C

Teófilo de Souza Reis

Conectivos Flexíveis: uma abordagem categorial às Semânticas de Traduções Possíveis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 23 / 07 / 2008.

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (membro)

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (membro)

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli (membro)

Prof. Dr. Ricardo Bianconi (suplente)

Prof^{a}. Dra. Itala M. L. D'Ottaviano (suplente)

Julho/2008

Teófilo de Souza Reis

Conectivos Flexíveis: uma abordagem categorial às Semânticas de Traduções Possíveis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do(a) Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 23 / 07 / 2008

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (orientador)

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (membro)

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli (membro)

Profª. Drª. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano (suplente)

Prof. Dr. Ricardo Bianconi (suplente)

Julho/2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

	Reis, Teófilo de Souza
R277c	**Conectivos flexíveis: uma abordagem categorial às semânticas de traduções possíveis / Teófilo de Souza Reis. - - Campinas, SP : [s. n.], 2008.**
	Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Linguagens formais - Semântica. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Linguagens formais. 4. Lógica matemática não-clássica. I. Coniglio, Marcelo Esteban. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.
	(cn/ifch)

Título em inglês: **Flexible connectives: a categorial approach to possible-translations semantics**

Palavras chaves em inglês (keywords) :
Formal languages – Semantics
Logic symbolic and mathematical
Formal languages
Mathematical logical nonclassical

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: **Marcelo Esteban Coniglio, Hércules de Araujo Feitosa, Walter Alexandre Carnielli**

Data da defesa: 23-07-2008

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

Dedico aos meus pais, José Teófilo e Regina.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Marcelo Esteban Coniglio, pelo primoroso trabalho de orientação e pelas constantes atenção e dedicação.

Agradeço aos professores do CLE: Itala M. L. D'Ottaviano e Walter Carnielli, pela enorme disposição em ajudar e pelas aulas e conversas, que foram fundamentais para minha formação. Agradeço ainda ao Walter pela sugestão do nome "Conectivos flexíveis".

Aos professores Hugo Mariano e Hércules Feitosa, pelas valiosas sugestões apontadas respectivamente em meu exame de qualificação e em minha sessão de defesa. A Rodrigo Freire, pelas excelentes conversas e aulas de Teoria de Modelos.

Aos meus pais e à minha irmã Thaíze, pelo constante e incondicional apoio - sem vocês, eu jamais teria chegado até aqui.

Aos funcionários do CLE e da Secretaria de Pós-Graduação do IFCH, por terem me ajudado nas mais diversas situações.

Aos colegas e amigos, em especial a Rafael Testa, pelo companheirismo.

Ao CNPq e à FAPESP, pelas bolsas concedidas.

Por fim agradeço à Natália, minha namorada e companheira de todos os momentos, por ser parte de minha vida e por me fazer feliz.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um novo formalismo de decomposição de lógicas, as *Coberturas por Traduções Possíveis*, ou simplesmente $CTPs$. As $CTPs$ constituem uma versão formal das *Semânticas de Traduções Possíveis*, introduzidas por W. Carnielli em 1990. Mostramos como a adoção de um conceito mais geral de morfismo de assinaturas proposicionais (usando multifunções no lugar de funções) nos permite definir uma categoria $\mathbf{Sig}_\omega$, na qual os conectivos, ao serem traduzidos de uma assinatura para outra, gozam de grande flexibilidade.

A partir de $\mathbf{Sig}_\omega$, contruímos a categoria $\mathbf{Log}_\omega$ de lógicas tarskianas e morfismos (os quais são funções obtidas a partir de um morfismo de assinaturas, isto é, de uma multifunção). Estudamos algumas características de $\mathbf{Sig}_\omega$ e $\mathbf{Log}_\omega$, afim de verificar que estas categorias podem de fato acomodar as construções que pretendemos apresentar. Mostramos como definir em $\mathbf{Log}_\omega$ o conjunto de traduções possíveis de uma fórmula, e a partir disto definimos a noção de CTP para uma lógica $\mathcal{L}$. Por fim, exibimos um exemplo concreto de utilização desta nova ferramenta, e discutimos brevemente as possíveis abordagens para uma continuação deste trabalho.

Abstract

We present a general study of a new formalism of decomposition of logics, the *Possible-Translations Coverings* (in short *PTC* 's) which constitute a formal version of Possible-Translations Semantics, introduced by W. Carnielli in 1990. We show how the adoption of a more general notion of propositional signatures morphism allows us to define a category $\mathbf{Sig}_\omega$, in which the connectives, when translated from a signature to another one, enjoy of great flexibility. Essentially, $\mathbf{Sig}_\omega$-morphisms will be multifunctions instead of functions.

From $\mathbf{Sig}_\omega$ we construct the category $\mathbf{Log}_\omega$ of tarskian logics and morphisms between them (these are functions obtained from signature morphisms, that is, from multifunctions) . We show how to define in $\mathbf{Log}_\omega$ the set of possible translations of a given formula, and we define the notion of a *PTC* for a logic $\mathcal{L}$. We analyze some properties of *PTC* 's and give concrete examples of the above mentioned constructions. We conclude with a discussion of the approaches to be used in a possible continuation of these investigations.

Sumário

Introdução **7**

1 Combinação de lógicas **10**

1.1 Representação de lógicas 10

1.2 Semântica de Traduções Possíveis 13

1.3 Fibrilação categorial 19

2 As categorias $\mathbf{Sig_1}$ e $\mathbf{Log_1}$ **24**

2.1 A categoria $\mathbf{Sig_1}$ 24

2.2 A categoria $\mathbf{Log_1}$ 31

2.3 Caracterizando $STPs$ em $\mathbf{Log_1}$ 34

3 As categorias $\mathbf{Sig}_\omega$ e $\mathbf{Log}_\omega$ **36**

3.1 Noções preliminares 36

3.2 A categoria $\mathbf{Sig}_\omega$ 38

3.3 A categoria $\mathbf{Log}_\omega$ 44

4 Coberturas por traduções possíveis **47**

4.1 Motivação 47

4.2 Coberturas por Traduções Possíveis 48

4.3 Considerações finais 50

Apêndice 1: Forma lógica **55**

4.4 Linguagem formal e linguagem natural 55

4.5 Formalização e o conceito de *Forma Lógica* 57

4.6 Forma lógica: de Aristóteles a Wittgenstein 58

Apêndice 2: Noções básicas de Teoria de Categorias **63**

4.7 Definição e exemplos 63

4.8 Morfismos 65

4.9 Construções universais básicas 66

4.10 Funtores 70

Referências Bibliográficas **74**

Introdução

"We will need to use some very simple notions of category theory, an esoteric subject noted for its difficulty and irrelevance"[1]

O emprego de lógicas não-clássicas em sistemas de informação de complexidade cada vez maior levou à necessidade de se integrar diferentes módulos de inferência, cada um deles governado por uma determinada lógica, num módulo mais complexo. Como conseqüência deste fato, surgiu naturalmente a necessidade de métodos que permitam combinar lógicas de tipos (e ainda, de natureza) diferentes. Além deste ponto de vista pragmático, existe o interesse puramente teórico despertado pela possibilidade de construir lógicas de tipo misto, que permitam fundir características de lógicas conhecidas.

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma nova ferramenta de combinação de lógicas. Justificamos a introdução desta nova técnica pelo fato de esta ser conceitualmente diferente de vários mecanismos de combinação conhecidos. A principal diferença diz respeito ao uso que fazemos de multifunções em vez de funções. É curioso notar que este conceito é muitas

[1]Gregory Moore and Nathan Seiberg: Classical and quantum conformal field theory, In *Comm. Math. Physics* 123(1989), 177-254

vezes negligenciado em vários ramos das ciências formais, sendo quase sempre deixado de lado como um mero relaxamento da noção de função. No entanto, neste trabalho pretendemos mostrar que é exatamente este relaxamento que torna as multifunções interessantes e adequadas para a formalização de certas situações, em particular para as que abordamos em nosso estudo.

No primeiro capítulo apresentamos resumidamente conceitos centrais sobre *Semânticas de Traduções Possíveis* ($STPs$) e *Fibrilação categorial*. A escolha destas duas ferramentas de combinação de lógicas em detrimento de outras não é arbitrária: as generalizações que fazemos da categoria de assinaturas e da categoria de lógicas têm por objetivo permitir formular mecanismos análogos às $STPs$ e à fibrilação em um ambiente mais geral.

No segundo capítulo reproduzimos uma abordagem categorial às Semânticas de Traduções Possíveis existente na literatura. São introduzidas uma categoria de assinaturas proposicionais e uma categoria de lógicas proposicionais. Merece destaque a caracterização de $STPs$ como tradução conservativa em um produto fraco de lógicas.

O terceiro capítulo traz o início de nossa proposta. Introduzimos uma categoria de assinaturas proposicionais usando como morfismos multifunções em vez de funções. Com base nessa categoria construímos uma categoria de lógicas proposicionais. Neste contexto surge a idéia de *conectivo flexível*, que está intimamente relacionada ao uso de multifunções nas formalizações que apresentamos.

Introduzimos as *Coberturas por Traduções Possíveis* no quarto capítulo. Esperamos que estas desempenhem com relação às categorias "multifuncionais" papel análogo àquele desempenhado pelas $STPs$ com relação às categorias de assinaturas e lógicas com morfismos funcionais. Indicamos os primeiros passos nesta direção e exibimos um exemplo concreto de uso desta ferramenta.

Durante todo o trabalho usamos técnicas da Teoria de Categorias, e isto não se deve apenas a gosto pessoal (ou desgosto, como poderia-se julgar pela citação acima) ou a alguma razão arbitrária: escolhemos situar nossas construções em ambiente categorial porque acreditamos que podemos assim fornecer métodos com um largo espectro de aplicações.

No primeiro apêndice dissertamos brevemente sobre a noção de *forma lógica*. São apresentados alguns pontos conceituais, assim como tópicos históricos. A razão de ser deste apêndice está na possível relação existente entre a noção de forma lógica e o abandono desta noção por Wittgenstein em favor da noção de jogos de linguagem, relação esta que poderia ser vislumbrada por meio das $CTPs$. No segundo apêndice apresentamos, para conveniência do leitor, um apanhado das principais definições que usaremos de Teoria de Categorias.

Capítulo 1

Combinação de lógicas

Tratamos brevemente dos métodos de combinação de lógicas mais relacionados ao nosso trabalho: as *Semânticas de Traduções Possíveis* e a *Fibrilação categorial*. Antes, apresentamos algumas definições relacionadas a representação de lógicas.

1.1 Representação de lógicas

Definição 1.1.1. Uma *assinatura proposicional* é uma família de conjuntos $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C_i \cap C_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Os elementos do conjunto C_n são chamados *conectivos n-ários*. Em particular, os elementos de C_0 são chamados *constantes*. Definimos $|C| \stackrel{def}{=} \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Assumimos que $\mathcal{V} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de variáveis proposicionais.

Definição 1.1.2. Seja C uma assinatura. A *linguagem gerada por C* é o menor conjunto $L(C)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\mathcal{V} \subseteq L(C)$;

- se $n \in \mathbb{N}$, $c \in C_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C)$, então $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L(C)$.

Os elementos de $L(C)$ são chamados *fórmulas*.

A noção de complexidade $l(\varphi)$ de uma fórmula φ é definida de maneira usual, estabelecendo-se $l(\varphi) = 1$, se $\varphi \in \mathcal{V} \cup C_0$, e $l(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = 1 + l(\alpha_1) + \ldots + l(\alpha_n)$.

Definição 1.1.3. Uma *substituição sobre* C é uma função $\sigma : \mathcal{V} \to L(C)$. Cada substituição admite uma única extensão $\widehat{\sigma} : L(C) \to L(C)$ tal que:

1. $\widehat{\sigma}(p) = \sigma(p)$, se $p \in \mathcal{V}$;

2. $\widehat{\sigma}(c) = c$, se $c \in C_0$;

3. $\widehat{\sigma}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c(\widehat{\sigma}(\varphi_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\varphi_n))$, se $c \in C_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C)$.

Se σ é uma substituição sobre C tal que $\sigma(p_i) = \varphi_i$ para $1 \leq i \leq n$ e $\varphi(p_1, \ldots, p_n) \in L(C)$, então $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ denota $\widehat{\sigma}(\varphi)$.

Definição 1.1.4. Uma *lógica proposicional* é um par $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, em que C é uma assinatura e $\vdash_{\mathcal{L}}$ é um subconjunto de $\wp(L(C)) \times L(C)$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $\Gamma \cup \Theta \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$:

- Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (Extensividade);

- Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ e $\Theta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$, então $\Theta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (Transitividade);

Uma lógica proposicional $\mathcal{L}$ é dita *finitária* (ou *compacta*) se satisfaz:

- Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ para algum conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ (Finitariedade);

$\mathcal{L}$ é dita *estrutural* se satisfaz:

- Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\widehat{\sigma}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}} \widehat{\sigma}(\varphi)$ para toda substituição σ (Estruturalidade).

Uma lógica que satisfaz todas as cláusulas acima é dita *padrão*. A relação $\vdash_{\mathcal{L}}$ é chamada a *relação de conseqüência* de $\mathcal{L}$.

É válido notar que a *monotonicidade* (se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Theta$, então $\Theta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$) é conseqüência de Extensividade e Transitividade.

Freqüentemente, quando não houver risco de confusão, omitiremos o subíndice $\mathcal{L}$ em $\vdash_{\mathcal{L}}$.

Definição 1.1.5. Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, \vdash_i \rangle$, (para $i = 1, 2$) duas lógicas e $f : L(C^1) \to L(C^2)$ uma função. Dizemos que:

- f é uma *tradução* se preserva derivabilidade, isto é: se $\Gamma \vdash_1 \varphi$ então $f(\Gamma) \vdash_2 f(\varphi)$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C^1)$.

- f é uma *tradução conservativa* entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ se, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C^1)$, $\Gamma \vdash_1 \varphi$ se, e só se, $f(\Gamma) \vdash_2 f(\varphi)$.

Uma maneira muito comum de se apresentar um sistema lógico é como um *sistema de Hilbert*, que definimos a seguir.

Definição 1.1.6. Um *sistema de Hilbert* é um par $\mathcal{H} = \langle C, R \rangle$, em que C é uma assinatura e R é um conjunto de pares do formato $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ tais que $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$. Os elementos de R são chamados de *regras* ; se $\Gamma = \emptyset$ então a regra é chamada de *axioma*.

Cada sistema de Hilbert $\mathcal{H}$ induz uma lógica $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} = \langle C, \vdash_{\mathcal{H}} \rangle$, em que $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \varphi$ se, e só se, existe uma *derivação* (isto é, uma seqüência finita $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de fórmulas de Γ tal que $\varphi_n = \varphi$ e cada fórmula φ_i é um axioma, é um fórmula de Γ ou resulta de regra aplicada a fórmulas já presentes na derivação) de φ a partir de Γ utilizando as regras de $\mathcal{H}$.

1.2 Semântica de Traduções Possíveis

A *Semântica de Traduções Possíveis* (STP) foi inicialmente proposta em [10] com o objetivo de ajudar a resolver o problema de se atribuir semânticas a lógicas não clássicas. A idéia subjacente a este método é a de construir uma interpretação para uma lógica levando-se em conta traduções de suas fórmulas em uma classe de lógicas mais simples, com semânticas conhecidas. Em outros termos, isto significa definir uma relação de conseqüência a partir da combinação de outras relações de conseqüência, através de traduções entre as lógicas. Deste modo, as $STPs$ podem ser vistas em duas direções opostas: como um processo de decomposição de lógicas e como um processo de composição de lógicas, no sentido de definir novas lógicas a partir de outras já dadas.

Definição 1.2.1. Sejam $\mathcal{L} = \langle C, \vdash \rangle$ uma lógica, I um conjunto não-vazio e $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ uma família de lógicas tais que $\mathcal{L}_i = \langle C^i, \vdash_i \rangle$ para todo $i \in I$. Um *enquadramento de traduções possíveis para* $\mathcal{L}$ é um par $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ tal que cada $f_i : L(C) \to L(C^i)$ é uma tradução de $\mathcal{L}$ para $\mathcal{L}_i$. Dizemos que $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ é uma *semântica de traduções possíveis* para $\mathcal{L}$ se, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e só se, } f_i(\Gamma) \vdash_i f_i(\varphi) \text{ para todo } i \in I.$$

Para ilustrar a utilidade desta técnica, vamos considerar o caso em que o conjunto I é finito, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considere agora $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$. Se P é uma STP para $\mathcal{L}$, então a verificação de $\Gamma \vdash \varphi$ transforma-se em fazer n verificações: $f_i(\Gamma) \vdash_i f_i(\varphi)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Isto mostra como as $STPs$ podem ser extremamente úteis, por exemplo, no estudo de lógicas não caracterizáveis por matrizes finitas. Vejamos agora um exemplo concreto desta afirmação, usando a lógica **mbC**. Este exemplo é particularmente interessante porque a lógica **mbC** não é caracterizável por matrizes finitas, e portanto uma STP para tal lógica pode nos fornecer muitas informações. O exemplo abaixo foi originalmente publicado em [15].

A lógica **mbC** é um exemplo de *lógica da inconsistência formal*, ou **LFI** (do inglês *logics of formal inconsistency*). As **LFI**s são lógicas paraconsistentes nas quais as noções de consistência e/ou inconsistência são internalizadas no nível da linguagem-objeto. Isto é feito através de conectivos unários (primitivos ou definidos) para consistência e/ou inconsistência satisfazendo determinados axiomas.

Seja C° a assinatura tal que $C_1^\circ = \{\neg, \circ\}$, $C_2^\circ = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ e $C_n^\circ = \emptyset$ para $n \geq 3$. Seja $For^\circ = L(C^\circ)$. A lógica **mbC** é definida sobre For° através dos seguintes axiomas-esquema e regras de inferência:

Axiomas-esquema:

(Ax1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(Ax2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

(Ax3) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

(Ax4) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$

(Ax5) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta$

(Ax6) $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax7) $\beta \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax8) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma))$

(Ax9) $\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \beta)$

(Ax10) $\alpha \vee \neg\alpha$

(bc1) $\circ\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta))$

$$\textbf{(MP)}\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

Considere as seguintes matrizes 3-valoradas, nas quais T e t são os valores designados:

$\wedge$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	F	F	F

$\vee$	T	t	F
T	t	t	t
t	t	t	t
F	t	t	F

$\Rightarrow$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	t	t	t

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\circ_1$	$\circ_2$
T	F	F	t	F
t	F	t	F	F
F	T	t	t	F

Esta coleção de tabelas-verdade, que chamaremos $\mathcal{M}_0$, será usada para dar a semântica desejada para **mbC**. Considerando a álgebra $For_{\mathcal{M}_0}$ das fórmulas construídas com os conectivos das matrizes de $\mathcal{M}_0$, vamos definir o conjunto TR_0 de todas as funções $* : For^{\circ} \rightarrow For_{\mathcal{M}_0}$ que satisfaz as seguintes cláusulas:

(tr0) $p^* = p$, se p é proposicional;

(tr1) $(\alpha \# \beta)^* = (\alpha^* \# \beta^*)$, para $\# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$;

(tr3) $(\neg\alpha)^* \in \{\neg_1\alpha^*, \neg_2\alpha^*\}$;

(tr4) $(\circ\alpha)^* \in \{\circ_1\alpha^*, \circ_2\alpha^*, \circ_1(\neg\alpha)^*\}$.

Dizemos que o par $PT_0 = \langle \mathcal{M}_0, TR_0 \rangle$ é uma *estrutura semântica de* *traduções possíveis* para **mbC**. Se $\models_{\mathcal{M}_0}$ denota a relação de conseqüência em $\mathcal{M}_0$, e $\Gamma \cup \{\alpha\}$ é um conjunto de fórmulas de **mbC**, a PT_0-relação de conseqüência associada a $\models_{PT_0}$ é definida como:

$$\Gamma \models_{PT_0} \alpha \text{ se, e só se, } \Gamma^* \models_{\mathcal{M}_0} \alpha^*, \text{ para toda } * \text{ em } TR_0.$$

Chamamos de *tradução possível* de uma fórmula α a qualquer sua imagem por alguma função em TR_0.

Teorema 1.2.2 (Correção)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* **mbC***. Então* $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ *implica* $\Gamma \models_{PT_0} \alpha$*.*

Demonstração. É suficiente verificar que a coleção (finita) de todas as traduções possíveis de cada axioma produz tautologias nas matrizes de $\mathcal{M}_0$ e que todas as possíveis traduções da regra *Modus Ponens* preservam validade. □

Para provar a completude, a estratégia é mostrar que cada **mbC** - valoração v determina uma tradução $*$ e uma valoração 3-valorada w definida da maneira usual sobre as matrizes $\mathcal{M}_0$ tais que, para toda fórmula α de **mbC**

$$w(\alpha^*) \in \{T, t\} \text{ se, e só se, } v(\alpha) = 1$$

e então reduzir este problema à prova de completude via valorações para **mbC**.

Teorema 1.2.3 (Representabilidade)**.** *Dada uma* **mbC** *- valoração v, existe uma tradução $*$ em TR_0 e uma valoração w em $\mathcal{M}_0$ tais que, para toda fórmula α em* **mbC***:*

$$w(\alpha^*) = T \textit{ implica } v(\neg\alpha) = 0\textit{; e}$$
$$w(\alpha^*) = F \textit{ sse } v(\alpha) = 0.$$

Demonstração. Para $p \in \mathcal{P}$, defina a valoração w por:

$w(p) = F$ se $v(p) = 0$;

$w(p) = T$ se $v(p) = 1$ e $v(\neg p) = 0$;

$w(p) = t$ se $v(p) = 1$ e $v(\neg p) = 1$.

Tal w pode ser homomorficamente estendido para a álgebra $For_{\mathcal{M}_0}$ de $\mathcal{M}_0$ -fórmulas. Definimos a tradução $*$ da maneira seguinte:

1. $p^* = p$, se $p \in \mathcal{P}$;
2. $(\alpha \# \beta)^* = (\alpha^* \# \beta^*)$, para $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
3. $(\neg\alpha)^* = \neg_1 \alpha^*$, se $v(\neg\alpha) = 0$ ou $v(\alpha) = v(\neg\neg\alpha) = 0$;
4. $(\neg\alpha)^* = \neg_2 \alpha^*$, caso contrário a (3);
5. $(\circ\alpha)^* = \circ_2 \alpha^*$, se $v(\circ\alpha) = 0$;
6. $(\circ\alpha)^* = \circ_1 (\neg\alpha)^*$, se $v(\circ\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 0$;
7. $(\circ\alpha)^* = \circ_1 \alpha^*$, nos casos em que não se aplicam (5) ou (6)

Completa-se a prova fazendo indução sobre a medida de complexidade da fórmula α. □

Teorema 1.2.4 (Completude)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas em* **mbC**. *Então* $\Gamma \models_{PT_0} \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \models_{PT_0} \alpha$, e suponha que v é uma **mbC** -valoração tal que $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Pelo teorema anterior, existe uma tradução $*$ e uma valoração w 3-valorada tal que, para toda fórmula β, $w(\beta^*) \in \{T, t\}$ se e só se $v(\beta) = 1$. Disto, $w(\Gamma^*) \subseteq \{T, t\}$ e daí $w(\alpha^*) \in \{T, t\}$, logo

$v(\Gamma) \subseteq \{1\}$ implica $v(\alpha) = 1$. Usando a completude de **mbC** com respeito a **mbC** -valorações, obtemos $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$, como queríamos. $\square$

Agora é fácil checar a validade de inferências em **mbC** , como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.5. Mostraremos que $\circ\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ usando semântica de traduções possíveis. Temos que, para qualquer tradução $*$ em TR_0,

$$(\circ\alpha)^* \in \{\circ_1(\alpha^*), \circ_2(\alpha^*), \circ_1\neg_1(\alpha^*), \circ_1\neg_2(\alpha^*)\},$$
$$(\neg(\neg\alpha \wedge \alpha))^* \in \{\neg_i(\neg_j(\alpha^*) \wedge \alpha^*) : i, j \in \{1, 2\}\}.$$

Sejam $*$ uma tradução em TR_0, w uma valoração em $\mathcal{M}_0$, e $D = \{T, t\}$. Sejam $x = w(\alpha^*)$, $y = w((\circ\alpha)^*)$ e $z = w((\neg(\neg\alpha \wedge \alpha))^*)$, e suponha que $y \in D$; isto exclui a tradução $(\circ\alpha)^* = \circ_2(\alpha^*)$, pois $\circ_2(x) \notin D$. Para provar que $z \in D$, temos os seguintes casos:

1. $(\circ\alpha)^* = \circ_1(\alpha^*)$. Então $\circ_1(x) \in D$, e assim $x \in \{T, F\}$.

(a) $x = T$. Então $\neg_j(x) = F$ $(j \in \{1, 2\})$ e portanto $\neg_i(\neg_j(x) \wedge x) \in D$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

(b) $x = F$. Então $(\neg_j(x) \wedge x) = F$ $(j \in \{1, 2\})$ e portanto $\neg_i(\neg_j(x) \wedge x \in D$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

2. $(\circ\alpha)^* = \circ_1\neg_1(\alpha^*)$. Então $\circ_1\neg_1(x) \in D$, e assim $\neg_1(x) \in \{T, F\}$ e $z = \neg_i(\neg_1(x) \wedge x)$.

(a) $\neg_1(x) = T$. Então $x = F$, logo $\neg_1(x) \wedge x = F$ e a prova é como em $(1b)$.

(b) $\neg_1(x) = F$. Neste caso, a prova é como em $(1a)$.

3. $(\circ\alpha)^* = \circ_1\neg_2(\alpha^*)$. Então, dado $\circ_1\neg_2(x) \in D$, temos $\neg_2(x) \in \{T, F\}$ e $z = \neg_i(\neg_2(x) \wedge x)$. Da tabela-verdade de $\neg_2$ obtemos $\neg_2(x) = F$, e a prova é como em $(1a)$.

Isto prova o resultado desejado. Por outro lado, podemos mostrar que a recíproca $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha) \vdash_{\mathbf{mbC}} \circ\alpha$ não é verdadeira em **mbC**. Usando a notação acima para uma dada tradução $*$ em TR_0 e uma valoração w em $\mathcal{M}_0$, basta considerar α como uma variável proposicional p, e escolher $*$ e w tais que $x = F$ e $(\circ\alpha)^* = \circ_2(\alpha^*)$. Então $z \in D$ e $y = F$. Para mais um outro contra-exemplo, tome $x = t$, $(\neg(\neg\alpha \wedge \alpha))^* = \neg_2(\neg_2(\alpha^*) \wedge \alpha^*)$ e $(\circ\alpha)^* \in \{\circ_1(\alpha)^*, \circ_1(\neg_2\alpha)^*\}$.

1.3 Fibrilação categorial

Sejam C^1 e C^2 duas assinaturas proposicionais. Dizemos que C^1 é *sub-assinatura* de C^2, e escrevemos $C^1 \leq C^2$, se $C^1_n \subseteq C^2_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Um morfismo de assinaturas h de C^1 em C^2 é uma família de funções $h_n : C^1_n \to C^2_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que um morfismo $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ induz uma única função $\widehat{h} : L(C^1) \to L(C^2)$ tal que $\widehat{h}(p) = p$ (para $p \in \mathcal{V}$) e $\widehat{h}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h_n(c)(\widehat{h}(\varphi_1), \ldots, \widehat{h}(\varphi_n))$, se $c \in C^1_n$. Podemos introduzir uma noção de composição "coordenada a coordenada", isto é, dados dois morfismos f e g, a composição $g \circ f$ é determinada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$. É fácil então ver que assinaturas e morfismos formam uma categoria, que chamamos **Sig**.

Assim como estabelecemos a noção de morfismo entre assinaturas, podemos fazer algo análogo para sistemas de Hilbert. Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são dois tais sistemas, definimos um morfismo $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{h} \mathcal{H}_2$ entre eles como sendo um morfismo $C^1 \xrightarrow{h} C^2$ entre as assinaturas subjacentes tal que a função associada $\widehat{h} : L(C^1) \to L(C^2)$ é uma tradução entre $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_2}$. Obtemos assim uma categoria de sistemas de Hilbert, que chamamos **Hil**.

Definição 1.3.1. Sejam $\mathcal{H}_1 = \langle C^1, R_1 \rangle$ e $\mathcal{H}_2 = \langle C^2, R_2 \rangle$ dois sistemas de

Hilbert. A *fibrilação categorial irrestrita* de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, denotada $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, é o coproduto de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ em **Hil**. (Ver Seção 4.9).

Podemos descrever o objeto definido acima como sendo o sistema de Hilbert cuja assinatura é o coproduto $C^1 \oplus C^2$ de C^1 e C^2 em **Sig** e cujas regras são as traduções das regras de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ na assinatura $C^1 \oplus C^2$. Podemos representar esta situação da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, "j_1"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, "j_2"] \\
& \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \arrow[d, dashed, "h"'] & \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, os morfismos i_1 e i_2 são as inclusões canônicas de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ em $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, respectivamente. O sistema $\mathcal{H}$ é um outro sistema de Hilbert qualquer e h realiza a universalidade da construção (e a minimalidade de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$). Todas as setas são induzidas por setas de **Sig**.

No caso definido acima não houve compartilhamento de conectivos. Para as situações em que desejamos identificar conectivos presentes em ambas as assinaturas, existe a técnica de *fibrilação restrita pelo compartilhamento de conectivos*, que explicamos a seguir.

Dados dois sistemas de Hilbert $\mathcal{H}_1 = \langle C^1, R_1 \rangle$, $\mathcal{H}_2 = \langle C^2, R_2 \rangle$, uma assinatura $\bar{C}$ que é sub-assinatura de C^1 e C^2 via os monomorfismo $\bar{C} \overset{k_1}{\hookrightarrow} C^1$ e $\bar{C} \overset{k_2}{\hookrightarrow} C^2$ (chamaremos de $\mathcal{D}$ esta configuração), e considerando as inclusões $C^1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} C^1 \oplus C^2$ e $C^2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} C^1 \oplus C^2$, devemos primeiro calcular o coequalizador $\langle C, q \rangle$ em **Sig** dos morfismos $i_1 \circ k_1$ e $i_2 \circ k_2$. Tendo isto, a fibrilação de $\mathcal{H}_1$

e $\mathcal{H}_2$ com compartilhamento de conectivos $\mathcal{D}$, denotada por $\mathcal{H}_1 \oplus^{\mathcal{D}} \mathcal{H}_2$, é o sistema de Hilbert

$$\mathcal{H}_1 \oplus^{\mathcal{D}} \mathcal{H}_2 = \langle C, \{\widehat{q}(r) \mid r \in R\}\rangle$$

onde R é o conjunto das regras do sistema $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Uma descrição mais compacta da fibrilação restrita é a seguinte: lembremos o funtor de esquecimento $N : \mathbf{Hil} \to \mathbf{Sig}$ (Veja a definição em 4.10). O sistema de Hilbert $\mathcal{H}_1 \oplus^{\mathcal{D}} \mathcal{H}_2$ é o codomínio da elevação cocartesiana (ver 4.10.3) de q através do funtor N.

As duas definições de fibrilação (restrita e irrestrita) podem ser unificadas do seguinte modo: considerando novamente o funtor de esquecimento $N : \mathbf{Hil} \to \mathbf{Sig}$, prode-se provar que tal funtor possui um adjunto à esquerda $F : \mathbf{Sig} \to \mathbf{Hil}$ (ver 4.10.4). Considerando agora a configuração a seguir na categoria **Sig**, $C^1 \overset{f}{\leftarrow} C \overset{g}{\rightarrow} C^2$ (onde C representa os conectivos a se compartilhar, podendo ser $C = \emptyset$) e sendo $\mathcal{L}^1 = \langle C^1, \vdash_1\rangle$ e $\mathcal{L}^2 = \langle C^2, \vdash_2\rangle$ duas lógicas, a fibrilação de $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ restrita pelo compartilhamento de C é a lógica $\mathcal{L}$ obtida pelo seguinte *pushout* em **Hil**:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{L}^2 \arrow[d] \\ \mathcal{L}^1 \arrow[r] & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

Em [9] são descritos os principais resultados referentes a fibrilação até o ano de 2004. Concluímos esta seção com um exemplo de fibrilação com compartilhamento de conectivos. Considere as assinaturas:

- C° tal que $C_1^\circ = \{\neg, \circ\}$ e $C_2^\circ = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$;

- $C^{\Box}$ tal que $C_1^{\Box} = \{\neg, \Box\}$ e $C_2^{\Box} = \{\Rightarrow\}$;

e os cálculos de Hilbert $\mathcal{H}^{\circ} = \langle C^{\circ}, R^{\circ}\rangle$ e $\mathcal{H}^{\Box} = \langle C^{\Box}, R^{\Box}\rangle$, onde:

- R° inclui:
  - $\langle \emptyset, ((\neg(\circ\varphi_1)) \Rightarrow (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_1)))\rangle$;
  - $\langle \{\varphi_1, (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)\}, \varphi_1\rangle$.

- $R^{\Box}$ inclui:
  - $\langle \emptyset, ((\Box(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) \Rightarrow ((\Box\varphi_1) \Rightarrow (\varphi_2)))\rangle$;
  - $\langle \{\varphi_1\}, (\Box\varphi_1)\rangle$;
  - $\langle \{\varphi_1, (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)\}, \varphi_2\rangle$.

Primeiro fazemos a fibrilação irrestrita de $\mathcal{H}^{\circ}$ e $\mathcal{H}^{\Box}$, do que resulta o sistema $\mathcal{H}^{\circ} \cup \mathcal{H}^{\Box} = \langle C^{\circ} \cup C^{\Box}, R\rangle$ onde $R = i'(R^{\circ}) \cup i''(R^{\Box})$ (com i' e i'' inclusões canônicas no coproduto) inclui, por exemplo, as regras

- $\langle \emptyset, ((\neg_1(\circ_1\varphi_1)) \Rightarrow_1 (\varphi_1 \wedge_1 (\neg_1\varphi_1)))\rangle$;

- $\langle \{\varphi_1, (\varphi_1 \Rightarrow_2 \varphi_2)\}, \varphi_2\rangle$.

Observe que as duas versões de *modus ponens* não serão confundidas, pois os conectivos de cada assinatura são marcados com subíndices de modo a não se misturarem. Vamos agora mostrar como se faz o compartilhamento do conectivo $\Rightarrow$. O resultado será o cálculo de Hilbert $\mathcal{H}^{\circ} \cup \mathcal{H}^{\Box} = \langle C^{\circ} \cup C^{\Box}, R\rangle$ tal que

- $C^{\circ} \cup C^{\Box}$ é como especificado no diagrama abaixo.

- R inclui as seguintes regras de inferência:
  - $\langle \emptyset, ((\neg_1(\circ_1\varphi_1)) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\neg_1\varphi_1)))\rangle$;
  - $\langle \{\varphi_1, (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)\}, \varphi_2\rangle$;

- $\langle \emptyset, ((\Box(\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\Box\varphi_1) \to (\varphi_2))) \rangle$;
- $\langle \{\varphi_1\}, (\Box\varphi_1) \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{\Rightarrow\} \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g''"] & \\
\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \circ\} \arrow[dr, "i'"'] & & \{\neg, \Rightarrow, \Box\} \arrow[dl, "i''"] \\
 & \{\vee, \wedge, \Rightarrow_1, \Rightarrow_2, \neg_1, \neg_2, \circ, \Box\} \arrow[d, "q"] & \\
 & \{\vee, \wedge, \to, \neg_1, \neg_2, \circ, \Box\} &
\end{tikzcd}$$

Observe que as suas regras *modus ponens* colapsaram, e todas as regras originais admitem instâncias novas, que não eram possíveis antes da fibrilação.

Capítulo 2

As categorias $\mathbf{Sig_1}$ e $\mathbf{Log_1}$

Neste capítulo reproduzimos uma primeira abordagem categorial às $STPs$, apresentada originalmente em [5]. Descrevemos uma categoria $\mathbf{Sig_1}$ de assinaturas proposicionais, e em seguida introduzimos a categoria $\mathbf{Log_1}$ de lógicas, construída a partir de $\mathbf{Sig_1}$. Por fim, reproduzimos a prova de que $STPs$ correspondem a certas traduções conservativas em um produto fraco de lógicas em $\mathbf{Log_1}$, conforme apresentado primeiramente em [13].

2.1 A categoria $\mathbf{Sig_1}$

A categoria $\mathbf{Sig_1}$ é determinada da maneira seguinte: seus objetos são assinaturas proposicionais, e um morfismo $f : C \to C'$ entre dois tais objetos é uma função $f : |C| \to L(C')$ que associa a cada conectivo $c \in C_n$ uma fórmula $\varphi \in L(C')$ na qual ocorrem exatamente as n primeiras variáveis proposicionais $p_1, \ldots, p_n$. A identidade $id_C : C \to C$ no objeto C é definida por $id_C(c) = c$, para $c \in C_0$, e $id_C(c) = c(p_1, \ldots, p_n)$, para $c \in C_n$, $n \geq 0$.

Dado um morfismo $f : C \to C'$, podemos estendê-lo a uma única função

$\widehat{f} : L(C) \to L(C')$ (chamada *extensão de f*) definida por:

- $\widehat{f}(p) = p$, se $p \in \mathcal{V}$;
- $\widehat{f}(c) = f(c)$, se $c \in C_0$;
- $\widehat{f}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = f(c)(\widehat{f}(\varphi_1), \ldots, \widehat{f}(\varphi_n))$, para $c \in C_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C)$.

Lema 2.1.1. *A extensão $\widehat{f}$ de f é única.*

Demonstração. Sejam $f : C^1 \to C^2$ um morfismo e $\widehat{f}, \widehat{g}$ duas extensões de f. O resultado é claro para variáveis proposicionais e constantes. Considere agora $c \in C_n^1$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C)$. Temos $\widehat{f}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = f(c)(\widehat{f}(\varphi_1), \ldots, \widehat{f}(\varphi_n)) \overset{Hip.ind.}{=} g(c)(\widehat{g}(\varphi_1), \ldots, \widehat{g}(\varphi_n)) = \widehat{g}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$, e portanto $\widehat{g} = \widehat{f}$. $\square$

Dados dois morfismos $f : C \to C'$ e $g : C' \to C''$, sua *composição* é o morfismo de assinaturas $g \centerdot f : C \to C''$ dado por $\widehat{g} \circ f : |C| \to L(C'')$. A seguir mostramos que $\mathbf{Sig_1}$ de fato é uma categoria.

Lema 2.1.2. *Sejam σ e σ' substituições sobre C. Vale $\widehat{\sigma'\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}$.*

Demonstração. Prova por indução na complexidade de φ.

• Se φ é uma variável p, então $\widehat{\sigma'\sigma}(\varphi) = \widehat{\sigma'\sigma}(p) = \sigma'\sigma(p) = (\widehat{\sigma'} \circ \sigma)(p) = \widehat{\sigma'}(\sigma(p)) = \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma(p)}) = (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(p) = (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(\varphi)$.

• Se φ é uma constante c, então $\widehat{\sigma'\sigma}(\varphi) = \widehat{\sigma'\sigma}(c) = c = \widehat{\sigma'}(c) = \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma(c)}) = (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(c) = (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(\varphi)$.

• Se φ é uma fórmula $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ para $c \in C_n$, então

$$\widehat{\sigma'\sigma}(\varphi) \quad = \quad \widehat{\sigma'\sigma}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$$

$$
\begin{aligned}
&= c(\widehat{\sigma'\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma'\sigma}(\alpha_n)) \\
&\overset{Hip.ind.}{=} c(\widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\alpha_n))) \\
&= \widehat{\sigma'}(c(\widehat{\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\alpha_n))) \\
&= \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \\
&= (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&= (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(\varphi).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.3. *Seja $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ uma fórmula, e sejam $\sigma, \sigma' : \mathcal{V} \to L(C)$ substituições tais que: $\sigma(p_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Então $\widehat{\sigma'}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \varphi(\widehat{\sigma'}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma'}(\alpha_n))$.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma'}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) &= \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\varphi(p_1, \ldots, p_n))) \\
&= (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) \\
&= \widehat{\sigma'\sigma}(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) \\
&\overset{1.1.3}{=} \varphi(\widehat{\sigma'\sigma}(p_1), \ldots, \widehat{\sigma'\sigma}(p_n)) \\
&= \varphi((\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(p_1), \ldots, (\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma})(p_n)) \\
&= \varphi(\widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(p_1)), \ldots, \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(p_n))) \\
&= \varphi(\widehat{\sigma'}(\sigma(p_1)), \ldots, \widehat{\sigma'}(\sigma(p_n))) \\
&= \varphi(\widehat{\sigma'}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma'}(\alpha_n)).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.4. *Sejam $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L(C)$ e $f : C \to C'$ um morfismo de assinaturas. Então $\widehat{f}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))$.*

Demonstração. Por indução na complexidade $l(\varphi)$ de φ. Denotemos a seqüência $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ por $\vec{\alpha}$.

- Se φ é uma variável proposicional $p_i \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\varphi(\vec{\alpha})) &= \widehat{f}(p_i(\vec{\alpha})) \\ &= \widehat{f}(\alpha_i) \\ &= p_i(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) \\ &= \widehat{f}(p_i)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) \\ &= \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)). \end{aligned}$$

- Se φ é uma constante $c \in C_0$, então $\varphi(\vec{\alpha}) = c$ e portanto

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\varphi(\vec{\alpha})) &= \widehat{f}(c(\vec{\alpha})) \\ &= f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) \\ &= \widehat{f}(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) \\ &= \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)). \end{aligned}$$

- Se $\varphi = c(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, com $\beta_i = \beta_i(p_1, \ldots, p_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ então $\varphi(\vec{\alpha}) = \widehat{\sigma}(\varphi) = c(\widehat{\sigma}(\beta_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\beta_k)) = c(\beta_1(\vec{\alpha}), \ldots, \beta_k(\vec{\alpha}))$ e denotando $(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))$ por $\widehat{f}(\vec{\alpha})$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\varphi(\vec{\alpha})) &= \widehat{f}(c(\beta_1(\vec{\alpha}), \ldots, \beta_k(\vec{\alpha}))) \\ &= f(c)((\widehat{f}(\beta_1(\vec{\alpha})), \ldots, \widehat{f}(\beta_k(\vec{\alpha})))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{Hip.ind.}{=} && f(c)(\widehat{f}(\beta_1)(\widehat{f}(\vec{\alpha})), \ldots, \widehat{f}(\beta_k)(\widehat{f}(\vec{\alpha})) \\
&= && f(c)(\widehat{f}(\beta_1), \ldots, \widehat{f}(\beta_k))(\widehat{f}(\vec{\alpha})) \\
&\overset{2.1.4}{=} && \widehat{f}(c(\beta_1, \ldots, \beta_k))(\widehat{f}(\vec{\alpha})) \\
&= && \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\vec{\alpha})).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.5. *Sejam $f : C \to C'$ e $g : C' \to C''$ morfismos de assinaturas. Então $\widehat{g \centerdot f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.*

Demonstração. Por indução na complexidade $l(\varphi)$, para $\varphi \in L(C)$.

- Se $\varphi = p \in \mathcal{V}$, então $\widehat{g \centerdot f}(\varphi) = \widehat{g \centerdot f}(p) = p = \widehat{g}(p) = \widehat{g}(\widehat{f}(p)) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(p) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(\varphi)$.

- Se $\varphi = c \in C_0$, então $\widehat{g \centerdot f}(\varphi) = \widehat{g \centerdot f}(c) = g \centerdot f(c) = \widehat{g} \circ f(c) = \widehat{g}(f(c)) = \widehat{g}(\widehat{f}(c)) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(c) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(\varphi)$.

- Se $\varphi = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $c \in C_n$, então

$$
\begin{aligned}
\widehat{g \centerdot f}(\varphi) &= && \widehat{g \centerdot f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&= && g \centerdot f(c)(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&= && \widehat{g} \circ f(c)(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&= && \widehat{g}(f(c))(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&\overset{Hip.Ind}{=} && \widehat{g}(f(c))(\widehat{g} \circ \widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g} \circ \widehat{f}(\alpha_n)) \\
&= && \widehat{g}(f(c))(\widehat{g}(\widehat{f}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{g}(\widehat{f}(\alpha_n))) \\
&= && \widehat{g}(f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))) \\
&= && \widehat{g}(\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \widehat{g}(\widehat{f}(\varphi)) \\
&= \widehat{g} \circ \widehat{f}(\varphi).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.6. *Sejam $f : C \to C'$ um morfismo de assinaturas e $\sigma : \mathcal{V} \to L(C)$ uma substituição sobre C. Então existe uma única substituição $\sigma' : \mathcal{V} \to L(C')$ sobre C' tal que $\widehat{f} \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{f}$.*

Demonstração. Defina $\sigma'(p) = \widehat{f}(\sigma(p))$, para todo $p \in \mathcal{V}$. Por indução na complexidade $l(\alpha)$ de α provamos que $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha))$, para todo α.

- Se $\alpha = p \in \mathcal{V}$, então $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) = \widehat{f}(\widehat{\sigma}(p)) = \widehat{f}(\sigma(p)) = \sigma'(p) = \widehat{\sigma'}(p) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(p)) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha))$. Isto mostra também a unicidade de σ'.

- Se $\alpha = c \in C_0$, então $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) = \widehat{f}(\widehat{\sigma}(c)) = \widehat{f}(c) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(c)) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha))$, pois $\widehat{f}(c) \in L(C')_0$.

- Se $\alpha = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, para $c \in C_k$, então

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) &= \widehat{f}(\widehat{\sigma}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \\
&= \widehat{f}(c(\widehat{\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\alpha_k))) \\
&= f(c)(\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha_k))) \\
&\overset{Hip.Ind.}{=} f(c)(\widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha_k))) \\
&= \widehat{\sigma'}(f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_k))) \\
&= \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))) \\
&= \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha)).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.1.7. *A composição $\centerdot$ é associativa.*

Demonstração. Considere a seguinte configuração $C^1 \xrightarrow{f} C^2 \xrightarrow{g} C^3 \xrightarrow{h} C^4$ em $\mathbf{Sig_1}$. Usando a definição de $\centerdot$ e o penúltimo lema, obtemos a seguinte seqüência de igualdades:

$$h \centerdot (g \centerdot f) = h \centerdot (\widehat{g} \circ f) = \widehat{h} \circ (\widehat{g} \circ f) = (\widehat{h} \circ \widehat{g}) \circ f = \widehat{h \centerdot g} \circ f = (h \centerdot g) \centerdot f.$$

$\square$

Para concluir a verificação de que $\mathbf{Sig_1}$ é uma categoria, precisamos mostrar que, dado um morfismo $f : C \to C'$, valem as igualdades $f \centerdot id_C = f$ e $id_{C'} \centerdot f = f$. Mas isto segue imediatamente das definições de composição, identidade e extensão de morfismo.

No que se segue, o símbolo $L(C)[n]$ denotará o conjunto das fórmulas $\varphi \in L(C)$ tais que o conjunto das variáveis proposicionais ocorrendo em φ é exatamente $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Lembramos que uma construção categorial é dita *fraca* quando tem a propriedade universal fraca (ver Seção 4.9), isto é, a propriedade universal sem a unicidade.

Proposição 2.1.8. *A categoria* $\mathbf{Sig_1}$ *possui produtos fracos de famílias pequenas e não-vazias de objetos.*

Demonstração. Sejam I um conjunto não-vazio e $\mathcal{F} = \{C^i\}_{i \in I}$ uma família de assinaturas. Considere a assinatura $C^{\mathcal{F}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C^{\mathcal{F}}_n = \{(\varphi_i)_{i \in I} : \varphi_i \in L(C^i)[n] \text{ para todo } i \in I\}.$$

Para cada $i \in I$, considere a função $\pi_i : |C^{\mathcal{F}}| \to L(C^i)$ tal que $\pi_i((\varphi_i)_{i \in I}) = \varphi_i$, se $(\varphi_i)_{i \in I} \in C^{\mathcal{F}}_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Então π_i determina um $\mathbf{Sig_1}$-morfismo $\pi_i : C^{\mathcal{F}} \to C^i$. Considere uma assinatura C' junto com $\mathbf{Sig_1}$-morfismos $f_i : C' \to C^i$, para cada $i \in I$. Seja $f : |C'| \to L(C^{\mathcal{F}})$ tal que $f(c) =$

$(f_i(c))_{i\in I}(p_1,\ldots,p_n)$, se $c \in C'_n$. Então f define um $\mathbf{Sig_1}$-morfismo $f: C' \to C^{\mathcal{F}}$ tal que $f_i = \pi_i \centerdot f$ para todo $i \in I$. $\square$

É natural perguntar se a construção acima é única. Por algum tempo acreditou-se que a resposta seria afirmativa, (como consta em [5]), pois se $g : C' \to C^{\mathcal{F}}$ é um morfismo tal que $f_i = \pi_i \centerdot g$, para cada $i \in I$, então $g = f$. Isto mostraria que $\langle C^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ é o produto em $\mathbf{Sig_1}$ da família $\mathcal{F}$. Mas a conclusão "então $g = f$" não é válida, e portanto o argumento não prova a unicidade. No entanto, isto não é grave: em nossas construções usamos apenas a existência do produto fraco, e em momento algum precisamos da unicidade. Portanto, temos apenas um produto fraco, mas que é suficiente para nossos objetivos.

2.2 A categoria $\mathbf{Log_1}$

Sejam $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$ e $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'}\rangle$ lógicas. Um *morfismo de lógicas* f de $\mathcal{L}$ para $\mathcal{L}'$, denotado por $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, é um $\mathbf{Sig_1}$-morfismo $f : C \to C'$ que é uma tradução, isto é, satisfaz a seguinte condição, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ implica } \widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f}(\varphi).$$

Definindo composição de morfismos e identidade como em $\mathbf{Sig_1}$, obtemos uma categoria de lógicas (proposicionais), que chamaremos $\mathbf{Log_1}$. Uma propriedade fundamental de $\mathbf{Log_1}$ é a seguinte:

Proposição 2.2.1. *A categoria* $\mathbf{Log_1}$ *possui produtos fracos de famílias pequenas e não-vazias de objetos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ uma família de lógicas, em que I é um conjunto não-vazio e cada $\mathcal{L}_i$ é do formato $\langle C^i, \vdash_{\mathcal{L}_i}\rangle$. Considere o produto fraco $\langle C^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ de $\{C^i\}_{i\in I}$ na categoria $\mathbf{Sig_1}$. Seja $\vdash_{\mathcal{F}} \subseteq \wp(L(C^{\mathcal{F}})) \times L(C^{\mathcal{F}})$ a relação definida a seguir:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi \text{ se, e só se, existir um conjunto finito } \Delta \subseteq \Gamma \text{ tal que}$$
$$\widehat{\pi}_i(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi), \text{ para todo } i \in I.$$

Seja $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = \langle C^{\mathcal{F}}, \vdash_{\mathcal{F}}\rangle$. Mostraremos que o par $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ é o produto fraco em $\mathbf{Log_1}$ da família $\mathcal{F}$. Primeiramente mostraremos que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ é uma lógica, isto é, a relação $\vdash_{\mathcal{F}}$ é uma relação de conseqüência.

(i) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é extensional:

Considere $\Gamma \subseteq L(C^{\mathcal{F}})$. Sejam $\varphi \in \Gamma$ e $\Delta = \{\varphi\}$. Então $\varphi \in \Delta$ e Δ é um subconjunto finito de Γ. Como $\langle C^i, \vdash_{\mathcal{L}_i}\rangle$ é uma lógica e satisfaz Extensividade, então $\widehat{\pi}_i(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$, para todo $i \in I$. Mas isto significa $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$.

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é transitiva:

Suponha que $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$ e $\Theta \vdash_{\mathcal{F}} \psi$ para toda $\psi \in \Gamma$. Então existe um subconjunto finito $\Delta = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$, para todo $i \in I$. Seja $1 \leq j \leq n$. Então $\Theta \vdash_{\mathcal{F}} \gamma_j$ e então existe um subconjunto finito Δ_j de Θ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta_j) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\gamma_j)$, para todo $i \in I$. Seja $\Delta' = \cup_{j=1}^{n} \Delta_j$. Então Δ' é um subconjunto finito de Θ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta') \vdash_{\mathcal{L}_i} \delta$ para toda $\delta \in \widehat{\pi}_i(\Delta_j)$, todo $j = 1, \ldots, n$ e todo $i \in I$, pois todo $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ satisfaz Extensividade. Como cada $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ satisfaz Transitividade então $\widehat{\pi}_i(\Delta') \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\gamma_j)$, para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada $i \in I$. Usando novamente a Transitividade de $\vdash_{\mathcal{L}_i}$, inferimos $\widehat{\pi}_i(\Delta') \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$, para todo $i \in I$. Portanto $\Theta \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$.

(iii) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é finitária pela própria definição.

(iv) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é estrutural:

Considere um conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C^{\mathcal{F}})$ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$. Então, existe um conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$ para todo $i \in I$. Seja $\sigma : \mathcal{V} \to L(C^{\mathcal{F}})$ uma substituição sobre $C^{\mathcal{F}}$. Como cada π_i é um $\mathbf{Sig_1}$-morfismo, então para cada $i \in I$ existe uma substituição $\sigma_i : \mathcal{V} \to L(C^i)$ sobre C^i tal que $\widehat{\pi}_i \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_i \circ \widehat{\pi}_i$. Como cada $\mathcal{L}_i$ satisfaz Estruturalidade, então $\widehat{\sigma}_i(\widehat{\pi}_i(\Delta)) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\sigma}_i(\widehat{\pi}_i(\varphi))$, isto é, $\widehat{\pi}_i(\widehat{\sigma}(\Delta)) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{\sigma}(\varphi))$ para todo $i \in I$, onde $\widehat{\sigma}(\Delta)$ é um subconjunto finito de $\widehat{\sigma}(\Gamma)$. Portanto, $\widehat{\sigma}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{\sigma}(\varphi)$ e assim $\vdash_{\mathcal{F}}$ satisfaz Estruturalidade.

Isto mostra que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ é uma lógica. Pela própria definição de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$, cada π_i é um $\mathbf{Log_1}$-morfismo $\pi_i : \mathcal{L}^{\mathcal{F}} \to \mathcal{L}_i$. Suponha que $\mathcal{L}' = \langle C', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ é uma lógica e $f_i : \mathcal{L}^{'} \to \mathcal{L}_i$ é um $\mathbf{Log_1}$-morfismo, para cada $i \in I$. Então existe um único $\mathbf{Sig_1}$-morfismo $f : C' \to C^{\mathcal{F}}$ tal que, em $\mathbf{Sig_1}$, $\pi_i \circ f = f_i$, para cada $i \in I$, pois $\langle C^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ é o produto fraco de $\{C^i\}_{i \in I}$ na categoria $\mathbf{Sig_1}$. Suponha que $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C')$ é tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Como $\mathcal{L}^{'}$ satisfaz Finitariedade, existe um conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Como cada f_i é um $\mathbf{Log_1}$-morfismo então $\widehat{f_i}(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{f_i}(\varphi)$, para cada $i \in I$, e daí $\widehat{\pi_i \centerdot f}(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi_i \centerdot f}(\varphi)$. Por 2.1.5, temos $\widehat{\pi}_i \circ \widehat{f}(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i \circ \widehat{f}$, ou seja, $\widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\Delta)) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\varphi))$, para todo $i \in I$, onde $\widehat{f}(\Delta)$ é um subconjunto finito de $\widehat{f}(\Gamma)$. Portanto, por definição de $\vdash_{\mathcal{F}}$ temos que $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{f}(\varphi)$ e assim f é um $\mathbf{Log_1}$-morfismo $f : \mathcal{L}^{'} \to \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ tal que, em $\mathbf{Log_1}$, $\pi_1 \circ f = f_i$, para todo $i \in I$.

$\square$

2.3 Caracterizando $STPs$ em $\mathbf{Log_1}$

O resultado seguinte (publicado originalmente em [13]) fornece uma caracterização de $STPs$ em termos categoriais. Relembrando a definição de STP para uma lógica $\mathcal{L}$, uma tal estrutura é dita *pequena* se a classe I é um conjunto, e é dita *gramatical* quando cada tradução f_i provém de um morfismo em $\mathbf{Log_1}$.

Teorema 2.3.1. *Semânticas de traduções possíveis gramaticais pequenas para uma lógica $\mathcal{L}$ são o mesmo que morfismos conservativos $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{'}$, em que $\mathcal{L}^{'}$ é um produto fraco em $\mathbf{Log_1}$ de alguma família pequena de lógicas.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ uma lógica e seja P uma STP gramatical pequena para $\mathcal{L}$. A idéia é definir um morfismo conservativo $t(P) : \mathcal{L} \to L(P)$ em $\mathbf{Log_1}$, onde $L(P)$ é um produto fraco em $\mathbf{Log_1}$ de alguma família de lógicas, de modo que $t(P)$ codifica P. E, no outro sentido, dado um morfismo conservativo $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{'}$ em $\mathbf{Log_1}$, onde $\mathcal{L}^{'}$ é um produto fraco de lógicas, uma STP gramatical pequena $\mathcal{L}$ codificando f, denotada por $STP(f)$, pode ser definida de maneira tal que as atribuições t e STP são inversas uma a outra.

Assim, assumindo que $P = \langle \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ é uma STP gramatical pequena para $\mathcal{L}$, considere o produto fraco $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ em $\mathbf{Log_1}$ da família pequena $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$. Como cada f_i é um morfismo em $\mathbf{Log_1}$ então, pela propriedade universal fraca do produto fraco, existe um único morfismo $t(P) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ em $\mathbf{Log_1}$ tal que $f_i = \pi_i \centerdot t(P)$, para todo $i \in I$. Disto segue que

$$\widehat{f_i} = \widehat{\pi}_i \circ \widehat{t(P)} \ (*)$$

e esta última equação implica que $t(P)$ é um morfismo conservativo. O morfismo $t(P)$ junto com seu codomínio $L(P) := \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ codifica toda a informação sobre P: toda lógica $\mathcal{L}_i$ é obtida como codomínio de π_i, e todo morfismo f_i é obtido como $f_i = \pi_i \centerdot t(P)$.

Na outra direção, seja $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{'}$ um morfismo conservativo em $\mathbf{Log_1}$ tal que $\mathcal{L}^{'}$ é um produto fraco em $\mathbf{Log_1}$ de uma família pequena $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ de lógicas, com projeções canônicas π_i, para todo $i \in I$. Para todo $i \in I$, considere o morfismo $f_i = \pi_i \centerdot f$ em $\mathbf{Log_1}$, e defina o enquadramento de traduções possíveis gramatical pequeno $STP(f) = \langle\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}, \{\widehat{f_i}\}_{i\in I}\rangle$. Usando $(*)$ novamente, segue que $STP(f)$ é uma STP gramatical pequena para $\mathcal{L}$. Além disto, toda informação sobre f e $\mathcal{L}^{'}$ pode ser recuperada de $STP(f)$: de fato, $f = t(STP(f))$ e $\mathcal{L}^{'}$ é o produto fraco da família de lógicas de $STP(f)$. Se P é uma STP gramatical pequena para $\mathcal{L}$, então $STP(t(P)) = P$. $\square$

Capítulo 3

As categorias $\mathbf{Sig}_\omega$ e $\mathbf{Log}_\omega$

Neste capítulo propomos uma versão multifuncional das construções do capítulo anterior. A motivação para estas modificações é nosso objetivo de apresentar uma versão categorial das semânticas de traduções possíveis que possibilite traduzir os conectivos de uma assinatura para outra de maneira flexível. Apresentamos uma categoria de assinaturas proposicionais e morfismos flexíveis de assinaturas. Em seguida, introduzimos a noção de morfismo flexível de lógica e a correspondente categoria de lógicas. Fazemos um breve estudo das categorias introduzidas, e demonstramos a existência de produtos fracos. Para facilitar a analogia com o capítulo anterior, tentamos exibir os resultados em ordem análoga ao que fizemos antes.

3.1 Noções preliminares

Listamos aqui alguns fatos e definições que usaremos ao longo deste capítulo.

Definição 3.1.1. Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma *multifunção finita* $f : X \to Y$ é uma correspondência ponto-a-conjunto finito de X para

Y, ou seja, para cada $x \in X$, $f(x)$ é um subconjunto finito não vazio de Y.

No que se segue, o símbolo $\wp_f X^+$ denotará o conjunto dos subconjuntos finitos não-vazios de X. Assim, uma multifunção finita $f : X \to Y$ é nada mais que uma função $f : X \to \wp_f Y^+$. Como durante todo este trabalho nos ocuparemos apenas de multifunções finitas, diremos apenas multifunção. Definimos agora uma operação de composição $\bar{\circ}$ para multifunções.

Definição 3.1.2. Dadas multifunções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, definimos a composição $g\bar{\circ}f$ como sendo a multifunção $g\bar{\circ}f : X \to Z$ dada por $g\bar{\circ}f(x) \overset{def}{=} \cup_{y\in f(x)} g(y)$.

O resultado a seguir será usado para provar alguns resultados importantes.

Lema 3.1.3. *A operação $\bar{\circ}$ é associativa.*

Demonstração. Considere a seguinte configuração de multifunções, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$, em que X, Y, Z e W são conjuntos. Dado $x \in X$, vamos escrever $f(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ e $g(y_i) = \{z_1^i, \ldots, z_{k_i}^i\}$. Queremos mostrar que $(h\bar{\circ}g)\bar{\circ}f = h\bar{\circ}(g\bar{\circ}f)$. Note que $(g\bar{\circ}f)(x) = \cup_{y\in f(x)} g(y) = \cup_{i=1}^n g(y_i)$ e $(h\bar{\circ}g)(y) = \cup_{z\in g(y)} h(z) = \cup_{j=1}^{k_i} h(z_j)$.

Temos $((h\bar{\circ}g)\bar{\circ}f)(x) = \cup_{y_i\in f(x)} (h\bar{\circ}g)(y_i) = \cup_{i=1}^n (h\bar{\circ}g)(y_i) = \cup_{i=1}^n \cup_{z_j^i \in g(y_i)} h(z_j^i) = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^{k_i} h(z_j^i)$.

Por outro lado, $(h\bar{\circ}(g\bar{\circ}f))(x) = \cup_{z\in(g\bar{\circ}f)(x)} h(z)$. Uma vez que $z \in (g\bar{\circ}f)(x) \Leftrightarrow z \in g(y_i) \Leftrightarrow z = z_j^i$ para algum i e algum j, segue que

$\cup_{z \in (g \bar{\circ} f)(x)} h(z) = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{k_i} h(z_j^i)$.

$\square$

Se $f : X \to Y$ é uma multifunção e $A \subseteq X$, usaremos - quando conveniente - o símbolo $f(A)$ para denotar o conjunto $\cup_{a \in A} f(a)$. O símbolo $L(C)_n$ denotará o conjunto das fórmulas $\varphi \in L(C)$ tais que o conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem em φ está contido em $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Se $\varphi \in L(C)_n$, podemos escrever $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$.

3.2 A categoria $\mathbf{Sig}_\omega$

Considere a classe *Sig* das assinaturas proposicionais. Introduzimos a seguinte noção: um *morfismo flexível de assinaturas* $f : C^1 \to C^2$ de C^1 em C^2 é uma multifunção $f : |C^1| \to L(C^2)$ tal que, se $c \in C^1_n$, então para toda fórmula $\varphi \in f(c)$ tem-se $\varphi \in L(C^2)_n$. A identidade id_{C^1} é definida como a multifunção $id_{C^1} : |C^1| \to L(C^1)$ tal que $id_{C^1}(c) = \{c(p_1, \ldots, p_n)\}$, para $c \in C^1_n$. Intuitivamente, identificamos um conectivo n-ário com um conjunto finito de fórmulas (da linguagem gerada pela assinatura no contra-domínio) nas quais ocorrem exatamente as variáveis proposicionais $p_1, \ldots, p_n$. Lembrando a notação introduzida na seção anterior, um conectivo n-ário pode ser visto como um elemento de $\wp_f(L(C^2)_n)^+$.

Exemplo 3.2.1. Considere as assinaturas $C^1 = \{\neg_1, \Rightarrow\}$, $C^2 = \{\neg_2, \vee, \wedge\}$. A função f, definida a seguir, é um morfismo flexível de C^1 em C^2:

- $f(\neg_1) = \{\neg_2 p_1\}$;
- $f(\Rightarrow) = \{\neg_2 p_1 \vee p_2, \neg_2(p_1 \wedge \neg_2 p_2)\}$.

Definição 3.2.2. Seja $f : C^1 \to C^2$ um morfismo flexível de assinaturas. Definimos recursivamente sua extensão $\widehat{f}$ como a multifunção $\widehat{f} : L(C^1) \to L(C^2)$ tal que

1. $\widehat{f}(p) = \{p\}$, se $p \in \mathcal{V}$;

2. $\widehat{f}(c) = f(c)$, se $c \in C^1_0$ (ou seja, se c é uma constante de C^1);

3. $\widehat{f}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \{\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \varphi \in f(c), \psi_i \in \widehat{f}(\varphi_i)\}$, se $c \in C^1_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C^1)$.

Note que a cláusula 3 está bem definida, pois $\widehat{f}(\varphi)$ é finito, qualquer que seja φ.

Observe que a extensão de um morfismo flexível é única. De fato, seja $f : C^1 \to C^2$ um morfismo flexível e sejam $\widehat{f}, \widehat{g}$ duas extensões de f. Dada uma variável proposicional p, temos $\widehat{f}(p) = \{p\} = \widehat{g}(p)$. Se c é uma constante, vale $\widehat{f}(c) = f(c) = \widehat{g}(c)$. Considere agora $c \in C^1_n$. Temos $\widehat{f}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in f(c), \psi_i \in \widehat{f}(\varphi_i)\} \overset{Hip.ind.}{=} \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in g(c), \psi_i \in \widehat{g}(\varphi_i)\} = \widehat{g}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ e, portanto, $\widehat{g} = \widehat{f}$.

Exemplo 3.2.3. Retornando ao **Exemplo 3.2.1**, temos para cada $\varphi, \psi \in L(C^1)$,

- $\widehat{f}(\neg_1 \varphi) = \{\neg_2 \gamma \mid \gamma \in \widehat{f}(\varphi)\}$

- $\widehat{f}(\varphi \Rightarrow \psi) = \{\neg_2 \gamma \vee \delta, \neg_2(\gamma \wedge \neg_2 \delta) \mid \gamma \in \widehat{f}(\varphi), \delta \in \widehat{f}(\psi)\}$.

Agora, considere a fórmula $\varphi = (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3))$. Temos $\widehat{f}(\neg_1 \varphi) = \widehat{f}(\neg_1(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3))) = \{\neg_2 \gamma \mid \gamma \in \widehat{f}(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3))\}$. Além disto, $\widehat{f}(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3)) = \{\neg_2 p_1 \vee \psi, \neg_2(p_1 \wedge \neg_2 \psi) \mid \psi \in \widehat{f}(p_2 \Rightarrow p_3), \} = \{\neg_2 p_1 \vee (\neg_2 p_2 \vee p_3), \neg_2 p_1 \vee \neg_2(p_2 \wedge \neg_2 p_3), \neg_2(p_1 \wedge \neg_2(\neg_2 p_2 \vee p_3)), \neg_2(p_1 \wedge$

$\neg_2\neg_2(p_1 \wedge \neg_2 p_3))\}$. Assim obtemos $\widehat{f}(\neg_1\varphi) = \{\neg_2\gamma \mid \gamma \in \widehat{f}(\varphi)\} = \widehat{f}(\neg_1(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3))) = \{\neg_2(\neg_2 p_1 \vee (\neg_2 p_2 \vee p_3)), \neg_2(\neg_2 p_1 \vee \neg_2(p_2 \wedge \neg_2 p_3)), \neg_2\neg_2(p_1 \wedge \neg_2(\neg_2 p_2 \vee p_3)), \neg_2\neg_2(p_1 \wedge \neg_2\neg_2(p_1 \wedge \neg_2 p_3))\}$.

O exemplo acima sugere que devemos procurar uma notação mais adequada para expressar os fatos relativos aos objetos que estudamos. Justificam-se assim as convenções a seguir.

Notação 3.2.4. Sejam $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ subconjuntos não-vazios de $L(C^1)$. Usaremos $\Gamma(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ para denotar o conjunto $\{\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma_i \in \Gamma_i\}$. Se c é um conectivo n-ário, a expressão $c(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ será usada para denotar o conjunto $\{c(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mid \gamma_i \in \Gamma_i\}$.

Certamente temos uma noção de composição de morfismos flexíveis de assinaturas. Apresentamo-la a seguir.

Definição 3.2.5. Sejam $f : C^1 \to C^2$ e $g : C^2 \to C^3$ morfismos flexíveis de assinaturas. A composição de g e f é o morfismo flexível $g \centerdot f : C^1 \to C^3$ definido por $(g \centerdot f)(c) = \cup_{\psi \in f(c)} \widehat{g}(\psi)$.

É fácil ver, pela definição de composição, que o morfismo flexível identidade se comporta como esperado.

Podemos nos perguntar se a composição $\centerdot$ é associativa. A resposta é afirmativa, e para demonstrar isto precisaremos de alguns resultados técnicos, apontados nos lemas a seguir.

Lema 3.2.6. *Sejam $f : C^1 \to C^2$, $g : C^2 \to C^3$ morfismos flexíveis e $c \in C^1_n$. Então $g \centerdot f(c) = (\widehat{g} \circ \widehat{f})(c(p_1, \ldots, p_n))$.*

Demonstração. $\widehat{g} \circ \widehat{f}(c(p_1, \ldots, p_n)) = \cup_{\gamma \in \widehat{f}(c(p_1, \ldots, p_n))} \widehat{g}(\gamma) = \cup_{\gamma \in f(c)} \widehat{g}(\gamma) = g \centerdot f(c)$ $\square$

Lema 3.2.7. *Sejam f, g e c como no lema anterior. Vale a seguinte igualdade:* $(g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f)(c) = (\widehat{g}\bar{\circ}f)(c)$.

Demonstração. Pela definição de $\mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare}$, $g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f(c) = \cup_{\gamma \in f(c)} \widehat{g}(\gamma)$. Por definição de $\bar{\circ}$, temos $(\widehat{g}\bar{\circ}f)(c) = \cup_{\gamma \in f(c)} \widehat{g}(\gamma)$. $\square$

Lema 3.2.8. *Sejam $f : C^1 \to C^2$, $g : C^2 \to C^3$ morfismos flexíveis, e $\varphi \in L(C^1)$. Então* $\widehat{f}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))$.

Demonstração. Vale $\widehat{f}(\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in \widehat{f}(\varphi), \psi_i \in \widehat{f}(\alpha_i)\}$ pela definição de extensão. Mas por 3.2.4, $\widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) = \{\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mid \gamma \in \widehat{f}(\varphi), \gamma_i \in \widehat{f}(\alpha_i)\}$. $\square$

Lema 3.2.9. *Sejam $f : C^1 \to C^2$, $g : C^2 \to C^3$ morfismos flexíveis. Temos* $\widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f} = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}$.

Demonstração. Mostramos, por indução na complexidade de $\varphi \in L(C^1)$, que $\widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\varphi) = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\varphi)$.

Se $\varphi = p \in \mathcal{V}$, então $\widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\varphi) = \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(p) = \{p\} = \widehat{f}(p) = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(p) = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\varphi)$.

Se $\varphi = c \in C_0^1$, então $\widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\varphi) = \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(c) = g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f(c) = \widehat{f}(c) = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(c) = \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\varphi)$.

Se $\varphi = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, com $c \in C_n^1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L(C^1)$, então

$$
\begin{aligned}
\widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\varphi) &= \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&= \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(c), \psi_i \in \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\alpha_i)\} \\
&= \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f(c), \psi_i \in \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\alpha_i)\} \\
&= \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in \widehat{g}\bar{\circ}f(c), \psi_i \in \widehat{g \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} f}(\alpha_i)\} \\
&= \{\psi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \mid \psi \in \widehat{g}\bar{\circ}f(c), \psi_i \in \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\alpha_i)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ((\widehat{g}\bar{\circ}f(c)))(\widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\alpha_n)) \\
&= \widehat{g}(f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))) \\
&= \widehat{g}(\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \\
&= \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&= \widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f}(\varphi).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 3.2.10. *A composição* $\centerdot$ *é associativa.*

Demonstração. Considere a seguinte configuração $C^1 \xrightarrow{f} C^2 \xrightarrow{g} C^3 \xrightarrow{h} C^4$ em *Sig*. Temos $[h\centerdot(g\centerdot f)] \overset{cf.\ 3.2.6}{=} [\widehat{h}\bar{\circ}(\widehat{g\centerdot f})] \overset{cf.\ 3.2.9}{=} [\widehat{h}\bar{\circ}(\widehat{g}\bar{\circ}\widehat{f})] \overset{cf.\ 3.1.3}{=} [(\widehat{h}\bar{\circ}\widehat{g})\bar{\circ}\widehat{f}] \overset{cf.\ 3.2.9}{=} [(\widehat{h\centerdot g})\bar{\circ}f] \overset{cf.\ 3.2.6}{=} [(h\centerdot g)\centerdot f]$

□

Tudo junto nos dá que a classe *Sig*, tendo como morfismos os morfismos flexíveis que introduzimos, é uma categoria. De agora em diante, denotaremos esta categoria por $\mathbf{Sig}_\omega$.

Queremos investigar a existência de produtos fracos em $\mathbf{Sig}_\omega$. Para isto, considere um conjunto não-vazio I e uma coleção $\mathcal{F} = \{C^i\}_{i\in I}$ de assinaturas. Temos um candidato a produto fraco $(\mathcal{C}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I})$:

$$\mathcal{C}_k^{\mathcal{F}} = \{(\Gamma_i)_{i\in I} \mid \Gamma_i \in \wp_f(L(C^i)_k^+)\}, \text{ para } k \in \mathbb{N};$$

$$\mathcal{C}_k^{\mathcal{F}} \;\ni (\Gamma_i)_{i\in I} \overset{\pi_j}{\longmapsto} \Gamma_j \in \wp_f(L(C^j)_k^+), \text{ se } j \in I.$$

Proposição 3.2.11. *O par* $\langle \mathcal{C}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ *definido acima é um produto fraco de* $\mathcal{F}$ *em* $\mathbf{Sig}_\omega$.

Demonstração. É fácil ver que cada π_i é um $\mathbf{Sig}_\omega$-morfismo de $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ para C^i. Considere agora uma assinatura C' e morfismos $C' \xrightarrow{f_i} C^i$, para cada $i \in I$. Defina $f : C' \to \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ por $C'_n \ni c \overset{f}{\mapsto} \{(f_i(c))_{i \in I}(p_1, \ldots, p_n)\}$. Então $(\pi_i \centerdot f)(c) = \widehat{\pi}_i(f(c)) = f_i(c)$. □

Exemplo 3.2.12. Consideremos um produto fraco C em $\mathbf{Sig}_\omega$ das assinaturas C^1 e C^2 do **Exemplo 3.2.1**. Estes são alguns dos conectivos da assinatura produto:

- $(\{\neg_1 p_1\}, \{\neg_2 p_1\})$ é um conectivo unário em C.
- $(\{p_1 \Rightarrow p_2\}, \{p_1 \wedge p_2\}) \in C_2$ (ou seja, um conectivo binário em C).
- $(\{\neg_1 p_2 \Rightarrow \neg_1 p_1\}, \{\neg_2 p_1 \vee (\neg_2 p_1 \wedge p_2), p_1 \wedge p_2, p_1 \vee \neg_2 p_2, p_1 \vee \neg_2(p_2 \vee \neg_2 p_2)\})$ é um outro conectivo binário em C.

Note que, neste caso, $C_i \neq \emptyset$, se $i \geq 3$.

A definição de morfismo de assinaturas usando multifunções nos leva naturalmente à idéia de um conectivo com "múltiplas faces", idéia esta que chamamos *conectivo flexível*. Basicamente, trata-se de um conectivo que se apresenta de diferentes maneiras em diferentes contextos, mas estas diferentes apresentações guardam em comum a essência do conectivo em questão. Deste modo faz sentido pensarmos em isolar um determinado significado de um tal conectivo, obtendo assim o conceito que batizamos de *instância* de um morfismo de assinaturas. A definição formal é a seguinte:

Definição 3.2.13. Seja $f : C^1 \to C^2$ um morfismo flexível de assinaturas. Uma *instância de* f é uma função $\lambda : L(C^1) \to L(C^2)$ definida indutivamente tal que:

- $\lambda(p) = p$, se $p \in \mathcal{V}$.

- sejam $c \in C^1_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(C^1)$ tais que $\lambda(\varphi_i)$ já tenham sido definidos, $1 \leq i \leq n$. Então $\lambda(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \varphi(\lambda(\varphi_1), \ldots, \lambda(\varphi_n))$, para alguma fórmula $\varphi \in f(c)$.

O conjunto das instâncias de f será denotado por $\mathsf{Ins}(f)$.

As instâncias nos permitem particularizar um dado sentido para um conectivo, permitindo que voltemos a tratá-lo, se assim desejarmos, como se estivéssemos trabalhando na categoria $\mathbf{Sig_1}$.

Concluímos esta seção com uma observação a respeito de substituições: elas podem ser compostas com morfismos flexíveis de assinaturas. Primeiro, observe que uma substituição $\sigma : \mathcal{V} \to L(C)$ dá origem a uma substituição multifuncional $\bar{\sigma} : \mathcal{V} \to L(C)$ definida por $\bar{\sigma}(p) = \{\sigma(p)\}$. Claramente, $\bar{\sigma}$ pode ser estendida a uma única multifunção $\widehat{\bar{\sigma}} : L(C) \to L(C)$ como esperado: $\widehat{\bar{\sigma}}(\varphi) = \{\widehat{\sigma}(\varphi)\}$. Como esta associação é bastante natural, podemos identificar as substituições σ e $\bar{\sigma}$, e, conseqüentemente, também podemos identificar $\widehat{\sigma}$ e $\widehat{\bar{\sigma}}$. Daqui em diante, podemos considerar a composição de morfismos flexíveis de assinaturas e substituições (veja Definição 3.1.2). Portanto, se $f : C \to C'$ é um morfismo flexível de assinaturas e σ e σ' são substituições sobre C e C', respectivamente, então $f \mathbin{\bar{\circ}} \sigma$ e $\widehat{\sigma'} \mathbin{\bar{\circ}} f$ denotarão $f \mathbin{\bar{\circ}} \bar{\sigma}$ e $\widehat{\bar{\sigma}'} \mathbin{\bar{\circ}} f$, respectivamente.

3.3 A categoria $\mathbf{Log}_\omega$

Conforme visto no terceiro capítulo, é possível caracterizar, em alguns casos específicos, a noção de semântica de traduções-possíveis em termos categoriais. Assim, uma STP para $\mathcal{L}$ é uma tradução conservativa de $\mathcal{L}$ para um produto fraco de lógicas, em que o produto fraco é tomado em uma categoria adequada de lógicas. Isto sugere a possibilidade de se obter um resultado similar para as Coberturas por Traduções Possíveis, que introduziremos no próximo capítulo. O primeiro passo consiste em definir a categoria de lógicas adequada, e então provar que esta categoria tem produtos fracos.

Com esta motivação, nesta seção propomos a categoria $\mathbf{Log}_\omega$ de lógicas, baseada em $\mathbf{Sig}_\omega$, e provamos que $\mathbf{Log}_\omega$ tem produtos fracos. O passo fundamental é a definição de morfismos flexíveis entre lógicas.

Definição 3.3.1. Sejam $\mathcal{L}_i = \langle C^i, \vdash_i \rangle$ lógicas ($i = 1, 2$). Um *morfismo flexível de lógicas* $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ é um morfismo flexível de assinaturas $f : C^1 \to C^2$ tal que, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C^1)$ que satisfaz $\Gamma \vdash_1 \varphi$, existe uma instância λ (dependendo de Γ e φ) de f tal que $\lambda(\Gamma) \vdash_2 \lambda(\varphi)$.

O conceito introduzido acima origina uma categoria, que chamaremos $\mathbf{Log}_\omega$, cujos objetos são lógicas e cujos morfismos são morfismos flexíveis de lógicas. Vejamos que a categoria $\mathbf{Log}_\omega$ tem produtos fracos. Considere uma família pequena não-vazia $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ em $\mathbf{Log}_\omega$, $\mathcal{L}_i = \langle C^i, \vdash_i \rangle$, para todo $i \in I$. Seja $\langle \mathcal{C}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ o produto fraco de $\{C^i\}_{i \in I}$ em $\mathbf{Sig}_\omega$. É esperado que o produto fraco - se existir - deva ser construído a partir do produto fraco em **Sig**. Especificamente, somos levados a definir a lógica $\prod \mathcal{L}_i = \langle \mathcal{C}^{\mathcal{F}}, \vdash \rangle$. Por causa de nossa definição de morfismo em $\mathbf{Log}_\omega$, a relação de conseqüência $\vdash$ do produto fraco deveria ser algo como

$$\Upsilon \vdash \Psi \text{ se, e só se, existir uma instância } \lambda_i \text{ de } \pi_i \text{ tal que } \lambda_i(\Upsilon) \vdash_i \lambda_i(\Psi),$$
$$\text{para todo } i \in I.$$

No entanto, não é sempre que o objeto descrito acima é uma lógica. Então, usamos as inferências $\Upsilon \vdash \Psi$ como acima como base inferencial para a relação de conseqüência $\vdash$ de $\prod \mathcal{L}_i$ (cf. [25]). Ou seja, $\vdash$ é a menor relação de conseqüência sobre a assinatura $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ que contém tais inferências. Este é o nosso candidato a produto fraco. Claramente, cada π_i é um $\mathbf{Log}_\omega$-morfismo $\pi_i : \prod \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_i$. Precisamos mostrar sua universalidade.

Suponha que temos uma lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e $\mathbf{Log}_\omega$-morfismos $f_i : C \to C^i$ para cada $i \in I$. Se $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$ é tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, então existem instâncias μ_i de f_i satisfazendo $\mu_i(\Gamma) \vdash_i \mu_i(\varphi)$. Defina uma função $f : C \to \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ por $f(c) = \{(f_i(c))_{i \in I}(p_1, \ldots, p_n)\}$. É fácil verificar que f é um $\mathbf{Log}_\omega$-morfismo $f : \mathcal{L} \to \prod \mathcal{L}_i$ tal que $\pi_i \centerdot f = f_i$ para todo $i \in I$. Isto prova o seguinte:

Proposição 3.3.2. *O par $\langle \prod \mathcal{L}_i, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ definido acima é um produto fraco de $\mathcal{F}$ em $\mathbf{Log}_\omega$.*

Vejamos brevemente o que fizemos até este ponto: apresentamos alguns fatos já conhecidos sobre combinação de lógicas e sobre as categorias $\mathbf{Log_1}$ e $\mathbf{Sig_1}$. Depois tentamos generalizar as construções vistas substituindo morfismos funcionais por *morfismos flexíveis* (multifuncionais), obtendo assim as categorias $\mathbf{Sig}_\omega$ e $\mathbf{Log}_\omega$. Verificamos que estas categorias têm estrutura suficiente para acomodar as construções que pretendemos introduzir. No próximo capítulo prosseguiremos na tentativa de obter para o caso multifuncional resultados tão expressivos quanto os já conhecidos para $\mathbf{Log_1}$.

Capítulo 4

Coberturas por traduções possíveis

4.1 Motivação

No capítulo anterior vimos como construir categorias de assinaturas e lógicas usando multifunções, e vimos que estas categorias têm estrutura suficiente para expressar algumas noções que nos interessam. Neste capítulo esboçaremos os primeiros passos no sentido de obter a "versão multifuncional" adequada da noção de Semântica de Traduções Possíveis para uma lógica.

Lembremos que um enquadramento de traduções possíveis inclui uma família de traduções lógicas. Nosso objetivo é substituir esta família por um subconjunto de instâncias de um único morfismo de assinaturas.

4.2 Coberturas por Traduções Possíveis

Definição 4.2.1. Seja $\mathcal{L} = \langle C, \vdash \rangle$ uma lógica. Uma *cobertura de* $\mathcal{L}$ *por traduções possíveis* (uma CTP para $\mathcal{L}$) é uma estrutura $P = \langle f, \Lambda, \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle$ tal que:

- $f : C \to C^1$ é um morfismo flexível de assinaturas.
- Λ é um subconjunto de $\mathsf{Ins}(f)$.
- $\mathcal{L}_\lambda = \langle C^1, \vdash_\lambda \rangle$ é uma lógica para cada $\lambda \in \Lambda$.
- $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\lambda$ é uma tradução lógica, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Os elementos de Λ são chamados *traduções possíveis*.

Toda CTP define uma lógica de modo natural:

Definição 4.2.2. Dada uma lógica $\mathcal{L} = \langle C, \vdash \rangle$ seja $P = \langle f, \Lambda, \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle$ uma CTP para $\mathcal{L}$. A *lógica associada a* P é o par $\mathcal{L}_P = \langle C, \vdash_P \rangle$ tal que $\vdash_P$ é um subconjunto de $\wp(L(C)) \times L(C)$ definido do seguinte modo:

$$\Gamma \vdash_P \varphi \text{ se, e só se, } \lambda(\Gamma) \vdash_\lambda \lambda(\varphi), \text{ para todo } \lambda \in \Lambda$$

Observe que $\vdash \subseteq \vdash_P$, isto é: $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \vdash_P \varphi$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$. Isto sugere a seguinte definição:

Definição 4.2.3. Seja P uma CTP para $\mathcal{L} = \langle C, \vdash \rangle$. Dizemos que P é *adequada para* $\mathcal{L}$ se $\vdash = \vdash_P$, ou seja: $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \vdash_P \varphi$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(C)$.

Assim, se P é uma CTP adequada para $\mathcal{L}$ então $\mathcal{L}$ é decomposta nos fatores $\mathcal{L}_\lambda$ através das traduções λ.

Como funções podem ser vistas como multifunções, as CTPs generalizam a noção de semântica de traduções-possíveis e, portanto, elas são uma generalização das semânticas matriciais e semânticas não-determinísticas (cf. [13]). Por outro lado, são um caso particular das representações por traduções possíveis (cf. [27]).

Exemplo 4.2.4. A lógica da inconsistência formal **Ci** definida sobre a assinatura C tal que $C_1 = \{\neg, \circ\}, C_2 = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}, C_k = \emptyset$ se $k \geq 3$ pode ser obtida a partir de **mbC** (ver 1.2) adicionando-se os três axiomas-esquema a seguir (cf. [16] e [15]):

(ci) $\neg \circ \alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$

$\mathbf{(cc)_n}$ $\circ\neg^n \circ \alpha \qquad (n \geq 0)$

(cf) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$

Vamos reconstruir nos termos de nosso trabalho uma semântica de traduções-possíveis para **Ci** definida em [28].

Seja C^1 a assinatura tal que $C_1^1 = \{\neg_1, \neg_2, \circ_1\}$, $C_2^1 = \{\vee_1, \wedge_1, \Rightarrow_1\}$, $C_k^1 = \emptyset$ se $k \geq 3$. O morfismo flexível de assinaturas $f : C \to C^1$ é definido por

(1) $f(\#) = \{(p_1 \#_1 p_2)\}$ para $\# \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$;

(2) $f(\neg) = \{\neg_1 p_1, \neg_2 p_1\}$;

(3) $f(\circ) = \{\circ_1 p_1, \circ_1 \neg_1 p_1, \circ_1 \neg_2 p_1\}$.

Seja Λ o conjunto das instâncias λ de f que satisfazem as seguintes cláusulas:

$(tr0)$ $\lambda(p) = p$, se $p \in \mathcal{V}$;

$(tr1)$ $\lambda(\varphi \# \psi) = (\lambda(\varphi) \# \lambda(\psi))$, para $\# \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$;

$(tr2)$ $\lambda(\neg\varphi) \in \{\neg_1 \lambda(\varphi), \neg_2 \lambda(\varphi)\}$;

$(tr3)$ $\lambda(\circ\varphi) \in \{\circ_1 \lambda(\varphi), \circ_1 \lambda(\neg\varphi)\}$;

$(tr4)$ se $\lambda(\neg\varphi) = \neg_1 \lambda(\varphi)$ então $\lambda(\circ\varphi) = \circ_1 \lambda(\neg\varphi)$.

Então, considerando $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}'$ para todo $\lambda \in \Lambda$, em que $\mathcal{L}'$ é a lógica matricial definida sobre C^1 dada pelas matrizes abaixo, a estrutura $P = \langle f, \Lambda, \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle$ é uma CTP adequada para **Ci**.

$\vee$	T	t	F
T	t	t	t
t	t	t	t
F	t	t	F

$\rightarrow$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	t	t	t

$\wedge$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	F	F	F

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\circ$
T	F	F	T
t	F	t	F
F	T	T	T

4.3 Considerações finais

Iniciamos nosso trabalho tomando por base o tratamento categorial já existente para as Semânticas de Traduções Possíveis, e a partir deste construímos um outro tratamento visando ampliar o espectro de aplicação desta importante ferramenta. Para acomodar nossas construções, introduzimos as categorias $\mathbf{Sig}_\omega$ e $\mathbf{Log}_\omega$. Investigamos algumas propriedades destas categorias, afim de verificar que é possível expressar nelas as construções que introduzimos. Feitas estas verificações, apresentamos a definição de Cobertura por Traduções Possíveis para uma lógica $\mathcal{L}$, e exibimos um exemplo concreto de uso desta ferramenta.

Uma continuação natural do presente trabalho consiste em verificar a possibilidade de se caracterizar as CTPs como traduções conservativas em um produto fraco de lógicas em $\mathbf{Log}_\omega$, generalizando assim o resultado conhecido para STPs (cf. [13]). Uma outra possível direção é estudar propriedades do funtor de esquecimento $\mathcal{N} : \mathbf{Log}_\omega \to \mathbf{Sig}_\omega$ afim de se fazer *fibring* de lógicas em $\mathbf{Sig}_\omega$. É natural também que se tente definir uma categoria de CTPs, o que envolve, entre outras coisas, a definição de composição de coberturas.

Além destes casos gerais, pode ser interessante focar casos mais particulares, como a situação em que se tem uma cobertura em que as traduções envolvidas possuem o mesmo contra-domínio (ou seja, as traduções são todas para uma mesma lógica), ou um enfraquecimento da noção de CTP, pedindo a preservação apenas de teoremas.

Um outro caminho que se pode tomar na continuação do estudo das CTPs é a abordagem via funtores representáveis em $\mathbf{Log_1}$. Conforme exporemos brevemente nos parágrafos abaixo (onde apresentaremos uma definição de instância de morfismo de assinaturas equivalente à que propusemos no capítulo anterior), os funtores $\mathbf{Sig_1}(C, -)$ (em que C é uma assinatura) fornecem informações sobre conjuntos de instâncias de morfismos em $\mathbf{Sig}_\omega$. O objetivo é fazer algo análogo para $\mathbf{Log}_\omega$.

Observe que dados um morfismo de assinaturas f em $\mathbf{Sig}_\omega$ e um conectivo c, o conjunto $f(c)$ indica quais são as possíveis escolhas que temos para traduzir o conectivo c. Muitas vezes é desejável que uma dada escolha seja mantida durante as considerações envolvendo o conectivo em questão. Isto nos leva ao conceito que chamaremos *instância* de um morfismo de assinaturas. A discussão precedente indica que cada instância de morfismo de $\mathbf{Sig}_\omega$ deve ser um morfismo de $\mathbf{Sig_1}$ compatível com o morfismo original, no sentido de que a imagem de um dado conectivo por uma instância deve ser um subconjunto unitário da imagem deste mesmo conectivo pelo morfismo multifuncional. Portanto a definição deve ser como a seguinte.

Definição 4.3.1. Seja $f \in \mathbf{Sig}_\omega(C^1, C^2)$ um morfismo de assinaturas em $\mathbf{Sig}_\omega$. Uma *instância* de f é um morfismo $\lambda :\mid C^1 \mid \to L(C^2)$ em $\mathbf{Sig_1}$ tal que para todo $c \in\mid C^1\mid$ vale $\lambda(c) \in f(c)$.

Como instâncias são morfismos de $\mathbf{Sig_1}$, podemos considerar as extensões de instâncias, ou seja, funções $\widehat{\lambda}$ levando fórmulas em fórmulas e respeitando a escolha representada pela instância λ. Em particular, a extensão de uma instância fixa constantes e variáveis proposicionais, e seu efeito sobre uma fórmula pode ser descrito recursivamente da seguinte maneira: se c é conectivo n-ário e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são fórmulas para as quais $\widehat{\lambda}(\varphi_i)$ já foi definido para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\widehat{\lambda}(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = (\lambda(c))(\widehat{\lambda}(\varphi_1), \ldots, \widehat{\lambda}(\varphi_n))$.

Observamos acima que uma instância é um morfismo em $\mathbf{Sig_1}$. A recíproca desta afirmação também é válida. De fato, seja λ um morfismo em $\mathbf{Sig_1}$. Como toda função é uma multifunção (via a identificação da imagem de um elemento com o conjunto unitário cujo único elemento é esta imagem), segue que λ pode ser vista como um morfismo em $\mathbf{Sig}_\omega$. Como a identificação mencionada acima é muito natural, usaremos o mesmo símbolo para nos referirmos a uma instância como morfismo em $\mathbf{Sig_1}$ e como morfismo em $\mathbf{Sig}_\omega$, e só faremos distinção quando absolutamente necessário. Além desta inclusão trivial dos morfismos em $\mathbf{Sig_1}$ nos morfismos em $\mathbf{Sig}_\omega$, existe também a possibilidade de λ ser uma instância própria de um morfismo multifuncional f (por instância *própria* queremos dizer que existe algum conectivo c tal que $\lambda(c)$ está propriamente contido em $f(c)$, ou seja, f não é uma função).

O parágrafo acima sugere que pode ser interessante considerar uma aplicação Ins que leva morfismos em $\mathbf{Sig}_\omega$ no conjunto de instâncias deste morfismo. Segue da discussão anterior que o conjunto formado pelas instâncias de todos os morfismos entre duas assinaturas C e C' é exatamente o conjunto dos morfismos *funcionais* entre estas assinaturas, mas agora olhadas como objetos de $\mathbf{Sig_1}$. Ou seja, vale a seguinte igualdade: $\cup_{f\in\mathbf{Sig}_\omega(C,C')}Ins(f) = \mathbf{Sig_1}(C,C')$. Fixemos agora a assinatura de partida C e deixemos variar a assinatura de chegada, ou seja, consideremos morfismos multifuncionais do formato $f : C \to -$. A igualdade deduzida anteriormente torna-se $\cup_{f\in\mathbf{Sig}_\omega(C,-)}Ins(f) = \mathbf{Sig_1}(C,-)$, o que nos mostra que certos conjuntos de instâncias de morfismos podem ser descritos pela parte objeto de funtores representáveis em $\mathbf{Sig_1}$. Na tentativa de reduzir o estudo destes conjuntos de instâncias ao entendimento dos funtores $\mathbf{Sig_1}(C,-)$, devemos considerar uma noção de passagem entre conjuntos do tipo $\cup_{f\in\mathbf{Sig}_\omega(C,C')}Ins(f)$, algo como uma aplicação que leva um par $\langle\cup_{f\in\mathbf{Sig_1}(C,C')}Ins(f), g \in \mathbf{Sig}_\omega(C',C'')\rangle$ no conjunto $\cup_{f\in\mathbf{Sig}_\omega(C,C')}Ins(g\circ f)$. Esta aplicação coincide com a parte morfismo de $\mathbf{Sig_1}(C,-)$ avaliada em $g \in \mathbf{Sig}_\omega(C',C'')$, produzindo um morfismo $\mathbf{Sig_1}(C,g) : \mathbf{Sig_1}(C,C') \to \mathbf{Sig_1}(C,C'')$, que leva $f \in \mathbf{Sig_1}(C,C')$ em $g\circ f \in \mathbf{Sig_1}(C,C'')$. No caso particular em que $g = id_C$, conseguimos uma aplicação de $\mathbf{Sig_1}(C,C)$ em si mesmo, e a imagem de $h : C \to C$ por esta aplicação é o morfismo $g\circ h = id_C \circ h = h$. Portanto a aplicação que obtivemos tomando $g = id_C$ é a identidade do objeto $\mathbf{Sig_1}(C,C)$. Já no caso em que tomamos $g = h\circ l$, onde $C' \xrightarrow{l} C'' \xrightarrow{h} C'''$, ganhamos uma aplicação de $\mathbf{Sig_1}(C, C')$ em $\mathbf{Sig_1}(C, C''')$ que leva $k \in \mathbf{Sig_1}(C, C')$ em $h \circ l \circ k = h \circ (l \circ k) = \mathbf{Sig_1}(C, h)(\mathbf{Sig_1}(C, l)(k)) = (\mathbf{Sig_1}(C, h) \circ \mathbf{Sig_1}(C, l))(k)$. Isto nos mostra que a passagem entre os conjuntos de instâncias acima considerados é exatamente a parte morfismo de $\mathbf{Sig_1}(C, -)$. Concluímos destas observações que é possível obter informações sobre instâncias de morfismos em $\mathbf{Sig}_\omega$ estudando funtores representáveis em $\mathbf{Sig_1}$.

Por fim, há ainda a possibilidade de se adicionar elementos topológicos ao estudo das $CTPs$. Uma motivação para este estudo vem da nomenclatura de nossas construções: temos coberturas, lógicas compactas, podemos pensar em subcoberturas finitas de uma cobertura dada (definida de maneira natural, através da inclusão dos subconjuntos de instâncias de cada uma das coberturas). É natural, portanto, nos perguntarmos se é verdade que uma lógica é compacta se e só se toda cobertura adequada para esta lógica admite subcobertura finita, ou investigar modificações neste enunciado para torná-lo verdadeiro. Pode ser também interessante introduzir uma topologia no conjunto das instâncias, o que nos daria uma noção rudimentar de proximidade entre estas. Isto é bastante natural, pois olhando um morfismo e suas instâncias como uma árvore, já temos uma certa medida de proximidade entre as várias formas de se traduzir conectivos e fórmulas. No entanto, um estudo deste tipo não será levado a efeito neste trabalho.

Apêndice 1: Forma lógica

Conforme explicado na Introdução, a razão de ser deste apêndice encontra-se na possível relação entre as Coberturas por Traduções Possíveis e o abandono por Wittgenstein da noção de forma lógica em favor da noção de jogos de linguagem. Nossas principais referências para esta seção são [29], [30] e [31].

4.4 Linguagem formal e linguagem natural

As *proposições* são objetos de grande importância para a lógica, pois são elas que dão sentido aos argumentos, permitindo o estudo da relação de *conseqüência lógica* entre as premissas e a conclusão. No entanto, não temos acesso direto às proposições: tudo o que temos são *sentenças*, que representam as primeiras. Assim, ao estudar as inferências lógicas, estamos lidando basicamente com sentenças. Estas, por sua vez, podem ser apresentadas de diversas maneiras, como a linguagem natural (por exemplo, o português, o francês, o russo) e a linguagem formal. Desta maneira, é necessário escolher um formato padrão de representação das proposições, ou seja, escolher uma linguagem na qual escreveremos as sentenças. Uma opção óbvia é uma linguagem natural qualquer, dada nossa afinidade com este tipo de linguagem. No entanto, existem alguns inconvenientes nesta escolha, dentre os quais destacamos:

- Ambigüidade léxica: Algumas palavras têm mais de um significado. Quando uma palavra com esta característica ocorre duas vezes em uma mesma construção, temos um possível caso de ambigüidade léxica. Por exemplo, o argumento "João comprou uma manga. Logo, João comprou uma manga.", que é obviamente válido (desde que fixemos um único sentido para a palavra "manga"), torna-se inválido se interpretarmos a primeira ocorrência de "manga"como "fruto da mangueira"e a segunda como "parte do eixo dum veículo que se encontra dentro da caixa de graxa e recebe todo o peso do carro".

- Ambigüidade estrutural: Considere as seguintes frases: "Crianças que recebem leite materno freqüentemente são mais sadias"; "Aquela velha senhora encontrou o garotinho em seu quarto". Ambas podem ser interpretadas de mais de uma maneira, e todas as interpretações são razoáveis. Observe que as duas frases são impecáveis do ponto de vista gramatical.

- Uma mesma proposição pode ser enunciada de maneiras muito diferentes em linguagem natural. Por exemplo, "João ama Maria"e "Maria é amada por João"são sentenças distintas, mas expressam uma mesma proposição.

A adoção de uma linguagem formal bem construída permite evitar os problemas mencionados acima.

4.5 Formalização e o conceito de *Forma Lógica*

A escolha de uma linguagem formal para examinar inferências lógicas tem um lado pragmático muito claro, o de permitir um tratamento unificado e simplificado dos argumentos, escapando de problemas comuns à linguagem natural. Além disto, a formalização permite ver ligações que ficavam ocultas na linguagem natural. Por exemplo, uma formalização para "Todo homem é mortal"é $\forall x(Homem(x) \rightarrow Mortal(x))$. Na sentença formalizada ocorre uma implicação, que estava oculta na frase original.

Dentre as várias inferências com que lidamos, existem algumas que são inválidas e outras que são válidas. A causa da validade (ou de sua ausência) pode estar ligada ao formato da inferência ou ao significado das palavras nela presentes. Consideremos os seguintes exemplos:

Se chover, a rua ficará molhada.
Está chovendo.
Logo, a rua ficará molhada.

Todo humano é mamífero.
Logo, Tarzan é mamífero.

O primeiro argumento é um caso particular da regra *modus ponens*. Dada uma formalização deste argumento, ao substituirmos as variáveis por quaisquer objetos (desde que substituamos ocorrências da mesma variável pelo mesmo objeto), obtemos um argumento ainda válido. Já no segundo caso isto não é verdade. Se substituirmos "Tarzan"por "o ipê amarelo do jardim", obtemos a conclusão falsa de que "o ipê amarelo do jardim"é mamífero. Mas também poderíamos ter substituído "humano"e "mamífero"por "árvore"e "vegetal", e assim obteríamos uma conclusão verdadeira. Isto mostra que no segundo argumento existe uma dependência do contexto e do sentido das palavras *humano, mamífero e Tarzan*. Já no primeiro argumento parece não haver uma dependência semelhante. Mais precisamente, o que parece garantir a validade do primeiro argumento é seu formato. A este aspecto formal que garante sua validade chama-se *forma lógica*.

Pode-se pensar na forma lógica de uma sentença como a estrutura que estabelece como os sentidos das partes determinam o sentido da sentença como um todo. Idealmente, o conceito de forma lógica permitiria uma distinção simples entre os argumentos válidos e os inválidos, já que a validade seria conseqüência do formato do argumento. Assim teríamos mais um motivo para preferir linguagens formais a naturais: na linguagem natural, muitas vezes alguns argumentos paracem seguros quando não o são, e alguns argumentos válidos podem parecer inválidos. Isto ocorreria porque a linguagem natural não evidenciaria a forma lógica da sentença.

Tendo em vista esta possível classificação dos argumentos a partir de seu formato, a busca por uma linguagem formal ideal passou a ser a busca pela linguagem que melhor evidenciasse a forma lógica das sentenças.

4.6 Forma lógica: de Aristóteles a Wittgenstein

Os trabalhos de lógica de Aristóteles são o primeiro estudo sistematizado de lógica da cultura ocidental. Neles surge pela primeira vez a tentativa de se obter um critério puramente formal para a validade de inferências. Neste sentido merece destaque a silogística aristotélica, teoria que trata de um tipo específico de inferência: aquelas com exatamente duas premissas - apresentando um termo em comum - e em cuja conclusão figuravam os termos não compartilhados pelas premissas.

Para Aristóteles, as sentenças presentes nos silogismos deveriam apresentar aquilo que mais tarde veio a ser chamado de *forma categórica*, ou seja, a estrutura sujeito-cópula-predicado. O que estava por trás desta suposição era a crença de que deveria haver alguma similaridade entre o modo como pensamos e o modo como expressamos as proposições (para Aristóteles, os sons falados simbolizavam as "afecções da alma").

Diferentemente do que afirmara Kant[1], a lógica sofreu modificações e foram obtidos avanços durante a Idade Média. Entre outros tópicos, os lógicos medievais discutiram a relação entre lógica e gramática. Isto era visto por alguns deles como uma tentativa de identificar uma linguagem mental comum a todos os seres humanos. Acreditava-se que a linguagem falada poderia revelar algumas caraterísticas lógicas essenciais das proposições. No entanto, havia clareza de que nem todos os aspectos gramaticais refletiam aspectos lógicos: Ockham, por exemplo, sustentava que uma linguagem mental não precisaria das declinações existentes no latim, e que os lógicos poderiam, portanto, desconsiderar este aspecto da linguagem falada. Porém, estas diferenças entre a lógica e a linguagem falada foram sempre consideradas de menor importância, e a idéia de uma possível relação entre as duas ganhava cada vez mais crédito. Sendo assim, era natural esperar que a forma lógica de uma proposição fosse a forma gramatical de alguma sentença (possivelmente mental, e não exatamente da linguagem falada).

Outra contribuição à lógica ocorrida na era medieval foi a redução da lógica silogística a dois princípios: *dictum de omni* (o que é dito universalmente de um sujeito é afirmado de tudo o que está contido nele) e *dictum de nullo* (o que é negado universalmente de um sujeito é negado também de

[1] *Crítica da Razão Pura*, segunda edição, prefácio

tudo o que está contido neste sujeito). Apesar de obterem progressos como este, os lógicos medievais também se depararam com dificuldades. Em especial, quantificação sobre predicados e proposições envolvendo relações são dois pontos que nunca foram satisfatoriamente elucidados. Para contornar estas dificuldades foi necessário abrir mão de uma idéia que vinha desde os trabalhos de Aristóteles.

Frege mostrou como contornar alguns dos pontos problemáticos destacados acima. Sua idéia central era que as proposições tinham uma estrutura do tipo *função-argumento*, em vez de *sujeito-predicado*. Para ele, as ambigüidades e os problemas encontrados pelos lógicos medievais eram evidências de que as linguagens naturais não são apropriadas para representar com precisão proposições e relações inferenciais. Frege buscou então uma linguagem adequada a este propósito. Isto não significava negar toda e qualquer qualidade da linguagem natural: apenas apontava um objetivo para o qual ela não era conveniente. Na visão fregeana, a forma lógica de uma proposição se manifesta na estrutura de uma sentença de uma linguagem formal ideal - que ele chamou de *Begriffsschrift*, que pode ser traduzido como Conceitografia - sendo que as sentenças de tal linguagem devem exibir a estrutura função-argumento, diferindo portanto da estrutura gramatical exibida pelas sentenças que usamos na comunicação habitual.

As idéias fregeanas se mostraram muito poderosas, e isto ficou claro na formalização e nos estudos feitos por Frege dos axiomas da aritmética de Dedekind-Peano. As inovações introduzidas foram tão eficazes que exercem até hoje grande influência na maneira de se escrever (e conseqüentemente na maneira de se fazer) lógica.

Depois de Frege, muitos filósofos, lógicos e lingüistas se dedicaram ao estudo da noção de forma lógica. Como este texto não tem o objetivo de ser uma exposição rigorosa e completa acerca da forma lógica, permitimo-nos dar um salto histórico e ir diretamente ao filósofo que nos interessa. Passemos então ao pensamento de Ludwig Wittgenstein.

A obra de Wittgenstein pode ser vista como dividida em dois momentos: um primeiro momento, marcado pelo *Tractatus logico-philosophicus*; e um segundo momento, marcado pelas *Investigações Filosóficas*. A forma lógica era considerada como estrutura fundamental no *Tractatus*, pois nesta fase Wittgenstein considerava as proposições como sendo estruturalmente isomorfas aos fatos que representam, e era a forma lógica que garantia a perfeita superposição do mundo, da linguagem e do pensamento. Isto levou Wittgenstein a afirmar que vários dos problemas filosóficos poderiam ser dissolvidos se entendêssemos corretamente as formas lógicas de nossas afirmações, revelando que estes problemas seriam, na verdade, confusões sobre como a linguagem está relacionada com o mundo.

No segundo momento, das *Investigações* , Wittgenstein adota uma nova concepção de proposição - ela deixa de ser um modelo exato da realidade para ser uma forma inexata de representação, cujo grau de adequação não depende mais de uma isomorfia natural entre a proposição e o fato representado, mas sim das circunstâncias em que a proposição é utilizada, das diferentes "formas de vida"em que a linguagem é usada. Desta forma, o significado de uma palavra deixa de ser único, e cada significado tomará como apoio uma situação determinada de emprego das palavras, isto é, aquilo que Wittgenstein chama um "jogo de linguagem". Com a palavra "jogo", o filósofo procura evidenciar a multiplicidade de atividades nas quais a linguagem se insere; ao mesmo tempo, esta expressão salienta o elemento essencialmente flexível da linguagem - por oposição à rigidez da forma lógica.

O leitor deve ter percebido como a relação entre forma lógica e jogos de linguagem lembra a relação existente entre os morfismos de $\mathbf{Sig_1}$ e os de $\mathbf{Sig}_\omega$. Saber até que ponto se pode levar esta analogia (que nos foi apontada pelo Prof. Walter Carnielli) é um problema que exige conhecimentos que de que o autor deste trabalho não dispõe no momento. Contentamo-nos em levantar esta interessante questão, e reconhecendo nossa ignorância para respondê-la, nos confortamos com as seguintes palavras de Wittgenstein no *Tractatus* : "Sobre aquilo que não se pode falar, deve-se calar".

Apêndice 2: Noções básicas de Teoria de Categorias

4.7 Definição e exemplos

Definição 4.7.1. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ é composta pelo seguinte:

1) uma coleção $\mid \mathcal{C} \mid$, cujos elementos são chamados *objetos* de $\mathcal{C}$;

2) uma coleção de *morfismos* satisfazendo:

i) para cada par de objetos $A, B \in \mid \mathcal{C} \mid$, existe uma classe de morfismos de A em B (denotada por $Hom_{\mathcal{C}}$(A,B), ou simplesmente $Hom(A, B)$, quando a categoria estiver subentendida), munida das operações *dom* e *cod*, que a cada morfismo em $\mathcal{C}$ associam, respectivamente, seu domínio e seu contra-domínio. Se $f \in Hom(A, B)$, escreveremos $f : A \to B$.

ii) existe uma operação parcial de composição entre morfismos: se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos, então existe em $\mathcal{C}$ o morfismo $g \circ f$: $A \to C$.

iii) a composição definida em ii) é associativa.

iv) para cada objeto A, existe o morfismo id_A: $A \to A$ (identidade em A) tal que se $f : A \to B$ e $g : C \to A$ são morfismos, então $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é *pequena* se $|\ \mathcal{C}\ |$ e a coleção de morfismos forem conjuntos. $\mathcal{C}$ é *localmente pequena* se, para quaisquer objetos A, B de $\mathcal{C}$, $Hom(A, B)$ é um conjunto.

Um recurso gráfico de grande utilidade no estudo da Teoria de Categorias são os diagramas. Abaixo seguem alguns exemplos de diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] & A \\ & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

Formalmente, um *diagrama* em $\mathcal{C}$ é um par $\mathbf{D} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ tal que $\mathcal{O} = \{A_i\}_{i\in I}$ é uma família de objetos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i,j\in I} Hom(A_i, A_j)$ é uma coleção de morfismos entre objetos de $\mathcal{O}$. Um diagrama é dito finito quando contém finitos objetos e morfismos. Os diagramas acima representam as condições ii) e iv) do item 2 da Definição 3.1.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de categorias.

• A categoria **SET** é categoria cujos objetos são conjuntos e cujos morfismos são funções entre conjuntos.

• **Top** é a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas.

• Na categoria **Man**, os objetos são variedades diferenciáveis e os morfismos são funções diferenciáveis.

• As categorias **Grp**, **Rng** e **Mon** têm por objetos, respectivamente, grupos, anéis e monóides. Em cada uma delas, os morfismos são os homomorfismos da estrutura considerada.

• Fixado um corpo $\mathbb{K}$, podemos contruir a categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, na qual os objetos são os espaços vetorias sobre $\mathbb{K}$ e os morfismos são as transformações lineares entre estes espaços.

• Dado um *poset* P, podemos vê-lo como uma categoria $\mathbf{C_P}$, em que $|\mathbf{C_P}| = P$ e, para todos $x, y \in P$,

$$Hom(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{se } x \leq y \\ \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como caso particular desta construção, ressaltamos que uma topologia $\Omega(X)$ pode ser vista como uma categoria, dado que $(\Omega(X), \subseteq)$ é um *poset*.

4.8 Morfismos

Vamos agora observar o comportamento dos morfismos em uma categoria. Nossa motivação é encontrar generalizações de propriedades das funções (morfismos em **SET**), como injetividade e sobrejetividade.

Uma função $f : A \to B$ é dita injetiva se $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. É fácil ver que $f : A \to B$ é injetiva se, e só se, para todo par de funções $f, g : X \to A$ tais que $f(g(x)) = f(h(x))$, para todo $x \in X$, tem-se $g(x) = h(x)$. Ou seja, na igualdade $f \circ g= f \circ h$, podemos cancelar f em ambos os lados e concluir $g = h$.

Motivados pela observação precedente, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *monomorfismo* se, para todo par de morfismos $g, h : X \to A$ tal que $f \circ g= f \circ h$, então $g = h$.

Notemos agora que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se, para todo $y \in B$, existir $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como no caso de funções injetivas, é rotineiro verificar-se que $f : A \to B$ é sobrejetiva se, e somente se, para todo par de funções $g, h : B \to X$ tais que $g(f(a)) = h(f(a))$ para todo $a \in A$, então $g(b) = h(b)$ para todo $b \in B$. Ou seja, na igualdade $g \circ f= h \circ f$, podemos cancelar f e obter $g = h$.

A fim de generalizar a noção de função sobrejetiva, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ é um *epimorfismo* se, para todo par de morfismos

$g, h : B \to X$ tal que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$. Observe que os conceitos de monomorfismo e epimorfismo são duais.

Em **SET**, uma função é dita bijetiva quando existe uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(a)) = a$ e $f(g(b)) = b$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Dizemos que g é a inversa de f, e a denotamos por f^{-1}.

A generalização de função bijetiva é feita do seguinte modo: um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é dito um *isomorfismo* se existe um morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Quando existe o morfismo g, denotamo-lo por f^{-1}, e neste caso dizemos que A e B são isomorfos (escrevemos $A \simeq B$).

É importante observar que em **SET**, isomorfismo significa (simultaneamente) monomorfismo e epimorfismo. Isto já não vale para outras categorias. Por exemplo, em **Mon** existem monomorfismos que são epimorfismos mas não possuem inversa, não sendo, portanto, isomorfismos.

4.9 Construções universais básicas

Apresentamos agora definições que generalizam construções existentes em **SET**. Observe que nas definições a seguir sempre há uma condição de unicidade. Chama-se *propriedade universal fraca* à propriedade obtida a partir de uma propriedade universal, porém sem se exigir a unicidade. Fixamos uma categoria $\mathcal{C}$ arbitrária.

O *produto* dos objetos $A, B \in \mid \mathcal{C} \mid$ é um par $(A \times B, \{\pi_1, \pi_2\})$ (onde $A \times B \in \mid \mathcal{C} \mid$ e π_1: $A \times B \to A$ e π_2: $A \times B \to B$ são morfismos) satisfazendo a seguinte propriedade universal: se $(C, \{f_1, f_2\})$ é um par formado por um objeto de $\mathcal{C}$ e dois morfismos f_1: $C \to A$ e f_2: $C \to B$, então existe um único morfismo $\langle f_1, f_2 \rangle$:$C \to A \times B$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B \\
 & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "<f_1{,}f_2>"'] &
\end{tikzcd}
$$

É importante fazer as seguintes observações:

i) O produto é único a menos de isomorfismo (ou seja, se existem dois pares satisfazendo a definição de produto, então estes dois pares são isomorfos).

ii) $A \times B \simeq B \times A$.

iii) π_1 e π_2 são epimorfismos.

Também existe uma definição de produto para morfismos: se $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$, então o morfismo $f \times g$: $A \times B \to A' \times B'$ é o único morfismo tal que o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \times B \arrow[dll, "\pi_1"'] \arrow[drr, "\pi_2"] \arrow[ddll, "f \circ \pi_1"] \arrow[ddrr, "g \circ \pi_2"'] \arrow[ddd, "f \times g"] & & \\
A \arrow[d, "f"'] & & & & B \arrow[d, "g"] \\
A' & & & & B' \\
 & & A' \times B' \arrow[ull, "\pi_1'"] \arrow[urr, "\pi_2'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

A noção de produto genereliza justamente a noção de produto cartesiano de conjuntos. Tomando o conceito dual, que chamamos coproduto, obtemos a generalização da noção de união disjunta. Mais especificamente, o *coproduto* de $A, B \in \mathcal{C}$ é o dual do produto destes mesmos objetos, e o denotamos por $A\coprod B$. O morfismo que realiza a universalidade do diagrama associado à definição é denotado por $[f_1, f_2]$.

A versão categorial de maior subconjunto do domínio em que duas funções de mesmos domínio e contra-domínio coincidem é chamada *equalisador*. Dados morfismos $f, g : A \to B$, o equalisador de f e g é um par (E, i) (com $E \in\mid \mathcal{C} \mid$ e $i : E \to A$ satisfaz $f \circ i = g \circ i$), tal que se (C, h) é tal que $h : C \to A$ satisfaz $f \circ h = g \circ h$ então existe um único morfismo $k : C \to E$ tal que o diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & C \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

comuta. Note que $i : E \to A$ é sempre um monomorfismo, e se i é também epimorfismo, então resulta ser isomorfismo.

Dualizando a noção de equalisador, obtemos o conceito de *co-equalizador*. Em **SET**, os co-equalisadores surgem da noção de relação de equivalência.

Alguns objetos exercem papel especialmente relevante na estrutura da categoria em questão. Eles são divididos em dois tipos: objetos iniciais e objetos terminais. Um objeto $\mathbf{0}$ de $\mathcal{C}$ é dito *inicial* se, para todo $A \in\mid \mathcal{C} \mid$, existe um único morfismo $! : \mathbf{0} \to A$ em $\mathcal{C}$. Claramente um objeto inicial é único a menos de isomorfismo.

Vê-se imediatamente que em **SET**, o objeto inicial é $\emptyset$. Logo, é de fato único. Se P é uma ordem parcial, então o objeto inicial em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ é $\perp$, quando ele existir.

O outro tipo de objeto especial são os objetos terminais, obtidos pela dualização da noção de objeto inicial. Explicitamente, um objeto $\mathbf{1}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é dito um *objeto terminal* se para todo objeto A de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $! : A \to \mathbf{1}$. O objeto terminal é único a menos de isomorfismo.

Apresentamos o conceito de *pullback*. Dada a grande importância desta contrução, destacamo-la na forma da definição seguinte.

Definição 4.9.1. Dados dois morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$, seu *pullback* (ou produto fibrado) é um par $(D, \{p_1, p_2\})$ tal que $p_1 : D \to A$, $p_2 : D \to B$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, e este par satisfaz a seguinte propriedade universal: se $(E, \{q_1, q_2\})$ é um par tal que q_1: $E \to A$, q_2: $E \to B$ são tais que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, então existe um único $k : E \to D$ tal que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "q_1"'] & & \\ & D \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta.

O *pullback* é único a menos de isomorfismo. O seu dual é chamado *pushout*. O resultado a seguir é de grande utilidade para demonstrar que certos diagramas são *pullbacks*.

Teorema 4.9.2 (Lema do *pullback*)**.** *Considere um diagrama da seguinte forma:*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

i) Se os quadrados menores são pullbacks, então o retângulo externo é pullback.

ii) Se o retângulo externo e o quadrado direito são pullbacks e o quadrado esquerdo comuta, então o quadrado esquerdo é pullback.

4.10 Funtores

Definição 4.10.1. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ duas categorias. Um *funtor* (covariante) F é uma aplicação $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que, a cada $A \in |\mathcal{C}|$, associa um objeto $F(A) \in |\mathcal{D}|$, e a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ associa um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}$

(ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Um *funtor contravariante* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor covariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Sua ação inverte a direção dos morfismos: se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então $G(f) : G(B) \to G(A)$, e $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$.

Assim como fazemos com morfismos, também podemos compor funtores. Para isto, sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ dois funtores. Definimos, para cada objeto $A \in |\mathcal{C}|$ e cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, o funtor composto $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ da seguinte forma:

$(G \circ F)(A) = G(F(A))$;

$(G \circ F)(f) = G(F(f))$;

Apresentamos agora alguns exemplos de funtores:

• O funtor identidade $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ leva cada objeto e cada morfismo em si mesmo.

• Funtor de esquecimento: Se $\mathcal{C}$ é uma categoria cujos objetos são conjuntos com estrutura adicional, o funtor de esquecimento $F : \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$ é definido nos objetos como sendo o conjunto subjacente (o funtor esquece a estrutura adicional), e se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então $F(f)$ é a aplicação de conjuntos f. Se $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ e $(X, \Omega(X)) \in |\mathbf{Top}|$, então $F((X, \Omega(X))) = X$, e se $f : (X, \Omega(X)) \to (Y, \Omega(Y))$ é uma função contínua, então $F(f) = f : X \to Y$.

Definição 4.10.2. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Uma *transformação natural* $\eta : F \to G$ é uma família de aplicações $\{\eta_A\}_{A \in \mathcal{C}}$ indexadas em $A \in \mathcal{C}$, tal que $\eta_A : F(A) \to G(A)$ é um morfismo em $\mathcal{D}$. A transformação é natural no seguinte sentido: se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Definição 4.10.3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Um morfismo $f : p(C) \to D'$ possui uma *elevação cocartesiana* $\widetilde{f} : C \to C' \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ se para todo $f' : C \to C''$ tal que $F(f')$ fatora através de f (i.e., existe $g : D' \to F(C'')$ tal que $F(f') = g \circ f$), a própria f' fatora unicamente através da fatoração de base (i.e., existe único $\widetilde{g} : C' \to C''$ tal que $f' = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ e $F(\widetilde{g}) = g$).

Definição 4.10.4. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Uma *adjunção de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$* consiste de um par de funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que, para todo

$A \in |\mathcal{C}|$ e $B \in |\mathcal{D}|$, existe uma bijeção natural

$$\theta_{AB} : Hom_{\mathcal{D}}(F(A), B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B))$$

Aqui, “natural”significa o seguinte:

Seja $H : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ um funtor tal que $H(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(F(A), B)$ e, se $f : A' \to A$ in $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$ então $H(f, g)(h) = g \circ h \circ F(f)$ para todo $h : F(A) \to B$.

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[d, "g"] & F(A) \arrow[r, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[u, "f"] & B' & F(A') \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, dotted, "H(f,g)(h)"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Adicionalmente, seja $K : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ o funtor tal que $K(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B))$ e, se $f : A' \to A$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$, então $K(f, g)(h) = G(g) \circ h \circ f$ para todo $h : A \to G(B)$.

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[d, "g"] & A \arrow[r, "h"] & G(B) \arrow[d, "G(g)"] \\
A' \arrow[u, "f"] & B' & A' \arrow[u, "f"] \arrow[r, dotted, "K(f,g)(h)"'] & G(B')
\end{tikzcd}$$

Então, $\theta = \{\theta_{AB}\}_{\langle A,B\rangle \in |\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}|}$ é um isomorfismo natural $\theta : H \to K$. Isto é, cada θ_{AB} é uma bijeção e, se $f : A' \to A$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$, então o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
A & B & Hom_{\mathcal{D}}(F(A), B) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[d, "H(f,g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B)) \arrow[d, "K(f,g)"] \\
A' \arrow[u, "f"] & B' \arrow[from=u, "g"] & Hom_{\mathcal{D}}(F(A'), B') \arrow[r, "\theta_{A'B'}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A', G(B'))
\end{tikzcd}
$$

Dizemos que F *é adjunto à esqueda de* G e G *é adjunto à direita de* F, e escreve-se

$$\frac{A \to G(B)}{F(A) \to B} \qquad\qquad F \dashv G \qquad\qquad G \vdash F\ .$$

Referências Bibliográficas

[1] P. Arndt, R.A. Freire, O.O. Luciano e H.L. Mariano. On the category of algebraizable logics. *CLE e-Prints* Vol. 6(1), 2006. Disponível em http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_6,n_1,2006.html

[2] A. Avron e I. Lev. Canonical propositional Gentzen-type systems. *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR 2001)*, volume 2083 of Lecture Notes in Artificial Intelligence, páginas 529-544. Springer-Verlag, 2001.

[3] A. Avron e I. Lev. Non-deterministic multiple-valued structures. *Journal of Logic and Computation*, 15(3):241-261, 2005.

[4] J. Bueno-Soler e W.A. Carnielli. Possible-translations algebraization for paraconsistent logics. Bulletin of the Section of Logic, vol. 34, n. 2, 2005, pp. 77-92.

[5] J. Bueno-Soler, W.A. Carnielli e M.E. Coniglio. Possible-translations algebrizability. In: J.-Y. Béziau; W.A. Carnielli; D. Gabbay. (Org.)*Handbook of Paraconsistency*, College Publications, Londres: Inglaterra, 2007, p. 321-340.

[6] J. Bueno-Soler, M.E. Coniglio e W.A. Carnielli. Finite algebraizability via possible-translations semantics. Em W.A. Carnielli, F.M. Dionísio, e P. Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications*, páginas 79–86, Lisboa, Portugal, 2004. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico.

[7] C. Caleiro. *Combining Logics*. Tese de Doutorado, IST-Lisboa, Portugal, 2000.

[8] C. Caleiro, W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, A. Sernadas e C. Sernadas. Fibring Non-Truth-Functional Logics: Completeness Preservation. *Journal of Logic, Language and Information*, 12(2):183–211, 2003.

[9] C. Caleiro, W.A. Carnielli, J. Rasga e C. Sernadas. Fibring of logics as a universal construction. Em D. Gabbay e F. Guenthner, editores, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 13. Kluwer Academic Publishers.

[10] W.A. Carnielli. Many-valued logics and plausible reasoning. *Proceedings os the XX International Congress on Many-Valued Logics*, páginas 328-335, University of Charlotte, North Carolina, U.S.A., 1990. IEEE Computer Society.

[11] W.A. Carnielli. Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics. Em D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J. P. Van Bendegem, editores, *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Logic and Computation Series, páginas 149–163. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[12] W.A. Carnielli e M.E. Coniglio. A categorial approach to the combination of logics. *Manuscrito*, 22(2):69–94, 1999.

[13] W.A. Carnielli e M.E. Coniglio. Splitting Logics. Em A. Garcez, S. Artemov, H. Barringer e L. Lamb, editores, *We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay* volume 1, páginas 389-414. College Publications, 2005.

[14] W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, D. Gabbay, P. Gouveia e C. Sernadas. *Analysis and Synthesis of Logics. How to cut and paste reasoning systems*. Applied Logic Series. Kluwer Academic Publishers, 2007.

[15] W.A. Carnielli, M.E. Coniglio e J. Marcos. Logics of Formal Inconsistency. Em D. Gabbay e F. Guenthner, editores, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 14. Kluwer Academic Publishers, 2006. No prelo. Versão preliminar disponível em *CLE e-Prints*, Vol. 5(1), 2005. URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/articles.html`.

[16] W.A. Carnielli e J. Marcos. A taxonomy of **C**-Systems. Em W.A. Carnielli, M.E. Coniglio e I.M.L. D'Ottaviano, editores, *Paraconsistency - The logical way to the inconsistent*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, volume 228, pages 1-94, New York, 2002. Marcel Dekker. Preprint disponível em CLE e-Prints, 1(5), 2001.

[17] M.E. Coniglio. Combinações de sistemas de conseqüência. Em andamento, 2006.

[18] M.E. Coniglio. Combinações de sistemas de conseqüência (resumo). Em *Livro de Atas do XI Encontro Nacional de Filosofia da ANPOF, Salvador*, páginas 290–291. ANPOF, 2004.

[19] M.E. Coniglio, A. Sernadas e C. Sernadas. Fibring logics with topos semantics. *Journal of Logic and Computation*, 13(4):595–624, 2003.

[20] L. Cruz-Filipe, A. Sernadas e C. Sernadas. Heterogeneous fibring of deductive systems via abstract proof systems. Submetido a publicação, 2006.

[21] V.L. Fernández e M.E. Coniglio. Fibring algebraizable consequence systems. Em W.A. Carnielli, F.M. Dionísio, and P. Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications, Lisbon (Portugal)*, páginas 93–98. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisbon (Portugal), 2004.

[22] D. Gabbay. *Fibring Logics*. Oxford Science Publications, 1999.

[23] J. van Heijenoort. From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. Cambridge, Harvard, 1967.

[24] J. C. King. Two sorts of claims about "Logical Form".
URL = http://www.usc.edu/schools/college/philosophy/private/docs/king/

[25] J. Łoś e R. Suszko. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae*, 20:177-183, 1958.

[26] J. Marcos. Semânticas de Traduções Possíveis. Tese de Mestrado, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brasil, 1999.
Disponível em URL = http://www.cle.unicamp.br/pub/thesis/J.Marcos/.

[27] J. Marcos. Possible-translations semantics; Em W.A. Carnielli, F.M. Dionísio, and P. Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04 - Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications*, páginas 119–

128, Lisboa, Portugal, 2004. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico.

[28] J. Marcos. Possible-translations semantics for some weak classically based paraconsistent logics; A aparecer em *Journal of Applied Non-Classical Logics*; preprint disponível em URL = http://www.cs.math.ist.utl.pt/ftp/pub/MarcosJ/04-M-PTS4swcbPL.pdf

[29] A. R. Moreno. Wittgenstein: os labirintos da linguagem - Ensaio introdutório; Editora da UNICAMP ; Editora Moderna; Campinas, 2000.

[30] P. Pietroski. Logical Form. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2007 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2007/entries/logical-form/

[31] M. Sainsbury. Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic. Blackwell Publishing, Oxford, 2000.

[32] A. Sernadas, C. Sernadas e C. Caleiro. Fibring of logics as a categorial construction. *Journal of Logic and Computation*, 9(2):149–179, 1999.