Leandro Oliva Suguitani

Álgebra de Relações: uma axiomatização Tarskiana.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) sob a orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à versão apresentada à banca abaixo, defendida em 28/08/2008.

BANCA EXAMINADORA
Profa. Dra. Itala M. L. D'Ottaviano.
Prof. Dr. Jorge Petrúcio Viana.
Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa.
Prof. Dr. Marcelo Coniglio (suplente).

Agosto de 2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Su35a **Suguitani, Leandro Oliva**
Álgebra de relações: uma axiomatização Tarskiana / Leandro Oliva Suguitani. - - Campinas, SP : [s. n.], 2008.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Tarski, Alfred, 1902-. 2. Lógica. 3. Álgebra. 3. Representação (Filosofia). I. D'Ottaviano, Ítala M. Loffredo (Ítala Maria Loffredo). II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

(cn/ifch)

Título em inglês: Relation algebra: a Tarskian axiomatization.

Palavras chaves em inglês (keywords) : **Logic**
Algebra
Representation (Philosophy)

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: **Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano, Hércules de Araújo Feitos, Jorge Petrúcio Viana**

Data da defesa: 28-08-2008

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

Aos meus alunos...

Agradecimentos

Sou grato aos professores, funcionários e colegas do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) da Unicamp, o tempo de convivência que tivemos juntos, dentro e fora da sala de aula, foi essencial para o meu amadurecimento como pesquisador.

Algumas vezes tive que ausentar-me do meu trabalho para poder estar presente em eventos que enriqueceram o conteúdo desta dissertação, para isto, contei com a compreensão e incentivo da minha diretora, Sra. Ângela, que dispensou-me sempre que foi preciso, acreditando no valor da minha formação.

Agradeço à Prof. Itala, minha orientadora que, na verdade, foi muito mais do que isso, não só me orientou mas também me motivou e encorajou a continuar com um trabalho de alto nível, em momentos muito difíceis, quando eu mesmo me questionava se valeria a pena tanto esforço.

Aos meus pais, Edmundo e Berenice, pela formação que me deram, suporte, compreensão e apoio, sem os quais um mestrado não seria possível. Aos meus irmãos Sandro e Edmundo, companheiros de vida. Em especial, a meu irmão Rogério, minha cunhada Vivian e meu sobrinho Lucas, que durante o período de tempo que me dediquei a este trabalho, foram minha provisão. Graças a eles tive casa, comida, roupa lavada e um ambiente acolhedor para poder realizar o trabalho com tranquilidade. E finalmente, à minha namorada Anna Luiza, à minha "sogra" Rossana e à "vó" Elba; obrigado pelo carinho, pela força, pelas rezas, velas acesas e pela torcida que me deram segurança e conforto para finalizar o mestrado.

Resumo

Em 1975, Alfred Tarski, um dos maiores lógicos contemporâneos, visitou o Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da Unicamp. Nessa oportunidade, foi organizado um evento, o Simpósio de Lógica Matemática, para recebê-lo. Tarski apresentou então sua axiomatização para o cálculo de relações, conhecida como *álgebra de relações* (RA). A RA, como teoria formal desenvolvida por Tarski, foi apresentada em duas conferências, que foram pioneiramente gravadas em fita de vídeo e atualmente fazem parte do acervo dos Arquivos Históricos do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) da Unicamp. Neste trabalho, apresentamos uma transcrição das conferências de Tarski e examinamos o seu conteúdo, inserindo-o no contexto histórico do desenvolvimento da teoria do cálculo de relações, cujo início remonta à alguns trabalhos de De Morgan, Peirce e Schröder. Tendo em vista que a origem dessa teoria já foi devidamente abordada[1], concentrar-nos-emos mais no conteúdo das conferências de Tarski proferidas no Brasil, sobre RA, dando especial atenção aos problemas deixados em aberto nessa ocasião, e no recente desenvolvimento de sua teoria.

[1] cf. [Maddux1991] e [Pratt1993]

Abstract

Relation Algebra: a Tarskian axiomatization.

In 1975, Alfred Tarski visited the Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) at Unicamp, Brazil. In that ocasion, an event was organized to welcome him, the Simpósio de Lógica Matemática. Tarski's talking was about his axiomatization on the calculus of relations, which in that time was already known as Relation Algebra (RA). In Brazil, the formal theory of RA developed by Tarski was introduced to his audience in two lectures, which were taped and nowadays belongs to the historical files of Arquivos Históricos do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) at Unicamp. Our work aims to bring Tarski's conferences for public access through our transcription of them, and besides that, it is also our aim to analize Tarski's lectures and put it into the historical context of the development of RA, which origin goes back to some works of De Morgan, Peirce and Schröder. Our focus is on the content of the conferences, specially on the open problems left by Tarski and on the recent development of his theory. [2]

[2] To have a detailed history of RA, see [Maddux1991] and [Pratt1993]

Sumário

Introdução

Em 1975, Alfred Tarski, um dos maiores lógicos contemporâneos, foi convidado pelo professor Rolando Chuaqui para proferir uma série de conferências no Departamento de Matemática da Universidade Católica de Santiago, Chile. Aproveitando a oportunidade, a professora Ayda I. Arruda, com o apoio do professor Newton C. A. da Costa, convidou-o a visitar o Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Foi então organizado, no Departamento de Matemática do IMECC, um evento para recebê-lo, o *Simpósio Tarski de Lógica Matemática*, que contou com a participação de lógicos brasileiros e estudantes de pós-graduação da UNICAMP. Os resumos apresentados neste evento estão registrados nos *Proceedings* organizados pela professora Arruda, com colaboração da professora Itala M. Loffredo D'Ottaviano (cf. [Arruda1975]).

Tarski, acompanhado por Rolando Chuaqui, ficou em Campinas por alguns dias, tendo proferido duas conferências sobre sua axiomatização da *relation algebra* (RA - álgebra de relações) [3], um tópico no qual Tarski via grande potencial para a pesquisa e o desenvolvimento da Lógica. Ainda hoje confirma-se a importância da RA em grupos de pesquisa em Lógica, o que se reflete em artigos publicados sobre o assunto e em problemas veiculados pela internet por pesquisadores de diferentes instituições.

Recentemente, foi publicado o livro "Alfred Tarski: life and logic", uma biografia de Tarski por Anita Fefferman e Solomon Fefferman (ver [Fefferman&Fefferman2004]). O professor Walter Carnielli, do Centro de Lógica, Epistemologia e Histótia da Ciência (CLE)/Departamento de Filosofia da UNICAMP, escreveu um cuidadoso *review* crítico do livro, para o periódico *Logica and Logical Philosophy* (cf. [Carnielli2006]), no qual critica o fato da visita de Tarski à Unicamp ter sido negligenciada pelos autores do livro.

As conferências de Tarski durante o *Simpósio Tarski de Lógica Matemática* foram gravadas de forma pioneira pelo IMECC, em fita de vídeo, preservada pela universidade e atualmente fazendo parte do acervo dos Arquivos Históricos do CLE. Ao tomar conhecimento da existência desse importante documento, vários pesquisadores do Brasil e do exterior têm requisitado aos membros e Diretor do CLE uma cópia dessa fita, interessados em conhecer o seu conteúdo e os problemas então apresentados por Tarski. Com o

[3] Traduzimos *relation algebra* como *álgebra de relações* para diferenciar de *álgebra relacional*, que é um termo já usado na literatura para um conceito diferente.

intuito de contribuir com os pesquisadores interessados, este trabalho tem como um dos seus objetivos disponibilizar as conferências de Tarski no site oficial do CLE, na forma de transcrição.

Em suas conferências no Brasil, Alfred Tarski não escondeu o entusiasmo com que se dedicava ao estudo da RA. A RA tem uma história razoavelmente bem delineada, na qual podemos identificar progressos e contribuições em cada publicação feita desde o ínicio do seu desenvolvimento, com De Morgan, Peirce e Schröder (algumas referências importantes desses autores são [Morgan1860], [Peirce1933] e [Schröder1895]). Depois desses autores, que foram os precurssores de Tarski no estudo do que então era conhecido como *cálculo de relações*[4], houve um período de desinteresse por parte da comunidade científica nessa área[5]. Tarski foi quem retomou o interesse por essa teoria, chamando a atenção da comunidade acadêmica para sua importância e indispensabilidade em "qualquer discussão científica."

O artigo de Tarski, *On the calculus of relations* ([Tarski1941]), é referência histórica indispensável para o estudo da RA, por trazer o cálculo de relações de volta para a discussão sobre o desenvolvimento da lógica e por apresentar uma axiomatização para essa teoria, que desde então vem sendo investigada por outros importantes pesquisadores de diferentes grupos de lógica da comunidade científica internacional.

Neste trabalho, examinamos as conferências proferidas por Tarski na UNICAMP à luz de uma perspectiva histórica do desenvolvimento da RA. Muito já se desenvolveu no estudo da RA desde essas conferências, parte dos resultados alcançados e publicados desde então respondem inclusive a algumas questões deixadas em aberto por Tarski naquela ocasião. Não obstante, a importância da visão de Tarski sobre os problemas em aberto para futuros estudos em RA, apresentada nas conferências, ainda é guia de condução de pesquisas atuais.

No primeiro capítulo, introduzimos um breve histórico[6] sobre o desenvolvimento da teoria que deu origem à RA até as conferências de Tarski. No segundo capítulo, analisamos as conferências de Tarski, a partir dos problemas por ele deixados em aberto. Nos capítulos seguintes (3, 4 e 5) abordamos cada uma das três questões separadamente, compilando o que já foi feito por outros pesquisadores para cada uma delas e apresentando a situação atual em que cada um dos problema se insere. Concluímos com os resultados mais recentes sobre RA e os "novos" problemas que esta teoria deixa em aberto.

Com o objetivo de divulgar e colaborar com pesquisadores interessados nas conferências de Tarski, faz parte deste trabalho a disponibilização das transcriçoes das conferências no site oficial do CLE.

[4] A primeira vez que apareceu a definição de Álgebra de Relações foi em "Representation problems for relation algebras", [Jónsson&Tarski1948]

[5] De maneira geral a RA não despertava tanto interesse, no entanto não foi totalmente abandonada, Lowenhein e Russel também desenvolveram trabalhos nessa linha de pesquisa mas não com a mesma ênfase de Tarski

[6] Para algo mais detalhado ver "The Origin of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations", [Maddux1991]

Destacamos a importante ajuda que alguns dos grandes pesquisadores da área, como Roger Maddux, Ian Hodkinson, Robin Hirsch, Hajnal Andréka e István Németi, tem prestado por meio de emails, em correspondência particular,tirando dúvidas e acrescentando sugestões ao trabalho. Devemos dar especial destaque também aos professores Décio Krause, Hércules de A. Feitosa e Jorge P. Viana pelas informações, sugestões e críticas, as quais enriqueceram muito o resultado final do trabalho.

Capítulo 1

Um breve histórico da álgebra de relações até Tarski: De Morgan, Peirce e Schröder

A Álgebra de Relações (RA), como apresentada por Tarski nas conferências que proferiu na UNICAMP em 1975, é resultado de um desenvolvimento que ocorreu em três disciplinas que estão inter-relacionadas e que se aplicam diretamente ao estudo do raciocínio dedutivo, a saber, a Lógica, Álgebra Universal e a Teoria de Modelos. Dessas, a mais antiga é a Lógica, cuja origem encontra-se na Grécia antiga, mais precisamente em Aristóteles, por onde poderíamos começar este Capítulo. No entanto, como nosso objetivo não é fazer um estudo exaustivo sobre as origens da RA, estando apenas interessados em inserí-la em um contexto histórico, consideramos outro ponto de partida, muito mais recente, para apresentarmos o início do desenvolvimento da RA.

Começamos com De Morgan e seu artigo "On the Syllogism IV, and on the logic of relatives" ([Morgan1860]), onde as leis do raciocínio são objetos de reflexão do autor que, com profundidade, investiga o conceito de relação e a necessidade do mesmo na atividade de raciocinar. Neste mesmo artigo, o leitor é desafiado a deduzir, usando somente os silogismos aristotélicos, que se "um homem é um animal", então "a cabeça de um homem é a cabeça de um animal ". De Morgan conclui que a falta de uma resposta para este problema, revela uma certa insuficiência nos silogismos de Aristóteles para o estudo das inferências lógicas. E esta "fraqueza"do sistema aristotélico acontecia porque os silogismos não lidavam de maneira adequada com relações entre dois objetos (binárias). Nesse exemplo proposto por De Morgan, a relação de pertinência, que relaciona "cabeça" com "homem", deveria ser considerada para que a inferência pudesse ser obtida. Quanto ao que Aristóteles poderia ter dito a este respeito, Hirsch e Hodkinson afirmam (cf. [Hirsch&Hodkinson2002]), mencionando [Aristoteles1963], que ele não acreditava que tais relações fossem passíveis de serem formalizadas. Mas De Morgan acreditou no contrário e começou o estudo das

relações binárias de forma sistemática.

Motivado pelos trabalhos que George Boole desenvolvera de algebrização da lógica proposicional, especialmente [Boole1851], De Morgan começou a investigar a teoria das relações binárias, buscando um recurso algébrico que fosse mais "poderoso" do que o cálculo de proposições (relações unárias), tal recurso deveria abranger as sentenças que envolvessem relações (predicados) binárias no estudo das inferências lógicas.

Outros dois importantes nomes do desenvolvimento do cálculo de relações foram Charles Peirce e Ernest Schröder. Tarski atribui a Peirce o título de "criador" da teoria das relações, devido ao extenso e sistemático trabalho de fundamentação teórica que este desenvolveu sobre relações.

Peirce destaca a importância da contribuição de De Morgan para uma notação algébrica eficiente no tratamento das inferências lógicas, no entanto afirma que o sistema de De Morgan "deixa algo a desejar". O objetivo de Peirce em [Peirce1933], é oferecer um "cálculo, ou arte de derivar inferências" baseado em uma notação por ele desenvolvida. Após dar as definições gerais dos seus símbolos algébricos, Peirce os aplica na lógica, usando uma linguagem caracterizada por letras do alfabeto, algumas vezes usadas em diferentes estilos para indicar diferentes referências. É interessante notar que essa linguagem e formalização propostas por Peirce contém o germe do que atualmente conhecemos como "lógica de primeira ordem", embora esta última tenha sido desenvolvida de maneira independente, principalmente por Frege (cf. [Maddux1991).

A motivação inicial de Tarski em algebrizar a lógica de primeira ordem pode dar a impressão de que a Álgebra de Relações procede do cálculo de predicados, no entanto, Roger Maddux tenta mostrar que o desenvolvimento histórico se dá por via contrária, ou seja, "que o cálculo de predicados de primeira ordem tem sua origem no cálculo de relações." Nesse mesmo artigo, Maddux faz, de forma bastante didática, uma leitura comparativa dos trabalhos de Peirce e De Morgan no contexto do desenvolvimento do cálculo de relações.

A contribuição de Schröder para esta teoria foi deixada em uma extensa obra ([Schröder1895]), na qual o autor desenvolve muitas fórmulas válidas para um cálculo de relações extendido e deixa problemas em aberto que indicariam o rumo de futuras investigações nessa área.

No iníco, a teoria das relações binárias não tinha o "status" de uma teoria formalizada como a entendemos hoje, era apenas uma investigação das propriedades que essas relações poderiam ter considerando-se algumas operações sobre elas. A RA, como conhecida hoje, só pôde ser formalizada à medida que se desenvolvia a Álgebra Universal e a Teoria de Modelos.

Desde Schröder, aproximadamente quarenta anos se passaram até que Tarski, inspirado nos trabalhos de seus predecessores, propusesse uma axiomatização para o cálculo de relações. Mais tarde, com algumas alterações, essa axiomatização é pela primeira vez chamada de Álgebra de Relações em [Jónsson&Tarski1948].

Em [Tarski1941], são apresentadas duas maneiras para fundamentar o cálculo de relações[1]: a primeira consiste em construir essa teoria como parte de uma teoria lógica mais abrangente, que corresponde aproximadamente a uma restrição do cálculo funcional de primeira ordem dado, por exemplo, por D. Hilbert e W. Ackermann em 1938.[2]

Nessa teoria mais abrangente são usadas variáveis individuais (x, y, z etc), variáveis relacionais (R, S, T etc) e algumas constantes, como os conectivos de negação ($\neg$), implicação ($\rightarrow$), equivalência ($\leftrightarrow$), disjunção ($\vee$) e conjunção ($\wedge$). Além desses símbolos ainda tem-se os quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$)[3].

Tarski extende essa teoria, introduzindo certas constantes, tomadas de Peirce e Schröder, que são específicas do cálculo de relações, considera-se então os símbolos para relação universal (1), relação nula (0), relação identidade ($1'$) (entre indivíduos) e relação diversidade ($0'$) (o complemento da relação identidade). Além disso, são introduzidos dois símbolos de operadores unários, o complemento ($-$) e o inverso ($\cup$), e quatro símbolos de operadores binários, adição ($+$), multiplicação ($\cdot$), adição relacional ($\dagger$) e multiplicação relacional ($;$). E finalmente o símbolo de identidade ($=$), que denota identidade entre relações.

Aos axiomas da teoria inicial são adicionados mais 12 novos axiomas que definem e caracterizam as novas constantes inseridas na teoria. Os axiomas são:

1) $\forall x \forall y x 1 y$

2) $\forall x \forall y \neg x 0 y$

3) $\forall x x 1' x$

4) $\forall x \forall y \forall z[(xRy \wedge y1'z) \rightarrow xRz]$

5) $\forall x \forall y[x0'y \leftrightarrow (\neg x1'y)]$

6) $\forall x \forall y[x\bar{R}y \leftrightarrow (\neg xRy)]$

7) $\forall x \forall y[xR^{\cup}y \leftrightarrow yRx]$

8) $\forall x \forall y[xR + Sy \leftrightarrow (xRy \vee xSy)]$

9) $\forall x \forall y[xR \cdot Sy \leftrightarrow (xRy \wedge xSy)]$

[1] Uma terceira maneira é apenas mencionada sem ter seu desenvolvimento apresentado. É possível construir esse cálculo restringindo-nos a sentenças na forma de equações, dessa maneira, omitimos os conceitos e teoremas do cálculo sentencial. Para isso, todos os teoremas devem ser postos em formas equacionais e devem ser dadas regras que permitam derivar novas equações a partir das equações dadas.

[2] Grundzüge der theoretischen Logik, Berlim 1938 2^a edição, p. 45ff.

[3] No texto original de Tarski os quantificadores são denotados, respectivamente, pelos símbolos $\prod$ e $\sum$ e o conectivo de negação por $\tilde{}$

10) $\forall x \forall y[xR +' Sy \leftrightarrow \forall z(xRz \vee zSy)]$

11) $\forall x \forall y[xR; Sy \leftrightarrow \exists z(xRz \wedge zSy)]$

12) $R = S \leftrightarrow \forall x \forall y(xRy \leftrightarrow xSy)$

Essa primeira maneira é chamada por Tarski de *teoria elementar das relações binárias*. A partir dessa teoria, considerando as sentenças que não envolvem variáveis individuais, alguns teoremas são obtidos e usados como axiomas de uma "nova"teoria, sendo que este fragmento da teoria elementar das relações binárias lida apenas com o que Tarski estava interessado em estudar, que eram as relações binárias. A esse fragmento Tarski chama de *cálculo de relações*.

O segundo método usado por Tarski para constuir sua teoria é, portanto, um fragmento da teoria elementar das relações binárias, trabalhando apenas com variáveis relacionais e eliminando os quantificadores. Os axiomas que regem o cálculo de relaçoes, na verdade, são os seguintes teoremas, que podem ser obtidos da teoria elementar das relações binárias, acrescidos dos axiomas do cálculo sentencial:

1) $(R = S \wedge R = T) \rightarrow S = T$

2) $R = S \rightarrow (R + T = S + T \wedge R.T = S.T)$

3) $R + S = S + R \wedge R.S = S.R$

4) $(R + S).T = (R.T) + (S.T) \wedge (R.S) + T = (R + T).(S + T)$

5) $R + 0 = R \wedge R.1 = R$

6) $R + \bar{R} = 1 \wedge R.\bar{R} = 0$

7) $\neg 1 = 0$

8) $R^{\cup\cup} = R$

9) $(R; S)^{\cup} = S^{\cup}; R^{\cup}$

10) $R; (S; T) = (R; S); T$

11) $R; 1' = R$

12) $R; 1 = 1 \vee 1; \bar{R} = 1$

13) $(R; S).T^{\cup} = 0 \rightarrow (S; T).R^{\cup} = 0$

14) $0' = \bar{1}'$

15) $R +' S = \bar{R}; \bar{S}$

Ao longo do desenvolvimento da **RA**, Tarski a apresentou de diferentes maneiras, o que revela um certo aprimoramento nas suas idéias com respeito a qual seria a axiomatização mais "adequada" para se definir uma RA.

Neste capítulo apresentamos o cálculo de relações usando uma notação muita próxima da apresentada por Tarski em [Tarski41]. No entanto, a partir do próximo capítulo, usaremos a notação usada por Tarski nas conferências proferidas no Brasil, quando Tarski definiu a **RA** no que parece ser a sua forma mais "evoluída", a qual usaremos ao longo deste trabalho.

Capítulo 2

As conferências de Alfred Tarski no Brasil: os problemas em aberto

2.1 Conceitos da RA

Neste capítulo[1], seguimos a sequência didática das conferências de Tarski para apresentar a RA. Omitimos alguns exemplos e comentários feitos nas conferências em favor de apresentar um texto mais sistemático e claro sobre a RA. A transcrição das conferências encontra-se no Apêndice deste trabalho e é recomendável que seja lida.

Definição 2.1.1. (a) Uma *álgebra do tipo relacional* é uma estrutura

$$\mathfrak{A} = \langle A, +, {}^{-}, ;, {}^{\cup}, 1' \rangle,$$

onde A é um conjunto não vazio, $+$ e $;$ são operações binária em A, $^{-}$ e $^{\cup}$ são operações unárias em A, e $1'$ é um elemento distinguido de A.
(b) Uma *álgebra de relações* é uma álgebra do tipo relacional, que satisfaz aos seguintes

[1]Destacamos a importante contribuição do Prof. Jorge P. Viana neste capítulo, que nos ajudou a esclacrecer alguns conceitos e apresentou suas demonstrações dos resultados que foram aqui usados.

postulados, para todos $a, b, c \in A$:

$P1)$ $\quad a + b = b + a;$

$P2)$ $\quad a + (b + c) = (a + b) + c;$

$P3)$ $\quad (a^{-} + b)^{-} + (a^{-} + b^{-})^{-} = a;$

$P4)$ $\quad a \,;\, (b \,;\, c) = (a \,;\, b) \,;\, c;$

$P5)$ $\quad a \,;\, 1' = a;$

$P6)$ $\quad a^{\cup\cup} = a;$

$P7)$ $\quad (a \,;\, b)^{\cup} = b^{\cup} \,;\, a^{\cup};$

$P8)$ $\quad a \,;\, b + c^{\cup -} = c^{\cup -} \;\Rightarrow\; b \,;\, c + a^{\cup -} = a^{\cup -}.$

(c) Denotamos por RA a classe de todas as álgebras de relações.

O significado e a intuição destes postulados é discutido a seguir.

Os postulados P1, P2 e P3

Os postulados P1, P2 e P3, são devidos a E.V. Huntington. Eles dizem respeito somente às operações $+$ e $^{-}$, ou seja, dizem respeito somente ao seguinte reduto de $\mathfrak{A}$:

Definição 2.1.2. Seja $\mathfrak{A} = \langle A, +, ^{-}, \,;, ^{\cup}, 1' \rangle$ uma álgebra de relações. O *reduto booleano* de $\mathfrak{A}$ é a estrutura

$$\mathfrak{B} = \langle A, +, ^{-} \rangle.$$

Em conjunto, P1, P2 e P3 garantem que o reduto booleano de $\mathfrak{A}$ é uma álgebra booleana pois, por seu intermédio, podemos:

- Definir a operação $\cdot$ pela igualdade $a \cdot b = (a^{-} + b^{-})^{-}$;
- Provar a igualdade $a + a^{-} = b + b^{-}$ para quaisquer $a, b \in A$ e, a partir daí, definir o elemento distinguido 1 pela igualdade $1 = a + a^{-}$;
- Definir o elemento distinguido 0 pela igualdade $0 = 1^{-}$;
- Provar que a estrutura $\mathfrak{B}^{\mathsf{B}} = \langle A, +, \cdot, ^{-}, 1, 0 \rangle$, com $\cdot$, 0 e 1 definidos como acima, satisfaz a todos os postulados que definem uma álgebra booleana;

- Definir a relação $\leq$ pela equivalência $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$;
- Provar que a estrutura $\mathfrak{B}^{\mathsf{P}} = \langle A, \leq \rangle$, com $\leq$ definida como acima, é um conjunto parcialmente ordenado, que a relação $\leq$ é compatível com as operações $+$ e $\cdot$, que a relação $\leq$ é revertida pela operação $^{-}$, e que 0 e 1 são, respectivamente, o menor e o maior elemento de A, segundo $\leq$.

Assim, dada uma álgebra de relações $\mathfrak{A} = \langle A, +, ^{-}, ;, ^{\cup}, 1' \rangle$, seu reduto booleano $\mathfrak{B} = \langle A, +, ^{-} \rangle$ é, de fato, uma álgebra booleana e os postulados P1, P2, e P3 garantem a correção da aplicação de todos os conceitos e raciocínios booleanos típicos aos elementos de A.

Os postulados P4, P5, P6 e P7

Os postulados P4, P5, P6 e P7, são devidos a A. De Morgan mas só foram utilizados como tais por S.C. Peirce. Eles dizem respeito somente às operações $;$ e $^{\cup}$, e ao elemento distinguido $1'$, ou seja, dizem respeito somente ao seguinte reduto de $\mathfrak{A}$:

Definição 2.1.3. Seja $\mathfrak{A} = \langle A, +, ^{-}, ;, ^{\cup}, 1' \rangle$ uma álgebra de relações. O *reduto peirceano* de $\mathfrak{A}$ é a estrutura

$$\mathfrak{P} = \langle A, ;, ^{\cup}, 1' \rangle.$$

Em conjunto, P4, P5, P6 e P7 garantem que o reduto peirceano de $\mathfrak{A}$ é um monoide involutivo pois, por seu intermédio, podemos provar a igualdade $1' ; a = a$, para qualquer $a \in A$. Com isso temos que $1'$ é o elemento neutro de $;$.

Assim, o significado de P4, P5, P6 e P7 é, num certo sentido, trivial.

O postulado P8

O postulado P8 é devido a A. Tarski. Ele diz respeito a todas as operações $+$, $;$, $^{-}$ e $^{\cup}$ e, por esta razão, é o postulado que inter-relaciona o reduto booleano com o reduto peirceano de uma álgebra de relações.

Em primeiro lugar, P8 é uma adaptação direta do postulado

$$13) \quad (R ; S) \cdot T^{\cup} = 0 \quad \Rightarrow \quad (S ; T) \cdot R^{\cup} = 0,$$

que aparece na definição de cálculo das relações, elaborada por Tarski, em seu artigo de 1941. Para ver isto, aplicamos a equivalência booleana $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a + b^{-} = b^{-}$ a (13), obtendo

$$13') \quad R ; S + T^{\cup -} = T^{\cup -} \quad \Rightarrow \quad S ; T + R^{\cup -} = R^{\cup -},$$

que é P8 escrito com as variáveis R, S e T no lugar de a, b e c, respectivamente. Aplicando agora a equivalência booleana $a + b = b \Leftrightarrow a \leq b$ a (13'), obtemos:

$$13'') \quad R \,;\, S \leq T^{\breve{}\bar{}} \quad \Rightarrow \quad S \,;\, T \leq R^{\breve{}\bar{}},$$

que é uma versão do postulado P8, em termos da ordem parcial $\leq$.

O Teorema da Corretude

Há duas razões para a adoção destes postulados na definição de RA. A primeira é que, como veremos, por seu intermédio podemos provar inúmeras propriedades aritméticas interessantes envolvendo as operações $+$, $\cdot$, $;$, $\bar{}$, $\breve{}$ e a constante $1'$. A segunda —e a que, de fato, sustenta a escolha destes postulados— é que todas estas propriedades, quando interpretadas de maneira adequada, são verdadeiras para relações binárias definidas em um conjunto qualquer.

Teorema 2.1.4. *Os postulados P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7 e P8 são verdadeiros quando as variáveis $a, b, c, \ldots$ são interpretados como relações binárias em um dado conjunto e quando as operações $+$, $\bar{}$, $;$ e $\breve{}$ são interpretadas, respectivamente, como a união, a complementação (em relação ao conjunto dado), a composição, a reversão de relações, e quando a constante $1'$ é interpretada como a relação de identidade sobre esse mesmo conjunto.*

Prova. Seja U um conjunto, a, b, c relações binárias em U e u, v elementos de U.

Sob esta interpretação, P1 e P2 se tornam, respectivamente, a comutatividade e a associatividade da união de conjuntos. O possível desconforto diante de P3 desaparece, quando observamos que, nesta interpretação, ao aplicarmos as identidades $(a + b)^{\bar{}} = a^{\bar{}} \cdot b^{\bar{}}$ e $a^{\bar{}\bar{}} = a$, da álgebra dos conjuntos, P3 se torna

$$a = a \cdot b^{\bar{}} + a \cdot b,$$

que é uma conhecida identidade da álgebra dos conjuntos. Como toda relação é um conjunto, P1, P2, P3 são verdadeiros para quaisquer relações a, b e c.

Sob esta interpretação, P4, P5 se tornam, respectivamente, a associatividade da composição de relações e o fato que $1'$ é um elemento neutro à direita, da composição. Para provar P6, observamos que $(u, v) \in a^{\breve{}\breve{}}$ sse $(v, u) \in a^{\breve{}}$ sse $(u, v) \in a$. Para provar P7, observamos que $(u, v) \in (a \,;\, b)^{\breve{}}$ sse $(v, u) \in a \,;\, b$ sse $\exists w \in U : (v, w) \in a \wedge (w, u) \in b$ sse $\exists w \in U : (u, w) \in b^{\breve{}} \wedge (w, v) \in a^{\breve{}}$ sse $(u, v) \in b^{\breve{}} \,;\, a^{\breve{}}$. Seja U um conjunto, a, b, c relações binárias em U e u, v elementos de U.

Para provar P8, suponhamos que $a \,;\, b \leq c^{\breve{}\bar{}}$, que $(u, v) \in b \,;\, c$ e, para uma contradição, que $(u, v) \notin a^{\breve{}\bar{}}$. Daí, existe $w \in U$ tal que $(u, w) \in b$ e $(w, v) \in c$ e, também, $(u, v) \in a^{\breve{}}$.

Assim, temos $(v,u) \in a$, $(u,w) \in b$, e $(w,v) \in c$. Ou seja, $(v,w) \in a \,;\, b$ e $(v,w) \in c^{\cup}$, uma contradição. ■

Como uma conseqüência do Teorema 2.1.4 temos que todas as proposições que são provadas a partir destes postulados *por mecanismos corretos de inferência* são verdadeiras quando as variáveis $a, b, c, \ldots$ são interpretadas como relações sobre um determinado conjunto e as operações $+$, $\cdot$, $;$, $^{-}$ e $^{\cup}$ são interpretadas, respectivamente, como a união, a interseção, a composição, a complementação e a reversão de relações e as contantes $1, 0$ e $1'$ são interpretadas, respectivamente, como $U \times U$, $\emptyset$ e $\{(u,v) \in U \times U : u = v\}$.

2.2 Discussão aritmética da RA

Nesta seção apresentamos alguns teoremas da RA, tendo como objetivo substituir o postulado P8, que é um condicional, por postulados em forma de equação.

Observamos que, nas conferências, em alguns casos Tarski não demonstrou, ou então, fez apenas um esboço das demonstrações dos teoremas. Aqui, procuramos desenvolver as provas de maneira mais clara e completa.

Lema 2.2.1 (L1)**.** P5, P7 $\vdash 1'^{\cup} \,;\, a^{\cup} = a^{\cup}$.

Prova. Por P5, $a \,;\, 1' = a$. Assim, $(a \,;\, 1')^{\cup} = a^{\cup}$. Logo, por P7,

$$1'^{\cup} \,;\, a^{\cup} = a^{\cup}.$$

■

Lema 2.2.2 (L2)**.** P5, P6, P7 $\vdash 1'^{\cup} \,;\, a = a$.

Prova. Substituindo a por $a^{\cup}$ em L1, temos $1'^{\cup} \,;\, a^{\cup\cup} = a^{\cup\cup}$. Assim por P6, $1'^{\cup} \,;\, a = a$. ■

Teorema 2.2.3 (T2)**.** P5, P6, P7 $\vdash 1'^{\cup} = 1'$.

Prova. Substituindo a por $1'^{\cup}$ em P5, temos $1'^{\cup} \,;\, 1' = 1'^{\cup}$. Substituindo a por $1'$ em L2, temos $1'^{\cup} \,;\, 1' = 1'$. Destas duas igualdades, temos $1'^{\cup} = 1'$. ■

Teorema 2.2.4 (T1)**.** P5, P6, P7 $\vdash 1' \,;\, a = a$.

Prova. Por L2, temos $1'^{\cup} \,;\, a = a$. Por T2, temos $1'^{\cup} = 1'$. Assim, temos $1' \,;\, a = a$. ■

Em tudo o que segue vamos denotar as aplicações dos axiomas P1, P2 e P3, e das suas conseqüências por AB (Álgebra Booleana).

Teorema 2.2.5 (T3)**.** P8 $\vdash a\,;\, b\cdot c^{\cup} = 0 \;\Leftrightarrow\; b\,;\, c\cdot a^{\cup} = 0 \;\Leftrightarrow\; c\,;\, a\cdot b^{\cup} = 0$.

PROVA. Vamos provar que: $a\,;\, b\cdot c^{\cup} = 0 \;\Rightarrow\; b\,;\, c\cdot a^{\cup} = 0 \;\Rightarrow\; c\,;\, a\cdot b^{\cup} = 0 \;\Rightarrow\; a\,;\, b\cdot c^{\cup} = 0$.

Primeiramente, suponhamos que $a\,;\, b\cdot c^{\cup} = 0$. Daí, por AB, temos $a\,;\, b \leq c^{\cup -}$. Assim, por P8, temos $b\,;\, c \leq a^{\cup -}$. Logo, por AB, temos $b\,;\, c\cdot a^{\cup} = 0$.

Analogamente, suponhamos que $b\,;\, c\cdot a^{\cup} = 0$. Daí, por AB, temos $b\,;\, c \leq a^{\cup -}$. Assim, por P8, temos $c\,;\, a \leq b^{\cup -}$. Logo, por AB, temos $c\,;\, a\cdot b^{\cup} = 0$.

Finalmente, suponhamos que $c\,;\, a\cdot b^{\cup} = 0$. Daí, por AB, temos $c\,;\, a \leq b^{\cup -}$. Assim, por P8, temos $a\,;\, b \leq c^{\cup -}$. Logo, por AB, temos $a\,;\, b\cdot c^{\cup} = 0$. ■

Teorema 2.2.6 (T4)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a\cdot c^{\cup} = 0 \;\Leftrightarrow\; c\cdot a^{\cup} = 0$.

PROVA. Substituindo b por $1'$ em T3, temos $a\,;\, 1'\cdot c^{\cup} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1'\,;\, c\cdot a^{\cup} = 0$. Assim, por P5 e T1, temos $a\cdot c^{\cup} = 0 \;\Leftrightarrow\; c\cdot a^{\cup} = 0$. ■

Lema 2.2.7 (L3)**.** (a) P5, P6, P7, P8 $\vdash a^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$;
(b) P5, P6, P7, P8 $\vdash b^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$;
(c) P5, P6, P7, P8 $\vdash a^{\cup} + b^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$.

PROVA. Primeiramente, observamos que, por AB, temos $(a+b)^{\cup -}\cdot(a+b)^{\cup} = 0$. Assim, por T4, temos $(a+b)\cdot(a+b)^{\cup -\cup} = 0$. Usando esta igualdade, vamos provar (a) e (b).

(a) Por AB, $a \leq a+b$. Assim, por AB e pela igualdade acima, $a\cdot(a+b)^{\cup -\cup} = 0$. Logo, por T4, temos $(a+b)^{\cup -}\cdot a^{\cup} = 0$. Mas isto, por AB, acarreta $a^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$.
(b) De maneira análoga, por AB, $b \leq a+b$. Assim, por AB e pela igualdade acima, $b\cdot(a+b)^{\cup -\cup} = 0$. Logo, por T4, temos $(a+b)^{\cup -}\cdot b^{\cup} = 0$. Mas isto, por AB, acarreta $b^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$.
(c) Como, por (a), $a^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$ e, por (b), $b^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$, por AB, temos $a^{\cup} + b^{\cup} \leq (a+b)^{\cup}$. ■

Lema 2.2.8 (L4)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a \leq b \;\Rightarrow\; a^{\cup} \leq b^{\cup}$.

PROVA. Suponhamos que $a \leq b$. Daí, por AB, $a + b = b$. Assim, $(a + b)^{\cup} = b^{\cup}$. Mas isto, e L3(c), acarreta $a^{\cup} + b^{\cup} \leq b^{\cup}$. Como, por AB, $a^{\cup} \leq a^{\cup} + b^{\cup}$, temos, finalmente, $a^{\cup} \leq b^{\cup}$. ■

Lema 2.2.9 (L5)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a + b^{\cup} \leq a^{\cup} + b^{\cup}$.

PROVA. Vamos provar que $a \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$, que $b \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$ e, finalmente, mostrar como essas duas inclusões fornecem o resultado.

Para provar que $a \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$, primeiramente, observamos que, por AB, temos $a^{\cup^-} \cdot a^{\cup} = 0$. Assim, por T4, temos $a \cdot a^{\cup^-\cup} = 0$. Em segundo lugar, observamos que, por AB, $a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-} \leq a^{\cup^-}$. Assim, por L4, temos $(a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq a^{\cup^-\cup}$. Logo, por AB, $a \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq a \cdot a^{\cup^-\cup}$, o que, como $a \cdot a^{\cup^-\cup} = 0$, fornece $a \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq 0$.

Para provar que $b \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$, primeiramente, observamos que, por AB, temos $b^{\cup^-} \cdot b^{\cup} = 0$. Assim, por T4, obtemos $b \cdot b^{\cup^-\cup} = 0$. Em segundo lugar, observamos que, por AB, $a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-} \leq b^{\cup^-}$. Assim, por L4, temos $(a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq b^{\cup^-\cup}$. Logo, por AB, $b \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq b \cdot b^{\cup^-\cup}$, o que, como $b \cdot b^{\cup^-\cup} = 0$, fornece $b \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} \leq 0$.

Para provar L5, procedemos da seguinte maneira: Como $a \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$ e $b \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$, por AB, temos $(a + b) \cdot (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^{\cup} = 0$. Assim, por T4, $(a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-}) \cdot (a + b)^{\cup} = 0$. Mas esta última igualdade, por AB, acarreta $(a + b)^{\cup} \leq (a^{\cup^-} \cdot b^{\cup^-})^-$, que, também por AB, fornece $(a + b)^{\cup} \leq a^{\cup^--} + b^{\cup^--}$, que, por sua vez, por AB, fornece $(a + b)^{\cup} \leq a^{\cup} + b^{\cup}$. ■

Teorema 2.2.10 (T5)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash (a + b)^{\cup} = a^{\cup} + b^{\cup}$.

PROVA. Por L3(c), temos $a^{\cup} + b^{\cup} \leq (a + b)^{\cup}$. Por L4, temos $(a + b)^{\cup} \leq a^{\cup} + b^{\cup}$. Assim, por AB, temos $(a + b)^{\cup} = a^{\cup} + b^{\cup}$. ■

Lema 2.2.11 (L6)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash 1^{\cup} = 1$.

PROVA. Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
1^{\cup} &= (1 + 1^{\cup})^{\cup} && \text{AB} \\
&= 1^{\cup} + 1^{\cup\cup} && \text{T5} \\
&= 1^{\cup\cup\cup} + 1^{\cup\cup} && \text{P6} \\
&= (1^{\cup\cup} + 1^{\cup})^{\cup} && \text{T5} \\
&= (1^{\cup} + 1)^{\cup\cup} && \text{T5} \\
&= 1^{\cup\cup} && \text{AB} \\
&= 1 && \text{P6.}
\end{aligned}$$

Isto prova o resultado. ■

Lema 2.2.12 (L7)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash 0^{\cup} = 0$.

PROVA. Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
0^{\cup} &= 0^{\cup} + 0 && \text{AB} \\
&= 0^{\cup} + 0^{\cup\cup} && \text{P6} \\
&= (0 + 0^{\cup})^{\cup} && \text{T5} \\
&= 0^{\cup\cup} && \text{AB} \\
&= 0 && \text{P6.}
\end{aligned}$$

Isto prova o resultado. ■

Lema 2.2.13 (L8)**.** (a) P5, P6, P7, P8 $\vdash (a \cdot b)^{\cup} \leq a^{\cup} \cdot b^{\cup}$;
(b) P5, P6, P7, P8 $\vdash a^{\cup} \cdot b^{\cup} \leq (a \cdot b)^{\cup}$;
(c) P5, P6, P7, P8 $\vdash (a \cdot b)^{\cup} = a^{\cup} \cdot b^{\cup}$.

PROVA. (a) Por AB, temos $a \cdot b \leq a$ e $a \cdot b \leq b$. Assim, por L4, temos $(a \cdot b)^{\cup} \leq a^{\cup}$ e $(a \cdot b)^{\cup} \leq b^{\cup}$. Logo, por AB, temos $(a \cdot b)^{\cup} \leq a^{\cup} \cdot b^{\cup}$.
(b) Para provar a recíproca de (a), observamos que, por AB, temos $a^{\cup} \cdot b^{\cup} \leq a^{\cup}$ e $a^{\cup} \cdot b^{\cup} \leq b^{\cup}$. Assim, por L4, $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup} \leq a^{\cup\cup}$ e $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup} \leq b^{\cup\cup}$. Mas estas duas últimas inclusões, por P5, acarretam $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup} \leq a$ e $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup} \leq b$. Assim, por AB, temos $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup} \leq a \cdot b$ e daí, por P5, $(a^{\cup} \cdot b^{\cup})^{\cup\cup} \leq (a \cdot b)^{\cup\cup}$. Assim, por L4, temos $a^{\cup} \cdot b^{\cup} \leq (a \cdot b)^{\cup}$.
(c) Por (a), temos $(a \cdot b)^{\cup} \leq a^{\cup} \cdot b^{\cup}$. Por (b), temos $a^{\cup} \cdot b^{\cup} \leq (a \cdot b)^{\cup}$. Assim, por AB, temos $(a \cdot b)^{\cup} = a^{\cup} \cdot b^{\cup}$. ■

Teorema 2.2.14 (T6)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a^{-^{\cup}} = a^{\cup^{-}}$.

PROVA. Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} a^{\cup} \cdot a^{-^{\cup}} &= (a \cdot a^{-})^{\cup} && \text{L8(c)} \\ &= 0^{\cup} && \text{AB} \\ &= 0 && \text{L7.} \end{aligned}$$

Analogamente, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} a^{\cup} + a^{-^{\cup}} &= (a + a^{-})^{\cup} && \text{L8(c)} \\ &= 1^{\cup} && \text{AB} \\ &= 1 && \text{L6.} \end{aligned}$$

Portanto, temos as igualdades $a^{\cup} \cdot a^{-^{\cup}} = 0$ e $a^{\cup} + a^{-^{\cup}} = 1$ que, por AB, fornecem $a^{-^{\cup}} = a^{\cup^{-}}$. ■

Teorema 2.2.15 (T7)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a\,; b \cdot c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{\cup}\,; c \cdot b = 0$.

PROVA. Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
a\ ;\ b\cdot c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\ ;\ b\cdot c^{\cup\cup}=0 && \text{P6}\\
&\Leftrightarrow \quad c^{\cup}\ ;\ a\cdot b^{\cup}=0 && \text{T3}\\
&\Leftrightarrow \quad (c^{\cup}\ ;\ a\cdot b^{\cup})^{\cup}=0^{\cup} &&\\
&\Leftrightarrow \quad (c^{\cup}\ ;\ a)^{\cup}\cdot b^{\cup\cup}=0^{\cup} && \text{L8(c)}\\
&\Leftrightarrow \quad a^{\cup}\ ;\ c^{\cup\cup}\cdot b^{\cup\cup}=0^{\cup} && \text{P7}\\
&\Leftrightarrow \quad a^{\cup}\ ;\ c\cdot b=0 && \text{P6, L7.}
\end{aligned}$$

Isto prova o resultado. ■

Lema 2.2.16 (L9)**.** (a) P5, P6, P7, P8 $\vdash a\ ;\ b+a\ ;\ c\leq a\ ;\ (b+c)$*;*
(b) P5, P6, P7, P8 $\vdash b\leq c \quad\Rightarrow\quad a\ ;\ b\leq a\ ;\ c$*;*
(c) P5, P6, P7, P8 $\vdash a\ ;\ (b+c)\leq a\ ;\ b+a\ ;\ c$.

PROVA. (a) Primeiramente, observamos que temos $a\ ;\ (b+c)\cdot(a\ ;\ (b+c))^{-}=0$, por AB. Assim, por T7, temos $(a^{\cup}\ ;\ (a\ ;\ (b+c))^{-})\cdot(b+c)=0$.

Agora, como, por AB, $b\leq b+c$, esta última igualdade fornece, também por AB, $(a^{\cup}\ ;\ (a\ ;\ (b+c))^{-})\cdot b=0$. Daí, por T7, temos $(a\ ;\ b)\cdot(a\ ;\ (b+c))^{-}=0$, que, por sua vez, por AB, fornece $a\ ;\ b\leq a\ ;\ (b+c)$.

Analogamente, como $c\leq b+c$, a igualdade acima fornece, também por AB, $(a^{\cup}\ ;\ (a\ ;\ (b+c))^{-})\cdot c=0$. Daí, por T7, temos $(a\ ;\ c)\cdot(a\ ;\ (b+c))^{-}=0$ que, por sua vez, por AB, fornece $a\ ;\ c\leq a\ ;\ (b+c)$.

Finalmente, temos $a\ ;\ b\leq a\ ;\ (b+c)$ e $a\ ;\ c\leq a\ ;\ (b+c)$. Assim, por AB, temos $a\ ;\ b+a\ ;\ c\leq a\ ;\ (b+c)$.
(b) Suponhamos que $b\leq c$. Daí, por AB, temos $b+c=c$. Mas, por AB, temos $a\ ;\ c\leq a\ ;\ c$. Assim, $a\ ;\ (b+c)\leq a\ ;\ c$. Logo, por AB e L9(a), temos $a\ ;\ b+a\ ;\ c\leq a\ ;\ c$, o que, por AB, fornece $a\ ;\ b\leq a\ ;\ c$.
(c) Vamos provar que $a^{\cup}\ ;\ ((a\ ;\ b)^{-}\cdot(a\ ;\ c)^{-})\cdot b=0$ e $a^{\cup}\ ;\ ((a\ ;\ b)^{-}\cdot(a\ ;\ c)^{-})\cdot c=0$, e mostrar como estas igualdades fornecem o resultado.

Para provar que $a^{\cup}\ ;\ ((a\ ;\ b)^{-}\cdot(a\ ;\ c)^{-})\cdot b=0$, em primeiro lugar, observamos que, por AB, $a\ ;\ b\cdot(a\ ;\ b)^{-}=0$. Assim, por T7, $a^{\cup}\ ;\ (a\ ;\ b)^{-}\cdot b=0$. Por outro lado, por AB, temos $(a\ ;\ b)^{-}\cdot(a\ ;\ c)^{-}\leq(a\ ;\ b)^{-}$. Assim, por L9(b), temos $a^{\cup}\ ;\ ((a\ ;\ b)^{-}\cdot(a\ ;\ c)^{-})\leq$

$a^{\cup} ; (a ; b)^{-}$. Mas isto, por AB, acarreta a inclusão $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot b \leq a^{\cup} ; (a ; b)^{-} \cdot b$. Agora, utilizando $a^{\cup} ; (a ; b)^{-} \cdot b = 0$, e aplicando AB, temos $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot b = 0$.

Para provar que $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot c = 0$, em primeiro lugar, observamos que, por AB, $a ; c \cdot (a ; c)^{-} = 0$. Assim, por T7, $a^{\cup} ; (a ; c)^{-} \cdot c = 0$. Por outro lado, por AB temos $(a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-} \leq (a ; c)^{-}$. Assim, por L9(b), temos $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \leq a^{\cup} ; (a ; c)^{-}$. Mas isto, por AB, acarreta a inclusão $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot c \leq a^{\cup} ; (a ; b)^{-} \cdot c$. Agora, utilizando $a^{\cup} ; (a ; b)^{-} \cdot c = 0$, e aplicando AB, temos $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot c = 0$.

Prosseguimos, então, do seguinte modo: Como, $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot b = 0$ e $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot c = 0$, por AB, temos $a^{\cup} ; ((a ; b)^{-} \cdot (a ; c)^{-}) \cdot (b + c) = 0$. Assim, por AB, temos $a^{\cup} ; ((a ; b) + (a ; c))^{-} \cdot (b + c) = 0$. Logo, por T7, $(a ; (b + c)) \cdot (a ; b + a ; c)^{-} = 0$. Mas, isto acarreta $a ; (b + c) \leq a ; b + a ; c$, por AB. ■

Teorema 2.2.17 (T8)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a ; (b + c) = a ; b + a ; c$.

Prova. Por L9(a), temos $a ; b + a ; c \leq a ; (b + c)$. Por L9(c), temos $a ; (b + c) \leq a ; b + a ; c$. Assim, por AB, temos $a ; (b + c) = a ; b + a ; c$. ■

Teorema 2.2.18 (T9)**.** P5, P6, P7, P8 $\vdash a ; (a^{\cup} ; b^{-})^{-} + b = b$

Prova. Vamos provar que $a ; (a^{\cup} ; b^{-})^{-} \leq b$. Por AB, isto fornece T9.

Em primeiro lugar, por AB, temos $(a^{\cup} ; b^{-}) \cdot (a^{\cup} ; b^{-})^{-} = 0$. Assim, por T7, temos $a^{\cup\cup} ; (a^{\cup} ; b^{-})^{-} \cdot b^{-} = 0$. Mas isto, por P6, acarreta $a ; (a^{\cup} ; b^{-})^{-} \cdot b^{-} = 0$, que, por AB, fornece $a ; (a^{\cup} ; b^{-})^{-} \leq b$. ■

Podemos ainda definir alguns conceitos em RA, bastante conhecidos como propriedades de relações binárias. Conhecemos a noção de relação simétrica, em RA definimos o que vem a ser um *elemento simétrico* e assim podemos definir outros conceitos em RA baseados nas propriedades de relações.

Definição 2.2.19. *Elemento simétrico*:

$$a \in \mathbf{Sy} \leftrightarrow a \leq a^{\cup} \leftrightarrow a^{\cup} \leq a \leftrightarrow a^{\cup} = a$$

Definição 2.2.20. *Elemento transitivo*:

$$a \in \mathbf{Tr} \leftrightarrow a; a \leq a \leftrightarrow a^2 \leq a$$

Definição 2.2.21. *Elemento equivalência*:

$$a \in \mathbf{Eq} \leftrightarrow a \in \mathbf{Tr} \wedge a \in \mathbf{Sy} \leftrightarrow a^{\cup} = a = a^2$$

Definição 2.2.22. *Elemento funcional*:

$$a \in \mathbf{Fu} \leftrightarrow a^{\cup}; a \leq 1'$$

Definição 2.2.23. *Elemento permutativo*:

$$a \in \mathbf{Pe} \leftrightarrow a^{\cup}; a = 1' = a; a^{\cup}$$

A importância de se definir novos conceitos está nas propriedades que podemos obter ao estudarmos esses novos elementos da teoria. Por exemplo, o operador ";" é distributivo sobre a adição Booleana mas, em geral, essa propriedade não vale quando se trata da multiplicação Booleana. No entanto, se a for um elemento de função, então vale a propriedade distributiva para multiplicação Booleana, ou seja,

$$a \in \mathbf{Fu} \leftrightarrow \forall y, z[a; (y.z) = (a; z).(a; z)]$$

Este foi só um exemplo de como um dos conceitos definidos acima nos ajuda a identificar propriedades de um determinado conjunto de elementos do domínio.

2.3 Discussão algébrica da RA

A primeira propriedade algébrica a destacar-se na RA é consequência do que foi feito na sua discussão aritmética, quando obtivemos os teoremas T1-T9. É possível provar que o postulado P8, o único que é um condicional e não equacional, pode ser substituído pelos teoremas T5, T8 e T9. Assim obtemos um "novo" sistema de postulado para RA, mais longo, porém constituído apenas por equações, o que nos garante, pelo teorema de Birkhoff, que RA é uma *variedade*, ou seja, é fechada sob *subálgebra*, *produto direto* e *imagem homomórfica*.

Proposição 2.3.1. *Se* $\mathfrak{A} = \langle A, +, ^{-}, ;, ^{\cup}, 1' \rangle$ *é uma álgebra do tipo relacional, então* $\mathfrak{A}$

é uma RA sse $\mathfrak{A}$ *satisfaz aos seguintes postulados, para todos* $a, b, c \in A$*:*

$P1)$ $\quad a + b = b + a;$

$P2)$ $\quad a + (b + c) = (a + b) + c;$

$P3)$ $\quad (a^{-} + b)^{-} + (a^{-} + b^{-})^{-} = a;$

$P4)$ $\quad a \,;\, (b \,;\, c) = (a \,;\, b) \,;\, c;$

$P5)$ $\quad a \,;\, 1' = a;$

$P6)$ $\quad a^{\cup\cup} = a;$

$P7)$ $\quad (a \,;\, b)^{\cup} = b^{\cup} \,;\, a^{\cup};$

$T5)$ $\quad (a + b)^{\cup} = a^{\cup} + b^{\cup};$

$T8)$ $\quad a \,;\, (b + c) = a \,;\, b + a \,;\, c;$

$T9)$ $\quad a \,;\, ((a^{\cup} \,;\, b^{-})^{-}) + b = b.$

Prova. ($\Rightarrow$) Já provamos que P5, P6, P7 e P8 $\vdash$ T5, T8 e T9.
($\Leftarrow$) Para provar P8, necessitamos dos lemas L4, L6, L7, L8(c), L9(b) e, também, do teorema T6, que já provamos na Seção 2.2. Nas provas de L6 e L7, usamos apenas P6 e T5, que aqui são dados como postulados. A prova de L4, apresentada na Seção 2.2, é feita com o uso de P8. Assim, apresentamos abaixo uma nova prova a partir de T5, considerado como um postulado. A prova de L8(c), apresentada na Seção 2.2, é feita com o uso de L4, que aqui é provado diretamente de T5, considerado como um postulado. A prova de T6, apresentada na Seção 2.2, é feita com o uso de L6, L7 e L8(c), que aqui são vistos como provados diretamente de T5, considerado como um postulado. Finalmente, a prova de L9(b), apresentada na Seção 2.2, é feita com o uso de P8. Assim, apresentamos abaixo uma nova prova a partir de T8, considerado como um postulado.

Lema 2.3.2 (L4)**.** T5 $\vdash a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a^{\cup} \leq b^{\cup}$.

De fato, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a + b = b && \text{AB} \\ &\Leftrightarrow (a + b)^{\cup} = b^{\cup} \\ &\Leftrightarrow a^{\cup} + b^{\cup} = b^{\cup} && \text{T5} \\ &\Leftrightarrow a^{\cup} \leq b^{\cup} && \text{AB.} \end{aligned}$$

Lema 2.3.3 (L9(b))**.** T8 $\vdash b \leq c \Rightarrow a \,;\, b \leq a \,;\, c$*;*

De fato, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} b \leq c &\Rightarrow b + c = c && \text{AB} \\ &\Rightarrow a \,;\, (b + c) = a \,;\, c \\ &\Rightarrow (a \,;\, b) + (a \,;\, c) \leq a \,;\, c && \text{T8} \\ &\Rightarrow a \,;\, b \leq a \,;\, c && \text{AB.} \end{aligned}$$

Estamos prontos para provar que P6, P7, T5, T8, T9 $\vdash$ P8. Para isto, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} a \,;\, b \leq c^{\cup -} &\Rightarrow c^{\cup} \leq (a \,;\, b)^{-} && \text{AB} \\ &\Rightarrow c^{\cup \cup} \leq (a \,;\, b)^{- \cup} && \text{L4} \\ &\Rightarrow c \leq (a \,;\, b)^{- \cup} && \text{P6} \\ &\Rightarrow c \leq (a \,;\, b)^{\cup -} && \text{T6} \\ &\Rightarrow c \leq (b^{\cup} \,;\, a^{\cup})^{-} && \text{P7} \\ &\Rightarrow b \,;\, c \leq b \,;\, (b^{\cup} \,;\, a^{\cup})^{-} && \text{L9(b)} \\ &\Rightarrow b \,;\, c \leq a^{\cup -} && \text{T9.} \end{aligned}$$

Isto termina a prova. ■

Sobre subálgebras das RAs, podemos dizer que toda RA tem no mínimo uma subálgebra formada pelos elementos zero (0), diversidade (0'), identidade (1'), unidade (1) e suas combinações.

É interessante destacar que as "menores " subálgebras não são idênticas, existem diferentes tipos de "menores" subálgebras nas RAs. Verificamos isso da seguinte forma, se tomarmos os elementos do conjunto {0, 0', 1', 1} e qualquer combinação com os operadores Booleanos ($+, ^-$) ou inversa ($\cup$), não obtemos qualquer novo elemento, porém, ao aplicarmos o operador da multiplicação Peirceana (;), podemos obter resultados diferentes. Para exemplificarmos, tomemos uma RA onde os elementos são, de fato, relações binárias. Assim, uma RA sobre um conjunto de um único elemento tem como relação diversidade (0') o vazio, portanto o operador ";" aplicado a esse elemento também resultará no vazio, ou seja,

$$0'; 0' = 0.$$

No entanto, em uma RA sobre um conjunto de dois elementos diferentes ($\{x, y\}$), entendemos que $0'; 0'$ significa que existe um elemento z tal que $x \neq z$ e $z \neq y$, logo $x = y$, pois se z é diferente de x e y e o conjunto $\{x, y\}$ tem só dois elementos, então x deve ser igual a y. Portanto, nesse caso,

$$0'; 0' = 1'.$$

Se, finalmente, o conjunto possuir mais de dois elementos, então,

$$0'; 0' = 1.$$

Desta maneira, por $0'; 0'$ assumir diferentes valores, dependendo do número de elementos do conjunto sobre o qual estamos tomando as relações, podemos ter diferentes "menores "subálgebras das RAs.

Pela teoria de álgebra universal, sabemos que discutir homomorfismos é discutir *relações de congruência*, em particular, sobre a RA e em alguns casos, sob algumas condições, essa discussão pode ser substituída pela consideração de certos subconjuntos do universo, a saber, os chamados *ideais*. Assim, a discussão sobre imagem homomórfica das RAs, na verdade, é a discussão dos seus *ideais*.

Definição 2.3.4. Seja $\mathfrak{A} = \langle A, +, ^-, ;, ^\cup, 1' \rangle$ uma álgebra de relações e $a \in A$.
(a) Dizemos que a é *elemento ideal* se $1 ; a ; 1 = 1$.
(b) Denotamos por **Ide$\mathfrak{A}$** o conjunto de todos os elementos ideais de $\mathfrak{A}$.

Um conceito que pode ser caracterizado por meio de propriedades aritméticas, envolvendo ideais, nas RAs, é o conceito de *simplicidadenas*.

Definição 2.3.5. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra qualquer.
(a) Dizemos que $\mathfrak{A}$ é *trivial* se A possui um único elemento;
(b) Dizemos que $\mathfrak{A}$ é *simples* se para toda álgebra $\mathfrak{B}$ do mesmo tipo que $\mathfrak{A}$ e todo homomorphismo $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, temos que $\mathfrak{B}$ é trivial ou Φ é um isomorphismo.

Lema 2.3.6. *Se* $\mathfrak{A} = \langle A, +, \bar{}, ;, \breve{}, 1' \rangle$ *é uma álgebra de relações simples, então* $\mathbf{Ide}\mathfrak{A} = \{0, 1\}$.

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{A}$ é simples e, para uma contradição, que exista $a \in \mathbf{Ide}\mathfrak{A}$ tal que $0 \neq a \neq 1$. Seja $[0, a) = \{x \in A : x \leq a\}$ e $\mathfrak{A}a = \langle [0, a), \tilde{+}, \tilde{\bar{}}, \tilde{;}, \tilde{\breve{}}, \tilde{1'} \rangle$ a álgebra de tipo relacional, onde $\tilde{x^{\bar{}}} = a \cdot x^{\bar{}}$, para todo $x \in [0, a)$.

Temos os seguinte fatos, cujas provas necessitariam de uma investigação mais detalhada da noção de elemento ideal: $\mathfrak{A}a$ é uma álgebra de relações, $\mathfrak{A}a$ não é trivial, $[0, a) \neq A$ e $\Phi : A \to [0, a)$, tal que $\Phi x = a \cdot x$, é um homomorfismo de A em $[0, a)$. Assim, $\mathfrak{A}$ não é simples. ■

Proposição 2.3.7. *Se* $\mathfrak{A} = \langle A, +, \bar{}, ;, \breve{}, 1' \rangle$ *é uma álgebra de relações, então* $\mathfrak{A}$ *é simples sse* $\forall a \in A(a \neq 0 \Rightarrow 1 ; a ; 1 = 1)$.

PROVA. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathfrak{A}$ é simples e que $0 \neq a \in A$. Como $1 ; 1 ; a ; 1 ; 1 = 1 ; a ; 1$, temos que $1 ; a ; 1 \in \mathbf{Ide}\mathfrak{A}$. Daí, e Lema 2.3.6, temos que $1 ; a ; 1 = 0$ ou $1 ; a ; 1 = 1$. No primeiro caso, como $a \leq a ; 1 \leq 1 ; a ; 1$, teríamos $a = 0$, uma contradição. Assim, $1 ; a ; 1 = 1$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $\forall a \in A(a \neq 0 \Rightarrow 1 ; a ; 1 = 1)$. Seja $\mathfrak{B}$ uma álgebra de tipo relacional qualquer e $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ um homomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$. Suponha que $\mathfrak{B}$ não é trivial.

Temos que $\mathfrak{B}$ é uma álgebra de relações. Além disso, dados $a, b \in A$ tais que $\Phi a = \Phi b$, definimos $c = a \cdot b^{\bar{}} + a^{\bar{}} \cdot b$. Como $\Phi c = 0$, temos $\Phi(1 ; c ; 1) = 0$. Logo, $\Phi(1 ; c ; 1) \neq 1$. Como $\Phi 1 = 1$ isto nos dá $1 ; c ; 1 \neq 1$. Assim, $c = 0$. Logo, por AB, $a = b$ e Φ é um isomorfimo. ■

Observamos que a propriedade aritmética que caracteriza as álgebras de relações simples é uma versão do Postulado (12) adotado por Tarski na sua definição de cálculo das relações binárias, de 1941. E como essa propriedade é uma condição sobre todos os elementos, podemos dizer que uma subálgebra de uma RA simples é também simples. Consequências disso são que RAs simples coincidem com aquelas que são *diretamente irredutíveis* e *subdiretamente irredutíveis*, e ainda, pelo teorema de Birkhoff, toda RA é subálgebra do produto direto de álgebras simples, e esta é a definição de uma álgebra semi-simples, portanto, toda RA é semi-simples. Essas consequências facilitam o estudo das RAs quando queremos provar alguns resultados importantes sobre RA. Um dos problemas deixados por Tarski ilustra o uso dessas propriedades.

Antes de apresentarmos os problemas que são abordados neste trabalho, introduzimos mais dois conceitos necessários para entender um dos problemas.

Definição 2.3.8. Uma *álgebra de relações própria* (PRA) é uma álgebra do tipo relacional, que satisfaz os postulado P1-P8 e os elementos do domínio são relações binárias sobre um determinado conjunto A.

Definição 2.3.9. Uma álgebra de relações é *representável* (RRA) se é isomórfa a uma PRA.

2.4 Três problemas deixados em aberto por Tarski

Problema 1: o número mínimo de operadores para se definir uma RA.

O primeiro problema proposto por Tarski diz respeito aos fundamentos da RA, definida nas conferências com cinco símbolos primitivos, duas operações binárias, duas unárias e uma constante.

A pergunta feita por Tarski é simples, será que podemos diminuir o números de conceitos primitivos de maneira que ainda tenhamos a mesma variedade?

Em princípio, de acordo com o próprio Tarski, podemos substituir $+$ e $-$ pelo operador de Sheffer, também podemos eliminar a operação de inversa, introduzindo um novo operador que significaria $a; b^{\cup}$, e ainda seria possível eliminar a identidade. Assim, ainda ficaríamos com dois operadores binários, e esse era o ponto crucial, seria esse o número mínimo de operadores necessários, ou ainda, seria possível encontrar um único operador com o qual fôssemos capazes de definir uma RA, preservando que ainda tenhamos uma variedade?

O interessante deste problema é que a suspeita de Tarski estava equivocada. Como foi provado por Ferdinand Börner em [Börner86], é possível construir um único operador com o qual podemos definir uma RA ainda em termos de equações. Apresentaremos este trabalho com mais detalhes no próximo capítulo.

Problema 2: RA e RRA

Este problema é consequência de uma questão feita por Tarski, que na época das conferências já havia sido respondida, mas que no entanto ainda deixava muita pesquisa em aberto. A pergunta inicial era: será que toda RA é *representável*? Ou seja, será que toda RA é isomórfa a uma *álgebra de relações própria*?

Esta questão, depois de respondida negativamente, levantou um novo problema: o de se encontrar um sistema de equações que seja o mais "simples"possível, o qual valha em todas RRAs (álgebra de relações representáveis) mas não valha nas RAs, ou seja, um sistema de postulados que caracterize as RRAs. No Capítulo 4 apresentaremos o problema e seu

desenvolvimento atual.

Problema 3: RA e a construção da matemática

Tendo em vista que nem todas as RAs são representáveis, as RAs parecem não ser uma expressão adequada da lógica de predicados, como em princípio se desejava. No entanto, a RA se tornou um sistema dentro do qual se pode construir quase toda matemática. A terceira e última pergunta de Tarski nas conferências foi justamente como isso seria possível. Para Tarski, contruir a matemática era construir a teoria de conjuntos, a qual se fazia por meio de uma única relação, a saber, a relação de pertinência. Em [Givant&Tarski87], é apresentada uma formalização da teoria de conjuntos usando a linguagem da RA.

No Capítulo 5 analisaremos esse trabalho e sua relevância para pesquisas atuais.

Capítulo 3

Problema 1: O número mínimo de operadores para se definir uma RA.

"*Agora, se você tem apenas duas operações binárias, o grande problema é se você pode substituir essas duas operação binárias por uma única operação binária. Você pode sempre tratar RA como grupo? Como uma álgebra com uma única operação binária, mas ainda estar apto a caracterizá-la com um sistema de postulados que contenha somente equações? Eu suspeito que a resposta para este problema seja negativa, mas eu não tenho prova disso.*"

3.1 Börner's paper

Em 1986, Ferdinand Börner mostrou que Tarski estava equivocado em suas suspeitas sobre a impossibilidade de se ter um único operador com o qual pudéssemos definir uma RA (ver [Börner1986]). Tarski achava que não seria possível encontrar tal operador, mas Börner utilizou-se do conceito de *clones* para construir um operador binário capaz de substituir todos os outros operadores primitivos usados na axiomatização de Tarski.

A seguir, apresentamos uma síntese dos resultados de Börner para mostrar como é possível construir esse operador. Para os "novos" conceitos utilizamos as notações usadas por Börner, para conceitos já definidos neste trabalho continuamos a usar a "nossa" notação.

Seja $Re(U)$ o conjunto de todas as relações binárias sobre um conjunto U e $Op^{(n)}$ o conjunto de operadores n-ários sobre $Re(U)$, isto é,

$$Op^{(n)}(Re(U)) = \{f/f : Re(U)^n \to Re(U)\} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

e, ainda,

$$Op(Re(U)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Op^{(n)}(Re(U))$$

denota o conjunto de todas as operações sobre $Re(U)$. Se $F \subset Op(Re(U))$, então $F^{(n)} = F \cap Op^{(n)}(Re(U))$.

Para $i, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, pr_i^n denota a *projeção* n-ária do i-ésimo argumento:

$$pr_i^n(R_1, ..., R_n) = R_i.$$

Para $f \in Op^{(n)}(Re(U)), g_1, ..., g_n \in Op^{(m)}(Re(U))$, a operação $f(g_1, ..., g_n)$, definida por

$$f(g_1, ..., g_n)(R_1, ..., R_m) = f(g_1(R_1, ..., R_m), ..., g_n(R_1, ..., R_m))$$

é chamada de *superposição* de f e $g_1, ..., g_n$.

Definição 3.1.1. Um conjunto $F \subset Op(Re(U))$ é um *clone sobre* $Re(U)$, se valerem as seguintes condições:
i) F contém todas as projeções;
ii) F é fechado sob superposição, i.e,

$$f \in F^{(n)}, g_1, ..., g_n \in F^{(m)} \to f(g_1, ..., g_n) \in F^{(m)}.$$

A intersecção de clones também é um clone, assim podemos definir:

Definição 3.1.2. Para um conjunto $G \subset Op(Re(U))$ seja

$$\text{clone}_{Re(U)}G = \bigcap\{F | G \subset F \wedge F \text{é um clone sobre} Re(U)\}$$

o menor clone que contém G. Dizemos que G *gera* (ou G é um *conjunto gerador*) o $\text{clone}_{Re(U)}G$.

Um clone F é *finitamente gerado*, se existe um conjunto gerador G finito de F. Dizemos que F é *k-gerado* se o conjunto finito G, gerador de F, possuir k elementos. No caso de G conter um único elemento dizemos que F é *univocamente gerado*.

Nas álgebras booleanas, conhecemos um operador capaz de substituir as operações usuais de união, intersecção, complemento e as constantes unidade e vazio. Esse operador é conhecido como *operador de Sheffer*, denotamos-o por $|_{Sh}$ e definimos-o como $R|_{Sh}S = R^{-}.S^{-}$, onde "$\cdot$" representa o produto (ou interseção) booleana.

Assim, desse conhecido fato sobre o operador de Sheffer, sabemos que o *clone Booleano* $C_B(U) = \text{clone}_{Re(U)}\{+\ ,\ .\ ,\ ^{-},\ 0\ ,\ 1\}$ é unicamente gerado, isto é, $C_B(U) = \text{clone}_{Re(U)}\{|_{Sh}\}$.

As provas dos resultados a seguir podem ser encontradas em [Börner1986], com exceção de alguns corolários que seguem como consequências diretas do teorema.

Como a álgebra de Boole é um reduto da RA, o seguinte resultado é crucial para se provar que existe um operador gerador das operações da RA.

Teorema 3.1.3. *Todo clone F, finitamente gerado sobre $Re(U)$, que contém o operador de Sheffer é unicamente gerado.*

O próximo passo de Börner, no teorema e nos corolários seguintes, é indicar condições envolvendo o produto relativo (;) para provar a existência de um clone unicamente gerado que contenha $|_{Sh}$ e ;.

Teorema 3.1.4. *Seja U um conjunto finito e seja*

$$m = |Re(U)| = 2^{|U|^2}.$$

Todo clone sobre $Re(U)$ que contém o operador de Sheffer e a composição de relações é finitamente gerado pelo conjunto das sua operações m-árias:

$$;, |_{Sh} \in F \wedge F\text{é clone sobre}Re(U) \Rightarrow F = \text{clone}_{Re(U)}F^{(m)}$$

Corolário 3.1.5. *Se U é finito, então todo clone F sobre $Re(U)$ que contém $|_{Sh}$ e $\circ$ é unicamente gerado.*

Corolário 3.1.6. *Se U é finito, então existe somente um número finito de clones sobre $Re(U)$ que contém o operador de Sheffer $|_{Sh}$ e a composição de relações $\circ$.*

Os resultados acima, de certa forma, são suficientes para apontar o "erro" de Tarski ao suspeitar que não seria possível encontrar um único operador capaz de definir a RA. Mas é claro que é interessante não só provar que é possível, como também mostrar o operador que realiza essa função.

Uma das perguntas de Tarski, ao lançar o problema, era se seria possível "tratar uma RA como grupo sempre" . Maddux acredita que o que Tarski estava querendo era que fosse encontrado um operador binário, tal como temos em grupos. Antes dos resultados de Börner, Andréka já havia conseguido mostrar um operador com o qual podia-se definir uma RA, no entanto esse perador era ternário. O resultado seguinte completa a resposta para a pergunta de Tarski; Börner não só prova que o operador existe como também mostra que esse operador é binário.

Teorema 3.1.7. *O clone de toda álgebra de relações é gerado pela operação binária*

$$h(x,y) = (x^- \cap y^-) \cup (g_1(x,y); g_2(x,y); (g_3(x,y) \cup g_4(x,y)))$$

com
$g_1(x,y) = (x \cap y^- \cap E^-)^\cup$
$g_2(x,y) = (x \cup y) \cap E$
$g_3(x,y) = (V; (x \cap y \cap E); V) \cap g_1(x,y)$
$g_4(x,y) = (V; (x \cap y \cap E); V)^- \cap (((V; (y \cap E); V) \cap (x^- \cap y^- \cap E^-)^\cup) \cup ((V; (y \cap E); V)^- \cap E)))$.

Observamos que os resultados apresentados por Börner valem para RAs finitas. Tarski poderia estar interessado em um operador que fosse usado em qualquer RA, no entanto, não menciona e nem restringi uma possibilidade de existência deste operador para RAs finitas, o que nos faz acreditar que o resultado de Börner, mesmo com essa restrição, já pudesse "surpreender"Tarski.

3.2 RA e o operador de Börner

No iníco do século XX, a busca pela redução do números de operadores em uma álgebra universal era uma importante área de pesquisa, portanto era natural que Tarski levantasse essa questão a respeito da RA. Do ponto de vista algébrico, a verdade é que esse resultado não gerou grandes mudanças nos estudos da RA. Roger Maddux [1], embora pense se tratar de um problema interessante, principalmente por contrariar uma suspetia de Tarski, acredita que o resultado não traga grandes efeitos para RA. Ian Hodkinson, que tem um extenso trabalho com RA, acredita que talvez esse resultado ajude em algumas questões "técnicas" mas não deverá trazer muitas mudanças no seu próprio trabalho. Németi e Andreka opinam sobre esse resultado de maneira positiva, primeiramente pelo insight intectual, e também por nunca sabermos quais usos futuros que um determinado resultado matemático pode alcançar.

Independentemente das consequências que o resultado de Börner trouxe ou venha trazer para o estudo das RAs, acreditamos que o resultado de Börner é interessante por si, não só por apontar um equívoco de Tarski mas pela beleza das demonstrações e dos caminhos seguidos para se alcançar o tal operador.

[1] Essas opiniões foram emitidas em correspondência particular com os pesquisadores mencionados via email.

Capítulo 4

Problema 2: RA e RRA.

"Vejam vocês, o problema de se encontrar o sistema mais simples, um sistema natural, ainda está em aberto. O problema das equações mais simples que valham em todas as RRAs mas não em todas as RA ainda está em aberto. Nós não sabemos quão longe temos que ir na complexidade das equações para alcançarmos... para obtermos equações que valham em todas as RRAs mas não valham em todas as RAs."

4.1 Um breve histórico do problema.

Este interessante problema teve sua origem logo que Tarski publica sua axiomatização das RAs. Em [Tarski1941], após apresentados dois métodos de se construir uma teoria das relações binárias, então chamada de cálculo das relações binárias, Tarski propõe o problema de representação para RA, que consistia em saber se todo modelo para o sistema de axiomas de sua teoria seria isomórfo a uma álgebra de relações própria (RRA), isto é, a classe de relações binárias que contém as relações 1, 0, $1'$, $0'$ e é fechada sob todas as operações consideradas dessa álgebra. Anteriormente, um problema análogo a este havia sido proposto para álgebras Booleanas; seriam todas as álgebras de Boole isomórfas a uma subálgebra do conjunto das partes? Neste caso o problema havia sido resolvido por Stone, em [Stone1936], e a resposta é afirmativa[1], mas no caso das RAs, o problema foi deixado em aberto por Tarski.

Roger Lyndon publica, em [Lyndon1949], uma resposta para o problema de Tarski. No caso das RAs não é verdade que todas as RAs são isomorfas a uma RRA. Para provar este resultado Lyndon estabelece um conjunto C de condições que são necessárias e suficientes para que uma álgebra *finita* seja isomórfa a uma RRA; então é exibido um modelo finito que satisfaz todos os axiomas de Tarski, mas não satisfaz todas as condições C e, portanto, não é representável, isto é, isomorfo a uma RRA.

[1] Resultado conhecido como *teorema de representação*

Uma vez que se sabe que nem todas as RAs são representáveis, procura-se então um sistema de axiomas que possa caracterizar somente as RRAs, pois do ponto de vista da lógica algébrica, essas seriam mais interessantes para poder expressar a lógica de primeira ordem em termos algébricos. O próximo passo de Lyndon, nessa mesma publicação, é então verificar se seria possível propor uma axiomatização para as RRAs. Neste momento, Lyndon comete um equívoco em um de seus teoremas, segundo o qual seria impossível caracterizar as RRA por qualquer conjunto de axiomas algébricos, enunciado da seguinte maneira:

A classe de todas as álgebras de relações que são isomórfas às algebras de relações próprias não pode ser caracterizada por qualquer conjunto de axiomas algébricos.

São Tarski e Dana Scott quem corrigem Lyndon, primeiramente em correspondência particular.[2] Posteriormente, Tarski mostra, em [Tarski1954], como consequência de um teorema mais geral, que existe um conjunto de axiomas em forma de equações que é necessário e suficiente para que uma RA seja isomórfa a uma RRA. No entanto, Tarski não provê uma maneira de construir esse conjunto de axiomas. É o próprio Lyndon que, em [Lyndon1956], admite seu erro em [Lyndon1949] e propõe um conjunto de axiomas equacionais para as RRAs.

A partir dos resultados de Lyndon, inicia-se uma busca para melhorar seu sistema de axiomas para RRAs tornando-o mais "simples," e é aqui que a pergunta feita por Tarski nas suas conferências se encaixa. No entanto, resultados mais recentes têm demonstrado que, por mais que se busque essa "simplicidade" , existem limites para se conseguir uma axiomática "simples" para as RRAs; por exemplo, Donald Monk já havia provado que as RRAs não são finitamente axiomatizáveis (Monk[1963]). Claro que este resultado já era conhecido de Tarski quando esteve no Brasil, mas ainda poder-se-ia pensar na complexidade das infinitas equações separadamente, e era justamente isso que Tarski deixava em aberto ao dizer que não se sabia o "quão longe temos que ir na complexidade das equações para alcançarmos... para obtermos equações que valham em todas as RRAs mas não valham em todas as RAs."

4.2 Desenvolvimentos recentes.

Os resultados negativos apresentados para a axiomatização das RRAs podem ter ocasionado um certo desinteresse dos pesquisadores pelo problema de se encontrar um sistema equacional "simples." Em correspondência particular, Hodkinson cita alguns desses resultados negativos: "sabe-se que não existe uma axiomatização de Sahlqvist para RRA, qualquer axiomatização deve ter infinitas fórmulas não-canônicas; em sua tese, Andreka provou alguns resultados relacionados sobre álgebras cilíndricas, mostrando que qualquer

[2] cf. [Lyndon1956], pág.294, nota de rodapé 2

axiomatização deve usar os operadores "muitas vezes" , não existe axiomatização em lógica de segunda, terceira ou n-ésima ordem..."

Finalmente, o próprio Tarski afirma, no final de suas conferências, que as RRAs não podem ser axiomatizadas por equações nas quais se usa um número limitado de variáveis. No entanto, apesar de todos esses resultados negativos, Ian Hodkinson e Robin Hirsch propõe uma axiomatização para as RRAs, usando *jogos*, em [Hodkinson&Hirsch2002] e, mais recentemente, Roger Maddux também faz uma axiomatização para as RRAs, em [Maddux2006]. É sempre possível desafiar essas propostas e tentar uma axiomatização "melhor" , sendo que Németi parece ser um dos que consideram o problema ainda em aberto, por acreditar ser possível encontrar algo mais "simples", embora não esteja claro o que seja "simples."

4.3 Possíveis respostas.

Analisando o histórico e desenvolvimentos recentes deste problema, podemos assumir duas posições em relação a sua solução. A primeira é que o problema ainda está em aberto pelo fato de ainda ser possível explorar as equações que axiomatizam as RRAs no seu grau de complexidade e, como já foi dito, ainda é possível desafiar as axiomatizações propostas até aqui. Por outro lado, parece já não ser muito interessante continuar essa busca por uma axiomatização "mais simples", devido a tudo o que já foi feito: pesquisadores da área parecem concordar e estar satisfeitos com o que já foi conquistado, dando novos rumos para essa linha de pesquisa e do próprio desenvolvimento da RA.

Atualmente, novas classe de RAs são estudadas, com aplicações em diferentes áreas e não mais apenas com o intento de se algebrizar a lógica de primeira ordem. O desejo inicial de Tarski de se conseguir uma contra-parte algébrica da lógica de primeira ordem só pode ser concretizado mais tarde com o desenvolvimento das álgebras cilíndricas. No entanto, as RAs construíram um caminho que poderia ser percorrido para se conseguir o aparato algébrico que havia sido almejado por De Morgan, Peirce, Schröder e também por Tarski.

Capítulo 5

Problema 3: RA e a construção da matemática

"E finalmente, a última questão, "se é assim..." você poderia me perguntar sobre esta definição de RA que eu propus... Se nós sabemos que essas não são todas as equações necessárias para obtermos teoremas de representação, isto é, para obter uma expressão algébrica da lógica de predicados, se sabemos que essa não é uma expressão adequada dessa lógica, então por que nos restringirmos a essas equações? Por que não adicionar mais equações que valham nas RRAs ou talvez todas as equações?"

5.1 Uma formalização da teoria de conjuntos sem variáveis

A última colocação de Tarski, ao encerrar as conferências, faz bastante sentido se pensarmos na maneira como ele as iniciou. Em princípio, as RAs eram uma proposta de algebrização da lógica de primeira ordem, sua aplicação seria construir um aparato que pudesse ser para a lógica de primeira ordem aquilo que a álgebra de Boole é para o cálculo proposicional. No entanto, como o teorema de representação não vale para as RAs, o intento inicial do seu uso foi frustrado. Sendo assim, por que deveríamos nos ocupar ou então manter esse sistema de axiomatização de Tarski? Qual sua utilidade dentro da matemática? Esse é justamente o último problema proposto por Tarski e por ele mesmo respondido.

A lógica de primeira ordem é uma linguagem dentro da qual os matemáticos podem expressar suas teorias, no entanto, como bem colocado por Tarski nas conferências, "construir a matemática é construir a teoria de conjuntos", e para esta teoria não é necessário a lógica de primeira ordem em sua totalidade. Sabemos que a teoria de conjuntos é a teoria de uma única relação binária, a saber, a relação de pertinência.

A verdade parece ser que a real intenção de Tarski não era algebrizar a lógica de primeira ordem em termos gerais mas ele estava ocupado em poder fazer uso de uma linguagem algébrica que pudesse expressar a matemática e, para esse fim, sua axiomatização

das RAs se mostrou suficiente. Nas conferências, Tarski não pode entrar em detalhes quanto ao uso da RA para a construção da teoria de conjuntos, mas seu trabalho com Steven Givant ([Tarski&Givant87]) é justamente uma formalização da teoria de conjuntos usando a linguagem da RA.

Nesse trabalho, Tarski e Givant apresentam um formalismo L^x que dispensa o uso de variáveis individuais, quantificadores e conectivos sentenciais. Esse formalismo contém dois símbolos, $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{E}$, para denotar a identidade e a relação de pertinência, respectivamente. Para compor expressões a partir de fórmulas básicas são usadas quatro operações: o produto relativo, a inversa (aplicadas a relações), a união e o complemento booleano. Os axiomas não lógicos que regem esse formalismo são equivalentes aos axiomas que regem uma RA e a única regra de inferência é a de substituir elementos iguais.

Em princípio, L^x parece ser um sitema muito "fraco" em sua capacidade de expressão, por exemplo, não seria possível, dentro de L^x, expressar equivalentemente a proposição de que "existem no mínimo quatro elementos". L^x também é incompleto. No entanto, Tarski e Givant mostram que L^x é "equipolente"a um certo fragmento da lógica de primeira ordem que contenha um predicado binário e apenas três variáveis individuas.

O principal resultado desse trabalho de Tarski e Givant é mostrar que L^x, apesar de sua aparente fraqueza, é um sitema dentro do qual praticamente todos os sistemas de teoria de conjuntos podem ser formalizados, ou seja, se o objetivo das RAs era expressar a matemática em termos algébricos, então em [Tarski&Givant87] esse objetivo é alcançado.

5.2 Para que mais uma axiomatização da teoria de conjuntos?

Com esse trabalho de Tarski e Givant, a frustração inicial de não se conseguir usar as RAs para uma algebrização da lógica de primeira ordem é "salva" por uma interessante aplicação das RAs para a formalização da teoria de conjuntos. No entanto, restam algumas questões que não foram proposta por Tarski nas conferências, mas é consequência direta de uma simples reflexão: afinal de contas, para que precisamos de mais um sistema para teoria de conjuntos? Os que já temos não são suficientes? A matemática já não está bem construída nas bases dos sistemas já existentes?

Se Tarski encontra uma boa aplicação para as RAs na formalização da teoria de conjuntos, agora, no fim deste trabalho, propomo-nos a pensar sobre uma "boa" aplicação para a formalização da teoria de conjuntos via RA.

Em meu Exame de Qualificação, o Prof. Décio Krause, do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), sugeriu-nos uma questão que está relacionada com a aplicação da teoria de conjuntos, via RA, e que será devidamente explorada no nosso projeto de doutorado.

Em junho de 2006, Willian Steinle, sob orientação do Prof. Krause, apresentou sua

Dissertação de Mestrado intitulada "Estudos sobre o Realismo Estrutural" ([Steinle2006]). Seu trabalho, resumidamente, mostra que:

"*Existem pelo menos duas versões do realismo estrutural, a epistemológica e a ontológica. O realismo estrutural epistemológico afirma que o nosso conhecimento do mundo, representado por nossas melhores teorias científicas, é estrutural; a ciência não pode nos revelar nada que esteja além da estrutura - ou seja, nada das "qualidades", da "natureza intrínseca"ou da "coisa em si"dos objetos pode ser conhecido. O realismo estrutural ontológico irá dizer que tudo o que podemos conhecer do mundo são estruturas porque só existem estruturas, e nada mais; essa versão sustenta uma ontologia de estruturas, e não de objetos...*
...apresentamos algumas definiões fundamentais para uma discussão acerca da possibilidade de sustentarmos o realismo estrutural ontológico que será feita no final da dissertação."

Não detalharemos aqui as versões filosóficas do realismo estrutural ontológico e epistemológico, sendo que essas importantes correntes de pensamento da filosofia da ciência estão mencionadas no trabalho e nas referências da dissertação de Steinle. Abordamos apenas uma questão apresentada por Steinle, que está relacionada com o nosso trabalho. Para se sustentar uma postura estruturalista ontológica e fundamentar essa filosofia em bases matemáticas, é preciso começar por definir o que é uma "estrutura". Este conceito parece não estar claro para os próprios filósofos que defendem essa forma de estruturalismo, e para termos uma definição de estrutura que satisfaça tais filósofos será necessário buscar uma teoria onde possamos ter relações sem os relacionados, uma vez que segundo essa filosofia, objetos, ou seja, individuos não existem, o que existem são as estruturas apenas. É neste ponto, que a teoria de conjuntos de Tarski via RA parece ser uma possível maneira de abordar essa questão, pois nessa teoria não temos variáveis individuais, nossos objetos são apenas relações, sem referência a seus relacionados.

"*é possível sustentar alguma forma de realismo estrutural ontológico em filosofia da matemática? A resposta parece ser, pelo menos em um sentido, negativa. Ou seja, se o tipo de estrutura adotada pelos defensores do realismo estrutural ontológico for conjuntista - isto é, elaborada em uma teoria de conjuntos como ZF -, apresentado em sua forma usual (em especial, contendo os axiomas da união e da regularidade), então seria impossível termos relações sem os relata, como desejam os autores. Deste modo, o realismo estrutural aparentemente poderia ser defendido somente no nível de uma filosofia da física, por exemplo via teoria de quase-conjuntos, mas aparentemente não no nível da filosofia da matemática. Todavia, essa distinção entre filosofia da matemática e filosofia da física,*

tal como usada acima, também não é clara, e precisa ser mais elaborada. Uma alternativa, que pode ser investigada, consiste em adotar uma outra abordagem, baseada em algo como o Cálculo de Relações de Tarski (Tarski 1941), mas isso ainda é plano futuro." ([Steinle2006])

Se a formalização da teoria de conjuntos sem variáveis de Tarski e Givant for uma resposta satisfatível para se definir "estrutura", então a ágebra de relações de Tarski não seria apenas mais uma forma de se formalizar teoria de conjuntos, mas poderia vir a ser uma contribuição importantíssima para fundamentar uma das mais atuais vertentes da filosofia da ciência. Como já foi dito, é nossa intenção, usarmos o conhecimento adquirido neste trabalho para investigar a fundo e procurar contribuir nessa questão, em um trabalho de doutorado futuro.

Considerações Finais

A motivação inicial deste trabalho foi divulgar e tornar público as conferências que Alfred Tarski apresentou no Brasil. Ao analisá-las, ficou claro que o trabalho não se limitaria apenas à divulgação dessas conferências, por meio de uma transcrição, mas que o conteúdo do que foi apresentado por Tarski tinha muito ainda a ser explorado.

Com o objetivo de inserir as conferências de Tarski dentro do seu contexto histórico, fizemos, no Capítulo 1, um breve resumo do desenvolvimento da álgebra de relações antes de Tarski ter se ocupado do assunto. De Morgan, Peirce e Schröder foram os principais autores antes de Tarski que investigaram a fundo as propriedades das relações binárias, no entanto, estes as estudavam apenas como elementos de um cálculo onde se podia, ou não, verificar a validade de igualdades envolvendo operações entre relações. Tarski foi o primeiro a prover uma axiomatização para o cálculo de relações binárias, que fez deste uma teoria formalizada dentro da qual, acreditava Tarski, poder-se-ia provar todas as propriedades que seus predecessores obtiveram por meio de um extenso trabalho de cálculos.

Uma vez delineado o histórico das RAs até Tarski, pudemos analisar o conteúdo das conferências da maneira como Tarski as apresentou. No Capítulo 2, sistematicamente, apresentamos as conferências e destacamos três problemas que foram deixados por Tarski, os quais ocupavam seus estudos sobre RA e foram os principais temas de investigação deste trabalho.

O primeiro problema, sobre qual seria o número mínimo de operadores necessário para podermos definir uma RA em termos equacionais, foi uma importante questão levantada por Tarski. Embora fosse bastante natural que se fizesse essa pergunta, o interessante foi perceber que Tarski se equivocara nas suas suspeitas de que seria impossível encontrar um único operador com o qual pudéssemos definir uma RA (finita). Como mostrado no Capítulo 3, Ferdinand Börner construiu tal operador e provou que este substitui todos os operadores usados na axiomatização de Tarski. No entanto, devido à complexidade do operador de Börner, fica a dúvida se o que Tarski buscava não era algo mais "simples". De qualquer maneira, o problema foi objetivamente resolvido em 1986. Quanto à importância deste operador para o estudo das RAs, não pudemos verificar grandes mudanças no seu desenvolvimento; mesmo entre os pesquisadores mais experientes no assunto, os que tivemos o privilégio de consultar concordam que em seus próprios trabalhos, este operador não influenciou muita coisa. No entanto, lembramos o que Andréka e Németi, em corres-

pondência particular, ressaltaram - que nunca podemos saber qual a importância que um resultado pode ter em investigações futuras. Independentemente do que este operador de Börner tenha acrescentado ou acrescentará ao estudo das RAs, acreditamos que os conceitos usados e as demonstrações feitas em seu artigo para a sua construção elevam a uma abstração de alto nível intelectual que, por si só, já justifica o seu trabalho.

O segundo problema deixado por Tarski e abordado no Capítulo 4 deste trabalho foi certamente o problema que mais rendeu pesquisas posteriores e gerou artigos. Encontrar um sitema de equações que caracterizasse apenas as álgebras de relações representáveis (RRA) não foi uma tarefa trivial. Primeiramente foi necessário mostrar que nem todas as RAs são representáveis, o que havia sido feito por Lyndon muito antes das conferências, resultado conhecido por Tarski na ocasião em que esteve no Brasil. Uma vez conhecido que nem todas as RAs são RRAs, iniciou-se a busca pelas equações que seriam válidas nas RRAs e não seriam válidas nas RAs, além disso, qual seria o sistema de equações adequado que pudesse caracterizar a classe das RRAs. Alguns resultados negativos com relação a esse sistema de equações foram obtidos, mostrando que esse sistema não poderia ser muito "simples". Lyndon, Hodkinson e Hirsch (conjuntamente) e Roger Maddux propuseram sistemas para caracterizar as RRAs. Embora esses sistemas possam ser desafiados quanto a sua complexidade, as linhas de pesquisas em RAs parecem ter tomado outros rumos. Assim sendo, poderíamos dizer que o problema deixado por Tarski não foi completamente fechado, uma vez que ainda seja possível, talvez, alcançar-se resultados "melhores"(mais "simples") do que os obtidos até hoje; no entanto, o que já foi feito nessa área parece dar contar de fazer com que o estudo das classes das RAs se desenvolva sem maiores entraves.

O terceiro e último dos problemas deixado em aberto por Tarski já estava sendo por ele mesmo respondido na época das conferências, no entanto, seu trabalho, com Steven Givant, só foi publicado em 1987.[1] O problema era fazer da RA um recurso que pudesse ser usado para expressar, algebricamente, a matemática clássica. Mas como fazer isso, se a linguagem usada para expressar a matemática é a lógica de primeira ordem e, como vimos, a RA não é adequada para ser a contra-parte algébrica da lógica de primeira ordem? O fato é que não precisamos da lógica de primeira ordem em sua totalidade para expressar os conteúdos matemáticos. Como foi dito por Tarski, "construir a matemática é construir teoria de conjuntos e essa teoria contém apenas uma relação binária, a relação de pertinência". Tarski e Givant usam o formalismo das RAs e mostram que esse formalismo é equipolente a um fragmento da lógica de primeira ordem, que contenha um predicado binário e três variáves individuais, o que seria suficiente para expressar quase toda a matemática. Em outras palavras, o que Tarski e Givant propõem é uma nova forma de se axiomatizar a teoria de conjuntos, com uma linguagem das RAs.

A importância de Alfred Tarski para o desenvolvimento da lógica dispensa comentários, em particular, o conteúdo de suas conferências no Brasil ainda é fonte de muitas pesquisas atuais. Ao terminar este trabalho, percebemos que não só poderíamos tornar público as

[1] Publicação póstuma, Tarski faleceu em 27 de outubro de 1983.

conferências de um dos maiores lógicos modernos, para servir de fonte de pesquisa para muitos pesquisadores do mundo, como poderíamos também, nós mesmos, tirar das conferências grandes conteúdos para nossos próprios estudos.

A partir deste trabalho e de uma sugestão do Prof. Krause, motivamo-nos a investigar o uso da axiomatização de Tarski para teoria de conjuntos, via RA, para fundamentar uma definição de estrutura que possibilite satisfazer a orientação da filosofia da matemática, contemporaneamente conhecida como *realismo estrutural ontológico*.

Acreditamos que a transcrição das conferências apresentadas neste trabalho, não só contribuirá com o seu valor histórico, sobre a obra de um dos maiores lógicos modernos do mundo, mas também poderá ser inspiração de trabalhos futuros.

Encerramos este trabalho com um comentário sobre Tarski e a transcrição das conferências.

Aqueles que tiveram a oportunidade e o privilégio de assistir as aulas de Tarski viram que além de ter sido dono de uma inteligência rara, Tarski foi também um grande professor. A maneira como Tarski explicava o conteúdo de suas aulas fazia com que seus alunos o entendessem com facilidade. Sua capacidade de organizar suas idéias para dar suas aulas era tão boa que mesmo tópicos avançados e complexos da matemática pareciam ser bastante inteligíveis. Da mesma maneira como lecionava, Tarski apresentou suas conferências no Brasil. Na transcrição destas, feita neste trabalho, nos esforçamos para transmitir ao leitor palavra por palavra dita por Tarski. Nem sempre isso foi possível, por duas razões: primeiramente porque as fitas foram gravadas em 1975, devido a tecnologia que dispunha-se na época e os danos causados nas fitas pelo tempo, a clareza de som e imagem ficou comprometida, fazendo com que alguns (poucos) trechos ficassem incompreenssíveis para a transcrição; e a segunda razão pela qual não fomos literais na transcrição foi pelo fato da linguagem falada ficar confusa quando expressa literalmente na forma escrita, nesses momentos preferímos fazer algumas alterações em favor de obtermos um texto mais claro para o leitor. Mas mesmo quando assim o fizemos, procuramos ser sempre fiéis às palavras de Tarski. Acreditamos que aqueles que tiverem acesso à nossa transcrição estarão tendo acesso integral às conferências que Tarski apresentou no Brasil.

O filme com a gravação das duas conferências sobre álgebra de relações, proferidas por Alfred Tarski na Unicamp em 1975, e a transcrição dessas conferências, que constitui parte desta Dissertação de Mestrado, serão disponibilizadas para uso acadêmico e público, através dos Arquivos Históricos do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp.

Apêndice

Author's comment: Those who had the opportunity to watch Tarski's lecture learned that besides the rare intelligence there was also a great professor. The way Tarski explained any subject made it easier for the students to understand. His capacity of organizing his lectures and introduce a step by step mathematical development was so amazing that even the most evolved topic in mathmatics seemed to be something understandable. It wasn't different when Tarski delivered his lectures in Brazil. For this transcription we always tried to get Tarki's words across literally, sometimes it wasn't possible for two reasons, firstly because the tape was recorded in 1975 and the sound and image is not as perfect as we wish and it ended up that we may have lost something but only in a few parts. Secondly because spoken language may be confusing when it is written down, at this moment we rather changed a little so that the reader could understand without being confused, but even at this point we kept as close as possible to Tarski's words. We understand that those who have acces to this transcription do have fully acces to the lectures that one of the finest logic professor deliveried in Brazil.

ALFRED TARSKI IN BRAZIL
TARSKI SIMPOSIUM OF MATHEMATICAL LOGIC
UNICAMP - MARCH 1975

FIRST LECTURE

In my two lectures I would like to give you some idea of notions and problems in the theory of *relation algebra* (RA). For obvious reasons I shall concise and skip over many important points.

The development of RA is important to the proper view and discussion within a wider framework, the viewed framework of the general development of algebraic logic, which goes back to the half of the 19^{th} century. It starts with the work of Boole, he's been known as the creator of the discipline which is known as *the theory of boolean algebra*. Its purpose was to provide an apparatus which would enable cientists to develop a part of logic and the corresponding part of metalogic, by means of algebraic methods.

The part involved was the most elementary part of logic, known as *sentencial calculus*. We know that the work of Boole really achieved this goal. Boolean algebra provide us

such an apparatus for sentencial calculus. Moreover, from the very beginning they found applications and interpretations in other domains. They were treated as a kind of abstract algebra which has a variety of models, sentencial calculus provide us one model which can be called standard-model of boolean algebra. There are many other in Set Theory, Topology, parts of Analysis...

From the point of view of logic, it was only the very beginning of what now we call algebraic logic, because the part of logic involved was very elementary and it's not sufficient, actually, it's far from being sufficient for serving as base for the whole mathematics.

Clearly, the problem arose of finding (or founding) a part of algebra or certain algebraic system which would provide us such an apparatus for more advanced parts of logic, in particular, of *predicate logic* which, as we know now, is essentially the main part of logic which provides sufficient bases for the development of the whole mathematics.

The theory of RA is a certain stage in this development. People started working on this theory very soon after the main papers of Boole. The people that should be mentioned here is the English man De Morgan, an American philosopher Charles Peirce and the German Ernest Schröder.

The theory of RA deals only with a part of predicate calculus (or the calculus of quantifiers). In fact, it deals only with binary predicate and the binary relation denoted by this binary predicate. So, it's not the theory of arbitrary relations. Actually, the theory of n-ary was never, to my knowledge, developed as in the same size as the theory of binary relation. On the other hand, I hope, at the end of the second lecture, I shall give you some idea of how the theory of binary relation can be used to the development of the whole mathematics.

In the work of the people that I mentioned, De Morgan, Peirce and Schroder, a calculus of relation was developed, not a theory in a modern sense but simply a machinery of proving and deriving laws involving binary relations. Only much later, in 1940's, the theory of relation was presented as a part of abstract algebra, as the theory of certain class of algebraic systems, and it became clear for us from the very beginning that the theory of boolen algebra could be interpreted in interesting and important models outside of logic, in particular, in groups.

Instead of defininig at once what I understand by relation algebra, I would like to give you an example, what is called in mathematics "a concrete " example, mathematicians use many terms in a very "perverse" way, in particular, the term "concrete," this is not concrete in any sense which we use this term in commom language. It's concrete in the sense that we don't give an arbitrary operation satisfying certain conditions but the operation of a very defined set.

So, let's consider an arbitrary set A, which we assume is not empty. By a *binary relation* R on A we understand, in set theory normally, every set of ordered pairs, everything which has a graph in a normal two axis coordenates, in case S is the set of real numbers, but A could be a set of any kind of character. Normally we denote $A \times A$ for the cartesian square of A. This means the set of all ordered pairs whose members are elements of A.

A binary relation R is an arbitrary subset of the cartesian square $A \times A$. Now, we can form many operations on this relation, for instance, let S be another relation on A. We can perform on R and S boolean operations, we can take the union of two relations or intersection of two relations. Given any relation R we can form the complement of R relative to A, which we denote by $\neg_A R$. So, we have boolean operations on relations.

We have also certain operations on relations which do not apply to arbitrary sets, which are characteristic of binary relation and have no meaning when applied to sets that are not relations. One of them is the operation of *relative product* or *composition* on two relations, which we denote by $R\backslash S$. But what do we understand by this? This is again a certain set of ordered pairs, using the formal notation we have

$$R\backslash S = \{(x, y) : x, y \in A \wedge \exists z(z \in A \wedge (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\},$$

ie, the set of pairs (x, y) where x and y belong to A and there exist $z \in A$ such that (x, z) is in R and (z, y) is in S. So, this is the operation of the *relative multiplication* of two relations. This is a very important operation even in commom language, the evidence is provided by the fact that for all relative product of certain relations whose name exist in commom language, special terms which we produce denote this product. Most examples which are given in this collection are those in the domain of family relation, for instance, let's take the relation of *being a son in law*. So, let T be the relation of *being a son in law*, it means that if I write xTy or $(x, y) \in T$, I will read this as x is a son in law of y. To say that x is a son in law of y means that there exists z such that x is husband of z and z is daughter of y, ie, if H is the relation of *being a husband* and D is the relation of *being a daughter*, so T is derived in the following way: T holds for (x, y) if there exists z such that x is husband of z and z is daughter of y. Formally written, we have

$$\exists z|xHy \wedge zDy.$$

Therefore, according to our definition, T is the relative (or direct) product of H and D ($T = H\backslash D$), the relation of being son in law is the *direct product* of the relation of being a husband and the relation of being a daughter.

You can think in many examples, as many as you wish, in particular, when H and D are the same relation. This is the case when T is the direct product of two relations R ($T = R\backslash R$), the relative square of R, sometimes denoted as R^2. For instance, if R is the relation of being a child, then R^2 is the relation of being a grandchild, a grandchild means a child of a child. This is the sort of good things for exercises, for instance, you can ask the following question: is the relation of being a grandson the relative square of being a son? And then you'll see that the answer is negative, of course that a son of a daughter is also a grandson. So, if x is a grandson of y it doesn't mean necessarily that x is a son of z and z is a son of y, because z could be a daughter of y.

Another example of an operation on relations is the unary operation of forming a *converse* of a relation ($R^{\cup}$). Let's use instead of the symbol converse ($^{\cup}$), the symbol that

is most used in mathematics, R followed by "-1" (R^{-1} for the converse of a relation R). This is the relation obtained from R by interchanging the terms on each pair, $(x, y) \in R^{-1}$ if and only if $(y, x) \in R$. For instance, if R is the relation of being a child, then R^{-1} is the relation of being parents. But if R is the relation of being a son, R^{-1} could be not the relation of being a father since it could be also that you take not the father of x but the mother of x. Actually we don't have in the language a good term for the converse relation of the relation of being a son. The relation of being parents is too wide here, the converse of being parents of x doesn't follow that x is a son because x could be a daughter.

There are also some individually relations which deserve attention. So, we are dealing, as before, with relations on A and thus we can consider the largest and the smallest relation on A. Using boolean notions, we have that relations are set or subsets of the set $A \times A$, which is itself a relation because it's a subset of itself, and it's the largest relation on A. It is called the *unit relation* and we can denote it by U (U_A if we want to emphasize that this is the unit relation on A). On the other hand, we have also the least relation and this is the *empty relation*, which is the same as empty set and we denote it normally by 0. Here, relations are set strictly and these are boolean notions.

Now, the notions applied for relations are two such relations, *indentity relation* (I), which is the set of all pairs (x, x) or all pairs (x, y) such that (x, y) belongs to $A \times A$ and x is equal to y. That is,

$$I = \{(x, y); (x, y \in A) \wedge (x = y)\}.$$

Here, we used a set A but it could be independent on A, we would have then the very comprehensive relation, the set of all pairs whose existence depends on a particularity of set theory which we use as the base of our discussion, but in this case where we have the identity relation restricted to A we'd have to write I_A but, as before, we omit this A.

The other notion applied to relations is the *diversity relation*, denoted by D_A, which is the complement of the relation I_A, ie, the set of all pairs (x, y) such that x is different from y.

So, as you can see, we have here quite a few examples of operations on relations, binary and unary ones and distinguished relations (or particular relations). We can form what is called an algebraic structure. For this we can be interested in the property of a structure formed by the family of all relations involved and by certain definited operations on these relations and definited distinguished relations. In fact, we can denote by $\mathcal{F}$ the family of all relations on A and we can consider it in connection (or in conjunction) with certain operations, with the operations of forming union (I omitted forming intersection because we can derive it from others) and the operation of forming complement (unary operation). Then we take the relation of relative product, the relation converse and finally we take at least one distinguished element, the indentity relation. So we have the following structure,

$$\left\langle \mathcal{F}, \cup, \neg, \backslash, ^{-1}, I \right\rangle.$$

The choice of these notions is understood if you notice that other notions which I mentioned are defined in terms of them. So, we consider this structure of six notions, an ordered 6-uple, this is an algebra in the sense of the theory of general algebra because it is a structure formed by a set and certain operations under which the set is closed, also by certain element of this set (distinguished element). Such structure is called nowadays *algebraic structure* or *algebra*, and this algebra is an example of a *relation algebra* (RA). It can be refered more specificated, as the *complete algebra of relation* on a given set A, it's entirely determined by this set A.

Now, it would be wrong and inconsistent with the spirit of modern algebraic discussion if we made this complete an algebra the exclusive topic of our discussion or our consideration. Also, from the point of view of providing us apparatus for the investigation for part of logic, this would be probably satisfactory, however, we can say that it would be inconsistent and uneconomic from the point of view of our idea of general theory of algebraic structure. Why uneconomic? Because in developing the theory, we would formulate certain laws, we would prove these laws by refering to the definitions of the operations and then we would derive from these laws many other laws by means of a normal algebraic machinery. For instance, as you know, in algebra, the most important laws, the most basic laws are those which have the form of equations, they are known as identities. For example, such an identity could be $X \cup Y = Y \cup X$. So, we would have a number of identities and we would derive from them other identities, and in deriving them we would, actually, obtain results which would apply not only to this complete algebra of relations on a given set but to many other algebraic structure, in particular, we would derive such law. It is not important to assume that the family $\mathcal{F}$ consists of **all** relations on the set A. Instead of this, we can consider a structure where $\mathcal{F}$ is any family of relations on a nonempty set A under the conditions that this family is closed under these operations (it means that when we perform one of this operations on relations of this family we obtain a new relation in this family) and the identity relation belongs to A.

We can consider that $\mathcal{F}$ is any family of relations on a set A and in this way we get a considerably wider class of objects in which we are interested in the theory of RA. But this also wouldn't be sufficient, in the theory of algebra we are interested most in those properties of algebraic structure which are invariant under every *isomorphic transformation* of the structure. (I should not define here what I understand by isomorphic transformation, I assume that this notion is well known to most of you.) Now, an isomorphic transformation of a RA of this type $\langle \mathcal{F}, \cup, \neg, \backslash, ^{-1}, I \rangle$ is not necessarily a RA of this type, it means that an isomorphic transformation of the set $\mathcal{F}$ may be no longer the family of relations on a given set and operations may loose their set theoretic or relation theoretic character. Neverthless, we have experienced that it's consistent with the spirit of the theory of modern algebraic discussion to include all the isomorphic transformed of relation algebra in the original set and in the class of object we are long to discuss.

There may be other motives for which one can induce us to go farther from the objects of our discussion. The way of defining a class of algebraic structure, which is a proper topic

for algebraic study, is usually done by formulating a small number of postulates which are satisfied by all objects we are interested in and we usually, but not always, try to find postulates having the form of equations. The objects in which we are interested are those structures in which these equations are satisfied. So, this is the problem of finding such equations in this family.

Now, I'm interested not only in this complete algebra of relations on a given set, not even in an arbitrary algebra of relations on a given set (that means in the algebra where $\mathcal{F}$ is an arbitrary family of relations), not only in their isomorphic images. But I should formulate a certain number of identities and I should define the class of relation algebras as the class of algebraic structures in which these identities hold. I should use a new symbolism, since the objects that we are going to discuss are no longer relations in the original sense but quite an arbitrary object, it's not proper to use these symbols ($\langle \mathcal{F}, \cup, \neg, \backslash, ^{-1}, I \rangle$) of operations on this object. I shall use instead of union ($\cup$) the symbol plus ($+$), instead of complement ($\neg$) I shall use minus (bar on the top at right) ($^-$), for backlash ($\backslash$) I shall use semicolon (;), for inverse ($^{-1}$) I'll use the symbol converse ($^{\cup}$), for "I" I shall use identity with comma ($1'$) and for "$\mathcal{F}$" I have at once an arbitrary set A. So, a structure of this type $\langle A, +, ^-, ;, ^{\cup}, 1' \rangle$ satisfying certain conditions, which I'll write soon, in few minutes, will be a Relation Algebra.

Let me introduce certain terms, this plus ($+$) and the bar ($^-$) and other notions which can be defined in their terms were introduced by Boole and we shall call them *boolean* notions. The notions specific of RA (; , $\cup$) were introduced partially by De Morgan, by Schroder and by Peirce for the first time and it seems proper to call them *peircean* notions. Also, instead of the terminology of boolean you see *absolute operation* and for peircean *relative operation*.

It was Schroder who suggested to use certain symbols for the special notions naming them in a very simple method, just taking from boolean algebra an analogue symbol and providing it with comma. So, the dot in ";" stands for what would be the symbol of multiplication in boolen algebra (which I haven't introduced in our primitive notions) and from that symbol of multiplication (with comma) we obtain semicolon (;). In a similar way, *one* (1) is the unit element in boolean algebra, this means that the element which corresponds to the largest relation. "$1'$", this is the identity which has certain features in commum with boolean identity. For converse ($^{\cup}$) I don't know really how to introduce the relative symbol corresponding to this operation, rather if you take composition of boolean complement and peircean converse ($^-$,$^{\cup}$), we'd obtain something which could be denoted as relative complement ($\cup$ $'$) and which, really, from purely algebraic point of view would be, perhaps, more proper used in the primitive symbol than the conversion symbol.

I'll finally formulate the postulates, which can be divided in three groups:

$$\mathbf{P}1)\ a + b = b + a \text{ (commutative law for addition)}$$

$$\mathbf{P}2)\ a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (associative law for addition).}$$

And a strange law which, however, is so useful in characterizing and completing this first group of postulates,

$$\mathbf{P}3)\ (a^- + b)^- + (a^- + b^-)^- = a.$$

We understand, of course, that in these laws, a, a^-, b and b^- are elements of a given set A.

Now, what about this law **P**3? If, by means of $+$ and $^-$ I define multiplication, then the product of a and b, by De Morgan law, would be just the complement of the sum of complements

$$(a^- + b^-)^- = a.b,$$

however, $(a^- + b)^-$ on the bases of some well known laws became $a.b^-$, it means that the law **P**3 would have the form

$$a.b^- + a.b = a,$$

and this is a law very well known from the theory of boolean algebra, because from distributive law, a stays outside,

$$a.b^- + a.b = a.(b^- + b),$$

and we know that $b^- + b = 1$, thus we have

$$a.(b^- + b) = a.$$

These three laws (**P**1, **P**2 and **P**3) are sufficient for characterizing the class of boolean algebra, if you have a doubt, you may check a postulate system for characterizing boolean algebra. In these three postulates we are dealing only with a part of our system $(\langle A, +, {}^- \rangle)$. We can call this algebra that we obtain, by rejecting the peircean notions as the *boolean reduct* of a given RA.

Now, we shall deal with *peircean reduct*, this means A and the peircean notions. We'll start with the associative law,

$$\mathbf{P}4)\ a;(b;c) = (a;b);c.$$

Our second law expresses the property of the identity element $1'$,

$$\mathbf{P}5)\ a;1' = a.$$

Our third and fourth law deal with the operation of forming converse,

$$\mathbf{P}6)\ a^{\cup\cup} = a \text{ (the law of double conversion)}$$

$$\mathbf{P}7)\ (a;b)^{\cup} = b^{\cup};a^{\cup}.$$

We have here four laws and there is no generally admitted term for characterizing algebras in which these four laws are satisfied. Algebras which have a binary operation and unary operation and a distinguished element, so just like groups, because groups is also convenient to develop as algebra with binary operation (as multiplication or composition), unary operation (formating inverse) and unit element. Actually all these laws are satisfied in group theory. The law P4 we know it holds for groups, an algebra in which it holds is called semigroup. P5 says that the unit element is an *unit element* in the algebra sense. In P6 we have what we would call in mathematics an *involution*, twice we repeat the operation $\cup$ and obtain the original set. For the law P7, since P6 is an involution, one would use in mathematics and algebra a technical term *dual isomorphic involution*, dual because we change the order, but I shall not enter into these matters.

So, we could say that this four last postulates characterize the peircean part of RA as a semigroup with unit and with a dual isomorphic involution. (It would be good to find a simpler term, dual isomorphic semigroup or something like this.)

Finally, we have only one more postulate and I should denote it by P8, which combine these two parts and it has the following form (it is not an identity):

$$\text{P8)}\ a;b + c^{\cup^-} = c^{\cup^-} \rightarrow b;c + a^{\cup^-} = a^-$$

So, as I told you, you know this, as opposed to the other laws this law is no longer an identity, it is an implication, whenever the first equation holds, the second equation holds.

The second thing to be notice is, since on the bases of P1-P3 we develop the whole theory of boolean algebra, we can introduce the notion of multiplication by De Morgan ($a.b = (a^- + b^-)^-$). We can prove its properties, we can stablish the familiar laws concerning relation of multiplicantion and addition distributive law, we can prove that $a + a^- = b + b^-$ (so it doesn't depend on a) and we can introduce 1 for the sum $a + a^-$, we can also introduce 0 for the product $a.a^{-1}$ and we can finally introduce the relation *less than* ($\leq$) as $a \leq b$, by definition if $a + b = b$.

Therefore, the postulate P8 assumes a little less strange form,

$$a;b \leq c^{\cup^-} \rightarrow b;c \leq a^{-^{\cup}},$$

and this plays a very important role in the development of the RA, it gives us a method of transforming such inequalities.If we have the implication above we can repeat for the second time these substituitions, then we obtain, if the second holds, that this implies $c;a \leq b^{-^{\cup}}$, then if you apply for one more time you return in the beginning ($a;b \leq c^{-^{\cup}}$). It is a cyclic transformation, therefore, these two things are equivalent, logically they say the same things, I could put it in this form,

$$a;b \leq c^{\cup^-} \leftrightarrow b;c \leq a^{-^{\cup}}.$$

The problem of confirming or convincing one that this relation algebra whose elements are real relations on a given set A satisfies all these postulates (there is no doubt regarding

the first three), you will not find difficult to see that all these laws (peircean) are satisfied and also there is really no difficult to convince yourself that $a; b \leq c^{-\cup} \leftrightarrow b; c \leq a^{-\cup}$ applies to postulate **P**8) and these eight postulates characterize the notion of an abstract Relation Algebra.

SECOND LECTURE

Postulate system for RA:

P1) $a + b = b + a$

P2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

P3) $(a^- + b)^- + (a^- + b^-)^- = a$

P4) $a; (b; c) = (a; b); c$

P5) $a; 1' = a$

P6) $a^{\cup\cup} = a$

P7) $(a; b)^\cup = b^\cup; a^\cup$

P8 **i)** $a; b + c^{\cup -} = c^{\cup -} \rightarrow b; c + a^{\cup -} = a^-$
P8 **ii)** $a; b \leq c^{\cup -} \rightarrow b; c \leq a^{-\cup}$

Now, we know what a relation algebra (RA) is. It is an algebra, it means a structure given by a set (no empty) and by certain operations under which the set is closed. For instance, in this case, the binary operation plus (+), the unary operation complement ($^-$), the binary operation of relative product (;), the unary operation of conversion ($^\cup$) and finally by a certain element of this set (a distinguished element), and in this case we have only one such distinguished element which is the identity element ($1'$): $(\langle A, +, {}^-, \ ; \ , {}^\cup, 1' \rangle)$.

A relation algebra is a structure of that type, in which elements a, b and c satisfy identities in certain postulates and these postulates are written above (**P**1-**P**8).

I can single out three groups of these postulates. The first group consists of postulates **P**1-**P**3 and they characterize boolean algebra, it means that if we disregard the last three notions (the percian notions) and we consider the structure thus obtained, this structure (a reduct of the original structure) is a boolean algebra.

The next four postulates concern exclusively to the peircean notions and as I told you, there is no general accepted term to refer to structures that satisfy these four postulates but I've come across such a term as *inversion semi-group* or *conversion semi-group*. This is essentially semi-groups with an union element and with an involution which is a dual automorphism of this structure (this is expressed in **P**6 and **P**7.

Finally, we have one postulate (or the group consisted of one postulate only) which combines boolean notions and peircean notions. Without such a postulate, the study of RA would be a trivial matter, because it would be the study of boolean algebras and also of certain structures from which not too much interesting things could be said. But we

have something that combines these notions and this is the real power of the definition of RA.

The best way to understand the implication **P**8**)** is to check it in proper RA, the complete algebra of relations on a given set and in the more restricted subalgebra of this algebra in which the family of all relations we replace by arbitrary relations, is easely seen that this postulate is satisfied.

As the study of RA just as of any other class of algebraic structures divides in a natural way in two parts. The first, more elementary part, is the arithmetic of RA. We considered a RA assumed to be fixed during the whole discussion and we stablished many laws holding in this algebra, involving arbitrary elements in this algebra.First of all, there are interests in the simplest such laws, it means in equations or identities.

The second part is the proper algebraic discussion of RAs, in which we are interested in methods of constructing more evolved algebras from simpler ones, in methods of decomposing an evolved algebra into a simpler one and in this way getting a better insight into the structure or in this more evolved algebra, studying the variety of all possible structure (I do not use here the term "variety " in a technical sense but simply variety in a commum language of all possible RA), meaning the class of isomorphism types of RA or of some comprehensive sub-classes of the class of RA.

Let me first tell you a little about the first part of this discussion, the arithmetic of RA. I think that RA is one of the most beautiful and perhaps the most difficult class of algebra which I know. Arithmetic of RA, which in some other cases is a rather trivial matter, here is something tricky and difficult.

It is difficult to derive identities from the given postulates. One come across that it is seriously difficult, sometimes, trying to prove rather simple identities. No general methods are available, and this has been shown, no general methods exist which would pemit us to decide in which particular case wether a given equation is an identity of RA or not. In other words, the set of all those equations which are identities of RA is not a recursive set.

It's not suprising if you realize that there is a close connection between RAs and predicate logic and we know that the class of general valid formulas in predicate logic is not a recursive set.

Neverthless, there are many identities which can be derived from the postulates in a relative simple way. In the third volume of a work of Schöder, which appeared in the first years of this century, you find thousands and thousands of simple fomulas from the theory of the algebra of relations and I haven't found any special difficulties in deriving them all from the postulates **P**1 - **P**7.

Now, what I can do only is to give you some samples and I want to give you some simple samples. As you will see, there is a special percurse in view.

From the first group of postulates alone (**P**1**-P**3), as I told you, you can derive the whole theory of boolean algebras, it's a sufficient set of postulates and this is easily seen, it's well known and the proofs of familiar laws can be really easily constructed on the bases of the paper of **(...)**.

If you consider the second group alone, there are not many interesting consequences but I would like to point out two of them.

Theorem 1:

$$\mathbf{T}1)\ 1';a = a$$

What is said in **T**1 is that the identity element is the right unit of relative multiplication, we can also show that it is also a left hand unit and this is connected with the next theorem, by which the converse of identity is identity:

$$\mathbf{T}2)\ 1'^{\cup} = 1'.$$

It is convenient to prove **T**1 and **T**2 at once and the proof depends on some facts which are very well known from the general idea of theory of algebra.

A binary operation may have many right hand units, it may have also many left hand units but if it has both right hand units and left hand units, then they all must be equal. It means that if some operation has some right hand units and some left hand units, then it has only one right hand unit and one left hand unit and they are identical.

(Proof of **T**1 and **T**2:) Thus, it's sufficient to show that, for instance, the converse of identity is a left hand unit.

Well, we take the postulate **P**5 and we take converse on both sides, that is,

$$(a;1')^{\cup} = a^{\cup}.$$

We apply the postulate **P**7 and this will be

$$1'^{\cup};a^{\cup} = a^{\cup},$$

which holds for every a, in particular, instead of a, we take $a^{\cup}$. Then we obtain double converse on both side of the equation,

$$1)\qquad 1'^{\cup};a^{\cup\cup} = a^{\cup\cup}.$$

We use the postulate **P**6 and we obtain the following,

$$1'^{\cup};a = a.$$

It means that identity converse is a left hand unit. □

If you don't know the elementary argument used above, let me tell you out that it's sufficient to take the equation **P**5 and substitute for a this left hand unit ($1'^{\cup}$) and we obtain

$$2)\qquad 1'^{\cup};1' = 1'^{\cup}.$$

On the other hand, if in 1) we substitue for a identity, then we obtain

$$3) \qquad 1'^{\cup};1' = 1'.$$

And from 2) and 3) it follows that

$$1'^{\cup} = 1'$$

and therefore in view of 1), identity is left hand unit. Thus we have obtained these two conclusions (**T**1 and **T**2).

For the third consequence, let's use the remark which I made before. We can repeat **P**8**ii** by changing variables in such a way that for a we substitute b, for b we substitute c and for c we substitute a. Then we obtain that the second inclusion in **P**8**ii** (which is)

$$b;c \leq a^{\cup -}$$

implies a new inclusion:

$$c;a \leq b^{-\cup}$$

and repeating this once more we return to the original inclusion. Therefore, all this three inclusions are equivalent.

It's known that inclusion can be expressed in boolean algebra in many different ways, in particular, x is included in y ($x \leq y$) can be expressed in the following way:

$$x.y^{-1} = 0,$$

this is one of the convenient ways of expressing inclusion and I'll write the following thing which is the third theorem:

$$\mathbf{T}3)\ a;b.c^{\cup} = 0 \leftrightarrow b;c.a^{\cup} = 0 \leftrightarrow c;a.b^{\cup} = 0.$$

For Theorem 4, let's make some modifications in **T**3. In the second equation let's substitute for b identity and let's forget the third equation and make use of the first one, known the left and right hand unit. Then we obtain such a simple formula,

$$\mathbf{T}4)\ a.c^{\cup} = 0 \leftrightarrow c.a^{\cup} = 0$$

and from this last condition we can obtain many new information concerning converse, which would be difficult to get directly. However, in view of what I shall do just in a moment after, I want to derive it as a particular case of the law known from boolean algebra.

Assuming that in boolean algebra we have two functions f and g, each of which maps the universe into itself (it means that if the domain is A, the range is included in A). Using a very fashionable modern terminology, we can write in the following way,

$$f : A \to A \ \text{ and } \ g : A \to A.$$

Such two functions are refering to its *conjugate functions* if for any elements x and y we have

$$f(x).y = 0 \leftrightarrow g(y).x = 0.$$

And a function is said to be *self conjugate* if you take f equal g in the equivalence above.

The main consequence of this notion of conjugate function is the following: that a function which has a conjugate, in particular every self conjugate function, is distributive under addition, it means that it satisfies the condition

$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$

and, actually, it is distributive not only under finite addition but even under infinite addition sigma (Σ), which is introduced in a well known way in the theory of boolean algebras.

I shall restrict myself to finite addition and I'm not going to prove, you can find the proofs, for instance, in a paper of Jónsson and myself about boolean algebra with operators and in some other places. The theorem is not very difficult, you prove separately the two inclusions

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \text{ and } f(x) + f(y) \leq f(x + y)$$

using several times the laws of conjugate functions, with apropriate substituition.

What is expressed in **T**4 is the following: if you take $x^{\cup}$ as the function of x, then this function is self-conjugate, this is expressed in **T**4 with other variables. Therefore we have Theorem 5:

$$\mathbf{T}5)\ (a + b)^{\cup} = a^{\cup} + b^{\cup}.$$

And now you see why **T**5 is important. If you combine it with what is said in **P**7 and from **P**6 you derive this conclusion, that the converse is a dual automorphism of every RA.

You may ask why I neglected complement, because from the fact **P**6 it follows that this is a biunivic function, one-to-one, it maps the whole set A onto itself. Conditions of isomorphism, of dual isomorphism, are satisfied for semicolon (;) in **P**7, for plus (+) in **T**5, for converse ($^{\cup}$) automaticaly in **P**6 but complement ($^{-}$) I neglected because complement ($^{-}$) we can define in boolean algebra in terms of addition; in terms of addition we can define inclusion, we can define all notions, not by means of equations only but within the first-order logic. Therefore, if something is an isomorphism with respect to these operation notions (+, ; , $\cup$, $'$), it will be automaticaly an isomorphism with respect to the complement ($^{-}$).

It means that this is a dual automorphism and since this notion may not be quite familiar to you, let me be explicit. Consider the next two structures

$$\langle A, +, {}^{-}, \ ; \ , {}^{\cup}, 1' \rangle \text{ and } \langle A, +, {}^{-}, \ : \ , {}^{\cup}, 1' \rangle,$$

noting that in the last one instead of " ; " we take the dual operation " : " and we don't change anything else.

But what is " : "? This operation is dual with respect to relative multiplication ($x : y = y; x$), so you change the terms. From our formulas it follows that the two algebras above are isomorphic, that every RA is isomorphic to a dual RA obtained in this way, we know simply that one operation has been changed.

What is the practical importance of it? Although semicolon (;) is not comutative, however, if you manage to prove any law involving semicolon (;) you can always obtain a new law by interchanging terms in each relative product, by interchanging terms you obtain the corresponding law of dual algebra and these two algebras are isomorphic.

As a particular case of what was said, I shall write as Theorem 6, something that I mentioned before:

$$\mathbf{T}6)\ a^{-\cup} = a^{\cup -}$$

This converse operator is a real dual automorphism and it maps $\langle A, +, {}^{-}, \ ; \ , {}^{\cup}, 1' \rangle$ on the complement of $\langle A, +, {}^{-}, \ : \ , {}^{\cup}, 1' \rangle$ and it means essentialy what is said in $\mathbf{T}6$, so you see that it can be derived from $\mathbf{T}5$ and $\mathbf{P}7$, realising the fact that complement $({}^{-})$ can be defined in terms of adition $(+)$.

Still a few simple things which I would like to derive, notice that all the previous laws were discovered by Peirce and they are really indispensable laws in developing RAs. We use these peircean implications in various forms again and again... I want to write down a new form of it:

$$\mathbf{T}7)\ a; b.c = 0 \leftrightarrow a^{\cup}; c.b = 0.$$

It's easy to memorize, if you have the first formula in the equivalence above, which says that the relative product (;) between a and $b.c$ equals 0, you can interchange b and c under the condition that you replace a by its converse $a^{\cup}$. You could also prove an analogue, by which you can interchange a and c, by changing b to its converse $b^{\cup}$.

(Outlet of the proof T7) How do we obtain $\mathbf{T}7$? It's very simple, we take $\mathbf{T}3$ and replace c by $c^{\cup}$, so we have

$$a; b.c = 0 \leftrightarrow c^{\cup}; a.b = 0.$$

Now, I'll take converse on both sides and obtain again the equivalent formula (the converse of the product is the product of converses), so this will be

$$(c^{\cup}; a)^{\cup}.b = 0,$$

and by $\mathbf{P}7$ this means

$$a^{\cup}; c.b = 0$$

which is what I want. This was only an outlet of the prove of $\mathbf{T}7$). □

What is expressed in **T**7 is the following thing: assume that a is fixed, take the function

$$f(x) = a; x$$

and the function

$$g(y) = a^{\cup}; y.$$

T7 expresses the fact that f and g are conjugate functions, it means

$$f(b).c = 0$$

is equivalent to

$$g(c).b = 0.$$

Therefore, by this general theorem we applied at once, we know that these two functions are additive and we obtain a very important law, naming Theorem 8:

$$\mathbf{T}8)\ a; (b + c) = a; b + a; c.$$

The last law which I want to derive is the following: (It's not very intuitive, rather simple but it's easy to make an error in wrinting it, I prefer looking at my notes.)

$$\mathbf{T}9)\ a; (a^{\cup}; b^{-})^{-} + b = b$$

I could've written simply with inclusion

$$a; (a^{\cup}; b^{-})^{-} \leq b.$$

If you want to check it directly by taking this interpretation in proper RA you will have no difficult, the derivation from ours laws is also no difficult.[2]

(outlet of the proof T9) Let's take something very well know,

$$(a^{\cup}; b^{\cup}).(a^{\cup}; b^{\cup})^{-} = 0$$

We can apply T7 with some substituitions, for a I take a, for c I take $b^{\cup}$ and for b I take $(a^{\cup}; b^{\cup})^{-}$. So we have

$$a^{\cup}; b^{\cup}.(a^{\cup}; b^{\cup})^{-} = 0 \leftrightarrow a; (a^{\cup}; b^{\cup})^{-}.b^{\cup} = 0$$

and this will be, of course, true if I take for b, $b^{-\cup}$, therefore, $b^{\cup} = (b^{-\cup})^{\cup} = b^{-}$. And then,

$$a; (a^{\cup}; b^{-})^{-}.b^{-} = 0$$

[2] At this point Tarski got a little confused on the demonstration of T9 and was interrupeted by one student, so we present the proof following his steps but a little diferent so that it may be clear for the reader

and this is the same as to say less than equal to b, that is,

$$a;(a^{\cup};b^{-})^{-} \leq b \quad \square$$

Well, I've derived a few laws, some of them simply interesting, a very algebraic simple content, like **T**5, **T**8 and **T**9 (the last was simple but the algebraic content is not clear). But these three laws together are interesting to us for the following thing: they follow from our system but it's easily seen and it can easily be shown that they can replace in our system the law **P**8 and this is the only law which doesn't have the form of equation, so we can replace **P**8 by **T**5, **T**8 and **T**9.

We shall obtain a long postulate system, but a postulate system which consists exlusively of identities and this shows that a RA form a *variety* in the sense of the theory of general algebra. This is very important since from the fact that algebras form a variety it follows that the class of this algebras is closed under formation of *subalgebra*, of *direct product* and of *homomorphic image*.

From the first form of our postulate system for RA (**P**1-**P**8) you can derive at once that the class of RA is closed under formation of subalgebra and direct product. If **P**8 is not an equation it doesn't mean that it is closed under the class of direct product, but... because this is the so called *conditional equations*, Horn's sentences, this is a well known fact from the theory of models. But you could encounter very serious troubles if, on the bases of this definition of RA (**P**1-**P**8), you long to try proving directly that the class of RA is also closed under homomorphic image (it means an homomorphic image of a RA is again a RA). This is not obvious, but if you show that **T**5, **T**8 and **T**9 can replace **P**8 it will become obvious. I'm not going to give you the proof, you will not find difficult to derive from **T**5, **T**8 and **T**9 our old postulate **P**8.

This was almost all what I want to tell you about the arithmetic of RA, just a few additions... You can define certain notions in terms of notions that have been previously defined or introduced as primitive notions, for instance, the peircean or relative multiplication, by means of De Morgan law we can also introduce *peircean addition*, using again plus with comma ($\dot{+}$),

$$(\ \dot{+}\ b) = (a^{-};b^{-})^{-}.$$

This is a very natural definition, however, you'll probably try to see what intuitively it means, what is a relative sum ($\dot{+}$) of two relations?

Remember that the relative product of relation R and S is a relation T such that xTy if there is a z such that xRz and zSy. (Let me use the equivalent symbol.)

$xR\ \dot{+}\ Sy$ is equivalent to say that for every z, we have xRz or zSy. Formally,

$$xR\ \dot{+}\ Sy : \forall z, xRz \vee zSy,$$

it means, existential quantifier you replace by universal quantifier and conjuction you replace by disjunction.

The meaning of $\dagger$ is pretty simple, however, as opposed to relative multiplication, is not easy to find examples for the relative sum ($\dagger$) of relations, in relations known from commom life, for instance, family relations; there is a lot of examples of relative product but I don't know really any interesting example of relative sum ($\dagger$). I don't know any example in our common language (a special term could be introduced for relative sum of two familiar relations). It seems to indicate that this construction from the point of view of normal needs of commom language is not quite as natural as the construction of relative products.

We have also a new special relation, zero comma ($0'$), and this is just $1'^{-}$ ($0' = 1'^{-}$), it means simply the complement of identity relation and it's called *diversity relation* (x and y are in this relation if and only if x is different from y).

We could also introduce a symbol for the complement of the converse. We could call it *relative complement* and this would be more natural notion algebraicaly to introduce than simple converse ($x^{\cup -} = x^{-'}$). One could be tempted to give a nice postulate system for RA which would be, so to speak, semi-dual and which would base upon two triples of notions, plus (+), times (.) and bar ($^{-}$) on one hand and plus comma ($\dagger$), times comma (;) and bar comma ($^{-'}$) on the other hand. I have such postulate system, but they are not ideal, they contain some superflos postulates which I could derive from the others.

There are many interesting problems regarding foundations of RA which I'm not planning to discuss here, but to mention only one, we have that definition of RA with five notions, two binary operations, two unary operations and one operation of arity zero or, as we normally call it, a distinguished element, $\langle A, +, {}^{-}, \ ; \ , {}^{\cup}, 1' \rangle$.

Can we decrease the number of these primitive notions so that we still have a variety, a class of algebras defined by means of equations only? We can replace + and $^{-}$ by *shefer product*, inclusion is well known from boolean algebra. We can easily eliminate converse by introducing a new operation which will mean the same as $a; b^{\cup}$, an operation which is very natural from the point of view of common language. If you write explicitly what it means for ordinary relations R and S, x and y are in this relation if there exist both xRz and ySz, so this is a very natural operation if we eliminate converse.

It also seems possible to eliminate identity. Now, if you have only two binary operations, the big problem is if you can replace these two binary operations by one binary operation. Can you treat RA as group always? As algebra with one binary operation only, but to be able to characterize them again with postulate system consisting only of equations? I suspect that the answer to this problem is negative, but I have no proof of it.

Well, what else can be defined in arithmetic of RA? Some very interesting and important notions.The properties of relations which are very familiar to us form any extensive treat of predicate logic, in particular, from Principia Mathematica of Russel and Whitehead.

Firstly, the notion of a *symmetric relation*, what does it mean? It means that a relation R is identical with its inverse (xRy and yRx are equivalent).

In abstract theory of RAs, we have the definition of *symmetric element*, this means

that a is included in $a^{\cup}$, this is equivalent to say that $a^{\cup}$ is included in a and this is also equivalent to say that $a^{\cup} = a$. You could use any of the following three formulas to define a symmetric element:

$$a \in \mathbf{Sy} \leftrightarrow a \leq a^{\cup} \leftrightarrow a^{\cup} \leq a \leftrightarrow a^{\cup} = a.$$

We have *transitive relation*, and again we can introduce the notion of *transitive element*, and this is equivalent to say that $a; a$ is included in a, which is also right in the form a^2 is included in a (by a^2 we understand $a; a$):

$$a \in \mathbf{Tr} \leftrightarrow a; a \leq a \leftrightarrow a^2 \leq a.$$

You know the notion of *equivalence relation*, we have here the notion of *equivalence element*, this is equivalent to say that a is both trasitive and symmetric:

$$a \in \mathbf{Eq} \leftrightarrow a \in \mathbf{Tr} \wedge a \in \mathbf{Sy} \leftrightarrow a^{\cup} = a = a^2.$$

Note that $a = a^2$, in transitive definition we can not replace inclusion by equallity, but in conjunction with symmetric we can write so, or if you prefer writting

$$a; a^{\cup} = a$$

or dually

$$a^{\cup}; a = a.$$

You know the notion of being a *function*, a relation is a function means that whenever xRy and xRz, y must equal z, for every x there exists at most one y such that x is in relation to y. Now, we can speak about *function element* and this is expressed by the formula

$$a \in \mathbf{Fu} \leftrightarrow a^{\cup}; a \leq 1'.$$

To introduce the *biunivic function element*, you take the formula above in dual,

$$a; a^{\cup} \leq 1'.$$

In that formula, nothing inform us about what we intuitively would call the *domain* of a relation, it means that if you write it for relation this may be a function, but with a very small domain, for instance, empty element, zero satifies this condition, zero is a function element. But we may be interested in those special functions where the domain and range are the whole universe of our discussion, this means one-one function whose domain and range is the whole universe, in mathematics we call such functions *permutations*.

We have in RA the notion of *permutative element* and we obtain it by replacing equallity by indentity in the definition of function and the dual formula

$$a \in \mathbf{Pe} \leftrightarrow a^{\cup}; a = 1' = a; a^{\cup}.$$

When we introduce few notions, of course we may be interested in their arithmetical properties and we want to know what are the laws applied to these notions. This is again a huge comprehensive chapter of arithmetic of RA. I shall give only two examples without giving any proof.

Semicolon (;) is distributive over boolean addition but in general not over boolean multiplication (.). It turns out, however, that if a is a function element then it is distributive under boolean multiplication, more over, this is a characteristic property over a function element. Thus we can write the following:

$$a \in \mathbf{Fu} \leftrightarrow \forall y, z[a; (y.z) = (a; z).(a; z)].$$

This distributive law is the characteristic property of a function element.

It's interesting that a related law is the characteristic property of an equivalence element. We need the so called *modular* law and we obtain the following thing:

$$a \in \mathbf{Eq} \leftrightarrow \forall y, z[a; (y.(a; z)) = (a; y).(a; z)].$$

It's very interesting that these two notions intuitively are very distant from each other. The function elemens are those for which the distributive law over boolean multiplication holds, the equivalence ones are those for which modular law over boolean multiplication holds.

There is not much time for algebraic discussion but I still have some time in which I'll tell you something about it.

You get the impression that this is rather a difficult matter, to develop the theory of RA and, actually, you are right, but there is something which facilitates this discussion of this development and these are the duallity laws. I mentioned one of them which can be called the first duality law, you can interchange the terms in every relative product and you obtain a new law of RA, because of the property of converse as the dual automorphism.

You know that in boolean algebra, complement is in a different sense dual automorphism, what complement does with a boolean algebra can be described as follows.

Assume that we have a boolean algebra where we consider mulplication as a fundamental operation ($\langle A, +, \cdot, ^- \rangle$), so we have these two fundamental operations ("+" and "$\cdot$") and complement. These two operations are both comutative , so the old meaning for converse doesn't apply here, but we still have a dual automorphism in the following sense: the operation $f(x) = x^-$ maps $\langle A, +, \cdot, ^- \rangle$ onto the following algebra $\langle A, \cdot, +, ^- \rangle$, in which the roles of times ("$\cdot$") and plus ("+") are interchanged. This is a dual boolean algebra in a different sense that in RA and the two algebras above are again isomorphic, and therefore in every law you can interchange "+" and "$\cdot$" leaving complement unchanged.

You can extend this to RA. Also, if you consider RA a system with more primitive notions, naming, $\langle A, +, \cdot, ^-, ;, \ ^{\dagger}, , \cup \rangle$, and you form the following algebra, $\langle A, \cdot, +, ^-, \ ^{\dagger}, , ;, , \cup \rangle$,

it turns out that complement only maps isomorphicly the first algebra into this second algebra, and you obtain new laws of duality for RA. You can always interchange "+" and "·" . You have to interchange ";" and " $\dagger$ " , leaving the other unary operator unchanged.

Finally, if you consider the function $f(x) = x^{\cup^-}$, you obtain a third duality law which I shall not formulate explicitly.

When you prove one law in the theory of boolean algebras you obtain three other laws "gratis" so to speak, and this facilitates the task. It happens sometimes that these three duality laws coincide with the original, or some of two of them coincide, so then you are cheated a little, you don't obtain anything new. I'll give one example of one of the most interesting laws of the arithmetic of RA, where you can see that dual laws are, actually, identical to the original one and this is the so called *semi modular* law

$$x; (y \ \dagger \ z) \leq (x; y) \ \dagger \ z.$$

I suggest you to complete this subject. It's not very difficult and it's not very simple, try to see why the duality law in this case doesn't give anything new.

Let's turn to the algebraic discussion. You may be interested in methods of constructing algebras applied to RA. Construction of subalgebra, construction of homomorphism image, construction of direct product.

Firstly, construction of subalgebra, nothing specially interesting I could tell you. Just one remark is that every RA has at least a subalgebra and this subalgebra which consists only of elements zero (0), diversity (0′), identity (1′), one (1) and their simple combinations. These combinations may coincide with each other, it depends on RAs. The smallest subalgebras are not identical, there are many types of smallest subalgebra. There are smallest subalgebras consisting of two elements, four elements, eight elements, sixteen elements and the maximum is thirty-two elements. You understand, of course, that since RA are boolean algebras then the number of elements over binary RA is always a power of two, as in every boolean algebra, so you can not have RA consisting of three or five elements (two, four, eight, sixteen, thirty-two are the simplest things). Why is this so?

If you have these four elements at start (0, 0′, 1′, 1) or if you have only element identity, by forming converse you don't obtain anything new, by taking complement ($^-$) you will obtain diversity (0′), by taking this sum (+) (the sum of an element an their complement) you obtain one (1), by taking the product (.) you obtain zero (0) and by using exclusively boolean notions you don't obtain anything else. But then you can try to apply peircean notions, firstly converse ($^\cup$), converse doesn't give you anything new because converse, each of this elements is symmetric, it means its converse is equal to itself. What about semicolon? Semicolon applied to these elements (1, 0, 1′, 0′) doesn't give anything interesting:

$$1; 1 = 1, \ 1; 0 = 0 \text{ and } 0; a = 0.$$

Also if you apply identity it doesn't give any result, because

$$1';1' = 1' \text{ and } 1';a = a \text{ (this is a unit element).}$$

However, $0';0'$ is the crucial point, this has a different meaning in (...) RA, even proper RA where elements are really relations. If you have RA on a set consisting of one element only, then diversity relation is simply empty relation, there are no different elements and therefore $0';0'$ is also the empty relation. If you have RA on a set consisting of two elements, $0';0'$ says that there is an element z such that x is different from z and z is different from y. This is equivalent to say that $x = y$, because if z is different from both x and y and our whole set is only a two elements set, x must be equal to y, therefore,

$$0';0' = 1'.$$

If finally there are more than two elements, then you can see that

$$0';0' = 1.$$

So, $0';0'$ can assume different values, it can be 0, it can be $0'$ or it can be the boolean 1. In this connection you see that there are many types of the smallest RA and, actually, there may be cases upper to thirty-two different elements, because you have to think that there are RA which are direct product of two, for instance, RA consisting of algebras on two elements set and RA on relations on three elements set, you take direct product and you have a different minimum RA.

Well, analizing homomorphisms, you know from general algebra that the study of homomorphisms can be replaced by consideration of *congruence relation*; it's a discussion of congruence relation on RA and in some cases, under some conditions, instead of congruence relation we can consider certain subsets of the universe called *ideals* and this is the case of boolean algebra and it's also the case of RA. So, in RA, the discussion of homomorphic images is the discussion of ideals.

Ideal of a RA will be a set X included in A ($X \subset A$) which satisfies the following conditions:
$0 \in X$

$y, z \in X \rightarrow y + z \in A$
$y, z \in X \rightarrow y; z \in X, z; y \in X, y.z \in X$
$y \in X \rightarrow y^{\cup} \in X$

This is the proper definition of ideals and the study of homomorphisms is the study essentially of the variety of these ideals in a given RA, in particular, the simplest case, the smallest RA. From the point of view of homomorphisms which are not trivial are those which have only two different ideals. I said only two because if you have only one ideal then this must consist of only one element and this is a trivial case, but interesting are those RA which have two different ideals. The set consisting of 0 only is an ideal, the element 0 is an ideal and the whole universe is an ideal and it may happen that there are no other

ideals, such an algebra is called *simple*, so RA may be simple.

It's interesting, the simplicity in the case of RA can be characterized in a very simple arithmetic way, using properties of elements. It turns out that a RA is simple if, and only if,

$$x \neq 0 \rightarrow 1;x;1 = 1.$$

1 is different from 0 because otherwise all elements would be equal and this would be a one element algebra and I want to exclude this case, but the second condition is essential. Due to this fact, for instance, a subalgebra of a simple RA is again simple, because this is a universal condition imposed on all elements.

It turns out also that simple RAs coincide with those which are *directly indecomposable* and which are also *subdirectly indecomposable*, but I don't want to go in this last notion which may be interesting for algebrists. But a further conclusion is that by a theorem of Birkhoff, every RA is subalgebra of the direct product of simple algebra, this is called in modern algebra as *semi-simple algebra*, so every RA is semi-simple. And this, in a variety of problems considerably facilitates the study of RA to prove something, some properties of all RA.

It's often sufficient to prove for simple RA, then you extend to direct products which is sometimes automatic, then you extend to subalgebras which is also sometimes automatic. To give you an example of this I should discuss the problem of *representation* for RA, you know that a boolean algebra, by theorem of Stone is always isomorphic to the algebra of sets, and the question would be asked for RA is: Is RA isomorphic to the algebra of relations?

Now, as in the case of boolean algebras it would be sufficient to discuss this problem for simple algebras. Is a simple algebra always isomorphic (representable means isomorphism) to proper RA? The only question is, can we automatically assume that we have some answers to this question? Do we know which simple algebras are representable, can we extend this to direct products? Are direct products of algebras, which can be represented, a proper RA? Can they themselves be represented?

Well, essentialy not as I have defined, let's see my definition of proper RA. We have a family of binary relations on a set A which is not necessarily the family of all relations but is closed under union, complement, relative product, converse and contains relation: such an algebra is a proper RA.

The boolean element of this algebra is some set A, the universe from which we started, this is algebraicaly the 1.

We will not change much, if we assume that the largest element on this family is not necessarily a unit element but an arbitrary equivalence element, not an arbitrary element whatsoever because, if we take an arbitrary element whatsoever, the relative product of two elements included in it will not necessarily be included in it, but if it's an equivalence element it will be so. Thus, any equivalence relation can serve here as unit relation, as the largest relation, with this change in the definition of a proper RA. It is easily seen that

it extends to direct product automaticaly and later to subalgebra, so everything holds, everything reduces to the problem of simple algebra.

This problem has rather interesting history but the present situation looks more or less like this. Well, the solution is negative, there are RA which are not representable and there are even rather simple RAs, but I don't remember the answer or the case (RA of 16 or 32 elements which is not representable, not isomorphic with any proper RA).

Secondly, you can not characterize the class of representable RA by adding to our postulate system any finite number of new postulates, it means you have to add an infinite list of equations in order to obtain the characterization of proper RA. Third, one can find an infinite list of equations which added to these equations gives a characterization of proper algebra, it means that proper RAs form again a variety but this variety has no finite equational bases.

These are the main results, now we have many problems which are open. This infinite postulate system is very (evolved). You can easily imagine, we can not restrict ourselves not only to equations, boundary lengths, because we have many of them, infinity many, but we cannot restrict ourselves to equations with finite many variables, we must have equations with more and more variables, the number of distinct variables cannot be bounded. You notice, we could have infinity many equations having only bounded number of variables, even only one variable but this would not be sufficient. We'd need infinitely many equations with no bounded number of variables.

You see, such a problem as finding a simplest system, natural system, is still open. The problem of the simplest equations which hold in all RAs but not in RRAs is still open. We don't know how far we have to go in complexity of equation to reach, to obtain equations (which do not hold...) which hold in all RRAs but not in all RAs are still open problems.

(Probably by means of...) one would have to use probably the help of machines to solve this problems. It has some combinatorial character, they would require a considered effort from the part of individual to try to see, for instance, this problem of the simplest formula which can be used to prove, to obtain the negative solution of the representation problem.

And finally, the last question, if it is so, you could ask me a question about this definition of RA which I suggested and which I have founded (I suggested it many years ago). If we know that these are not all equations which are needed to obtain representation theorems, this means, to obtain the algebraic expression of predicate logic (means two place predicate), if we know that this is not an adequated expression of this logic, then why to restrict oneself to these equations? Why not to add some other equations which hold in RRA or may be all?

Well, the answer is this. (...) Inspite of the fact that this is not an adequate expression of predicate logic (with two places predicate), it turns out that this relation algebra form an adequate bases for the construction of practically the whole mathematics and this seems to be a contradiction in the sense that on one hand it's not a sufficient apparatus for predicate logic which is base of mathematics, on the other hand they represent an adequate instrument for the whole mathematics.

Well, this is a matter which I could not discuss, I would need for this several new lectures. I can tell you only in this way: we can say that to construct mathematics means to construct set theory. What hold in mathematics, what hold in classical mathematics can be treated as a part of set theory. Set theory is really the theory of one relation, naming, *element relation*, *membership relation*. All set theoretical statements express certain properties of this relation. So, the problem of this element relation can be expressed in this language (RA) and turns out that the answer is positive. This is true for all systems of set theory which we know, which have been suggested and, actually, the only condition which a system of set theory must satify to be representable in this algebra is that it contains the *axiom of pairs*, for any two elements we have the pair of these two elements or a little more general, because we may consider set theories with *proper classes*, that it contains a method of constructing ordered pairs from any two members of the universe, from any two classes which are in this system. And this condition is satisfied by all existing and suggested systems of set theory, such systems as Zermelo-Frankel, Bernays Von Neummam, Godel, Quine's system and so on. From this point of view this RA matter if exists. It provides a sufficient algebraic apparatus for constructing mathematics.

Well, I think I shall finish with these remarks and I'm sorry that it was more a propaganda than a mathematical development.

Referências Bibliográficas

[Andreka1994] H. Andréka. Weakly representable but not representable relation algebras. *Algebra Universalis* (1994) 31-43.

[AndGivNem1994] H. Andréka, S. Givant, S. Mikulás, I. Németi. The lattice of varieties of representable relation algebras. *J. Symbolic Logic* 59 no. 2 (1994) 631-661.

[Aristoteles1963] Aristóteles. *Categorias*. série Claredon Aristóteles. Editora Clarendon, 1963.

[Arruda1975] Aida I. Arruda. Simpósio de Lógica Matemática. *Proceedings do simpósio de lógica matemática.* Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação - Unicamp.

[Boole1951] G. Boole. **The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning.** Oxford, Basis Blackwell, 1951. Trabalho original publicado em 1847 em Cambridge pela MacMillan, Barclay e MacMillan e em Londres pela George Bell.

[Börner1986] F. Börner. One-Generated Clones of Operations on Binary Relations. *Beitrage zur Algebra und Geometrie.* 23, 73-84, 1986.

[Carnielli2006] W. Carnielli. Book Reviews. *Logic and Logical philosophy* 31 (2006) 91-96.

[Fefferman&Fefferman2004] S. Fefferman, A. B. Fefferman. **Alfred Tarski: life and logic.** Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[Givant&Tarski1987] *A formalization of set theory without variables.* Número 41 em Colloquium Publications. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1987.

[Hirsch&Hodkinson1997] Complete representations in algebraic logic. *J. symbolic Logic* 62 no. 3 (1997)

[Hirsch&Hodkinson2002] R. Hirsch e I. Hodkinson. **Relation Algebra by Games.** Studies in Logic and the foundations of mathematics, v. 147, 2002, North-Holland, Elsevier Science B. V.

[Jónsson1982] B. Jónsson. Varieties of relation algebras. *Algebra Universalis* 15 (1982) 273-298.

[Jónsson1959] B. Jónsson. Representation of modular lattices and relation algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 92 (1959) 449-464.

[Jónsson&Tarski1951] B. Jónsson e A. Tarski. Boolean Algebras with operators I. *American Journal of Mathematics* 73 (1951) 891-939.

[Jónsson&Tarski1952] B. Jónsson e A. Tarski. Boolean Algebras with operators II. *American Journal of Mathematics* 74 (1952) 127-162.

[Jónsson&Tarski1948] B. Jónsson e A. Tarski. Representation problems for relation algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54 (1948).

[Lyndon1950] R. Lyndon. The representation of relational algebras. *Annals of Mathematics* 51 no. 3 (1950)707-729.

[Lyndon1956] R. Lyndon. The representation of relational algebras, II. *Annals of Mathematics* 63 no. 2 (1956) 294-307.

[Lyndon1961] R. Lyndon. Relation algebra and projective geometries. *Michigan Mathematics Journal* 8 (1961) 207-210.

[Maddux1978] Some sufficient conditions for the representability of relation algebras. *Algebra universalis* 8 (1978) 162-172.

[Maddux1991] R. Maddux. The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations. *Studia Logica* 3/4 (1991) 421-455.

[Maddux1994] R. Maddux. A perspective on the theory of relation algebras. *Algebra Universalis* 31 (1994) 456-465.

[Monk1964] J. Monk. On representable relation algebras. *Michigan Mathematics Journal* 11 (1964) 207-210.

[Morgan1860] A. de Morgan. On the syllogism, no. iv, and the logic of relations. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society* 10 (1860) 331-358.

[Peirce1933] C. Peirce. Description for a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. Em *Collected Papers III.* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1933. C. Hartshorne e P. Weiss, eds.

[Pratt1993] V. Pratt. The Second Calculus of Binary Relations.*Stanford University*, 1993 [Schröder1895] F. W. K. E. Schröder **Vorlesungen über die algebra der Logik**, v. 3, "Algebra und Logik der Relative", parte I, 1895, Leipzig.

[Steinle2006] W. Steinle. Estudos sobre o Realismo Estrutural. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Departamento de Filosofia. 2006

[Tarski1941] A. Tarski. On the calculus of relations. *J. Symbolica Logic* 6 (1941) 73-89.