

PARACONSISTÊNCIA E MODALIDADE

Daniel Liberalino Monte

Dissertação apresentada
ao Instituto de Filosofia e
Ciências Humanas da
Universidade Estadual de Campinas
para a obtenção do grau de
Mestre em Filosofia (Área de Lógica).

Orientador: **Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.*

Campinas, 1 de outubro de 2009.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP
Bibliotecária: Cecília Maria Jorge Nicolau CRB nº 3387**

M764p **Monte, Daniel Liberalino**
 Paraconsistência e modalidade / Daniel Liberalino Monte.
 -- Campinas, SP : [s. n.], 2009.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Modalidade (Lógica). 2. Lógica matemática não-clássica.
3. Lógica simbólica e matemática. 4. Filosofia. I. D'Ottaviano,
Ítala M. Loffredo (Ítala Maria Loffredo). II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
III. Título.

Título em inglês: Paraconsistency and modality

Palavras chaves em inglês (keywords) : Modality (Logic)
Non-classical mathematical logic
Mathematical and symbolic logic
Philosophy

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: Ítala M. Loffredo D'Ottaviano, Daniel Durante Pereira
Alves, Alexandre Costa-Leite

Data da defesa: 28-09-2009

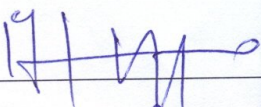
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

DANIEL LIBERALINO MONTE

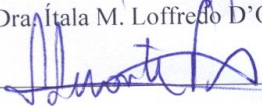
PARACONSISTÊNCIA E MODALIDADE

Este exemplar corresponde à redação
da Dissertação para o Exame de Defesa
do Mestrado.

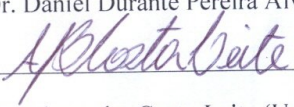
Banca:



Prof. Dra. Ítala M. Loffredo D'Ottaviano (Unicamp, Campinas) – Orientadora.



Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves (UFRN, Natal).



Prof. Dr. Alexandre Costa-Leite (Unicamp, Campinas).

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli (Unicamp, Campinas) – Suplente.

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (UNESP, Bauru) – Suplente.

28 de Setembro/2009

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo examinar, sob a perspectiva lógico-filosófica da paraconsistência e da modalidade, as relações entre os conceitos lógico-filosófico-formais de negação paraconsistente e o conceito de modalidade.

Nosso objetivo central consiste no exame de um operador modal de negação paraconsistente.

Examinamos conhecidos resultados envolvendo os operadores modais e paraconsistentes, como as lógicas modais normais **K**, **T**, **S4**, **S5** e outras lógicas modais; algumas lógicas paraconsistentes, incluindo a lógica modal paraconsistente **Z**. Além disso, realizamos uma análise crítica concernente às relações entre o conhecido Quadrado de Oposições Aristotélico e a negação paraconsistente, contribuindo para o tema com alguns argumentos.

Finalmente, investigamos a questão de como a generalização do Quadrado de Oposições Aristotélico, dita Teoria de n-Oposições, se relaciona com o tema da modalidade, da paraconsistência e da geometrização lógica, propondo idéias para este último.

ABSTRACT

The present work aims to investigate, under the logical-philosophical perspective of paraconsistency and modality, relations between the logical-philosophical-formal concept of paraconsistent negation and the concept of modality.

Our main task is the analysis of a modal operator of paraconsistent negation.

We have examined some known results involving modal and paraconsistent operators, such as the modal normal logics **K**, **T**, **S4**, **S5** and other modal logics; some paraconsistent logics, including modal paraconsistent logic **Z**. We also have proceeded a critical analysis concerning relations between the well known Aristotle's Square of Oppositions and paraconsistent negation, contributing to the theme with some arguments.

Finally, we have investigated the question of how the generalization of the Square of Oppositions, through the n-Oppositions Theory, may be related to the themes of modality, paraconsistency and logic geometrization, proposing some ideas.

AGRADECIMENTOS

Ao longo do processo de realização deste trabalho, pude contar com o auxílio de diversas pessoas. Assim, quero primeiro agradecer a contribuição indireta, sempre fundamental, de amigos e familiares como João, Cecília, Clara, Ana e Nelson, Antoniele, Daniel N., Daniel D. e Adriano.

Agradeço aos professores do CLE: Ítala, Walter e Coniglio. Sem eles, e o esmero e qualidade com que ministram o curso de Lógica, este trabalho não seria factível. Em particular, agradeço o acompanhamento diligente da Profa. Ítala L'Offredo, pela qual fui orientado. Também foram de grande valia para o resultado final as observações e o apoio de Alexandre Costa-Leite, Daniel Durante e Walter Carnielli.

Manifesto ainda minha gratidão aos involuntariamente solícitos, como Clowes, Monk, Yupanqui, e a J. L. Filho, pelo violão.

Finalmente, e sobretudo, *aux hiboux*.

Para C. A.

SUMÁRIO

<i>Introdução</i>	11
<i>Capítulo 1 – Lógica Modal</i>	15
1.1. Linguagem modal e fórmulas bem formadas	17
1.1.1. Propriedades minimais de um sistema modal	19
1.1.1.2. O sistema modal CPC $\square$	22
1.1.2. Algumas propriedades dos sistemas modais normais	24
1.1.3. Sistemas modais normais	27
1.1.4. Modalidades	34
1.2. Análise semântica dos sistemas modais normais	36
1.3. Modelos para os sistemas modais normais	43
1.3.1. Modelos relacionais e estruturas relacionais	43
1.3.2. Validade nos sistemas modais normais	45
<i>Capítulo 2 - Lógicas paraconsistentes</i>	51
2.1. Cálculos proposicionais paraconsistentes C_n , $1 \leq n \leq \omega$	56
<i>Capítulo 3 - Modalidade paraconsistente</i>	69
3.1. O Sistema Paraconsistente Z	71
3.2. Análise semântica da lógica paraconsistente Z	75
3.3. Correção e Completude de Z	77
<i>Capítulo 4 - O quadrado de oposições paraconsistente</i>	89
4.1. Quadrado de Oposições Tradicional	89
4.2. Correspondência as noções de oposição e de negação	98
4.3. A paraconsistência do Dodecaedro Estelar de Oposições	101

4.4. A Teoria das n-oposições	106
4.4.1. Frame Geral das α n-Estruturas	106
<i>Considerações Finais</i>	111
<i>Referências Bibliográficas</i>	115

Introdução

A motivação do presente trabalho é examinar, sob a perspectiva lógico-filosófica da paraconsistência e da modalidade, as relações entre os conceitos lógico-filosófico-formais de negação paraconsistente e o conceito de modalidade.

Para tanto, nosso objetivo central consiste no exame de um operador modal de negação paraconsistente, fundamentado sobretudo nas pesquisas de **Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006, Marcos 2004, Vakarelov 1989 e Dosen 1999**.

Primeiramente, examinamos conhecidos resultados envolvendo os operadores modais, como as lógicas modais normais **K, T, S4, S5** e outras lógicas modais, tendo como referências **Carnielli e Pizzi 2001 e 2008, Hughes & Cresswell 1968, Chellas 1980, Hughes & Cresswell 1996**.

Como é bem conhecido, as lógicas modais caracterizam-se como extensões da lógica clássica, uma vez que sua linguagem estende a linguagem da lógica clássica e todos os axiomas da lógica clássica são mantidos. Os operadores modais são acrescentados à linguagem clássica e são demonstráveis propriedades modais específicas. Dado que a lógica clássica ignora certos aspectos, como a noção de *necessidade*, uma tal extensão pretenderia dar conta dos mesmos. Assim, segundo **Haack 1974 e 1978**, a lógica modal pode ser encarada como complementar à clássica.

Examinamos também algumas lógicas paraconsistentes, conforme **Castro 2004, Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006 e Marcos 2004**, incluindo a lógica modal paraconsistente **Z**, introduzida em **Béziau 2006**, e adicionando demonstrações e definições não presentes em **Béziau 2006**.

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, em certo sentido, restringido. Como afirmam **da Costa & Marconi 1989**, se a força desse princípio é restringida em um dado sistema lógico, então esse sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes.

De fato, nas lógicas paraconsistentes, o princípio da (não-) contradição – qualquer uma de suas formulações equivalentes ou qualquer uma de suas teses correlatas – não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente em sentido amplo, o *princípio da explosão*, ou de Duns Scotus, não é válido em geral; isto é, de uma fórmula A e de sua negação $\neg A$ não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula (ver **Carnielli e Marcos 2002**).

Nesta Dissertação, investigamos alguns sistemas paraconsistentes, como a hierarquia de cálculos proposicionais C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1964a, 1964b, 1964c e 1974**) e o sistema modal paraconsistente **Z** (ver **Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006 e Marcos 2004**).

Realizamos, além disso, uma análise crítica da proposta de **Béziau 2000**, concernente às relações entre o conhecido Quadrado de Oposições Aristotélico e a negação paraconsistente, contribuindo para o tema com alguns argumentos.

O Quadrado de Oposições, de Boecius e Apuleius, constitui uma representação gráfica das quatro noções lógicas de oposição aristotélicas: a de contraditoriedade, a de contrariedade, a de subcontrariedade e a de subalternidade. Mais recentemente, esse “modelo” de representação gráfica foi estendido por diversos pesquisadores (ver **Arruda 1990, Blanché 1953, 1957, 1966, Béziau 2000 e Moretti 2004**), apontando para relações possíveis entre geometria e lógica. Examinamos alguns aspectos desses desenvolvimentos,

como o Dodecaedro Estelar de Oposições e a Teoria de n -Oposições, sem nos deter nos aspectos geométricos formais do tema, os quais fogem ao escopo do presente trabalho.

Alguns trabalhos futuros, que pretendemos desenvolver, estão mencionados nas Considerações Finais desta Dissertação.

Capítulo 1 - Lógica modal

As lógicas modais caracterizam-se como extensões da lógica clássica, pois sua linguagem estende a linguagem da lógica clássica e todos os axiomas da lógica clássica são preservados. Os operadores modais são acrescentados à linguagem clássica e são demonstráveis propriedades modais específicas (ver **Hughes & Cresswell 1968**, **Chellas 1980**, **Hughes & Cresswell 1996** e **Carnielli e Pizzi 2001 e 2008**). Tal extensão pretende dar conta de certos aspectos ignorados pela lógica clássica, como a noção de *necessidade*. Segundo **Haack 1974 e 1978**, a lógica modal pode ser encarada como complementar à clássica.

As primeiras discussões a respeito da lógica de sentenças modais remontam a Aristóteles e ao medievo; já no final do século XIX, McColl contribui com propostas formais e filosóficas (ver **MacColl 1880** e **MacColl 1906**). Contudo, o desenvolvimento formal efetivo só surge com **Lewis 1918** (ver **Lewis 1912** e **Haack 1978**), responsável pelas primeiras axiomatizações da lógica modal sentencial. Posteriormente, **Marcus 1946** estende o cálculo proposicional modal ao cálculo modal de predicados.

Lewis parte de alguns teoremas anti-intuitivos da lógica clássica, decorrentes da noção de implicação material clássica ($\rightarrow$), onde p e q são proposições e $\neg$ é a negação clássica:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q) \text{ e}$$

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p),$$

Para evitar esses *paradoxos da implicação material*, como são conhecidos, Lewis argumenta ser necessária uma versão mais rígida da implicação material, a *implicação estrita*.

Com o objetivo de construir uma tal implicação, Lewis acrescenta à linguagem do cálculo proposicional clássico (CPC) o operador modal primitivo $\Box$, que pretende interpretar alguma noção de *necessidade*. Para alguma proposição A , $\Box A$ pode ser lido como “é necessário que A ”.

Se A é uma fórmula bem formada, então $\Box A$, ou qualquer iteração do operador $\Box$, é uma fórmula bem formada.

Usando o operador $\Box$, Lewis define uma *implicação estrita* $\Rightarrow$, da seguinte forma:

$$A \Rightarrow B =_{df} \Box(A \rightarrow B).$$

A partir do operador $\Box$, Lewis define o operador de *possibilidade* $\Diamond$:

$$\Diamond A =_{df} \neg \Box \neg A.$$

Diversos sistemas modais são a seguir introduzidos, cada um expressando uma determinada noção de necessidade. Usualmente, esses sistemas são organizados em ordem crescente de poder dedutivo, partindo do conhecido sistema **T**, embora exista um sistema minimal mais fraco que **T**, conhecido como sistema **S0.5** ou **K**.

A seguir, conforme exposto em **Carnielli e Pizzi 2001 e 2008**, discutimos alguns aspectos dos sistemas modais obtidos mediante a adição de operadores ou axiomas modais, respectivamente, à linguagem ou ao conjunto de axiomas e regras do **CPC**.

1.1. Linguagem modal e fórmulas bem formadas

Definimos *linguagem modal* como uma quádrupla $LM = \langle \text{Var}, \perp, \rightarrow, \Box \rangle$, onde:

$\text{Var} = \{p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, r_2, \dots\}$ é um conjunto de símbolos, chamados de *variáveis proposicionais*;

$\perp$ é o símbolo para o absurdo, também chamado de *bottom*;

$\rightarrow$ é o símbolo para a implicação material;

$\Box$ é o operador de necessidade.

De modo intuitivo, obtemos a linguagem modal acrescentando o operador modal $\Box$ à linguagem do **CPC**.

O conjunto **FormLM** de *fórmulas bem formadas* (fbf) é definido como usualmente, acrescentando-se uma cláusula específica para o caso das fórmulas geradas pelo operador modal.

- a) Para todo p , tal que $p \in \text{Var}$, p é uma fórmula bem formada;
- b) $\perp$ é fórmula bem formada;
- c) Se A e B são fórmulas bem formadas, então $(A \rightarrow B)$ é fórmula bem formada;
- d) Se A é fórmula bem formada, $\Box A$ é fórmula bem formada;
- e) Não há outras fórmulas bem formadas.

O uso dos parênteses é o usual.

As definições de símbolos auxiliares são as seguintes:

Definição 1.1.1 (Def $\neg$)	$\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$
Definição 1.1.2 (Def $\&$)	$A \& B =_{df} \neg(A \rightarrow \neg B)$
Definição 1.1.3 (Def $\top$)	$\top =_{df} \neg \perp$
Definição 1.1.4 (Def $\vee$)	$A \vee B =_{df} \neg(\neg A \& \neg B)$
Definição 1.1.5 (Def $\Rightarrow$)	$A \Rightarrow B =_{df} \Box(A \rightarrow B)$
Definição 1.1.6 (Def $=$)	$A = B =_{df} ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$
Definição 1.1.7 (Def $\leftrightarrow$)	$A \leftrightarrow B =_{df} ((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A))$
Definição 1.1.8 (Def $\Diamond$)	$\Diamond A =_{df} \neg \Box \neg A.$

Observamos que o símbolo $\top$ é também usualmente chamado de *top*.

As noções de axioma, de regra de dedução, de dedução e de teorema são as usuais.

Se S é um subconjunto do conjunto de teoremas de **FormLM**, S é dito um *sistema*.

Adotamos as seguintes abreviações:

- a) A notação $\Box^n$ indica o símbolo $\Box$ repetido (iterado) n vezes, e $\Diamond^n$ indica o símbolo $\Diamond$ repetido n vezes;
- b) A notação $A(B/p)$ indica que, na fbf A , a variável atômica p é substituída uniformemente – isto é, em todas as ocorrências –, pela fórmula B . No caso de substituição simultânea de n variáveis escreveremos $A(B_0/p_0 \dots B_n/p_n)$.
- c) A notação $\vdash_s A$ ($\nvdash_s A$), onde S é um sistema modal, é uma abreviação para $A \in S$ ($A \notin S$).

Na próxima seção, discutimos sobre a classe mínima de propriedades que intuitivamente os sistemas modais devem satisfazer.

1.1.1. Propriedades minimais de um sistema modal

As *propriedades minimais de um sistema modal* são aquelas que, intuitivamente, devem ser comuns às diversas noções de "necessidade".

É desejável que:

- a) Se a fórmula A é teorema de um certo sistema modal S , então $\Box A$ também é um teorema. Isto é, queremos que os teoremas lógicos sejam verdades necessárias.
- b) O operador de necessidade ($\Box$) tenha propriedades distributivas similares à da teoremicidade ($\vdash$), a saber, que valha o equivalente à Regra de Modus Ponens:

Modus Ponens (MP): Se $\vdash A$ e $\vdash A \rightarrow B$, então $\vdash B$.

Consideramos, portanto, correspondendo respectivamente a (a) e (b), as seguintes propriedades como sendo propriedades modais minimais de um sistema modal S qualquer:

Regra de Necessitação (Nec): $\vdash_s A$, então $\vdash_s \Box A$

Lei de Aristóteles (LA): $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

Um sistema modal contendo **Nec** e a Lei de Aristóteles é dito *normal*.

Uma versão mais fraca de **Nec** é a seguinte:

NecR: Se $\vdash_{\text{CPC}} A$, então $\vdash_s \Box A$ ¹.

Mais formalmente, um subconjunto de **Form** LM é uma lógica proposicional modal normal quando:

- (i) Contém todos os teoremas do cálculo proposicional verofuncional **CPC**;
- (ii) Contém a fórmula **K**: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ ²;
- (iii) É fechado com respeito às seguintes regras:

(iii-a) **Substituição Uniforme (US)**: para todo p , se $p \in \text{Var}$, B é fbf e $\vdash_s A$, então

$\vdash_s A(B/p)$;

(iii-b) **MP**;

(iii-c) **Nec**.

Dizemos que um sistema modal é *não-normal* quando vale **NecR**, mas não vale **Nec**.

Por exemplo, os sistemas **S1**, **S2** e **S3** introduzidos por Lewis são não-normais³.

Dizemos que um sistema S é *consistente* (não-contraditório) quando nenhuma fórmula da forma $A \ \& \ \neg A$ é teorema de S . Caso contrário, é dito *inconsistente* (contraditório).

¹ Intuitivamente, a regra **NecR** expressa a idéia de que as tautologias do **CPC** são necessárias. Observemos que, relativamente à regra **Nec**, a regra **NecR** limita as possibilidades de iterações de operadores modais. Por exemplo, se S é um sistema modal contendo **Nec**, e se $\vdash_s A$, então, usando **Nec**, obtemos $\vdash_s \Box A$. Usando **Nec** novamente, obtemos $\vdash_s \Box \Box A$, e assim por diante.

Todavia, substituindo **Nec** por **NecR** em S , não podemos demonstrar essas iterações.

² A fórmula **K** é como ficou conhecida a Lei de Aristóteles, em homenagem a Saul Kripke, por suas contribuições à lógica modal (ver **Carnielli e Pizzi 2008**).

³ Não apresentaremos os sistemas **S1**, **S2** e **S3** de Lewis no presente trabalho.

Embora seja difícil precisar as propriedades que todos os sistemas normais devem conter, parece simples especificar as propriedades que estes não devem conter. Intuitivamente, estabelecemos que os sistemas normais não devem ter entre seus teoremas os seguintes resultados:

- a) Uma fórmula da forma $A \ \& \ \neg A$ - ou, equivalentemente, tanto A quanto a sua negação, $\neg A$. Ou seja, os sistemas modais normais devem ser consistentes.
- b) A fórmula de *banalização* $p \rightarrow \Box p$, que chamamos de fórmula

Ban: $p \rightarrow \Box p$

Um sistema no qual vale **Ban** é dito *banal*, observando que não devemos confundir esta fórmula com a Regra de Necessitação **Nec**.

Queremos, desta maneira, distinguir entre o que é necessariamente verdadeiro e o que é verdadeiro factualmente. Do contrário, seria supérflua a construção de uma lógica modal, especialmente se consideramos os sistemas modais que têm $\Box p \rightarrow p$ (Axioma **T**) como teorema (por exemplo o sistema **T**, a ser introduzido na seção 1.1.3.1): nestes deriva-se trivialmente uma forma de banalização mais forte, o

Colapso (Col): $p \leftrightarrow \Box p$.

Com o intuito de examinar as propriedades de consistência e banalidade, apresentamos a seguir o sistema modal $\mathbf{CPC}_\Box$, o mais fraco entre os sistemas modais não-normais.

1.1.1.2 O sistema modal $\mathbf{CPC}_\Box$ – Um sistema banal e consistente que não é modal normal

Carnielli e Pizzi 2001 introduzem inicialmente um cálculo modal, o sistema modal não-normal $\mathbf{CPC}_\Box$, a partir da linguagem do $\mathbf{CPC}$, contendo os operadores $\neg$, $\&$, $\vee$ e $\rightarrow$. Obtemos a linguagem do sistema modal $\mathbf{CPC}_\Box$ acrescentando o operador modal primitivo $\Box$ e o operador modal $\Diamond$ por definição (Definição 1.1.8), sem axiomas adicionais.

Teorema 1.1.1.2: as seguintes *leis de intercâmbio* são demonstráveis em $\mathbf{CPC}_\Box$:

- 1) $\Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond A$
- 2) $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$
- 3) $\neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$

Demonstração:

- 1) Pela Definição 1.1.2 e pelas propriedades do $\mathbf{CPC}$, $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \neg\Diamond A \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg A$.
Pela eliminação da negação, $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \neg\Diamond A \leftrightarrow \Box\neg A$. Portanto, $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond A$.
- 2) Segue de (1) e de $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \neg\neg A \leftrightarrow A$.
- 3) De (2), pelas propriedades do $\mathbf{CPC}$, temos que $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \neg\Box A \leftrightarrow \neg\neg\Diamond\neg A$. Logo, pela eliminação da negação, $\vdash_{\mathbf{CPC}_\Box} \neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$. ■

Seja $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$ o sistema obtido pelo acréscimo da fórmula **Ban** ao sistema $\mathbf{CPC}_\Box$. Podemos ver que $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$ é consistente, apesar de banal. De fato, seja a seguinte tabela de verdade para $\Box$:

p	$\Box p$
1	1
0	0

É claro que a fórmula $p \rightarrow \Box p$ é válida segundo esta tabela. Além disso, como as tabelas de verdade de **CPC** são mantidas, todos os teoremas de **CPC** permanecem válidos em $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$. Portanto,

(i) todos os teoremas de $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$ são válidos para a tabela acima e as tabelas do **CPC**.

Ademais, seja A uma fbf de $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$, e seja A' a fbf do **CPC** obtida quando eliminamos de A o símbolo $\Box$. Então, é certo que

(ii) o valor da fbf A para a tabela do $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$ é o mesmo valor da fbf A' para a tabela do **CPC**.

Suponhamos agora que $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$ não seja consistente. Então, existe uma fórmula A tal que A e $\neg A$ são teoremas de $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$. Logo, por (i), A e $\neg A$ são válidos em $\mathbf{CPC}_\Box + \mathbf{Ban}$. Contudo, pelas tabelas de verdade em **CPC**, A' e $\neg A'$ não são válidas, logo,

por (ii), A e $\neg A$ não são válidas em $\mathbf{CPC}\Box + \mathbf{Ban}$. Absurdo. Logo, $\mathbf{CPC}\Box + \mathbf{Ban}$ é consistente.

Embora a banalização seja uma propriedade considerada indesejável, é útil examinar o sistema $\mathbf{CPC}\Box + \mathbf{Ban}$, como um caso limite dos sistemas modais, visando uma melhor compreensão das propriedades de consistência e de banalização.

1.1.2. Algumas propriedades dos sistemas modais normais

A seguir, analisamos algumas propriedades importantes dos sistemas modais minimais normais.

Primeiramente, provaremos que a *Regra de Equivalência (Eq)* vale para os sistemas modais normais.

Lema 1.1.2.1 (Regra DReq): Se $\vdash_s A \leftrightarrow B$, então $\vdash_s \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Demonstração: De $\vdash_s A \rightarrow B$, por **Nec**, obtemos $\vdash_s \Box(A \rightarrow B)$, donde, por **K** e **MP**, derivamos $\vdash_s \Box A \rightarrow \Box B$. A partir de $\vdash_s B \rightarrow A$, obtemos $\vdash_s \Box B \rightarrow \Box A$, analogamente. ■

A seguir, provamos que a Regra de Equivalência (**Eq**) vale para todos os sistemas modais normais.

Proposição 1.1.2.2. (Regra *Eq*) Sejam S um sistema modal normal e $\vdash_S A \leftrightarrow B$. Seja C uma fórmula que contém uma ou mais ocorrências de A e seja C' obtida pela substituição de uma ou mais ocorrências de A por B em C . Nessas condições, $\vdash_S C \leftrightarrow C'$.

Demonstração: Por indução no grau n , $n \geq 0$, de complexidade da fórmula C .
Suponhamos que $\vdash_S A \leftrightarrow B$.

(i) Se $n = 0$, C é atômica. Logo C é A , e A é atômica. Por hipótese, $\vdash_S C \leftrightarrow C'$.

(ii) Suponhamos que o resultado vale para fórmulas de grau $k < n$, ou seja, se C tem grau de complexidade k , $k < n$, e a fórmula C' é obtida pela substituição de uma ou mais ocorrências de A por B em C , então $\vdash_S C \leftrightarrow C'$.

(iii) Seja uma fórmula C com grau de complexidade n arbitrário. Mostremos que, se (ii), então $\vdash_S C \leftrightarrow C'$.

Se C^* é uma subfórmula própria de C , e $C^{*'}$ é a fórmula obtida ao substituirmos A por B em C^* , então, pela hipótese de indução (ii), derivamos que $\vdash_S C^* \leftrightarrow C^{*'}$.

Sejam C^{**} e $C^{***'}$ as subfórmulas de C e C' de complexidade imediatamente superior a C^* e $C^{*'}$, respectivamente, tal que $C^{***'}$ é obtida a partir da substituição de C^* por $C^{*'}$ em C^{**} . Assim, há dois casos a contemplar:

(a) C^{**} é da forma $\neg C^*$ ou $\Box C^*$. No primeiro caso, por CPC e posto que $\vdash_S C^* \leftrightarrow C^{*'}$, obtemos $\vdash_S C^{**} \leftrightarrow C^{***'}$. No segundo caso, pelo Lema 1.1.2.1 obtemos $\vdash_S C^{**} \leftrightarrow C^{***'}$.

(b) C^{**} é da forma $C^* \rightarrow D$ ou $D \rightarrow C^*$. Se C^{**} é da forma $C^* \rightarrow D$, então $C^{**'}$ é da forma $C^{*'} \rightarrow D$. Logo, por CPC e posto que $\vdash_s C^* \leftrightarrow C^{*'}$, obtemos $\vdash_s C^{**} \leftrightarrow C^{**'}$. Se C^{**} é da forma $D \rightarrow C^*$, então $C^{**'}$ é da forma $D \rightarrow C^{*'}$. Logo, por CPC e posto que $\vdash_s C^* \leftrightarrow C^{*'}$, obtemos $\vdash_s C^{**} \leftrightarrow C^{**'}$. Nos dois casos, temos que $\vdash_s C^{**} \leftrightarrow C^{**'}$.

Reaplicando o processo para subfórmulas próprias de C de graus de complexidade consecutivos, obtemos $\vdash_s C \leftrightarrow C'$ em um número finito de passos. ■

Demonstramos a seguir algumas regras derivadas úteis dos sistemas modais normais.

Regra DR1: $\vdash_s A \rightarrow B$ então $\vdash_s \Box A \rightarrow \Box B$

Regra DR2: $\vdash_s A \rightarrow B$ então $\vdash_s \Diamond A \rightarrow \Diamond B$.

Demonstração: Suponha $\vdash_s A \rightarrow B$. Por **Nec**, obtemos $\vdash_s \Box(A \rightarrow B)$. Aplicando **MP** ao esquema de tese $\vdash_s \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, derivado pela Regra **US** da fórmula **K**, obtemos $\vdash_s \Box A \rightarrow \Box B$.

A demonstração da Regra **DR2** é análoga. ■

Observamos que, pelas leis de intercâmbio do Teorema 1.1.1.2, a relação dual entre os operadores $\Box$ e $\Diamond$, para qualquer sistema modal, é similar àquela entre o operador (quantificador) universal ($\forall$) e o existencial ($\exists$), no cálculo de predicados clássico de primeira ordem, posto que as leis de intercâmbio acima são demonstráveis.

1.1.3. Sistemas modais normais

Nesta seção apresentamos os sistemas modais normais mais conhecidos na literatura. Começamos pelo sistema **K** (ou **S0.5**), que é o sistema modal normal mais fraco.

O sistema **K** é obtido pela adição da seguinte fórmula e a seguinte regra ao sistema **CPC**:

$$\mathbf{K}: \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

Nec

Observamos que, como o sistema **K** estende **CPC**, também é fechado com respeito às seguintes regras:

(iii-a) **Substituição Uniforme (US)**: para todo p , se $p \in \text{Var}$, B é fbf e $\vdash_{\mathbf{K}} A$, então

$$\vdash_{\mathbf{K}} A(B/p);$$

(iii-b) **MP**.

Teorema 1.1.3.1: As seguintes fórmulas são teoremas de **K** e, portanto, de qualquer sistema modal normal:

$$1. \Box(p \ \& \ q) \leftrightarrow (\Box p \ \& \ \Box q)$$

$$2. \Diamond(p \vee q) \leftrightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$$

$$3. \neg \Diamond p \rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$4. \Box q \rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$5. (\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$$

$$6. \Diamond(p \ \& \ q) \rightarrow (\Diamond p \ \& \ \Diamond q)$$

$$7. \Box(p \vee \neg p)$$

Demonstração:

A título de exemplo, apresentamos uma prova de (5):

(1) $p \rightarrow (p \vee q)$	CPC
(2) $\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$	(1), DR1
(3) $\Box q \rightarrow \Box(p \vee q)$	$\vdash_{\text{CPC}} q \rightarrow (p \vee q)$ e DR1
(4) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$	(2), (3), $\vdash_{\text{CPC}} A \rightarrow B$ e $\vdash_{\text{CPC}} C \rightarrow B$ então
	$\vdash_{\text{CPC}} (A \vee C) \rightarrow B$ ■

Observamos que, como na demonstração acima, as regras **DR1** e **DR2** podem ser usadas para introduzir operadores modais em fórmulas do **CPC**.

O sistema **K** pode ser estendido com um número arbitrário de axiomas $X_1...X_n$, dando origem à família dos sistemas modais normais **KX₁...X_n**. Os sistemas modais usualmente encontrados na literatura, além dos Axiomas e Regras do sistema **K**, têm os seguintes axiomas:

Axioma **D**: $\Box p \rightarrow \Diamond p$

Axioma **T**: $\Box p \rightarrow p$

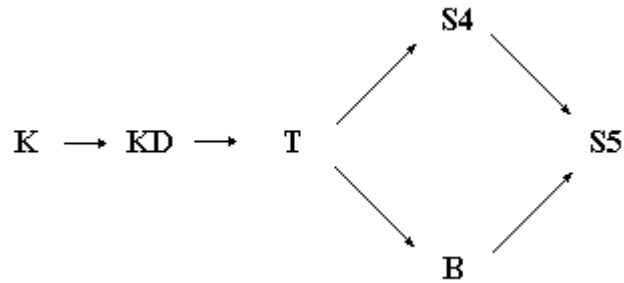
Axioma **B**: $p \rightarrow \Box \Diamond p$

Axioma **4**: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

Axioma **5**: $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$

Na literatura, alguns dos sistemas **KX₁...X_n**, tal que X_i , $1 \leq i \leq n$, é um dos axiomas acima, recebem nomes diferenciados: **KT** é conhecido como o sistema **T**; **KT4**, como **S4**; **KTB**, como **B**; e **KT5**, como **S5**.

A relação de inclusão própria (ou a ordem crescente de força) entre os principais sistemas pode ser esquematicamente representada como na figura abaixo:



Para demonstrar a inclusão própria de um sistema S num sistema S' , é necessário mostrar que certo conjunto de axiomas de S' não é derivável em S – por exemplo, que o axioma **T** não é derivável em **KD**, ou que o Axioma **4** não é derivável em **T**, etc. Para tanto, métodos puramente sintáticos não são suficientes.

É possível demonstrar que os seguintes sistemas são equivalentes entre si: **KT5**, **KTb4**, **KDb4** e **KDb5** (apud **Carnielli e Pizzi 2001**). A seguir, demonstramos, a título de exemplo, uma das equivalências.

Proposição 1.1.3.2:

- a) **KTb4** está contido em **KT5**, ou **KT5** é uma extensão de **KTb4**;
- b) **KTb4** é uma extensão de **KT5**.

Demonstração:

- a) Provemos que **B** é um teorema de **KT5**.

$$1. \vdash_{\text{KT5}} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p \quad \text{Axioma 5}$$

2. $\vdash_{\text{KT5}} \neg p \rightarrow \neg \Box p$ **T, CPC**
3. $\vdash_{\text{KT5}} \neg \neg p \rightarrow \neg \Box \neg p$ (2), $\neg p/p$
4. $\vdash_{\text{KT5}} p \rightarrow \Diamond p$ (3), **Eq**
5. $\vdash_{\text{KT5}} p \rightarrow \Box \Diamond p$ (4), (1), **CPC**

Provemos, agora, que o Axioma 4 é um teorema de **KT5**. Seja a fórmula

$$\mathbf{5^*}: \Diamond \Box p \rightarrow \Box p,$$

decorrente do Axioma 5 por contraposição. Temos:

1. $\vdash_{\text{KT5}} \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$ Axioma **B**, $\Box p/p$
2. $\vdash_{\text{KT5}} \Box \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Box p$ **5***, **DR1**
3. $\vdash_{\text{KT5}} \Box p \rightarrow \Box \Box p$ (1), (2), **CPC**

b) Seja a fórmula

$$\mathbf{4^*}: \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p,$$

equivalente ao Axioma 4. Provemos que o Axioma 5 é um teorema de **KT4**.

1. $\vdash_{\text{KT4}} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond \Diamond p$ Axioma **B**, $\Diamond p/p$
2. $\vdash_{\text{KT4}} \Box \Diamond \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ **4***, **DR1**
3. $\vdash_{\text{KT4}} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ (1), (2), **CPC** ■

Há diversas vantagens em se estudar as propriedades de **S5**, dado que algumas dessas propriedades transferem-se de imediato aos seus subsistemas. Demonstremos duas delas, identificadas na Seção 1.2. como intuitivamente peculiares a um sistema modal: a consistência e a não-banalidade.

Proposição 1.1.3.3: **S5** é consistente.

Demonstração: Seja **CQC** a lógica de predicados de primeira ordem clássica axiomatizada (ver, por exemplo, **Kleene 1974**)

Seja f uma função das fórmulas de **S5** nas fórmulas de **CQC**, definida como segue, sendo $P_1, P_2, P_3 \dots$ variáveis para predicados monádicos de **CQC**:

$f: \mathbf{S5} \rightarrow \mathbf{FormCQC}$

- (i) $f(p_n) = P_n x$
- (ii) $f(\perp) = \perp$
- (iii) $f(A \rightarrow B) = f(A) \rightarrow f(B)$
- (iv) $f(\Box A) = \forall x f(A)$

$f(A)$ é dita *f-imagem* de A , ou *f-tradução* de A .

É imediato que $f(\Diamond A) = \exists x f(A)$.

Ora, é fácil mostrar que a f -imagem dos Axiomas de **S5** – ou seja, **K**, **T** e **5** – são teoremas de **CQC**. Por exemplo: $f(T) = f(\Box p_1 \rightarrow p_1) = f(\Box p_1) \rightarrow f(p_1) = \forall x P_1 x \rightarrow P_1 x$, que é

um teorema de **CQC**. Por indução no comprimento da dedução, concluímos que a f -imagem de todos os teoremas de **S5** são teoremas de **CQC**.

A função f é, de fato, uma *tradução* de **S5** em **CQC**, de acordo com **da Silva, D'Ottaviano e Sette 1999** e **Feitosa e D'Ottaviano 2001**.

Agora, suponhamos, por absurdo, que **S5** seja inconsistente. Então, existe uma fórmula B tal que $B \ \& \ \neg B$ é teorema de **S5**. Portanto, a fórmula $f(B) \ \& \ \neg f(B)$ é teorema **CQC**, o que é absurdo. Logo, **S5** é consistente.

Proposição 1.1.3.4: **S5** é não-banal.

Demonstração: Por absurdo, suponha que a fórmula $p_1 \rightarrow \Box p_1$ é teorema de **S5**. É simples ver que $f(p_1 \rightarrow \Box p_1) = P_1X \rightarrow \forall xP_1x$. Portanto, como f é uma função tradução, $P_1X \rightarrow \forall xP_1x$ é um teorema de **CQC**, o que é absurdo (ver **Kleene 1974**).

É imediato que a consistência e a não-banalidade transferem-se para os subsistemas X de **S5**, pois se uma contradição ou **Ban** fosse teorema de X , também seria teorema de **S5**, o que contradiz as Proposições 1.1.3.3 e 1.1.3.4.

1.1.4. Modalidades

Por *modalidade*, referimo-nos a qualquer seqüência finita, eventualmente vazia, de símbolos $\Box$, $\Diamond$ e $\neg$.

O sistema **S4** permite que modalidades iteradas quaisquer sejam reduzidas a uma das modalidades seguintes (ver **Hughes & Creswell 1996**, p. 52):

- (i) – (modalidade nula);
- (ii) $\Box$;
- (iii) $\Diamond$;
- (iv) $\Box\Diamond$;
- (v) $\Diamond\Box$;
- (vi) $\Box\Diamond\Box$;
- (vii) $\Diamond\Box\Diamond$, e suas negações.

Em **S5**, as modalidades são redutíveis a:

- (i) –;
- (ii) $\Box$;
- (iii) $\Diamond$, e suas negações.

Isto ocorre por efeito de algumas *leis de redutibilidade*, resumidas no seguinte metateorema de **S5**⁴.

Proposição 1.1.4.1. Se M é uma modalidade não-negada qualquer e A uma fbf qualquer em **S5**, então $M\Box A$ é equivalente a $\Box A$ e $M\Diamond A$ equivalente a $\Diamond A$.

⁴ No sistema **S4**, para algumas dessas leis de redutibilidade, apenas um lado da implicação é demonstrável: $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ (TR3a) e $\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$ (TR4a). No sistema **T**, são demonstráveis: $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ (TR1a), $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ (TR2a), TR3a e TR4a.

Demonstração: Em **S5** podemos derivar as quatro leis de redutibilidade:

$$\text{TR1: } \Box\Box p \leftrightarrow \Box p$$

$$\text{TR2: } \Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$$

$$\text{TR3: } \Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$$

$$\text{TR4: } \Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$$

TR1: Sabemos que $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ (isto é, o Axioma **4**) é um teorema de **S5**. A implicação conversas é obtida por **US** ($\Box p/p$) em **T**.

TR2: Por TR1 e $\neg p/p$, obtemos $\Box\neg p \leftrightarrow \Box\Box\neg p$, donde, por **CPC**, obtemos $\neg\Box\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$. Pelas leis de intercâmbio, obtemos $\Diamond\neg\Box\neg p \leftrightarrow \Diamond p$, a partir da qual obtemos $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$.

TR3: A partir do Axioma **5**, obtemos $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. Do Axioma **T**, por **US** ($\Diamond p/p$), obtemos $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$.

TR4: Obtemos de **5*** e de **T***, de maneira análoga à demonstração de TR3.

Seja agora M^n uma modalidade não-negada de comprimento n , que precede uma fórmula A . Claramente, sua forma será $M^{n-1}\Box A$ ou $M^{n-1}\Diamond A$. Posto que o último operador de M^{n-1} será $\Box$ ou $\Diamond$, os dois últimos operadores de M^n , isto é, M^n “menos” M^{n-2} , são uma das quatro combinações redutíveis encontradas em TR1-TR4. Aplicando **Eq**, cada dupla de operadores pode ser substituída pelo operador que se encontra do lado direito da equivalência em uma das leis TR1-TR4, de modo que obtemos $M^{n-2}\Box A$ ou $M^{n-2}\Diamond A$. Reiterando o processo, obtemos em um número finito de passos uma fórmula de forma $\Box A$ ou $\Diamond A$, equivalente a $M^n A$, para qualquer n . ■

Proposição 1.1.4.2. Dada uma modalidade M^n , podemos dividi-la em uma modalidade de forma $M^k M^{n-k}$, $k \leq n$, tal que M^{n-k} apresenta apenas ocorrências de $\Box$ ou $\Diamond$, e M^k apresenta apenas ocorrências de $\neg$.

Demonstração: Com efeito, seja M uma modalidade, e seja $|M|$ obtida substituindo-se $\Box$ por $\Diamond$ e $\Diamond$ por $\Box$ em M . Pelas leis de intercâmbio do Teorema 1.1.1.2, temos que

$$M\neg A \leftrightarrow \neg|M|A.$$

Por **Eq**, aplicando a equivalência acima k vezes a uma fórmula modalizada $M^n A$, tal que M^n contém k ocorrências de $\neg$, obtemos a fórmula $M^k M^{n-k} A$, onde M^{n-k} apresenta apenas ocorrências de $\Box$ ou $\Diamond$, e M^k apresenta k ocorrências de $\neg$. Assim, pela **Proposição 1.1.4** e por eliminação de negação, podemos reduzir a fórmula $M^k M^{n-k} A$ a uma fórmula de forma $\Box A$ ou $\Diamond A$, ou suas negações. ■

1.2. Análise semântica dos sistemas modais normais

1.2. Matrizes características e teorema de Dugundji

Na Seção 1.1.3.1., observamos que não é possível provar a independência dos axiomas dos sistemas modais **KX₁...X_n** por métodos puramente sintáticos. Uma maneira de realizar esta demonstração seria encontrar matrizes características finitas que atribuíssem um valor designado a todos os teoremas de cada sistema modal do grupo **S1-S5**, mas não ao axioma do sistema sucessivo na ordem. A prova evidenciaria que o axioma do sistema modal em análise não é um teorema do sistema modal anterior.

Definição 1.2. Uma *matriz* M é uma tripla $\langle M, D, O \rangle$, onde

M é um conjunto de objetos ditos valores (usualmente, números naturais ou racionais),

D é um subconjunto de M cujos valores são ditos *valores designados*,

O é um conjunto de operações sobre M .

Uma matriz *característica* de um sistema é aquela que atribui um valor designado a todos os teoremas deste sistema, e somente a estes.

Lewis e Langford (apud **Carnielli e Pizzi 2001**) procuraram individuar matrizes características finitas para os sistemas **S1-S5**. Contudo, em 1938, James Dugundji provou que uma matriz característica de um sistema modal não pode ter um número finito de valores.

A prova de Dugundji, que será por nós apresentada, pode ser resumida nos seguintes passos:

(i) Para cada matriz finita M_n , $n \geq 1$, existe uma particular disjunção $F(n)$ que recebe valor designado para todas as valorações;

(ii) Existe uma matriz característica infinita M de **S5**, para a qual as fórmulas F_n , $n \geq 1$, não são teoremas;

(iii) Por absurdo, se existe uma matriz finita para **S5**, então alguma fórmula F_n , $n \geq 1$, seria teorema de **S5**, o que não é o caso, visto que (ii);

(iv) Se houvesse uma matriz característica finita para um sistema S , tal que S é subconjunto de $S5$, então alguma fórmula F_n , $n \geq 1$, seria teorema de S , logo de $S5$, o que não é o caso, dado que (ii).

Em detalhe:

Fato 1. Para toda matriz de n valores existe uma particular disjunção contendo $n + 1$ variáveis – dita *fórmula de Dugundji* –, que recebe valor designado.

Demonstração:

Lembremos que $A = B$ equivale a $(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$. Consideremos as disjunções abaixo, com suas variáveis à direita e, à esquerda, as matrizes finitas para as quais, como será provado, recebem valor designado:

M1	$F1: p = q$	(p,q)
M2	$F2: p = q \vee p = r \vee q = r$	(p,q,r)
M3	$F3: p = q \vee p = r \vee p = s \vee q = r \vee q = s \vee r = s$	(p,q,r,s)
...	...	(...)

Suponhamos que $S5$ tem uma matriz característica com um número finito de valores n ($n \geq 2$). Seja $F(n)$ a fórmula que tem $n + 1$ variáveis proposicionais diferentes. Como há n valores da matriz para atribuir a $n + 1$ variáveis em cada $F(n)$, há sempre duas variáveis diferentes, digamos p e q , que recebem o mesmo valor. Portanto, pela hipótese inicial, as fórmulas $p = p$ e $p = q$ recebem valores designados. Claramente, pela hipótese inicial e dado que $(p = q) \vee B$ é teorema de $S5$, com B uma metavariable sobre fórmulas, a disjunção $(p$

$= q) \vee B$ recebe valor designado. Portanto, a disjunção $F(n)$, que é da forma $(p = q) \vee B$, recebe valor designado segundo a matriz de n valores correspondente.

Logo, para cada matriz de n valores, existe uma fórmula $F(n)$ com valor designado.

Fato 2. Existe uma matriz infinita que atribui valor designado a todos os teoremas de **S5**.

Demonstração: Definimos uma matriz característica infinita $M = \langle M, D, O \rangle$, onde

M é o conjunto potência (o conjunto de todos os subconjuntos) do conjunto dos naturais $\mathbf{1} = \{1, 2, 3, \dots\}$

D é $\mathbf{1}$

O é $\{\cup, \cap, -, \Box\}$, onde $\cup, \cap, -$ são as operações conjuntistas usuais e $\Box$ possui a seguinte propriedade:

(i) Se $X = \mathbf{1}$, então $\Box X = \mathbf{1}$

(ii) Se $X \neq \mathbf{1}$, então $\Box X = \emptyset$.

Definimos a função V , de Var em M , da seguinte forma:

a) $V(p) = P$, onde P é um subconjunto de $\mathbf{1}$

b) $V(\perp) = \emptyset$

c) $V(A \rightarrow B) = V(A) \rightarrow V(B)$

d) $V(\Box A) = \Box V(A)$.

Donde podemos facilmente obter:

e) $V(\neg A) = -V(A)$

f) $V(A \& B) = V(A) \cap V(B)$

g) $V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$.

$V(A)$ é dita uma *V-interpretação de A*.

Aplicando as definições de matriz característica M e da função V acima, é possível demonstrar que todos os axiomas de **S5** recebem o valor designado **1**, para todas as atribuições de valores às suas variáveis atômicas.

Além disso, podemos provar que a Regra de Necessitação (**Nec**) preserva o valor designado. Para tanto, suponha que $V(A) = 1$. Então, pelas propriedades da operação $\Box$, $\Box V(A) = 1$. Sabemos, pela definição da função V , que $V(\Box A) = \Box V(A)$. Assim, $V(\Box A) = 1$. Portanto, **Nec** preserva o valor designado **1**.

É simples ver que as demais regras de **S5** preservam o valor designado.

Dessa forma, mostramos que todos os teoremas de **S5** recebem o valor designado segundo a matriz M , e que as regras de dedução de **S5** preservam o valor designado. Isto conclui a prova do *Fato 2*. ■

Teorema 1.2. (*Dugundji*) Nenhuma matriz característica para **S5** pode ter um número finito de valores.

Demonstração:

Primeiro, demonstremos que nenhuma fórmula de Dugundji recebe valor designado relativamente à matriz característica M infinita, que valida todos os teoremas de **S5**.

Qualquer disjuncto $p = q$ de uma fórmula de Dugundji (ver demonstração do Fato 1) equivale, em **S5**, à fórmula $\Box(\neg p \vee q) \ \& \ \Box(p \vee \neg q)$, cuja interpretação em M é $\Box(\neg P \cup Q) \cap \Box(P \cup \neg Q)$, que equivale a $\Box((\neg P \cup Q) \cap (P \cup \neg Q))$. Ora, existe pelo menos uma atribuição de valores que associa subconjuntos unitários, ditos *singletons*, do conjunto M aos elementos do conjunto Var de variáveis proposicionais. Assim, sejam dois conjuntos P e Q arbitrários, tais que a P e Q são atribuídos *singletons* distintos. Então,

$$(i) \neg P \neq 1 \text{ e } \neg Q \neq 1.$$

Mas $Q \subseteq \neg P$ e $P \subseteq \neg Q$, e é simples ver que $\neg P \cup Q = \neg P$ e $\neg Q \cup P = \neg Q$. Portanto, por substituição, $\Box((\neg P \cup Q) \cap (P \cup \neg Q))$ equivale a $\Box(\neg P \cap \neg Q)$. Dado (i), é claro que $\neg P \cap \neg Q \neq 1$. Portanto, pelas propriedades de $\Box$, $\Box(\neg P \cap \neg Q) = \emptyset$. Como a função V atribui um *singleton* a cada variável atômica do conjunto Var , podemos repetir o processo acima para todas as variáveis proposicionais de uma fórmula de Dugundji. Assim, toda fórmula de Dugundji tem uma V -interpretação que é uma união finita $\emptyset \cup \emptyset \cup \dots \emptyset$. Entretanto, $\emptyset \cup \emptyset \cup \dots \emptyset$ equivale a $\emptyset$, que não é o valor designado. Então, nenhuma fórmula de Dugundji recebe valor designado com respeito à matriz característica M infinita, e portanto nenhuma fórmula de Dugundji é teorema de **S5**.

Suponha, por absurdo, que existe uma matriz característica M' finita para **S5**. Seja n , $n \geq 1$, o número de valores de M' . Neste caso, pelo Fato 1, pelo menos uma fórmula de Dugundji de $n + 1$ variáveis proposicionais recebe valor designado para todas as

valorações. Portanto, pelo menos uma fórmula de Dugundji é teorema de **S5**, o que é absurdo. Logo, não existe nenhuma matriz característica finita para **S5**. ■

Corolário 1.2. Nenhum sistema modal S tal que $S \subseteq \mathbf{S5}$ tem uma matriz característica finita.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe um sub-sistema S de **S5** tal que M é uma matriz característica finita de n valores para S . Como demonstrado, M valida pelo menos uma fórmula $F(n)$ de Dugundji de $n + 1$ variáveis proposicionais. Portanto, $F(n)$ é teorema de S . Logo, $F(n)$ é teorema de **S5**, o que é absurdo, pelo Teorema 2.1.7.1. ■

1.3. Modelos para os sistemas modais normais

Na Seção 1.2 anterior, ficou demonstrada a inexistência de matrizes finitas para os sistemas modais. Contudo, isto não impediu que interpretações e modelos semânticos intuitivos fossem desenvolvidos para tais sistemas modais, pioneiramente por Leibniz, Carnap e Kripke (apud **Carnielli e Pizzi 2001**). Na presente seção, introduzimos de forma sucinta modelos para os sistemas modais normais.

1.3.1 Modelos relacionais e estruturas relacionais

Definição 1.3.1.1. Chamamos *estrutura* um par ordenado $F = \langle W, R \rangle$, onde

- a) W é um conjunto $W = \{x, y, z, \dots, x', y', z', \dots, x'', y'', z'', \dots\}$, finito ou infinito, de objetos, chamados *mundos possíveis*;
- b) R é uma *relação de acessibilidade* entre mundos possíveis, ou seja, R é um conjunto de pares ordenados tais que $R \subseteq W \times W$.

Definição 1.3.1.2. Chamamos *modelo relacional* uma tripla ordenada $\langle W, R, v \rangle$, onde:

- a) W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis.
- b) R é uma relação de acessibilidade entre mundos possíveis.
- c) v é uma função $\text{Var} \times W \rightarrow \{0, 1\}$, tal que:

- (i) $v(p, x) = 1$ se, e somente se, $p \in x$;
- (ii) $v(\perp, x) = 0$;

- (iii) $v(A \rightarrow B, x)=1$ se e somente se $v(A, x)=0$ ou $v(B, x)=1$;
- (iv) $v(\Box A, x)=1$ se e somente se $v(A, y)=1$ para todo y em W tal que xRy .

Por razões pragmáticas, podemos adotar formas alternativas de exprimir, com maior especificidade, a atribuição de valores a uma fórmula. Abaixo, exibimos uma dessas formas.

Usemos os símbolos $M, x \models A$ para expressar “ A é verdadeira em um mundo x de um modelo M ”.

Definição 1.3.1.3. Definimos $M, x \models A$, para alguma fbf A , como satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $M, x \models p$ sse $v(p, x)=1$ em M ;
- (ii) $M, x \not\models \perp$;
- (iii) $M, x \models A \rightarrow B$ sse $M, x \not\models A$ ou $M, x \models B$;
- (iv) $M, x \models \Box A$ sse $M, y \models A$ para todo y em W tal que xRy ;

Das condições acima, seguem:

- (v) $M, x \models \neg A$ sse $M, x \not\models A$;
- (vi) $M, x \models A \& B$ sse $M, x \models A$ e $M, x \models B$;
- (vii) $M, x \models \Diamond A$ sse existe algum mundo y em W tal que xRy e $M, y \models A$.

De forma similar, as condições de verdade para $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ e $A = B$ seguem de suas definições na linguagem modal.

Definição 1.3.1.4. Chamamos *modelo sobre F* qualquer modelo relacional $M = \langle W, R, v \rangle$ tal que $F = \langle W, R \rangle$.

Definição 1.3.1.5. Dado um modelo $M = \langle W, R, v \rangle$ e uma fbf A , dizemos que A é *válida em um modelo M* se, e somente se, para todo $x \in W$, temos que $v(A, x) = 1$.

Denotamos por $M \models A$.

Definição 1.3.1.6. Uma fórmula A é *válida em uma estrutura F* se, e somente se, $M \models A$ para todos os modelos M sobre F .

Denotamos por $F \models A$.

Definição 1.3.1.7. Seja um sistema S . M é dito um *modelo para S* sse todas as teses de S são válidas em M .

Intuitivamente, cada noção de necessidade formalizada pelos axiomas modais “corresponde” a certas propriedades da relação de acessibilidade, de modo que, em sistemas modais, as condições de validade são relativizadas a tais propriedades.

A seguir, introduzimos formalmente o tema da validade para os sistemas modais normais **K**, **KD**, **T**, **S4**, **B** e **S5**.

1.3.2 Validade nos sistemas modais normais

Sejam as seguintes propriedades da relação R de acessibilidade:

Serial: para todo mundo possível x existe um mundo y tal que xRy ;

Reflexiva: para todo mundo possível x , xRx ;

Transitiva: para todos os mundos possíveis x , y e z , se xRy e yRz então xRz ;

Simétrica: para todos os mundos possíveis x e y , se xRy então yRx ;

Euclideana: para todos os mundos possíveis x e y , se xRy e xRz , então yRz .

Uma relação R que é reflexiva, transitiva e simétrica é dita *relação de equivalência*.

Observamos que, se uma relação R é ao mesmo tempo euclideana e reflexiva, é direto que R constitui uma relação de equivalência.

Definição 1.3.1.8. Uma fórmula A é dita *K-válida* quando $M \models_K A$ para todos os modelos M , tais que não há restrições sobre as propriedades de R .

Denotamos por $\models_K A$.

Definição 1.3.1.9. Uma fórmula A é dita *KD-válida* quando $M \models_D A$ para todos os modelos M , tais que R é serial.

Denotamos por $\models_D A$.

Definição 1.3.1.10. Uma fórmula A é dita *T-válida* quando $M \models_T A$ para todos os modelos M , tais que R é serial e reflexiva.

Denotamos por $\models_T A$.

Definição 1.3.1.11. Uma fórmula A é dita *S4-válida* quando $M \models_{S4} A$ para todos os modelos M , tais que R é serial, reflexiva e transitiva.

Denotamos por $\models_{S4} A$.

Definição 1.3.1.12. Uma fórmula A é dita *B-válida* quando $M \models_B A$ para todos os modelos M , tais que R é serial, reflexiva e simétrica.

Denotamos por $\models_B A$.

Definição 1.3.1.13 Uma fórmula A é dita *S5-válida* quando $M \models_{S5} A$ para todos os modelos M , tais que R é uma relação euclideana e reflexiva.

Denotamos por $\models_{S5} A$.

Observamos que a **S5**-validade pode ser abreviada da seguinte maneira.

Definição 1.3.1.14. Por *modelo carnapiano*, referimo-nos a um par ordenado $M = \langle W, v' \rangle$, onde W é um conjunto de mundos e v' é uma função $v': \text{Var} \times W \rightarrow \{0,1\}$, definida conforme as seguintes cláusulas⁵:

- (i) $v'(p, x) = 1$ se, e somente se, $p \in x$;
- (ii) $v'(\perp, x) = 0$;
- (iii) $v'(A \rightarrow B, x) = 1$ se e somente se $v'(A, x) = 0$ ou $v'(B, x) = 1$;
- (iv) $v'(\Box A, x) = 1$ se e somente se $v'(A, y) = 1$ para todo y em W .

Assim, podemos considerar uma definição alternativa de **S5**-validade, como abaixo.

Definição 1.3.1.15. Uma fórmula A é dita **S5-válida** quando $M \models_{S5} A$ para todos os modelos carnapianos M .

Teorema 1.3.2.16 (Teorema da Correção) Se uma fbf A é uma tese do sistema modal **S5**, então A é **S5-válida**.

Demonstração: Por indução no comprimento da dedução.

⁵ Observamos que a função v' difere da função v (Definição 1.3.1.1) pela cláusula (iv), agora sem referências à relação de acessibilidade R .

- (i) Os axiomas de **S5** sem ocorrência de $\Box$ ou $\Diamond$ são **S5**-válidos: lembramos que os axiomas de **S5** sem ocorrência de $\Box$ ou $\Diamond$ são os axiomas do **CPC**. Por absurdo, suponha um axioma Ax de **CPC**, tal que existe um mundo x em um modelo carnapiano M , e $M, x \not\models_{S5} Ax$. Como as cláusulas de validade (i)-(iii) da definição 1.3.1.14. são as mesmas da tabela de verdade de **CPC**, então, aplicando a tabela de verdade, Ax é válido. Contradição.
- (ii) Os axiomas modais de **S5** são **S5**-válidos:
- a) **K**: Por absurdo, suponha que **K** não seja **S5**-válido. Portanto, existe um mundo x de um modelo carnapiano M tal que não temos $M, x \models_{S5} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Logo, para algum x em M , $v'(\Box(p \rightarrow q), x)=1$, $v'(\Box p, x)=1$ e $v'(\Box q, x)=0$. Então $v'(p, x)=1$ e $v'(p \rightarrow q, x)=1$, para todo x em M . Contudo, $v'(q, x)=0$ para algum x em M , o que é absurdo.
 - b) **T**: Por absurdo, suponha que existe um mundo x em um modelo carnapiano M tal que não seja o caso que $M, x \models_{S5} \Box p \rightarrow p$. Então, $M, x \models_{S5} \Box p$ e não é o caso que $M, x \models_{S5} p$. Pela definição de v' , $M, y \models_{S5} p$ para todo y em M , o que é contraditório.
 - c) **5**: Por absurdo, suponha que existe um mundo x em M tal que não seja o caso que $M, x \models_{S5} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$. Então: 1) $M, x \models_{S5} \Diamond p$ e 2) não é o caso que $M, x \models_{S5} \Box \Diamond p$. De (1), segue que há pelo menos um x' em M tal que $M, x' \models_{S5} p$. De (2), segue que há um mundo x'' em M tal que não é o caso que $M, x'' \models_{S5} \Diamond p$. Portanto $M, x'' \models_{S5} \neg \Diamond p$, isto é, $M, x \models_{S5} \neg p$ para todo x em M , o que contradiz (1).
- (iii) As regras de inferências de **S5** conservam a **S5**-validade: a demonstração é similar. ■

Podemos demonstrar a consistência de **S5** usando o Teorema 1.3.2.16, como abaixo.

Teorema 1.3.2.17. **S5** é consistente.

Demonstração:

Por absurdo, suponha que existe uma fbf A , tal que $\vdash_{S5} A$ e $\vdash_{S5} \neg A$. Pelo Teorema 1.3.2.16, temos que A é **S5**-válida e $\neg A$ é **S5**-válida. Portanto, pela definição de **S5**-validade, $x \models_{S5} A$ e $x \models_{S5} \neg A$ para todo x em todos os modelos carnapianos, o que é absurdo.

■

Observamos que, mediante procedimento análogo ao utilizado no Teorema 1.3.2.16, podemos demonstrar a correção dos sistemas modais **K**, **T**, **KD**, **B** e **S4**.

A demonstração da completude desses sistemas modais normais pode ser encontrada em **Carnielli e Pizzi 2008**.

A seguir, conforme exposto em **Castro 2004**, investigamos alguns aspectos das lógicas paraconsistentes. Em particular, examinamos as hierarquias paraconsistentes C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1964a, 1964b, 1964c e 1974**).

Capítulo 2 - Lógicas paraconsistentes

Uma teoria **T**, em cuja linguagem L ocorre o símbolo de negação $\neg$, é *inconsistente* (ou *contraditória*) em relação à negação $\neg$ se existe uma fórmula A de L tal que A e $\neg A$ são teoremas de **T**; caso contrário, **T** é *consistente*.

Uma teoria **T** é *trivial* (ou *supercompleta*), se toda fórmula de sua linguagem L é teorema de **T**; caso contrário, **T** é *não-trivial*.

Uma lógica é *paraconsistente* se pode ser utilizada como lógica subjacente para teorias inconsistentes e não-triviais, ditas *teorias paraconsistentes*.

Se uma teoria **T** em cuja linguagem ocorre o símbolo de negação é trivial, é imediato que **T** é inconsistente. Contudo, a recíproca não é necessariamente válida, como é o caso das teorias paraconsistentes (ver **D'Ottaviano 1990** e **Castro 2004**).

Entretanto, a presença de contradição em teorias **T** cuja lógica subjacente é, por exemplo, a lógica clássica ou a lógica intuicionista, tem como consequência imediata a trivialização de **T**.

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, em certo sentido, restringido. Podemos mesmo afirmar, como **da Costa & Marconi 1989** que, se a força desse princípio é restringida em um dado sistema lógico, então esse sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes.

De fato, nas lógicas paraconsistentes, o princípio da (não-) contradição – qualquer uma de suas formulações equivalentes ou qualquer uma de suas teses correlatas – não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente *lato sensu*, o *princípio da explosão*, ou de Duns Scotus, não é válido; isto é, de uma fórmula A e de sua negação $\neg A$ não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula (ver **Carnielli e Marcos 2002**).

Jaśkowski 1948 e **Jaśkowski 1949** (ver **Jaśkowski 1969**) chamam a atenção, pela primeira vez na literatura, sobre a diferença entre sistemas contraditórios e sistemas *super-completos*, nos quais todas as fórmulas são teses.

Jaśkowski propõe o problema da construção de um cálculo proposicional com as seguintes propriedades:

1. *Quando aplicado a sistemas contraditórios não implicaria sua super-completude (trivialização);*
2. *Seria rico o bastante para permitir inferências práticas;*
3. *Teria uma justificação intuitiva.*

O problema acima é conhecido como o *Problema de Jaśkowski*. Jaśkowski apresenta sua solução, em nível proposicional, conhecida como *lógica discursiva de Jaśkowski*, denotada por D_2 . De modo superficial (ver **D'Ottaviano 1990**), a lógica discursiva D_2 de Jaśkowski é obtida a partir do sistema modal normal **S5**, definindo-se a conjunção discursiva, a implicação discursiva e a equivalência discursiva como segue:

$$A \&_d B =_{df} A \& \Diamond B$$

$$A \rightarrow_d B =_{df} \Diamond A \rightarrow B \text{ e}$$

$$A \leftrightarrow_d B =_{df} (\Diamond A \rightarrow B) \& (\Diamond B \rightarrow A).$$

O símbolo $\Diamond$ pode ser lido como “alguém mantém que”.

Os teoremas de D_2 são caracterizados, por definição, pela cláusula: uma fbf A da linguagem de D_2 é teorema de D_2 se, e somente se, $\Diamond A$ é teorema de **S5**.

O sistema D_2 , com os conectivos $\&_d$, $\rightarrow_d$, $\leftrightarrow_d$ e $\vee$, possui todas as propriedades da lógica clássica positiva.

Da Costa e Dubikajtis 1968 apresentam uma axiomatização para o cálculo proposicional de Jaśkowski e iniciam um estudo semântico do mesmo. O trabalho introduz o sistema J, cujos conectivos primitivos são $\Box$, $\rightarrow$, $\neg$ e $\vee$. Os axiomas e regras são as seguintes:

$$J_1: \Box((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

$$J_2: ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$$

$$J_3: \Box(B \rightarrow (A \vee B))$$

$$J_4: \Box(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B))$$

$$J_5: \Box((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$$

$$J_6: \Box(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$$

$$J_7: \Box(A \rightarrow (A \vee B))$$

$$J_8: \Box(\Box A \rightarrow A)$$

$$J_9: \Box(A \rightarrow \Box \Diamond A)$$

$$R1: \frac{A, \Box(A \rightarrow B)}{B}$$

B

$$R2: \frac{\Diamond A}{A}$$

A

Então, **da Costa e Dubikajtis 1968** demonstram a equivalência entre J e D_2 , após definir os seguintes conectivos discursivos:

$$A \text{ j} \& B =_{df} \Diamond A \& B$$

$$A \& \text{j} B =_{df} A \& \Diamond B$$

$$A \rightarrow \text{j} B =_{df} \Diamond A \rightarrow B \text{ e}$$

$$A \leftrightarrow \text{j} B =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A).$$

Em outro trabalho de 1977, os mesmos autores introduzem duas outras axiomáticas equivalentes para D_2 . **Kotas 1975** investiga a algebrização de D_2 e prova que D_2 não é decidível por matrizes finitas. **Furmanowski 1975** prova que o Teorema da Dedução, em sua forma clássica, se mantém no cálculo discursivo sentencial. **Kotas e da Costa 1977** mostram que D_2 preenche todos os requisitos para ser uma lógica paraconsistente. Além disso, os autores mostram que uma grande variedade de lógicas modais – dentre as quais, várias lógicas paraconsistentes interessantes – pode ser obtida associando-se a toda lógica modal sua lógica de Jaśkowski correspondente. **Kota e da Costa 1978** introduzem certos tipos de lógica discursiva usando as lógicas polivalentes de Łukasiewicz. Segundo da **Costa e Marconi 1989**, esse é também o caso de **Karpenko 1984**. **Da Costa e Kotas 1979** exibem outra axiomatização, SD_2 , para a lógica discursiva, constroem o cálculo de predicado com igualdade correspondente e definem uma semântica para o mesmo.

Apesar de Jaśkowski ter construído um cálculo proposicional paraconsistente, Newton Carneiro Affonso da Costa é efetivamente considerado o fundador da lógica paraconsistente (**Arruda 1980 e D'Ottaviano 1990**).

A hierarquia de cálculos proposicionais C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1964a, 1964b, 1964c e 1974**) foi construída satisfazendo as seguintes condições:

1. *O princípio da (não-) contradição, na forma $\neg(A \& \neg A)$, não é válido em geral;*

2. *De duas fórmulas contraditórias, A e $\neg A$, não deve ser possível, em geral, deduzir uma fórmula arbitrária, B ;*
3. *Os sistemas contêm os esquemas e regras mais importantes da lógica clássica que são compatíveis com as condições (1) e (2).*

Da Costa estendeu sua hierarquia de cálculos proposicionais à hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem C_n^* , $1 \leq n \leq \omega$, e à hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$; à hierarquia de cálculos de descrições D_n , $1 \leq n \leq \omega$; e à hierarquia de teorias de conjuntos inconsistentes e aparentemente não-triviais NF_n , $1 \leq n \leq \omega$ (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1964a, 1964b, 1964c e 1974**).

Da Costa & Alves 1976, Alves 1976 e da Costa & Alves 1977 introduzem uma semântica de valorações para os cálculos C_n , $1 \leq n \leq \omega$, que generaliza a semântica clássica de valorações. Definem as quase-matrizes, para demonstrar a decidibilidade dos sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$. **Loparic & Alves 1980**, baseado em **da Costa & Alves 1977**, modifica certas condições da definição de valoração de da Costa e Alves, resolve um problema relativo às quase-matrizes, e apresenta uma demonstração da decidibilidade dos sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Marconi 1980 introduz um sistema de tableaux semânticos, à la Beth (ver **Beth 1955**), e demonstra a completude e decidibilidade do sistema proposicional C_1 de da Costa. **Carnielli e Lima-Marques 1992** introduz sistemas de tableaux semânticos, à la Smullyan 1968 (apud **Castro 2004**), para a lógica proposicional paraconsistente C_1^1 e para a lógica quantificacional paraconsistente $C_1^{1=}$ de Alves, denominados sistemas TC_1 e sistema $TC_1^{1=}$, respectivamente, e apresenta uma prova de que esses sistemas são completos e decidíveis. **Buchsbaum e Pequeno 1993** introduz sistemas de tableaux sintáticos, à la Smullyan, para

os sistemas C_1 e C_1^* de da Costa, os sistemas SC_1 e SC_1^* , mostrando que SC_1 e SC_1^* são completos. **Moura 2002** e **Moura e D'Ottaviano 2002** introduzem um cálculo de seqüentes para o cálculo proposicional paraconsistente C_ω , denominado NCG_ω , e demonstram um Teorema de Eliminação do Corte.

Da Costa, seus discípulos e colaboradores introduziram e investigaram diversos sistemas paraconsistentes. Desde 1964, as lógicas de da Costa têm sido amplamente estudadas por lógicos brasileiros e de diversos países. Muitos autores têm contribuído para o desenvolvimento dessas lógicas e da lógica paraconsistente em geral.

Para **Haack 1978**, as lógicas paraconsistentes são ditas *não-clássicas*, ou *rivais* da lógica clássica, dado que as lógicas paraconsistentes restringem princípios clássicos.

A lógica paraconsistente está fortemente relacionada com outros tipos de lógicas não-clássicas, por exemplo, com a lógica dialética, a lógica relevante, as lógicas paracompletas e polivalentes, as lógicas fuzzy, entre outras.

2.1. Cálculos proposicionais paraconsistentes C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa

Definimos *linguagem paraconsistente* como uma quádrupla $LP = \langle \text{Var}, \rightarrow, \sim, \vee, \& \rangle$ onde:

$\text{Var} = \{p, q, r, \dots p_1, q_1, r_1, \dots p_2, q_2, r_2, \dots\}$ é um conjunto de símbolos para variáveis proposicionais;

$\sim$ é o símbolo para *negação paraconsistente*;

$\rightarrow$ o símbolo para *implicação*;

$\vee$ é o símbolo para *disjunção*;

$\&$ é o símbolo para *conjunção*;

O conjunto **FormLP** de fórmulas bem formadas (fbf) é definido como usualmente:

- a) Para todo p tal que $p \in \text{Var}$, p é uma fbf;
- b) Se A é uma fbf, $\sim A$ é uma fbf;
- c) Se A e B são fbfs e $*$ é $\rightarrow$, $\vee$ ou $\&$, então $(A * B)$ é uma fbf;
- d) Não há outras fbfs.

Usaremos as letras maiúsculas $A, B, C \dots$ como metavariáveis sobre as fórmulas de **FormLP**.

O uso dos parênteses é o usual.

As definições de símbolos auxiliares são as seguintes:

Em C_n , $1 \leq n \leq \omega$, se A e B são fórmulas quaisquer, são introduzidas as seguintes definições.

Definição 2.1.1. (Def 0) $A^0 = \text{df } \sim(A \& \sim A)$

Definição 2.1.2. (Def $\sim^*$) $\sim^* A = \text{df } \sim A \& A^0$

Definição 2.1.3. (Def k) $A^k = \text{df } A^{00\dots 0}$, onde o símbolo 0 aparece k vezes, $k \geq 1$.

Definição 2.1.4. (Def $^{(k)}$) $A^{(k)} = \text{df } A^1 \& A^2 \dots A^k$, $k \geq 1$.

Definição 2.1.5. (Def $\sim^{(k)}$) $\sim^{(k)} A = \text{df } \sim A \& A^{(k)}$, $k \geq 1$.

Definição 2.1.6. (Def $\leftrightarrow$) $A \leftrightarrow B = \text{df } (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$

De acordo com as definições acima, A^0 é usualmente lida como “A é uma fórmula bem comportada” ou “A é uma fórmula regular”, e o operador “o” é usualmente denominado de “operador bola”; A^k pode ser lida como “A é uma fórmula com o operador bola reiterado k-vezes”; $A^{(k)}$ pode ser lida como “A é uma fórmula de grau k”, ou “A é uma fórmula composta de grau k”; em C_n , $1 \leq n \leq \omega$, $A^{(n)}$ pode ser lida como “A é uma fórmula bem comportada” em C_n ou “A é uma fórmula regular” em C_n ; e, para cada n , $1 \leq n \leq \omega$, o conectivo $\sim^n$ é denominado “negação forte” do sistema C_n (ver **Castro 2004**).

Os axiomas e regra de inferência de C_n , $1 \leq n < \omega$, são os seguintes:

Axioma 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Axioma 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Axioma 3 $A \& B \rightarrow A$

Axioma 4 $A \& B \rightarrow B$

Axioma 5 $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$

Axioma 6 $A \rightarrow A \vee B$

Axioma 7 $B \rightarrow A \vee B$

Axioma 8 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

Axioma 9 $\sim\sim A \rightarrow A$

Axioma 10 $A \vee \sim A$

Axioma 11 $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$

Axioma 12 $A^{(n)} \& B^{(n)} \rightarrow (A \& B)^{(n)}$

Axioma 13 $A^{(n)} \& B^{(n)} \rightarrow (A \vee B)^{(n)}$

Axioma 14 $A^{(n)} \& B^{(n)} \rightarrow (A \rightarrow B)^{(n)}$

Modus Ponens (MP)

A

$A \rightarrow B$

B

O Axioma 11 constitui um caso particular de *reductio ad absurdum*, afirmando que o Princípio de *Redução ao Absurdo* na lógica paraconsistente C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa só se aplica quando a fórmula B é uma fórmula bem comportada de grau n. Os Axiomas 12-14 de da Costa podem ser interpretados como condições para a “propagação do bom comportamento”.

O sistema C_ω é definido pelos seguintes esquemas de axiomas e regras de dedução:

AXIOMA 1 ao AXIOMA 10

MP.

A seguir, apresentamos algumas propriedades importantes dos cálculos C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 2.1.7 (da Costa 1963a) Em C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são demonstráveis todos os teoremas da lógica proposicional positiva clássica.

Teorema 2.1.8 (da Costa 1963a) Em C_1 são válidas todas as regras do Teorema 2 de Kleene 1974, p. 98, exceto a referente ao método de redução ao absurdo:

1. $\frac{\Gamma, A \vdash_{C_1} B}{\Gamma \vdash_{C_1} A \rightarrow B}$
2. $A, A \rightarrow B \vdash_{C_1} B$
3. $A, B \vdash_{C_1} A \& B$
4. $A \& B \vdash_{C_1} A$
5. $A \& B \vdash_{C_1} B$
6. $A \vdash_{C_1} A \vee B$
7. $B \vdash_{C_1} A \vee B$
8. $\sim\sim A \vdash_{C_1} A$
9. $\frac{\Gamma, A \vdash_{C_1} C \quad \Gamma, B \vdash_{C_1} C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{C_1} C}$

Pelo Teorema 2.1.8-(1), podemos demonstrar o Metateorema da Dedução (MtD) para C_1 , que pode ser generalizado para as lógicas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, em geral.

Teorema 2.1.9. Metateorema da Dedução (MtD) Se Γ é um conjunto de fórmulas, então $\Gamma, A \vdash_{C_n} B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{C_n} A \rightarrow B$, $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 2.1.10 Em C_n , $1 \leq n < \omega$, as seguintes fórmulas são teoremas:

- i. $\sim(A \& B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$
- ii. $\sim(A^k) \rightarrow (A \& \sim A)$, para $k \geq 1$
- iii. $\sim(A^{(k)}) \rightarrow (A \& \sim A)$, para $k \geq 1$

- iv. $A^{(n)} \rightarrow (\sim A)^{(n)}$, para $k \geq 1$
- v. $(A^{(n)} \& \sim A \& A) \rightarrow B$
- vi. $(A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$
- vii. $(A \vee A) \rightarrow A$
- viii. $\sim \sim^k A \leftrightarrow A$, para $k \geq n$
- ix. $\sim \sim^k A \rightarrow A$, para $k \geq 1$
- x. $(A)^{n+1}$
- xi. $A^{(n)} \rightarrow \sim(\sim A \& A)$
- xii. $(A^{n-1} \& \sim A^{n-1})^{(n)}$
- xiii. $(\sim^k A)^{(n)}$, para $k \geq n$
- xiv. $\sim^s(A \& \sim^k A)$, para $s \geq 1$ e $k \geq n$
- xv. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- xvi. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- xvii. $A \vee (A \rightarrow B)$

O teorema abaixo é a generalização de um teorema para o sistema C_1 (ver **da Costa 1963a**, p. 12).

Teorema 2.1.11. Em C_n , $1 \leq n < \omega$, é válida a seguinte versão do método de redução ao absurdo:

$$\frac{\Gamma \vdash_{C_n} B^{(n)} \quad \Gamma, A \vdash_{C_n} B \quad \Gamma, A \vdash_{C_n} \sim B}{\Gamma \vdash_{C_n} \sim A.}$$

Teorema 2.1.12. (da Costa 1974b) Em C_n , $1 \leq n < \omega$, $\sim^n$ tem todas as propriedades da negação clássica.

O Teorema 2.1.12 pode ser generalizado para a negação $\sim^k$, $k \geq n$ (ver **Castro 2004**, p. 31).

Teorema 2.1.13. Os seguintes esquemas de fórmulas são demonstráveis em C_ω :

- i. $\sim(A^k) \rightarrow (A \ \& \ \sim A)$, para $k \geq 1$
- ii. $A^k \vee A$, para $k \geq 1$
- iii. $A^k \vee \sim A$, para $k \geq 1$
- iv. $A^{(k)} \vee A$, para $k \geq 1$
- v. $A \vee \sim^k A$, para $k \geq 1$
- vi. $(A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$
- vii. $\sim\sim A^k \vee B$, para $k \geq 1$

Ver **Castro 2004**.

As subfórmulas A_i , $1 \leq i \leq m$, de A que são da forma $B \ \& \ C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$, $\sim B$ são ditas *componentes primos* de A .

Teorema 2.1.14. Se Γ é um conjunto de fórmulas e $A_1, A_2, \dots, A_m$ são os componentes primos das fórmulas de $\Gamma \cup \{A\}$, então (ver **Castro 2004**)

$\Gamma \vdash_{C_0} A$ se e somente se $\Gamma, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_m^{(n)}, \vdash_{C_n} A$.

Definição 2.1.15. Sejam dois sistemas formais S e S' , cuja linguagem é LP . S' é *estritamente mais forte* que S se, e somente se, o conjunto de teoremas de S é subconjunto próprio do conjunto de teoremas de S' , ou seja

1. Para toda fórmula A de LP , se $\vdash_S A$ então $\vdash_{S'} A$
2. Existe uma fórmula B de LP , tal que $\vdash_{S'} B$ e $\not\vdash_S B$.

Teorema 2.1.16. (da Costa 1963a) Cada um dos cálculos da hierarquia C_n , $1 \leq n < \omega$, é estritamente mais forte do que os cálculos seguintes na hierarquia.

Um exemplo direto é que o AXIOMA 11 de algum cálculo C_k , $k > n$, é teorema em C_n , enquanto que o AXIOMA 11 de C_n não é teorema em C_k .

Teorema 2.1.17. (da Costa 1974b) Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são consistentes.

Teorema 2.1.18. (da Costa 1974b) Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, não são decidíveis por matrizes finitas.

Teorema 2.1.19. (Fidel 1977) Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são decidíveis.

Da Costa e Alves 1976 e Alves 1976 desenvolvem uma semântica, à la Henkin, e demonstram a correção e completude do sistema C_1 . Demonstram também a decibilidade de C_1 . **Da Costa e Alves 1976 e Alves 1976** estendem a semântica de C_1 para os cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$. Para tais demonstrações, introduzem o conceito de valoração paraconsistente para o sistema C_1 através de uma valoração bivalente, e um procedimento de decisão

denominado quase-matrizes. No entanto, a definição de valoração introduzida por da Costa e Alves contém erros, posteriormente retificados por **Loparić e Alves 1980**, resultando na seguinte definição de valoração paraconsistente para C_n , $1 \leq n < \omega$:

Definição 2.1.20. Se **FormLP** é o conjunto de fórmulas da linguagem LP de C_n , $1 \leq n < \omega$, uma valoração para C_n é uma função $v: \mathbf{FormLP} \rightarrow \{0,1\}$, tal que:

1. Se $v(A) = 0$, então $v(\sim A) = 1$
2. Se $v(A) = 0$, então $v(\sim\sim A) = 0$
3. $v(A \& B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$
4. $v(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$
5. $v(A \rightarrow B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$
6. Se $v(A^{n-1}) = v(\sim A^{n-1})$, então $v(A^n) = 0$
7. Se $v(A) = v(\sim A)$, então $v(\sim A^1) = 1$
8. Se $v(A) \neq v(\sim A)$ e $v(B) \neq v(\sim B)$, então $v(A\#B) \neq v(A\#B)$, onde $\#$ é $\&$, $\vee$, $\rightarrow$.

9.

Teorema 2.1.21. (Loparić e Alves 1980) Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são decidíveis.

A seguir, alguns exemplos de esquemas que não são demonstráveis em C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 2.1.22. Os seguintes esquemas não são demonstráveis em C_n , $1 \leq n \leq \omega$:

- i. $\sim(A \& \sim A)$
- ii. $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$
- iii. $A \rightarrow \sim\sim A$

- iv. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- v. $\sim A \leftrightarrow \sim^n A$
- vi. $(A \vee \sim A)^{(n)}$
- vii. $A \rightarrow \sim^k \sim A$
- viii. $(A \& \sim A) \rightarrow B$
- ix. $(A \rightarrow A)^{(n)}$
- x. $\sim A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$
- xi. $\sim(A \& \sim A) \rightarrow \sim(\sim A \& A)$

Definição 2.1.23. Se **FormLP** é o conjunto de fórmulas da linguagem LP de C_ω , uma *semi-valorção* para C_ω é função $s: \mathbf{FormLP} \rightarrow \{0,1\}$, tal que:

- 1. Se $s(\sim A) = 0$, então $s(A) = 1$
- 2. Se $s(\sim \sim A) = 1$, então $s(A) = 1$
- 3. $s(A \& B) = 1$ se, e somente se, $s(A) = 1$ e $s(B) = 1$
- 4. $s(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $s(A) = 1$ ou $s(B) = 1$
- 5. Se $s(A \rightarrow B) = 0$, então $s(B) = 0$
- 6. Se $s(A \rightarrow B) = 1$, então $s(A) = 0$ ou $s(B) = 1$

Definição 2.1.24. Uma *valorção* v para C_ω é uma semi-valorção que satisfaz a seguinte condição:

7. Se $v(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_{m-1} \rightarrow A_m) \dots)) = 0$, então existe uma semi-avaliação s tal que, para todo i , $1 \leq i < m$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_m) = 0$.

Definição 2.1.25. Uma avaliação v é um *modelo* de um conjunto de fórmulas, $\Gamma \subseteq \mathbf{FormLP}$, se e somente se, para toda fórmula $A \in \Gamma$, $v(A) = 1$.

Teorema 2.1.26. (Loparic 1986) O sistema C_ω é correto, completo e decidível.

Teorema 2.1.27. Os seguintes resultados são demonstráveis em C_ω .

- i. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- ii. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- iii. $\sim(A \& B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$
- iv. $A \vee (A \rightarrow B)$

Definição 2.1.28. Dado um conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma \subseteq \mathbf{FormLP}$, dizemos que o conjunto Γ é *trivial* se o conjunto de consequências sintáticas de Γ é $\mathbf{FormLP}$; Γ é dito *inconsistente*, relativamente à negação básica $\sim$, se existe uma fórmula A tal que as fórmulas A e $\sim A$ são consequências sintáticas de Γ .

Observamos que, pela Definição 2.1.28 e pelo Teorema 2.1.22, os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são não-triviais.

Definição 2.1.29. Dado um sistema S e uma fórmula A , tal que $A \in \mathbf{FormS}$, seja agora $S(A)$ o sistema obtido pelo acréscimo da fórmula A ao conjunto de axiomas de S .

Dizemos que o sistema S é *finitamente trivializável* se, e se somente se, existe A tal que $S(A)$ é trivial; caso contrário, S é dito *infinitamente trivializável*.

Teorema 2.1.30. (da Costa 1963a) Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são finitamente trivializáveis.

Teorema 2.1.31. (da Costa 1963a) O sistema C_ω é infinitamente trivializável.

A seguir, abordamos algumas relações entre paraconsistência e modalidade, conforme exposto em **Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006, Marcos 2004, Vakarelov 1989 e Dosen 1999**.

Capítulo 3 - Modalidade paraconsistente

Como mencionado no Capítulo 2, relações entre paconsistência e modalidade já estão presentes no próprio nascimento da lógica paraconsistente formal, com a lógica discursiva D2 de Jaśkowski, tendo sido exploradas por diversos pesquisadores.

Jean-Yves Béziau, em artigos recentes, analisa a estreita analogia entre a lógica paraconsistente e a lógica modal.

De fato, seja $\neg$ o símbolo de negação clássica e $\Box$ um operador de necessidade. **Béziau 2002b** e **Béziau 2005** argumentam que a lógica **S5** é uma lógica paraconsistente, mostrando que, assim como existe uma correspondência entre a negação intuicionista e a modalidade $\Box\neg$, se tomamos como lógica subjacente o sistema modal **S4** (ver **Gödel 1933**), é possível definir em **S5** uma negação paraconsistente $\sim$ da seguinte maneira:

$$\sim A =_{df} \neg \Box A.$$

Para Béziau, esse fato “extremamente relevante” (ver **Béziau 2002b**) não obteve ainda a devida atenção dos pesquisadores da lógica paraconsistente.

Béziau mostra que o operador paraconsistente $\sim$ possui propriedades não-explosivas. Além disso, $\sim$ satisfaz algumas propriedades clássicas, como:

- (i) $\vdash_{CPC} A \vee \sim A$
- (ii) $\vdash_{CPC} \sim(A \ \& \ \sim A)$
- (iii) $\vdash_{CPC} (A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A.$

Deste modo, Béziau pretende fornecer uma solução ao problema da própria existência de lógicas paraconsistentes, conforme discutido em **Béziau 2000b** e **Béziau 2002**.

Béziau 2002b mostra que é possível extrair lógicas paraconsistentes de sistemas modais em geral.

Dada uma lógica modal $M = \langle F, \neg, \Box, \Diamond, \vee, \&, \rightarrow, \vdash_M \rangle$, consideremos a função $*$, do conjunto de fórmulas G – contruído a partir dos conectivos $\sim, \vee, \&, \rightarrow$ – no conjunto de fórmulas F – construído a partir dos conectivos modais $\neg, \vee, \&, \rightarrow, \Box, \Diamond$ – definida por:

1. $A^* = A$, se A é fórmula atômica.
2. $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$, onde $\cdot$ é $\vee, \&, \rightarrow$
3. $(\sim A)^* = \neg \Box(A)^*$.

Podemos definir a lógica paraconsistente PM associada a M como a lógica $PM = \langle G, \sim, \vee, \&, \rightarrow, \vdash_{PM} \rangle$, tal que

$$\Gamma \vdash_{PM} A \text{ se e somente se } \Gamma^* \vdash_M A^*,$$

com Γ um conjunto de fórmulas de G , e Γ^* o conjunto imagem de Γ em F , segundo $*$.

Observamos que, de acordo com **da Silva, D'Ottaviano & Sette 1999** e **Feitosa & D'Ottaviano 2001**, a função $*$ constitui uma tradução conservativa da lógica M na lógica PM.

Béziau 2002b também mostra que é possível seguir o caminho inverso, ou seja, obter lógicas modais a partir de lógicas paraconsistentes (ver também **Marcos 2004**).

Segundo **Marcos 2004**, algumas propriedades clássicas da negação são recuperadas mediante a introdução de um conectivo de consistência (ver **Carnielli & Marcos 2002**):

$$\circ A \text{ =df } A \rightarrow \neg \neg A$$

A sintaxe formal da negação paraconsistente $\sim$ foi axiomatizada por **Béziau 2006**.

A seguir, introduzimos o Sistema Paraconsistente **Z**, conforme **Béziau 2006**, adicionando demonstrações e definições não explicitadas em **Béziau 2006**.

3.1 O Sistema Paraconsistente Z

Definimos a *linguagem de Z* como uma quintupla $L(Z) = \langle \text{Var}, \&, \vee, \rightarrow, \sim \rangle$, onde:

$\text{Var} = \{p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, r_2, \dots\}$ é um conjunto de símbolos, chamados de *variáveis proposicionais*;

$\&$ é o símbolo para *conjunção*;

$\vee$ é o símbolo para *disjunção*;

$\rightarrow$ é o símbolo para *implicação*;

$\sim$ é o operador de *negação*.

O conjunto **FormZ** de fórmulas bem formadas (fbf) é definido como usualmente, conforme visto nas Seções 1.1 e 2.1.

Chamamos *teoria* um conjunto Γ tal que $\Gamma \subseteq \mathbf{FormZ}$.

O uso dos parênteses é o usual e, como nos capítulos anteriores, usaremos as letras maiúsculas A, B, C... como metavariáveis sobre as fórmulas de **FormZ**.

Os axiomas e regras de inferência do sistema Z são os seguintes:

AP1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

AP2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

AP3 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

AP4 $A \& B \rightarrow A$

AP5 $A \& B \rightarrow B$

AP6 $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$

AP7 $A \rightarrow A \vee B$

AP8 $B \rightarrow A \vee B$

AP9 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

AZ1 $A \vee \sim A$

AZ2 $((A \& \sim B) \& \sim(A \& \sim B)) \rightarrow (A \& \sim A)$

AZ3 $\sim(A \& B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$

AZ4 $\sim\sim A \rightarrow A$

Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{c} A \\ \hline A \rightarrow B \\ \hline B \end{array}$$

RZ

$$\begin{array}{c} \hline A \rightarrow B \\ \hline \sim(A \& \sim B) \end{array}$$

Os axiomas AP1-AP9 são os axiomas da lógica positiva clássica.

Definimos *teorema* da forma usual, no sistema **Z**.

Além disso, a reflexividade, a monotonicidade e a transitividade do operador de dedução $\vdash_z$, além do Teorema da Dedução, são demonstráveis em **Z** como usualmente.

Teorema 3.1.1. (Teorema da Dedução) Seja Γ uma teoria do sistema $\mathbf{Z}$, e A e B

fbf's. Temos que $\Gamma, A \vdash_z B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_z A \rightarrow B$.

Teorema 3.1.2. (Regra de Equivalência) Sejam fbf's A e B e $\vdash_z A \leftrightarrow B$. Seja C uma fórmula que contém uma ou mais ocorrências de A e seja C' obtida pela substituição de uma ou mais ocorrências de A por B em C . Nessas condições, $\vdash_z C \leftrightarrow C'$.

Lema 3.1.3 (AZ3_n) As seguintes fórmulas são teoremas da lógica $\mathbf{Z}$:

$$[AZ3_n] \sim(A_1 \& \dots \& A_n) \rightarrow (\sim A_1 \vee \dots \vee \sim A_n)$$

Demonstração: Por indução em n . A base da indução, para $n=2$, é o Axioma AZ3.

Como hipótese de indução, temos

$$[H.I.] \sim(A_1 \& \dots \& A_{n-1}) \rightarrow (\sim A_1 \vee \dots \vee \sim A_{n-1}).$$

Pelo Axioma AZ3, temos:

$$\sim((A_1 \& \dots \& A_{n-1}) \& A_n) \rightarrow (\sim(A_1 \& \dots \& A_{n-1}) \vee \sim A_n).$$

Como é bem conhecido, a partir dos axiomas positivos (AP1)-(AP9), é demonstrável o seguinte teorema:

$$\vdash_z (A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (D \vee C)))$$

Substituindo, no esquema acima, a variável A por $\sim((A_1 \& \dots \& A_{n-1}) \& A_n)$, B por $\sim(A_1 \& \dots \& A_{n-1})$, C por $\sim A_n$ e D por $(\sim A_1 \vee \dots \vee \sim A_{n-1})$, e usando a Regra MP, obtemos

$$\sim(A_1 \& \dots \& A_n) \rightarrow \sim(\sim A_1 \vee \dots \vee \sim A_n). \blacksquare$$

Teorema 3.1.4. As seguintes fbf's são demonstráveis em $\mathbf{Z}$:

$$(i) \sim(A \& \sim A)$$

$$(ii) (A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A$$

$$(iii) (\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$(iv) (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$$

$$(v) \sim(A \vee B) \rightarrow \sim A \ \& \ \sim B$$

$$(vi) \sim(\sim A \vee \sim B) \rightarrow A \ \& \ B$$

$$(vii) \sim(\sim A \ \& \ \sim B) \rightarrow A \vee B$$

$$(viii) \sim(A \vee \sim B) \rightarrow \sim A \ \& \ B$$

$$(ix) \sim(A \ \& \ \sim B) \rightarrow \sim A \vee B$$

$$(x) \sim(\sim A \vee B) \rightarrow A \ \& \ \sim B$$

$$(xi) \sim(\sim A \ \& \ B) \rightarrow A \vee \sim B$$

$$(xii) \sim(A_1 \ \& \ ... \ \& \ A_n) \rightarrow (\sim A_1 \vee ... \vee \sim A_n)$$

A seguir, demonstramos alguns itens da proposição acima. Usamos a expressão “Resultado positivo conhecido” (RPC) com referência a teoremas conhecidos na literatura, derivados dos axiomas positivos AP1-AP9 (ver, por exemplo, **Kleene 1974**).

Demonstração:

(i)

$$1. \vdash_z A \rightarrow A \quad \text{RPC}$$

$$3. \vdash_z \sim(A \ \& \ \sim A) \quad 1, \text{ **RZ**}$$

(vi)

$$1. \vdash_z (A \rightarrow B) \rightarrow \sim(A \ \& \ \sim B) \quad \text{Regra **RZ**, Teorema da Dedução}$$

$$2. \vdash_z \sim(A \ \& \ \sim B) \rightarrow \sim A \vee \sim \sim B \quad \text{Axioma **AZ3**}$$

$$3. \vdash_z ((\sim A \vee \sim \sim B) \ \& \ (\sim \sim B \rightarrow B)) \rightarrow \sim A \vee B \quad \text{RPC}$$

$$4. \vdash_z ((A \ \& \ B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{RPC}^6$$

$$5. \vdash_z (\sim \sim B \rightarrow B) \rightarrow ((\sim A \vee \sim \sim B) \rightarrow \sim A \vee B) \quad 3, 4, \text{ **MP**}$$

⁶ Usamos o esquema do seguinte modo: substituímos A por $(\sim A \vee \sim \sim B)$, B por $(\sim \sim B \rightarrow B)$ e C por $\sim A \vee B$.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 6. $\vdash_z \sim\sim B \rightarrow B$ | Axioma AZ4 |
| 7. $\vdash_z (\sim A \vee \sim\sim B) \rightarrow \sim A \vee B$ | 5, 6, MP |
| 8. $\vdash_z \sim(A \& \sim B) \rightarrow \sim A \vee B$ | 2, 7, Axioma AP2 , MP |
| 9. $\vdash_z (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$ | 1, 8, Axioma AP2 , MP ■ |

3.2. Análise semântica da lógica paraconsistente Z

Nesta seção, introduzimos os modelos paraconsistentes para a lógica Z.

Definição 3.2.1. Por *modelo modal paraconsistente*, ou **Z-modelo**, referimo-nos a um par ordenado $M = \langle W, v \rangle$, onde W é um conjunto de mundos possíveis e v é uma função $v: \text{Var} \times W \rightarrow \{0,1\}$, definida conforme as seguintes cláusulas:

- (i) $v(p, x) = 1$ se, e somente se, $p \in x$;
- (ii) $v(A \rightarrow B, x) = 1$ se, e somente se, $v(A, x) = 0$ ou $v(B, x) = 1$;
- (iii) $v(A \vee B, x) = 1$ se, e somente se, $v(A, x) = 1$ ou $v(B, x) = 1$;
- (iv) $v(A \& B, x) = 1$ se, e somente se, $v(A, x) = 1$ e $v(B, x) = 1$;
- (v) $v(\sim A, x) = 0$ se, e somente se, $v(A, y) = 1$ para todo y em W .

Das condições acima, seguem:

- (vi) $v(\sim A, x) = 1$ se, e somente se, existe y em W tal que $v(A, y) = 0$.
- (vii) Se $v(A, x) = 0$ então $v(\sim A, x) = 1$.

Definição 3.2.2. Uma fórmula A é dita *válida em um Z -modelo* $M = \langle W, v \rangle$ se, e somente se, $v(A, x) = 1$ para todo x em W .

Denotamos por $M \models_z A$.

Definição 3.2.3. Uma fórmula A é dita *Z -válida* se, e somente se, $M \models_z A$ para todos os Z -modelos.

Denotamos por $\models_z A$.

Definição 3.2.4. Uma fórmula A é dita *consequência semântica* de uma teoria Γ em um Z -modelo M se, e somente se, para todo $x \in M$, e para toda fbf $B \in \Gamma$, se $v(B, x) = 1$ então $v(A, x) = 1$.

Denotamos por $\Gamma \models_z^M A$.

Definição 3.2.5. Uma fórmula A é dita *Z -consequência* de uma teoria Γ se, e somente se, A é consequência de Γ em todos os Z -modelos.

Denotamos por $\Gamma \models_z A$.

A seguir, definimos uma interpretação da lógica Z na lógica modal **S5**, lembrando que os conectivos de $L(Z)$ são $\sim, \&, v, \rightarrow$ e os de $L(S5)$ são $\neg, v, \&, \rightarrow, \Box$ (ver Capítulo 1).

Definição 3.2.6 (Função $*$) A função $*$, do conjunto **FormZ** para o conjunto **FormS5**, é definida por:

$*$: **FormZ** $\rightarrow$ **FormS5**

1. $p^* = p$, onde p é fórmula atômica.
2. $(A \mathbin{\square} B)^* = A^* \mathbin{\square} B^*$, onde $\mathbin{\square}$ é $v, \&, \rightarrow$.
3. $(\sim A)^* = \neg \Box A^*$.

Observamos que, de acordo com **da Silva, D'Ottaviano e Sette 1999** e **Feitosa e D'Ottaviano 2001**, a função $*$ constitui uma tradução conservativa da lógica **Z** na lógica **S5**.

Teorema 3.2.7. Para qualquer fbf A e para qualquer teoria Γ , temos que $\Gamma \models_Z A$ se e somente se $\Gamma^* \models_{S5} A^*$.

Na seção abaixo, demonstramos duas importantes propriedades da lógica paraconsistente **Z**.

3.3. Correção e Completude de **Z**

Lema 3.3.1. Seja A uma fbf onde não há ocorrências do operador $\sim$. Os seguintes fatos são demonstráveis:

- (i) Se $\Gamma \models_{CPC} A$ então $\Gamma \models_Z A$.
- (ii) Se $\models_Z B \rightarrow C$ e $\models_Z B$, então $\models_Z C$.
- (iii) Se $\models_Z B \rightarrow C$ então $\models_Z \sim(B \& \sim C)$.

Demonstração:

- (i) Segue pelas Definições 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3. ■
- (ii) Segue pela Definição 3.2.1 (ii) e silogismo disjuntivo. ■

(iii) Por contraposição, suponha que, para um modelo M , existe um mundo $x \in M$ tal que $v(\sim(B \& \sim C), x)=0$. Pela cláusula 3.2.1 (iv), para todo mundo $y \in M$, $v((B \& \sim C), y)=1$. Logo, para todo mundo $y \in M$, $v(B, y)=1$ e $v(\sim C, y)=1$. Por 3.2.1 (v), existe $z \in M$ tal que $v(C, z)=0$. Mas $v(B, z)=1$, portanto $v(B \rightarrow C, z)=0$. ■

Seja A uma fbf, e Γ uma teoria:

Teorema 3.3.2. (Correção) Se $\Gamma \vdash_z A$ então $\Gamma \models_z A$.

Demonstração:

Como usualmente, por indução no comprimento da prova de A .

Axiomas **AP1-AP9** e Regra **MP**: O procedimento é o usual da lógica clássica, e portanto, mediante o Lema 3.3.1 (i), os Axiomas AP1-AP9 são **Z**-válidos.

Axioma **AZ1**: Segue pela definição 3.2.1(iii), onde B é $\sim A$.

Axioma **AZ2**: Por absurdo, suponha que existe um **Z**-modelo $M=\langle W, v \rangle$ e $x' \in W$, tal que (1) $v(A \ \& \ \sim B, x')=1$, (2) $v(\sim(A \ \& \ \sim B), x')=1$ e (3) $v(A \ \& \ \sim A, x')=0$. A partir de (1), deduzimos (4) $v(A, x')=1$ e $v(\sim B, x')=1$, donde, pela Definição 3.2.1 (vi), obtemos (5) $v(B, y)=0$, para algum $y \in W$. Por (2) e pela Definição 3.2.1 (vi), temos que $v(A \ \& \ \sim B, y')=0$, para algum $y' \in W$. Ou seja, $v(A, y')=0$ ou $v(\sim B, y')=0$, então $v(A, y')=0$ ou $v(B, x)=1$, para todo $x \in W$. Por (5) e silogismo disjuntivo, deduzimos (6) $v(A, y')=0$. A partir de (3), obtemos $v(A, x')=0$ ou $v(\sim A, x')=0$, donde $v(A, x')=0$ ou $v(A, x)=1$, para todo $x \in W$. Por (6) e silogismo disjuntivo, temos $v(A, x')=0$. Isto contradiz (4), o que é absurdo.

Axioma **AZ3**: Por absurdo, suponha que existe um **Z**-modelo $M=\langle W, v \rangle$ e $x' \in W$, tal que (1) $v(\sim(A \ \& \ B), x')=1$ e (2) $v(\sim A \vee \sim B, x')=0$. Por (1) e pela Definição 3.2.1(vi), existe $y \in W$ tal que $v(A \ \& \ B, y)=0$, donde (3) $v(A, y)=0$ ou $v(B, y)=0$. A partir de (2), temos que $v(\sim A, x')=0$ e $v(\sim B, x')=0$, logo $v(A, x)=1$ e $v(B, x)=1$ para todo $x \in W$, o que contradiz (3). Absurdo.

Axioma **AZ4**: Suponha, por absurdo, que para um **Z**-modelo $M=\langle W, v \rangle$ e para $x' \in W$, temos (1) $v(\sim \sim A, x')=1$ e (2) $v(A, x')=0$. Por (1) e pela Definição 3.2.1 (vi), existe y

$\in W$ tal que $v(\sim A, y)=0$, donde, pela Definição 3.2.1 (v), $v(A, x)=1$, para todo $x \in W$. Isto contradiz (2), o que é absurdo.

Para a Regra **RZ**, o procedimento é similar. ■

Sabemos, pela tradução da lógica **Z** na lógica **S5**, que o sistema **Z** é completo. Todavia, é interessante considerar uma prova construtiva da completude de **Z**, como fazemos a seguir.

Definição 3.3.3. Uma teoria Γ é dita *maximal não-trivial* em **Z** se e somente se:

- (i) Γ é não-trivial, isto é, existe uma fbf A tal que $\Gamma \nvdash_Z A$.
- (ii) Γ só possui extensões próprias triviais.

Proposição 3.3.4. Seja uma teoria Γ maximal não-trivial. Então, para toda fbf A , ou $A \in \Gamma$ ou $\sim A \in \Gamma$.

Demonstração:

Por absurdo, suponha Γ maximal não-trivial tal que $A \notin \Gamma$ e $\sim A \notin \Gamma$. Logo, pela Definição 3.3.3., temos que (i) $\Gamma \cup \{A\} \vdash_Z B$ e $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash_Z B$, para uma fbf B qualquer. Pelo Teorema da Dedução, temos que (ii) $\Gamma \vdash_Z A \rightarrow B$ e $\Gamma \vdash_Z \sim A \rightarrow B$. Pelo Axioma AZ1 e pelas propriedades de $\vdash_Z$, temos que $\Gamma \vdash_Z A$ ou $\Gamma \vdash_Z \sim A$. Logo, por (ii) e **MP**, temos que $\Gamma \vdash_Z B$, o que é absurdo, pois Γ é não-trivial. ■

Aqui, iremos nos referir à Proposição 3.3.4 por *maximalidade*.

Definição 3.3.5. Uma teoria Δ é dita extensão de Γ quando $\Gamma \subseteq \Delta$.

Lema 3.3.6. (Lema de Lindenbaum) Se $\Gamma \not\vdash_z A$, então existe uma teoria Δ maximal não-trivial extensão de Γ , tal que $\Delta \not\vdash_z A$.

Corolário 3.3.7. $\Gamma \vdash_z A$ sse $A \in \Delta$, para toda teoria maximal não-trivial Δ que é extensão de Γ .

Demonstração:

[$\rightarrow$] Suponha que $\Gamma \vdash_z A$. Por absurdo, suponha que existe uma extensão maximal não-trivial Δ' de Γ , tal que (1) $A \notin \Delta'$. Como Δ' é não-trivial, existe B tal que (2) $\Delta' \not\vdash_z B$. Assim, $B \notin \Delta'$, pois se $B \in \Delta'$ teríamos $\Delta' \vdash_z B$, o que seria absurdo. Agora, por maximalidade de Δ' , obtemos $\sim B \in \Delta'$, donde $\Delta' \vdash_z \sim B$. Também por maximalidade de Δ' , a partir de (1), obtemos que $\sim A \in \Delta'$, então $\Delta' \vdash_z \sim A$. Assim, pelo Axioma **AP6** e pela Regra **MP**, $\Delta' \vdash_z \sim B \ \& \ \sim A$. Ora, Δ' é extensão de Γ , logo, a partir da hipótese inicial, temos que $\Delta' \vdash_z A$. Pelo Axioma **AP1** e por **MP**, deduzimos $\Delta' \vdash_z \sim B \rightarrow A$. Pela Regra **RZ**, obtemos $\Delta' \vdash_z \sim(\sim B \ \& \ \sim A)$, e por **AP6** e **MP** temos $\Delta' \vdash_z (\sim B \ \& \ \sim A) \ \& \ \sim(\sim B \ \& \ \sim A)$. Usando o Axioma **AZ2** e por **MP** derivamos $\Delta' \vdash_z \sim B \ \& \ \sim \sim B$. Logo $\Delta' \vdash_z \sim \sim B$, e por **AZ4** e **MP**, concluimos $\Delta' \vdash_z B$, o que contradiz (2).

[$\leftarrow$] Suponha que $A \in \Delta$, para toda teoria Δ maximal não-trivial extensão de Γ . Logo

1. para toda teoria Δ maximal não-trivial extensão de Γ , $\Delta \vdash_z A$.

Por absurdo, suponha que $\Gamma \not\vdash_z A$. Pelo Lema 3.3.6, existe Δ' maximal não-trivial extensão de Γ , tal que $\Delta' \not\vdash_z A$, o que contradiz (1). ■

Corolário 3.3.7.' $\vdash_z A$ sse $A \in \Delta$, para toda teoria maximal não-trivial Δ .

Demonstração: Caso particular do Corolário 3.3.7., para Γ vazio. ■

Lema 3.3.8. Seja Δ uma teoria maximal não-trivial de Z :

- (i) $A \in \Delta$ sse $\Delta \vdash_z A$
- (ii) Se $A \notin \Delta$, então $\sim A \in \Delta$
- (iii) Se $\sim A \notin \Delta$, então $A \in \Delta$
- (iv) $A \& B \in \Delta$ sse $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$
- (v) $A \vee B \in \Delta$ sse $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$
- (vi) $A \rightarrow B \in \Delta$ e $A \in \Delta$, então $B \in \Delta$
- (vii) Se $A \notin \Delta$, então $\sim\sim A \notin \Delta$

Demonstração:

(i) Caso particular do Corolário 3.3.7., em que Γ é Δ , dado que Δ é a única extensão maximal não-trivial de si mesma.

(ii) Segue por maximalidade.

(iii) Segue por maximalidade, Axioma **AZ4** e **MP**.

(iv) $[\rightarrow]$ Se $A \& B \in \Delta$, então $\Delta \vdash_z A \& B$, donde, pelos Axiomas **AP4**, **AP5** e pela Regra **MP**, temos que $\Delta \vdash_z A$ e $\Delta \vdash_z B$. Usando 3.3.8 (i), obtemos $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$.

$[\leftarrow]$ Demonstra-se de modo similar, usando o Axioma **AP6**.

(v) Demonstração análoga, usando os Axiomas **AP7-AP9**.

(vi) Suponha que $A \rightarrow B \in \Delta$ e $A \in \Delta$. Então, $\Delta \vdash_z A \rightarrow B$ e $\Delta \vdash_z A$. Pela Regra **MP**, temos $\Delta \vdash_z B$. Usando 3.3.8 (i), obtemos $B \in \Delta$.

(vii) Por absurdo, suponha que $A \notin \Delta$ e $\sim A \in \Delta$. Então $\Delta \vdash_z \sim A$, donde, pelo Axioma **AZ4** e pela Regra **MP**, $\Delta \vdash_z A$. Por 3.3.8 (i), temos $A \in \Delta$, o que é absurdo. ■

Definição 3.3.9. Dada uma teoria Γ , chamamos a teoria $\#\Gamma = \{A: \sim A \notin \Gamma\}$ de *centro* de Γ .

Definição 3.3.10. Sejam uma teoria Γ e uma teoria Δ , tal que Δ contém o centro de Γ . Neste caso, dizemos que Δ é *companheira* de Γ .

Se $\#\Gamma$ não é vazia, dizemos que Γ *tem um centro*.

Se existe $A \in \Gamma$ tal que $\sim A \notin \Gamma$, dizemos que A é *consistente com* Γ .⁷

Teorema 3.3.11. Toda teoria maximal não-trivial tem um centro.

Demonstração: Seja Δ uma teoria maximal não-trivial, portanto existe B tal que $\Delta \nvdash_z B$. Pelo Lema 3.3.8.(i), obtemos $B \notin \Delta$, e pelo Lema 3.3.8.(vii), obtemos $\sim B \in \Delta$. Portanto, pelo Lema 3.3.8.(iii), $\sim B \in \#\Delta$. ■

Teorema 3.3.12. Se uma teoria maximal não-trivial Γ é companheira de uma teoria maximal não-trivial Δ , então $\#\Gamma$ contém $\#\Delta$.

Demonstração: Seja A uma fbf. Suponha que Γ contém $\#\Delta$ e que $A \in \#\Delta$. Por definição de $\#\Delta$, temos que (a) $\sim A \notin \Delta$. Suponha por absurdo que $A \notin \#\Gamma$. Por definição de Γ , temos $\sim A \in \Gamma$. Pelo Teorema 3.3.11 e dado que Γ é maximal não-trivial, Γ possui um centro. Então existe B tal que $B \in \#\Gamma$ e (1) $\sim B \notin \Gamma$, donde (2) $B \& \sim A \in \Gamma$. Já que $\sim A \notin \Delta$, derivamos $B \& \sim A \notin \Delta$, e pelo Lema 3.3.8.(vii) obtemos $\sim(B \& \sim A) \notin \Delta$. Conforme a

⁷ Observamos que o centro de uma teoria Γ pode ser visto, intuitivamente, como a parte ‘bem comportada’ de Γ .

definição de $\# \Delta$, temos que $\sim(B \& \sim A) \in \# \Delta$. Mas Γ contém $\# \Delta$, então (3) $\sim(B \& \sim A) \in \Gamma$.

De (2) e (3) obtemos $(B \& \sim A) \& \sim(B \& \sim A) \in \Gamma$. Usando o Axioma **AZ2**, a Regra **MP** e o Lema 3.3.8.(i), deduzimos $B \& \sim B \in \Gamma$, o que contradiz (1). Absurdo. ■

Teorema 3.3.13. A relação de companhia entre teorias maximais não-triviais é:

- (i) transitiva,
- (ii) reflexiva,
- (iii) simétrica.

Demonstração:

(i) Segue pelo Teorema 3.3.12.

(ii) Seja Γ uma teoria maximal não-trivial e A uma fbf. Suponha que $A \in \# \Gamma$, então $\sim A \notin \Gamma$. Por maximalidade de Γ , temos que $A \in \Gamma$.

(iii) Sejam duas teorias maximais não-triviais Γ e Δ , e seja A uma fbf. Suponha que (1) $\# \Delta$ está contido em Γ , e suponha que $A \in \# \Gamma$. Assim temos (2) $\sim A \notin \Gamma$, donde, usando (2), deduzimos $\sim A \notin \# \Delta$. Por definição de $\# \Delta$, temos que $A \in \Delta$. ■

Lema 3.3.14. Dada uma teoria maximal não-trivial Γ e uma fbf A , se $A \in \Delta$ para toda companheira maximal não-trivial Δ de Γ , então $\sim A \notin \Gamma$.

Demonstração: Como hipótese inicial, suponha que $A \in \Delta$ para toda companheira maximal não-trivial Δ que contém $\# \Gamma$ (i.e., para toda extensão maximal não-trivial Δ de $\# \Gamma$). Por absurdo, suponha que (1) $\sim A \in \Gamma$. A partir da hipótese inicial e do Corolário 3.3.7, deduzimos que $\# \Gamma \vdash_z A$. Assim, pelo Teorema 3.1.1 (Teorema da Dedução), (2) existem fbf's $B_1, \dots, B_n \in \# \Gamma$, tal que $\vdash_z B_1 \& \dots \& B_n \rightarrow A$. Usando a Regra **RZ**, obtemos $\vdash_z \sim(B_1 \& \dots \& B_n \& \sim A)$. Ora, Γ é uma teoria maximal não-trivial, logo, pelo Corolário

3.3.7', temos que $\sim(B_1 \& \dots \& B_n \& \sim A) \in \Gamma$. Pela definição de $\# \Gamma$ e (2), obtemos (3) $\sim B_i \notin \Gamma$, onde $1 \leq i \leq n$. Ainda por (2), e usando o Teorema 3.3.13 (ii), temos $B_i \in \Gamma$. De (1), (2) e Lema 3.3.8.(iv), derivamos $B_1 \& \dots \& B_n \& \sim A \in \Gamma$. Assim, temos

$$(B_1 \& \dots \& B_n \& \sim A) \& \sim(B_1 \& \dots \& B_n \& \sim A) \in \Gamma,$$

onde, pelo Axioma AZ2, obtemos

$$(B_1 \& \dots \& B_n) \& \sim(B_1 \& \dots \& B_n) \in \Gamma,$$

portanto, usando o Lema 3.3.8.(iv),

$$\sim(B_1 \& \dots \& B_n) \in \Gamma.$$

Assim, pelo Lema 3.1.3. (AZ3_n), temos

$$\sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_n \in \Gamma.$$

Logo existe B_i , $1 \leq i \leq n$, tal que $\sim B_i \in \Gamma$, o que contradiz (3). Absurdo. ■

Seja uma função $v: \mathbf{FormZ} \times \mathcal{P}(\mathbf{FormZ}) \rightarrow \{0, 1\}$, definida pelas seguintes cláusulas:

$$(i) \ v(A, \Gamma)=1 \text{ sse } A \in \Gamma$$

$$(ii) \ v(A, \Gamma)=0 \text{ sse } A \notin \Gamma.$$

Neste caso, dizemos que v é *função característica* da teoria Γ .

No presente texto, abreviamos $v(A, \Gamma)=1$ por $v_\Gamma(A)=1$, $v(A, \Gamma)=0$ por $v_\Gamma(A)=0$, e “ v , tal que v é função característica de uma teoria Γ ” pela notação v_Γ .

Definição 3.3.15. A *estrutura canônica* é o conjunto de todas as funções características de teorias maximais não-triviais da lógica $\mathbf{Z}$.

Definição 3.3.16. Sejam v_Γ e $v_{\Gamma'}$ funções características na estrutura canônica. A relação de acessibilidade R entre v_Γ e $v_{\Gamma'}$ é definida por:

$$v_\Gamma R v_{\Gamma'} \text{ sse } \Gamma' \text{ é companheira de } \Gamma^8$$

Teorema 3.3.17. A relação de acessibilidade na estrutura canônica é uma relação de equivalência⁹.

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.13. ■

Definição 3.3.18. Dizemos que uma fbf A é consequência de uma teoria Γ na estrutura canônica se, existem $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$, tais que $v_\Gamma(B_1, \dots, B_n)=1$ implica $v_\Gamma(A)=1$.

Denotamos por $\Gamma \models_{\text{can}} A$.

Teorema 3.3.19. A relação $\models_{\text{can}}$ obedece as mesmas condições de validade local da relação $\models_z$, ou seja:

- (i) $v(p)=1$ se, e somente se, $p \in \Gamma$;
- (ii) $v(A \rightarrow B)=1$ se, e somente se, $v(A)=0$ ou $v(B)=1$;
- (iii) $v(A \vee B)=1$ se, e somente se, $v(A)=1$ ou $v(B)=1$;
- (iv) Na estrutura canônica, $v(\sim A)=0$ sse para todo v' , temos $v'(A)=1$.

Demonstração:

(i)-(iii) Casos clássicos.

⁸ Observamos que há um erro na definição da estrutura canônica encontrada em **Béziau 2006**, onde a ordem da relação de companheirismo está invertida.

⁹ **Béziau 2006** afirma que a relação de equivalência é a relação universal, o que não é o caso. De fato, para alguma relação de equivalência R , obtemos que R é uma relação universal se, para dois objetos quaisquer x e y no domínio sob consideração, temos que xRy ou yRx . Em outros termos, uma relação de equivalência é uma relação universal se x e y são *comparáveis entre si* com respeito à relação R .

(iv) Provemos que, na estrutura canônica, $v(\sim A)=0$ sse para todo v' , tal que vRv' , então $v'(A)=1$.

[$\leftarrow$] Seja uma função característica v_r do modelo canônico. Suponha que para todo v_r' , tal que v_rRv_r' , temos $v_r'(A)=1$. Então para toda Γ' , temos que $A \in \Gamma'$. Pelo Lema 3.3.14, deduzimos $\sim A \notin \Gamma$. Assim, $v_r(\sim A)=0$.

[$\rightarrow$] Por maximalidade.

Como R é uma relação de equivalência, temos que $v(\sim A)=0$ sse, para todo v' , é o caso que $v'(A)=1$. ■

Corolário 3.3.20. Se uma fbf A não é consequência de uma teoria Γ na estrutura canônica, então $\Gamma \not\models_z A$.

Teorema 3.3.21. (Teorema da Completude) Se $\Gamma \models_z A$, então $\Gamma \vdash_z A$.

Demonstração: Suponha que $\Gamma \not\models_z A$. Pelo Lema 3.3.6 (Lema de Lindenbaum), existe uma extensão maximal não-trivial de Γ tal que $\Delta \not\models_z A$. Pelo Lema 3.3.8.(i), $A \notin \Delta$. Seja v_Δ , isto é, a função característica da teoria Δ . Assim, para toda fbf $B \in \Delta$, temos $v_\Delta(B)=1$ e $v_\Delta(A)=0$. Dado que Δ é maximal não-trivial, v_Δ pertence à estrutura canônica. Portanto, $\Delta \not\models_{\text{can}} A$. Pelo Corolário 3.3.20, obtemos $\Delta \not\models_z A$, donde $\Gamma \not\models_z A$. ■

Teorema 3.3.22. Para qualquer fbf A , e qualquer fbf B , não é o caso que:

$$A, \sim A \vdash_z B$$

Portanto, conforme a definição de paraconsistência usada no Capítulo 2, a lógica Z é uma lógica paraconsistente.

No próximo capítulo, examinamos a tese exposta em **Béziau 2000**, que apresenta como resultados possíveis relações entre o conhecido Quadrado de Oposições e a paraconsistência. Contribuímos para o tema com argumentos e idéias.

Capítulo 4 - O quadrado de oposições paraconsistente

O Quadrado de Oposições, de Boecius e Apuleius, corresponde a uma representação gráfica das quatro noções lógicas de oposição de Aristóteles: a de contraditoriedade, a de contrariedade, a de subcontrariedade e a de subalternidade, definidas da forma seguinte.

4.1. Quadrado de Oposições Tradicional

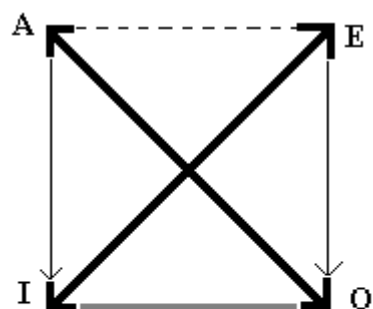
Definição 4.1.1 (Contraditoriedade) Duas proposições A e B são *contraditórias* se, e somente se, A e B não podem ser simultaneamente falsas, nem simultaneamente verdadeiras.

Definição 4.1.2 (Contrariedade) Duas proposições A e B são *contrárias* se, e somente se, A e B podem ser simultaneamente falsas mas não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Definição 4.1.3 (Subcontrariedade) Duas proposições A e B são *subcontrárias* se, e somente se, A e B podem ser simultaneamente verdadeiras mas não podem ser simultaneamente falsas.

Definição 4.1.4 (Subalternidade) Dadas duas proposições A e B, dizemos que B é *subalterna* de A se, e somente se, B é verdadeira se A é verdadeira e A é falsa se B é falsa.

Para fins didáticos, estas relações podem ser representadas graficamente. Chamamos *Quadrado de Oposições Tradicional* (QOT) o quadrado de vértices **A**, **E**, **I**, **O**, representado como usualmente na literatura:



subalternidade	—
contrariedade	- - -
contraditoriedade	—
subcontrariedade	—

No presente texto, também usaremos cores para representar as relações de oposição, do seguinte modo: a relação de contrariedade em *azul*, a relação de subcontrariedade em *verde*, a relação de contradição em *vermelho*, e a relação de subalternidade em *cinza* ou *preto*.

Na tradição aristotélica, os vértices do QOT são quantificados, seguindo o arranjo abaixo, para proposições S e P quaisquer:

A é da forma “Todo S é P”

E é da forma “Nenhum S é P”

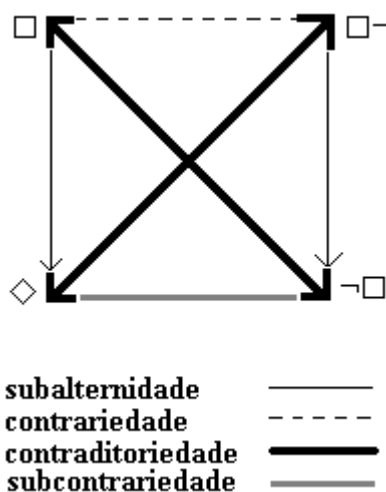
I é da forma “Algum S é P”

O é da forma “Algum S não é P”.

Assim, **A** é o *universal afirmativo*, **E** é o *universal negativo*, **I** é o *particular afirmativo* e **O** é o *particular negativo*.

Observamos que as discussões já clássicas sobre o QOT, envolvendo o caráter existencial do modo universal, os termos vazios, a conversão simples das formas E e I e os princípios de contraposição e obversão, não serão apresentadas, pois não são relevantes ao presente contexto.

A conhecida versão modal do QOT, que chamamos *Quadrado de Oposições Modais*, é representada como segue:



Cabe primeiro delimitar um critério pelo qual uma noção de oposição pode ser considerada intuitiva.

Sion 1996 define a noção de *desconectividade* da seguinte maneira:

“Duas proposições são opostas desta forma [por desconectividade] se nenhuma implica a outra, se não são incompatíveis, e se não são exaustivas” [nossa tradução].

Béziau 2000 sugere que a desconectividade não pode ser caracterizada como um tipo de oposição, dado que, neste caso, duas proposições quaisquer A e B são desconectadas. De fato, podemos adicionar: para algum operador de negação $\sim$, a desconectividade e o operador de negação $\sim$ são independentes, uma vez que, para duas proposições quaisquer A e B, temos ao mesmo tempo que B e A são desconectadas e B e $\sim A$ são desconectadas.

A noção de desconectividade constitui, aparentemente, uma análoga formal à noção mais geral de *alteridade* (entendida como *diferença*), conforme encontrada na obra *Sofista*, de Platão. Todavia, uma noção intuitiva de oposição deve ser mais forte que uma simples diferença. Isto pode ser corroborado, por exemplo, pela definição encontrada no Longman Dictionary of Contemporary English (apud **Béziau 2000**), citada abaixo:

“[Oposto corresponde a] Uma pessoa ou coisa que é tão diferente quanto possível de alguém ou de outra coisa” [nossa tradução].

Deste modo, propomos aqui o seguinte critério intuitivo de oposição.

Definição 4.1.5. (Oposição). Dadas duas proposições A e B, dizemos que A e B são *opostas* se há, entre as ambas, uma diferença forte.

Podemos notar que a indeterminação, expressa acima pelo termo “forte” (Definição 4.1.5), parece constituir parte do conceito de oposição. Em trabalho futuro, pretendemos explorar mais sistematicamente essa indeterminação inerente, internalizando-a num sistema mediante a noção epistêmica de “não conhecer”. Assim, como iremos propor, existe uma relação entre a noção de “não conhecer” e a negação paraconsistente do Sistema **Z** (ver Capítulo 3)¹⁰. Portanto, em certo sentido, **Béziau 2000** parece estar incorrendo em contradição ao rejeitar essa indeterminação intrínseca à oposição, argumentando que, “como temos aqui um problema de graus [ou seja, de indeterminação], podemos ser conduzidos a uma espécie de Paradoxo de Sorites. Assim, talvez seja melhor evitar esses graus de diferença” [nossa tradução].

Há controvérsias sobre quão intuitivamente algumas das relações acima (Definições 4.1.1-4.1.5) representam noções de oposição. **Béziau 2000** argumenta que é anti-intuitivo qualificar a noção de subalternidade como um tipo de oposição, dado que aquela representa, em verdade, a idéia de *implicação*. De fato, afirma **Béziau 2000**, se a relação de implicação fosse uma relação de oposição, dadas proposições quaisquer A e B, teríamos, por exemplo, a oposição anti-intuitiva seguinte:

- (i) “(B conjunção com A) e A são opostos”,

¹⁰ A relação entre as lógicas modais epistêmicas e as lógicas modais que lidam com a noção de necessidade é examinada, por exemplo, em **Costa-Leite 2007**.

uma vez que temos:

“(B conjunção com A) implica A”.

Entretanto, poderíamos replicar, no Quadrado de Oposições Tradicional, a implicação *per se* não parece constituir a parte opositiva da noção de subalternidade; com efeito, a oposição entre os vértices **A** e **I** depende de seu caráter quantificacional, como no esquema abaixo:

“(I é subalterno de A)” equivale a “é falso que (A e falso-que-I)”, que equivale a “não é o caso que (A e E)”.

Ora, podemos ver que a oposição entre os vértices **A** e **E** está “implícita” à subalternidade entre **A** e **I**, e que satisfaz o requerimento de “diferença forte” da Definição 4.1.5. Não obstante, essa noção de contrariedade implícita (ou equivalente) a “I é subalterno de A” parece redundante, uma vez que já é representada independentemente e satisfaz a Definição 4.1.5. Observações análogas podem ser feitas envolvendo a subcontrariedade entre os vértices **E** e **O**. Ou seja, a relação de subalternidade equivale à relação mais intuitiva de contrariedade. Por um lado, a equivalência nem sempre “preserva a intuitividade”, porém, em geral, aceitamos reduzir objetos menos intuitivos a objetos mais intuitivos. Chamemos esse ponto de vista *perspectiva reducionista*. Com efeito, este é o cerne da noção de *axiomatizável* e, mais ainda, da noção de *independência* axiomática. Tal perspectiva também está, por seu turno, sujeita a discussão.

Poderíamos, como resposta ao contra-exemplo (i), citado anteriormente, reduzir a noção de implicação geral (ou seja, não apenas para fórmulas quantificadas) a formas mais intuitivas de oposição.

Mesmo assumindo que

(ii) a implicação geral é uma relação de oposição,

podemos mostrar que a implicação entre variáveis proposicionais A e B equivale à relação de contradição entre A e falso-que-B, isto é, “A implica B” equivale a “é contraditório que (A e falso-que-B)”. Desse modo, dado que a implicação proposicional é redutível à relação mais intuitiva de contradição, a suposição (ii) é também dispensável. Portanto, não consideraremos aqui a noção de subalternidade como um tipo de oposição.

Não obstante, argumentos análogos poderiam ser usados para reduzir a relação de subalternidade aristotélica à relação de subcontrariedade, como abaixo.

“(I é subalterno de A)” equivale a “falso-que-A ou I”, que equivale a “O ou I”, ou seja, “não é o caso que falso-que-O e falso-que-I”.

Nesse caso, temos dois possíveis *Quadrado Minimais de Oposições*: um que inclui apenas contrariedade e contradição, que chamaremos *Quadrado Minimal de Contrariedade*, e um que inclui apenas subcontrariedade e contradição, que chamaremos *Quadrado Minimal de Sucontrariedade*. Tomando qualquer um deles, podemos obter as demais relações de oposição aristotélicas usuais, como abaixo.

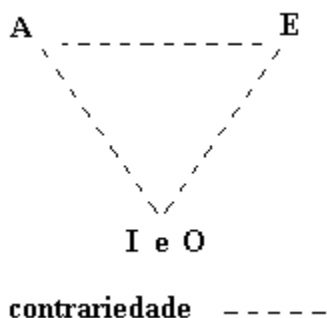
- a) Para o Quadrado Minimal de Contrariedade: Suponha que I é falso; logo, por contradição, E é verdadeiro e, por contrariedade, A é falso; por contradição, O é verdadeiro e, assim, obtemos a subcontrariedade entre os vértices I e O. Agora, suponha que A é verdadeiro; assim, seu contrário E é

falso, donde, por contradição, **I** é verdadeiro. A demonstração é análoga para a subalternidade entre os vértices **E** e **O**.

- b) Para o Quadrado Minimal de Subcontrariedade: Suponha que **E** é verdadeiro; logo, por contradição, **I** é falso e, por subcontrariedade, **O** é verdadeiro. Por contradição, **A** é falso. Assim, obtemos a contrariedade entre os vértices **A** e **E**. As demais oposições seguem como no caso (a).

Destarte, sob a perspectiva reducionista, parece que temos tantas razões para aceitar a contrariedade como uma forma intuitiva de oposição, quantas são as razões para aceitar a subcontrariedade como uma forma intuitiva de oposição.

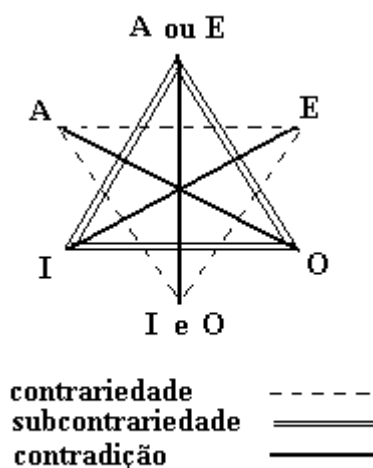
Todavia, Vasil'ev (apud **Arruda 1990**) discute a indeterminação do vértice **I**, “algum (podendo ser todo) S é P”, dado que expressa uma incerteza evidencial: não se sabe se todos os S são P, ou se apenas parte dos S é P. Vasil'ev sugere um triângulo de oposições, em que um dos vértices é um “juízo indiferente”, isto é, *particular afirmativo* e *particular negativo* simultaneamente, como abaixo:



Vasil'ev percebeu que o juízo indiferente poderia representar certas categorias que admitem predicados inconsistentes. Por exemplo, a categoria “homem” admite o predicado “louro” e sua negação, pois alguns homens são louros e outros, não (**Arruda 1990**, p.35).

Assim, propôs que o juízo indeterminado representaria certos discursos, comprometidos com constatações empíricas (Arruda 1990, p.36), e reservou o juízo indiferente para um “mundo imaginário”.

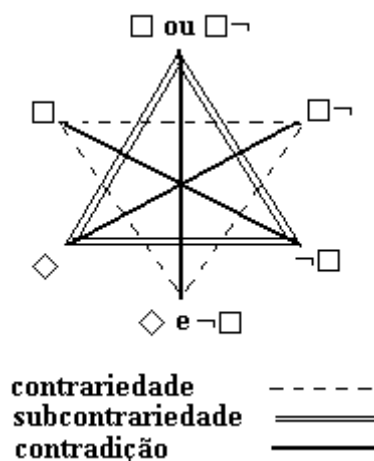
Tal indissociação entre os vértices **I** e **O** do Quadrado de Oposições Tradicional foi apontada por Hamilton e Venn, no século XIX, e desenvolvida mais sistematicamente por Robert Blanché (apud Béziau 2000). Conforme Blanché 1953, 1957, 1966, podemos considerar também um triângulo dual ao Triângulo de Oposições de Vasili’ev, os quais, sobrepostos, formam um hexágono. Como descartamos a idéia de subalternidade enquanto forma de oposição, a composição dos triângulos mencionados forma, neste caso, uma estrela. Chamamos *Estrela de Oposições de Blanché* o esquema gráfico representado abaixo:



Nesse caso, sob a perspectiva reducionista, temos uma razão a menos para aceitar a noção de subcontrariedade como mais intuitiva que a noção de contrariedade, opostamente ao que afirma Béziau 2000. Isto não significaria, entretanto, que a noção de subcontrariedade *não é* intuitiva, mas antes, que é *quase tão* intuitiva quanto a noção de

contrariedade. Destarte, não vemos aqui motivos bastantes para não considerar a subcontrariedade como uma relação de oposição.

A versão modal da Estrela de Oposições de Blanché, a *Estrela Modal de Oposições*, é trivialmente construída da seguinte forma:



Observações análogas às expostas acima, respectivas à intuição dos vértices **I** e **O**, justificam a Estrela Modal. De fato, parece natural que “possível” seja representado pela conjunção dos vértices mencionados, **I** e **O**. Por exemplo, a frase “É possível que eu ganhe na loteria” parece abreviar “É possível que eu ganhe na loteria e é possível que eu não ganhe na loteria”. Todavia, a conjunção entre estes vértices, na Estrela Modal de Oposições, é atualmente denominada *contingência*¹¹ (∇), definida como abaixo:

Definição 4.1.6. (∇) $\nabla A = \text{df } \Diamond A \ \& \ \Diamond \sim A$

¹¹ Pareceria oportuno, então, considerar a obra de Vasil’ev sob a perspectiva da contingência.

A base modal para a contingência, tomada como operador primitivo, pioneiramente por **Montgomery e Routley 1966** (apud **Costa-Leite 2007**) foi estudada, por exemplo, em **Humberstone 1992**, que desenvolve uma axiomatização para a lógica minimal da contingência¹². **Marcos 2004** examina relações entre contingência e *acidente* ($\bullet$), definido como abaixo:

Definição 4.1.6. ($\bullet$) $\bullet A = df A \ \& \ \Diamond \sim A$

A correspondência entre o Quadrado de Oposições Tradicional e o Quadrado Modal de Oposições, tendo como lógica subjacente a este último o sistema **S5**, é estabelecida pelo resultado de Wajsberg (ver **Wajsberg 1933**), segundo o qual existe uma “tradução” do sistema **S5** para o **CQC**. Este teorema foi utilizado na Seção 1.1.3 do presente texto, como parte da demonstração da consistência do sistema **S5** (ver Proposição 1.1.3.3).

Na seção seguinte, argumentamos que as noções de oposição apresentadas acima (Definições 4.1.1-4.1.3) correspondem a diferentes noções de negação.

4.2. Correspondência entre as noções de oposição e as noções de negação

Dadas as três noções de oposição consideradas anteriormente como satisfatórias, podemos associá-las, cada uma, a um *operador de oposição*. De fato, sejam A e B proposições, e seja # um operador unário:

Definição 4.2.1. O operador # é dito *operador de contraditoriedade* se, e somente se, para toda proposição A, temos que A e #A são contraditórias.

¹² Tal axiomatização foi simplificada por **Kuhn 1995**.

Definição 4.2.2. O operador $\#$ é dito *operador de contrariedade* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são ambas falsas e, para toda proposição B , temos que B e $\#B$ não podem ser ambas verdadeiras.

Definição 4.2.3. O operador $\#$ é dito *operador de subcontrariedade* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são ambas verdadeiras e, para toda proposição B , temos que B e $\#B$ não podem ser ambas falsas.

Parece natural supor que os três operadores definidos acima correspondem a três operadores de negação. Para confirmar tal suposição, devemos apresentar três definições de negação presentes na literatura.

Sejam A e B proposições, e seja $\sim$ um símbolo de negação:

Definição 4.2.4. Dizemos que $\sim$ é uma *negação clássica* se, e somente se, $\sim$ é um operador de contraditoriedade.

Definição 4.2.5. Dizemos que $\sim$ é uma *negação para completa* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são ambas falsas.

Definição 4.2.6. Dizemos que $\sim$ é uma *negação para consistente* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são ambas verdadeiras.

As Definições 4.2.5 e 4.2.6 foram introduzidas por Miró Quesada, no ano de 1975, em correspondência pessoal a Newton da Costa (apud **Béziau 2000**). Conforme as definições de Quesada, uma negação para consistente pode ser também para completa, e uma negação para completa pode ser também para consistente. Isto não ocorre com os operadores de oposição definidos anteriormente: um operador de contrariedade não pode ser um

operador de subcontrariedade, e um operador de subcontrariedade não pode ser um operador de contrariedade. Assim, restringindo de modo similar as Definições 4.2.5 e 4.2.6, obtemos uma correspondência mais simples e intuitiva entre as noções de negação e as noções de oposição aqui consideradas, através das definições que introduzimos a seguir.

Definição 4.2.5’. Dizemos que $\sim$ é uma *negação paracompleta* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são falsas e, para toda proposição B, temos que B e $\#B$ não podem ser ambas verdadeiras.

Definição 4.2.6’. Dizemos que $\sim$ é uma *negação paraconsistente* se, e somente se, existe uma proposição A tal que A e $\#A$ são verdadeiras e, para toda proposição B, temos que B e $\#B$ não podem ser ambas falsas.

Por conseguinte, a negação clássica é um operador de contraditoriedade, a negação paracompleta é um operador de contrariedade, e a negação paraconsistente, um operador de subcontrariedade. De fato, **Béziau 2000** observa que, se tomamos como lógica subjacente o sistema modal **S4**, o vértice **E** do Quadrado Modal de Oposições é uma negação intuicionista (ver **Gödel 1933**). Além disso, conforme visto no Capítulo 3, se tomamos como lógica subjacente o sistema modal **S5**, o vértice **O** do Quadrado Modal de Oposições é uma negação paraconsistente.

Com efeito, **Slater 1995** afirma que negações paraconsistentes não são negações *porque* são operadores de subcontrariedade. **Béziau 2000** replica que, sendo a subcontrariedade um tipo de oposição, a postura de **Slater 1995** dissociaria o conceito de negação do conceito de oposição. Naturalmente, a réplica de **Béziau 2000** apenas se sustém

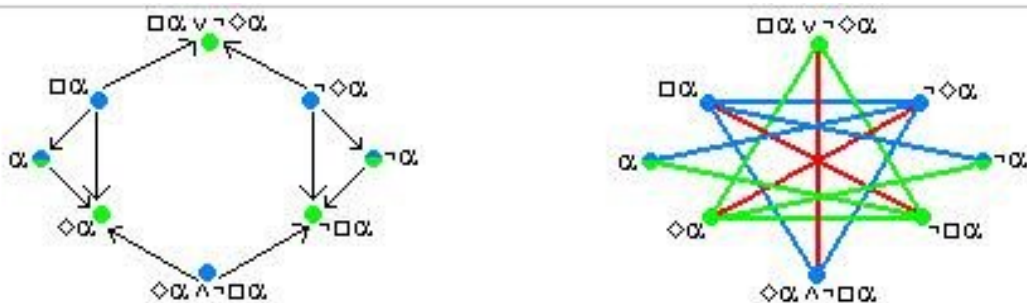
na medida em que a relação de subcontrariedade seja considerada, de fato, como uma relação de oposição, controversia que descartamos no início do presente capítulo.

Como é notório, até formulações contemporâneas do Quadrado de Oposições Tradicional, a noção de subcontrariedade era tida como uma noção de oposição (ver **Ashworth 1974**). Desse modo, a correspondência biunívoca entre as três negações mencionadas acima e as três noções aristotélicas de oposição parece ter patente interesse histórico, no mínimo.

Na seção seguinte, analisamos uma “extrapolação” da Estrela de Oposições de Blanché, com o intento de representar graficamente, de modo mais completo, a multiplicidade das noções de oposição. Propomos, também, algumas idéias para o tema da geometrização lógica.

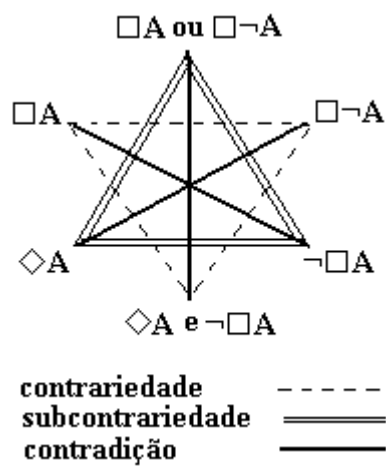
4.3. A paraconsistência do Dodecaedro Estelar de Oposições

Conforme visto na Seção 4.1, o Quadrado de Oposições Tradicional pretende representar, graficamente, relações de oposição entre proposições quantificadas. De modo análogo, o Quadrado Modal de Oposições pretende representar, graficamente, relações de oposição entre proposições modais. No entanto, um esquema mais completo das formas de oposição também deveria contemplar aquela oposição entre uma proposição e sua negação, de modo geral. Essa imagem mais abrangente poderia ser obtida mediante um octógono de oposições, porém sob pena de menor clareza.

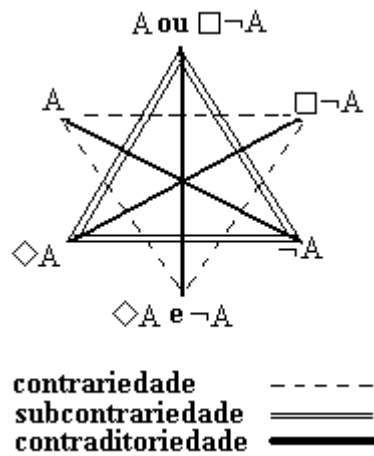


Consideremos, ao invés disso, para melhor resultado, as três estrelas de oposição seguintes, onde A é uma proposição qualquer.

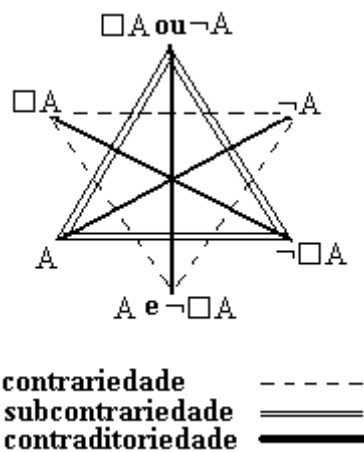
A Estrela Modal de Oposições:



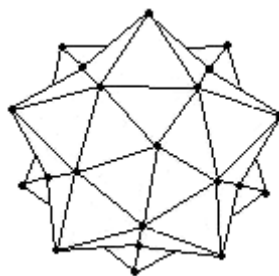
A Estrela Paracompleta de Oposições:



A Estrela Paraconsistente de Oposições:

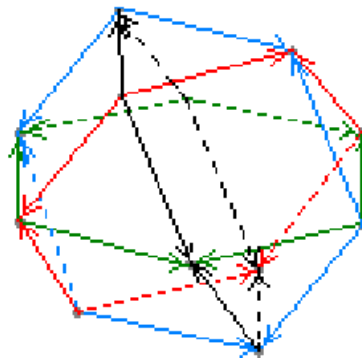
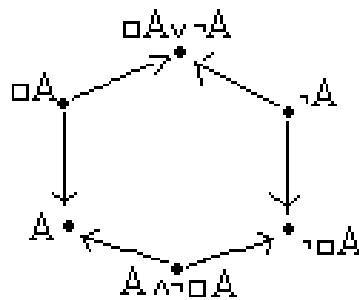


Dos 18 vértices das estrelas acima, 6 dos vértices aparecem duas vezes. Assim, podemos ligar as estrelas numa figura tridimensional, o *Dodecaedro Estelar de Oposições*.



Finalmente, o Dodecaedro de Oposições parece constituir uma forma mais completa e sistemática de compreender o conceito de oposição e, subsequentemente, o conceito de negação em sua pluralidade, apresentando a totalidade de oposições entre 12 conectivos unários.

104



A seguir, examinamos alguns aspectos ainda mais gerais da teoria de oposições, conforme **Moretti 2004**, sob a perspectiva das chamadas n-oposições.

4.4. A Teoria das n-oposições

Baseado nos resultados de Vasil'ev, Blanché e Béziau, expostos nas seções anteriores deste capítulo (ver Seções 4.1-4 e 4.2), **Moretti 2004** extrapola a intuição do Tetradeaedro de Oposições para um esquema lógico-geométrico mais geral, a *teoria das n-oposições*. Informalmente, a teoria das n-oposições pretende exprimir relações lógicas de oposição em termos de equidistância e simetria (geométricas). Segundo **Moretti 2004**, as “possíveis relações entre lógica (modal) e geometria” ainda são misteriosas, e podem apresentar relevância para outros campos, por exemplo, mas não somente, as ciências cognitivas, em específico a teoria dos “espaços conceituais” de Gärdenfors (apud **Moretti 2004**).

Moretti 2004 defende que a abordagem das n-oposições é mais que um “hapax legomenon”, isto é, um evento circunstancial, isolado e sem significado.

Examinamos aqui alguns aspectos dessa teoria, sem nos deter nos aspectos geométricos formais do tema, os quais fogem ao escopo do presente trabalho.

4.4.1. Frame Geral das *an*-Estruturas

Primeiramente, definimos as noções básicas da teoria de n-oposições.

Definição 4.4.1.1 Dizemos que duas relações de oposição R e R' são idênticas se, e somente se, R e R' são equidistantes e apresentam a mesma cor.

Definição 4.4.1.2 Chamamos *simplexo com dimensão n* um objeto geométrico de dimensão n , $n \geq 0$, cujos $n + 1$ vértices são, dois a dois, equidistantes.

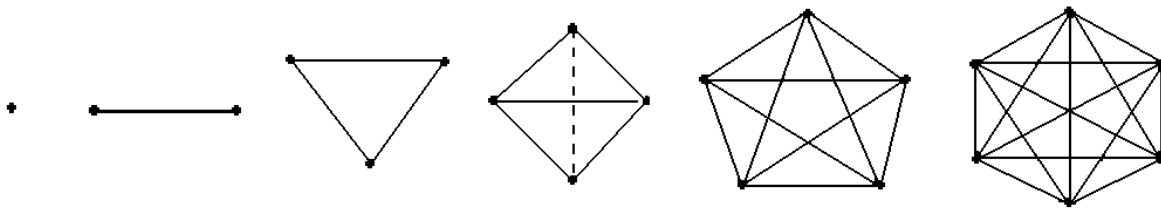
Definição 4.4.1.3 Denominamos *an-estrutura* a combinação entre dois simplexos com dimensão $n-1$, um verde e um azul, tal que:

- a) as n diagonais vermelhas do objeto resultante apresentam o mesmo comprimento;
- b) as faces do objeto são obtidas conectando cada par de vértices não-contraditórios entre si, um azul e um verde, com setas de cor cinza, do vértice azul para o vértice verde.

Uma αn -estrutura possui dimensão $n-1$, e apresenta $2n$ vértices.

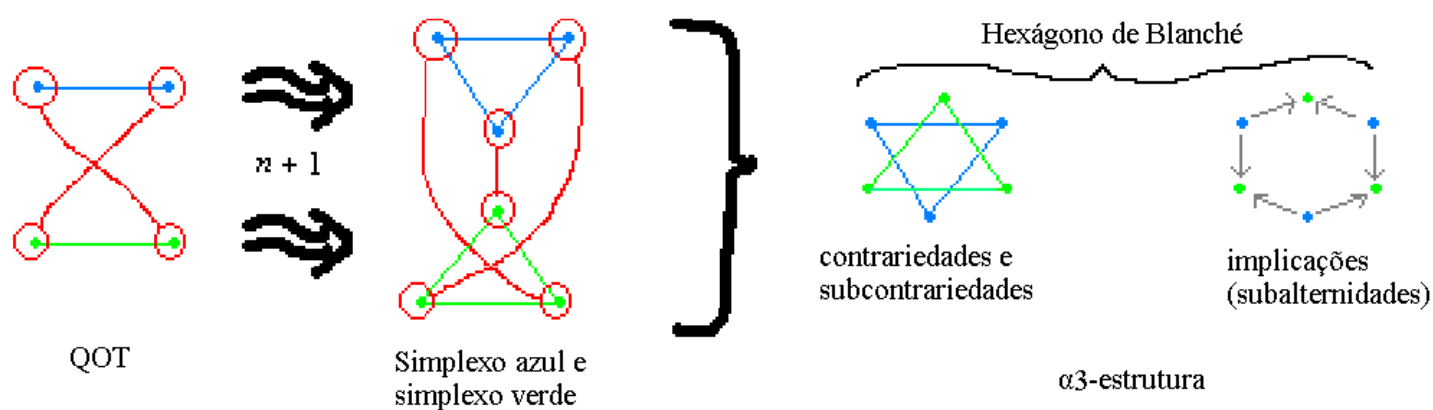
Cada αn -estrutura pretende expressar, exhaustivamente, as relações de oposição entre $2n$ vértices.

Pretendemos associar “relação de oposição” a “equidistância de pontos”. Para fins de generalização, queremos aumentar arbitrariamente o número de vértices opostos numa αn -estrutura, de forma a identificar o “*frame* geral” a que pertencem estas estruturas. Todavia, conforme resultado geométrico conhecido, n pontos *não* podem ser equidistantes, dois a dois, numa dimensão $n-2$. Assim, por exemplo, obtemos de pronto a equidistância de 3 pontos em um triângulo equilátero, mas não podemos obter a equidistância de 4 pontos em um objeto de 2 dimensões. Entretanto, conforme resultado conhecido, podemos obter a equidistância de 4 pontos em um objeto geométrico, se aumentarmos a dimensão para 3. Deste modo, visando manter a associação entre “oposição lógica de n termos” e “equidistância de n termos”, devemos recorrer a objetos geométricos de $n-1$ dimensões, $n \geq 0$, conforme exemplificado na figura abaixo.

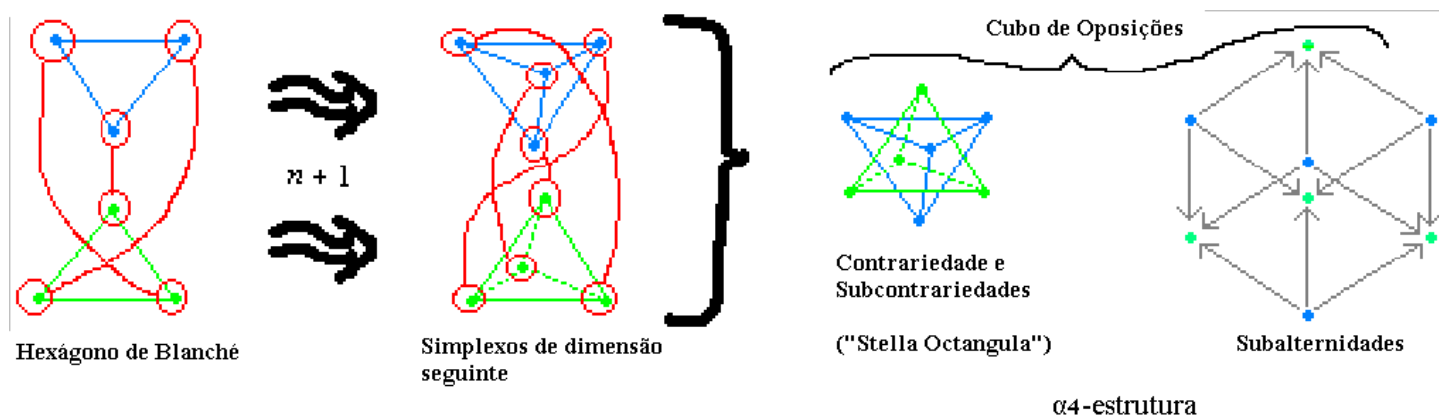


Simplexos de dimensão 0, 1, 2, 3, 4 e 5

Dada a existência da série de simplexes de dimensão $n-1$, para n arbitrário, podemos contruir a série de αn -estruturas de dimensão $n-1$. À guisa de ilustração, tomemos o Hexágono Modal de Blanché. Neste caso, temos dois simplexes de 2 dimensões: um azul, o Triângulo de Contrariedade de Vasil'ev, e um verde, o *Triângulo de Subcontrariedades* de Blanché. Devemos combiná-los de acordo com a Definição 4.3.1.3, como na figura abaixo, onde as diagonais, indicadas em vermelho, são as relações de contraditoriedade.

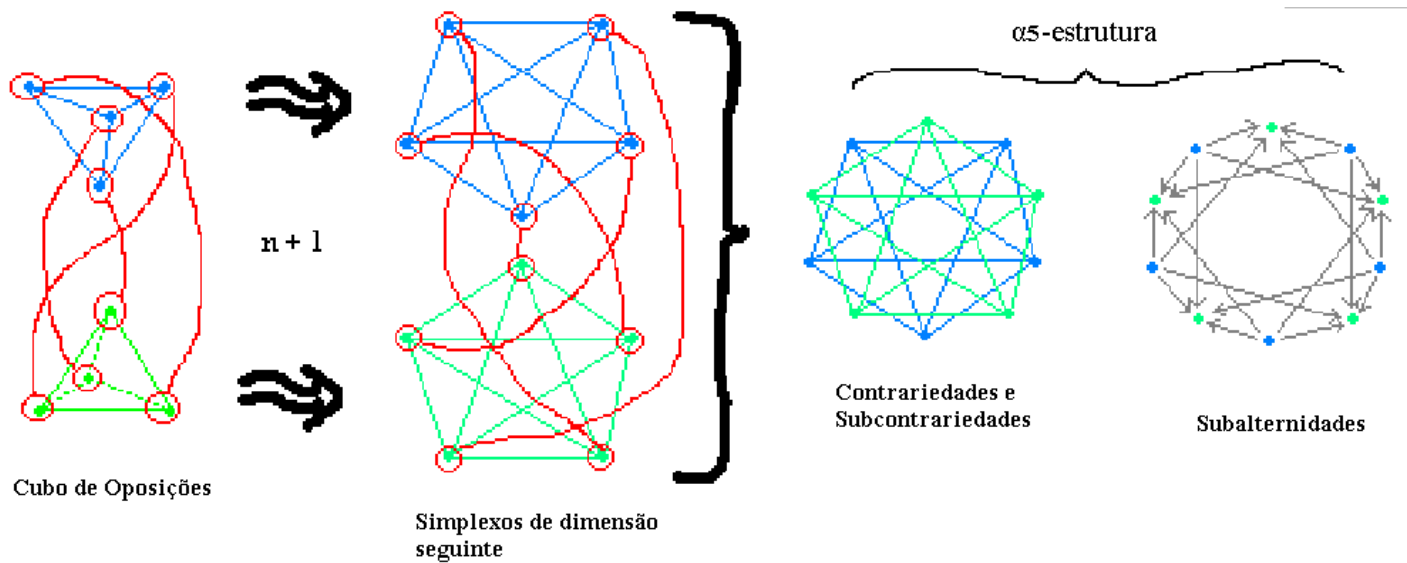


No caso seguinte, em que $n = 4$, obtemos uma αn -estrutura tridimensional, que chamamos *Cubo de Oposições*¹⁴.



¹⁴ Por razões explicitadas mais adiante nesta seção, não adotamos aqui o termo utilizado por Moretti 2004 para designar este objeto geométrico, a saber, *Cubo Lógico*.

No caso $n = 5$, passamos de “4-oposição” para “5-oposição”, combinando dois simplexos de 4 dimensões. A αn -estrutura é representada esquematicamente abaixo, em duas dimensões.



O *Algoritmo Gráfico-Oposicional Geral*, para cada αn -estrutura composta de dois simplexos de dimensão $n-1$, um azul e um verde, pode ser resumido como segue:

- (a) todos os pontos azuis são contrários entre si;
- (b) todos os pontos verdes são subcontrários entre si;
- (c) cada ponto azul é contraditório a um, e apenas um, ponto verde;
- (d) cada ponto verde é contraditório a um, e apenas um, ponto azul;
- (e) cada ponto azul implica $n-1$ pontos verdes;
- (f) cada ponto verde é implicado por $n-1$ pontos azuis.

Observamos que, na cláusula (e), o número de pontos implicados por um ponto azul A não pode ser o total n de pontos verdes, pois há sempre exatamente um ponto verde contraditório ao ponto A. Observação análoga aplica-se à cláusula (f).

Finalmente, **Moretti 2004** examina algumas outras propriedades desse *frame* geral, apontando um possível algoritmo, que permite, dado um sistema modal normal qualquer, “traduzir” as relações entre modalidades em $\alpha 3$ -estruturas.

Considerações Finais

Na presente Dissertação, conseguimos perfazer com êxito o objetivo de analisar algumas relações entre o conceito de operador modal e o conceito de operador de negação paraconsistente, fundamentados em diversos resultados, como as recentes contribuições de **Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006** e **Moretti 2004**.

Pudemos examinar algumas lógicas paraconsistentes, conforme **Castro 2004, Béziau 2000, 2002b, 2004 e 2006** e **Marcos 2004**, por exemplo, a hierarquia de cálculos proposicionais C_n , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1964a, 1964b, 1964c e 1974b**), e a lógica modal paraconsistente **Z** de Béziau, adicionando demonstrações e definições não presentes em **Béziau 2006**.

Realizamos, além disso, uma análise crítica da proposta de **Béziau 2000 e Moretti 2004**, concernente às relações entre o conhecido Quadrado de Oposições Aristotélico, a lógica modal e a negação paraconsistente. Para tanto, **Béziau 2000** propõe um novo esquema geométrico de oposições, o Dodecaedro Estelar de Oposições.

O Dodecaedro Estelar de Oposições (ver **Béziau 2000**) pretende sistematizar e compreender o conceito de oposição e, subsequentemente, o conceito de negação em sua pluralidade lógica – isto é, enquanto negação paraconsistente, negação paracompleta e negação clássica –, apresentando a totalidade de oposições entre 12 conectivos unários.

Baseado nos resultados de Vasil'év, Blanché e Béziau, **Moretti 2004** extrapola a intuição do Dodecaedro de Oposições para um esquema lógico-geométrico mais geral, a *teoria das n-oposições*. Informalmente, a teoria das n-oposições pretende exprimir relações lógicas de oposição em termos de equidistância e simetria (geométricas). **Moretti 2004**

defende que a abordagem das n-oposições é mais que um “hapax legomenon”, isto é, um evento circunstancial, isolado e sem significado. **Moretti 2004** afirma que as “possíveis relações entre lógica (modal) e geometria” ainda são misteriosas, e podem apresentar relevância para outros campos, por exemplo, mas não somente, as ciências cognitivas; em específico, a teoria dos “espaços conceituais” de Gärdenfors (apud **Moretti 2004**).

Todavia, parece precipitado afirmar que a teoria de n-oposições é um caminho para a geometrização da *lógica*, quando tal teoria parece tratar, mais especificamente, de uma sistematização geométrica das relações entre modalidades. Como mencionado previamente, na Seção 4.3, **Béziau 2000** sugere que a teoria de oposições aponta, de forma mais geral, para uma sistematização das relações entre diferentes negações, ou seja, uma relação entre diferentes lógicas, quanto ao aspecto da negação. Se aderimos a este ponto de vista, a teoria de n-oposições constitui, mais propriamente, uma geometrização possível de certo aspecto meta-lógico. Desse modo, não adotamos aqui a posição sugerida por **Moretti 2004**, qual seja, a de que a teoria de n-oposições constitui um caminho possível para a geometrização lógica, em geral. De fato, sob a perspectiva reducionista, algumas peculiaridades da teoria de n-oposições parecem dispensáveis: de modo análogo ao da lógica clássica, poderíamos talvez reduzir o número de relações lógico-geométricas a uma única relação, digamos, a implicação, definindo a constante $\perp$ como um vértice, e definindo as demais oposições a partir desses primitivos. Neste caso, a relação de implicação seria definida como a própria equidistância entre pontos, com propriedades adicionais, e a complexidade de fórmulas seria “traduzida” em termos de dimensões geométricas. Obteríamos talvez, assim, uma analogia mais econômica entre lógica e geometria. Em trabalhos futuros, pretendemos explorar essas idéias, buscando outras soluções para o problema da geometrização lógica.

Além disso, consideramos que a abordagem geometrizar de Moretti, apesar de seu criativo formalismo, não parece contribuir significativamente para a compreensão do conceito de oposição generalizado.

Tencionamos analisar algumas contribuições de **Marcos 2004**, **Vakarelov 1989** e **Dosen 1999**, relacionando-as com o tema das modalidades paraconsistentes, e examinando a tese de **Béziau 2002b** e **2004**, a saber, “o sistema modal **S5** é uma lógica paraconsistente”, e a possibilidade de se obter lógicas modais a partir das lógicas paraconsistentes.

Pretendemos ainda explorar mais sistematicamente a indeterminação inerente à noção de oposição, internalizando o conceito de indeterminação na lógica epistêmica (cf. **Hintikka 1962**), mediante a noção de “não conhecer”, propondo relações entre a noção epistêmica de indeterminação e a noção de negação paraconsistente subjacente ao Sistema **Z**. A partir da definição de um operador de indeterminação na lógica epistêmica, representando a noção de “não conhecer”, procuraremos desenvolver um sistema axiomático baseado no Sistema **Z** e demonstrar a completude desse sistema. Ensejamos, desse modo, examinar possíveis conexões filosóficas entre o conceito de negação paraconsistente e o conceito de indeterminação. Sobretudo, pretendemos desenvolver consequências dessas idéias para as chamadas “lógicas da crença” e “lógicas do conhecimento implícito” (ver **Carnielli e Pizzi 2001** e **2008**), fundamentando-nos na noção de “crença coletiva” como critério de conhecimento.

Visamos ainda introduzir a noção modal de “tempo” nesses sistemas, através de multimodalidades (ver **Carnielli e Pizzi 2001** e **2008**).

Outrossim, tencionamos investigar como o Quadrado de Oposições e a Teoria de n-Oposições se relacionam com essa nova perspectiva, e as relações filosóficas dessas idéias com a Teoria do Conhecimento.

Referências Bibliográficas

1. ALVES, H. E. (1976) **Lógica e inconsistência**. 137p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo.
2. ARRUDA, A.I. (1980) A survey of paraconsistent logic. In: ARRUDA, A.I., DA COSTA, N.C.A., CHUAQUI, R. (Eds.) Latin american symposium on mathematical logic, 4., 1978, Santiago, Chile. **Mathematical logic in latin america: proceedings**. Amsterdam. North Holland, p. 1-41.
3. _____. (1990) **Vasiliev e a lógica paraconsistente**. Col. CLE. Vol. 7. D'OTTAVIANO, I.M.L. (Ed.). Campinas: Unicamp.
4. ASHWORTH, E., J. (1974) **Logic and language in the post-medieval period**. Dordrecht: Reidel.
5. BUCHSBAUM, A., PEQUENO, T. (1993) A reasoning method for a paraconsistent logic. *Studia Logica*, v. 52, p 281-289.
6. BETH, E. W. (1955) Semantics, entailment and formal derivability. *Mededelingen der Kon. Ned. Akad.*, 18, 13.
7. BÉZIAU, J.-Y. (2000) New light on the square of oppositions and its nameless corner. University of Neuchâtel, Suíça: Institute of Logic and Semiological Research Center. Disponível em <<http://www.unine.ch/unilog/>>.
8. _____. (2000b) What is paraconsistent logic?. In: BATENS, D., et al. (Eds.). **Frontiers of paraconsistent logic**. Badlock: Research Studies Press, p. 95-112.

9. _____. (2002) Are paraconsistent negations negations?. In: CARNIELLI, W. et al. (Eds.). **Paraconsistency: the logic way to the inconsistent**. New York: Marcel Dekker.
10. _____. (2002b) S5 is a paraconsistent logic and so is first-order classical logic. *Logical Studies*, 9:301-209. Disponível em <http://www.logic.ru/Russian/LogStud/09/LS_9_e_Beziau.zip>.
11. _____. (2004) Paraconsistent logic from a modal viewpoint. *Journal of Applied Logic*. University of Neuchâtel, Suíça: Elsevier B.V. Disponível em <http://www.cle.unicamp.br/e-prints/abstract_16.html>.
12. _____. (2006) The paraconsistent logic Z. A possible solution to Jaskowski's problem. *Logic and Logical Philosophy*. Vol. 15. p.99-111. A ser publicado. Disponível em <<http://www.unine.ch/unilog/>>.
13. BLANCHÉ, R. (1953) Sur l'opposition des concepts. *Theoria*. Vol 19. p.89-130.
14. _____. (1957) Opposition et négation. *Revue Philosophique*. Vol 167. p.89-130.
15. _____. (1966) **Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts**. Paris: Vrin.
16. CARNIELLI, W.A., MARCOS, J. (2002) A taxonomy of C-systems. In: Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., D'Ottaviano, I.M.L., (Eds.). **Paraconsistency: the logical way to the inconsistent**, vol. 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, p. 1-94. Marcel Dekker.
17. CARNIELLI, W.A., PIZZI, C. (2001) **Modalità e multimodalità**. Milão: Franco Angeli.

18. _____. (2008) **Modalities and multimodalities**. Amsterdam: Springer Verlag.
19. CARNIELLI, W. A., LIMA-MARQUES, M. (1992) Reasoning under inconsistent knowledge. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v.2, n. 1, p. 49-79.
20. CASTRO, M.A. (2004) **Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas Cn de da Costa**. 2004.307p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.
21. CHELLAS, B.F. (1980) **Modal logic: an introduction**. Cambridge: Cambridge U.P.
22. COSTA-LEITE, A. (2007) **Interactions of metaphysical and epistemic concepts**. Tese (Doutorado). Université de Neuchâtel.
23. DA COSTA, N.C.A. (1963a) **Sistemas formais inconsistentes**. 1963. 68p. Tese (Cátedra) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
24. _____. (1963b) Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 257, p.3790-3793.
25. _____. (1964a) Calculs des prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 27-29.
26. _____. (1964b) Calculs des prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.258, p. 1111-1113.

27. _____. (1964c) Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 1111-1113.
28. _____. (1974) On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 15, p. 497-510.
29. DA COSTA, N.C.A., ALVES, E.H. (1976) Une semantique pour le calcul C1. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 238A, p.729-731.
30. _____. (1977) A semantical analysis of the calculi Cn. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 18, p. 621-630.
31. DA COSTA, N. C. A., DUBIKAJTIS, L. (1968) Sur la logique discursive de Jaskowski. *Bull: Acad. Pol.*
32. DA COSTA, N.C.A., MARCONI, D. (1989) An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 6, n. 1, p. 5-31.
33. DA SILVA, J.J., D'OTTAVIANO, I.M.L., SETTE, A.M. (1999) Translations between logics. In: CAICEDO, X, MONTENEGRO, C.H. (Eds.). **Models, algebras and proofs**. New York: Dekker, p. 435-448. (Lectures notes in pure and applied mathematics, v.203).
34. D'OTTAVIANO, I.M.L. (1990) On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, n. ½, p. 89-152.
35. DOSEN, K. (1999) Negation in the light of modal logic. In: GABBAY, D., WANSIG, H. (Eds.). **What is negation?**. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publicshers.
36. FEITOSA, H.A, D'OTTAVIANO, I.M.L. (2001) Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p. 205-227.

37. FIDEL, M. M. (1977) The decidability of the calculi C_n . *Reports on Mathematical Logic*, v. 8.
38. FURMANOWSKI, T. (1975) Remarks on discussive propositional calculus. *Studia Logica*, 34.
39. GÖDEL, K. (1933) Eine interpretation des intuitionistischen aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen kolloquiums*. Vol 4. p.34-40.
40. HAACK, S. (1974) **Deviant logic**. Cambridge: Cambridge U.P.
41. _____. (1978) **Filosofia das lógicas**. São Paulo: UNESP.
42. HINTIKKA, J. (1962) **Knowledge and belief**. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.
43. _____. (1969) **Models for modalities**. Reidel.
44. HUGHES, G.E., CRESSWELL, M.J. (1968) **An introduction to modal logic**. Methuen, London: Fletcher & Son.
45. _____. (1996) **A new introduction to modal logic**. Routledge.
46. HUMBERSTONE, L. (1992) The logic of non-contingency. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36.
47. JASKOWSKI, S. (1948) Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, p. 55-57.
48. _____. (1949) O konjuncji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*; Sectio A, I, p. 171-172.
49. _____. (1969) Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, v. 24, p. 143-157.

50. KARPENKO, A. S. (1984) Paraconsistent structure within many-valued logic. **Many valued, relevant and paraconsistent logics**. Rússia: Logic Seminar, Institute of Philosophy.
51. KLEENE, S. (1974) **Introduction to metamathematics**. New York: Van Nostrand.
52. KOTAS, J. (1975) Discussive sentential calculus of Jaskowski. *Studia Logica*, v. 34.
53. KOTAS, J., DA COSTA, N. C. A. (1977) On some modal systems defined in connection with Jaskowski's problem. In: ARRUDA, A. I. et al. (Eds.) **Non-classical logics, model theory and computability**. North-Holland.
54. _____. (1978) On the problem of Jaskowski and the logics of Lukasiewicks. In: ARRUDA, A. I. et al. (Eds.) **Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference**. Marcel Dekker.
55. _____. (1979) A new formulation of discussive logic. *Studia Logica*, v. 38.
56. KRIPKE, S. (1963) Semantical considerations on modal logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16.
57. KUHN, T. S. (1995) Minimal non-contingency logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36.
58. LEWIS, C.I. (1912) Implication and the algebra of logic. *Mind*, 21.
59. LEWIS, C.I., LANGFORD, H.C. (1932) **Symbolic logic**. N.Y.: Dover.
60. _____. (1918) **A survey of symbolic logic**. California U. P.
61. LOPARIC, A. (1986) A semantical study of some propositional calculi. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 3, n. 1, p. 73-95.

62. LOPARIC, A., ALVES, E. H. (1980) The semantics of the systems C_n of da Costa. In: ARRUDA, A.I., DA COSTA, N.C.A., SETTE, A.M. (Eds.) Brazilian conference on mathematical logic, 3., 1979, Recife: **Proceedings ...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, p. 161-172.
63. MARCONI, D. (1979) **La formalizzazione della dialettica**. Turin, Itália: Rosenberg & Sellier.
64. MACCOLL, S. (1880) Symbolic reasoning. *Mind*, 5, nova série, 6, 9, 11, 12, 14, 15.
65. _____. **Symbolic logic and its applications**. Longman's Green, 1906.
66. MARCOS, J. (2004) **Logics of formal inconsistency**. 2005. 304p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1999. Campinas.
67. MARCUS, R.B. (1946) A functional calculus of first order based on strict implication. *Journal of Symbolic Logic*, 11.
68. MONTE, D.L. (2004) **Perspectiva de formalização do senso comum a partir da lógica paraconsistente**. 51p. (Graduação) – Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal.
69. MONTGOMERY, H., ROUTLEY. (1966) Contingency and non-contingency bases of normal modal logics. *Logique et Analyse*, vol. 9.
70. MOURA, J. E. (2002) Um estudo de C_ω em cálculo de seqüentes e dedução natural. Tese (Doutorado). Campinas: IFCH.
71. MOURA, J. E., D'OTTAVIANO, I. M. L. (2002) On NCG_ω : a paraconsistent sequent calculus. In: CARNIELLI, W. A. et al. (Eds.). **Paraconsistency: the logical**

way to the inconsistent. New York: Marcel Dekker. (Lectures notes in pure and applied mathematics, v.228).

72. MORETTI, A. (2004) Geometry for modalities? Yes: through ‘n-oposition theory’. In: BÉZIAU, J-Y., COSTA LEITE, A. e FACCHINI, A. (Eds.) **Aspects of Universal Logics**, Neuchâtel: Centre de Recherches Sémiologiques, p. 102-145.

73. VAKARELOV, D. (1989) Cosistency, completeness and negation. In: PRIEST, G., SYLVAN, R., NORMAN, J. (Eds.) **Paraconsistent logic: essays on the inconsistent.** p.328-263. Philosophia Verlag.

74. VASIL’EV, N. (1910) **On particular judgments, the triangle of oppositions and the law of the excluded fourth.** Kasan: Kasan University Press.

75. WAJSBERG, M. (1933) Ein erweiteter Klassenkalkul. *Monatshefte für Mathematik und Physik.* Vol. 40. p113-126.

76. SION, A. (1996) **Future logic.** Geneva.

77. SLATER, B. H. (1995). Paraconsistent logics?. *Journal of Philosophical Logic.* Vol. 24. p. 451-454.