B$ e B^0 poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, B, $\neg B$ e B^0 são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ e B^0 gerados, logo, sob indução, Γ é fechado.

xi) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de ter sido gerados. De $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ geramos B e $(\neg B)^0$ [E¬¬] , os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de

$\neg B$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum esquema $\sim((\neg B)^0)$ poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$, mas, de $\sim((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo~], os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B[Eo¬, E¬¬], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$, B, $\sim((\neg B)^0)$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ. Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ gerados. Então, sob indução, Γ é fechado[pois B^0 ocorre em Γ].

xii) De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de ter sido gerados. De $\neg\neg B$ e $(\neg B)^0$ geramos B e $(\neg B)^0$ [E¬¬] , os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$. De $\Gamma \cup \{\neg B\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 em Γ.

E de $\Gamma \cup \{B, (\neg B)^0\}$ fechado temos, que nenhum dos esquemas $\neg((\neg B)^0)$ e $((\neg B)^0)^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. De $\neg((\neg B)^0)$ geramos $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ [Eo¬], os quais não poderiam ter sido gerados , a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$. A partir das regras de expansão e de $(\neg B)^0$ e $\neg(\neg B)^0$ geramos $\neg B$ e B{Eo¬, E¬¬], os quais não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão, de B e $(\neg B)^0$.

Assim, $\neg\neg B$, $(\neg B)^0$, B, $\neg((\neg B)^0)$, $((\neg B)^0)^0$, $(\neg B)^0$, $\neg(\neg B)^0$, B e $\neg B$ são gerados, a partir de esquemas de Γ.

Pela propriedade 4.1.7.2, podemos considerar apenas B e $\neg B$ gerados. Então, sob indução, Γ é fechado[pois B^0 ocorre em Γ].

Portanto, de 3.1 e 3.2, Γ é fechado.

4) α é da forma $B \vee C$.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma \cup \{(B \vee C)\}$ e $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$, ou $\Gamma \cup \{ (B \vee C)\}$ e $\Gamma \cup \{\neg(B \vee C), (B \vee C)^0\}$, então

4.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{(B\vee C)\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\vee C)\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\vee C)\}$ são fechados, mas $B\vee C$, $\sim(B\vee C)\notin\Gamma$[43].

Se $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\vee C)$, ou $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$.

Se $\Gamma\cup\{\sim(B\vee C)\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\vee C)$, ou $(B\vee C)$, ou $\neg(\sim(B\vee C))$ e $(\sim(B\vee C))^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\vee C)$, ou $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\vee C)$, ou $(B\vee C)$, ou $\neg(\sim(B\vee C))$ e $(\sim(B\vee C))^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Assim de $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fechados em ramos diferentes[R$\vee$], e como $\sim(B\vee C)$ ocorre em todos os ramos fechados, temos $\sim B$, $\sim C$ [DNC$\sim$] ocorrem em todos os ramos, mas, $\sim B$ e $\sim C$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B\vee C$, portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\sim B$, $\sim C$ ocorrem num ramo e $\Gamma\cup\{B\}$, $\sim B$, $\sim C$ ocorrem noutro ramo. Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$ fechou com $\sim B$, $\sim C$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fechou com $\sim B$, $\sim C$.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\vee C)\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\vee C)$. Assim de $\Gamma\cup\{\sim(B\vee C)\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{\sim B\}$é fechado e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ é fechado[DNC$\sim$] no mesmo ramo, mas, como $\sim\sim(B\vee C)$ ocorre em todos os ramos fechados, temos $B\vee C$[E$\sim\sim$], daí, B ocorre num ramo e C ocorre noutro ramo [R$\vee$], portanto $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$, B ocorrem num ramo, e $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$, C ocorrem noutro ramo. Portanto, $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechou com B e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ fechou com C.

Assim, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fechou com $\sim B$, $\sim C$, ou $\Gamma\cup\{\sim B\}$ fechou com B e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ fechou com C. Então $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, B, C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado

[43] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

a partir das regras de expansão e de $B \vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ fechado, temos que o esquema $(B \vee C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim(B \vee C)$. Assim, seguimos o procedimento feito em (i).

Assim, $\Gamma \cup \{B\}$ e $\Gamma \cup \{C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, ou $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechou com B e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fechou com C. Então $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$, $\Gamma \cup \{\sim B\}$ e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, B, C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

iii) De $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B \vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B \vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg(\sim(B \vee C))$ e $(\sim(B \vee C))^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim(B \vee C)$. De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ geramos $\Gamma \cup \{\sim B\}$, $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fechados [DND~] em todos os ramos, e dos esquemas $\neg(\sim(B \vee C))$ e $(\sim(B \vee C))^0$ geramos $B \vee C$ e $(\sim(B \vee C))^0$ [E¬~]. Seguimos idêntico procedimento realizado em (ii).

Assim, $\Gamma \cup \{B\}$ e $\Gamma \cup \{C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, ou $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechou com B e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fechou com C. Então $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$, $\Gamma \cup \{\sim B\}$ e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, B, C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

iv) De $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \vee C$. De $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. Assim de $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado seguem-se $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado e $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado em ramos diferentes[R∨], portanto, $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$ ocorrem no ramo $\Gamma \cup \{B\}$ e no ramo $\Gamma \cup \{C\}$, todavia, os esquemas $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\Gamma \cup \{B\}$ e de $\Gamma \cup \{C\}$. De $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado, $\neg(B \vee C)$, $(B \vee C)^0$, e devido a B^0 e C^0 em Γ, geramos $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado, $\neg B$, $\neg C$, $(B \vee C)^0$, com B^0 e C^0 em Γ [DND¬]. De $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado, $\neg(B \vee C)$, $(B \vee C)^0$, e devido a B^0 e C^0 em Γ geramos $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado, $\neg B$, $\neg C$, $(B \vee C)^0$, com B^0 e C^0 em Γ [DND¬]. Todavia, os esquemas $\neg B$, $\neg C$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B \vee C$, de $\Gamma \cup \{B\}$ e de $\Gamma \cup \{C\}$. De $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado, $\neg B$, $\neg C$, $(B \vee C)^0$, com B^0 e C^0 em Γ, e de $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado, $\neg B$, $\neg C$, $(B \vee C)^0$, com B^0 e C^0 em Γ, pela propriedade 4.1.7.2 , seguem-se $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado, $\neg B$, com B^0 em Γ (i.é, B^0 ocorrendo em todos os nós), e $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado, $\neg C$, com C^0 em Γ (i.é, C^0 ocorrendo em todos os nós). Portanto, Então, $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado por $\neg B$ e B^0, e $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado por $\neg C$, com C^0.

De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim(B \vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B \vee C)$. Mas de $\sim\sim(B \vee C)$ geramos $(B \vee C)$ [E~~]. Assim, seguimos idêntico procedimento realizado em ii.

Assim, $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado por $\neg B$ e B^0, e $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado por $\neg C$, com C^0, ou $\Gamma \cup \{\sim B\}$ fechou com B e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fechou com C. Então $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$, $\Gamma \cup \{\sim B\}$ e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ fecharam com $\neg B$ e B^0, $\neg C$ e C^0, B, C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ fechado, temos que o esquema $(B \vee C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\sim(B \vee C)$. Seguimos idêntico procedimento realizado em ii.

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em iv.

De $\Gamma \cup \{\sim(B \vee C)\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg(\sim(B \vee C))$ e $(\sim(B \vee C))^0$ poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\sim(B \vee C)$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iii).

Então, sob e sob indução, Γ é fechado.

4..2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ e $\Gamma \cup \{\neg(B \vee C), (B \vee C)^0\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma \cup \{B \vee C\}$ e $\Gamma \cup \{\neg(B \vee C), (B \vee C)^0\}$ são fechados, mas

$B\vee C$, $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0 \notin \Gamma$[44].

Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$, então

Se $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\vee C)$, ou $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$.

Se $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\neg(B\vee C)$, ou $B\vee C$, ou $\neg\neg(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$, ou $\sim(B\vee C)^0$, ou $\neg((B\vee C)^0)$ e $((B\vee C)^0)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\vee C)$, ou $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\neg(B\vee C)$, ou $\neg\neg(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$, ou $\sim(B\vee C)^0$, ou $\neg((B\vee C)^0)$ e $((B\vee C)^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Assim, seguimos idêntico procedimento realizado em (i) de 4.1.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\neg(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ , assim $\Gamma\cup\{\neg B, (B\vee C)^0\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C, (B\vee C)^0\}$ são fechados e ocorrem em todos os ramos[DND$\neg$]. De $\sim\neg(B\vee C)$ geramos $(B\vee C)$ [E$\sim\neg$] , o qual não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg B$, $\neg C$, $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$, B^0, C^0. De $(B\vee C)$ geramos B e C em ramos distintos [R$\vee$], que não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg B$, $\neg C$, $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$, B^0, C^0. Pela propriedade 4.1.7.2, $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados no mesmo ramo, com B^0 e C^0 em Γ . Então, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{\neg C\}$, B ocorrem num ramo, e $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{\neg C\}$, C ocorrem noutro ramo, com B^0 e C^0 em Γ. Portanto, Então, $\Gamma\cup\{B\}$ é fechado por $\neg B$ e B^0, e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado por $\neg C$, com C^0.

Assim, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fecharam com $\sim B$, $\sim C$, ou $\Gamma\cup\{B\}$ é fechado por $\neg B$ e B^0, e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado por $\neg C$, com C^0 . Então $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, fecharam com $\sim B$, $\sim C$, $\neg B$ e B^0, $\neg C$ e C^0, B, C.

[44] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Seguimos o procedimento de (i).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. Caímos em (i).

Então, sob indução, Γ é fechado.

iii) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$. De $\neg\neg(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$ geramos $(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$ [$E\neg\neg$] que não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$. Caímos em (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

iv) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)^0$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. Seguimos o procedimento de (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg((B\vee C)^0)$ e $((B\vee C)^0)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$. Seguimos o procedimento de (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv) de 4.1.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\neg\neg(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. Seguimos o procedimento de (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

vii) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $(B\vee C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B\vee C)$ e $(\neg(B\vee C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\neg(B\vee C)^0$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\neg(B\vee C)$, $(B\vee C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

Então, sob indução, Γ é fechado.

x) De $\Gamma\cup\{B\vee C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\vee C)$ e $(B\vee C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $B\vee C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\vee C), (B\vee C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg((B\vee C)^0)$ e $((B\vee C)^0)^0$

não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B \vee C)$ e $(B \vee C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (v).

Então, sob indução, Γ é fechado.

Portanto, de 4.1 e 4.2, Γ é fechado.

5) α é da forma B&C.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma \cup \{(B\&C)\}$ e $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$, ou $\Gamma \cup \{(B\&C)\}$ e $\Gamma \cup \{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$, então

5.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma \cup \{B\&C\}$ e $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma \cup \{B\&C\}$ e $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$ são fechados, mas $B\&C, \sim(B\&C) \notin \Gamma$[45].

Se $\Gamma \cup \{B\&C\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\&C)$, ou $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$.

Se $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\&C)$, ou $(B\&C)$, ou $\neg(\sim(B\&C))$ e $(\sim(B\&C))^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\&C)$, ou $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\&C)$, ou $(B\&C)$, ou $\neg(\sim(B\&C))$ e $(\sim(B\&C))^0$, temos:

i) De $\Gamma \cup \{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Assim de $\Gamma \cup \{B\&C\}$ fechado seguem-se $\Gamma \cup \{B\}$ e $\Gamma \cup \{C\}$ fechados em todos os ramos[E&]. De $\sim(B\&C)$ geramos $\sim B$, $\sim C$ em ramos distintos [DM~], dai, $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$, $\sim B$ ocorrem num ramo, e $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$, $\sim C$ ocorrem noutro ramo. Assim, $\Gamma \cup \{B\}$ é fechado por $\sim B$, e $\Gamma \cup \{C\}$ é fechado por $\sim C$.

De $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim((B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\&C)$. De $\sim\sim(B\&C)$ geramos B e C no mesmo ramo [E~~], mas, de $\Gamma \cup \{\sim(B\&C)\}$ fechado seguem-se $\Gamma \cup \{\sim B\}$é fechado e $\Gamma \cup \{\sim C\}$ é fechado[DM~] em ramos distintos, portanto, seguem-se $\Gamma \cup \{\sim B\}$, B, C num ramo e $\Gamma \cup \{\sim C\}$, B, C noutro. Assim, $\Gamma \cup \{\sim B\}$, $\Gamma \cup \{\sim C\}$ são fechados por B e C.

Portanto, $\Gamma \cup \{B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou $\Gamma \cup \{\sim B\}$, $\Gamma \cup \{C\}$ são fe-

[45] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

chados por B e ~C , ou $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$ são fechados por ~B e C, ou $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$ são fechados por ~B e C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema ~(B&C) não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de B&C. Seguimos o procedimento realizado em (i).

De $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que o esquema (B&C) não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de ~(B&C).Seguimos idêntico procedimento realizado em (i)

Portanto, caímos no caso anterior. Então, sob indução, Γ é fechado.

iii)De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema ~(B&C) não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas ¬(~(B&C)) e $(\sim(B\&C))^0$ poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de ~(B&C). Mas, de ¬(~(B&C)) e $(\sim(B\&C))^0$ geramos no mesmo ramo B, C e $(\sim(B\&C))^0$ [E¬~, E&]. Daí, seguimos idêntico procedimento realizado em i.

Portanto, caímos no caso (ii). Então, sob indução, Γ é fechado.

iv) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas ¬(B&C) e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Assim de $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, seguem-se $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fechados no mesmo ramo[E&], com ¬(B&C) e $(B\&C)^0$ ocorrendo no ramo $\Gamma\cup\{B\}$ e no ramo $\Gamma\cup\{C\}$, todavia, os esquemas ¬(B&C) e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\Gamma\cup\{B\}$ e de $\Gamma\cup\{C\}$. De $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ fechados no mesmo ramo, e dos esquemas ¬(B&C) e $(B\&C)^0$ geramos um ramo com $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, ¬B, $(B\&C)^0$ e outro ramo com $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, ¬C, $(B\&C)^0$ [DM] com B^0 e C^0 em Γ . Todavia, os esquemas ¬B, $(B\&C)^0$ e ¬C, $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\Gamma\cup\{B\}$, ou de $\Gamma\cup\{C\}$, ou de $\Gamma\cup\{B\&C\}$, ou de B^0 ou de C^0. Assim, $\Gamma\cup\{B\}$ é fechado por ¬B, B^0 , e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado por ¬C, C^0.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que o esquema ¬~(B&C) não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de ~(B&C). Mas, de ~~(B&C) geramos (B&C) [E~~]. Caímos no mesmo procedimento realizado em i.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por $\neg B$, B^0 , ou $\neg C$, C^0, ou ~B, ou ~C .

Então, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg$(B&C) e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em iv.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que o esquema (B&C) não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de ~(B&C). Seguimos idêntico procedimento realizado em ii.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por $\neg B$, B^0 , ou $\neg C$, C^0, ou ~B, ou ~C .

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg$(B&C) e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em iv.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ fechado, temos que nenhum dos esquemas $\neg$(~(B&C)) e $(\sim(B\&C))^0$ poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de ~(B&C). Seguimos idêntico procedimento realizado em iii.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por $\neg B$, B^0 , ou $\neg C$, C^0, ou ~B , ou ~C .

Então, sob indução, Γ é fechado.

5.2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{B\&C\}$ $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{B\&C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ são fechados, mas (B&C), $\neg$(B&C), $((B\&C)^0) \notin \Gamma$[46].

Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{(B\&C)\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$, então

Se $\Gamma\cup\{(B\&C)\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por ~(B&C), ou $\neg$(B&C) e $(B\&C)^0$.

Se $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por ~$\neg$(B&C), ou (B&C), ou $\neg\neg$(B&C) e $(\neg(B\&C))^0$, ou $\sim(B\&C)^0$, ou

[46] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

$\neg(B\&C)^0$ e $((B\&C)^0)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\&C)$, ou $\neg\neg(B\&C)$ e $(\neg(B\&C))^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\neg(B\&C)$, ou $\neg\neg(B\&C)$ e $(\neg(B\&C))^0$, ou $\sim(B\&C)^0$, ou $\neg(B\&C)^0$ e $((B\&C)^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Assim de $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados no mesmo ramo[E&], então, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, $\sim B$ ocorrem num ramo, e $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, $\sim C$ ocorrem noutro ramo, a partir de $\sim(B\&C)$ [DM~], portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por $\sim B$, e $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por $\sim C$.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\neg((B\&C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). De $\sim\neg(B\&C)$ geramos B&C[E~¬], daí, geramos B e C nos mesmos ramos [E&], os quais não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$. De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. Assim de B^0 e C^0 em Γ, temos que de $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{\neg B, (B\&C)^0\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C,(B\&C)^0\}$ fechados em ramos distintos[DND¬]. Pela propriedade 4.1.7.2, $\Gamma\cup\{\neg B\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados em ramos distintos, com B^0 e C^0 em Γ, então, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, B e B^0 ocorrem num ramo, e $\Gamma\cup\{\neg C\}$, C e C^0 ocorrem noutro ramo. Assim, $\Gamma\cup\{\neg B\}$ é fechado com B e B^0 , e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ é fechado por C e C^0.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i)

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema (B&C) não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Caímos em (i).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

iii)De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i)

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B\&C)$, $(\neg(B\&C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). De $\neg\neg(B\&C)$, $(\neg(B\&C))^0$ geramos $(B\&C)$ e $(\neg(B\&C))^0$ [E¬¬], daí, B, C e $(\neg(B\&C))^0$ [E&]. Caímos no caso (ii).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

iv)De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)^0$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). De $\sim(B\&C)^0$ geramos $(B\&C)$ e $\neg(B\&C)$ em todos os ramos[Eo~]. Caímos no caso (iii).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i)

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg((B\&C)^0)$ e $((B\&C)^0)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$. De $\neg(B\&C)^0$ e $((B\&C)^0)^0$ geramos B&C, $\neg(B\&C)$ e $((B\&C)^0)^0$ em todos os ramos[Eo¬] , daí, geramos B, C, $\neg(B\&C)$ e $\neg(B\&C)^0$ e $((B\&C)^0)$. Assim, caímos nos mesmos procedimentos do caso (ii) .

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Caímos no caso (iv) de **5.1**.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\neg((B\&C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Seguimos idêntico procedimento realizado em (i).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

vii) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em vi.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema (B&C) não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Seguimos idêntico procedimento realizado em ii.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em vi.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B\&C)$, $(\neg(B\&C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Seguimos idêntico procedimento realizado em iii.

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\&C)^0$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

x) De $\Gamma\cup\{B\&C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de B&C. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\&C), (B\&C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\&C)^0$ e $((B\&C)^0)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\&C)$ e $(B\&C)^0$). Seguimos idêntico procedimento realizado em (v).

Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\neg B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por $\sim B$ e $\sim C$, ou B, B^0 e $\sim C$, ou C, C^0 e $\sim B$, ou B, B^0 e C e C^0.

Então, sob indução, Γ é fechado.

Portanto, de 5.1 e 5.2, Γ é fechado.

6) α é da forma $B\supset C$.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{(B\supset C)\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$, ou $\Gamma\cup\{(B\supset C)\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$, então

6.1) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{B\&C\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\&C)\}$ são fechados, mas $B\&C, \sim(B\&C)\notin\Gamma$[47].

Se $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\supset C)$, ou $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$.

Se $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\supset C)$, ou $(B\supset C)$, ou $\neg(\sim(B\supset C))$ e $(\sim(B\supset C))^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\supset C)$, ou $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\sim(B\supset C)$, ou $(B\supset C)$,

[47] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

ou $\neg(\sim(B\supset C))$ e $(\sim(B\supset C))^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. De $\sim(B\supset C)$ geramos B e $\sim C$ ocorrendo no mesmo ramo [DNI~], os quais não poderiam ter sido gerados por $B\supset C$. De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{\sim B\}$ é fechado e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado[R$\supset$] em ramos distintos. Portanto, B e $\sim C$ ocorrem nos ramos de $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e de $\Gamma\cup\{C\}$. Daí, $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e $\Gamma\cup\{C\}$ são fechados por B e $\sim C$.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. De $\sim\sim(B\supset C)$ geramos $\sim B$ e C em ramos distintos[E~~, R$\supset$], os quais não poderiam ter sido gerados, pelas regras de expansão, de $\sim(B\supset C)$. De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado seguem-se $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ fechados [DNI~] num mesmo ramo. Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$, $\sim B$ ocorrem num ramo, e $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{\sim C\}$, C ocorrem noutro ramo. Daí, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ são fechados por $\sim B$ e C.

Portanto, $\Gamma\cup\{\sim B\}$, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ são fechados por B, $\sim C$ e $\sim B$, ou B, $\sim C$ e C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii)De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que o esquema $(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. Caímos no caso (i).

Portanto, sob indução, Γ é fechado.

iii)De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\neg(\sim(B\supset C))$ e $(\sim(B\supset C))^0$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. De $\neg(\sim(B\supset C))$ e $(\sim(B\supset C))^0$ geramos $\sim B$, $(\sim(B\supset C))^0$ num ramo, e C, $(\sim(B\supset C))^0$ noutro ramo[E$\neg\sim$, R$\supset$]. Pela propriedade 4.1.7.2, caímos no caso (ii). Portanto, sob indução, Γ é fechado.

iv) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. Pelo fato de B^0, C^0 ocorrerem em Γ, de $\neg(B\supset C)$, $(B\supset C)^0$, seguem-se B, $\neg C$, $(B\supset C)^0$ [DNI$\neg$]. De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado seguem-se em ramos diferentes $\Gamma\cup\{\sim B\}$ é fechado e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado[R$\supset$], com B, $\neg C$, $(B\supset C)^0$ ocorrendo no ramo $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e no ramo $\Gamma\cup\{C\}$, todavia, os esquemas B, $\neg C$, $(B\supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\Gamma\cup\{\sim B\}$ e de $\Gamma\cup\{C\}$. Assim geramos um ramo com $\Gamma\cup\{\sim B\}$, B e $\neg C$, B^0, e C^0, e outro ramo com $\Gamma\cup\{C\}$, B e $\neg C$, B^0, e C^0. Portanto, pela propriedade 4.1.7.2, temos $\Gamma\cup\{\sim B\}$ é fechado por B, e $\Gamma\cup\{C\}$ é fechado por $\neg C$ e C^0.

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\sim((B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i).

Portanto, $\Gamma\cup\{\sim B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$, $\Gamma\cup\{B\}$ e $\Gamma\cup\{\sim C\}$ são fechados por B, $\neg C$, B^0, C^0 e $\sim B$, ou por B, $\neg C$, B^0, C^0, e C.

Então, sob indução, Γ é fechado.

v) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que o esquema $(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. Seguimos idêntico procedimento realizado em ii.

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

De $\Gamma\cup\{\sim(B\supset C)\}$ fechado, temos que nenhum esquema $\neg(\sim(B\supset C))$ e $(\sim(B\supset C))^0$ poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $\sim(B\supset C)$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

6.2) Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$, analisaremos apenas o caso em que $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ são fechados, mas $(B\supset C), \neg(B\supset C), (B\supset C)^0 \notin \Gamma$ [48].

Se existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$, então

Se $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ é fechado, então existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\supset C)$, ou $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$.

Se $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ é fechado, então existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\neg(B\supset C)$, ou $(B\supset C)$, ou $\neg\neg(B\supset C)$ e $(\neg(B\supset C))^0$, ou $\sim(B\supset C)^0$, ou $\neg(B\supset C)^0$ $((B\supset C)^0)^0$.

Se existe um *tableau* T com todos os ramos fechados por $\sim(B\supset C)$, ou $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$, e existe um *tableau* T' com todos os ramos fechados por $\sim\neg(B\supset C)$, ou $(B\supset C)$, ou $\neg\neg(B\supset C)$ e $(\neg(B\supset C))^0$, ou $\sim(B\supset C)^0$, ou $\neg(B\supset C)^0$ $((B\supset C)^0)^0$, temos:

i) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Caímos no caso (i) de **6.1**.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\neg(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$, e pelo fato de B^0 e C^0 em Γ, geramos $\Gamma\cup\{B, (B\supset C)^0\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C, (B\supset C)^0\}$ [DNI$\neg$] em todos os ramos. De $\sim\neg(B\supset C)$ geramos $(B\supset C)$ [E$\sim\neg$], daí, geramos $\sim B$ e C em ramos diferentes[R$\supset$]. Todavia, nem $\sim B$ e nem C poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, $\Gamma\cup\{B, (B\supset C)^0\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C, (B\supset C)^0\}$. Portanto, $\Gamma\cup\{B, (B\supset C)^0\}$, $\sim B$, B^0, C^0 ocorrem num ramo e $\Gamma\cup\{\neg C, (B\supset C)^0\}$, C, B^0, C^0 ocorrem noutro ramo. Pela propriedade 4.1.7.2 temos um ramo com $\Gamma\cup\{B\}$, $\sim B$, e outro ramo com $\Gamma\cup\{\neg C\}$, C, e C^0 em Γ. Portanto, $\Gamma\cup\{B\}$ é fechado por $\sim B$, e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ é fechado por C, e C^0.

Portanto, $\Gamma\cup\{\sim B\}$, $\Gamma\cup\{B\}$, $\Gamma\cup\{C\}$ e $\Gamma\cup\{\neg C\}$ são fechados por B, $\sim C$, ou $\sim B$, ou C, C^0.

---

[48] Pois, os outros casos são analisados com os mesmos procedimentos e como sub-casos deste.

Então, sob indução, Γ é fechado.

ii)De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. Caímos no caso (i).

Então, sob indução, Γ é fechado.

iii) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B\supset C)$, $(\neg(B\supset C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. Caímos no caso (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

iv)De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim((B\supset C)^0)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. De $\sim((B\supset C)^0)$ geramos $(B\supset C)$, $\neg(B\supset C)$ [Eo~] no mesmo o ramo. Caímos no caso (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

v)De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B\supset C)$ não poderia ter sido gerado a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em i.

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg((B\supset C)^0)$, $((B\supset C)^0)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. De $\neg((B\supset C)^0)$, $((B\supset C)^0)^0$ geramos $(B\supset C)$, $\neg(B\supset C)$, $((B\supset C)^0)^0$ [Eo$\neg$] no mesmo o ramo. Assim, caímos no caso (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

vi) De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B\supset C$. De $\Gamma\cup\{B\supset C\}$ fechado e pela propriedade 4.1.7.1, podemos acrescentar B^0 e C^0 em Γ. Assim, caímos no caso (iv) de **6.1**.

De $\Gamma \cup \{\neg(B \supset C), (B \supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim\neg(B \supset C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (i).

Então, sob indução, Γ é fechado.

vii) De $\Gamma \cup \{B \supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma \cup \{\neg(B \supset C), (B \supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $(B \supset C)$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (ii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

viii) De $\Gamma \cup \{B \supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma \cup \{\neg(B \supset C), (B \supset C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg\neg(B \supset C)$, $(\neg(B \supset C))^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iii).

Então, sob indução, Γ é fechado.

ix) De $\Gamma \cup \{B \supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma \cup \{\neg(B \supset C), (B \supset C)^0\}$ fechado, temos que o esquema $\sim(B \supset C)^0$ não poderia ter sido gerado, a partir das regras de expansão, de $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (iv).

Então, sob indução, Γ é fechado.

x) De $\Gamma \cup \{B \supset C\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg(B \supset C)$ e $(B \supset C)^0$ não poderiam ter sido gerados a partir das regras de expansão e de $B \supset C$. Seguimos idêntico procedimento realizado em (vi).

De $\Gamma\cup\{\neg(B\supset C), (B\supset C)^0\}$ fechado, temos que os esquemas $\neg((B\supset C)^0)$, $((B\supset C)^0)^0$ não poderiam ter sido gerados, a partir das regras de expansão, de $\neg(B\supset C)$ e $(B\supset C)^0$. De $\neg((B\supset C)^0)$, $((B\supset C)^0)^0$ geramos $(B\supset C)$, $\neg(B\supset C)^0$, $((B\supset C)^0)^0$. Assim, caímos no (v).

Então, sob indução, Γ é fechado.

Portanto, de 6.1 e 6.2, Γ é fechado.

7) α é da forma B≡C.

Admitamos que existem *tableaux* fechados para $\Gamma\cup\{(B\equiv C)\}$ e $\Gamma\cup\{\sim(B\equiv C)\}$, ou $\Gamma\cup\{ (B\equiv C)\}$ e $\Gamma\cup\{\neg(B\equiv C), (B\equiv C)^0\}$, mas, como de B≡C geramos B⊃C e C⊃B[R≡], então caimos nos mesmos procedimentos do caso **6**. ⊠

Demonstraremos agora a equivalência entre os sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC_1}$ e de *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$.

4.1.7.1 Toda regra de dedução no sistema de dedução natural $\mathbf{DNC_1}$ é gerada pelas regras de expansão do sistema de tableau $\mathbf{TDNC_1}$.

Demonstração[49] da primeira parte da equivalência entre $\mathbf{DNC_1}$ e $\mathbf{TDNC_1}$, a saber,

Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$, então $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$.

Demonstraremos por indução sobre o comprimento da prova de D em $\mathbf{DNC_1}$.

Hipótese de indução. Suponhamos que, se D é demonstrável em $\mathbf{DNC_1}$, a partir de Γ , através de até *p* passos, então Γ, ~D é fechado em $\mathbf{TDNC_1}$.

Demonstraremos agora que, se D é demonstrável em $\mathbf{DNC_1}$ através de *p+1* passos, então Γ, ~D é fechado em $\mathbf{TDNC_1}$. Nesse caso, a demonstração de D em $\mathbf{DNC_1}$ é obtida a partir do p-ésimo passo, por aplicação de uma das regras de dedução:

4.1.7.1.1 $A, A\supset B \vdash_{TDNC_1} B$

1	A, A⊃B, ~B		definição 21
2	$(A, \sim A, \sim B)_1$	*[50]	1, R⊃

---

[49] Como o método de *tableau* usa a negação da conclusão de um argumento, seja ele com ou sem premissas, então dessa maneira temos um procedimento análogo a regra que permite a introdução de uma premissa provisória no sistema de dedução natural $\mathbf{DNC_1}$. Nesta demonstração '**D**' indica um meta-esquema.

[50] O sinal '*' indica que naquele passo o ramo foi fechado.

3 $(\sim A, B, \sim B)_2$ * 1, R$\supset$

4.1.7.1.2 Admitamos que, $\Gamma \vdash_{DNC_1} A \supset B$, a partir de Γ, $A \vdash_{DNC_1} B$, em até $p+1$ passos. Se $A \vdash_{TDNC_1} B$ demonstraremos que, por indução no comprimento da demonstração e no número de s de aplicações da regra I - $\supset$ na(s) s premissa(s) provisória(s), $\vdash_{TDNC_1} A \supset B$.

i) Base indutiva:

Admitamos $\Gamma \vdash_{DNC_1} A_1 \supset B$, a partir de Γ, $A_1 \vdash_{DNC_1} B$, em até $p+1$ passos, na qual um argumento foi demonstrado com uma única aplicação da regra I - $\supset$ na única premissa provisória A_1. Por hipótese de indução sobre o comprimento da demonstração, temos que, $A_1 \vdash_{TDNC_1} B$, daí, A_1, $\sim B$ é fechado [definição 21], logo, $\sim(A_1 \supset B)$ é fechado [definição 21], dessa maneira, $\vdash_{TDNC_1} A_1 \supset B$[definição 21].

ii) Hipótese indutiva (dupla):

Para s premissas provisórias , admitamos $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_{s-(t+1)} \vdash_{DNC_1} A_{s-t} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...)$, a partir de $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_s \vdash_{DNC_1} B$, em até $p+(s+t)$ passos, com $s+t$ aplicações da regra I - $\supset$, então $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+1)} \vdash_{TDNC_1} A_{s-t} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...)$, a partir de, $A_1, A_2, ..., A_s \vdash_{TDNC_1} B$.

Se, sob indução no comprimento da demonstração , $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_{s-(t+2)} \vdash_{DNC_1} A_{s-(t+1)} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...)$, a partir de $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_s \vdash_{DNC_1} B$ em até $p+s+t+1$ passos e $s+t+1$ aplicações (indução sobre o número de aplicações) da regra I - $\supset$, então, de $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+1)}, ..., A_s \vdash_{TDNC_1} B$, precisamos demonstrar que $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+3)} \vdash_{TDNC_1} A_{s-(t+2)} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...)$:

Se $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+1)}, ..., A_{s-1}, A_s \vdash_{TDNC_1} B$, temos, $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+1)}, ..., A_{s-1}, A_s, \sim B$ é fechado[definição 21], mas, sob hipótese indutiva, $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+2)}, \sim(A_{s-(t+1)} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...))$ é fechado, portanto, $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+3)} \vdash_{TDNC_1} (A_{s-(t+2)} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...))$ [definição 21],assim, concluímos que $A_1, A_2, ..., A_{s-(t+3)} \vdash_{TDNC_1} A_{s-(t+2)} \supset (...(A_{s-1} \supset (A_s \supset B))...)$

4.1.7.1.3 Seja $A \vdash_{DNC_1} A$[51], obtida pela regra R. Portanto, temos que demonstrar $A \vdash_{TDNC_1} A$, o qual é trivialmente verificado pela definição 21:

4.1.7.1.4 $A\&B \vdash_{TDNC_1} A$[52]

1	A&B , ~A		definição 21
2	A, ~A	*	1, E&

4.1.7.1.5 $A\&B \vdash_{TDNC_1} B$

1	A&B, ~B		definição 21
2	B, ~B	*	1, E&

4.1.7.1.6 $A, B \vdash_{TDNC_1} A\&B$

1	A, B, ~(A&B)		definição 21
2	$(A, B, \sim A)_1$	*	1, DM~
3	$(A, B, \sim B)_2$	*	1, DM~

4.1.7.1.7 $A, B \vdash_{TDNC_1} B\&A$

1	A, B, ~(B&A)		definição 21
2	$(A, B, \sim B)_1$	*	1, DM~
3	$(A, B, \sim A)_2$	*	1, DM~

4.1.7.1.8 $A \vdash_{TDNC_1} A \vee B$

1	A, ~(A∨B)		definição 21
2	A, ~A, ~B	*	1, DND~

4.1.7.1.9 $B \vdash_{TDNC_1} A \vee B$

1	B, ~(A∨B)		definição 21
2	B, ~A, ~B	*	1, DND~

[51] De **4.1.7.1.1** até **4.1.7.1.14** converteremos as regras de dedução nos respectivos esquemas de argumentos. Empregaremos parênteses com sub-índices para indicar os ramos gerados pelas regras de expansão. Usaremos números à direita para indicar os nós desses ramos com as respectivas justificativas, tal como fizemos para o sistema de dedução natural. Convencionamos que aplicaremos nas fórmulas, até não poderem ser mais aplicadas, as regras de expansão **A** antes das regras **B**.

[52] A partir daqui usaremos procedimento idêntico ao empregado na regra de repetição.

4.1.7.1.10 $\neg\neg A \vdash_{TDNC_1} A$

1	$\neg\neg A, \sim A$		definição 21
2	$A, \sim A$	*	1, E$\neg\neg$

4.1.7.1.11 $A \vee B, (A \supset C), (B \supset C) \vdash_{TDNC_1} C$

1	$A \vee B, (A \supset C), (B \supset C), \sim C$		definição 21
2	$(A, (A \supset C), (B \supset C), \sim C)_1$		1, R$\vee$
3	$(B, (A \supset C), (B \supset C), \sim C)_2$		1, R$\vee$
4	$(A, \sim A, (B \supset C), \sim C)_1$	*	2, R$\supset$
5	$(A, C, (B \supset C), \sim C)_1$	*	2, R$\supset$
6	$(B, \sim A, (B \supset C), \sim C)_2$		3, R$\supset$
7	$(B, C, (B \supset C), \sim C)_2$	*	3, R$\supset$
8	$(B, \sim A, \sim B, \sim C)_1$	*	6, R$\supset$
9	$(B, \sim A, C, \sim C)_2$	*	6, R$\supset$

4.1.7.1.12 $A \supset C), (\neg A \supset C) \vdash_{TDNC_1} C$

1	$(A \supset C), (\neg A \supset C), \sim C$		definição 21
2	$(\sim A, (\neg A \supset C), \sim C)_1$		1, R$\supset$
3	$(C, (\neg A \supset C), \sim C)_2$	*	1, R$\supset$
4	$(\sim A, \sim\neg A, \sim C)_1$		2, R$\supset$
5	$(\sim A, A, \sim C)_1$	*	4, E$\sim\neg$

4.1.7.1.13 $A^0, B \supset A, B \supset \neg A \vdash_{TDNC_1} \neg B$[53]

1	$A^0, B \supset A, B \supset \neg A, \sim\neg B$		definição 21
2	$A^0, B \supset A, B \supset \neg A, B$		1, E$\sim\neg$
3	$(A^0, \sim B, B \supset \neg A, B)_1$	*	2, R$\supset$
4	$(A^0, A, B \supset \neg A, B)_2$		2, R$\supset$
5	$(A^0, A, \sim B, B)_2$	*	4, R$\supset$

[53] A demonstração 4.1.7.1.2, está pressuposta aqui.

6	$(A^0, A, \neg A, B)_2$	*	5, R$\supset$

4.1.7.1.14 $\neg(A\&B) \vdash_{TDNC_1} \neg A \vee \neg B$

1	$\neg(A\&B), \sim(\neg A \vee \neg B)$		definição 21
2	$\neg(A\&B), \sim\neg A, \sim\neg B$		1, DND$\sim$
3	$(\neg A, \sim\neg A, \sim\neg B)_1$	*	2, DM
4	$(\neg B, \sim\neg A, \sim\neg B)_2$	*	2, DM

4.1.7.1.15 $A^0 \& B^0, \neg(A \vee B) \vdash_{TDNC_1} \neg A \& \neg B$

1	$A^0 \& B^0, \neg(A \vee B), \sim(\neg A \& \neg B)$		definição 21
2	$A^0, B^0, \neg(A \vee B), \sim(\neg A \& \neg B)$		1, E&
3	$A^0, B^0, \neg A, \neg B, \sim(\neg A \& \neg B)$		2, DND$\neg$
4	$(A^0, B^0, \neg A, \neg B, \sim\neg A)_1$	*	3, DM$\sim$
5	$(A^0, B^0, \neg A, \neg B, \sim\neg B)_2$		3, DM$\sim$
6	$(A^0 \& B^0, \neg A, \neg B, B)_2$	*	5, E$\sim\neg$

4.1.7.1.16 $A^0 \& B^0, \neg(A \supset B) \vdash_{TDNC_1} (A \& \neg B)$

1	$A^0 \& B^0, \neg(A \supset B), \sim(A \& \neg B)$		definição 21
2	$A^0, B^0, \neg(A \supset B), \sim(A \& \neg B)$		1, E&
3	$A^0, B^0, A, \neg B, \sim A$	*	2, DNI$\neg$

Logo, pela propriedade 4.1.7.1, $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$. Assim,

Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$, então $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$. ⊠

4.1.7.2. Toda regra de expansão do sistema de tableau TDNC$_1$ é dedutível no sistema de dedução natural DNC$_1$.

Demonstraremos a segunda parte da equivalência entre **DNC$_1$** e **TDNC$_1$**, a saber,

Se $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$.

Demonstração:

Essa demonstração será realizada sobre a complexidade das fórmulas numa configuração vertical qualquer.

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$, segue-se que existe um *tableau* fechado para ~D e Γ.

Se

4.1.7.2.1. D = A.

Assim, Γ, ~A é fechado [definição 21], daí, A∈Γ, ou ~~A∈Γ, ou ¬~A, $(\sim A)^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.1.1 $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$

4.1.7.2.1.2 Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim\sim A$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [teorema];

4.1.7.2.1.3 Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\sim A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim(A)^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A$ [teorema].

4.1.7.2.2. D = ¬A.

Assim, Γ, ~¬A é fechado [definição 21], então, Γ, A é fechado [E~¬], portanto, ~A∈Γ, ou ¬A, $(A)^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.2.1. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim A$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A \& A^0$ [definição 2], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ [E-&];

4.1.7.2.2.2. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$.

4.1.7.2.3. D = ~A.

Assim, Γ, ~~A é fechado [definição 21], então, Γ, A é fechado [E~~], portanto, ~A∈Γ, ou ¬A, $A^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.3.1. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim A$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A \& A^0$ [definição 2], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ [E-&];

4.1.7.2.3.2. $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$.

4.1.7.2.4. D = A^0.

Assim, Γ, $\sim(A^0)$ é fechado [definição 21], daí, $A^0 \in \Gamma$, ou $\sim\sim(A^0) \in \Gamma$, ou $\neg\sim(A^0)$, $(\sim(A)^0)^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.4.1. $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$;

4.1.7.2.4.2. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim\sim(A^0)$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$ [teorema];

4.1.7.2.4.3. Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\sim(A^0)$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (\sim(A)^0)^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} A^0$ [teorema].

4.1.7.2.5. D = B∨C.

Assim, Γ, ~(B∨C) é fechado [definição 21], portanto, Γ, ~B, e Γ, ~C são fechados [

DND~]. Logo,

4.1.7.2.5.1. Se Γ, $\sim B$ é fechado , então $B \in \Gamma$, ou $\sim\sim B \in \Gamma$, ou $\neg\sim B$, $(\sim B)^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.5.1.1 $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$, portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \vee C$ [I - $\vee$];

4.1.7.2.5.1.2 Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim\sim B$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [teorema], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \vee C$ [I - $\vee$];

4.1.7.2.5.1.3 Se $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\sim B$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B^0$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} B$ [teorema], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \vee C$ [I - $\vee$].

4.1.7.2.5.2. Se Γ, $\sim C$ é fechado , então, $C \in \Gamma$, ou $\sim\sim C \in \Gamma$, ou $\neg\sim C$, $(\sim C)^0 \in \Gamma$, portanto, com idêntico procedimento que **4.1.7.2.5.1.1** segue-se, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \vee C$.

4.1.7.2.6. $D = B \supset C$.

Assim, Γ, $\sim(B \supset C)$ é fechado [definição 21], portanto, Γ, B é fechado e Γ, $\sim C$ é fechado [DND~]. Logo,

4.1.7.2.6.1. Se Γ, B é fechado , então, $\sim B \in \Gamma$, ou $\neg B$, $B^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.6.1.1. Se $\sim B \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B$, daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B \vee C$ [I - $\vee$], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \supset C$ [teorema];

4.1.7.2.6.1.2. Se $\neg B$, $B^0 \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg B$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} B^0$, daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg B \& B^0$ [I - &], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B$ [definição 2], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B \vee C$ [I - $\vee$], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \supset C$ [teorema].

4.1.7.2.6.2. Se Γ, $\sim C$ é fechado , então, $C \in \Gamma$, ou $\sim\sim C \in \Gamma$, ou $\neg\sim C$, $(\sim C)^0 \in \Gamma$. Logo,

4.1.7.2.6.2.1. Se $C \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} C$, daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B \vee C$ [I - $\vee$], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \supset C$ [teorema];

4.1.7.2.6.2.2. Se $\sim\sim C \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim\sim C$, daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} C$ [teorema], assim, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B \vee C$ [I - $\vee$], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \supset C$ [teorema];

4.1.7.2.6.2.3. Se $\neg\sim C$, $(\sim C)^0 \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg\sim C$ e $\Gamma \vdash_{DNC_1} (\sim C)^0$, daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} C$ [teorema], portanto, $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim B \vee C$ [I - $\vee$], daí, $\Gamma \vdash_{DNC_1} B \supset C$ [teorema].

4.1.7.2.7. $D = (B \equiv C)$.

Assim, Γ, $\sim(B \equiv C)$ é fechado [definição 21], portanto, Γ, B, $\sim C$ é fechado; e Γ, C e $\sim B$ é fechado [$E \equiv \sim$], portanto, caímos em procedimentos já realizados.

Logo, **se $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$, então $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$**. ⊠

De (i) e (ii) , segue-se

$\Gamma \vdash_{DNC_1} D$ **see** $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$. ⊠

Mas, por **4.1.4**, temos que $\Gamma \vdash_{C_1} D$ **see** $\Gamma \vdash_{DNC_1} D$, então

$\Gamma \vdash_{DNC_1} D$ **see** $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$ **see** $\Gamma \vdash_{C_1} D$. ⊠

4.1.7.3. Corretude do sistema de tableau $TDNC_1$.

Para demonstrarmos a corretude do sistema $\mathbf{TDNC_1}$ necessitamos da propriedade:

Propriedade 4.1.7.1.1 Se Γ é fechado, então não existe valoração ϖ, tal que para toda fórmula D de Γ, $\varpi(D) = 1$.

Demonstração:

Seja Γ fechado e admitamos que existe valoração ϖ, tal que para toda fórmula D de Γ, $\varpi(D) = 1$, segue-se que existe um *tableau* fechado para Γ[definição 23], logo $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$ [definição 21], assim todas as suas configurações verticais são fechadas [definição 20], então nestas foram gerados itens, pela aplicação das regras de expansão, nos quais ocorrem fórmulas da forma A, $\sim A$ ou A^0, A e $\neg A$[definição 19], mas, não existe valoração ϖ, tal que $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\sim A) = 1$ [propriedade 4.1.6.1.b], ou $\varpi(A^0) = 1$ e $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(\neg A) = 1$ [propriedade 4.1.6.1.a]. ⊠

Podemos agora demonstrar que

Se $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$, então $\Gamma \vDash_{TDNC_1} D$.

Demonstração:

Seja $\Gamma \vdash_{TDNC_1} D$, então existe um tableau fechado para $\Gamma \cup \{\sim D\}$ [definição 21], segue-se que não existe valoração ϖ, tal que, para toda $D_i \in \Gamma (1 \leq i \leq n)$, $\varpi(D_i) = 1$ e $\varpi(\sim D) = 1$

[propriedade 4.1.7.1.1], portanto, $\varpi(\sim D) = 0$, segue-se $\varpi(D) = 1$ [propriedade 4.1.6.1.b], logo $\Gamma \vDash_{TDNC_1} D$. ☒

4.1.7.4 Decidibilidade do sistema DNC₁

Demonstraremos a decidibilidade de **DNC₁**, a partir da decidibilidade de **TDNC₁**.

Demonstração da decidibilidade do sistema **TDNC₁**:

Todas as regras do *tableau* produzem subfórmulas de fórmulas anteriores, exceto a regra Io [$\neg(A\&\neg A)$ produz A^0 e A^0] que por funcionar como abreviadora não altera a fórmula, portanto, podemos decidir num número finito de passos se atingimos fórmulas atômicas A, ou A^0, ou $\sim A$, ou $\neg A$. No caso da existência de pelo menos um ramo aberto no *tableau*, concluímos que o *tableau* é aberto; caso contrário ele é fechado.

Os resultados das seções 4.1.6, 4.1.7 e do parágrafo anterior garantem que **DNC₁** é decidível. ☒

4.2 O método de DN aplicado em C_n ($1<n<\omega$).

O método de dedução natural aplicado aos sistemas axiomáticos de lógicas paraconsistentes C_n ($1<n<\omega$)., que abreviaremos por **DNCₙ**, construirá sistemas lógicos constituídos somente por regras de dedução(ou esquemas de dedução), dispensando os esquemas de postulados de C_n. Para cada sistema lógico **DNCₙ**, adotaremos um total de treze regras de dedução, e estas permitirão deduzir todas as fórmulas dedutíveis nos sistemas axiomáticos C_n correspondentes.

A linguagem $\mathcal{L}$, as regras de formação de fórmulas, as definições e as convenções notacionais são as mesmas que as adotadas para **DNC₁**.

Em **DNCₙ** substituímos a **definição 2** de **DNC₁** por:

Definição 2' $\sim_n A =_{df} \neg A\&A^{(n)}$, ($1<n<\omega$), onde *n* corresponde a cada **DNCₙ**. Onde para cada sistema **DNCₙ** a negação forte correspondente ao sistema tem todas as propriedades da negação clássica.

Nesses sistemas são impostas maiores restrições em algumas regras de dedução, como por exemplo, em **DNCₙ** a aplicação da *reductio ad absurdum* está condicionada a que já se tenha uma determinada conjunção de fórmulas regulares do tipo $A^{(n)}$, enquanto, em

DNC$_1$ basta A^0.

4.2.1 As regras de dedução dos DNC$_n$ ($1<n<\omega$).

As regras de dedução para esse sistema são:

4.2.1.1 Regra de transporte

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.1 para **DNC$_1$**.

4.2.1.2 Regras de introdução

Introdução da implicação (I-$\supset$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para **DNC$_1$**.

Introdução da conjunção (I-&)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para **DNC$_1$**.

Introdução da disjunção (I-$\vee$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para **DNC$_1$**.

Introdução restringida da negação [ou *Reductio ad Absurdum* restringido] (I - $\neg_n$ (rest))

1	A_1		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p	$B^{(n)}$		
:	:		
k		| [[C]]	premissa provisória
:		| :	
r		| B	(ou $\neg$B)
:		| :	
t		$\neg$B	(ou B)
v	$\neg$C		p, k- t, I - $\neg_n$(rest)

Distribuição da negação na conjunção (DM)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para **DNC$_1$**.

Distribuição restringida da negação na disjunção (DND_n(rest))

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
$\vdots$	$\vdots$	
n	A_n	premissa
$\vdots$	$\vdots$	
p	$A^{(n)}$ (ou $B^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
q	$B^{(n)}$ (ou $A^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
r	$\neg(A\vee B)$	
$\vdots$	$\vdots$	
s	$\neg A\&\neg B$	p, q, r, DND_n(rest)

Distribuição restringida da negação na implicação (DNI_n(rest))

1	A_1	premissa
2	A_2	premissa
$\vdots$	$\vdots$	
n	A_n	premissa
$\vdots$	$\vdots$	
p	$A^{(n)}$ (ou $B^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
q	$B^{(n)}$ (ou $A^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
r	$\neg(A\supset B)$	
$\vdots$	$\vdots$	
s	$A\&\neg B$	p, q, r, DNI_n(rest)

Dilema não-construtivo (DNC)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para $\mathbf{DNC_1}$.

4.2.3.3 Regras de eliminação

Eliminação da implicação (E - $\supset$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC_1}$.

Eliminação da conjunção (E - &)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC_1}$.

Eliminação da disjunção (E - $\vee$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC_1}$.

Eliminação da dupla negação (E - $\neg\neg$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC_1}$.

A demonstração da equivalência lógica de cada um dos sistemas $\mathbf{C_n}$ com o correspondente sistema $\mathbf{DNC_n}$ ($1<n<\omega$) segue passo a passo os procedimentos realizados para $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{DNC_1}$, ressalvando que todas ocorrências de A^0 e B^0 devem ser substituídas por $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$.

A demonstração da consistência dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$ segue passo a passo os procedimentos realizados para $\mathbf{DNC_1}$, tendo em vista que os sistemas $\mathbf{DNC_n}$ formam uma hierarquia (cf. **4.4**) (com a ressalva do parágrafo anterior).

As demonstrações de completude e corretude fortes dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$ seguem passo a passo os procedimentos realizados para $\mathbf{DNC_1}$(com a ressalva do parágrafo anterior), embora a valoração empregada para cada sistema passa a ser definida como se segue:

Definição 26 Interpretação paraconsistente para $\mathbf{DNC_n}$($1<n<\omega$)

Uma interpretação (ou valoração) paraconsistente das proposições de $\mathbf{DNC_n}$ é uma função ϖ: $\mathcal{F} \rightarrow \{0,1\}$, onde $\mathcal{F}$ denota o conjunto de fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$, definida indutivamente pelas seguintes cláusulas:

26.a Se $\varpi(A) = 0$, então $\varpi(\neg A) = 1$;

26.b Se $\varpi(\neg\neg A) = 1$, então $\varpi(A) = 1$;

26.c Se $\varpi(B^{(n)}) = 1$ e $\varpi(A \supset B) = 1$ e $\varpi(A \supset \neg B) = 1$, então $\varpi(A) = 0$;

26.d $\varpi(A \supset B) = 1$ see $\varpi(A) = 0$ ou $\varpi(B) = 1$;

26.e $\varpi(A \& B) = 1$ see $\varpi(A) = 1$ e $\varpi(B) = 1$;

26.f $\varpi(A \vee B) = 1$ see $\varpi(A) = 1$ ou $\varpi(B) = 1$;

26.g Se $\varpi(\neg(A \& B)) = 1$, então $\varpi(\neg A) = 1$ ou $\varpi(\neg B) = 1$;

26.h Se $\varpi((A)^{(n)}) = 1$ e $\varpi((B)^{(n)}) = 1$ e $\varpi(\neg(A \vee B)) = 1$, então $\varpi(\neg A \& \neg B) = 1$;

26.i Se $\varpi((A)^{(n)}) = 1$ e $\varpi((B)^{(n)}) = 1$ e $\varpi(\neg(A \supset B)) = 1$, então $\varpi(A \& \neg B) = 1$.

Para as demonstrações de equivalência lógica entre para cada sistema $\mathbf{DNC_n}$ e o correspondente sistema de *tableau* $\mathbf{TDNC_n}$, e da decidibilidade dos sistemas $\mathbf{DNC_n}$ empregamos as mesmas linguagem $\mathcal{L}$, regras de formação de fórmulas, definições e as convenções notacionais que às adotadas para o *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$. Ressalvamos que devemos substituir as ocorrências de A^0 e B^0 por $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$ (nos esquemas de axiomas, nas regras de dedução, nas regras de *tableau* e nas demonstrações). O *tableau* empregado para cada sistema é definido como se segue (o *tableau* para $\mathbf{DNC_n}$ será escrito abreviadamente $\mathbf{TDNC_n}$):

Definição 27 Regras de expansão para $\mathbf{TDNC_n}$ $(1<n<\omega)$

1. Regra da forma **A**: $\dfrac{\alpha}{\alpha_1;\ \alpha_2}$

α	α_1	α_2	por aplicação da regra
$A \& B$	A	B	E&
$\neg\sim_n A$	A	A	$E\neg\sim_n$
$\neg\neg A$	A	A	$E\neg\neg$
$\sim_n\sim_n A$	A	A	$E\sim_n\sim_n$
$\sim_n\neg A$	A	A	$E\sim_n\neg$
$\neg(A \& \neg A)^{(n-1)}$	$A^{(n)}$	$A^{(n)}$	Io_n
$\neg(A^{(n)})$	A	$\neg A$	$Eo_n\neg$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$	$R\equiv$
$A^{(n)}, B^{(n)}, \neg(A \vee B)$ *54	$\neg A$	$\neg B$	$DND_n\neg$

*54 Onde a vírgula indica que essa regra aplica-se (da mesma maneira) quando temos $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ e $\neg(A \vee B)$, ou quando $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ e $\neg(A \vee B)$ ocorrem em nós diferentes num mesmo ramo, não necessariamente nesta ordem. Idem para as outras regras.

$A^{(n)}, B^{(n)}, \neg(A\supset B)$	A	$\neg B$	$DNI_n\neg$
$\sim_n (A\vee B)$	$\sim_n A$	$\sim_n B$	$DND\sim_n$
$\sim_n (A\supset B)$	A	$\sim_n B$	$DNI\sim_n$
$\sim_n (A^o)$	$\neg A$	A	$Eo\sim_n$

2. Regra da forma **B**: $\dfrac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$

β	β_1	β_2	por aplicação da regra
$A\vee B$	A	B	$R\vee$
$A\supset B$	$\sim_n A$	B	$R\supset$
$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	DM
$\sim_n (A\&B)$	$\sim_n A$	$\sim_n B$	$DM\sim_n$
$\sim_n (A\equiv B)$	$A, \sim_n B$	$B, \sim_n A$	$E\equiv\sim_n$
$A^{(n)}, B^{(n)}, \neg(A\equiv B)$	$A, \neg B$	$B, \neg A$	$DNE\neg$

3. Regra da forma **C**:

Qualquer dos esquemas A^{n+1}, B^{n+1} , ... podem ser introduzidos em qualquer nó do *tableau* **TDNC$_n$**.

O **critério de inicialização** do *tableau* é definido pela aplicação da negação forte '$\sim_n$' na fórmula a ser verificada. O **critério de fechamento** do ramo é quando nele ocorrer A e $\sim_n A$, ou A, $\neg A$ e $A^{(n)}$.

A demonstração da equivalência lógica para cada sistema **DNC$_n$** e o correspondente sistema de *tableau* **TDNC$_n$** segue passo a passo os procedimentos realizados na demonstração da equivalência entre o sistema **DNC$_1$** e o sistema de *tableau* **TDNC$_1$**. Ressalvando que devemos substituir as ocorrências de A^0 e B^0 por $A^{(n)}$ e $B^{(n)}$.

A demonstração da decidibilidade do sistema **DNC$_n$**, segue passo a passo o procedimento realizado para o sistema **DNC$_1$**, com a ressalva do parágrafo anterior.

4.3 O método de DN aplicado em C_ω.

O método de dedução natural aplicado ao sistema axiomático de lógica paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$, que abreviaremos $\mathbf{DNC}_\omega$, construirá um sistema lógico constituído apenas por regras de dedução. Para esse sistema adotaremos um total de oito regras de dedução, e estas permitirão deduzir todas as fórmulas dedutíveis no sistema axiomático $\mathbf{C}_\omega$. Existem algumas diferenças entre $\mathbf{DNC}_\omega$ e os $\mathbf{DNC}_n$ ($1<n<\omega$) que merecem citação, a saber:

a) Como as fórmulas geradas a partir das regras de formação da linguagem $\mathcal{L}$ são de comprimento finito, então as regras de dedução de $\mathbf{DNC}_\omega$ nas quais deveriam ocorrer sobre-índices não são consideradas, pois não tem sentido na hierarquia $\mathbf{DNC}_n$ (cf. 4.4), construir fórmulas do tipo $A^{(\omega)}$ porque tais fórmulas corresponderiam a expressões de comprimento infinito.

b) Usando o mesmo argumento de (a) podemos dizer que a negação forte $\sim_n A =_{df} \neg A \& A^{(n)}$ é eliminada do sistema, portanto não existem teoremas com esse tipo de negação.

c) Nenhum teorema de $\mathbf{C}_\omega$ é da forma $\neg A$ (SETTE).

Antes de apresentarmos as regras desse sistema vamos citar dois trabalhos realizados sobre esse sistema. O primeiro, deve-se a RAGGIO (1978) que usa o método de dedução natural numa nova axiomatização que tem $A \vee \neg A$ como o seu único axioma (RAGGIO, 1978, p. 233-240). Esse sistema axiomático, por ele denominado $\mathbf{NC}_\omega$*, é equivalente a $\mathbf{C}_\omega$*(o asterisco faz referência ao sistema axiomático de lógica paraconsistente quantificacional sem igualdade), e como conseqüência os sistemas proposicionais correspondentes são equivalentes (os quais indicaremos por $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{C}_\omega$). É fácil verificar que $\mathbf{NC}_\omega$ é logicamente equivalente ao nosso sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$, para tanto, vejamos que as regras I - &, E - &, I - $\vee$, E - $\vee$, I - $\supset$, E - $\supset$ e E - $\neg\neg$, são comuns aos dois sistemas, todavia, a regra que denominamos **DNC** não ocorre em $\mathbf{NC}_\omega$. As demonstrações realizadas em 4.1.4.1.10 e 4.1.4.3.12 , provam a equivalência lógica entre os sistemas $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{DNC}_\omega$. O segundo, deve-se a PEREIRA & MOURA (1997) que elaboraram um sistema de dedução natural $\mathbf{NNC}_\omega$ (idêntico a nosso $\mathbf{DNC}_\omega$), tal que, $\mathbf{NNC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega$ são equivalentes (utilizando um procedimento de demonstração distinto do nosso).

Vejamos as regras desse sistema:

4.3.1 As regras de dedução de $\mathbf{DNC}_{\omega}$

As regras de dedução para esse sistema são:

4.3.1.1 Regra de transporte

Repetição(R)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.1 para $\mathbf{DNC}_1$.

4.3.1.2 Regras de introdução

Introdução da implicação (I-$\supset$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para $\mathbf{DNC}_1$.

Introdução da conjunção (I-&)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para $\mathbf{DNC}_1$.

Introdução da disjunção (I-$\vee$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para $\mathbf{DNC}_1$.

Dilema não-construtivo (DNC)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.2 para $\mathbf{DNC}_1$.

4.3.1.3 Regras de eliminação

Eliminação da implicação (E - $\supset$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC}_1$.

Eliminação da conjunção (E - &)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC}_1$.

Eliminação da disjunção (E - $\vee$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC}_1$.

Eliminação da dupla negação (E - $\neg\neg$)

Idêntica formulação da apresentada em 4.1.3.3 para $\mathbf{DNC}_1$.

A demonstração da equivalência lógica entre o sistema $\mathbf{C}_{\omega}$ e o sistema $\mathbf{DNC}_{\omega}$ segue passo a passo os procedimentos realizados para demonstrar a equivalência entre $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{DNC}_1$, ou seja, no caso do sistema $\mathbf{DNC}_{\omega}$ basta repetir o que ocorre em **4.1.4.1.1** até **4.1.4.11**, **4.1.4.2** e **4.1.4.3.1** até **4.1.4.3.12**.

A demonstração de consistência do sistema $\mathbf{DNC}_{\omega}$ tem idêntico procedimento do que aquele realizado para **DNC$_1$**, devido a hierarquia dos sistemas **DNC$_n$** (cf. **4.4**).

As demonstrações da completude e corretude fortes do sistema **DNC$_\omega$**, e um procedimento de decisão, via *tableau*, para o sistema **DNC$_\omega$** serão futuramente abordados. Entre os trabalhos já realizados no tocante a estas questões devemos citar os de FIDEL (1977) demonstrando, por métodos algébricos, a decidibilidade de **C$_n$** ($1\leq n\leq\omega$); de LOPARIC (1977) elaborando uma semântica bivalente e um método de decisão para **C$_\omega$**; de RAGGIO (1968) construindo cálculos de *seqüentes* logicamente equivalentes aos sistemas **C$_n$** ($1\leq n\leq\omega$), mas, em vista de dificuldades técnicas e pelo fato dos sistemas **C$_n$** não serem decidíveis por matrizes finitas (cf. ALVES, 1976, p.23-24), Raggio conjeturou a indecidibilidade destes sistemas.

4.4 A hierarquia dos sistemas DNC$_n$ ($0\leq n\leq\omega$)

4.4.1 Mostraremos que **DNC$_0$** é dedutivamente mais forte que **DNC$_1$**.

Para tanto deduziremos as regras de dedução de **DNC$_1$** a partir das regras de **DNC$_0$**

4.4.1.1 As regras de repetição, I - &, I - $\vee$, I - $\supset$, E - &, E - $\vee$, E - $\supset$, E - $\neg\neg$, DNC são comuns aos dois sistemas.

4.4.1.2 Demonstraremos que I - $\neg_1$ (rest), DM, DND (rest) e DNI(rest) são regras derivadas em **DNC$_0$**.

Em **DNC$_0$** deduzimos

$\vdash_{DNC_0} A^0$

1	$A \& \neg A$	premissa provisória
2	A	1, E - &
3	$\neg A$	2, E - &
4	$\neg(A \& \neg A)$	1-3, I - $\neg$
5	A^0	4, definição 2

e, também

$\vdash_{DNC_0} B^0$ (com procedimento de demonstração idêntico ao caso anterior).

Tendo em vista que, **C$_1$** não é trivial segue-se $\nvdash_{C_1} A^0$ e $\nvdash_{C_1} B^0$ (DA COSTA, 1974, p.499), e como **C$_1$** e **DNC$_1$** são equivalentes (cf. 4.1.4), então **DNC$_1$** não é trivial , portanto,

$\nvdash_{DNC_1} A^0$ e $\nvdash_{DNC_1} B^0$.

Além disso, as regras I - $\neg$(rest), DND(rest), DM e DNI(rest), cujos esquemas de argumentos são respectivamente:

$B^0, A \supset B, A \supset \neg B \vdash_{DNC_1} \neg A,$

$A^0, B^0, \neg(A \vee B) \vdash_{DNC_1} \neg A \& \neg B,$

$\neg(A \& B) \vdash_{DNC_1} \neg A \vee \neg B,$

$A^0, B^0, \neg(A \supset B) \vdash_{DNC_1} A \& \neg B,$

são dedutíveis em **DNC₀**, segue-se que todas as regras de dedução de **DNC₁** são demonstradas por **DNC₀**, portanto **DNC₀** é dedutivamente mais forte do que **DNC₁**.

Como exemplo , vejamos:

$B^0, A \supset B, A \supset \neg B \vdash_{DNC_0} \neg A$ I - $\neg$(rest)

1	B^0	premissa
2	$A \supset B$	premissa
3	$A \supset B$	premissa
4	$\mid$ A	premissa provisória
5	$\mid$ $A \supset B$	2, repetição
6	$\mid$ B	4, 5, E - $\supset$
7	$\mid$ $A \supset \neg B$	3, repetição
8	$\mid$ $\neg B$	4, 7, E - $\supset$
9	$\neg A$	4-8, I - $\neg$

4.4.2 Mostraremos para um k>1 arbitrário ($k \in \mathbf{N}$), **DNC_{k-1}** é dedutivamente mais forte que **DNC_k**, ou seja, as regras de dedução de **DNC_k** são regras derivadas em **DNC_{k-1}**,e que $\vdash_{DNC_{k-1}} A^k$ e $\vdash_{DNC_{k-1}} B^k$, mas $\vdash_{DNC_k} A^k$ e $\vdash_{DNC_k} B^k$.

Como hipótese indutiva, admitiremos o seguinte principio:

Princípio de construção da hierarquia não trivial dos DNC_n ($n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$)[55]:

a) $\mathbf{DNC_0}$ deduz A^1 & A^2 ... & A^k, para qualquer $k>0$ ($k \in \mathbf{N}$);

b) Para qualquer $k \geq 1$ ($k \in \mathbf{N}$), $\mathbf{DNC_k}$ não deduz A^k.

Assim,

$\vdash_{DNC_{k-1}} A^k$

1	$\neg(A^{00...0})$	premissa provisória	[0 k-vezes]
2	$\neg((A^{00...0})^0)$	1,	[0 k-vezes]
3	$\neg(\neg(A^{00...0} \,\&\, \neg (A^{00...0})))$	2, definição 1	[0 (k-1)-vezes]
4	$A^{00...0} \,\&\, \neg(A^{00...0})$	3, E - $\neg\neg$	[0 (k-1)-vezes]
5	$A^{00...0}$	4, E - &	[0 (k-1)-vezes]
6	$\neg(A^{00...0})$	4, E - &	[0 (k-1)-vezes]
7	$\neg((A^{00...0})^0)$	6,	[0 (k-1)-vezes]
8	$\neg(\neg(A^{00...0} \,\&\, \neg (A^{00...0})))$	7, definição 1	[0 (k-2)-vezes]
9	$A^{00...0} \,\&\, \neg(A^{00...0})$	8, E - $\neg\neg$	[0 (k-2)-vezes]
10	$A^{00...0}$	9, E - &	[0 (k-2)-vezes]
11	$\neg(A^{00...0})$	9, E - &	[0 (k-2)- vezes]
12	$(A^{00...0})$	1-11, E - $\neg$(rest)[56]	[0 k-vezes]

com idêntico procedimento deduzimos:

$\vdash_{DNC_{k-1}} B^k$ [0 k-vezes]

No caso das regras I - $\neg_{k-1}$ (rest), DND_{k-1} (rest) DM e DNI_{k-1}(rest), cujos argumentos correspondentes são, respectivamente:

$B^{(k-1)}$, $A \supset B$, $A \supset \neg B \vdash_{DNC_{k-1}} \neg A$,

$A^{(k-1)}$, $B^{(k-1)}$, $\neg(A \vee B) \vdash_{DNC_{k-1}} \neg A \,\&\, \neg B$,

$\neg(A \,\&\, B) \vdash_{DNC_{k-1}} \neg A \vee \neg B$,

$A^{(k-1)}$, $B^{(k-1)}$, $\neg(A \supset B) \vdash_{DNC_{k-1}} A \,\&\, \neg B$,

---

[55] Justificação no anexo D.

[56] Esta regra de dedução é auxiliar em $\mathbf{DNC_1}$ (cf. anexo C1) .

basta acrescentarmos A^k e B^k (pois, como vimos elas são teoremas em $\mathbf{DNC_{k-1}}$) entre as premissas dos argumentos acima, e aplicar a regra I - & em A^k e B^k e $A^{(k-1)}$ e $B^{(k-1)}$, respectivamente, para obtermos $\mathbf{DNC_k}$. Segue-se que a partir das regras de inferências de $\mathbf{DNC_{k-1}}$ deduzimos todas as regras de $\mathbf{DNC_k}$.

Como exemplo, vejamos a demonstração da regra I - $\neg_k$ (rest) em $\mathbf{DNC_{k-1}}$:

$B^{(k)}, A \supset B, A \supset \neg B \vdash_{DNC_{k-1}} \neg A$

1	$B^{(k)}$	premissa
2	$B^{(k-1)} \,\&\, B^k$	1, definição 5
3	$B^{(k-1)}$	2, E-&
4	$A \supset B$	premissa
5	$A \supset B$	premissa
6	$\mid$ A	premissa provisória
7	$\mid$ $A \supset B$	4, repetição
8	$\mid$ B	6, 7, E - $\supset$
9	$\mid$ $A \supset \neg B$	5, repetição
10	$\mid$ $\neg B$	6, 9, E - $\supset$
11	$\neg A$	3, 6-10, I - $\neg_{k-1}$(rest)

todavia, $\nvdash_{DNC_k} A^k$ e $\nvdash_{DNC_k} B^k$ (pela hipótese de indução) , pois, caso contrário $\mathbf{DNC_k}$ seria trivial. Portanto, $\mathbf{DNC_{k-1}}$ é dedutivamente mais forte do que $\mathbf{DNC_k}$. ⊠

4.4.3 Mostraremos para um $k \geq 0$ arbitrário, $\mathbf{DNC_k}$ é dedutivamente mais forte que $\mathbf{DNC_\omega}$, ou seja, as regras de dedução de $\mathbf{DNC_\omega}$ são regras derivadas em $\mathbf{DNC_k}$.

Ora, todas as regras de dedução de $\mathbf{DNC_\omega}$ são regras de $\mathbf{DNC_k}$. ⊠

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentaremos alguns resultados advindos do que expusemos anteriormente:

5.1 Elaboramos novos sistemas de dedução natural lineares logicamente equivalentes aos sistemas axiomáticos de lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, com algumas características importantes, a seguir discutidas. Vejamos:

Em ALVES (1976 , p. 40) foi explicitado um sistema de dedução natural, no qual ao invés da nossa regra I - $\neg$(rest) encontramos a regra denominada $\neg_3$ [57]. A formulação desse sistema é sustentada pela seguinte afirmação do professor da Costa:

> "Vê-se, sem grandes dificuldades que em C_n se pode
>
> substituir o postulado $\vdash B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$
>
> pelo esquema $B^{(n)}$ & B& $\neg B \supset K$ " (DA COSTA, 1993, p.17).

Observamos que aquele sistema tem em comum com $\mathbf{DNC}_1$ as regras de repetição, de introdução e eliminação da conjunção e da disjunção, a regra DNC (cf. ALVES, 1976, p. 40, a qual é denominada $\neg_1$[58]), as regras de eliminação e introdução da implicação e a eliminação da dupla negação (a qual é denominada $\neg_2$ (ALVES, 1976, p. 40)). Todavia, diferem nas outras regras, e é isso que analisaremos.

No tocante à regra I - $\neg$(rest) podemos afirmar que $\neg_3$ tem menos poder dedutivo pois, para que ela atinja o mesmo resultado da I - $\neg$(rest), devemos usar as regras de I - $\supset$, da regra E - $\supset$, e os teoremas $(A \supset B) \supset \neg A \vee B$ e $(A \vee A) \supset A$. Para exemplificar, vejamos a seguinte dedução:

$B^0, A \supset B, A \supset \neg B \vdash_{DNC_1} \neg A$

1	B^0	premissa
2	$A \supset B$	premissa
3	$A \supset \neg B$	premissa
4	$\mid A$	premissa provisória
5	$\mid A \supset B$	2, repetição

[57] A regra de dedução $\neg_3$ tem a seguinte forma: $\dfrac{A^0 \quad A \quad \neg A}{B}$

[58] A regra de dedução $\neg_1$ tem a mesma forma que DNC.

6	B	4, 5, E - $\supset$
7	$A\supset\neg B$	3, repetição
8	$\neg B$	4, 7, E - $\supset$
9	B^0	1, repetição
10	$\neg A$	6, 8, 9, Regra $\neg_3$
11	$A\supset\neg A$	4-10, I - $\supset$
12	$(A\supset\neg A)\supset(\neg A\vee\neg A)$	teorema
13	$\neg A\vee\neg A$	11, 12, E - $\supset$
14	$\neg A\vee\neg A\supset\neg A$	teorema
15	$\neg A$	13, 14, E - $\supset$

No passo 11 não é permitido, através da regra $\neg_3$, "descarregar" a fórmula que ocorre no passo 4, ou seja, ela sozinha não tem força dedutiva para passar de uma dedução qualquer a uma dedução à qual aquela esteja imediatamente subordinada (ela só permite deduzir uma fórmula *na mesma coluna*), sendo que, ela apela para diversas regras e teoremas. Todavia, a Regra de Introdução Restringida da Negação de **DNC**$_1$ permite "descarregar" a premissa provisória, e resolve essa limitação imposta ao sistema por $\neg_3$[59]. O mais adequado é considerá-la uma regra derivada (ou auxiliar).

Relativamente à regra o'_i [60], se a adotarmos como regra de dedução primitiva do sistema, então podemos verificar que na sua aplicação para a dedução de $\neg(A\&B) \vdash_{C_1} \neg A\vee\neg B$ (vide 4.1.4.3.13) são necessárias diversas demonstrações, o que a torna de baixo rendimento dedutivo em comparação com a regra DM. O mesmo problema acontece com as regras o''_i[61], o'''_i [62](4.1.4.3.14 e 4.1.4.3.15, respectivamente). Todavia, esse baixo rendi-

[59] No anexo C_1 formulamos uma regra de inferência que pode ser colocada em **DNC**$_1$ substituindo a I - $\neg$(rest) e que não reduz o poder dedutivo do sistema, para tanto, no referido anexo demonstramos a equivalência lógica entre as duas regras.

[60] o'_i : $\dfrac{A^0 \quad B^0}{(A\supset B)^0}$ (cf. ALVES, 1976, p. 39.).

[61] o''_i : $\dfrac{A^0 \quad B^0}{(A\&B)^0}$ (cf. ALVES, 1976, p. 39.).

[62] o'''_i $\dfrac{A^0 \quad B^0}{(A\vee B)^0}$ (cf. ALVES, 1976, p. 39.).

mento dedutivo não ocorre quando consideramos DM, DND_I(rest) e DNI_I (rest) como primitivas do sistema. Assim, usaremos as regras de dedução o'_I, o''_I e o'''_I como derivadas, e as empregamos como tal em $\mathbf{DNC_1}$.

Cabe observar que para demonstrar que estas regras são derivadas em $\mathbf{DNC_1}$, basta seguir os procedimentos de dedução usados para demonstrar os teoremas que estão em 4.1.4.1.13, 4.1.4.1.14 e a partir disso usar as fórmulas que ocorrem no primeiro passo como premissa (e não como premissa provisória), ou seja, demonstrar os argumentos correspondentes a essas regras: $A^0\&B^0 \vdash_{DNC_1} (A\supset B)^0$; $A^0\&B^0 \vdash_{DNC_1} (A\&B)^0$;

$A^0\&B^0 \vdash_{DNC_1} (A\vee B)^0$, respectivamente.

5.2 Um exemplo de aplicação de $\mathbf{DNC_1}$ numa teoria formal pode ser visto no anexo G.

5.3 Obtivemos sistemas de dedução natural linear dedutivamente equivalentes aos sistemas axiomáticos de lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}(0\leq n\leq\omega)$.

Em 4.1.4 demonstramos a equivalência lógica entre o sistema $\mathbf{C_1}$ e o sistema $\mathbf{DNC_1}$, garantindo dessa maneira a derivação do mesmo conjunto de teoremas para os dois sistemas. No anexo C1, demonstramos a equivalência entre as regras I - $\neg$(rest) e E - $\neg$(rest), e, portanto, o sistema que empregue E - $\neg$(rest) é logicamente equivalente a $\mathbf{C_1}$.

Portanto, a escolha em empregar um sistema que usa como regra primitiva I- $\neg$(rest) ou a regra E - $\neg$(rest) nos parece ser do estilo dedutivo, ou seja, se queremos realçar a não-contradição ou a negação fraca, respectivamente.

5.4 A demonstração da consistência (em 4.1.5), da corretude e da completude fortes (em 4.1.6) para os sistema de dedução natural $\mathbf{DNC_1}$, independentemente das demonstrações relativas ao sistema axiomático $\mathbf{C_1}$, mostra que $\mathbf{DNC_1}$ pode ser utilizado como mais um recurso para o estudo das lógicas paraconsistentes de DA COSTA.

5.5 Elaboramos um procedimento de decisão, via o método de *tableaux*, para o sistema $\mathbf{DNC_1}$. Demonstramos a corretude do *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$ e a sua equivalência com o sistema $\mathbf{DNC_1}$. A utilidade desse procedimento reside na sua possível conversão e aplicação aos sistemas de prova automática em Inteligência Artificial (AI).

Na elaboração do *tableau* em vez de usarmos as expressões

(a) $A^0 \& B^0 \supset (A\&B)^0$, (b) $A^0 \& B^0 \supset (A \vee B)^0$, (c) $A^0 \& B^0 \supset (A \supset B)^0$, empregamos: $\neg(A\&B) \supset \neg A \vee \neg B$, $A^0 \& B^0 \supset (\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B))$ e $A^0 \& B^0 \supset (\neg(A \supset B) \supset (A \& \neg B))$, que mostraram-se mais eficientes. O *tableau* **TDNC**$_1$ tem como característica o uso das negações clássica(forte) e fraca na sua elaboração.

5.6 Axiomatizando o sistema **DNC**$_1$ resulta um sistema **A** no qual os esquemas de postulados A1 a A11 são idênticos aos de **C**$_1$, todavia, diferem nos postulados restantes, ou seja, P12 $\vdash_{A_1} \neg(A\&B) \supset \neg A \vee \neg B$, P13$\vdash_{A_1} A^0 \& B^0 \supset (\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B))$,

P14 $\vdash_{A_1} A^0 \& B^0 \supset (\neg(A \supset B) \supset (A \& \neg B))$.

Outro sistema axiomático logicamente equivalente ao sistema **C**$_1$ é aquele no qual substituímos o A10 de **C**$_1$ por ' $\vdash_{L_1} (\neg A \supset B^0) \supset ((\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)))$', mantendo os postulados restantes e as regras. Enquanto o sistema **A** realça a não-contradição, colocando-a como antecedente da implicação, esse segundo sistema realça a negação fraca.

Outro sistema axiomático logicamente equivalente ao sistema **C**$_1$ é aquele no qual substituímos o A10 de **C**$_1$ por '$\vdash_{L_1} B^0 \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)))$', mantendo os postulados restantes e as regras.

Todos esses três sistemas são aptos para tratar as Teorias inconsistentes e não triviais, devido a serem logicamente equivalentes a **C**$_1$.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Elias Humberto. *Lógica e inconsistência: um estudo dos cálculos* C_n ($1\leq n\leq\omega$). São Paulo : USP, 1976. (Dissertação de Mestrado)

ANTOLOGIA de la Logica en America Latína. Madrid : Fundación Banco Exterior, 1988.

ANDERSON, John M., JOHNSTONE JR., Henry W. *Natural deduction: the logical basis of axiom systems*. Belmont : Wadsworth Publ., 1962.

BOBENRIETH, Andrés. *Inconsistencias. ¿ Por qué no ?: trazos filosóficos en la senda de la lógica paraconsistente*. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, 1995. (Dissertação de mestrado).

BOTTURA, Paolo. *Logiche paracoerenti*. Milano: Universitá degli studi di Milano, 1982. (Corso di laurea in filosofia).

BUCHSBAUM, Arthur, PEQUENO, Tarcísio. A reasoning method for a paraconsistent logic. *Studia Logica*, v.52, p. 281-289, 1993.

CARNIELLI, Walter Alexande. *Non-deterministic semantics for paraconsistent logics*. Campinas: CLE-IFCH-UNICAMP/ Group in Theoretical and Applied Logic, 1997. 14 p. (A ser publicado).

CARNIELLI, Walter Alexandre, MARQUES, Mamede Lima. Reasoning under inconsistent knowledge. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v.2, n.1, p.49-79, 1992.

CARNIELLI, Walter Alexandre, D'OTTAVIANO, Ítala M.L., MARQUES, Mamede Lima, SETTE, Antonio Mário A. *Método analítico e heurística automática, versão preliminar*. Campinas: CLE-UNICAMP/ Grupo de lógica teórica e aplicada, 1993. (A aparecer).

DA COSTA, Newton Carneiro Affonso. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.15, p.497-510, 1974.

________. *Sistemas formais inconsistentes*. Curitiba : Ed. da UFPR, 1993.

________. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. 2ª ed. São Paulo: Hucitec, 1994.

________. *Paraconsistent mathematics*. São Paulo : USP/Research Group of Logic and Foundations, 1996. 16 p. (A aparecer).

________. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

DA COSTA, Newton Carneiro Affonso e ALVES, Elias Humberto. A semantical analysis of the calculi C_n. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII, p.621-630, 1977.

D'OTTAVIANO, Itala Maria Loffredo . On the development of paraconsistent logic and da Costa'work. *The Journal of Non-Classical Logic,* v.7, n.1/2, p.89- 152, 1990.

________. *The intellectual development of Andrés Ragio*. In: TENTH BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC. (10, Campinas, 1995). *Proceedings*, Ed. Walter A. Carnielli, Luiz Carlos P.D. Pereira. Logics, sets and information: Campinas : Unicamp, p. 1-24, 1995.

D'OTTAVIANO, Itala Maria L. e FEITOSA, Hércules A. *Paraconsistent logic and translations*.1997. (A ser publicado)

FREGE, Gottlob . *Os fundamentos da aritmética*. Trad. Luís Henrique dos Santos. 3ª ed. São Paulo : Abril Cultural, 1983. (Original alemão).

FIDEL, M.M. The decidability of the calculi C_n. *Reports on mathematical logic*, 8, p.31-40, 1977.

FITCH, Frederic Brenton. *Symbolic logic: an introduction*. New York: Ronald Press, 1952.

GARRIDO, Manuel. *Lógica simbólica*. Madrid : Editorial Tecnos, 1986.

GENTZEN, Gerhard. Investigations into logical deduction (Untersuchungen über das logishe Schliessen). In: THE COLLETED PAPERS OF GERHARD GENTZEN. Ed. M.E. Szabo, Amsterdam: North-Holland Publishing, p.68-131, 1969.

GRANA, Nicola. *Logica paraconsistente: una introduzione*. Napoli: Loffredo Editore, 1983.

HACKSTAFF, L.H. *Systems of formal logic*. Dordrecht : D.Reidel Publ., 1966.

HILBERT, David e ACKERMANN, Wilhelm. *Elementos de lógica teórica*. Trad. da 6ª ed. alemã por Víctor Sánchez de Zavala. 2ª ed. Madrid: Tecnos, 1975. (Original alemão).

________. *Principles of mathematical logic.* Trad. Lewis M. Hammond, George G. Leckie e F. Steinhardt. New York: Chelsea, 1950. (Original alemão).

JAŚKOWSKI, Stanislav . On the rules of suppositions in formal logic. In: POLISH LOGIC 1920-1939. Ed. Storrs McCall. Oxford: The Claredon Press, p.232-258, 1967.

KANT, Immanuel . *Critica da razão pura.* Trad. Valerio Rohden e Udo Baldur Moosburger. 3ª ed. São Paulo: Nova Cultural, 1987. (Original alemão).

KLEENE, Stephen Cole . *Introduction to metamathematics.* Amsterdam : North Holland, 1958.

KOTAS, Jerzy, DA COSTA, Newton Carneiro Affonso. A new formulation of discussive logic. *Studia Logica*, v.38, n.4, p. 429-445, 1979.

LEBLANC, Hughes, WISDOM, William A. *Deductive logic.* Boston: Allyn and Bacon, 1972.

LOPARIC, A. Une étude sémantique de quelques calcus propositionnels. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 284 A, p.835-838, 1977.

MONTAGUE, Richard, KALISH, Donald . *Logic: techniques of formal reasoning.* Harcourt : Brace & World, 1964.

PEREIRA, L.C.P.D., MOURA, J.E.de A . *Some aspects of C_ω in natural deduction - version 1.* , 1997. (A aparecer)

PRAWITZ, Dag. *Natural deduction: a proof-theoretical study.* Stockholm: Almquist & Wicksell, 1965.

RAGGIO, Andrés R. *A proof-theoretic analysis of da Costa's C_ω* *.In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC (1, Campinas, 1977). *Proceedings*, Ed. Ayda Ignez Arruda, Newton Carneiro Affonso da Costa, Rolando Chuaqui. New York : Marcel Dekker, p. 233-240, 1978.

________. Propositional sequence-calculi for inconsistent systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.9, n.4, p.359-366, 1968.

SACRISTAN, Manuel. *Introducción a la logica y al analisis formal.* Barcelona : Editorial Ariel, 1976.

SETTE, Antônio Mário Antunes . On the propositional calculus P_1. *Mathematica*

Japonicae, v.18, n.3, p.173-180, 1973.

SETTE, Antônio Mário Antunes , CARNIELLI, Walter Alexandre. *Maximal intuitionistic logics*. Campinas : CLE-IFCH-UNICAMP/ Group for Pure and Applied Logic, 1994. 25 p. (A aparecer).

SMULLYAN, Raymond M. *First-order logic*. New York : Spring Verlag, 1968.

TROELSTRA, Anne Sjerp, DALEN, D. van . *Constructivism in mathematics: an introduction*. Amsterdam : Elsevier Science Publishers, v.1., 1988.

7 ANEXOS

ANEXO A

TEXTOS ORIGINAIS:

página 7 "The choice of presentation is a matter of taste and/or convenience. Proofs in natural deduction style in mathematical theories are often presented in linear form, since tree presentations become unwieldy for complicated arguments" (TROELSTRA e VAN DALE,1988,p.48).

página 10 "In 1926 Professor J. Lukasiewicz called attention to the fact that mathematicians in their proofs do not appeal to the theses of the theory of deduction, but make use of other methods of reasoning." (JAŚKOWSKI, 1967, p. 232).

página 10 "The chief means employed in their method is that of an arbitrary supposition" (JAŚKOWSKI, 1967, p. 232).

página 10 "Thus we have formulated all the rules of our system, wich has the peculiarity of requering no axioms" (JAŚKOWSKI, 1967, p.238).

página 10 "con frecuencia es muy dificultosa y requiere muchos tanteos la deducción de una determinada expresión de la cual sabemos, por ejemplo, que tiene validez universal" (HILBERT e ACKERMANN, 1975, p.36).

página 11 "que esté construido de modo que sea inmediatamente visible el proceso de deducción de todas las fórmulas universalmente válidas, y que, en general, partiendo de las reglas se sepa inmediatamente de toda forma proposicional si es deductible en el sistema o no." (HILBERT e ACKERMANN, 1975, p.36).

página 11 "The calculus contains no logical axioms, but only figures of inference which indicate which inferences can be drawn from given assumptions" (HILBERT e ACKERMANN, 1950, p.30).

página 11 "We wish to set up a formalism that reflects as accurately as possible the actual logical reasoning in-volved in mathematcal proofs." (GENTZEN, 1969, p.74).

página 11 "Natural deduction, however, does not, in general, start from basic logical propositions, rather from *assumptions* (cf.examples in §1) to which logical deductions are applied. By means of a later inferece the result is then again made independent of assumption" (GENTZEN, 1969, p.75).

página 165 "5.1 Russell set

Russell set is defined as follows: $R = \{x : x \notin x\}$

The first structure to be studied is $\mathfrak{R} = \langle V, R \rangle$, characterized by the axiom (ρ) $\exists R \wedge \forall x \exists P(x)$,

where V is the univers of $\mathfrak{R}$ and R is its sole "predicate"

Theorem 10 $\vdash R \in R \wedge R \notin R$

proof. Evidently, we have: $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. Hence, $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ and, by appropriate rules of $C_1^{=}$, $R \in R \wedge R \notin R$."

(DA COSTA, 1996, p.7).

ANEXO B

B1 Metateorema da dedução em $\mathbf{C}_n(0\leq n\leq\omega)$

Se $\Gamma, A \vdash_{C_n} B$ *então* $\Gamma \vdash_{C_n} A\supset B\ (0\leq n\leq \omega)$

Demonstraremos esse metateorema para todo sistema $\mathbf{C}_n$:

Admitamos $\Gamma, A \vdash_{C_n} B$, portanto existe uma dedução de B a partir de $\Gamma\cup\{A\}$. Seja $B_1, B_2, ..., B_k$ tal demonstração e $B_k = B$. Demonstraremos que $\Gamma \vdash_{C_n} A\supset B_i$, sob indução sobre i.

Base: i = 1, isto é, $B = B_1$.

B_1 pode ser um esquema de postulado de C_n, ou uma fórmula de Γ, ou A. Portanto,

Se B_1 é um esquema de postulado de C_n, temos:

1	$\vdash_{C_n} B_1$	premissa
2	$\vdash_{C_n} B_1\supset(A\supset B_1)$	A1, RS
3	$\vdash_{C_n} A\supset B_1$	1, 2, E - $\supset$

Se B_1 é um elemento de Γ, temos:

1	$\Gamma \vdash_{C_n} B_1$	premissa
2	$\vdash_{C_n} B_1\supset(A\supset B_1)$	A1, RS
3	$\Gamma \vdash_{C_n} B_1\supset(A\supset B_1)$	2, PA
4	$\Gamma \vdash_{C_n} A\supset B_1$	1, 3, E - $\supset$

Se B_1 é A, temos:

1	$\vdash_{C_n} (A\supset(A\supset A))\supset(((A\supset((A\supset A)\supset A))\supset(A\supset A))$	A2, RS
2	$\vdash_{C_n} (A\supset(A\supset A))$	A1, RS
3	$\vdash_{C_n} (A\supset((A\supset A)\supset A))\supset(A\supset A))$	1, 2, E - $\supset$
4	$\vdash_{C_n} (A\supset((A\supset A)\supset A)$	A1, RS
5	$\vdash_{C_n} (A\supset A)$	3, 4, E - $\supset$

Hipótese indutiva: suponhamos que $\Gamma \vdash_{C_n} A\supset B_m$ para qualquer m<i.

Demonstraremos agora que $\Gamma \vdash_{C_n} A \supset B_i$.

Nesse caso B_i pode ser: B_i é um esquema de um postulado de C_n, ou uma fórmula de Γ, ou A, ou pode ser obtida de um B_m e de $B_m \supset B_i$ (m<i), pela regra E - $\supset$.

Os três primeiros casos são obtidos tal como fizemos na base indutiva. Agora consideremos o último caso:

1	$\Gamma \vdash_{C_n} A \supset B_m$	premissa indutiva
2	$\Gamma \vdash_{C_n} A \supset (B_m \supset B_i)$	premissa indutiva
3	$\vdash_{C_n} (A \supset B_m) \supset (((A \supset (B_m \supset B_i)) \supset (A \supset B_i))$	A2, RS
4	$\Gamma \vdash_{C_n} (A \supset B_m) \supset (((A \supset (B_m \supset B_i)) \supset (A \supset B_i))$	3, PA
5	$\Gamma \vdash_{C_n} ((A \supset (B_m \supset B_i)) \supset (A \supset B_i)$	1, 5, E - $\supset$
6	$\Gamma \vdash_{C_n} A \supset B_i$	2, 5, E - $\supset$ ⊠

B2 Equivalência lógica entre o esquema de postulado A10 de $\mathbf{C_0}$ e a regra de introdução da negação de $\mathbf{DNC_0}$.

(a) De A10 deduzo em $\mathbf{C_0}$ a regra de introdução da negação:

A10 $\vdash_{C_0} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

1	$(A \supset B) \vdash_{C_0} (A \supset B)$	premissa(4.1.4.3.4 e RS)
2	$(A \supset B), (A \supset \neg B) \vdash_{C_0} (A \supset B)$	1, PA
3	$\vdash_{C_0} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$	A10
4	$(A \supset \neg B) \vdash_{C_0} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$	3, PA
5	$(A \supset B), (A \supset \neg B) \vdash_{C_0} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$	4, PA
6	$(A \supset B), (A \supset \neg B) \vdash_{C_0} ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$	2, 5, E - $\supset$
7	$(A \supset B) \vdash_{C_0} (A \supset B)$	premissa(4.1.4.3.4 e RS)
8	$(A \supset B), (A \supset \neg B) \vdash_{C_0} (A \supset B)$	7, PA
9	$(A \supset B), (A \supset \neg B) \vdash_{C_0} \neg A$	6, 8, E - $\supset$ ⊠

(b) Da regra de introdução da negação deduzo em $\mathbf{DNC_0}$ o postulado A10:

$(A\supset B), (A\supset\neg B) \vdash_{DNC_0} \neg A$ [introdução da negação].

1	$A\supset B$	premissa provisória
2	$A\supset\neg B$	premissa provisória
3	A	premissa provisória
4	$A\supset B$	1, repetição
5	B	3, 4, E - $\supset$
6	$A\supset\neg B$	2, repetição
7	$\neg B$	3, 6, E - $\supset$
8	$\neg A$	3-7, I - $\neg$
9	$(A\supset\neg B)\supset\neg A$	2-8, I - $\supset$
10	$(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$	1-9, I - $\supset$ ⊠

B3 Demonstração de $\Gamma \vdash A\&\neg A\supset B$, a partir de $\Gamma \vdash \sim A$ em $\mathbf{DNC_1}$.

1	$A\&\neg A$	premissa provisória
2	$\sim A$	de $\Gamma \vdash_{DNC_1} \sim A$
3	$\neg A\&A^0$	2, definição 2
4	A^0	3, E - &
5	$A^0\supset((\neg B\supset A)\supset((\neg B\supset\neg A)\supset\neg\neg B))$	4.1.4.1.12
6	$((\neg B\supset A)\supset((\neg B\supset\neg A)\supset\neg\neg B))$	4, 5, E - $\supset$
7	$A\supset (\neg B\supset A)$	4.1.4.1.2
8	A	1, E - &
9	$(\neg B\supset A)$	2, 8, E - $\supset$
10	$(\neg B\supset\neg A)\supset\neg\neg B$	6, 9, E – $\supset$
11	$\neg A\supset (\neg B\supset\neg A)$	4.1.4.1.2
12	$\neg A$	1, E - &
13	$(\neg B\supset\neg A)$	11, 12, E - $\supset$
14	$\neg\neg B$	10, 13, E - $\supset$

15 $\mid$ B	14, E - $\neg\neg$
16 $A\&\neg A\supset B$	1-15, I – $\supset$

Assim, de $\Gamma \vdash_{DNC_1} \neg A$, demonstramos $\Gamma \vdash_{DNC_1} A\&\neg A\supset B$.

B4 Demonstração de $A^0\&A\&\neg A\supset B$, em $\mathbf{C_1}$ em $\mathbf{DNC_1}$.

$\vdash_{C_1} A^0\&A\&\neg A\supset B$

1	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} A^0$	4.1.4.3.4 , PA
2	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} A$	4.1.4.3.4 , PA
3	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg A$	4.1.4.3.4 , PA
4	$\vdash_{C_1} A\supset (B\supset A)$	A1, RS
5	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} A\supset (\neg B\supset A)$	4, PA
6	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg B\supset A$	2, 5, E - $\supset$
7	$\vdash_{C_1} \neg A\supset (B\supset\neg A)$	A1, RS
8	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg A\supset (\neg B\supset\neg A)$	7, PA
9	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg B\supset\neg A$	3, 8, E - $\supset$
10	$\vdash_{C_1} A^0\supset ((\neg B\supset A) \supset((\neg B\supset\neg A) \supset\neg\neg B)))$	A11, RS
11	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} A^0\supset ((\neg B\supset A) \supset((\neg B\supset\neg A) \supset\neg\neg B)))$	10, PA
12	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} ((\neg B\supset A) \supset((\neg B\supset\neg A) \supset\neg\neg B))$	1, 11, E - $\supset$
13	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} (\neg B\supset\neg A) \supset\neg\neg B)$	6, 12, E - $\supset$
14	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg B$	9, 13, E - $\supset$
15	$\vdash_{C_1} \neg\neg B\supset B$	A10, RS
16	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} \neg\neg B\supset B$	15, PA
17	$A^0\&A\&\neg A \vdash_{C_1} B$	14, 16, E - $\supset$
18	$\vdash_{C_1} A^0\&A\&\neg A\supset B$	17, teorema da dedução

e, $\vdash_{DNC_1} A^0\&A\&\neg A\supset B$

1	$A^0\&A\&\neg A$	premissa
2	A^0	1, E - &
3	$A\&\neg A$	1, E - &
4	$\neg B$	premissa provisória
5	$A\&\neg A$	3, R
6	A	5, E - &4
7	$\neg A$	5, E - &
8	$\neg\neg B$	2, 4-7, I - $\neg$(rest)
9	B	8, E - $\neg\neg$
10	$A^0\&A\&\neg A\supset B$	1-9, I - $\supset$

ANEXO C

Dois sistemas de dedução natural logicamente equivalentes a $\mathbf{DNC_1}$.

C1 Sistema de dedução natural logicamente equivalente a $\mathbf{DNC_1}$.

Um sistema equivalente a $\mathbf{DNC_1}$ seria aquele em que substituo a I - $\neg$(rest) por:

Eliminação restringida da negação [E - $\neg$(rest)]

1	A_1		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p		$[[\neg C]]$ premissa provisória	
:		:	
q		B^0	
:		:	
r		B (ou $\neg B$)	
:		:	
s		$\neg B$ (ou B)	
t	C		p-s, E - $\neg$(rest)

demonstração:

$\vdash_{DNC_1} (\neg A\supset B^0)\supset((\neg A\supset B)\supset((\neg A\supset\neg B)\supset A)))$

1	$\neg A\supset B^0$	premissa provisória
2	$\neg A\supset B$	premissa provisória
3	$\neg A\supset\neg B$	premissa provisória
4	$A\vee\neg A$	teorema
5	A	premissa provisória
6	A	5, repetição
7	$\neg A$	premissa provisória
8	$\neg A\supset B^0$	1, repetição
9	B^0	7, 8, E - $\supset$
10	$\neg A$	premissa provisória
11	$\neg A\supset B$	2, repetição
12	B	10, 11, E - $\supset$
13	$\neg A\supset\neg B$	3, repetição
14	$\neg B$	10, 13, E - $\supset$
15	$\neg\neg A$	9, 10-14, I - $\neg$(rest)
16	A	15, E - $\neg\neg$
17	A	4, 5-6, 7-16, E - $\vee$
18	$(\neg A\supset\neg B)\supset A$	3-17, I - $\supset$
19	$((\neg A\supset B)\supset((\neg A\supset\neg B)\supset A)))$	2-18, I - $\supset$
20	$(\neg A\supset B^0)\supset((\neg A\supset B)\supset((\neg A\supset\neg B)\supset A)))$	1-19, I - $\supset$ ⊠

por outro lado, admitindo a outra regra E - $\neg$(rest) como primitiva, vem:

$\vdash_{DNC_1} B^0\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$

1	B^0	premissa provisória
2	$A\supset B$	premissa provisória
3	$A\supset\neg B$	premissa provisória
4	$\neg\neg A$	premissa provisória
5	A	4, E - $\neg\neg$

6	B^0	1, repetição
7	$A\supset B$	2, repetição
8	$A\supset\neg B$	3, repetição
9	B	5, 6, E - $\supset$
10	$\neg B$	5, 7, E - $\supset$
11	$\neg A$	4-10, E - $\neg$(rest)
12	$(A\supset\neg B)\supset\neg A$	3-11, I - $\supset$
13	$(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$	2-12, I - $\supset$
14	$B^0\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$	1-13, I - $\supset$

logo, as duas regras de inferência logicamente se equivalem. ☒

A regra E - $\neg$(rest) pode ser definida para **DNC$_n$** ($1\leq n<\omega$), bastando na formulação anterior trocar a ocorrência de B^0 por $B^{(n)}$.

C2 Outro sistema de dedução natural logicamente equivalente a **DNC$_1$**.

Outro sistema logicamente equivalente a **DNC$_1$** seria aquele em que substítuo a I - $\neg$(rest) por : Introdução restringida da negação[I_2 - $\neg$(rest)]

1	A_1		premissa
:	:		
n	A_n		premissa
:	:		
p		[[C]]	premissa provisória
:		:	
q		B^0	
:		:	
r		B (ou $\neg B$)	
:		:	
s		$\neg B$ (ou B)	
t	$\neg C$		p-s, I_2 - $\neg$(rest)

A demonstração de equivalência segue a rotina do sistema anterior.

A regra I_2 - $\neg$(rest) pode ser definida para $\mathbf{DNC_n}$ ($1 \leq n < \omega$), bastando na formulação anterior trocar a ocorrência de B^0 por $B^{(n)}$.

ANEXO D

Princípio de construção da hierarquia não trivial $\mathbf{DNC_n}$ ($n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$):

Iremos *justificar* cada uma das condições:

a) $\mathbf{DNC_0}$ deduz A^1 & A^2 ... & A^k, para qualquer $k>0 (k \in \mathbf{N})$.

A qual podemos facilmente verificar. Temos ainda que em $\mathbf{C_1}$ (ou $\mathbf{DNC_1}$) não se deduz A^1, (DA COSTA, 1993, p. 8-9).

b) Para qualquer $k>1 (k \in \mathbf{N})$, $\mathbf{DNC_k}$ não deduz A^k.

Esta condição se impõe, pois, no caso de que fosse permitido deduzir A^k, teríamos

1	A^m	premissa provisória (com m>k)
2	A^k	teorema, por hipótese
3	$A^m \supset A^k$	1-2, I - $\supset$

assim, $\vdash_{DNC_k} A^m \supset A^k$ .... (i)

todavia, $\vdash_{DNC_k} A^k$ teorema por hipótese

mas, como $\vdash_{DNC_k} A^m$ (m>k)

teríamos, $\vdash_{DNC_k} A^k \supset A^m$ (I - $\supset$).... (ii)

Segue-se, $\vdash_{DNC_k} A^m \equiv A^k$ por (i), (ii), e definição 3

o que trivializa os sistemas $\mathbf{C_n}$. ⊠

ANEXO E

Aplicações do *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$.

Para facilitar a apresentação e uso das regras do *tableau* $\mathbf{TDNC_1}$ iremos utilizar uma derivação linear, exceto na aplicação da regra da forma **B** na qual separaremos(bifurcaremos) as duas fórmulas resultantes gerando assim dois ramos. Primeiramente esgotaremos todas as aplicações das regras da forma **A** para depois aplicar as regras da forma **B**. Convencionamos que eliminaremos as repetições das mesmas fórmulas. Indicaremos os ramos que fecharem com um asterisco.

Vamos provar as seguintes fórmulas pelo método do *tableaux*:

a) $(A \vee \neg A)^0$.

1	$\sim((A \vee \neg A)^0)$		
2	$A \vee \neg A$		1, Eo~
3	$\neg(A \vee \neg A)$		1, Eo~

A árvore não fecha, portanto não é um teorema.

b) $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$.

1	$\sim(\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B))$		
2	$\neg(A \& B)$		1, DNI~
3	$\sim(\neg A \vee \neg B)$		1, DNI~
4	$\sim\neg A$		3, DND~
5	$\sim\neg B$		3, DND~
6	A		4, E~¬
7	B		5, ~¬
8	$(\neg A)_1$	*	2, DM¬
9	$(\neg B)_2$	*	2, DM¬

Como todos os ramos fecham, então a fórmula é um teorema.

c) $A^0 \& B^0 \supset (A \& B)^0$.

1	$\sim(A^0 \& B^0 \supset (A \& B)^0)$		
2	$A^0 \& B^0$		1, DNI~
3	$\sim(A \& B)^0$		1, DNI~
4	$\neg(A \& B)$		3, Eo~
5	$(A \& B)$		3, Eo~
6	A^0		2, E&
7	B^0		2, E&
8	A		5, E&
9	B		5, E&
10	$(\neg A)_1$	*	4, DM¬

11 $(\neg B)_2$ * 4, DM$\neg$

Como todos os ramos fecham, então a fórmula é um teorema.

d) $\neg(A\&\neg A)\supset A^0$.

1 $\sim(\neg(A\&\neg A)\supset A^0)$

2 $\neg(A\&\neg A)$ 1, DNI~

3 $\sim(A^0)$ 1, DNI~

4 A^0 * 2, Io

Como o único ramo fecha, então a fórmula é um teorema.

ANEXO F

Aplicação de $\mathbf{DNC_1}$ numa teoria formal.

O exemplo que demonstraremos foi extraído de recente trabalho do professor da Costa (DA COSTA, 1996), em que são desenvolvidos diversos sistemas de Teoria de Conjuntos **ZF** (**Z**ermelo-**F**raenkel) inconsistentes mas não triviais. No caso de $\mathbf{ZF_1}$ o conjunto de Russell não a trivializa. Vejamos como:

> "5.1 Conjunto de Russell
>
> O conjunto de Russell é definido como se segue:
>
> $R = \{x : x \notin x\}$. A primeira estrutura a ser estudada é
>
> $\Re = \langle V, R\rangle$, caracterizada pelo axioma $(\rho)\, \exists R \wedge \forall x \exists P(x)$,
>
> onde V é o universo de $\Re$, e R é o seu único "predicado"
>
> Teorema 10 $\vdash R\in R \wedge R\notin R$
>
> Prova. Evidentemente, temos: $x\in R \leftrightarrow x\notin x$. Portanto,
>
> $R\in R\leftrightarrow R\notin R$ e, pelas regras apropriadas de $C_1^=$, $R\in R \wedge$
>
> $R\notin R$.". (DA COSTA, 1996, p.7)

A demonstração desse teorema, que expressa uma contradição, é aceita dentro de $\mathbf{ZF_1}$. Aqui cabe ressalvar que estamos usando a negação fraca. Empregaremos a regra de eliminação da negação restringida (vide anexo C1) na demonstração desse teorema.

$\vdash_{ZFC_1} (R\in R) \wedge \neg(R\in R)$

1	$\neg((R\in R) \wedge \neg(R\in R))$	premissa provisória.
2	$\exists\{x{:}\neg(x\in x)\} \equiv \exists y\forall x(x\in R\equiv\neg(x\in x))$	definição 3 (DA COSTA, 1996, p.4)
3	$\exists\{x{:}\ \neg(x\in x)\}$	Axioma ρ
4	$\exists y\forall x(x\in y \equiv\neg(x\in x))$	2, 3, teorema de **CP** [63]
5	$\forall x(x\in R\equiv\neg(x\in x))$	4, E - ∃ [eliminação de ∃]
6	$R\in R\equiv\neg(R\in R)$	5, E - ∀ [eliminação de ∀]
7	$R\in R\supset\neg(R\in R)\ \&\ \neg(R\in R)\supset R\in R$	6, definição 3
8	$R\in R\supset\neg(R\in R)$	7, E - &
9	$(R\in R\supset\neg(R\in R))\supset(\neg(R\in R)\vee\neg(R\in R))$	teorema de **CP**
10	$\neg(R\in R)\vee\neg(R\in R)$	8, 9, E - ⊃
11	$\neg(R\in R)\vee\neg(R\in R)\supset\neg(R\in R)$	teorema de **CP**
12	$\neg(R\in R)$	10, 11, E - ⊃
13	$\neg R\in R\supset R\in R$	7, E - &
14	$(\neg R\in R\supset (R\in R))\supset (\neg\neg(R\in R)\vee (R\in R))$	teorema do **CP**
15	$(\neg\neg(R\in R)\vee (R\in R))$	13, 14, E - ⊃
16	$(\neg\neg(R\in R)\vee (R\in R))\supset ((R\in R)\vee (R\in R))$	teorema de **CP**
17	$((R\in R)\vee (R\in R))$	15, 16, E - ⊃
18	$((R\in R)\vee (R\in R))\supset (R\in R)$	teorema de **CP**
19	$R\in R$	17, 18, E - ⊃
20	$(R\in R)^0$	1, definição 1
21	$R\in R$	19, R
22	$\neg(R\in R)$	12, R
21	$(R\in R)\ \&\ \neg(R\in R)$	1-22, E - ¬(rest)

Ao admitirmos $\mathbf{DNC_1}^{=}$ como lógica subjacente à teoria $\mathbf{ZF_1}$, e usando regra E - ¬(rest) deduzimos a expressão $(R\in R)\ \&\ \neg(R\in R)$ que não trivializa a teoria, pois, em $\mathbf{DNC_1}^{=}$ a expressão $A\&\neg A$ (i.é, uma fórmula e a sua negação) não trivializa o sistema.

[63] Abreviação da expressão *'Cálculo Proposicional'*.