Mauro César Scheer

PARA UMA TEORIA DE TRADUÇÕES ENTRE LÓGICAS CUMULATIVAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D´Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em / / .

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D´Ottaviano.

Profa. Dra. Ana Teresa Martins. Ana Teresa de Castro Martins

Prof. Dr. Hércules A. Feitosa.

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Sch21p
Sch22p

Scheer, Mauro César
Para uma teoria de traduções entre lógicas cumulativas / Mauro César Scheer. -- Campinas, SP : [s.n.], 2002.

Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica. 2. Lógica matemática não clássica. I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

Clarisser
É oãn es raserper
A sarger arap rairc
Rariver sadot as sesarf
Sodot so samenof
Rirbocsed sa seroc sod samora
Que desprendem das canções
E se soltam pelo ar
Em matrizes, ocra-siri
Tons profundos
Que vão pousar na terra.
(Vitor Ramil)

Aos meus pais, Armindo e Reny.

À minha noiva, Marcia.

AGRADECIMENTOS

A realização desta pesquisa contou com a colaboração de muitas pessoas, que de um modo ou outro colaboraram na minha formação acadêmica.

Primeiramente agradeço aos meus pais, Armindo e Reny, e meus irmãos, pelo total apoio desde o início de meus estudos.

Agradeço à minha namorada Marcia, pelo companheirismo e amor durante todos estes anos, sempre ao meu lado incentivando-me com palavras de coragem e com o carinho que lhe é peculiar.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Itala, pela orientação segura e amizade, por me ajudar a desenvolver o espírito científico e por toda contribuição para a realização da pesquisa, acompanhando todas as suas etapas.

Agradeço aos Professores Coniglio, Carnielli e Michael pela dedicação às aulas e a amizade estabelecida.

Agradeço aos Professores Hércules e Ana Teresa pelas sugestões, simpatia e presteza.

Agradeço aos funcionários da Biblioteca do CLE, pela atenção e prestação de serviços, sempre simpáticos e com extrema competência.

Agradeço aos meus colegas e amigos da Pós-graduação em Lógica e Filosofia da Ciência: Ricardo, Luís, Victor e Márcio, pelo companheirismo nas aulas e nas atividades envolvendo o curso.

Agradeço ao CNPQ por ter me oferecido uma bolsa, concedendo recurso financeiro para a realização desta pesquisa.

Agradeço à UNICAMP, da qual faço parte e que muito me orgulha.

Resumo

Há inúmeras situações pertinentes ao mundo real em que necessariamente trabalhamos com conhecimento incompleto. Muitas vezes temos que tomar decisões que pensamos ser as mais corretas, decisões que são corroboradas por um conjunto de informações incompletas, ou seja, inferimos conclusões "plausíveis" e "consistentes" com nossa base de conhecimento. Um formalismo para "raciocinar" de forma eficiente sobre uma base de conhecimento incompleto deve ser capaz de admitir expressões que sejam válidas em geral, reconhecer e assimilar exceções quando necessário. As lógicas não monotônicas são adequadas ao tipo de formalismo a que estamos nos referindo. Mas quais são as propriedades mínimas que caracterizam a não monotonicidade de certas lógicas?

As propriedades consideradas fundamentais para sistemas não monotônicos serão apresentadas neste trabalho, juntamente com as várias relações entre essas propriedades.

Nos primeiros capítulos apresentamos a família dos operadores cumulativos e, a partir da propriedade distributiva, dedutiva e supracompacta apresentamos outras famílias de operadores cumulativos. Em capítulo intermediário o conceito de lógica cumulativa é apresentado. O último capítulo do trabalho é dedicado ao estudo de traduções (traduções conservativas) entre lógicas cumulativas. Procuramos estabelecer resultados que caracterizam a existência ou não de traduções (traduções conservativas) entre lógicas cumulativas e resultados que nos permitam dizer quais propriedades das respectivas lógicas envolvidas em tais traduções são preservadas.

Palavras chaves: Operadores de conseqüência, operadores cumulativos, lógicas cumulativas e traduções entre lógicas cumulativas.

Abstract

There are countless situations in the real world in which we necessarily deal without a complete knowledge. Sometimes we have to make decisions that we think to be the most correct ones which are confirmed by an incomplete set of information, in other words, we infer "plausible" and "consistent" conclusions based on our actual knowledge. A formalism to think in an efficient way on an incomplete knowledge base should be able to admit expressions of general validity, to recognize and to assimilate exceptions when necessary. The non-monotonic logics are appropriate to the kind of formalism that we are referring to. But what are the minimum properties that characterize the non-monotonicity of certain logics?

The properties considered essential to non-monotonic systems will be presented in this study, together with an analysis of the relationships among them.

In the first chapters we present the family of cumulative operators and, from the distributive, deductive and supracompact properties, we present other families of cumulative operators. In an intermediate chapter the concept of cumulative logic is presented. The last chapter is dedicated to the study of translations (conservative translations) between cumulative logics. We look for to establishing results that characterize the existence of translations (conservative translations) between cumulative logics and results that allow us to determine which properties are preserved from the logics involved in such translations.

Keywords: Consequence operators, cumulative operators, cumulative logics, translations between cumulative logics.

Índice

ERRATA

(p.34) No final do último parágrafo acrescente: A lógica IDL foi introduzida por Pequeno e Buchsbaum **(Pequeno, Buchsbaum; 1991)**.

(p.37) Na Proposição 2.1.2, substitua a demonstração de (b)$\Rightarrow$(a) por:

(b)$\Rightarrow$(a) De fato, sejam os conjuntos Γ, Δ, $\Phi\subseteq For(L)$. Temos que $C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(\Gamma)\cup C_n(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))$ e pela Proposição 1.1.2 (b) segue que $C_n(\Gamma)\cup C_n(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))$. Logo,

$$C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)) \qquad \text{(i).}$$

Como, $C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))\subseteq C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$ então, esse fato juntamente com (i) e cumulatividade resulta que $C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))=C(C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$. Logo, pela absorção plena (Proposição 1.2.13 (b)) temos que,

$$C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))=C(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))) \qquad \text{(ii).}$$

Pela Proposição 1.1.2 (b), propriedade supraclássica e cumulativa temos que $C(\Gamma\cup\Delta)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Delta))$ e $C(\Gamma\cup\Phi)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Phi))$. Logo, $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Delta))\cap C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Phi))$. Por hipótese, temos que $C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Delta))\cap C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Phi))\subseteq C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$, pois $C_n(\Gamma)$, $C_n(\Delta)$ e $C_n(\Phi)$ são fechados. Assim, $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$. Este resultado juntamente com (ii) implica que $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$.

(p.65) Na Proposição 3.1.9 (b), segunda linha, no lugar de $F(x)\in C_n(F(K))$ leia $G(x)\in C_n(G(K))$.

(p.84) O Teorema 4.1.9 foi obtido originalmente por Coniglio, D'Ottaviano e Martins.

(p.107) Acrescente a seguinte referência bibliográfica:

PEQUENO, T. H. C., BUCHSBAUM, A. R. (1991). The Logic of Epistemic Inconsistency. **2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning**, Boston.

Introdução

Há situações no mundo real em que é inevitável trabalharmos com conhecimento incompleto. Por exemplo, situações que envolvam percepção, ambigüidade e senso comum. Quando precisamos tomar certas decisões não podemos esperar que as informações pertinentes à situação em questão sejam conhecidas. Assim, quando perguntamos: Em qual curso você ingressará na universidade? A escolha do curso é feita por uma série de motivos, mas nem todas as informações sobre o curso escolhido estão disponíveis. Por exemplo, não se sabe como o mercado de trabalho do referido curso estará daqui a cinco ou seis anos. Outra situação que ilustra o modo como lidamos com conhecimento incompleto é o atendimento de emergência realizado por um médico a um paciente. Como esperar por todos os exames a serem realizados, se o paciente necessita imediatamente de atendimento médico? De uma intervenção cirúrgica? Enfim, tomamos decisões na ausência de informações a todo instante.

Um formalismo para "raciocinar" de forma eficiente sobre situações do tipo citado anteriormente deve ser capaz de admitir expressões que sejam válidas em geral, reconhecer e assimilar exceções quando necessário. As lógicas não monotônicas admitem inferências que são realizadas na ausência de informações completas, estas inferências podem ser invalidadas por novas informações, ou seja, essas lógicas são adequadas ao tipo de formalismo a que estamos nos referindo.

Dessa forma, os sistemas de raciocínio não monotônicos, por sua vez as lógicas não monotônicas, poderão ser necessários por qualquer das seguintes razões **(Rich; 1988 p.210)**:

-Presença de informação incompleta requer raciocínio por omissão (raciocínio default);

-Um "mundo" em mudanças requer uma base de dados flexível;

-A construção de uma solução completa para um dado problema poderá exigir suposições temporárias a respeito de soluções parciais.

Lembramos que sistemas não monotônicos normalmente são aplicados no campo da inteligência artificial. Por exemplo, muitas vezes em determinados sistemas, quando uma afirmação for eliminada da base de dados necessita-se voltar atrás sobre outras afirmações cujas provas dependem da afirmação eliminada. Assim, devemos eliminar estas afirmações ou encontrar novas provas que sejam válidas em relação à atual base de dados. Portanto, a eliminação de uma única afirmação determina um efeito significativo em toda base de dados. Dessa forma, do ponto de vista computacional, os sistemas não monotônicos poderão exigir mais espaço de armazenamento e mais tempo de processamento, pois junto a cada teorema, sua prova ou pelo menos uma lista de todas as hipóteses das quais a prova depende, deve ser armazenada. Isto não é necessário em sistemas monotônicos, pois uma vez encontrada a prova de um teorema ela não precisará ser reexaminada. Estas considerações se referem a um processo de raciocínio não monotônico denominado "volta atrás direcionada à dependência". Para mais informações ver **(Stallman; 1977)**, entre outros.

Vejamos o que queremos dizer quando nos referimos às lógicas não monotônicas.

Seguindo a tradição polonesa, uma lógica é um par constituído por um conjunto qualquer L e um operador de conseqüência C_n sobre o conjunto das partes deste conjunto. Geralmente, quando o conjunto qualquer é uma linguagem formal, a lógica é chamada de sistema lógico **(Wojcicki; 1988)**. Uma lógica é dita monotônica se o conjunto dos teoremas de uma teoria é sempre um subconjunto dos teoremas de qualquer extensão desta teoria. Assim, formalmente, uma lógica é dita monotônica se, dados quaisquer conjuntos A, B de L tal que $A \subseteq B$, então $\{H: H \subseteq C_n(A)\} \subseteq \{R: R \subseteq C_n(B)\}$. Mais tarde trataremos disto de forma rigorosa. Para as chamadas lógicas não monotônicas, como o próprio nome diz, a propriedade monotônica não é satisfeita.

Há diversos modos de raciocinarmos não monotonicamente, ou seja, há diversos tipos de lógicas não monotônicas. A saber, Lógica Default de Reiter, Lógicas Preferenciais, entre outras. Não estamos interessados por hora em lógicas não monotônicas quaisquer, mas nas chamadas lógicas cumulativas. Em **(Krauss, Lehmann, Magidor; 1990)**, por exemplo, cinco famílias de lógicas cumulativas são apresentadas, juntamente com seus respectivos modelos.

Por que a partir de um número considerável de lógicas não monotônicas, estudar a classe das chamadas lógicas cumulativas?

Primeiramente, porque as lógicas cumulativas são fruto do estudo de condições minimais, que objetiva caracterizar uma autêntica lógica não monotônica. No século passado, por volta de meados da década de oitenta, esforços nesta direção começam a ganhar destaque. Podemos considerar que Gabbay foi o primeiro a enfocar estudos nesta direção **(Gabbay; 1985)**. Ele propôs três condições minimais que caracterizam uma relação de conseqüência não monotônica. No Capítulo 1 veremos quais são estas condições. Depois disso, outros trabalhos foram apresentados, também com propriedades interessantes. Para consulta, ver **(Krauss, Lehmann, Magidor; 1990)**, **(Kaluzhny, Lehmann; 1995)** entre outros.

Em segundo lugar, a classe das lógicas cumulativas parece ser "bem comportada" em relação à classe das lógicas, pois não abandonamos simplesmente a condição monotônica, mas no lugar desta condição fazemos uso de uma espécie de monotonicidade restritiva. Não podemos deixar de dizer com isso que há várias lógicas que não se enquadram nesta nova classe de lógicas (a classe das lógicas cumulativas).

O estudo apresentado neste trabalho é dividido em duas partes: a primeira parte trata dos operadores de conseqüência e a segunda parte de traduções entre lógicas. Inicialmente, a ordem da apresentação difere um pouco da ordem em que ele se iniciou. A partir do conceito de traduções entre lógicas introduzido por **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** e de uma teoria de traduções pertinente a este conceito, já bastante desenvolvida, pretendemos generalizar ainda mais alguns resultados acerca desta teoria.

Os artigos citados nesta dissertação, cujo conteúdo remete aos operadores cumulativos, não tratam de traduções entre lógicas, mas das propriedades destes operadores. Portanto surge a necessidade de apresentarmos um estudo sobre a classe de operadores cumulativos, isto é, apresentarmos essas propriedades e resultados.

Podemos dizer que o tema central deste trabalho é a apresentação de resultados referentes à classe dos operadores cumulativos e, a partir daí, continuar a desenvolver, sob esta nova classe, uma teoria geral de traduções, iniciada com os trabalhos **(Feitosa; 1997)**, **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**, **(Feitosa, D'Ottaviano; 2001)** entre outros.

Observamos que os resultados em asterisco são resultados que julgamos originais.

A seguir descrevemos o conteúdo de cada capítulo desta dissertação.

Recordamos inicialmente, no *Capítulo 1*, vários resultados sobre os operadores de conseqüência clássicos, também conhecidos como operadores de conseqüência de Tarski. Feito isto, apresentamos a definição de operadores de conseqüência cumulativos, algumas de suas propriedades e fazemos comparações entre estas propriedades e as dos operadores de conseqüência. Notamos através da introdução das chamadas teorias default que há uma família de operadores, com papel de destaque na formalização do raciocínio não monotônico, que não satisfaz a condição cumulativa.

No *Capítulo 2*, apresentamos três classes de operadores cumulativos. A saber: operadores distributivos, operadores dedutivos e operadores supracompactos. Introduzimos os sistemas de Poole e, a partir destes sistemas, alguns exemplos de operadores cumulativos satisfazendo as propriedades distributiva e dedutiva são apresentados. Finalizamos o capítulo com considerações sobre extensões de operadores cumulativos, isto é, a partir de operadores cumulativos finitários, concebemos operadores cumulativos infinitários.

No *Capítulo 3*, estendemos o conceito de lógica introduzido em **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**. Procuramos definir a partir de uma função e um conjunto qualquer, um operador cumulativo induzido e co-induzido. Conceber estes operadores parece ser fundamental, entre outras coisas, para se realizar uma abordagem categorial sobre a classe das lógicas cumulativas e traduções entre estas lógicas.

No *Capítulo 4*, as definições de tradução e tradução conservativa entre lógicas cumulativas são apresentadas. Feito isto, procuramos caracterizar sob que condições podemos afirmar a existência de tais traduções. Aliás, as chamadas traduções conservativas merecem papel de destaque, pois, como homomorfismos são funções entre estruturas que preservam propriedades destas estruturas, homeomorfismos são funções entre espaços topológicos que preservam propriedades topológicas, pretende-se que as aplicações entre lógicas (traduções) preservem propriedades lógicas.

Finalizando, com o *Capítulo 5*, tecemos algumas considerações de caráter geral e estrutural sobre esta dissertação. Citamos também algumas questões que surgiram ao longo do trabalho e que ainda necessitam ser esclarecidas, e questões que poderão ser investigadas futuramente.

Capítulo 1

Operadores de Conseqüência

Neste capítulo, apresentamos primeiramente a definição de operador de conseqüência, também conhecido como operador de conseqüência de Tarski, introduzido em 1930 no artigo "On Some Fundamental Concepts of Metamathematics", reproduzido em **(Tarski; 1956).** Os resultados apresentados não são acompanhados de demonstrações, pois, esse operador, também chamado de operador de conseqüência monotônico, já é bem conhecido na literatura. Como referência para o estudo dos operadores de conseqüência monotônicos, alguns artigos de Tarski são de grande importância **(Tarski; 1956)**, também o artigo de Brown e Suszko **(Brown, Suszko; 1973)**, o texto de Wójcicki **(Wójcicki; 1988)** entre outros. Para uma leitura de conteúdo bastante filosófico tem-se, por exemplo, o texto de Etchemendy **(Etchemendy; 1999)**.

A segunda parte deste capítulo é dedicada ao estudo de uma classe de operadores de conseqüência não monotônicos, os operadores conhecidos como cumulativos. No final do capítulo, introduzimos os sistemas default, pois eles são considerados ferramentas importantes para uma formalização do raciocínio não monotônico. Através dos sistemas default podemos constatar que nem tudo é estável no que diz respeito à não monotonicidade. Veremos que os sistemas default acarretam certos tipos de operadores e quais as propriedades que estes operadores possuem quando comparados aos operadores cumulativos.

1.1 Operador de Conseqüência de Tarski

Definição 1.1.1: Dado um conjunto X qualquer, denomina-se *operador de conseqüência sobre X,* ou *operador de conseqüência de Tarski,* a toda aplicação $C_n: \wp(X) \to \wp(X)$ tal que, para todo A, $B \subseteq X$, são satisfeitas as propriedades:

(i) $A \subseteq C_n(A)$ (Inclusão).

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow C_n(A) \subseteq C_n(B)$ (Monotonicidade).

(iii) $C_n(C_n(A)) \subseteq C_n(A)$ (Idempotência).

Lembremos que, de (i) e (iii) segue trivialmente que $C_n(C_n(A))=C_n(A)$. O operador na definição acima também é chamado de *operador de conseqüência clássico.*

Quando lidamos com um conjunto X qualquer, não necessariamente $C_n(\varnothing)=\varnothing$. Por exemplo, tomando o conjunto das fórmulas do Cálculo Proposicional Clássico (CPC), denotado por For(CPC), definimos o operador de conseqüência C_n sobre For(CPC), para todo $\Gamma \subseteq$ For(CPC), como:

$$C_n(\Gamma)=\{\alpha \in \text{For(CPC)}: \exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ finito tal que } \Gamma_0 \vdash \alpha\}.$$

É claro que $C_n(\varnothing) \neq \varnothing$, pois $C_n(\varnothing)$ coincide com o conjunto dos teoremas do Cálculo Proposicional Clássico, que não é vazio.

De maneira semelhante, para um operador de conseqüência C_n sobre um conjunto qualquer X, em geral não vale que $C_n(A \cup B)=C_n(A) \cup C_n(B)$, para quaisquer conjuntos A, $B \subseteq X$.

Os *espaços topológicos* constituem, de fato, conjuntos munidos de operadores de conseqüência particulares, conhecidos usualmente como operadores de fecho. Estes operadores de fecho, além das condições da Definição 1.1.1, satisfazem as duas condições adicionais:

(iv) $C_n(\varnothing)=\varnothing$.

(v) $C_n(A \cup B)=C_n(A) \cup C_n(B)$.

As demonstrações dos resultados apresentados até o final desta seção são encontradas, entre outros, em **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** ou **(Feitosa;1997)**.

Proposição 1.1.2: Sejam C_n um operador de conseqüência sobre X e I um conjunto indexado tal que, para todo $i \in I$, temos que $A_i \subseteq X$. Então:

(a) $C_n(\cap_{i\in I}A_i) \subseteq \cap_{i\in I}C_n(A_i)$.

(b) $\cup_{i\in I}C_n(A_i) \subseteq C_n(\cup_{i\in I}A_i)$.

(c) $C_n(\cup_{i\in I}A_i) = C_n(\cup_{i\in I}C_n(A_i))$.

(d) $C_n(\cap_{i\in I}A_i) \subseteq C_n(\cap_{i\in I}C_n(A_i))$.

■

Definição 1.1.3: Seja C_n um operador de conseqüência sobre X. Dado $A \subseteq X$, dizemos que A *é fechado* em X, segundo C_n , se $A=C_n(A)$; e A *é aberto* se A^c (complementar de A em relação a X) é fechado. Dizemos ainda que $x \in X$ *é denso* em X, isto é, *x trivializa X*, se $C_n(\{x\})=X$.

A partir da Definição 1.1.1 e das propriedades citadas na Proposição 1.1.2, temos os seguintes resultados.

Proposição 1.1.4: Sejam C_n um operador de conseqüência sobre X, $A \subseteq X$ um conjunto qualquer e $(A_i)_{i\in I}$ a família de todos os fechados em X que contêm A. Então, $C_n(A)=\cap_{i\in I}A_i$. Além disso, A é fechado em X se, e somente se, $A=\cap_{i\in I}A_i$

■

Para demonstrarmos a proposição acima, usamos o fato de que a interseção de fechados, segundo C_n, é um fechado.

Proposição 1.1.5: Dado C_n um operador de conseqüência sobre X, para quaisquer conjuntos B, $D \subseteq X$, segue que $C_n(B \cup D) = C_n(B \cup C_n(D))$.

■

Vejamos, a seguir, a relação existente entre dois operadores de conseqüência C_n e C_n^* sobre o mesmo conjunto X, a partir de seus conjuntos fechados.

Definição 1.1.6: Sejam C_n e C_n^* operadores de conseqüência sobre X. Dizemos que o *operador C_n é mais forte que C_n^**, o que denotamos por $C_n^* \langle C_n$, se todo fechado segundo C_n é fechado segundo C_n^*.

Notamos que, a partir desta definição, para todo conjunto $A \subseteq X$, $C_n^*(A) \subseteq C_n(A)$. De fato, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.7: Sejam C_n^* e C_n operadores de conseqüência sobre X. Então, $C_n^* \langle C_n$ se, e somente se, $C_n^*(A) \subseteq C_n(A)$, para todo $A \subseteq X$.

■

Definição 1.1.8: Seja C_n um operador de conseqüência sobre um conjunto qualquer X. Dado $A \subseteq X$, dizemos que A é *C_n-trivial* se, e somente se, $C_n(A) = X$; caso contrário, dizemos que A *não é C_n- trivial.*

Definição 1.1.9: Seja C_n um operador de Tarski sobre um conjunto qualquer X. Se existir um subconjunto finito $A \subseteq X$ tal que, $C_n(A) = X$, dizemos que *X é finitamente trivializável*. Neste caso, chamamos o conjunto A de *conjunto trivializante*.

É claro que, se existir um elemento denso em X, então X é finitamente trivializável. A recíproca, em geral, não é verdadeira.

Definiremos, a seguir, algumas propriedades de L e C_n com respeito a conectivos bem conhecidos.

Definição 1.1.10: Seja C_n um operador de conseqüência sobre um conjunto qualquer X.

1. Dizemos que X possui *negação forte* se, para cada $x \in X$, existe um elemento $\neg x \in X$ tal que, para todo $A \subseteq X$:

    (i) $C_n(A \cup \{\neg x\})$ é trivial se, e somente se, $x \in C_n(A)$.

    (ii) $C_n(A \cup \{x\})$ é trivial se, e somente se, $\neg x \in C_n(A)$.

2. Dizemos que X possui *conjunção* se existe um operador binário (denotado por $\wedge$) definido sobre X tal que, para qualquer conjunto fechado A de X:

$$a \wedge b \in A \text{ se, e somente se, } a \in A \text{ e } b \in A.$$

3. Dizemos que X tem *disjunção* se existe um operador binário (denotado por $\vee$) definido sobre X tal que, para qualquer conjunto fechado A de X:

$$a \vee b \in A \text{ se, e somente se, } a \in A \text{ ou } b \in A.$$

4. Dizemos que X tem *implicação* se existe um operador binário (denotado por $\rightarrow$) definido sobre X tal que, para qualquer conjunto A de X:

$$a \rightarrow b \in C_n(A) \text{ se, e somente se, } b \in C_n(A \cup \{a\}).$$

Definição 1.1.11: Seja C_n um operador de Tarski sobre um conjunto qualquer X com negação forte ($\neg$). Um conjunto $A \subseteq X$ é *$\neg$-inconsistente* se existe um elemento $a \in X$, tal que os elementos $a, \neg a \in C_n(A)$. O conjunto A é *$\neg$-consistente* se ele não é um conjunto $\neg$-inconsistente.

Algumas considerações sobre as Definições 1.1.8, 1.1.10 e 1.1.11. Primeiramente, observamos que um conjunto X poderia ter outros tipos de negações e, neste sentido, um conjunto $A \subseteq X$ poderia ser inconsistente relativamente a cada uma de tais negações. Todo conjunto trivial é inconsistente relativamente a qualquer negação, mas, ser inconsistente relativamente a uma negação dada não é equivalente a ser trivial. Existem lógicas nas quais não ocorre essa equivalência. Essas lógicas são chamadas de paraconsistentes. Assim, nessas lógicas podemos admitir a existência de conjuntos inconsistentes sem que toda fórmula seja conseqüência de algum desses conjuntos. Para maiores detalhes ver **(D'Ottaviano; 1990).** [redacted] Observamos ainda que, na Definição 1.1.10 (1), o item (i) refere-se à negação clássica e, (ii) refere-se à negação intuicionista.

Definição 1.1.12: Um *operador de conseqüência sobre uma linguagem formal L* é um operador de conseqüência sobre o conjunto For(L) das fórmulas de L.

Quando C_n é um operador de conseqüência sobre L (linguagem formal), chamamos os conjuntos fechados de *teorias*.

Pois bem, seja um operador de Tarski C_n sobre uma linguagem formal L. O par (Δ, α), escrito na forma $\Delta \vdash \alpha$, onde $\Delta \subseteq For(L)$ e $\alpha \in For(L)$ é chamado uma *inferência* e usualmente entendido como existe uma dedução de α a partir de Δ. A inferência $\Delta \vdash \alpha$ é *correta* para C_n se, e somente se, $\alpha \in C_n(\Delta)$. Uma inferência correta para C_n é denotada por $\Delta \vdash_{Cn} \alpha$. Deste modo, $\Delta \vdash_{Cn} \alpha$ corresponde a uma outra notação para $\alpha \in C_n(\Delta)$. De fato, a relação de conseqüência $\vdash$ ($\vdash \subseteq \wp(For(L)) \times For(L)$) definida por,

$$\Delta \vdash \alpha \text{ se, e somente se, } \alpha \in C_n(\Delta),$$

satisfaz as seguintes propriedades:

($\vdash_1$) Se $\alpha \in \Delta$ então $\Delta \vdash \alpha$ (Inclusão).

($\vdash_2$) Se $\Delta \vdash \beta_i$, para todo $i \in I$, e $\Delta \cup \{\beta_i\}_{i \in I} \vdash \alpha$, então $\Delta \vdash \alpha$ (Corte).

($\vdash_3$) Se $\Delta \vdash \alpha$ então $\Delta \cup \Gamma \vdash \alpha$, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$ (Monotonicidade).

Reciprocamente, dada uma relação de conseqüência $\vdash \subseteq \wp(\mathrm{For}(L)) \times \mathrm{For}(L)$ satisfazendo ($\vdash_1$), ($\vdash_2$) e ($\vdash_3$), a aplicação $C_n: \wp(\mathrm{For}(L)) \rightarrow \wp(\mathrm{For}(L))$, tal que $C_n(\Gamma)=\{\alpha: \Gamma \vdash \alpha\}$, é um operador de Tarski.

Definição 1.1.13: O operador de Tarski C_n sobre X é *finitário* se, para todo $A \subseteq X$:

$x \in C_n(A)$ implica que existe um subconjunto finito $A_0 \subseteq A$ tal que $x \in C_n(A_0)$.

Há uma outra maneira equivalente de definirmos um operador de Tarski C_n finitário sobre X:

Para todo $A \subseteq X$, $C_n(A)=\cup\{C_n(A'): A'$ subconjunto finito de $A\}$.

Alguns autores denominam os operadores finitários, definidos acima, de operadores de conseqüência compactos. Optamos pelo termo finitário, para evitar confusões com os conceitos de compacidade topológica ou compacidade lógica.

Observamos ainda que, se na Definição 1.1.1 considerarmos a validade das condições (i), (ii) e (iii) somente para subconjuntos finitos de X, então essas condições passam a valer para quaisquer subconjuntos de X, desde que C_n seja finitário.

A definição anterior permite-nos fazer uma ponte entre uma relação de conseqüência (dedução) envolvendo conjuntos finitos de fórmulas e um operador de Tarski. De fato, considerando $\wp_f(\mathrm{For}(L))$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de For(L) e, dada uma relação de conseqüência $\vdash \subseteq \wp_f(\mathrm{For}(L)) \times \mathrm{For}(L)$ satisfazendo as condições ($\vdash_1$), ($\vdash_2$) e ($\vdash_3$), então a aplicação $C_n: \wp(\mathrm{For}(L)) \rightarrow \wp(\mathrm{For}(L))$ definida por,

$$C_n(\Gamma)=\{\alpha: \text{existe um subconjunto finito } \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Gamma_0 \vdash \alpha\},$$

é um operador de Tarski. Reciprocamente, a partir de um operador de Tarski C_n finitário definido sobre uma linguagem formal L, a relação $\vdash \subseteq \wp_f(\mathrm{For}(L)) \times \mathrm{For}(L)$ definida por,

$$\Gamma \vdash \alpha \text{ se, e somente se, } \alpha \in C_n(\Gamma),$$

satisfaz as condições ($\vdash_1$), ($\vdash_2$) e ($\vdash_3$).

Definição 1.1.14: Seja C_n um operador de Tarski sobre uma linguagem formal L. O operador C_n é *admissível* se, e somente se, para quaisquer teorias Δ, Γ, $\Psi \subseteq For(L)$ segundo este operador:

$$C_n(\Delta \cup \Gamma) \cap C_n(\Delta \cup \Psi) = C_n(\Delta \cup (\Gamma \cap \Psi)).$$

Por propriedade da inclusão, é trivial que

$$C_n(\Delta \cup (\Gamma \cap \Psi)) \subseteq C_n(\Delta \cup \Gamma) \cap C_n(\Delta \cup \Psi).$$

A definição anterior é uma versão modificada da definição de linguagem admissível apresentada em **(Freund, Lehmann; 1993 p. 66).**

Podemos dizer que a propriedade que determina que um operador C_n é admissível é, de certa maneira, a propriedade distributiva para operadores de Tarski. Veremos mais tarde, no Capítulo 2, o que queremos dizer quando afirmamos que um operador é distributivo.

A existência de certos conectivos assegura que um operador de Tarski é admissível. Mas, considerando-se C_n o operador identidade sobre L, não precisamos mencionar quaisquer tipos de conectivos em L para verificarmos que o operador C_n é admissível.

Exemplo 1.1.15: Um operador que não é admissível é obtido considerando-se uma lógica que contenha apenas variáveis proposicionais e símbolo de negação, tal que, variáveis e variáveis negadas constituem fórmulas dessa lógica. Assim, definimos o operador de Tarski como:

$$C(\Gamma)=\begin{cases}\text{For}(L) & \text{se as variáveis proposicionais } p_i, \neg p_i \in \Gamma, \text{ para algum } i \in I;\\ \Gamma & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Para ver que C_n não é admissível tomamos os seguintes conjuntos fechados: $\Delta=\{p_0, p_1\}$, $\Gamma=\{\neg p_0\}$ e $\Psi=\{\neg p_1\}$.

Lema 1.1.16: Seja L uma linguagem formal e C_n um operador de conseqüência finitário sobre L.

(a) Se a linguagem L tem disjunção então, para os conjuntos Γ, Δ, $\Phi\subseteq$For(L), $C_n(\Gamma\cup(\Delta\vee\Phi))=C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi)$, com $\Delta\vee\Phi=\{\alpha\vee\beta: \alpha\in\Delta, \beta\in\Phi\}$. Em particular, temos que $C_n(\Delta\vee\Phi)=C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)$ e o operador C_n é admissível.

(b) Se a linguagem L tem implicação, então C_n é admissível.

(c) Se a linguagem L tem implicação então, para todo conjunto finito $\Gamma\subseteq$For(L) e qualquer família $(\Delta_i)_{i\in I}$ de conjuntos de fórmulas, temos que $C_n(\Gamma\cup(\cap_{i\in I}C_n(\Delta_i)))=\cap_{i\in I}C_n(\Gamma\cup\Delta_i)$.

■

Introduzimos, a seguir, uma outra família de operadores de conseqüência, os operadores não monotônicos. Como dissemos anteriormente não estamos interessados simplesmente nos operadores não monotônicos que não satisfazem a condição (ii) da Definição 1.1.1, mas estamos interessados nos operadores não monotônicos chamados de operadores cumulativos. É inevitável a comparação entre os operadores cumulativos e os operadores de Tarski, pois, como todo operador de Tarski é um operador cumulativo, no Capítulo 4, quando introduzirmos a Classe das Lógicas Cumulativas e a Classe das Lógicas (Lógicas de Tarski), a primeira dessas classes contém a segunda.

1.2 Operadores Cumulativos

A investigação de propriedades de caráter geral dos operadores cumulativos é nosso alvo nesta seção. Essas propriedades devem nos auxiliar no contexto da abordagem categorial a ser realizada no Capítulo 4. Nessa abordagem, as lógicas cumulativas serão nossos objetos e as traduções entre estas lógicas, nossos morfismos. Ficará claro, mais tarde, o que queremos dizer quando nos referirmos às lógicas cumulativas e às traduções entre essas lógicas.

Gabbay foi provavelmente o primeiro a enfocar o estudo de certas relações de inferência e das lógicas não monotônicas a elas associadas. Gabbay **(Gabbay; 1985)** fez a seguinte pergunta: Quais são as condições mínimas que uma relação de conseqüência deve satisfazer para representar uma autêntica lógica não monotônica? Três condições são por ele propostas: reflexividade ou inclusão, corte cauteloso e monotonicidade fraca. A monotonicidade fraca (ou monotonicidade restrita) foi renomeada monotonicidade cautelosa por Makinson **(Makinson; 1988)**.

Vejamos uma definição de operador de conseqüência cumulativo, satisfazendo as condições propostas por Gabbay, porém introduzida para um conjunto X qualquer.

Definição 1.2.1: Dado um conjunto X qualquer, denomina-se *operador de conseqüência cumulativo sobre X,* ou simplesmente *operador cumulativo,* a toda aplicação $C: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A, B \subseteq X$, são satisfeitas as propriedades:

(i) $A \subseteq C(A)$ (Inclusão).

(ii) $A \subseteq B \subseteq C(A) \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$ (Monotonicidade Cautelosa).

(iii) $C(C(A)) \subseteq C(A)$ (Idempotência).

Como no caso monotônico, é trivial que, para todo $A \subseteq X$, $C(C(A)) = C(A)$.

Ressaltamos que, se C é um operador cumulativo sobre X, então C satisfaz a propriedade do corte. A saber,

(iv) $A \subseteq B \subseteq C(A) \Rightarrow C(B) \subseteq C(A)$, para todo $A, B \subseteq X$ (Propriedade do Corte).

O corte e a monotonicidade cautelosa podem ser descritos juntos, como uma igualdade, do seguinte modo:

(v) $A \subseteq B \subseteq C(A) \Rightarrow C(B) = C(A)$, para todo $A, B \subseteq X$ (Propriedade cumulativa).

Observamos ainda que (i), (ii) e (iv), ou simplesmente (i) e (v), implicam (iii).

De (v) advém o nome operador cumulativo para o operador C da Definição 1.2.1, pois essa condição é chamada por Makinson de *cumulatividade*, ou simplesmente, *condição cumulativa*.

Como no caso monotônico, um operador cumulativo sobre uma linguagem L é um operador cumulativo sobre For(L).

De forma análoga aos operadores de Tarski, dado um operador cumulativo C, a relação de conseqüência $\mid\sim \subseteq \wp(For(L)) \times For(L)$ definida por,

$$\Delta \mid\sim \alpha \text{ se, e somente se, } \alpha \in C(\Delta),$$

satisfaz as seguintes propriedades:

($\mid\sim_1$) $\alpha \in \Delta \Rightarrow \Delta \mid\sim \alpha$ (Inclusão).

($\mid\sim_2$) $\Delta \mid\sim \beta_i$, para todo $i \in I$, e $\Delta \mid\sim \alpha \Rightarrow \Delta \cup \{\beta_i : i \in I\} \mid\sim \alpha$ (Monotonicidade Cautelosa).

($\mid\sim_3$) $\Delta \mid\sim \beta_i$, para todo $i \in I$, e $\Delta \cup \{\beta_i : i \in I\} \mid\sim \alpha \Rightarrow \Delta \mid\sim \alpha$ (Corte).

Se o conjunto I em ($\mid\!\sim_2$) e ($\mid\!\sim_3$) é unitário chamamos as propriedades monotonicidade cautelosa e corte, de monotonicidade cautelosa unitária e corte unitário, respectivamente.

Por que as condições corte e monotonicidade cautelosa têm um papel de destaque na Definição 1.2.1? Vejamos o que diz Makinson **(Makinson; 1992 p.43)**:

> *"...elas correspondem a caminhos naturais e usuais de organização do nosso raciocínio. Elas nos dizem que, quando estamos raciocinando podemos acumular nossas conclusões em nossas premissas, sem perda de nosso poder de inferência (monotonicidade cautelosa) ou sem perda da amplificação do conjunto de premissas (corte). Neste sentido o processo de raciocínio é considerado estável."*

Olhamos para as propriedades ($\mid\!\sim_2$), ($\mid\!\sim_3$) e compreendemos melhor o que disse Makinson, pois, expandindo o conjunto Δ com proposições que estão em seu fecho nós não obtemos novas conclusões (corte) e, adicionando-se novas informações ao conjunto Δ (proposições que estão em seu fecho), o conjunto de conclusões não decresce (monotonicidade cautelosa).

Em contraste com os operadores de Tarski, não podemos simplesmente recorrer à definição de operador finitário (se $\alpha \in C(A)$ então $\alpha \in C(A_0)$ para algum subconjunto finito A_0 de A) para estabelecermos uma ponte entre uma relação de conseqüência (não monotônica) envolvendo somente conjuntos finitos e um operador cumulativo. Além disso, se considerarmos a seguinte condição:

$$\alpha \in C(A) \text{ se, e somente se, } \alpha \in C(A_0),$$

para algum subconjunto finito A_0 de A, resulta que C é um operador de Tarski. O que podemos afirmar, segundo Makinson **(Makinson; 1988)**, é que, se $A \subseteq B \subseteq C(A)$ e $B-A$ é um conjunto finito, então $C(A)=C(B)$.

Proposição 1.2.2: Seja uma relação $\mathrel{|\!\sim}$ ($\mathrel{|\!\sim} \subseteq \wp(For(L))$ X For(L)) satisfazendo as propriedades $\mathrel{|\!\sim}_1$, $\mathrel{|\!\sim}_2$, $\mathrel{|\!\sim}_3$, com I unitário em $\mathrel{|\!\sim}_2$ e $\mathrel{|\!\sim}_3$. Então, a aplicação $C: \wp(For(L)) \to \wp(For(L))$, definida por $C(B)=\{ \alpha \mid B \mathrel{|\!\sim} \alpha \}$, para todo $B, A \in \wp(For(L))$, satisfaz as seguintes condições:

(a) $B \subseteq C(\Gamma)$.

(b) $A \subseteq B \subseteq C(A)$ e $B-A$ é um conjunto finito, então $C(A)=C(B)$.

■

As definições de conjunto fechado, aberto e elemento denso em X segundo um operador cumulativo sobre X são análogas às apresentadas anteriormente para os operadores de Tarski. Mais tarde veremos resultados envolvendo relações entre fechados segundo um operador de Tarski e um operador cumulativo, ambos sobre um mesmo conjunto X.

Definição 1.2.3: Seja C um operador cumulativo sobre X. Dizemos que $A \subseteq X$ *é fechado* em X, segundo C, se $A=C(A)$ e A *é aberto* se A^c (complementar de A em relação a X) é fechado. Dizemos ainda que $x \in X$ *é denso* em X, segundo C, se $C(\{x\})=X$.

***Proposição 1.2.4:** Sejam C um operador cumulativo sobre X, $A \subseteq X$ um conjunto qualquer e $(A_i)_{i \in I}$ a família de todos os fechados em X, segundo C, que contêm A. Então, $C(A)=C(\cap_{i \in I} A_i)$. Além disso, A é fechado em X se, e somente se, $A=C(\cap_{i \in I} A_i)$.

Demonstração:

Temos, pela inclusão e idempotência, que C(A) é um fechado que contém A, isto é, $C(A)=A_{i_o}$ para algum $i_o \in I$. Logo, $A \subseteq \cap_{i \in I} A_i \subseteq C(A)$. Daí, pela condição cumulativa, $C(A)=C(\cap_{i \in I} A_i)$. Portanto, $C(A)=C(\cap_{i \in I} A_i)$, tal que $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os fechados em X que contêm A. Deste fato e da definição anterior segue que A é fechado em X se, e somente se, $A=C(\cap_{i \in I} A_i)$.

■

Diferentemente do que ocorre com os operadores de Tarski, ***a interseção de fechados segundo um operador cumulativo não é necessariamente um fechado segundo esse operador***. Vejamos o exemplo a seguir.

***Exemplo 1.2.5:** Sejam Y={a, b, c} e C: $\wp(Y) \rightarrow \wp(Y)$, tal que:

C({a})={a, b}	C({a, b})={a, b}
C({b})={b, c}	C({a, c})={a, c}
C({c})={a, c}	C({b, c})={b, c}
C(∅)=∅	C({a, b, c})={a, b, c}.

Podemos ver facilmente que C é um operador cumulativo, mas, a interseção de conjuntos fechados, segundo o operador C, não é necessariamente um conjunto fechado. De fato, os conjuntos {a, b} e {a, c} são conjuntos fechados, mas o conjunto $\{a, b\} \cap \{a, c\}$ não é um conjunto fechado, pois $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ e C({a})={a, b}.

Anteriormente, vimos que os operadores de conseqüência de Tarski satisfazem algumas propriedades, por exemplo, a Proposição 1.1.2. Entretanto, nem todas essas propriedades permanecem válidas quando o operador envolvido é um operador cumulativo. No próximo resultado veremos que a Proposição 1.1.2 não vale, em geral, para operadores cumulativos.

***Proposição 1.2.6:** Sejam C um operador cumulativo sobre X e I um conjunto indexado tal que, para todo $i \in I$, temos que $A_i \subseteq X$. Então, *não* valem em geral as seguintes propriedades:

(a') $C(\cap_{i\in I}A_i) \subseteq \cap_{i\in I}C(A_i)$.

(b') $\cup_{i\in I}C(A_i) \subseteq C(\cup_{i\in I}A_i)$.

(c') $C(\cup_{i\in I}A_i) = C(\cup_{i\in I}C(A_i))$.

(d') $C(\cap_{i\in I}A_i) = C(\cap_{i\in I}C(A_i))$.

Demonstração:

(a') Sem perda de generalidade, suponhamos que existe um conjunto $J \subseteq I$ tal que, para todo $j \in J$, $C(A_j)=A_j$, e que $C(\cap_{j \in J} A_j) \subseteq \cap_{j \in J} C(A_j)$. Pela inclusão, segue que $\cap_{j \in J} A_j \subseteq C(\cap_{J \in J} A_j)$, ou seja, $\cap_{j \in J} C(A_j) \subseteq C(\cap_{J \in J} A_j)$. Logo, $C(\cap_{j \in J} A_j)=\cap_{j \in J} C(A_j)=\cap_{j \in J} A_j$. Portanto, para uma família qualquer de fechados em X, a interseção de fechados em X é um fechado em X (absurdo, vide Exemplo 1.2.5).

(b') Suponhamos que $\cup_{i \in I} C(A_i) \subseteq C(\cup_{i \in I} A_i)$. Em particular, para $I=\{1, 2\}$, tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, temos que $C(A_1) \cup C(A_2) \subseteq C(A_1 \cup A_2)$. Como $A_1 \cup A_2 = A_2$ e $C(A_1 \cup A_2)=C(A_2)$, então $C(A_1) \subseteq C(A_2)$, para quaisquer conjuntos A_1, $A_2 \subseteq X$ tal que $A_1 \subseteq A_2$. Portanto, se C é um operador cumulativo, então C é um operador de Tarski (absurdo).

(c') Suponhamos que $C(\cup_{i \in I} A_i)=C(\cup_{i \in I} C(A_i))$. Logo, $\cup_{i \in I} C(A_i) \subseteq C(\cup_{i \in I} C(A_i)) \subseteq C(\cup_{i \in I} A_i)$, isto é, $\cup_{i \in I} C(A_i) \subseteq C(\cup_{i \in I} A_i)$, para qualquer conjunto indexado I, tal que, $A_i \subseteq X$ (absurdo, ver (b')).

(d') De fato, no exemplo anterior (Exemplo 1.2.5), temos que $C(\{a\})=\{a, b\}$ e $C(\{b\})=\{b, c\}$. Logo, $C(\{a\}) \cap C(\{b\})=\{b\}$. Daí, $C(C(\{a\}) \cap C(\{b\}))=C(\{b\})=\{b, c\}$. Agora, $C(\{a\} \cap \{b\})=C(\varnothing)=\varnothing$. Portanto, $C(\{a\} \cap \{b\}) \neq C(C(\{a\}) \cap C(\{b\}))$.

■

A Proposição 1.1.5 também não vale, em geral, para os operadores cumulativos. De fato, no Exemplo 1.2.5 temos que, $C(\{a\} \cup \{b\})=\{a, b\}$ é diferente de $C(\{a\} \cup C(\{b\}))=\{a, b, c\}$.

Considerando X um conjunto qualquer na definição de operador cumulativo, propriedades particulares desse conjunto podem não ser relevantes. Agora, quando C é um operador cumulativo sobre uma linguagem formal L, devemos estar atentos a certas propriedades de L.

A partir desse momento, ***o operador C_n sobre L é um operador de Tarski finitário***. Além disso, os operadores C_n e C, respectivamente operador de Tarski e operador cumulativo, são definidos sobre For(L). Seguiremos a linha de estudo proposta por Freund e Lehmann **(Freund, Lehmann; 1993)**, apresentando primeiramente uma relação entre operadores de Tarski e operadores cumulativos (ver também **(Makinson; 1992)**). Como essa relação faz menção a operadores de Tarski e operadores cumulativos, devemos estar atentos quando nos referirmos a conjuntos fechados, ou seja, devemos deixar claro se os conjuntos são fechados segundo um operador de Tarski, um operador cumulativo ou ambos. Vejamos a que relação Freund, Lehmann e Makinson se referem.

Definição 1.2.7: Sejam C_n um operador de Tarski e C um operador cumulativo, ambos sobre uma linguagem L. Se, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C_n(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, dizemos que C é um *operador supraclássico* relativamente a C_n. Denotaremos esse fato por $C_n \leq C$.

Poderíamos considerar no lugar do termo "operador supraclássico" a denominação "operador supradedutivo", pois, como Martins **(Martins; 1997)** chama atenção, a base monotônica não precisa ser caracterizada pelo operador dedutivo clássico. Não devemos confundir um operador de conseqüência monotônico com um operador dedutivo clássico, este último é monotônico, mas, além disso, ele está diretamente associado ao que usualmente chamamos de lógica clássica. Diferentemente de Martins, quando necessário, continuaremos a chamar C de operador supraclássico e não de operador supradedutivo.

Todo operador cumulativo C pode ser considerado um operador supraclássico, pois, sempre existe um operador de Tarski sobre qualquer linguagem formal L. De fato, basta considerarmos o operador de Tarski C_n, do seguinte modo: para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C_n(\Gamma)=\Gamma$. O operador C_n definido deste modo é usualmente denominado operador identidade.

Freund e Lehmann **(Freund, Lehmann; 1993)**, quando definem um operador cumulativo sobre L, além das condições de inclusão, corte e monotonicidade cautelosa, incluem ainda a propriedade supraclássica. Assim, a definição apresentada por Freund e Lehmann é a seguinte.

Definição 1.2.8: Seja C_n um operador de Tarski sobre uma linguagem formal L. Denomina-se *operador cumulativo* a toda aplicação C: $\wp(For(L)) \rightarrow \wp(For(L))$ tal que, para todo Γ, $\Delta \subseteq For(L)$, são satisfeitas as propriedades:

(i) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$ (Inclusão).

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq C(\Gamma) \Rightarrow C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$ (Monotonicidade Cautelosa).

(iii) $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq C(\Gamma) \Rightarrow C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$ (Corte).

(iv) $C_n(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$ (Supraclássica).

Nesta definição não é mencionada a idempotência, pois, esta condição segue da inclusão e do corte. Além disso, segue imediatamente desta definição que $C_n(C(\Gamma))=C(C_n(\Gamma))=C(\Gamma)$, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$. Mais tarde, na Proposição 1.2.13 (p. 25) enfraquecemos este resultado tomando no lugar do operador de Tarski C_n, o operador C*.

Embora Freund e Lehmann considerem conjuntos fechados como conjuntos fechados segundo C_n, eles não estão deixando de considerar conjuntos fechados segundo C, pois como $C(\Gamma)$ é um fechado segundo C_n, é claro que $\Gamma=C_n(\Gamma)$ *se* $\Gamma=C(\Gamma)$. Neste caso, como não há diferença entre $C(\Gamma)$ e $C(C_n(\Gamma))$, então a definição anterior de operador cumulativo pode ser vista como uma aplicação entre teorias, que satisfaz a inclusão.

A partir da definição anterior, de forma mais explícita, vejamos a relação entre a condição supraclássica e os conjuntos fechados em uma determinada linguagem formal L.

***Proposição 1.2.9:** Sejam os operadores cumulativos C* e C sobre L. Se, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, então todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C*.

Demonstração:

De fato, seja Γ fechado em L segundo C, isto é , $\Gamma=C(\Gamma)$. Pela inclusão, $\Gamma\subseteq C^*(\Gamma)$ e, por hipótese, $C^*(\Gamma)\subseteq C(\Gamma)=\Gamma$. Logo, $C^*(\Gamma)=\Gamma$.

■

Observamos que o resultado anterior, na verdade, é válido para quaisquer aplicações C, C^*: $\wp(For(L))\rightarrow\wp(For(L))$, tais que, para todo $\Gamma\subseteq For(L)$, $\Gamma\subseteq C^*(\Gamma)$.

***Corolário 1.2.10:** Sejam os operadores C_n e C, respectivamente operador de Tarski e cumulativo, ambos sobre L. Assim, $C_n\leq C$ se, e somente se, todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C_n.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Segue da proposição anterior.

($\Leftarrow$) Seja $\Gamma\subseteq For(L)$ um conjunto qualquer. Pela inclusão, $\Gamma\subseteq C(\Gamma)$ e, pela monotonicidade, $C_n(\Gamma)\subseteq C_n(C(\Gamma))$. Além disso, $C(\Gamma)$ é fechado segundo C. Daí, por hipótese, $C(\Gamma)=C_n(C(\Gamma))$. Portanto, $C_n(\Gamma)\subseteq C(\Gamma)$.

■

Não podemos afirmar que a recíproca do corolário acima é verdadeira para o caso de operadores cumulativos (operadores cumulativos não monotônicos). De fato, o exemplo abaixo nos mostra que a recíproca do Corolário 1.2.10 não é válida.

***Exemplo 1.2.11:** Sejam $Y=\{a, b, c\}$, o operador cumulativo C do Exemplo 1.2.5 e o operador cumulativo $C':\wp(Y)\rightarrow\wp(Y)$, tal que: $C'(X)=C(X)$ se $X\neq\{a\}$ e, caso contrário, $C'(X)=\{a, c\}$.

É claro que todo fechado segundo C é fechado segundo C' mas, $C'(\{a\})\not\subset C(\{a\})$, pois, $C'(\{a\})=\{a, c\}$ e $C(\{a\})=\{a, b\}$.

A Proposição 1.1.7 recai no escopo do Corolário 1.2.10, bastando que neste corolário ambos os operadores sejam operadores de Tarski. Portanto, como a classe dos operadores de Tarski é uma subclasse da classe dos operadores cumulativos, parece mais apropriado definir um operador mais forte do que outro, do seguinte modo.

***Definição 1.2.12:** Sejam dois operadores cumulativos C^* e C sobre For(L). Dizemos que o *operador C é mais forte que C**, o que denotamos por $C^* \langle\langle C$ se, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$.

Notamos que, ao lidarmos somente com operadores de Tarski, a definição anterior é vista como um resultado que segue diretamente da Definição 1.1.6 (ver também Proposição 1.1.7). Além disso, quando na Definição 1.1.6 o conjunto X é uma linguagem formal L, a definição acima possui um caráter mais geral e, de certa forma, estende a propriedade estudada por Makinson[1] **(Makinson; 1992)**, pois agora os operadores são cumulativos.

Os resultados que utilizam operadores supraclássicos são mantidos, segundo a definição anterior. Vejamos alguns desses resultados.

Proposição 1.2.13: Sejam a aplicação $C^*: \wp(For(L)) \rightarrow \wp(For(L))$ e o operador cumulativo C sobre L, com $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$. Então:

(a) Se C^* satisfaz a idempotência e a inclusão então, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C^*(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$ **(Absorção à esquerda)**.

(b) Se C^* é operador cumulativo então, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C^*(C(\Gamma)) = C(\Gamma) = C(C^*(\Gamma))$ **(Absorção plena ou Absorção à esquerda e à direita)**.

[1] Makinson não considerou a propriedade de $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, para todo $\Gamma \subseteq L$, quando C^* é também cumulativo.

Além disso, se para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C(C^*(\Gamma))=C(\Gamma)$ então, para Γ, $\Delta \subseteq For(L)$, segue que:

(c) Se $C^*(\Gamma)=C^*(\Delta)$, então $C(\Gamma)=C(\Delta)$.

(d) Se $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq C^*(\Gamma)$ e C^* é operador cumulativo, então $C(\Gamma)=C(\Delta)$.

■

As propriedades de absorção citadas na proposição acima podem ser usadas para estabelecer relações entre inferências não monotônicas e conectivos lógicos. Por exemplo, o próximo resultado é conseqüência direta da absorção plena (Proposição 1.2.13 (b)).

Corolário 1.2.14: Sejam os operadores C_n e C, respectivamente operador de Tarski e operador cumulativo supraclássico relativamente a C_n, ambos sobre uma linguagem formal L com conjunção:

(a) Se $\{\alpha, \beta\} \subseteq C(\Gamma)$, então $\alpha \wedge \beta \in C(\Gamma)$.

(b) Se $\alpha \in C(\Gamma)$ e $\beta \in C_n(\{\alpha\})$, então $\beta \in C(\Gamma)$.

■

1.3 Sistemas Default

Apresentaremos nesta seção alguns exemplos de operadores de conseqüência mais fracos que os cumulativos, que se referem à não validade da propriedade cumulativa (monotonicidade cautelosa), isto é, os operadores nestes exemplos não são cumulativos. Para introduzirmos estes exemplos precisamos apresentar algumas definições e resultados sobre sistemas default. Um outro motivo que nos faz apresentar os sistemas default é a tabela a ser apresentada nas Considerações Finais p.101, comparativa entre várias lógicas não monotônicas baseada na validade ou não de várias das propriedades dos operadores apresentados neste capítulo e no Capítulo 2. Na literatura encontramos um material rico e extenso sobre sistemas default, mas, como não pretendemos nos aprofundar neste assunto, o conteúdo aqui apresentado será suficiente. Como referência para o estudo de sistemas default indicamos os artigos **(Reiter; 1980)**, **(Reiter; 1987)** **(Brewka; 1991)**, **(Lukaszewicz; 1990)**, entre outros.

Os sistemas default foram introduzidos por Reiter **(Reiter; 1980)** e tornaram-se uma das principais ferramentas para uma formalização do raciocínio não monotônico. Eles distinguem dois tipos de conhecimento: os fatos que são representados por sentenças clássicas de primeira ordem incumbidas de dar uma descrição incompleta do "mundo"; as regras de manuseio, ou regras default, usadas para completar a descrição deste "mundo". Assim, um *sistema default* é um par <W, D>, onde W é um conjunto de fatos e D é um conjunto de regras default. Uma regra default δ tem a forma,

$$\frac{\alpha(\bar{x}) : \beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_m(\bar{x})}{\gamma(\bar{x})},$$

onde $\alpha(\bar{x}), \beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_m(\bar{x})$ e $\gamma(\bar{x})$ são fórmulas cujas variáveis livres estão entre aquelas de $(\bar{x})=(x_1,\dots,x_n)$.

O significado intuitivo da regra acima é o seguinte: 'se $\alpha(\bar{x})$ é provável e é consistente assumir $\beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_m(\bar{x})$ com tudo que é provável, então conclua $\gamma(\bar{x})$'. $\alpha(\bar{x})$ é chamado de *pré-requisito do default* (ou *pré(δ)*); $\beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_m(\bar{x})$ são as *justificações da regra* (ou *just(δ)*) e $\gamma(\bar{x})$ sua *conclusão* (ou *cons(δ)*). Uma regra default é chamada *normal* se a conclusão coincide com a justificação. *Seminormal*, se a conclusão é parte da justificação, caso contrário, a regra default é chamada *não normal.*

Sistemas default induzem conjuntos de "crenças aceitáveis", também chamados de extensões. A noção de extensão de um sistema default é central, pois, é a partir desta noção que concebemos uma relação de inferência (ou um operador default).

Iremos apresentar somente sistemas default fechados, isto é, nos quais W é um conjunto de fórmulas fechadas (da maneira usual) e D é um conjunto de regras default fechadas, como definido em **(Lukaszewicz; 1990)**. Primeiramente, apresentaremos uma definição de extensão que é considerada operacional **(Antoniou; 1997)**, pois, ela pode ser aplicada diretamente a exemplos concretos. Feito isto, apresentamos a definição usual de extensão encontrada na literatura. É importante salientarmos que as duas noções de extensões são equivalentes.

Para um dado sistema default T=<W, D>, seja $\Pi=(\delta_1, \delta_2, \ldots)$ uma seqüência finita ou infinita de defaults de D sem ocorrências múltiplas. Denotamos por $\Pi[k]$ o segmento inicial de Π de comprimento k. A cada seqüência Π associamos dois conjuntos de fórmulas. Os conjuntos são:

$$In(\Pi)=C_n(W\cup\{cons(\delta): \delta \text{ ocorre em } \Pi\})$$

$$Out(\Pi)=\{\neg\psi: \psi\in just(\delta) \text{ para algum } \delta \text{ ocorrendo em } \Pi\}.$$

Assim, $In(\Pi)$ coleta as informações obtidas pela aplicação dos defaults em Π e representa a *base de conhecimento atual* depois dos defaults em Π terem sido aplicados. O conjunto $Out(\Pi)$ coleta as fórmulas que não deveriam se mostrar verdadeiras, isto é, não deveriam fazer parte da base de conhecimento atual, até mesmo depois da aplicação subseqüente de outros defaults. O operador de conseqüência C_n que aparece em $In(\Pi)$, é o operador de Tarski definido sobre as fórmulas da linguagem utilizada para concebermos os conjuntos W e D.

Definição 1.3.1: Sejam um sistema default T=<W, D> e $\Pi=(\delta_1, \delta_2, \ldots)$ uma seqüência finita ou infinita de defaults de D sem ocorrências múltiplas. Π é chamado um *processo de T* se, e somente se, δ_k é aplicável para $In(\Pi[k])$, para todo k tal que δ_k ocorre em Π.

Quando dizemos que δ_k é *aplicável* para $In(\Pi[k])$ na definição acima, queremos dizer que, para todo k, $just(\delta_k)$ é consistente com $In(\Pi[k])$.

Definição 1.3.2: Sejam um sistema default T=<W, D> e Π um processo de T.

1. Π é *bem sucedido* se, e somente se, $In(\Pi)\cap Out(\Pi)=\varnothing$. Caso contrário, Π é dito *falho*.

2. Π é *fechado* se, e somente se, todo $\delta\in D$ que é aplicável para $In(\Pi)$ já ocorre em Π.

Definição 1.3.3: Um conjunto de fórmulas E é uma *extensão de um sistema default T=<W, D>* se, e somente se, existe algum processo Π de T bem sucedido e fechado, tal que $E=In(\Pi)$.

O processo bem sucedido captura a declaração intuitiva 'nada deu errado', ou seja, foi correto termos assumido as justificações das regras defaults que tinham sido aplicadas: nenhuma fórmula $\neg\psi$ no conjunto Out se tornou parte da base de conhecimento atual, assim foi consistente assumir ψ. O processo fechado Π corresponde à propriedade desejada de uma extensão E: ser fechada sobre aplicação das regras default de D. O exemplo abaixo ilustra os conceitos de processo bem sucedido e fechado.

Exemplo 1.3.4 (Antoniou; 1997, p. 33): Seja o sistema default T=<W, D>, com W={a} e D={δ_1, δ_2}, onde $\delta_1=\frac{a:\neg b}{c}$ e $\delta_2=\frac{true:d}{b}$. Assim, $\Pi_1=(\delta_1)$ é um processo bem sucedido. De fato, $In(\Pi_1)=C_n(\{a, c\})$ e $Out(\Pi_1)=\{b\}$. Logo, $In(\Pi_1)\cap Out(\Pi_1)=\varnothing$. Π_1 não é fechado, pois, δ_2 é aplicável para $In(\Pi_1)$ mas não ocorre em Π_1. Vemos facilmente que $\Pi_2=(\delta_2, \delta_1)$ é um processo fechado que não é bem sucedido. Vejamos o que ocorre com $\Pi_3=(\delta_2)$. $In(\Pi_3)=C_n(\{a, b\})$ e $Out(\Pi_3)=\{\neg d\}$. Logo, $In(\Pi_3)\cap Out(\Pi_3)=\varnothing$. Além disso, δ_1 não é aplicável para $In(\Pi_3)$, pois, $C_n(\{a, b\})$ é inconsistente com $\{\neg b\}$. Portanto, $\Pi_3=(\delta_2)$ é um processo bem sucedido e fechado.

A definição anterior não nos permite concluir que um sistema default sempre possui extensão. A não existência de extensões é um dentre os vários problemas discutidos na literatura acerca de sistemas default, mas, não é objeto deste trabalho tratar destes problemas.

Antes de apresentarmos outros exemplos de sistemas default, vejamos a definição de extensão usual na literatura, que é equivalente à Definição 1.3.3.

Definição 1.3.5: Sejam <W, D> um sistema default (fechado) e C_n um operador de Tarski, ambos sobre uma linguagem de primeira ordem L. Para qualquer conjunto de sentenças $\Gamma \subseteq For(L)$, $\Omega(\Gamma)$ é o menor conjunto de sentenças de For(L) satisfazendo as seguintes condições:

(i) $W \subseteq \Omega(\Gamma)$.

(ii) $\Omega(\Gamma) = C_n(\Omega(\Gamma))$.

(iii) Se $\dfrac{\alpha(\bar{x}) : \beta_1(\bar{x}), \ldots, \beta_m(\bar{x})}{\gamma(\bar{x})} \in D$, $\alpha(\bar{x}) \in \Omega(\Gamma)$ e $\beta_1(\bar{x}), \ldots, \beta_m(\bar{x}) \notin \Gamma$, então $\gamma(\bar{x}) \in \Omega(\Gamma)$.

Um conjunto *$\Theta \subseteq For(L)$ é uma extensão de <W, D>* se, e somente se, $\Theta = \Omega(\Theta)$.

O leitor atento deve ter percebido, através do exemplo anterior, que fixado D, para determinados conjuntos W's podemos ter ou não extensões. O mesmo ocorre se fixarmos W e variarmos o conjunto de regras default. Os dois próximos exemplos **(Antoniou; 1997 p.45)** mostram o que ocorre com as extensões, a partir de mudanças em W e D.

Exemplo 1.3.6: Seja o sistema default T=<W, D>, com $W=\varnothing$ e $D=\{\dfrac{true : a}{a}\}$. Notamos que T possui exatamente a extensão $E=C_n(\{a\})$, mas, expandindo D a partir de quatro novas regras defaults temos as seguintes teorias:

T_1=<W, D$\cup$\{δ_1\}>, com $\delta_1 = \dfrac{true : b}{\neg b}$;

T_2=<W, D$\cup$\{δ_2\}>, com $\delta_2 = \dfrac{b : c}{c}$;

T_3=<W, D$\cup$\{δ_3\}>, com $\delta_3 = \dfrac{true : \neg a}{\neg a}$;

T_4=<W, D$\cup$\{δ_4\}>, com $\delta_4 = \dfrac{a : b}{b}$.

Deixamos para o leitor verificar que:

(a) T_1 não possui extensões.

(b) E é extensão de T_2.

(c) T_3 possui as extensões E e $C_n(\{\neg a\})$.

(d) T_4 possui a extensão $C_n(\{a, b\})$, que contém E.

Exemplo 1.3.7: Seja o sistema default T=<W, D>, com W=$\varnothing$ e o conjunto de regras defaults D=\{δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5\}, onde $\delta_1 = \dfrac{true : a, \neg c}{a}$, $\delta_2 = \dfrac{a : b, \neg c}{b}$, $\delta_3 = \dfrac{true : \neg a,\ c}{c}$,

$\delta_4 = \dfrac{d : e}{e}$ e $\delta_5 = \dfrac{f : g}{\neg g}$. A teoria T possui as extensões $E_1 = C_n(\{a, b\})$ e $E_2 = C_n(\{c\})$.

Consideremos quatro novas teorias. São elas:

T_1=<W_1, D>, com W_1=\{f\};

T_2=<W_2, D>, com W_2=\{$\neg$a\};

T_3=<W_3, D>, com W_3=\{$\neg$a, $\neg$c, d\};

T_4=<W_4, D>, com W_4=\{d\}.

É fácil verificarmos que:

(a) T_1 não possui extensões.

(b) T_2 possui somente $C_n(\{\neg a, c\})$ como extensão.

(c) T_3 possui [redacted] a [redacted] extensão $C_n(\{\neg a, \neg c, d, e\})$.

(d) T_4 possui as extensões $C_n(E_1 \cup \{d, e\})$ e $C_n(E_2 \cup \{d, e\})$.

Devido às diversas mudanças ocorridas com as extensões a partir de mudanças em W ou D, surgem questões do tipo: Onde está a natureza não monotônica dos sistemas default? Está em W ou D?

Antoniou **(Antoniou; 1997 p.45)** nos dá uma resposta para estas perguntas com o seguinte comentário:

> "... *usualmente quando falamos da natureza não monotônica do sistema default estamos nos referindo à não monotonicidade em W. A razão é que defaults são vistos como regras de longo prazo que gostaríamos de manter tão duradouras quanto possível, uma vez que o conjunto de fatos pode variar; uma parte do conjunto de fatos W pode ser, por exemplo, as observações de um caso concreto, ao passo que os defaults determinam o comportamento do sistema de conhecimento para todos os casos possíveis".*

Recordamos que a monotonicidade cautelosa é expressa pela condição,

$$y \in C(W) \text{ e } x \in C(W) \Rightarrow x \in C(W \cup \{y\}).$$

Esta formulação não é adequada para sistemas default, ou seja, para verificarmos a validade ou não da monotonicidade cautelosa e de outras propriedades (distributiva, dedutiva, entre outras) uma nova formulação deve ser apresentada. Lembramos que um operador de conseqüência (ou cumulativo) C sobre uma linguagem formal L é um operador sobre o conjunto For(L). No caso de sistemas default, o operador é concebido em termos de extensões e as extensões estão relacionadas diretamente com um conjunto de fórmulas e regras (regras default). Para concebermos um operador default nos termos da definição de operador cumulativo, definimos o operador default $C_D: \wp(For(L)) \rightarrow \wp(For(L))$, a partir de um conjunto D de regras default fixado.

O operador default C_D é dito *cético* se $C_D(\Gamma)=\cap e(\Gamma)$, onde para cada $\Gamma \subseteq For(L)$, $e(\Gamma)=\{E$: E é uma extensão do sistema default $<\Gamma, D>\}$. Se $C_D(\Gamma)=E$, onde E é uma extensão arbitrariamente escolhida de $e(\Gamma)$, então o operador default C_D é dito *crédulo*.

Apresentamos abaixo dois exemplos simples, o primeiro devido a Makinson **(Makinson; 1988)**. Nestes exemplos vemos que nem sempre o operador default cético (crédulo) satisfaz a monotonicidade cautelosa.

Exemplo 1.3.8 (Regra default normal): Sejam o conjunto de regras default $D=\{\frac{:p}{p}, \frac{p \vee q : \neg p}{\neg p}\}$ e o operador default cético $C_D: \wp(For(CPC)) \rightarrow \wp(For(CPC))$. Agora, tomamos $\Gamma=\emptyset$ e $\Delta=\{p \vee q\}$. É fácil vermos que a única extensão do sistema default $<\Gamma, D>$ é $C_n(\{p\})$. Logo, $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq C_D(\Gamma)=C_n(\{p\})$. Mas, o sistema default $<\Delta, D>$ possui as extensões $C_n(\{\neg p, q\})$ e $C_n(\{p\})$. Desde que $p \in C_D(\Gamma)$ e $C_D(\Delta) \subseteq C_n(\{\neg p, q\})$, é claro que $C_D(\Gamma) \not\subset C_D(\Delta)$, pois, $p \notin C_n(\{\neg p, q\})$.

Exemplo 1.3.9: Sejam o conjunto de regras default $D=\{\frac{:\neg q}{p}, \frac{p:}{r}, \frac{r:\neg p}{q}\}$ e o operador default cético $C_D: \wp(For(CPC)) \rightarrow \wp(For(CPC))$. Agora, tomamos $\Gamma=\emptyset$ e $\Delta=\{r\}$. Temos que a única extensão do sistema default $<\Gamma, D>$ é $C_n(\{p, r\})$. Logo, $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq C_D(\Gamma)=C_n(\{p, r\})$. Por outro lado, o sistema default $<\Delta, D>$ possui apenas duas extensões, $C_n(\{p, r\})$ e $C_n(\{q, r\})$. Logo, $C_D(\Delta)=C_n(\{p, r\}) \cap C_n(\{q, r\})=C_n(\{r\})$. Portanto, $C_D(\Gamma) \not\subset C_D(\Delta)$, pois, $p \in C_D(\Gamma)$ mas $p \notin C_D(\Delta)$.

Nos exemplos acima, se considerarmos C_D o operador default crédulo e tomarmos $C_n(\{\neg p, q\})$ como a extensão do sistema default $<\Delta, D>$ no Exemplo 1.3.8, e $C_n(\{q, r\})$ no Exemplo 1.3.9, então o operador default crédulo nestes exemplos também não satisfaz a monotonicidade cautelosa. Observamos ainda que, no Exemplo 1.3.9, diferentemente do Exemplo 1.3.8, as regras default não são normais e nem seminormais.

Em geral, os operadores default céticos não satisfazem a monotonicidade cautelosa, mas, as propriedades do corte e da absorção plena são satisfeitas por estes operadores se as regras default forem normais (seminormais), pois, um sistema default com em todos os resultados, a definição de operador cumulativo diz respeito à Definição 1.2.8, ou seja, a partir daqui, **até o final deste capítulo o operador C é supraclássico.**

Definição 2.1.1: Sejam C um operador cumulativo supraclássico e C_n um operador de Tarski, ambos sobre L. O operador C é *distributivo*, relativamente a C_n se, e somente se, satisfaz a seguinte propriedade, para todos Γ, Δ, $\Phi \subseteq For(L)$:

$$C(\Gamma \cup \Delta) \cap C(\Gamma \cup \Phi) \subseteq C(\Gamma \cup (C_n(\Delta) \cap C_n(\Phi))).$$

Notamos que, se um operador de Tarski C_n é admissível (ver Definição 1.1.14) então, de acordo com a propriedade distributiva destacada na definição anterior, ao considerarmos somente o operador C_n sobre L, C_n satisfaz a propriedade acima (propriedade distributiva).

Desde que C, na definição anterior, é supraclássico, poderíamos definir a propriedade distributiva da seguinte maneira: para conjuntos fechados Γ, Δ, $\Phi \subseteq For(L)$,

$$C(\Gamma \cup \Delta) \cap C(\Gamma \cup \Phi) \subseteq C(\Gamma \cup (\Delta \cap \Phi)).$$

Ou seja, vale o resultado a seguir.

Proposição 2.1.2: Sejam C_n um operador de Tarski e C um operador cumulativo supraclássico relativamente a C_n, ambos sobre L. São equivalentes as seguintes afirmações:

(a) O operador C é distributivo relativamente a C_n.

(b) Para conjuntos fechados Γ, Δ, $\Phi \subseteq For(L)$ segundo C_n,

$$C(\Gamma \cup \Delta) \cap C(\Gamma \cup \Phi) \subseteq C(\Gamma \cup (\Delta \cap \Phi)).$$

Demonstração:

(a)$\Rightarrow$(b) Segue trivialmente da Definição 2.1.1.

(b)⇒(a) De fato, sejam os conjuntos Γ, Δ, $\Phi\subseteq For(L)$. Pela Proposição 1.1.2 (a), temos que $C_n(\Gamma\cup(\Delta\cap\Phi))=C_n((\Gamma\cup\Delta)\cap(\Gamma\cup\Phi))\subseteq C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi)$. Por outro lado, $C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C_n(C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi))$ e daí, pela Proposição 1.1.2 (d) segue que $C_n(C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi))=C(\Gamma\cup(\Delta\cap\Phi))$. Portanto,

$$C_n(\Gamma\cup(\Delta\cap\Phi))=C_n(\Gamma\cup\Delta)\cap C_n(\Gamma\cup\Phi) \qquad (\clubsuit).$$

Agora, $\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))$.

De ($\clubsuit$), juntamente com a Proposição 1.1.2 (b), resulta que $C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C_n(\Gamma\cup(\Delta\cap\Phi))\subseteq C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))$. Como C é supraclássico, então $C_n(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))\subseteq C(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))$ e daí, pela condição cumulativa,

$$C(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))=C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi))) \qquad (\blacklozenge).$$

Pois bem, novamente pela Proposição 1.1.2 (b) e propriedade supraclássica de C, verificamos que $C(\Gamma\cup\Delta)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Delta))$ e $C(\Gamma\cup\Phi)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Phi))$. Logo, $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)=C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Delta))\cap C(C_n(\Gamma)\cup C_n(\Phi))$. Como $C_n(\Delta)$ e $C_n(\Phi)$ são fechados, por hipótese segue que $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C(C_n(\Gamma)\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$. Portanto, este resultado, juntamente com ($\blacklozenge$), implica que $C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C(\Gamma\cup(C_n(\Delta)\cap C_n(\Phi)))$.

■

Pelo Lema 1.1.16, se a linguagem L tem disjunção, podemos também formular a propriedade distributiva do seguinte modo: para Γ, Δ, $\Phi\subseteq For(L)$,

$$C(\Gamma\cup\Delta)\cap C(\Gamma\cup\Phi)\subseteq C(\Gamma\cup(\Delta\vee\Phi)),$$

com $\Delta\vee\Phi=\{\delta\vee\phi\colon \delta\in\Delta \text{ e } \phi\in\Phi\}$.

A distributividade não constitui um caso especial da monotonicidade. De fato, como exemplo, consideremos o CPC e definamos $C\colon\wp(For(CPC))\to\wp(For(CPC))$, do seguinte modo:

$$C(\Gamma)=\begin{cases} For(CPC) & \text{se} \quad C_n(\Gamma)\neq C_n(\varnothing);\\ C_n(\varnothing) & \text{caso contrário}.\end{cases}$$

Lembrando que o operador C_n corresponde à relação de conseqüência sintática do CPC, temos que o operador C é monotônico, cumulativo e não distributivo.

A versão finitária da propriedade distributiva na Definição 2.1.1 é a seguinte regra:

$$\frac{\alpha \mid\sim \gamma, \ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma} \quad \text{(Regra or).}$$

É claro que a linguagem L precisa possuir disjunção para podermos formular esta regra. Uma relação de conseqüência cumulativa que satisfaz a Regra or é chamada de *relação preferencial*. Se estivermos usando a notação de operador de conseqüência ($\gamma \in C(\{\alpha\})$ e $\gamma \in C(\{\beta\})$, então $\gamma \in C(\{\alpha \vee \beta\})$) o operador C é chamado de *operador preferencial*. Aliás, vejamos este resultado na proposição abaixo. Para mais detalhes e informações, ver **(Krauss, Lehmann, Magidor; 1990)**.

Proposição 2.1.3: Seja C um operador cumulativo supraclássico distributivo sobre L. Então, C satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $C(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap C(\Gamma \cup \{\beta\}) \subseteq C(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\})$.

(b) $C(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap C(\Gamma \cup \{\neg\alpha\}) \subseteq C(\Gamma)$.

(c) Se $\beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\})$, então $\alpha \rightarrow \beta \in C(\Gamma)$.

■

É claro que na proposição acima exigimos que a linguagem L, além da disjunção, tenha negação forte e implicação.

Vejamos no exemplo abaixo que um operador default, em geral, não satisfaz a propriedade distributiva.

Exemplo 2.1.4: Sejam o conjunto de regras default $D=\{\frac{a:c}{c}, \frac{\neg a:c}{c}\}$ e o operador default cético $C_D: \wp(For(CPC)) \rightarrow \wp(For(CPC))$. Logo, $c \in C_D(\{a\})$ e

$c \in C_D(\{\neg a\})$, mas, $c \notin C_D(\varnothing)$. Logo, pela proposição acima, item (b), segue que C_D não é distributivo.

Uma propriedade central quando lidamos com um operador de Tarski C_n é dada pelo Teorema da Dedução: $\alpha \to \beta \in C_n(\Gamma)$ se, e somente se, $\beta \in C_n(\Gamma \cup \{\alpha\})$ (ver Definição 1.1.10 pág. 11). Ao abandonarmos a monotonicidade, pelo menos uma das direções do teorema da dedução não necessariamente será válida. De fato, consideremos o CPC e o operador C cumulativo supraclássico distributivo relativamente a C_n (C_n operador de conseqüência sintática do CPC). Além disso, suponhamos que $\varphi \in C(\Gamma)$ e o operador C satisfaz a seguinte direção do teorema da dedução:

$$\text{se } \alpha \to \varphi \in C(\Gamma), \text{ então } \varphi \in C(\Gamma \cup \{\alpha\}) \qquad (*).$$

Como $\alpha \to \varphi \in C_n(\{\varphi\})$ então, pelo Corolário 1.2.14 (b), segue que $\alpha \to \varphi \in C(\Gamma)$. Logo, por (*) temos que $\varphi \in C(\Gamma \cup \{\alpha\})$, ou seja, de certo modo vale a monotonicidade, pois, neste caso, $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$ implica que $C(\Gamma) \subseteq C(\Gamma \cup \{\alpha\})$, para todo $\Gamma \subseteq For(CPC)$.

Na proposição anterior, item (c), no caso de um operador cumulativo supraclássico distributivo, temos a direção do teorema da dedução que é válida.

Vejamos, a seguir, que um operador cumulativo C define uma relação de ordem sobre os conjuntos fechados segundo C_n.

Definição 2.1.5: Sejam C um operador cumulativo e Γ, Δ conjuntos fechados segundo C_n em L. Dizemos que $\Gamma \preccurlyeq_C \Delta$ se, e somente se, $\Gamma \subseteq C(\Gamma \cap \Delta)$.

Da mesma forma como definimos um conjunto trivial segundo um operador de Tarski sobre uma linguagem L, definiremos um conjunto trivial segundo um operador cumulativo.

Definição 2.1.6: Seja C um operador cumulativo sobre L e $\Gamma \subseteq For(L)$. Dizemos que Γ é *C-trivial* se $C(\Gamma)=For(L)$, caso contrário dizemos que *Γ não é C- trivial.*

Nesta definição Freund e Lehmann **(Freund, Lehmann; 1993)** consideram o conceito de C-inconsistente em vez do de C-trivial, mas, devido ao nosso interesse em podermos futuramente também trabalhar com lógicas paraconsistentes, optamos pela noção mais geral de C-trivialização, no lugar de C-inconsistência.

Os lemas apresentados abaixo nos permitem concluir que a relação $\prec_C$ é uma pré-ordem. Para demonstração, ver **(Freund, Lehmann; 1993)**.

Lema 2.1.7: Seja C um operador cumulativo sobre L. Para conjuntos fechados Γ, Δ, segundo C_n, temos que:

(a) Se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Gamma \prec_C \Delta$, em particular $\prec_C$ é reflexiva.

(b) $\Gamma \prec_C \Delta$ se, e somente se, $C(\Gamma)=C(\Gamma \cap \Delta)$.

(c) Se $\Gamma \prec_C \Delta$ e Γ é trivial, então Δ é trivial.

(d) Se $\Gamma \prec_C \Delta$ e $\Delta \prec_C \Gamma$, então $C(\Gamma)=C(\Delta)$.

(e) $\Gamma \prec_C C(\Gamma)$.

(f) $C(\Gamma) \prec_C \Gamma$.

■

Lema 2.1.8: Seja C um operador distributivo sobre L. As seguintes propriedades são equivalentes e satisfeitas por C:

(a) Para quaisquer fechados Γ, $\Delta \subseteq For(L)$, segundo C_n, $C(\Gamma) \cap C(\Delta) \subseteq C(\Gamma \cap \Delta)$.

(b) Para quaisquer conjuntos fechados Γ, $\Delta \subseteq For(L)$, segundo C_n, se $\Delta \subseteq C(\Gamma)$ então $\Delta \prec_C \Gamma$.

■

Lembramos que no lema anterior consideramos os conjuntos fechados segundo C_n, pois o operador C é supraclássico.

O operador cumulativo C é dito *fracamente distributivo* se satisfaz as condições (a) e (b) do lema anterior. Embora à primeira vista não pareça, não é tão fraco dizer que C é fracamente distributivo.

Proposição 2.1.9: Seja C um operador fracamente distributivo sobre L. Se C_n é admissível, então C é distributivo.

Demonstração:

Conseqüência imediata da Proposição 2.1.2.

■

Lema 2.1.10: Seja C um operador distributivo sobre L. Para quaisquer conjuntos Γ, Δ, Ψ, $\Phi \subseteq For(L)$, temos que:

(a) $\Delta \subseteq C(\Gamma) \Rightarrow C(\Delta)=C(C_n(\Gamma) \cap C_n(\Delta))$.

(b) $\Gamma \prec_C \Delta$ e $\Psi \prec_C \Phi \Rightarrow \Gamma \cap \Psi \prec_C \Delta \cap \Phi$.

■

Estamos agora em condições de verificar que a relação $\prec_C$ é transitiva, portanto uma pré-ordem.

Teorema 2.1.11: Seja C um operador distributivo sobre L. Então, a relação $\prec_C$ é transitiva e, portanto, uma pré-ordem.

Demonstração:

Pela parte (a) do Lema 2.1.7 temos que a relação $\prec_C$ é reflexiva. Assim, basta mostrarmos que, se $\Gamma \prec_C \Delta$ e $\Delta \prec_C \Phi$ então $\Gamma \prec_C \Phi$. Pois bem, suponhamos que $\Gamma \prec_C \Delta$ e $\Delta \prec_C \Phi$. Daí, pela parte (b) do Lema 2.1.10 segue que $\Gamma \cap \Delta \prec_C \Delta \cap \Phi$. Logo, $C(\Gamma \cap \Delta)=C(\Gamma \cap \Delta \cap \Phi)$ (parte (b) do Lema 2.1.7). Como $\Gamma \prec_C \Delta$, pelo mesmo motivo, $C(\Gamma)=C(\Gamma \cap \Delta)$. De $\Gamma \prec_C \Delta$ e $\Phi \prec_C \Phi$ segue que $\Gamma \cap \Phi \prec_C \Delta \cap \Phi$, e daí $C(\Gamma \cap \Phi)=C(\Gamma \cap \Delta \cap \Phi)$ (parte (b) do Lema 2.1.7). Como $C(\Gamma)=C(\Gamma \cap \Delta)$, segue que $C(\Gamma)=C(\Gamma \cap \Phi)$, isto é, $\Gamma \prec_C \Phi$.

■

O próximo resultado fornece-nos uma outra visão sobre o significado da relação $\mid\!\sim_C$.

Proposição 2.1.12: Seja C um operador cumulativo distributivo sobre L. As seguintes propriedades são equivalentes:

(a) $\Gamma \mid\!\sim_C \Delta$.

(b) Existe $\Delta' \subseteq C_n(\Delta)$ tal que $\Gamma \subseteq C(\Delta')$.

(c) Existe $\Delta' \subseteq C_n(\Delta)$ tal que $C(\Gamma)=C(\Delta')$.

■

Observamos que em todos os resultados, do Lema 2.1.7 até a Proposição 2.1.9, temos que os conjuntos fechados são fechados segundo C_n. Nas demonstrações desses resultados não utilizamos o fato de que o operador C_n é finitário. Assim, os resultados valem para operadores de Tarski em geral.

2.2 Operadores Cumulativos Dedutivos

Introduzimos a seguir a família dos operadores cumulativos que satisfazem a propriedade chamada por Freund e Lehmann **(Freund, Lehmann; 1993)** de propriedade dedutiva. Esta propriedade é análoga a versão infinitária da seguinte regra:

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \rightarrow \gamma}.$$

Esta regra foi sugerida por Y. Shoham **(Shoham; 1988)** e é chamada em **(Kraus, Lehmann, Magidor; 1990)** de *regra S*.

Definição 2.2.1: Sejam C um operador cumulativo supraclássico e C_n um operador de Tarski, ambos sobre L. O operador C é *dedutivo*, relativamente a C_n , se satisfaz a seguinte propriedade, para conjuntos Γ, $\Delta \subseteq For\ (L)$:

$C(\Gamma \cup \Delta) \subseteq C_n(\Gamma \cup C(\Delta))$ (Propriedade Dedutiva).

Se considerarmos somente um operador de Tarski sobre L, segue trivialmente da monotonicidade que $C_n(\Gamma \cup \Delta) \subseteq C_n(\Gamma \cup C_n(\Delta))$. Aliás, na Proposição 1.1.5 mostramos que vale a igualdade, isto é, $C_n(\Gamma \cup \Delta) = C_n(\Gamma \cup C_n(\Delta))$.

Notamos que, se a linguagem L tem implicação e C é um operador dedutivo, temos que: se $\alpha \in C(\Gamma \cup \{\beta\})$, então $\beta \rightarrow \alpha \in C(\Gamma)$. Aliás, isto também vale se C é um operador distributivo (ver Proposição 2.1.3 (c)).

É interessante observarmos aqui, o caso das lógicas polivalentes de Lukasiewicz. Se, na definição acima, considerarmos o operador *Ded* no lugar de C, que nas lógicas polivalentes de Lukasiewicz representa o conjunto das fórmulas demonstráveis, isto é, $Ded(\Theta)$ é o conjunto das fórmulas demonstráveis a partir do conjunto de fórmulas Θ, não podemos tomar como verdadeira a propriedade dedutiva acima relativamente ao operador $\rightarrow$ primitivo, pois, no caso das lógicas polivalentes de Lukasiewicz, pode acontecer que $\alpha \in Ded(\Gamma \cup \{\beta\})$ sem que $\beta \rightarrow \alpha \in Ded(\Gamma)$. De fato, no cálculo infinitovalente de Lukasiewicz, a versão do teorema da Dedução é a seguinte (ver **(Cignoli, D'Ottaviano, Mundici; 1994)**):

se α e β são fórmulas então, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $\alpha \in Ded(\Gamma \cup \{\beta\})$ se, e somente se, existe um número natural η_α tal que $(\beta^{\eta\alpha} \rightarrow \alpha) \in Ded(\Gamma)$ [1].

Além disso, o operador *Con*, que nas lógicas de Lukasiewicz representa o operador de conseqüência semântica, isto é, $Con(\Theta)$ é o conjunto das conseqüências semânticas do conjunto de fórmulas Θ, não coincide com *Ded*. De fato, nessas lógicas, não

[1]Para todo número natural n, $\alpha \rightarrow_0 \beta =_{df} \beta$ e $\alpha \rightarrow_{n+1} \beta =_{df} \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow_n \beta)$. A partir deste fato, juntamente com outras definições que não são mencionadas aqui, verificamos que $\alpha \rightarrow_n \beta = \alpha^n \rightarrow \beta$.

vale, em geral, que Con(Θ)=Ded(Θ). Wójcicki **(Wójcicki; 1973, 1978),** mostra um exemplo dando um conjunto de fórmulas Θ para o qual Con(Θ)$\neq$Ded(Θ). Este exemplo também pode ser visto em **(Cignoli, D'Ottaviano, Mundici; 1994 p. 126)**.

Anteriormente vimos que a Proposição 1.1.5 não vale em geral para os operadores cumulativos, mas, para os operadores dedutivos esta proposição passa a valer parcialmente. De fato, para quaisquer conjuntos, Γ, $\Delta\subseteq$For(L), tais que $C(\Gamma\cup\Delta)\subseteq C_n(\Gamma\cup C(\Delta))$, pela condição supraclássica temos que $C_n(\Gamma\cup C(\Delta))\subseteq C(\Gamma\cup C(\Delta))$. Com isso demonstramos o seguinte resultado.

***Proposição 2.2.2:** Seja C um operador dedutivo sobre L. Então, para quaisquer, $\Gamma,\Delta\subseteq$For(L), $C(\Gamma\cup\Delta)\subseteq C(\Gamma\cup C(\Delta))$.

■

Vejamos alguns resultados sobre os operadores dedutivos. Esses resultados são encontrados em **(Freund, Lehmann; 1993).**

Proposição 2.2.3: Seja C um operador cumulativo sobre L. As seguintes propriedades são equivalentes, para $\Gamma,\Delta \subseteq$For(L):

(a) C é um operador dedutivo.

(b) Se $\Gamma\subseteq\Delta$, então $C(\Delta)\subseteq C_n(\Delta\cup C(\Gamma))$.

(c) Se $\Gamma\mid\!\sim_C\Delta$, então $C(\Delta)\subseteq C_n(\Delta\cup C(\Gamma))$.

■

Proposição 2.2.4: Seja C um operador dedutivo e distributivo sobre L. Se $\Gamma\mid\!\sim_C\Delta\mid\!\sim_C\Phi$, então $\Delta\subseteq C_n(\Phi\cup C(\Gamma))$.

■

O próximo resultado é interessante, ele nos fornece uma condição para um operador dedutivo ser monotônico e finitário.

Proposição 2.2.5: Seja C um operador dedutivo sobre L tal que, para qualquer $\Gamma\subseteq For(L)$, $C(\emptyset)\subseteq C(\Gamma)$. Então, C é monotônico e finitário. Além disso, $C(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))$.

Demonstração:

Por hipótese o operador C é dedutivo, então $C(\Gamma)\subseteq C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))$. Por outro lado, $C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))\subseteq C(C(\emptyset)\cup\Gamma)$. Novamente, pela propriedade dedutiva, $C(C(\emptyset)\cup\Gamma)\subseteq C_n(C(\emptyset)\cup C(\Gamma))$, então $C_n(C(\emptyset)\cup C(\Gamma))=C_n(C(\Gamma))=C(\Gamma)$, pois, $C(\emptyset)\subseteq C(\Gamma)$, Portanto, $C(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))$.

Mostramos agora que C é monotônico. Como C é cumulativo, basta mostrar que, para conjuntos $\Gamma,\Delta\subseteq For(L)$, tal que $\Gamma\subseteq\Delta$, então $C(\Gamma)\subseteq C(\Delta)$. Temos que $C(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))$ (demonstrado acima). Por hipótese, $C(\emptyset)\subseteq C(\Delta)$ e $\Gamma\subseteq\Delta$. Logo, $\Gamma\cup C(\emptyset)\subseteq\Delta\cup C(\Delta)=C(\Delta)$. Pela monotonicidade de C_n e absorção plena (ver Proposição 1.2.13 (b)) segue que $C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))\subseteq C_n(\Delta\cup C(\Delta))=C(\Delta)$. Logo, $C(\Gamma)\subseteq C(\Delta)$.

Finalizamos, demonstrando que C é um operador finitário. De fato, para qualquer subconjunto finito $\Gamma'\subseteq\Gamma$, como o operador C é monotônico, segue que $C(\Gamma')\subseteq C(\Gamma)$. Logo, $\cup\{C(\Gamma')\colon \Gamma'\subseteq\Gamma$ é um subconjunto finito de $\Gamma\}\subseteq C(\Gamma)$. Basta mostrarmos que $C(\Gamma)\subseteq\cup\{C(\Gamma')\colon \Gamma'\subseteq\Gamma$ é um subconjunto finito de $\Gamma\}$, isto é, se $\alpha\in C(\Gamma)$ existe um subconjunto finito $\Theta\subseteq\Gamma$, tal que, $\alpha\in C(\Theta)$. De fato, se $\alpha\in C(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup C(\emptyset))$ então existe um subconjunto finito $\Phi\subseteq(\Gamma\cup C(\emptyset))$, tal que $\alpha\in C_n(\Phi)$. Logo, $\Phi=\Theta\cup\Omega$, com Θ e Ω subconjuntos finitos de Γ e $C(\emptyset)$, respectivamente. Assim, $C_n(\Phi)=C_n(\Theta\cup\Omega)\subseteq C_n(\Theta\cup C(\emptyset))$, pois, $\Omega\subseteq C(\emptyset)$. Mas, $C_n(\Theta\cup C(\emptyset))=C(\Theta)$ (demonstrado acima). Portanto, $\alpha\in C(\Gamma)$ implica que $\alpha\in C(\Theta)$, onde Θ é um subconjunto finito de Γ.

■

Os últimos resultados desta seção referem-se à família dos operadores dedutivos e à família dos operadores distributivos. Estes resultados, de certa forma, relacionam as propriedades distributiva e dedutiva com certas características da linguagem sobre a qual o operador cumulativo está definido.

Proposição 2.2.6: Se o operador de Tarski C_n sobre L é admissível, qualquer operador dedutivo sobre L é distributivo relativamente a C_n.

■

Na próxima seção, apresentando os Sistemas de Poole veremos que a recíproca da proposição acima não é verdadeira.

Quando dizemos que o operador cumulativo C sobre L é um *operador de conseqüência sobre partes finitas de L*, estamos dizendo que o domínio de C é o conjunto constituído pelos subconjuntos finitos de fórmulas de L ($\wp_f$(For(L)).

Proposição 2.2.7: Seja C um operador dedutivo sobre partes finitas de L. Se a linguagem L tem disjunção, então C é um operador distributivo.

■

Proposição 2.2.8: Seja C um operador distributivo sobre partes finitas de L. Se L tem conjunção, disjunção e negação forte, então C é um operador dedutivo.

■

Terminamos esta seção com uma espécie de recíproca das Proposições 2.2.5 e 2.2.6. Exibiremos exemplos de operadores distributivos e dedutivos introduzindo, na próxima seção, os Sistemas de Poole.

Proposição 2.2.9: Seja C um operador distributivo, monotônico e finitário sobre uma linguagem L. Se L possui conjunção, disjunção e negação forte, então o operador C é dedutivo.

■

2.3 Sistemas de Poole

D. Poole introduziu um formalismo para raciocínio não monotônico, que pode ser considerado como um método para concebermos alguns tipos de operadores, por exemplo, operadores distributivos e operadores dedutivos. Apresentamos algumas definições e resultados sobre esse formalismo, cujas demonstrações são encontradas em **(Poole; 1988)** ou **(Freund, Lehmann; 1993 p. 51-55)** entre outros.

Definição 2.3.1: Seja L uma linguagem formal. Um *sistema de Poole* é um par <D, K> de conjuntos de fórmulas de L. O conjunto D é chamado *conjunto de defaults* e o conjunto K é chamado *conjunto de restrições*.

Definição 2.3.2: Um sistema de Poole <D, K> é *finito* se, e somente se, o conjunto de defaults é finito; <D, K> é chamado *sem restrições* se, e somente se, o conjunto K é vazio.

Intuitivamente, um default é uma fórmula aceita para fazer parte de uma explicação de algo que se espera (deve) ser verdadeiro. Notamos, por exemplo, que a afirmação "pássaros voam" pode ser expressa como o default $\Delta=\{\text{pássaro}(x)\Rightarrow\text{voa}(x)\}$. Assim, para um particular elemento b, se pássaro(b) podemos provar que voa(b), contanto que o default não tenha sido contrariado para aquele b particular, ou seja, se pássaro(b) e $\neg$voa(b) são assumidos, o default é contrariado por este b particular e não pode ser usado. Lembramos que os sistemas default apresentados no Capítulo 1 são semelhantes aos sistemas de Poole. Além disso, não há conflito entre a idéia de default apresentada aqui com a de regra default do capítulo anterior.

Exemplo 2.3.3: Consideramos o default Δ={pássaro(x)$\Rightarrow$voa(x)} e o conjunto de fatos $\Im$={$\forall$x ema(x)$\Rightarrow$pássaro(x), $\forall$x ema(x)$\Rightarrow\neg$voa(x), ema(Polly), pássaro(Grog)}.

Assim, voa(Grog) é obtido por {pássaro(Grog)$\Rightarrow$voa(Grog)}, que é consistente com o conjunto de fatos $\Im$. Isso deve ser traduzido da seguinte maneira: esperamos que Grog voe, pois Grog é um pássaro e sabemos que pássaros, pelo default (Δ), voam, e não há razão para acreditarmos que Grog não voe. O mesmo não podemos afirmar sobre Polly, isto é, não podemos obter que voa(Polly), pois {pássaro(Polly)$\Rightarrow$voa(Polly)} não é consistente com o conjunto de fatos $\Im$.

As restrições (conjunto de restrições) podem ser usadas para limitar o uso dos defaults, isto é, para impedir que um default d seja aplicável sob circunstâncias c. Podemos também usar as restrições para impedir que o uso de um determinado default d (que nos permite derivar b$\rightarrow$c) derive $\neg$b de $\neg$c, simplesmente adicionando a restrição $\neg$c$\rightarrow\neg$d.

Definição 2.3.4: Sejam uma linguagem formal L, C_n um operador de Tarski sobre L, um sistema de Poole <D, K> e um conjunto $\Gamma\subseteq$For(L). Um subconjunto $\Delta\subseteq$D é uma *base* para Γ se, e somente se, $C_n(\Gamma\cup\Delta\cup K)\neq$For(L) e Δ é um subconjunto maximal de D com essa propriedade. Denotamos o conjunto de todas as bases de Γ por B(Γ).

Nas condições da definição anterior, o operador definido pelo sistema de Poole <D, K> é o operador

$$C(\Gamma) = \bigcap_{\Delta \in B(\Gamma)} C_n(\Gamma \cup \Delta) \qquad (*).$$

Existem dois casos limites a serem considerados. No caso em que B(Γ)=$\varnothing$, temos que C(Γ)=For(L). No caso em que B(Γ)=D, temos que C(Γ)=$C_n(\Gamma\cup D)$.

Proposição 2.3.5: Seja C o operador definido em (*). Então,

(a) C é um operador cumulativo supraclássico.

(b) Para qualquer $\Delta \in B(\Gamma)$, $C_n(C(\Gamma) \cup \Delta) = C_n(\Gamma \cup \Delta)$.

■

Lema 2.3.6: Seja C o operador definido em (*) e assumamos que existe uma fórmula $\alpha \in For(L)$ com $C_n(\{\alpha\}) = For(L)$. Se Ψ, $\Gamma \subseteq For(L)$, tais que $\Gamma \subseteq \Psi$ e $\Delta \in B(\Psi)$, então existe um conjunto $\Delta' \in B(\Gamma)$ tal que $\Delta \subseteq \Delta'$.

■

A seguir, vejamos dois resultados que nos permitem conceber operadores distributivos e operadores dedutivos. O primeiro resultado é devido a Makinson.

Teorema 2.3.7: Sejam uma linguagem formal L e C_n um operador de Tarski admissível sobre L, tal que existe uma fórmula $\alpha \in For(L)$ com $C_n(\{\alpha\}) = For(L)$. O operador definido por qualquer sistema de Poole sem restrições é um operador distributivo.

■

Em geral, o operador definido por um sistema de Poole com restrições não satisfaz a propriedade distributiva. De fato, no exemplo abaixo o operador C é cumulativo supraclássico, mas não distributivo.

Exemplo 2.3.8 (Makinson; 1992 p. 67): Consideramos o Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e o sistema de Poole $\langle D, K \rangle$, com $D = \{p \rightarrow q\}$ e $K = \{p\}$. É claro que o operador definido por este sistema de Poole é cumulativo (Proposição 2.3.5 (a)). Além disso, segue diretamente da definição de sistema de Poole que $C(\{p\}) = C_n(\{p\} \cup \{p \rightarrow q\})$ e $C(\{\neg p\}) = For(CPC)$. Logo, $q \in C(\{p\})$ e $q \in C(\{\neg p\})$, isto é, $q \in C(\{p\}) \cap C(\{\neg p\})$. Por outro lado, $C(\{p\}) = C(\varnothing \cup \{p\})$ e $C(\{\neg p\}) = C(\varnothing \cup \{\neg p\})$. Portanto, se o operador C fosse distributivo, teríamos que:

$$C(\varnothing\cup\{p\})\cap C(\varnothing\cup\{\neg p\})\subseteq C(\varnothing) \qquad \text{(ver Proposição 2.1.3 (b)).}$$

Mas, $C(\varnothing)=C_n(\{p\to q\})$ e $q\notin C_n(\{p\to q\})$.

Teorema 2.3.9: Sejam uma linguagem formal L e C_n um operador de Tarski admissível sobre L, tal que existe uma fórmula $\alpha\in For(L)$ com $C_n(\{\alpha\})=For(L)$. O operador definido por um sistema de Poole finito sem restrições é um operador dedutivo.

■

Exibimos abaixo um contra-exemplo para a Proposição 2.2.6, ou seja, o operador de Tarski C_n é admissível e o operador C é distributivo não dedutivo, ambos definidos sobre L.

Exemplo 2.3.10 (Freund, Lehmann; 1993 p. 55): Consideramos o Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e o sistema de Poole $<D, \varnothing>$, com $D=\{p_o, p_1\wedge\neg p_o, p_2\wedge\neg p_1\wedge\neg p_o, ..., p_i\wedge\neg p_{i-1}\wedge....\wedge\neg p_o, ...\}$.

É claro que, para quaisquer dois elementos distintos α e β de D, segue que $C_n(\{\alpha, \beta\})=For(L)$. Assim, uma base para $\Gamma\subseteq For(L)$ deve ter no máximo um elemento de D. Pois bem, o operador C definido por $<D, \varnothing>$ é distributivo (Teorema 2.3.7). Se $\Gamma=\{p_o\to q, p_1\to q, p_2\to q, ..., p_i\to q, ...\}$, então $q\in C(\Gamma)$, pois $q\in C_n(\Gamma\cup\{p_o\})$ e $q\in \cap_{i\in N-\{0\}}C_n(\Gamma\cup\{p_i\wedge\neg p_{i-1}\wedge....\wedge\neg p_o\})$. Além disso, $C(\varnothing)=C_n(\varnothing)$. De fato, os subconjuntos unitários de D são exatamente as bases do conjunto $\varnothing$, isto é, $C(\varnothing)=C_n(\{p_o\})\cap[\cap_{i\in N-\{0\}}C_n(\{p_i\wedge\neg p_{i-1}\wedge....\wedge\neg p_o\})]$. Assim, uma fórmula $\alpha\in C(\varnothing)$ deve ser falsa somente em modelos proposicionais em que todos os p_i's são falsos. Desde que α refere-se somente a um número finito de varáveis, α deve ser uma tautologia. Portanto, $C(\varnothing)=C_n(\varnothing)$. Com este fato, é fácil vermos que $C_n(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup C(\varnothing))$.

Como vimos anteriormente, $q\in C(\Gamma)$ e, se o operador C é dedutivo, então $C(\Gamma)\subseteq C_n(\Gamma\cup C(\varnothing))=C_n(\Gamma)$ (absurdo, pois $q\notin C_n(\Gamma)$).

Portanto, o operador C definido pelo sistema de Poole <D, $\varnothing$>, ou seja, $C(\Gamma) = \bigcap_{\Delta \in B(\Gamma)} C_n(\Gamma \cup \Delta)$ não é dedutivo.

Utilizando a Proposição 2.2.9, podemos afirmar que o operador C no exemplo anterior não é simultaneamente monotônico e finitário, pois, caso contrário, C é um operador dedutivo. Além disso, da maneira como concebemos o conjunto D, para quaisquer conjuntos Ψ, $\Gamma \subseteq For(L)$, tal que $\Gamma \subseteq \Psi$, temos que $B(\Gamma) \subseteq B(\Psi)$. Logo, a extensão de uma base Δ de Γ para uma base de Ψ é o próprio conjunto Δ (ver Lema 2.3.6). É fácil ver que o resultado $B(\Gamma) \subseteq B(\Psi)$ permite-nos concluir que o operador C é monotônico.

Portanto, o operador C é monotônico, distributivo, não dedutivo e não finitário.

Para que o operador C no exemplo anterior seja estritamente cumulativo, o conjunto D deve ser tomado de modo que existam conjuntos Ψ, $\Gamma \subseteq For(L)$, tais que $\Gamma \subseteq \Psi$ e $B(\Gamma) \not\subseteq B(\Psi)$. É isto o que fazemos no próximo exemplo.

***Exemplo 2.3.11:** Consideramos o Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e o Sistema de Poole <D, $\varnothing$>, com $D=\{p_o, p_1 \wedge p_o, p_1 \wedge \neg p_o, p_2 \wedge p_1 \wedge p_o, p_2 \wedge p_1 \wedge \neg p_o\ p_2 \wedge \neg p_1 \wedge p_o, \ldots, p_i \wedge p_{i-1} \wedge \ldots \wedge p_o, p_i \wedge p_{i-1} \wedge \ldots \wedge \neg p_o, p_i \wedge p_{i-1} \wedge \ldots \wedge \neg p_1 \wedge p_o, \ldots, p_i \wedge \neg p_{i-1} \wedge p_{i-2} \wedge \ldots \wedge p_o, \ldots\}$ e $K=\varnothing$.

O Teorema 2.3.7 nos afirma que o operador C, definido por este sistema de Poole, é cumulativo distributivo. Afirmamos que C é estritamente cumulativo. De fato, tomamos os conjuntos $\Gamma=\{p_1, \neg p_0\}$ e $\Psi=\{p_1\}$ e verificamos que, a partir dos conjuntos $\{p_1 \wedge p_o\}$ e $\{p_1 \wedge \neg p_o\}$, podemos conceber conjuntos Δ_1 e Δ_2 bases de Ψ, tal que $\{p_1 \wedge p_o\} \subseteq \Delta_1$, $\{p_1 \wedge \neg p_o\} \subseteq \Delta_2$. Logo, as fórmulas p_0, $\neg p_0 \notin C(\Psi)$ mas, como C é supraclássico, $\neg p_0 \in C(\Gamma)$. Portanto, $\Psi \subseteq \Gamma$ e $C(\Psi) \not\subseteq C(\Gamma)$.

Para obtermos um exemplo de operador cumulativo distributivo e dedutivo, basta restringirmos o operador C, no exemplo anterior, sobre conjuntos finitos, isto é, C: $\wp_f(CPC) \rightarrow \wp_f(CPC)$. Assim, a Proposição 2.2.8 nos permite concluir que o operador C é também um operador dedutivo.

Lembramos novamente que a propriedade dedutiva falha no Exemplo 2.3.10, quando tomamos conjuntos infinitos de For(CPC). Logo, devemos estar atentos quando lidamos com conjuntos deste tipo, pois, muitas vezes, as propriedades que antes eram válidas para um determinado operador cumulativo sobre partes finitas não são preservadas estendendo este operador a conjuntos infinitos. Em seção posterior veremos outras considerações envolvendo conjuntos finitos e infinitos de fórmulas, em relação aos operadores cumulativos.

Apresentamos na próxima seção, como última família de operadores cumulativos, os operadores supracompactos.

2.4 Operadores Cumulativos Supracompactos

O conceito de operador cumulativo supracompacto foi introduzido por Freund **(Freund, 1990)**. Seguiremos aqui a mesma linha de apresentação adotada por Freund, mas, é claro que não apresentaremos todos os resultados pertinentes aos operadores supracompactos, somente aqueles que por ora julgamos importantes e se relacionam às outras duas famílias de operadores: operadores distributivos e operadores dedutivos. Para os leitores que desejam saber mais sobre os operadores supracompactos sugerimos a leitura completa do artigo. Outros resultados sobre estes operadores encontram-se também em **(Freund, Lehmann; 1993)**.

Definição 2.4.1: Dada uma linguagem formal L e um operador de Tarski C_n sobre L, denominamos *operador de inferência sobre L* a toda aplicação $C:\wp(For(L))\rightarrow\wp(For(L))$ tal que, para todo subconjunto $\Gamma\subseteq For(L)$, são satisfeitas as propriedades:

(i) $\Gamma\subseteq C(\Gamma)$ (Inclusão).

(ii) $C_n(C(\Gamma))=C(C_n(\Gamma))=C(\Gamma)$ (Absorção).

(iii) $C_n(\Gamma)\subseteq C(\Gamma)$ (Supraclássica).

O operador default cético apresentado no capítulo anterior (ver Proposição 1.3.10) é um operador de inferência.

Quando os operadores cumulativos (operadores distributivos, dedutivos e supracompactos) são definidos sobre partes finitas de L, as condições de monotonicidade cautelosa e corte são renomeadas como monotonicidade cautelosa sobre partes finitas e corte sobre partes finitas, respectivamente, o mesmo ocorrendo com as demais propriedades. Além disso, quando nos referirmos a subconjuntos finitos Γ, $\Delta\subseteq For(L)$, simplesmente denotaremos isto por Γ, $\Delta\subseteq_f For(L)$.

O resultado abaixo sugere algumas das definições desta seção. A partir deste resultado, estendemos a noção usual de operador finitário introduzindo a noção de operador supracompacto. A demonstração deste resultado e dos demais que são apresentados encontram-se em **(Freund, 1990)**.

Lema 2.4.2: Seja C' um operador de inferência sobre partes finitas. Então, C' satisfaz a monotonicidade cautelosa sobre partes finitas se, e somente se, para qualquer $\Gamma\subseteq_f For(L)$,

$\alpha\in C'(\Gamma)$ se, e somente se, existe $\Gamma_0\subseteq_f\Gamma$ tal que $\alpha\in C'(\Gamma_0\cup\Delta)$, para todo $\Delta\subseteq_f C'(\Gamma)$.

■

Definição 2.4.3: Um operador cumulativo C sobre L é *supracompacto* se, para qualquer subconjunto $\Gamma_f \subseteq For(L)$, C satisfaz a propriedade:

$\alpha \in C(\Gamma)$ *se, e somente se, existe* $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$ *tal que* $\alpha \in C(\Gamma_0 \cup \Delta)$, *para todo* $\Delta \subseteq C(\Gamma)$.

É imediato que, para os operadores de conseqüência monotônicos (operadores de Tarski), dizer que um operador é finitário é equivalente a dizer que ele é supracompacto.

Considerando $\Delta = \emptyset$, na definição anterior, pode parecer que esta definição coincide com a definição de um operador de Tarski finitário. Mas, é fácil ver que, dado um operador cumulativo C sobre L,

se $\alpha \in C(\Gamma)$ então $\alpha \in C(\Gamma_0)$ para algum $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$,

não implica que

$\alpha \in C(\Gamma)$ se, e somente se, existe $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$ tal que $\alpha \in C(\Gamma_0 \cup \Delta)$, para todo $\Delta \subseteq C(\Gamma)$.

De fato, como C não é monotônico, para todo $\Delta \subseteq C(\Gamma)$, $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma_0 \cup \Delta$, mas não podemos afirmar que $C(\Gamma_0) \subseteq_f C(\Gamma_0 \cup \Delta)$. Assim, se C é um operador cumulativo finitário, não necessariamente C é supracompacto. A recíproca claramente é verdadeira.

Conforme descrevemos anteriormente, já temos um primeiro exemplo de operadores supracompactos. A saber, os operadores de conseqüência finitários. Um exemplo menos trivial é obtido considerando-se uma linguagem proposicional L e fixando dois elementos α e β de For(L). Definimos o operador C da seguinte maneira:

$$C(\Gamma) = \begin{cases} C_n(\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\}) & \text{se} \quad C_n(\{\alpha \wedge \beta\} \cup \Gamma) \neq For(L); \\ C_n(\Gamma) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil vermos que C é um operador supracompacto e não distributivo.

Definição 2.4.4: Seja C um operador de inferência sobre L. A *transformação C" de C* é o operador definido, para cada subconjunto Γ de For(L), por:

$\alpha \in C''(\Gamma)$ *se, e somente se, existe* $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$ *tal que* $\alpha \in C(\Gamma_0 \cup \Delta)$, *para algum* $\Delta \subseteq C(\Gamma)$.

É trivial que, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C''(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, com a igualdade valendo se, e somente se, C é supracompacto. No caso em que C é um operador de conseqüência de Tarski, C" é apenas o componente finitário de C, isto é, o maior operador finitário tal que, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C''(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$. É claro que, neste caso, C" é também um operador monotônico, aliás o maior operador, no seguinte sentido: não existe outro operador finitário D tal que, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C''(\Gamma) \subseteq D(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$.

Proposição 2.4.5: A transformação C" de um operador cumulativo C é um operador cumulativo.

■

Proposição 2.4.6: Seja C um operador sobre partes finitas de L que satisfaz a monotonicidade cautelosa. Então, C coincide, sobre conjuntos finitos, com sua transformação C". Além disso, C" é um operador finitário.

■

Na proposição abaixo modificamos ligeiramente a definição da transformação C" de um operador distributivo C. Fazemos isto porque o Lema 2.1.10 (a) permite-nos considerar subconjuntos de $C_n(\Gamma)$ em lugar de subconjuntos de $C(\Gamma)$.

Proposição 2.4.7: Seja C um operador distributivo sobre L e C" a sua transformação. Então,

$\alpha \in C''(\Gamma)$ se, e somente se, existe $\Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$ tal que $\alpha \in C(\Gamma_0 \cup \Delta)$, para todo $\Delta \subseteq C_n(\Gamma)$.

■

A seguir, a noção de traço de um operador de inferência produz uma caracterização usual de operadores distributivos supracompactos.

Definição 2.4.8: O *traço* Z_C de um operador de inferência C sobre L é o operador definido, para cada subconjunto $\Gamma\subseteq For(L)$, por:

$$Z_C(\Gamma)=\cap\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C_n(\Gamma)\}.$$

Se o operador C é distributivo, novamente pelo Lema 2.1.10 (a) podemos considerar subconjuntos de $C(\Gamma)$ em lugar de subconjuntos de $C_n(\Gamma)$, ou seja, $Z_C(\Gamma)=\cap\{C(\Delta):\Delta\subseteq C(\Gamma)\}$. De fato, como o operador C é supraclássico é imediato que,

$$\cap\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C(\Gamma)\}\subseteq\cap\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C_n(\Gamma)\}.$$

Agora, para qualquer $\Delta\subseteq C(\Gamma)$, pelo Lema 2.1.10 (a) segue que $C(\Delta)=C(C_n(\Delta)\cap C_n(\Gamma))$. Mas, $C_n(\Delta)\cap C_n(\Gamma)\subseteq C_n(\Gamma)$. Logo, tomando $\Psi=C_n(\Delta)\cap C_n(\Gamma)$ então $C(\Delta)=C(\Psi)$, com $\Psi\subseteq C_n(\Gamma)$, isto é, $\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C(\Gamma)\}\subseteq\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C_n(\Gamma)\}$. Portanto,

$$\cap\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C_n(\Gamma)\}\subseteq\cap\{C(\Delta):\ \Delta\subseteq C(\Gamma)\}.$$

Finalizamos esta seção com resultados que nos permitem demonstrar que um operador distributivo "contém" um operador dedutivo, coincidindo com este operador sobre conjuntos finitos.

Proposição 2.4.9: Seja C um operador distributivo sobre uma linguagem formal L com implicação. Então, para qualquer subconjunto $\Gamma\subseteq For(L)$, a transformação C" de C satisfaz a condição,

$$C''(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup Z_C(\Gamma)) \qquad (I).$$

Assim, o operador distributivo C é supracompacto se, e somente se, ele satisfaz a condição,

$$C(\Gamma)=C_n(\Gamma\cup Z_C(\Gamma)) \qquad (II).$$

■

Lema 2.4.10: O traço de um operador distributivo C é igual ao traço de sua transformação C".

■

Proposição 2.4.11: A transformação de um operador distributivo C sobre L é um operador dedutivo (portanto, distributivo). Em particular, qualquer operador distributivo supracompacto é um operador dedutivo.

■

É uma conseqüência imediata da proposição anterior que um operador distributivo contenha um operador dedutivo, o qual coincide com este operador distributivo sobre conjuntos finitos, o que pode ser determinado explicitamente por meio da Proposição 2.4.9 (II). Lembramos que nesta proposição a linguagem L possui implicação, logo a Proposição 2.4.11 também se refere a este tipo de linguagem.

2.5 Extensões Cumulativas

Podemos notar que até aqui é dada uma atenção especial para os operadores cumulativos infinitários. A importância de estudarmos os operadores cumulativos infinitários reside em podermos aplicar os resultados válidos para estes operadores aos operadores cumulativos sobre partes finitas. Mas, dado um operador cumulativo sobre partes finitas, será possível estendê-lo cumulativamente para conjuntos infinitos? Sabemos que a recíproca é verdadeira, isto é, dado um operador cumulativo qualquer, restringindo-o a conjuntos finitos obtemos um operador cumulativo sobre partes finitas.

Freund e Lehmann, em colaboração com Makinson, apresentam um modo de estender operadores cumulativos sobre partes finitas para conjuntos infinitos. Vejamos como isto é feito.

Teorema 2.5.1: Seja C' um operador cumulativo sobre partes finitas de L. O operador C definido por

$$C(\Gamma)=\begin{cases} C'(\Delta) & \text{se existe um subconjunto } \Delta \subseteq_f C_n(\Gamma) \text{ tal que } C_n(\Gamma) \subseteq C'(\Delta) \\ C_n(\Gamma) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

estende C' e é um operador cumulativo.

■

Notamos que C está bem definido, pois como C' é cumulativo, se existirem conjuntos finitos Δ, $\Phi \subseteq C_n(\Gamma)$ tal que $C_n(\Gamma) \subseteq C'(\Delta)$ e $C_n(\Gamma) \subseteq C'(\Phi)$ então, pela condição cumulativa, $C'(\Delta)=C'(\Phi)$.

Resultados indesejáveis surgiram a partir do teorema anterior. Por exemplo, se o operador C' é monotônico, sua extensão, em geral, não é monotônica. Além disso, a extensão cumulativa (o operador $\mathbf{C}$ do teorema acima) não preserva a propriedade distributiva (ver **(Freund, Lehmann; 1993)**). Em virtude disto, Freund e Lehmann apresentam outro modo de produzir uma extensão cumulativa de um operador cumulativo sobre partes finitas. De forma breve, vamos percorrer o caminho proposto por Freund e Lehmann **(Freund, Lehmann; 1993)** e apresentar esta outra extensão cumulativa (ou seja, outro modo de concebermos um operador cumulativo que estende um dado operador cumulativo C definido sobre partes finitas).

Primeiramente definimos o seguinte operador.

Definição 2.5.2: Seja C' um operador cumulativo sobre partes finitas de L. Definimos o operador C_f como:

$$C_f(\Gamma)=\{\alpha \in For(L): \exists \Delta \subseteq_f \Gamma \text{ tal que } \alpha \in C'(\Delta \cup \Phi) \text{ para qualquer } \Phi \subseteq_f C_n(\Gamma)\}.$$

Notamos que há semelhança entre esta definição e a definição de operador supracompacto.

Podemos provar que C_f é uma extensão de C', isto é, $C_f(\Gamma)=C'(\Gamma)$, para todo $\Gamma\subseteq_f For(L)$ e, além disso, verificamos que C_f satisfaz a propriedade do corte e é supraclássico. Porém C_f não satisfaz a monotonicidade cautelosa, ou seja, C_f não é uma extensão cumulativa de C'.

Mesmo que C_f não seja uma extensão cumulativa, nem tudo está perdido, pois a partir deste ponto, juntamente com a transformação de um operador de inferência podemos definir o seguinte operador.

Definição 2.5.3: Seja C'um operador sobre partes finitas de L e C_f o operador da definição anterior. Chamamos C_f de C_0. Assim, para cada número natural i>0, definimos C_i como sendo a transformação de C_{i-1}. A extensão canônica de C' é o operador C definido sobre L, para cada $\Delta\subseteq For(L)$, por

$$C(\Delta)=\cap_{i\in\omega}C_i(\Delta).$$

Teorema 2.5.4: Se a linguagem L possui implicação, a extensão canônica de um operador cumulativo sobre partes finitas é uma extensão cumulativa.

■

Assim, exigimos que L tenha implicação para que a extensão canônica de um operador cumulativo sobre partes finitas seja uma extensão cumulativa.

Para finalizar, vejamos quais as condições que nos permitem dizer que a extensão canônica de um operador cumulativo distributivo e de um operador dedutivo, ambos sobre partes finitas, é uma extensão distributiva e dedutiva, respectivamente.

Teorema 2.5.5: Seja C' um operador distributivo sobre partes finitas de L. Se a linguagem L tem conjunção, então o operador C_f é distributivo e é a extensão canônica de C'.

■

Teorema 2.5.6: Seja C' um operador dedutivo sobre partes finitas de L. Se a linguagem L tem implicação e disjunção, então o operador C_f é dedutivo e é a extensão canônica de C'.

■

Feita a apresentação de algumas propriedades dos operadores cumulativos, introduzimos o conceito de lógica cumulativa no próximo capítulo.

Capítulo 3
Lógicas

Neste capítulo, um conceito bastante geral de lógica é apresentado. Este conceito é o mesmo introduzido em **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**, com uma diferença, os operadores considerados, mais gerais, são operadores cumulativos. Dessa maneira, ampliamos a classe de lógicas que tínhamos anteriormente. Nunca é demais lembrar que todo operador de Tarski é um operador cumulativo.

É natural que ao ampliarmos uma certa classe de objetos, os novos objetos dessa classe não satisfaçam a todas as propriedades que os objetos da classe original satisfaziam. Isso também ocorre quando ampliamos a classe das lógicas (ou lógicas de Tarski) consideradas no artigo acima mencionado.

3.1 Lógicas Cumulativas.

No Capítulo 1, relembramos algumas definições e resultados sobre operadores de Tarski, para posteriormente desenvolvermos o estudo dos operadores cumulativos. Nesta seção não seguiremos essa linha de conduta, recordaremos somente quando necessário as definições e resultados sobre lógicas cujo operador envolvido é um operador de Tarski. Esses resultados e definições podem ser encontrados em **(Wójcicki; 1988)**, **(Feitosa; 1997)**, **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**, ou **(D'Ottaviano, Feitosa; 2001)** entre outros.

Definição 3.1.1: Uma *lógica cumulativa* é um par $\mathbf{L}=(L, C)$, onde L é um conjunto qualquer e C é um operador de conseqüência cumulativo sobre L. Quando C for operador de conseqüência de Tarski, dizemos que $\mathbf{L}$ é uma *lógica de Tarski*, ou simplesmente uma *lógica*.

Definição 3.1.2: Sejam $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ duas lógicas cumulativas. Dizemos que $\mathbf{L}_1$ é uma *sub-lógica* de $\mathbf{L}_2$, o que denotamos por $\mathbf{L}_1\subseteq\mathbf{L}_2$, se $L_1\subseteq L_2$ e $C_1=C_2 | L_1$ (restrição de C_2 com relação a L_1).

Definição 3.1.3: Sejam $\mathbf{L}=(L, C)$ uma lógica cumulativa e $Y\subseteq X\subseteq L$. O *fecho restringido* de Y a X é o conjunto $C_X(Y)=\{x: x\in C(Y)\cap X\}$.

Pois bem, fixado um conjunto $X\subseteq L$, a aplicação $C_X:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ tal que $C_X(A)=\{x: x\in C(A)\cap X\}$ é um operador cumulativo. É claro que $C_X=C$, quando X=L.

***Proposição 3.1.4:** Sejam, $\mathbf{L}=(L, C)$ uma lógica cumulativa, X um subconjunto próprio de L e $C_X:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$, tal que $C_X(A)=\{x: x\in C(A)\cap X\}$. Então, C_X é um operador cumulativo.

Demonstração:

(a) Para todo $A\subseteq X$, $A\subseteq C_X(A)$.

De fato, como $A\subseteq C(A)$, para todo $A\subseteq X\subseteq L$, segue imediatamente da definição que $A\subseteq C_X(A)$.

(b) Se $A\subseteq B\subseteq C_X(A)$, então $C_X(A)\subseteq C_X(B)$, para todos $A, B\subseteq X$.

Pela definição de $C_X(A)$ e por hipótese, segue que $A\subseteq B\subseteq C_X(A)\subseteq C(A)$. Daí, pela monotonicidade cautelosa, $C(A)\subseteq C(B)$. Assim, $C(A)\cap X\subseteq C(B)\cap X$ e, portanto, $C_X(A)\subseteq C_X(B)$, para todo $A\subseteq B\subseteq C_X(A)$.

(c) $C_X(C_X(A))=C_X(A)$, para todo $A\subseteq X$.

De fato, por (a) e pela definição de C_X, segue que $A\subseteq C_X(A)\subseteq C(A)$. Daí, pela condição cumulativa, $C(C_X(A))=C(A)$. Como $C_X(C_X(A))=C(C_X(A))\cap X$, então $C_X(C_X(A))=C_X(A)$, para todo $A\subseteq X$.

■

Quando na Definição 3.1.3 o operador C for operador de Tarski, C_X também é um operador de Tarski **(Feitosa; 1997)**.

***Proposição 3.1.5:** Sejam os operadores cumulativos C sobre L e $C_X: \wp(X)\to\wp(X)$, como definido na proposição anterior. Se $A\subseteq X$ é um conjunto fechado segundo C, então A é um conjunto fechado segundo C_X.

■

Dado um conjunto X qualquer, podemos definir um operador de Tarski sobre esse conjunto de forma única, através de um subconjunto das partes de X que é fechado para interseções arbitrárias. É possível fazer isto, pois a interseção de conjuntos fechados segundo um operador de Tarski é um conjunto fechado segundo esse operador. A partir da caracterização de um operador de Tarski através de conjuntos fechados, construímos outros operadores de conseqüência. A saber, operador de conseqüência induzido e operador de conseqüência co-induzido. Vejamos como conceber esses operadores. Para demonstração ver **(Feitosa; 1997)**, **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** ou **(Feitosa, D'Ottaviano; 2001)**.

Proposição 3.1.6: Sejam X um conjunto não vazio e $\vartheta\subseteq\wp(X)$, tal que $X\in\vartheta$ e ϑ é fechado para interseções arbitrárias. Então, existe um único operador de Tarski C_X definido em X para o qual os fechados de X são exatamente os elementos de ϑ.

■

A partir da proposição anterior e conseqüentemente da caracterização de um operador de Tarski através de conjuntos fechados, vejamos como definir um operador de conseqüência induzido e co-induzido.

Definição 3.1.7: Sejam $\mathbf{L}$=(L, C_n) uma lógica de Tarski, A um conjunto qualquer não vazio e uma função G:A→L. Dizemos que a aplicação C_A: $\wp(A) \to \wp(A)$ é o *operador de conseqüência induzido por G e* $\mathbf{L}$ *em A* quando, dado E⊆A, E é um conjunto fechado em A se, e somente se, $E=G^{-1}(D)$, onde D é um conjunto fechado de $\mathbf{L}$.

Definição 3.1.8: Sejam $\mathbf{L}$=(L, C_n) uma lógica de Tarski, B um conjunto qualquer não vazio e uma função F: L→B. Dizemos que a aplicação C_B: $\wp(B) \to \wp(B)$ é o *operador de conseqüência co-induzido por F e* $\mathbf{L}$ *em B* quando, dado E⊆B, E é um conjunto fechado em B se, e somente se, $F^{-1}(E)$ é um conjunto fechado de $\mathbf{L}$.

Vejamos de forma mais explícita o que significam as definições de C_A e C_B, respectivamente operador de conseqüência induzido e co-induzido.

(a) Sejam $\mathbf{L}$=(L, C_n) uma lógica de Tarski, A um conjunto qualquer não vazio e a função G:A→L. O operador de conseqüência induzido por G e $\mathbf{L}$ corresponde a: para todo E⊆A, $C_A(E)=\cap_{i\in I}G^{-1}(E_i)$, onde $(E_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados de L, tal que $G^{-1}(E_i)\supseteq A$.

(b) Sejam $\mathbf{L}$=(L, C_n) uma lógica de Tarski, B um conjunto qualquer não vazio e a função F:L→B. O operador de conseqüência co-induzido por F e $\mathbf{L}$ corresponde a: para todo E⊆B, $C_B(E)=\cap_{i\in I}E_i$, onde $(E_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos de B que contêm E, tal que $F^{-1}(E_i)$ é um conjunto fechado de L.

Há algumas propriedades desejáveis quando induzimos e co-induzimos operadores de Tarski a partir de lógicas **L**=(L, C_n) e funções envolvendo essas lógicas. No próximo capítulo ficará claro o significado dessas propriedades. No entanto, apresentamos um resultado envolvendo tais propriedades. Para demonstração, ver **(Feitosa; 1997)** ou **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**.

Proposição 3.1.9: Sejam as funções F:L→B, G:A→L e as lógicas **L**=(L, C_n), **B**=(B, C_B), **A**=(A, C_A), tal que C_B e C_A são respectivamente os operadores de conseqüência co-induzido e induzido. Então:

(a) A imagem inversa de um fechado em B (fechado em L) é um fechado em L (fechado em A);

(b) Para todo subconjunto $K\cup\{x\}$ de L, se $x\in C_n(K)$ então $F(x)\in C_B(F(K))$. Da mesma forma, para todo subconjunto $K\cup\{x\}$ de A, se $x\in C_A(K)$ então $F(x)\in C_n(F(K))$.

■

Como o conceito de lógica cumulativa estende o conceito de lógica, é natural perguntarmos: Dadas funções F e G das definições anteriores, quando a lógica **L** é uma lógica cumulativa, podemos induzir e co-induzir operadores?

Sabemos que, em geral, a Proposição 3.1.6 não se aplica quando os operadores são cumulativos, pois, já vimos que a interseção de fechados segundo um operador cumulativo não é necessariamente um conjunto fechado (Exemplo 1.2.5). Além disso, após definirmos um operador cumulativo induzido e um operador cumulativo co-induzido, gostaríamos que a Proposição 3.1.9 fosse satisfeita para esses novos operadores.

A seguir, veremos como proceder para induzirmos e co-induzirmos operadores cumulativos. Dividiremos nosso estudo em duas novas subseções: operadores cumulativos induzidos e operadores cumulativos co-induzidos.

3.2 Operadores Cumulativos Induzidos.

Primeiramente, a definição de lógica cumulativa será a mais geral possível, ou seja, o operador cumulativo refere-se à Definição 1.2.1. Feito isto, para finalizar esta subseção, consideramos a lógica cumulativa cujo operador cumulativo é supraclássico.

***Proposição 3.2.1:** Sejam $\mathbf{L}$=(L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e a função $F:X\rightarrow L$. Além disso, seja a aplicação $C_X: \wp(X)\rightarrow\wp(X)$, tal que, para todo $A\subseteq X$, $C_X(A)=F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i))$, onde $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C [redacted] com $A\subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i\in I$. Então, C_X é um operador cumulativo sobre X.

Demonstração:

É claro que, para todo $A\subseteq X$, $C_X(A)$ está bem definido, pois existe pelo menos um conjunto fechado de L com imagem inversa contendo A. O próprio conjunto L satisfaz essa condição. Além disso, o conjunto imagem de F (Img(F)) é o menor subconjunto de L com imagem inversa igual a X. Portanto, $C_X(X)=X$.

Pois bem, vejamos que C_X é um operador cumulativo sobre X.

(a) Para todo $A\subseteq X$, $A\subseteq C_X(A)$.

De fato, seja $A\subseteq X$, tal que $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C, com $A\subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i\in I$. Assim, $A\subseteq F^{-1}(\cap_{i\in I}A_i)$ e, como $\cap_{i\in I}A_i\subseteq C(\cap_{i\in I}A_i)$, então $A\subseteq F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i))=C_X(A)$.

(b) Para quaisquer conjuntos A, $B\subseteq X$, tal que $A\subseteq B\subseteq C_X(A)$, então $C_X(A)\subseteq C_X(B)$.

De fato, sejam $(A_i)_{i\in I}$ e $(B_j)_{j\in J}$ respectivamente as famílias de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $A\subseteq F^{-1}(A_i)$, $B\subseteq F^{-1}(B_j)$, para todo $i\in I$ e $j\in J$. Além disso, suponhamos que $A\subseteq B\subseteq C_X(A)$. Assim, $\cap_{i\in I}A_i\subseteq\cap_{j\in J}B_j$. Como $C(\cap_{i\in I}A_i)$ é um fechado em L e sua imagem inversa contém B (pois $B\subseteq C_X(A)=F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i)))$, então $C(\cap_{i\in I}A_i)=B_{jo}$ para

$j_o \in J$. Logo, $\cap_{i\in I}A_i \subseteq \cap_{j\in J}B_j \subseteq C(\cap_{i\in I}A_i)$ e daí, pela monotonicidade cautelosa, $C(\cap_{i\in I}A_i) \subseteq C(\cap_{j\in J}B_j)$. Então, pela propriedade da imagem inversa segue que $F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i)) \subseteq F^{-1}(C(\cap_{j\in J}B_j))$, isto é, $C_X(A) \subseteq C_X(B)$.

(c) Para todo $A \subseteq X$, $C_X(C_X(A))=C_X(A)$.

Sejam $(A_i)_{i\in I}$ e $(B_j)_{j\in J}$ respectivamente as famílias de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $A \subseteq F^{-1}(A_i)$, $C_X(A) \subseteq F^{-1}(B_j)$, para todo $i \in I$ e $j \in J$. Analogamente ao item anterior, $\cap_{i\in I}A_i \subseteq \cap_{j\in J}B_j \subseteq C(\cap_{i\in I}A_i)$, pois $C(\cap_{i\in I}A_i)=B_{jo}$, para $j_o \in J$. Daí, pela condição cumulativa segue que $C(\cap_{i\in I}A_i)=C(\cap_{j\in J}B_j)$. Logo, $F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i))=F^{-1}(C(\cap_{j\in J}B_j))$, isto é, $C_X(A)=C_X(C_X(A))$.

■

Definição 3.2.2:** O operador C_X da proposição anterior é chamado *operador cumulativo induzido por F e* ***L.

Na proposição anterior, substituindo a lógica cumulativa **L** pela lógica de Tarski **L**=(L, C_n), o operador C_X é exatamente o operador descrito na Definição 3.1.7. De fato, neste caso $C(\cap_{i\in I}A_i)=\cap_{i\in I}A_i$ e daí, $C_X(A)=\cap_{i\in I} F^{-1}(A_i)$, onde $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C_n, tal que $A \subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i \in I$ (ver p.64, (a)).

Portanto, estendemos naturalmente a definição de um operador induzido por uma lógica de Tarski e uma função cujo contra-domínio é a lógica, para definirmos um operador cumulativo induzido por uma lógica cumulativa e uma função cujo contra-domínio é a lógica cumulativa. Resta-nos verificar a validade da Proposição 3.1.9.

***Proposição 3.2.3:** Sejam as lógicas cumulativas **L**=(L, C), **X**=(X, C_X) e a aplicação sobrejetora $F:X \to L$, tal que C_X é o operador cumulativo induzido por F e L. Então:

(a) A imagem inversa de um conjunto fechado em L é um conjunto fechado em X.

(b) Para todo subconjunto $\{x\}\cup K$ de X, se $x\in C_X(K)$ então $F(x)\in C(F(K))$.

Demonstração:

(a) Seja $A\subseteq L$, tal que $A=C(A)$. Lembre que $C(A)=C(\cap_{i\in I}A_i)$, tal que $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L, segundo C, que contêm A (ver Proposição 1.2.4). Logo, $F^{-1}(A)=F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i))$. Agora, $A\subseteq A_i$ se, e somente se, $F^{-1}(A)\subseteq F^{-1}(A_i)$ (pois F é sobrejetora). Daí, pela maneira como definimos C_X, segue que $C_X(F^{-1}(A))=F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i))=F^{-1}(A)$, ou seja, $F^{-1}(A)$ é um conjunto fechado em X segundo C_X.

(b) Para todo subconjunto $\{x\}\cup K\subseteq X$, se $x\in C_X(K)$ então $F(x)\in F(C_X(K))$, isto é, $F(x)\in F(F^{-1}(C(\cap_{i\in I}A_i)))$, onde $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $K\subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i\in I$. Pela Proposição 1.2.4, $C(F(K))=C(\cap_{j\in J}B_j)$, onde $(B_j)_{j\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $B_j\supseteq F(K)$, para todo $j\in J$. Logo, $\cap_{j\in J}B_j\subseteq\cap_{i\in I}A_i$ e $C(F(K))=A_{i_0}$, para $i_0\in I$. Daí, pela condição cumulativa, $C(\cap_{j\in J}B_j)=C(\cap_{i\in I}A_i)$. Então, $F(x)\in F(F^{-1}(C(\cap_{j\in J}B_j)))\subseteq C(\cap_{j\in J}B_j)$, ou seja, $F(x)\in C(F(K))$.

■

Note que, para demonstrar a parte (b) da proposição acima, não é preciso que F seja sobrejetora.

Para finalizar esta subseção, seguem-se algumas considerações sobre os operadores supraclássicos e os operadores induzidos. Portanto, até o final dessa seção quando dizemos que C é um operador cumulativo estamos nos referindo a Definição 1.2.8.

Seja a aplicação $F:X\to L$ tal que $\mathbf{L}=(L, C)$ é uma lógica cumulativa e C é um operador supraclássico. Neste caso, L é uma linguagem formal e C_n um operador de Tarski sobre L, tal que, para todo $A\subseteq L$, $C_n(A)\subseteq C(A)$ (ver Definição 1.2.7).

Pois bem, sejam C_{nX} e C_X respectivamente, operador de Tarski induzido por F e $\mathbf{L}$=(L, C_n) e operador cumulativo induzido por F e $\mathbf{L}$=(L, C). Vejamos se $C_{nX}(A)\subseteq C_X(A)$, para todo $A\subseteq X$, ou seja, se C_X é um operador supraclássico.

***Proposição 3.2.4:** Sejam C_{nX}, C_X: $\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ e $\mathbf{L}$=(L, C) uma lógica cumulativa, tal que C é um operador supraclássico e C_{nX}, C_X respectivamente operador de Tarski induzido e operador cumulativo induzido por F e $\mathbf{L}$ (F uma função de X em L, onde X é um conjunto qualquer não vazio). Então, $C_{nX}\leq C_X$, isto é, C_X é um operador supraclássico.

Demonstração:

Para todo $A\subseteq X$, sabemos que $C_{nX}(A)=\cap_{i\in I} F^{-1}(A_i)$, onde $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C_n, tal que $A\subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i\in I$; $C_X(A)=F^{-1}(C(\cap_{j\in J}B_j))$, onde $(B_j)_{j\in J}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $A\subseteq F^{-1}(B_j)$, para todo $j\in J$. Como o operador C é supraclássico, então $(B_j)_{j\in J}\subseteq(A_i)_{i\in I}$ e daí, $\cap_{i\in I}A_i\subseteq\cap_{j\in J}B_j$. Logo, $\cap_{i\in I} F^{-1}(A_i)\subseteq F^{-1}(C(\cap_{j\in J}B_j))$.

Portanto, $C_{nX}(A)\subseteq C_X(A)$, para todo $A\subseteq X$, isto é, C_X é supraclássico.

■

Na Proposição 3.2.3 nada exigimos a respeito do conjunto L e do operador cumulativo C, isto é, não exigimos que C seja um operador supraclássico. Agora, se considerarmos $\mathbf{L}$=(L, C) uma lógica cumulativa com C operador supraclássico, vejamos se nessas condições a Proposição 3.2.3 é satisfeita. Lembramos novamente que L é uma linguagem formal.

***Proposição 3.2.5:** Sejam as lógicas cumulativas **L**=(L, C), **X**=(X, C_X) e a aplicação F:X→L, com C_X é o operador supraclássico induzido por F e L (ver proposição anterior) e C operador cumulativo supraclássico. Então:

(a) A imagem inversa de um fechado em L é um conjunto fechado em X.

(b) Para todo subconjunto $\{x\}\cup K$ de X, se $x\in C_X(K)$ então $F(x)\in C(F(K))$.

Demonstração:

(a) No caso de C ser operador supraclássico, dizer que A é um conjunto fechado em L, é dizer que $A=C_n(A)$, pois, já vimos que todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C_n. Tomamos, assim, a maior família de fechados em L. O mesmo vale para os conjuntos fechados em X, ou seja, a família de conjuntos fechados é a família dos conjuntos fechados segundo C_{nX}. Portanto, pela Proposição 3.1.9, segue que a imagem inversa de um conjunto fechado em L é um conjunto fechado em X.

(d) É imediato (ver Proposição 3.2.3 (b)).

■

Note que, diferentemente da Proposição 3.2.3, a função F não precisa ser sobrejetora. Além disso, pode-se perguntar porque não redefinimos o operador C_X induzido por F e L (ver Definição 3.2.2), pois, consideramos na proposição anterior que a família de fechados em L e X é constituída pelos conjuntos fechados segundo os respectivos operadores de Tarski, C_n e C_{nX}. Não redefinimos C_X, considerando conjuntos fechados em L como sendo os conjuntos segundo C_n, pois, neste caso o operador C_X é o operador de Tarski descrito na Definição 3.1.7 (ver também p.64, (a)).

Para as famílias dos operadores distributivos e dos operadores dedutivos não há alteração na definição de operador induzido apresentada anteriormente (Definição 3.2.2), pois, as respectivas famílias são subfamílias de operadores cumulativos supraclássicos.

O que devemos fazer é verificar se, para um dado operador cumulativo C distributivo e/ou dedutivo o respectivo operador cumulativo induzido é também distributivo e/ou dedutivo. Devemos fazer isto também para outras propriedades do operador cumulativo C, mas para investigarmos a preservação ou não dessas propriedades, informações adicionais sobre o comportamento da aplicação T são relevantes (informações do tipo daquelas apresentadas na proposição anterior).

No próximo capítulo quando introduzimos o conceito de tradução (tradução conservativa) investigaremos se algumas propriedades válidas para um determinado operador cumulativo (lógica cumulativa) são preservadas para outro operador cumulativo (lógica cumulativa) fazendo uso de uma aplicação T (tradução) entre essas lógicas.

Na próxima seção veremos como co-induzir um operador a partir de uma lógica cumulativa e uma função cujo domínio é a lógica.

3.3 Operadores Cumulativos Co-induzidos.

Como realizado na seção anterior, primeiramente a definição de lógica cumulativa é a mais geral possível. Em seguida, consideramos a lógica cumulativa cujo operador é supraclássico.

Diferentemente do que ocorreu ao induzirmos um operador cumulativo, quando co-induzimos um operador cumulativo surgem várias dificuldades. Ao longo desta seção, até o seu final, veremos algumas destas dificuldades.

***Proposição 3.3.1:** Sejam $\mathbf{L}=(L, C)$ uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e uma função $F: L\to X$. Além disso, seja a aplicação $C_{nX}: \wp(X)\to\wp(X)$ tal que, para todo $A\subseteq X$, $C_{nX}(A)=\cap_{i\in I}A_i$, onde $(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos em X que contêm A, com $F^{-1}(A_i)=C(F^{-1}(A_i))$, para todo $i\in I$. Então, C_{nX} é um operador de Tarski sobre X.

Demonstração:

É claro que C_{nX} está bem definido para todo $A \subseteq X$, pois ao concebermos $C_{nX}(A)$ existe pelo menos um subconjunto de X que contém A, tal que sua imagem inversa é um conjunto fechado em L segundo C. O conjunto X satisfaz estas condições. Vejamos que C_{nX} é um operador de Tarski.

(i) Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq C_{nX}(A)$.

Segue imediatamente da definição de C_{nX}.

(ii) Para todo A, $B \subseteq X$, se $A \subseteq B$ então $C_{nX}(A) \subseteq C_{nX}(B)$.

De fato, sejam $(A_i)_{i \in I}$ a família de todos os conjuntos em X que contêm A, com $F^{-1}(A_i)=C(F^{-1}(A_i))$, para todo $i \in I$, e $(B_j)_{j \in J}$ a família de todos os conjuntos em X que contêm B, com $F^{-1}(A_j)=C(F^{-1}(A_j))$, para todo $j \in J$. Como por hipótese $A \subseteq B$, então $\cap_{i \in I} A_i \subseteq \cap_{j \in J} B_j$, ou seja, $C_{nX}(A) \subseteq C_{nX}(B)$.

(iii) Para todo $A \subseteq X$, $C_{nX}(C_{nX}(A)) \subseteq C_{nX}(A)$.

De fato, sejam $(A_i)_{i \in I}$ a família de todos os conjuntos em X que contêm A, com $F^{-1}(A_i)=C(F^{-1}(A_i))$, para todo $i \in I$, e $(B_j)_{j \in J}$ a família de todos os conjuntos em X que contêm $C_{nX}(A)$, com $F^{-1}(B_j)=C(F^{-1}(B_j))$, para todo $j \in J$. Por definição, $C_{nX}(A)=\cap_{i \in I} A_i$ e $C_{nX}(C_{nX}(A))=\cap_{j \in J} B_j$. Logo, $C_{nX}(A) \subseteq A_i$, para todo $i \in I$. Daí, $A_i \in (B_j)_{j \in J}$, para todo $i \in I$, ou seja, $\cap_{j \in J} B_j \subseteq \cap_{i \in I} A_i$. Portanto, $C_{nX}(C_{nX}(A)) \subseteq C_{nX}(A)$.

■

Se na proposição anterior **L** é uma lógica de Tarski, C_{nX} é exatamente o operador co-induzido da Definição 3.1.8.

Pois bem, na proposição anterior co-induzimos um operador de Tarski sobre um conjunto qualquer não vazio X através de uma lógica cumulativa e uma função cujo domínio é a lógica. Assim, não conseguimos ainda co-induzir um operador cumulativo, embora na proposição anterior os conjuntos fechados em L sejam os conjuntos fechados segundo o operador cumulativo C. Aliás, considerando na proposição anterior o operador cumulativo C supraclássico (isto é, $C_n \leq C$) o operador C_{nX} na referida proposição sofre uma pequena alteração ($(A_i)_{i\in I}$ é a família de todos os conjuntos em X que contêm A, com $F^{-1}(A_i)=C_n(F^{-1}(A_i))$, para todo $i\in I$) mas, o operador C_{nX} continua sendo um operador de Tarski sobre X. Quanto às propriedades desejáveis citadas na Proposição 3.1.9, vejamos o que ocorre neste caso.

***Proposição 3.3.2:** Sejam a aplicação $F:L\to X$, **L**=(L, C) uma lógica cumulativa e **X**=(X, C_{nX}) uma lógica de Tarski, tal que C é um operador supraclássico e C_{nX} é o operador de Tarski co-induzido por F e **L**. Então, a imagem inversa de um conjunto fechado em X é um conjunto fechado em L.

Demonstração:

Segue pela Proposição 3.1.9, de forma análoga ao item (a) da Proposição 3.2.5.

■

A partir da agora citamos vários resultados, onde o objetivo é conseguir co-induzir um operador cumulativo. Nossa atenção estará voltada para as propriedades descritas na Proposição 3.1.9, pois buscamos a validade da mesma.

***Proposição 3.3.3:** Sejam **L**=(L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e a função bijetora F: $L\to X$. Além disso, seja a aplicação $C_X: \wp(X)\to\wp(X)$ tal que, para todo $A\subseteq X$, $C_X(A)=F(C(D))$, com $F(D)=A$. Então, C_X é um operador cumulativo sobre X.

Demonstração:

Como F é bijetora, para cada $A\subseteq X$, existe um único $D\subseteq L$ tal que $F(D)=A$. Assim, C_X está bem definida, para todo $A\subseteq X$.

Vejamos que C_X é um operador cumulativo. Dados A, B conjuntos de X temos que:

(i) Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq C_X(A)$.

De fato, dado $A \subseteq X$, existe um único $D \subseteq L$ tal que $F(D)=A$. Como $D \subseteq C(D)$, então $A=F(D) \subseteq F(C(D))=C_X(A)$.

(ii) Se $A \subseteq B \subseteq C_X(A)$, então $C_X(A) \subseteq C_X(B)$.

De fato, como F é bijetora, então $A=F(D)$ e $B=F(E)$, para $D, E \subseteq L$ (lembre que D e E são únicos). Logo, $C_X(A)=F(C(D))$ e $C_X(B)=F(C(E))$. Daí, por hipótese, segue que $F(D) \subseteq F(E) \subseteq F(C(D))$. Logo, $F^{-1}(F(D)) \subseteq F^{-1}(F(E)) \subseteq F^{-1}(F(C(D)))$, isto é, $D \subseteq E \subseteq C(D)$. Daí, pela monotonicidade cautelosa, $C(D) \subseteq C(E)$, ou seja, $C_X(A)=F(C(D)) \subseteq F(C(E))=C_X(B)$.

(iii) $C_X(C_X(A))=C_X(A)$.

Seja $C_X(A)=F(C(D))$ e $C_X(C_X(A))=F(C(E))$, isto é, $F(E)=F(C(D))=D=C_X(A)$. Como F é bijetora, $E=C(D)$. Daí, $C_X(C_X(A))=F(C(E))=F(C(D))=C_X(A)$.

■

***Proposição 3.3.4:** Sejam as lógicas cumulativas $\mathbf{L}=(L, C)$, $\mathbf{X}=(X, C_X)$ e a função bijetora $F:L \to X$, tal que C_X é o operador cumulativo induzido por F e L da proposição anterior. Então:

(a) A imagem inversa de um conjunto fechado em X é um conjunto fechado em L.

(b) Para todo subconjunto $\{x\} \cup A$ de L, se $x \in C(A)$ então $F(x) \in C_X(F(A))$.

Demonstração:

(a) Seja $A \subseteq X$, tal que $A=C_X(A)$. Por definição de C_X segue que $A=F(C(D))$, tal que $A=F(D)$, isto é, $D=C(D)$. Logo, $F^{-1}(A)=D$ (F é bijetora). Portanto, $F^{-1}(A)=C(F^{-1}(A))$, ou seja, a imagem inversa de um conjunto fechado em X é um conjunto fechado em L.

(b) Seja $\{x\} \cup A \subseteq L$, tal que $x \in C(A)$. Então, $F(x) \in F(C(A))$. Agora, $C_X(F(A))=F(C(D))$, com $F(A)=F(D)$. Como F é bijetora, então A=D e daí $C_X(F(A))=F(C(A))$. Portanto, se $x \in C(A)$ então $F(x) \in C_X(F(A))$.

■

Portanto, para o caso em que F é bijetora, conseguimos co-induzir um operador cumulativo através de uma lógica cumulativa e uma função cujo domínio é essa lógica. Além disso, o operador cumulativo satisfaz as propriedades por nós destacadas.

O caminho natural agora seria considerar a função F na Proposição 3.3.3 sobrejetora, ou seja, enfraquecermos um pouco mais nossas hipóteses. Desta forma, teríamos a aplicação $C_X: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subseteq X$, $C_X(A)=F(C(\cup A_i))$, onde $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos em L com $F(A_i)=A$, para todo $i \in I$. O que parece ser natural, em verdade não se torna frutífero, pois concebendo C_X nesses termos não podemos dizer que o mesmo é um operador cumulativo sobre X. Portanto, devemos procurar outros caminhos a fim de definirmos um operador co-induzido por uma função F e uma lógica cumulativa. Que outros caminhos são estes? Esta é uma pergunta que necessita ainda de resposta. Não podemos esquecer que buscamos conceber um operador co-induzido que satisfaça as propriedades desejáveis (Proposição 3.1.9).

Vejamos a seguir alguns operadores co-induzidos, com uma ressalva, tais operadores são operadores de Tarski e nada podemos dizer sobre a validade da Proposição 3.1.9.

***Proposição 3.3.5:** Sejam **L**=(L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e a função sobrejetora $F: L \rightarrow X$. Além disso, seja a aplicação $C_X: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subseteq X$, $C_X(A)=\cap_{i \in I} F(C(A_i))$, onde $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos em L, tal que $F(A_i) \supseteq A$, para todo $i \in I$. Então, C_X é um operador de Tarski sobre X.

■

Se na proposição anterior, considerarmos $C_X(A)=F(\cap_{i\in I}C(A_i))$ no lugar de $C_X(A)=\cap_{i\in I}F(C(A_i))$, pode ocorrer que $\cap_{i\in I}C(A_i)=\varnothing$. Além disso, para não considerarmos a hipótese de que F é sobrejetora na proposição anterior, definimos C_X' sobre X da seguinte maneira:

$$C_X'(A)=\begin{cases} Cx(A) & \text{se } A\subseteq \mathrm{Img}(F); \\ A & \text{se } A\cap \mathrm{Img}(F)=\varnothing; \\ B\cup Cx(D) & \text{se } A=B\cup D, \text{ tal que } B\cap \mathrm{Img}(F)=\varnothing \text{ e } D\subseteq \mathrm{Img}(F). \end{cases}$$

Assim, facilmente verificamos que C_X' é um operador de Tarski sobre X.

Nas proposições anteriores, quando definimos um operador C_X, sempre consideramos subconjuntos de L, para depois aplicar a função F, e daí definirmos C_X. Pois bem, para finalizar vejamos uma maneira de conceber C_X tomando diretamente subconjuntos em X.

***Proposição 3.3.6:** Sejam **L**=(L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio, a função F: L→X e os conjuntos $\delta=\{R\subseteq X:\ F^{-1}(R)=C(F^{-1}(R))\}$ e $\delta_I=\{J\subseteq X:\ \exists\Im\subseteq\delta \text{ tal que } \cap\Im\subseteq J\}$. A aplicação $C_X:\wp(X)\to\wp(X)$ tal que, para todo $A\subseteq X$, $C_X(A)=\cap_{i\in I}A_i$, onde para todo $i\in I$, $(A_i)_{i\in I}\subseteq\delta_I$ e $A_i\supseteq A$, é um operador de Tarski sobre X.

■

Não apresentamos as demonstrações das proposições anteriores, pois as mesmas seguem imediatamente das definições dos respectivos operadores C_X. Além disso, estes operadores não são os operadores cumulativos co-induzidos que gostaríamos de obter.

Antes de encerrarmos este assunto, alguns resultados (intermediários) sobre operadores co-induzidos são apresentados.

Definição 3.3.7: Sejam **L**=(L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e a função sobrejetora F: L→X. Definimos a seguinte relação sobre L:

$$x\sim y \text{ se, e somente se, } F(x)=F(y).$$

É trivial verificar que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Normalmente denotaremos

$$L/\sim=\{[x]: x\in L\} \text{ por } L_\sim$$

onde $[x]=\{y\in L: x\sim y\}$.

***Proposição 3.3.8:** A função $F':L_\sim\to X$, tal que $F'([x])=F(x)$ com $\sim$ a relação descrita anteriormente, é uma função bijetora.

Demonstração:

A função F' está bem definida. De fato, dados $F'([x])$, $F'([y])\in X$, tal que $F'([x])\neq F'([y])$, então $F(x)\neq F(y)$ (definição de F'). Logo, $[x]\neq[y]$. Além disso, como a função F é sobrejetora, então F' é sobrejetora. Basta verificar que F' é injetora. De fato, dados $[x]$, $[y]\in L_\sim$, tal que $[x]\neq[y]$, então $F(x)\neq F(y)$ e daí, pela definição de F' segue que $F'([x])\neq F'([y])$.

■

***Proposição 3.3.9:** Sejam $\mathbf{L}=(L, C)$ uma lógica cumulativa e $L_\sim$. Então, a aplicação $C_\sim:\wp(L_\sim)\to\wp(L_\sim)$ tal que, para todo $A_\sim\subseteq L_\sim$, $C_\sim(A_\sim)=\{[x]: x\in C(\cup A_\sim)\}$ é um operador cumulativo.

Demonstração:

Note que, dado $A_\sim\subseteq L_\sim$, $\cup A_\sim=\{y\in L: y\in[x] \text{ para algum } [x]\in A_\sim\}$. Pois bem, vejamos que $C_\sim$ é um operador cumulativo sobre $L_\sim$.

(i) Para todo $A_\sim\subseteq L_\sim$, $A_\sim\subseteq C_\sim(A_\sim)$.

De fato, se $[x]\in A_\sim$, então $x\in\cup A_\sim$. Pela inclusão, $\cup A_\sim\subseteq C(\cup A_\sim)$. Daí, pela definição de $C_\sim$, segue que $[x]\in C_\sim(A_\sim)$.

(ii) Para todo $A_\sim$, $B_\sim\subseteq L_\sim$, se $A_\sim\subseteq B_\sim\subseteq C_\sim(A_\sim)$ então $C_\sim(A_\sim)\subseteq C_\sim(B_\sim)$.

De fato, da hipótese segue que $\cup A_\sim\subseteq\cup B_\sim\subseteq\cup C_\sim(A_\sim)$. Logo, basta mostrar que $\cup C_\sim(A_\sim)\subseteq C(\cup A_\sim)$. Pois bem, se $x\in\cup C_\sim(A_\sim)$, então $x\in[y]$, para algum $[y]\in C_\sim(A_\sim)$. Pela relação de equivalência, $x\in[y]$ implica que $[x]=[y]$. Logo, $[x]\in C_\sim(A_\sim)$ e daí, pela definição de $C_\sim(A_\sim)$, segue que $x\in C(\cup A_\sim)$. Assim, $\cup A_\sim\subseteq\cup B_\sim\subseteq C(\cup A_\sim)$ e daí, pela monotonicidade cautelosa, $C(\cup A_\sim)\subseteq C(\cup B_\sim)$. Portanto, $C_\sim(A_\sim)\subseteq C_\sim(B_\sim)$.

<u>(iii)</u> Para todo $A_\sim\subseteq L_\sim$, $C_\sim(C_\sim(A_\sim))=C_\sim(A_\sim)$.

Vimos no item anterior que $\cup C_\sim(A_\sim)\subseteq C(\cup A_\sim)$. Além disso, temos que $C(\cup A_\sim)\subseteq\cup C_\sim(A_\sim)$. De fato, se $x\in C(\cup A_\sim)$ então $[x]\in C_\sim(A_\sim)$. Como $x\in[x]$, então $x\in\cup C_\sim(A_\sim)$. Portanto, $\cup C_\sim(A_\sim)=C(\cup A_\sim)$. Agora, $C_\sim(C_\sim(A_\sim))=\{[x]: x\in C(\cup C_\sim(A_\sim))\}$, ou seja, $C_\sim(C_\sim(A_\sim))=\{[x]: x\in C(C(A_\sim))\}$. Mas, pela definição de $C_\sim$, $C_\sim(A_\sim)=\{[x]: x\in C(\cup A_\sim)\}$. Portanto, $C_\sim(C_\sim(A_\sim))=C_\sim(A_\sim)$.

■

Portanto, a partir de uma função sobrejetora $F:L\to X$, tal que $\mathbf{L}=(L, C)$ é uma lógica cumulativa e X um conjunto qualquer não vazio, construímos a lógica cumulativa $\mathbf{L'}=(L_\sim, C_\sim)$. Além disso, a função $F':L_\sim\to X$ é bijetora. Logo, pela Proposição 3.3.3 podemos co-induzir um operador cumulativo sobre X a partir de F' e $\mathbf{L'}$. Assim, de certa forma co-induzimos um operador cumulativo sobre X a partir da lógica cumulativa $\mathbf{L}$ e da função sobrejetora F. O resultado é o seguinte.

***Proposição 3.3.10:** Sejam $\mathbf{L'}=(L_\sim, C_\sim)$ a lógica cumulativa descrita anteriormente, X um conjunto qualquer não vazio e a função bijetora $F':L_\sim\to X$. Então, a aplicação $C_X:\wp(X)\to\wp(X)$ tal que, para todo $A\subseteq X$, $C_X(A)=F'(C_\sim(D_\sim))$, com $F'(D_\sim)=A$, é um operador cumulativo sobre X.

■

No próximo capítulo introduziremos o conceito de traduções entre lógicas e veremos alguns resultados gerais sobre este assunto.

Capítulo 4

Traduções entre Lógicas

Neste capítulo é apresentada a definição de traduções entre lógicas cumulativas. Essa é a mesma definição proposta por da Silva, D'Ottaviano e Sette **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**, com uma diferença, a classe de lógicas sobre a qual recai esta nova definição é ampliada. Muitos dos resultados que se encontram em **(Feitosa; 1997)** e **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** serão naturalmente reformulados, simplesmente considerando no lugar da lógica de Tarski uma lógica cumulativa. Outros resultados, por hora, não serão passíveis de tal extensão. Verificamos ainda que a classe das lógicas cumulativas juntamente com a classe das traduções entre estas lógicas formam uma categoria.

4.1 O conceito de Tradução

Definição 4.1.1: Dadas duas lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2= (L_2, C_2)$, uma *tradução de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$* é uma aplicação $T: L_1 \rightarrow L_2$ tal que, para todo subconjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$\text{se } x \in C_1(A) \text{ então } T(x) \in C_2(T(A)).$$

Quando L_1 e L_2 são linguagens formais, uma tradução entre $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ é uma aplicação T: $For(L_1) \rightarrow For(L_2)$ tal que, para todo subconjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(L_1)$,

$$\text{se } \Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha \text{ então } T(\Gamma) \mid\!\sim_{C2} T(\alpha).$$

Lembramos que, para um operador cumulativo C, $\alpha \in C(\Gamma)$ se, e somente se, $\Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha$.

Observamos ainda que, para $\Gamma = \emptyset$, $T(\emptyset) = \emptyset$. Assim, toda tradução leva teoremas de $\mathbf{L}_1$ em teoremas de $\mathbf{L}_2$. Usualmente denotaremos a aplicação T: $L_1 \rightarrow L_2$ por T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$.

Na definição anterior considerando $\mathbf{L}_1 = (L_1, C_{n1})$ e $\mathbf{L}_2 = (L_2, C_{n2})$ lógicas de Tarski, há uma maneira trivial de concebermos uma tradução entre estas lógicas. Basta que exista pelo menos um elemento $y \in L_2$ tal que $y \in C_{n2}(\emptyset)$. Deste modo, definimos a aplicação $T: \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ como $T(x) = y$, para todo $x \in L_1$. Assim, $T(A) = \{y\}$, para todo $A \subseteq L_1$. Logo, se $x \in C_{n1}(A)$ então $T(x) \in T(A) \subseteq C_{n2}(T(A))$. Esta maneira de se conceber traduções também vale quando $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ são lógicas cumulativas.

Proposição 4.1.2: A aplicação T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$, com $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ lógicas cumulativas, é uma tradução se, e somente se, $T(C_1(A)) \subseteq C_2(T(A))$, para todo $A \subseteq L_1$, onde o conjunto $T(A) = \{T(x): x \in A\}$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $y \in T(C_1(A))$, então existe $x \in C_1(A)$ tal que $T(x) = y$. Como T é tradução, então $T(x) = y \in C_2(T(A))$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que T não seja tradução, isto é, existem conjuntos A, $\{x_0\} \subseteq L_1$ tais que $x_0 \in C_1(A)$ e $T(x_0) \notin C_2(T(A))$. Assim, se $T(x_0) \notin C_2(T(A))$ então $T(x_0) \notin T(C_1(A))$ pois, por hipótese, $T(C_1(A)) \subseteq C_2(T(A))$, para todo $A \subseteq L_1$. Logo, $x_0 \notin C_1(A)$ (absurdo). Portanto, T é tradução.

■

Antes de prosseguirmos o estudo sobre traduções entre lógicas cumulativas, abrimos uma lacuna dentro deste assunto, destacando à teoria de categorias, com respeito à classe das lógicas e à classe das lógicas cumulativas. Para uma leitura bastante detalhada sobre o tema 'categorias' ver **(Goldblat; 1984)** ou **(Bell; 1988)**, entre outros.

Para compreendermos plenamente os resultados que serão apresentados sobre categorias enfocando a classe das lógicas de Tarski, deveríamos apresentar várias definições e teoremas, mas, não é isto o que faremos aqui. Apresentaremos somente as definições de categoria, subcategoria e subcategoria plena, pois, estas definições são suficientes para as considerações que faremos sobre a classe das lógicas de Tarski e traduções entre estas lógicas. Por exemplo, em **(Feitosa; 1997)** encontramos com detalhes os resultados que aqui são citados sobre estas classes juntamente com outros resultados, todos sobre categorias.

Definição 4.1.3: Uma *categoria* ∂ consiste de uma classe Ob(∂) de elementos A, B, C,... , denominados *objetos* de ∂, e uma classe Mor(∂) de elementos f, g, h,..., denominados *flechas* ou *morfismos* de ∂, com as seguintes condições:

(i) A cada morfismo f de ∂ é atribuído um par de objetos dom(f) e cod(f), respectivamente domínio e codomínio de f tal que, se A=dom(f) e B=cod(f), dizemos que f é um morfismo de A em B e denotamos isto por $f:A\rightarrow B$ ou $A\rightarrow_f B$.

(ii) Para cada par de morfismos $f:A\rightarrow B$ e $g:B\rightarrow C$ de ∂, com dom(g)=cod(f), é atribuído um morfismo $gof:A\rightarrow C$, denominado a composição de f e g.

(iii) Para cada objeto A de ∂ é atribuído um morfismo $i_A:A\rightarrow A$, denominado o morfismo identidade de A, que é denotado por i quando não houver risco de confusão.

(iv) Dados os morfismos $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$ e $h:C\rightarrow D$, tem-se que ho(gof)=(hog)of (Associatividade).

(v) Para cada objeto B de ∂, dados os morfismos $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$ de ∂, tem-se que $i_B o f = f$ e $g o i_B = g$ (Identidade).

(vi) Para quaisquer objetos A, B de ∂, a coleção $Mor_\partial(A, B)$ dos morfismos de A em B é um conjunto.

Definição 4.1.4: A categoria δ é uma *subcategoria* da categoria ∂ se:

(i) $Ob(\delta) \subseteq Ob(\partial)$;

(ii) Dados $A, B \in Ob(\delta)$, tem-se que $Mor_\delta(A, B) \subseteq Mor_\partial(A, B)$.

Definição 4.1.5: A categoria δ é uma *subcategoria plena* da categoria ∂, se $Mor_\delta(A, B) = Mor_\partial(A, B)$, para dois objetos A, B quaisquer de $Ob(\delta)$.

A classe das lógicas de Tarski e a classe das traduções entre estas lógicas determina uma categoria. Esta categoria é denotada por $\mathbf{T_r}$. Além disso, verifica-se que a categoria $\mathbf{T_r}$ é completa e co-completa, ou seja, $\mathbf{T_r}$ é bi-completa. Estes resultados encontram-se em **(Feitosa; 1997)** ou **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)**. De forma análoga, é fácil verificarmos que a classe das lógicas cumulativas e a classe das traduções entre estas lógicas também determinam uma categoria. Esta categoria será denotada por $\mathbf{T_{rCum}}$.

***Proposição 4.1.6:** A categoria $\mathbf{T_r}$ é uma subcategoria de $\mathbf{T_{rCum}}$.

Demonstração:

De fato, $Obj(\mathbf{T_r}) \subseteq Obj(\mathbf{T_{rCum}})$, pois toda lógica de Tarski é uma lógica cumulativa. É claro que, para quaisquer duas lógicas de Tarski, $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, se uma aplicação T entre essas duas lógicas é uma tradução, então T pertence à classe das traduções entre lógicas cumulativas, ou seja, $Mor_{\ Tr}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \subseteq Mor_{\ TrCum}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$.

■

***Corolário 4.1.7:** A categoria $\mathbf{T_r}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{T_{rCum}}$.

■

Um resultado importante para o desenvolvimento de uma Teoria Geral de Traduções, no escopo da categoria $\mathbf{T_r}$, é o teorema abaixo que nos fornece uma série de equivalências para determinadas aplicações consideradas traduções.

Teorema 4.1.8: Seja a aplicação $T:\mathbf{L_1}\rightarrow\mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ lógicas de Tarski. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) T é uma tradução.

(b) Para qualquer $X\subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X)))=C_2(T(X))$.

(c) A imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado.

(d) Para todo $Y\subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

■

O teorema anterior juntamente com sua demonstração pode ser encontrado em **(Feitosa; 1997)**, **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** e **(Feitosa, D'Ottaviano, 2001)**. Gostaríamos que este resultado também fosse válido na categoria $\mathbf{T_{rCum}}$, pois, deste modo, um grande número de resultados acerca das lógicas de Tarski e traduções entre estas lógicas poderiam naturalmente ser estendidos para as lógicas cumulativas e traduções entre estas lógicas. Infelizmente, para obtermos a equivalência das afirmações do referido teorema, quando $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ são lógicas cumulativas, precisamos adicionar novas hipóteses que se referem aos operadores C_1 e C_2, ou seja, não podemos manipular livremente as lógicas cumulativas. Vejamos então o teorema acrescido destas novas hipóteses. Ressaltamos que originalmente ele foi obtido por Coniglio, D'Ottaviano e Martins tendo sido apresentado no Seminário de Lógica do Grupo de Lógica Teórica e Aplicada (GLTA) do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) da UNICAMP no ano de 2000, com uma hipótese a mais àquelas que serão apresentadas.

***Teorema 4.1.9:** Seja a aplicação T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1}=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2}=(L_2, C_2)$ lógicas cumulativas. Além disso, suponhamos que:

(1) $C_2(Y) \subseteq C_2(T(T^{-1}(Y)))$, para todo $Y \subseteq L_2$.

(2) $C_1(X) \subseteq C_1(T^{-1}(C_2(T(X))))$.

(3) $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq C_1(T^{-1}(C_2(Y)))$, para todo $Y \subseteq L_2$.

Nessas condições as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é uma tradução.

(b) Para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X)))=C_2(T(X))$.

(c) A imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado.

(d) Para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

Demonstração:

(a)⇒(b)

Como T é tradução, pela Proposição 4.1.2, para qualquer $X \subseteq L_1$, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$ e pela inclusão, $X \subseteq C_1(X)$. Logo, $T(X) \subseteq T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$ e daí, pela condição cumulativa, $C_2(T(X))=C_2(T(C_1(X)))$. Portanto, para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X)))=C_2(T(X))$.

(b)⇒(a)

Temos, pela inclusão, que $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(C_1(X)))$ e por hipótese, $C_2(T(C_1(X)))=C_2(T(X))$, para qualquer $X \subseteq L_1$. Logo, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$, ou seja, T é tradução.

(a)⇒(c)

Seja Y um conjunto fechado qualquer de L_2, isto é, $Y=C_2(Y)$. Daí, pela propriedade da imagem inversa, $T(T^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Agora,

$T(T^{-1}(Y)) \subseteq C_2(Y)$ (I);

$T^{-1}(Y) \subseteq C_1(T^{-1}(Y))$ (inclusão) (II);

$T(C_1(T^{-1}(Y))) \subseteq C_2(T(T^{-1}(Y)))$ (T tradução) (III).

Pela hipótese (1), (I) acima e monotonicidade cautelosa, temos que $C_2(T(T^{-1}(Y)))\subseteq C_2(Y)$. Deste fato, juntamente com (III), segue que $T(C_1(T^{-1}(Y)))\subseteq Y$ (pois Y é fechado). Pela propriedade da imagem inversa, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(T(C_1(T^{-1}(Y))))$ e $T^{-1}(T(C_1(T^{-1}(Y))))\subseteq T^{-1}(Y)$. Assim, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(Y)$ e juntamente com (II), segue que $T^{-1}(Y)=C_1(T^{-1}(Y))$.

(c)$\Rightarrow$(a)

Sabemos, pela idempotência, que $C_2(T(X))$ é fechado. Logo, por hipótese, $T^{-1}(C_2(T(X)))=C_1(T^{-1}(C_2(T(X))))$. Além disso, pela hipótese (2) temos que, $C_1(X)\subseteq C_1(T^{-1}(C_2(T(X))))$.

Logo, $C_1(X)\subseteq T^{-1}(C_2(T(X)))$. Assim, $T(C_1(X))\subseteq T(T^{-1}(C_2(T(X))))$. Pela imagem inversa, $T(T^{-1}(C_2(T(X))))\subseteq C_2(T(X))$. Portanto, $T(C_1(X))\subseteq C_2(T(X))$, isto é, T é tradução.

(c)$\Rightarrow$(d)

Para todo $Y\subseteq L_2$, $Y\subseteq C_2(Y)$ (inclusão) e, pela propriedade da imagem inversa, $T^{-1}(Y)\subseteq T^{-1}(C_2(Y))$. Além disso, por (3), temos que $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq C_1(T^{-1}(C_2(Y)))$. Como a imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado, então $T^{-1}(C_2(Y))=C_1(T^{-1}(C_2(Y)))$. Logo, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

(d)$\Rightarrow$(c)

Seja $Y\subseteq L_2$, tal que $Y=C_2(Y)$. Por hipótese, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(C_2(Y))$. Logo, $C_1(T^{-1}(Y))\subseteq T^{-1}(Y)$ e $T^{-1}(Y)\subseteq C_1(T^{-1}(Y))$ (inclusão). Portanto, $T^{-1}(Y)=C_1(T^{-1}(Y))$, ou seja, a imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado.

■

Observamos que, para a equivalência de (a) e (b) não utilizamos as hipóteses (1), (2) e (3). Também para a implicação de (d) e (c) não utilizamos as referidas hipóteses.

As hipóteses (1), (2) e (3) do Teorema 4.1.9 nos dizem que para certos conjuntos de L_1 e L_2, os operadores C_1 e C_2 comportam-se como se fossem monotônicos. Além disso, como as hipóteses (1), (2), (3) ora referem-se ao operador C_1 (portanto ao domínio de T), ora referem-se ao operador C_2 (imagem de T), elas parecem nos indicar que, quando uma dentre as duas lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ for uma lógica de Tarski, as hipóteses do teorema poderão ser minimizadas. Assim, fazendo-se certas restrições aos tipos de lógicas consideradas, resultados com as hipóteses (1), (1) e (2) ou (2) e (3) podem ser considerados. Vejamos alguns resultados intermediários que capturam certos tipos de restrições.

***Proposição 4.1.10:** Seja a aplicação T: $\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$, onde $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ é uma lógica cumulativa e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ é uma lógica de Tarski. Se T é uma tradução de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$, então a imagem inversa de um conjunto fechado em L_2 é um conjunto fechado em L_1.

Demonstração:

Seja $Y \subseteq L_2$ um conjunto fechado, isto é, $Y=C_2(Y)$. Assim,

$T^{-1}(Y) \subseteq C_1(T^{-1}(Y))$ (inclusão) (I);

$T(C_1(T^{-1}(Y))) \subseteq C_2(T(T^{-1}(Y)))$ (T tradução) (II);

$T(T^{-1}(Y)) \subseteq C_2(Y)$ (propriedade da imagem inversa e Y fechado) (III);

$C_2(T(T^{-1}(Y))) \subseteq C_2(Y)=Y$ (C_2 operador de Tarski) (IV);

$C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(Y)$ ((II), (IV) e propriedade da imagem inversa) (V).

De (V) e (I) segue que $T^{-1}(Y)=C_1(T^{-1}(Y))$.

■

***Proposição 4.1.11:** Sejam a aplicação $T: \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ uma lógica de Tarski e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ uma lógica cumulativa. Se a imagem inversa de um conjunto fechado em L_2 é um conjunto fechado em L_1, então T é uma tradução de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$.

Demonstração:

De fato, para qualquer $X \subseteq L_1$, $T(X) \subseteq C_2(T(X))$. Logo, $T^{-1}(T(X)) \subseteq T^{-1}(C_2(T(X)))$.

Como $X \subseteq T^{-1}(T(X))$ e por hipótese $T^{-1}(C_2(T(X)))=C_1(T^{-1}(C_2(T(X))))$, então $X \subseteq T^{-1}(C_2(T(X)))$. Pela monotonicidade do operador C_1 segue que $C_1(X) \subseteq T^{-1}(C_2(T(X)))$. Logo, $T(C_1(X)) \subseteq T(T^{-1}(C_2(T(X))))$, ou seja, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$. Portanto, T é tradução (segue da Proposição 4.1.2).

■

Nas duas proposições anteriores a atenção é dada apenas aos itens (a) e (c) do Teorema 4.1.9, pois julgamos esses itens mais relevantes, haja visto, que no capítulo anterior, ao concebermos operadores induzidos e co-induzidos caracterizamos estes operadores a partir de conjuntos fechados. Notamos também que os itens (a) e (c) referem-se às propriedades por nós desejadas (ver Proposição 3.1.9). A Proposição 4.1.10, que é semelhante a (a)⇒(c) no Teorema 4.1.9, não utiliza a hipótese (1) deste teorema, e a Proposição 4.1.11, que é semelhante a (c)⇒(a), não utiliza a hipótese (2) do Teorema 4.1.9.

Inicialmente, não nos preocupamos em considerar na Proposição 4.1.10 e Proposição 4.1.11 os operadores C_1 e C_2, respectivamente operadores supraclássicos, mas, se fizermos isto devemos nos perguntar se a definição de tradução apresentada no início desta seção engloba também o caso destes operadores. Lembramos que ao considerarmos C_1 e C_2, respectivamente, operadores cumulativos supraclássicos relativamente a C_{n1} e C_{n2}, dizemos que um conjunto é fechado se ele é fechado segundo esses respectivos operadores de Tarski. Primeiramente, no caso em que o operador cumulativo C_1 da Proposição 4.1.10 é supraclássico relativamente a C_{n1} temos que, para todo $A \cup \{x\} \subseteq L_1$,

$$\text{se } x \in C_{n1}(A) \subseteq C_1(A), \text{ então } T(x) \in C_2(T(A))$$

ou seja, o fato de C_1 ser supraclássico não acarreta nenhuma informação nova com respeito a definição de tradução (Definição 4.1.1). Além disso, vemos facilmente que a Proposição 4.1.10 continua válida se C_1 é um operador supraclássico.

No caso em que C_2 da Proposição 4.1.11 é um operador cumulativo supraclássico relativamente a C_{n2}, basta que a aplicação T seja tradução entre $\mathbf{L}_1$ e a parte monotônica de $\mathbf{L}_2$ para que T seja tradução de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$, pois, neste caso, para todo $A\cup\{x\}\subseteq L_1$,

$$\text{se } x\in C_1(A), \text{ então } T(x)\in C_{n2}(T(A))\subseteq C_2(T(A)).$$

Neste caso (C_2 operador cumulativo supraclássico), a Proposição 4.1.11 também continua valendo. Basta trocarmos C_2 por C_{n2} na demonstração dessa proposição.

Definição 4.1.12: Uma *aplicação fechada* é uma função em que a imagem de todo conjunto fechado é um conjunto fechado.

Proposição 4.1.13: Seja T: $\mathbf{L}_1\rightarrow\mathbf{L}_2$ uma tradução entre lógicas cumulativas. Se, para todo $A\subseteq L_1$, $C_2(T(A))\subseteq T(C_1(A))$, então T é uma aplicação fechada.

■

A proposição acima é uma extensão direta do resultado em que as lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ pertencem a categoria $\mathbf{T_r}$. Além disso, se considerarmos na referida proposição apenas $\mathbf{L}_2$ uma lógica de Tarski, então a recíproca é verdadeira.

Corolário 4.1.14: Seja T: $\mathbf{L}_1\rightarrow\mathbf{L}_2$ uma tradução entre $\mathbf{L}_1$ lógica cumulativa e $\mathbf{L}_2$ lógica de Tarski. Para todo $A\subseteq L_1$, $C_2(T(A))\subseteq T(C_1(A))$ se, e somente se, T é uma aplicação fechada.

■

4.2 Traduções Conservativas

Citamos no início da seção anterior como concebermos traduções entre duas lógicas, de modo trivial. Além disso, a definição de tradução não fornece uma relação de reciprocidade entre as lógicas envolvidas na respectiva tradução. Isto não ocorre com as chamadas traduções conservativas. A partir destas traduções podemos verificar a validade de certas propriedades de uma lógica em função de outra lógica, por isso estas traduções merecem uma atenção especial.

O conceito de tradução conservativa foi introduzido por Feitosa e D'Ottaviano e refere-se à classe das lógicas (lógicas de Tarski), em **(Feitosa; 1997)** e no artigo **(Feitosa, D'Ottaviano; 2001)**. Nesta seção estenderemos o conceito de traduções conservativas para a classe das lógicas cumulativas.

Definição 4.2.1: Uma *aplicação conservativa* entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ é uma aplicação T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ tal que, para todo $x \in L_1$,

$$x \in C_1(\varnothing) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(\varnothing).$$

Definição 4.2.2: A aplicação T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ é uma *tradução conservativa* se, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A)).$$

Quando $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ são linguagens formais, de forma análoga à definição de tradução, uma aplicação conservativa é uma aplicação $T:For(L_1) \rightarrow For(L_2)$ tal que, para toda $\alpha \in For(L_1)$:

$$\mid\!\sim_{C1} \alpha \text{ se, e somente se, } \mid\!\sim_{C2} T(\alpha).$$

No caso de T ser tradução conservativa, para todo subconjunto $\Gamma\cup\{\alpha\}\subseteq For(L_1)$,

$$\Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha \quad \text{se, e somente se,} \quad T(\Gamma) \mid\!\sim_{C2} T(\alpha).$$

Vários resultados que fornecem condições necessárias e suficientes para que aplicações entre lógicas (lógicas de Tarski) sejam traduções conservativas juntamente com algumas traduções conservativas envolvendo a lógica clássica e várias lógicas não-clássicas, encontram-se em **(Feitosa; 1997)** e **(Feitosa, D'Ottaviano; 2001)**. Um método considerado fundamental para determinar a existência ou não de tradução conservativa entre as lógicas estudadas nestes textos é o uso das álgebras de Lindenbaum associadas às referidas lógicas (lógicas de Tarski). Não iremos citar estes resultados, pois, eles envolvem somente a classe das lógicas de Tarki e, aqui, procuramos resultados que incluam a classe das lógicas cumulativas. Citaremos apenas um dos muitos resultados que caracterizam a existência de traduções conservartivas que aparecem em **(Feitosa; 1997)**. Para exibirmos este resultado, consideramos que as relações $\sim_1$ e $\sim_2$ são definidas da seguinte maneira:

$$x\sim_1 y \ \ (x\sim_2 y) \ \text{ se, e somente se, } C_{n1}(\{x\})=C_{n1}(\{y\}) \ \ (C_{n2}(\{x\})=C_{n2}(\{y\})).$$

O leitor poderá verificar facilmente que $\sim_1$ e $\sim_2$ são relações de equivalência.

Teorema 4.2.3: Sejam $\mathbf{L}_1=(L_1, C_{n1})$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_{n2})$ duas lógicas, com domínio de $\mathbf{L}_2$ enumerável. Assim, existe uma tradução conservativa T: $\mathbf{L}_1\rightarrow\mathbf{L}_2$ se, e somente se, existe uma tradução conservativa T^*: $\mathbf{L}_1/_{\sim 1}\rightarrow\mathbf{L}_2/_{\sim 2}$.

■

Com respeito à classe das lógicas de Tarski e das traduções conservativas entre essas lógicas temos que essas classes formam uma subcategoria co-completa de $\mathbf{T_r}$. Denotamos esta subcategoria por $\mathbf{T_{rCon}}$ (ver **(Feitosa; 1997)**). Com relação à classe das lógicas cumulativas e das traduções conservativas vejamos dois resultados sobre categorias.

***Proposição 4.2.4:** A classe das lógicas cumulativas e a classe das traduções conservativas entre estas lógicas determinam uma categoria, denotada por $\mathbf{T_{rCumCon}}$.

■

***Corolário 4.2.5:** $\mathbf{T_{rCumCon}}$ é uma subcategoria de $\mathbf{T_{rCum}}$.

■

Vejamos a seguir resultados que nos fornecem condições para concebermos traduções conservativas entre lógicas cumulativas.

***Teorema 4.2.6:** Sejam as funções $T: \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ com $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ lógicas cumulativas. A função T é uma tradução conservativa se, e somente se, $T^{-1}(C_2(T(A))) \subseteq C_1(A)$, para todo $A \subseteq L_1$.

■

Encontramos o teorema acima em **(Feitosa; 1997)** com uma pequena diferença, $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ são lógicas de Tarski. Aliás, o que ocorre se em uma tradução conservativa pelo menos uma das lógicas envolvidas é uma lógica de Tarski? Esta pergunta é respondida pelas duas proposições apresentadas a seguir.

***Proposição 4.2.7:** Sejam as aplicações $T: L \rightarrow L_2$ e $C_2: \wp(L_2) \rightarrow \wp(L_2)$, com $\mathbf{L}=(L, C_n)$ uma lógica de Tarski. Além disso, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L,

$$x \in C(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A)) \quad (\spadesuit).$$

Se T é sobrejetora então, para todo B, $D \subseteq L_2$, tal que $B \subseteq D$, $C_2(B) \subseteq C_2(D)$.

Demonstração:

Sejam B, $D \subseteq L_2$, tal que $B \subseteq D$. Como T é sobrejetora, então $B=T(\cup_{i\in I} B_i)$ e $D=T(\cup_{j\in J} D_j)$, onde $(B_i)_{i\in I}$ e $(D_j)_{j\in J}$ são, respectivamente, a família de todos os conjuntos em L com $T(B_i)=B$ e a família de todos os conjuntos em L com $T(D_j)=D$, para todo $i\in I$ e $j\in J$.

Vemos facilmente que $(B_i)_{i\in I} \subseteq (D_j)_{j\in J}$. Agora, se $y \in C_2(B)$ então $y = T(x_0) \in C_2(T(\cup_{i\in I} B_i))$, para algum $x_0 \in L$. Daí, por hipótese (♠) e pelo fato de que C_n é um operador de Tarski, então $x_0 \in C_n(\cup_{j\in J} D_j)$. Novamente, por (♠), segue que $T(x_0) \in C_2(T(\cup_{j\in J} D_j))$, ou seja, $y \in C_2(D)$. Portanto, $C_2(B) \subseteq C_2(D)$.

■

***Proposição 4.2.8:** Sejam as aplicações $T: L_1 \to L$ e $C_1: \wp(L_1) \to \wp(L_1)$, com $\mathbf{L} = (L, C_n)$ uma lógica de Tarski. Além disso, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_n(T(A)).$$

Então, para todo $B, D \subseteq L_1$, tal que $B \subseteq D$, $C_1(B) \subseteq C_1(D)$.

Demonstração:

Sejam $B, D \subseteq L_1$, tal que $B \subseteq D$. Como C_n é um operador de Tarski, segue que $C_n(T(B)) \subseteq C_n(T(D))$. Pois bem, por hipótese, se $x \in C_1(B)$ então $T(x) \in C_n(T(B))$. Logo, $T(x) \in C_n(T(D))$. Daí, novamente por hipótese, segue que $x \in C_1(D)$. Portanto, $C_1(B) \subseteq C_1(D)$.

■

A partir das duas proposições anteriores, considerando-se duas lógicas concluímos que:

(1) Dada uma tradução conservativa sobrejetora T entre as lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, temos que:

$\mathbf{L}_1$ satisfaz a monotonicidade se, e somente se, $\mathbf{L}_2$ satisfaz a monotonicidade.

Se a aplicação T em (1) anterior não for sobrejetora, o conjunto imagem de T deve comportar-se monotonicamente. Assim, devemos estar atentos ao construirmos traduções conservativas entre lógicas, pois, de certa forma, para estes tipos de traduções as lógicas de Tarski e as lógicas cumulativas dividem-se em classes distintas. Além disso, na seção anterior, quando consideramos as aplicações entre lógicas apenas traduções, de certa forma, as Proposições 4.1.10 e 4.1.11 já nos sinalizavam que as aplicações entre lógicas de Tarski e lógicas cumulativas, sob o ponto de vista de traduções conservativas, caminhavam em direção à monotonicidade.

Além das Proposições 4.2.7 e 4.2.8 acarretarem o resultado (1) anterior, elas são importantes, pois, nos permitem refletir sobre traduções conservativas envolvendo lógicas cumulativas cujos operadores cumulativos são supraclássicos.

De fato, considerando uma aplicação T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ lógicas cumulativas com os respectivos operadores supraclásicos, nessas condições, de acordo com a definição de tradução conservativa (Definição 4.2.2), poderíamos pensar em outras condições que sugerem que a aplicação T seja uma tradução conservativa. Vejamos quais seriam essas novas condições juntamente com a condição já estabelecida na Definição 4.2.2 (condição descrita no item (i) abaixo). Lembramos novamente que os operadores cumulativos C_1 e C_2 são supraclássicos, ou seja, que $C_{n1} \leq C_1$ e $C_{n2} \leq C_2$.

(i) $x \in C_1(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_2(T(A))$.

(ii) $x \in C_1(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_{n2}(T(A))$.

(iii) $x \in C_{n1}(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_{n2}(T(A))$.

(iv) $x \in C_{n1}(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_2(T(A))$.

Supondo que C_1 é um operador cumulativo não monotônico, a condição (ii) não pode ser válida, pois, se isto acontecer, pela Proposição 4.2.8 teríamos que C_1 é um operador de Tarski. Da mesma maneira, se consideramos a condição (iv) válida, pela Proposição 4.2.7 o operador C_2 é um operador de Tarski sobre o conjunto imagem da aplicação T, mas no caso em que as condições (i) e (iii) são válidas problemas deste tipo não ocorrem.

Portanto, não nos parece fora de propósito, supormos que traduções conservativas entre lógicas cumulativas, cujos operadores cumulativos são supraclássicos, preservem respectivamente as 'partes' monotônicas e não monotônicas dessas lógicas. É claro que esta posição não é (ao menos por ora) definitiva. As condições nas quais as lógicas estão envolvidas é que determinarão se consideramos (i), (iii), ou ambos.

Se as condições (i) e (iii) forem válidas, então com relação a qualquer operador de Tarski C_{n1} (condição anterior (iii)) o operador cumulativo C_1 da condição (i) é supraclássico relativamente a esse operador. De fato, este é o resultado que segue abaixo.

***Proposição 4.2.9:** Seja $T:\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ uma tradução conservativa entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$, tal que $C_{n2} \leq C_2$. Além disso, para um operador de Tarski C_n sobre L_1 e para todo $A \cup \{x\}$ de L_1 temos que:

$$x \in C_n(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_{n2}(T(A)) \qquad (\blacklozenge).$$

Então, $C_n \leq C_1$, isto é, C_1 é supraclássico com relação a C_n.

Demonstração:

Como T é tradução conservativa, para todo $A \cup \{x\}$ de L_1 temos que:

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A)) \qquad (i).$$

Pela hipótese ($\blacklozenge$) e $C_{n2} \leq C_2$ temos que:

$$x \in C_n(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_{n2}(T(A)) \subseteq C_2(T(A)) \qquad (ii).$$

Logo de (i) e (ii) segue que: se $x \in C_n(A)$ então $x \in C_1(A)$, isto é, $C_n \leq C_1$.

■

Dadas duas lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ com conjuntos enumeráveis de teoremas, podemos construir uma aplicação conservativa entre essas lógicas, simplesmente enumerando o conjunto de teoremas das respectivas lógicas e mapeando os teoremas de $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ segundo a ordem de numeração. Esta aplicação pode ou não ser trivial. Portanto, quando lidamos com lógicas de Tarski, surge a seguinte questão no estudo de traduções:

Uma lógica poderá ser traduzida (conservativamente) em qualquer outra lógica?

Sob uma classe mais geral de lógicas, ou seja, a categoria $\mathbf{T_{rCum}}$, as Proposições 4.2.7 e 4.2.8 dão-nos resposta para esta questão.

***Corolário 4.2.10:** Seja $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ uma lógica cumulativa (não monotônica). Então, para qualquer lógica de Tarski $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ não existe tradução conservativa de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$.

■

***Corolário 4.2.11:** Seja $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$ uma lógica cumulativa (não monotônica). Então, para qualquer lógica de Tarski $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$, não existe tradução conservativa sobrejetora de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$.

■

Quando lidamos com traduções conservativas, algumas propriedades são preservadas a partir destas traduções. Vejamos alguns resultados que envolvem a propriedade dedutiva e a condição supracompacta. Nestes resultados, T: $\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ é uma tradução conservativa entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, e com isso queremos dizer que:

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A))$$

e

$$x \in C_{n1}(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_{n2}(T(A))$$

com $C_{n2} \leq C_2$.

***Proposição 4.2.12:** Seja T: $\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ uma tradução conservativa sobrejetora entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$, tal que C_1 é um operador dedutivo. Então, C_2 é um operador dedutivo.

Demonstração:

Sejam D, $E \subseteq L_2$, tal que $y \in C_2(D \cup E)$. Como T é sobrejetora, então existem conjuntos A, $B \subseteq L_1$, com $T(A)=D$, $T(B)=E$ e um elemento $x \in L_1$, com $T(x)=y$. Assim, se $y \in C_2(D \cup E)=C_2(T(A) \cup T(B))$ então, como a aplicação T é tradução conservativa, $x \in C_1(A \cup B)$. Daí, novamente pelo fato de que T é tradução (tradução conservativa) e o operador C_1 é dedutivo,

$$x \in C_1(A \cup B) \Rightarrow x \in C_{n1}(A \cup C_1(B)) \Rightarrow T(x)=y \in C_{n2}(T(A) \cup T(C_1(B))).$$

Pela Proposição 4.1.2 temos que $T(C_1(B)) \subseteq C_2(T(B))$ (pois a aplicação T é tradução). Logo,

$$T(x)=y \in C_{n2}(T(A) \cup T(C_1(B))) \text{ implica que } T(x)=y \in C_{n2}(D \cup C_2(E)).$$

Portanto, $C_2(D \cup E) \subseteq C_{n2}(D \cup C_2(E))$, ou seja, C_2 é um operador dedutivo.

■

***Proposição 4.2.13:** Seja T: $\mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ uma tradução conservativa sobrejetora entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L}_1=(L_1, C_1)$ e $\mathbf{L}_2=(L_2, C_2)$, com C_1 um operador supracompacto. Então, C_2 é um operador supracompacto.

Demonstração:

Seja $A \subseteq L_2$, tal que $y \in C_2(A)$. Como T é sobrejetora, existe $B \subseteq L_1$ com $T(B)=A$. Assim, como T é tradução conservativa,

$$y=T(x) \in C_2(A)=C_2(T(B)) \Leftrightarrow x \in C_1(B).$$

Como C_1 é um operador supracompacto, existe $B_0 \subseteq_f B$, tal que $x \in C_1(B_0 \cup D)$ para todo $D \subseteq L_1$. Novamente, como T é tradução conservativa,

$$x \in C_1(B_0 \cup D) \Leftrightarrow T(x)=y \in C_2(T(B_0) \cup T(D)),$$

tal que $T(B_0) \subseteq_f A \subseteq L_2$.

Sem perda de generalidade, no lugar de T(D) podemos considerar qualquer $E \subseteq L_2$, pois T é sobrejetora. Portanto, C_2 é um operador supracompacto.

■

Se nas proposições anteriores não considerarmos T sobrejetora, os resultados referem-se à imagem da aplicação T, isto é, C_2 é um operador dedutivo ou supracompacto sobre o conjunto Img(T).

No próximo capítulo descrevemos alguns trabalhos que poderão ser realizados e algumas questões que devem ser respondidas, dando continuidade à edificação de uma teoria de traduções sobre o escopo das lógicas cumulativas.

Considerações Finais

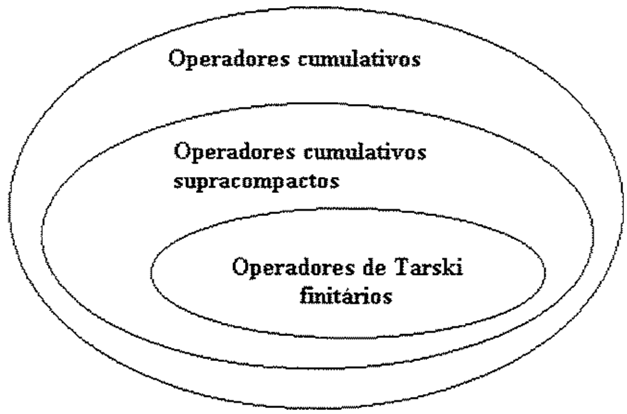
Quando nos propomos a fazer um trabalho sobre certa área de conhecimento devemos escolher um ponto de partida, para que a partir deste ponto possamos chegar aos resultados que julgamos válidos, ou seja, através de um fio condutor desejamos que conjecturas passem a ser resultados de fato. Por onde começar? Eis uma pergunta simples, mas, importante. Nos apoiarmos em trabalhos coerentes e bem fundamentados parece-nos ser um bom começo. É isto o que fizemos aqui, seguimos a linha de pesquisa dos trabalhos de **(da Silva, D'Ottaviano, Sette; 1999)** e **(Feitosa; 1997)**. Estes trabalhos possuem no seu cerne o conceito de traduções entre lógicas, mas, lógicas cujos operadores satisfazem as condições propostas por Tarski, ou seja, os operadores são monotônicos. Assim, as bases para o desenvolvimento de um novo tema estão lançadas, tema este que se insere na seguinte pergunta: Sob o escopo da classe de lógicas não monotônicas, o que podemos dizer sobre traduções entre lógicas?

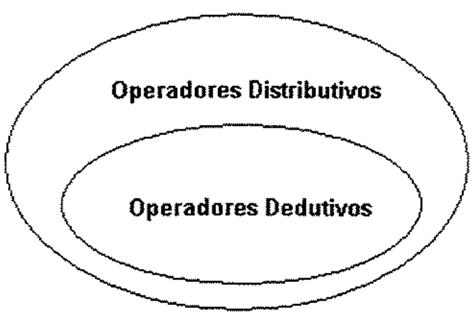
A finalidade deste capítulo é descrever de forma sucinta o caminho inicial percorrido em direção ao tema "traduções entre lógicas cumulativas", pois, parece-nos claro que muita coisa há por fazer. Neste sentido, apontar para possíveis novos alvos (futuras investigações) também faz-se necessário.

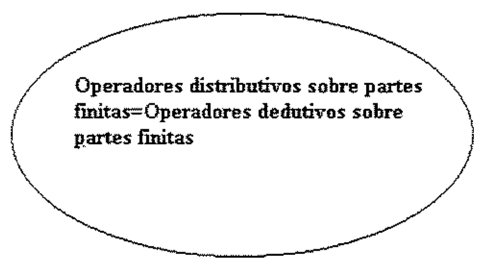
A partir do conceito de operador de conseqüência, no Capítulo 1, uma nova família de operadores é apresentada, a família dos operadores cumulativos. No Capítulo 2, destacamos algumas propriedades satisfeitas por estes operadores e, deste modo, caracterizamos algumas classes de operadores cumulativos. Prosseguimos no Capítulo 3, com este assunto, apresentando os operadores cumulativos induzidos e co-induzidos.

O material acerca de operadores cumulativos é bastante rico e extenso, porém, um tanto disperso. Sendo assim, apresentar um estudo sobre operadores cumulativos é importante, pois, futuramente esse material nos auxiliará na investigação de traduções entre lógicas cumulativas. Como os resultados que envolvem os operadores cumulativos são numerosos e, muitos deles foram apresentados aqui, podemos dizer que a dissertação trata mais de operadores cumulativos do que propriamente de traduções entre lógicas cumulativas.

Recordemos resumidamente, na forma de diagramas, algumas relações entre as várias classes de operadores cumulativos apresentados neste trabalho.







A linguagem L possui conjunção, disjunção e negação forte.

Naturalmente, nos diagramas acima, podemos considerar no lugar de operadores cumulativos, lógicas cumulativas. No Capítulo 3, quando apresentamos o conceito de lógica cumulativa, perguntar se existem lógicas que satisfazem certas propriedades, tais como, propriedade distributiva e dedutiva é o mesmo que perguntar se existem operadores distributivos e dedutivos. Neste trabalho, procuramos estudar e investigar propriedades que recaem sobre o maior número possível de lógicas, mas, apresentar lógicas que satisfaçam estas propriedades parece-nos interessante, pois, muitas vezes, somente compreendemos certos conceitos por meio de exemplos. Vejamos abaixo um quadro demonstrativo com algumas lógicas e suas propriedades **(Martins; 1997, p. 134)**.

Usamos '1' para indicar a validade da propriedade e '0' para indicar a não validade.

Lógicas	Refexiva	Corte	Monotonicidade cautelosa	Distributiva	Absorção Plena	Supraclássica.
IDL	1	1	1	1	1	1
Reiter's Default Logic:						
Normal+Skeptical	1	1	0	0	1	1
Seminormal+Skeptical	1	1	0	0	1	1
Preferential Logics:						
General	1	1	0	0	0	0
Stoppered	1	1	1	0	0	0
Classical	1	1	0	1	1	1
Classical+Stoppered	1	1	1	1	1	1

Algumas considerações sobre lógicas default foram apresentadas no Capítulo 1, pois, neste capítulo apresentamos resultados sobre sistemas default. Detalhes sobre as demais lógicas do quadro acima não foram apresentadas, mas, em **(Makinson; 1992)** e **(Krauss, Lehmann, Magidor; 1990)** há uma exposição de alguns resultados sobre essas lógicas. Em **(Martins; 1997)**, com uma rica exposição de detalhes e resultados é apresentada [redacted] a lógica IDL&LEI.

Antes de descrevermos alguns dos trabalhos que precisam ser complementados com um estudo mais profundo, e algumas questões que ainda precisam ser esclarecidas (respondidas), lembramos que devemos estar atentos para alguns fatos quando lidamos com operadores cumulativos (lógicas cumulativas). Por exemplo: a interseção de conjuntos fechados segundo um operador cumulativo não é necessariamente um conjunto fechado

(Capítulo 1, p.20); dada uma aplicação conservativa T sobrejetora entre as lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$ satisfaz a monotonicidade se, e somente se, $\mathbf{L}_2$ satisfaz a monotonicidade ((1) p. 92).

Citaremos abaixo prováveis assuntos (questões) a serem abordados para complementarmos o que foi apresentado e discutido nesta dissertação.

- Encerrar a abordagem categorial respondendo perguntas, tais como: A categoria T_{rCum} possui produto e co-produto?

O que queremos obter são resultados que possam nos auxiliar na investigação de propriedades que são preservadas via traduções (traduções conservativas). Quando tratamos somente de lógicas de Tarski, os resultados decorrentes da abordagem categorial realizada sobre a classe dessas lógicas nos auxiliam na obtenção de resultados que caracterizam a existência ou não de traduções (traduções conservativas). Pensamos que o mesmo poderá ocorrer com a classe das lógicas cumulativas.

- Várias subfamílias de operadores cumulativos foram apresentadas, mas, quais das propriedades que caracterizam essas subfamílias de operadores cumulativos são preservadas via traduções (traduções conservativas)? Quais não são preservadas?

Lembramos que no capítulo anterior vimos que algumas propriedades são preservadas, por exemplo, a propriedade dedutiva e supracompacta (ver Proposição 4.2.12 e Proposição 4.2.13).

- Exibir exemplos de traduções, preferencialmente de traduções conservativas entre lógicas cumulativas para ilustração dos resultados apresentados no Capítulo 4. Estes exemplos também podem esclarecer e/ou justificar propriedades satisfeitas pelas lógicas envolvidas em tais traduções. Possíveis propriedades poderão surgir a partir destas traduções.

- Classificação dos operadores de conseqüência dos chamados sistemas de revisão de crenças, pois, existem trabalhos que tratam da relação entre lógicas não monotônicas e esses sistemas. Exemplos práticos de traduções entre lógicas cumulativas poderão surgir a partir deste estudo.

- Uma abordagem semântica poderá ser realizada sob o escopo da categoria T_{rCum}, ora de um ponto de vista mais geral, ora para lógicas particulares pertencentes a esta categoria.

Enfim, são muitas as questões envolvendo lógicas não monotônicas e traduções entre essas lógicas que precisam ser investigadas. Uma Teoria Geral de Traduções é um tema bastante profícuo.

Bibliografia

ANTONIOU, G. (1997) **Nonmonotonic reasoning**. Series: Artificial Intelligence. The MIT Press, Cambridge.

BELL, J.L. (1988) **Toposes and local set theories: an introduction.** Oxford: Claredon Press.

BREWKA, G. (1991) Cumulative Default Logic: in defense of nonmonotonic inference rules. **Artificial Intelligence,** v. 50, p. 183–205.

BROWN, D. J., SUSZKO, R. (1973) Abstract Logics. **Dissertationes Mathematicae,** n.102, p.1-41. Poland, Warszawa.

CIGNOLI, R. L. O., D'OTTAVIANO, I. M. L., MUNDICI, D. (1994) **Álgebra das Lógicas de Lukasiewicz.** Campinas: UNICAMP, Coleção CLE (Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência), v. 12.

DA SILVA, J. J., D'OTTAVIANO, I. M. L., SETTE, A. M. (1999) Translations between logics. **Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Models, Algebras and Proofs;** v. 203, p.435-448.

D'OTTAVIANO, I. M. L. (1973) **Fechos caracterizados por interpretações**. 88 p. (Dissertação de Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

D'OTTAVIANO, I. M. L. (1990) On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. **The Journal of Non-Classical Logic**, v. 7(1/2), p.89-152..

ETCHEMENDY, J. (1999) **The concept of logical consequence**. The David Hume Series – philosophy and cognitive science reissues. CSLI Publications: Leland Stanford Junior University, USA.

FEITOSA, H. A. (1997) **Traduções conservativas**. 161 p. (Tese de Doutorado) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. (2000) Paraconsistent logics and translation. **Synthese-An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science.** Ed.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, Trends in Logic, v.125, n.12, p.77-95.

FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. (2001) Conservative translations. **Annals of Pure and Applied Logic.** Ed: North Holand, Amsterdam, v.108, p.205-227.

FREUND, M. (1990) Supracompact Inference Operations. **Lecture Notes in Artificial Intelligence.** Procedings 1st International Workshop Karlskuhe, Germany, p.59–73.

FREUND, M., LEHMANN, D. (1991) Deductive inference operations. **Lecture Notes in Artificial Intelligence,** v. 478, p. 227-233.

FREUND, M., LEHMANN, D. (1993) Nonmonotonic inference operations. **Bulletin of the IGPL**, Oxford University Press, v. 1, n.1, p. 23-68.

GABBAY, D. M. (1985) Theoretical foundations for non-monotic reasoning in expert systems. **Logics and Models of Concurrent Systems,** Computer and System Sciences, v. F13. Springer-Verlag, Berlin.

GOLDBLATT, R. (1984) **Topoi – The categorical analysis of logic**. Amsterdam, North Holland, Revised Edition.

KALUZHNY, Y., LEHMANN, D. (1995) Deductive nonmonotonic inference operations: antitonic representations. **Journal of Logic and Computation**, v. 5(1), p. 11-122.

KRAUS, S., LEHMANN, D., MAGIDOR, M. (1990) Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. **Artificial Intelligence**, v. 44, p. 167 – 207.

LUKASZEWICZ, W. (1988) Considerations on default logic. **Computacional Intelligence**, v. 4, pp.1-16.

LUKASZEWICZ, W. (1990) **Non-monotonic reasoning: formalization of commonsense reasoning.** Ellis Horwood, New York.

MAKINSON, D. (1988) General theory of cumulative inference. **Lecture Notes in Artificial Intelligence**, v. 346. Springer Verlag.

MAKINSON, D. (1992) General patterns in non-monotonic reasoning. **Handbook of Logic Artificial Intelligence and Logic Programming**, v. 2, p. 35–108. Oxford University Press.

MARTINS, A. T. (1997) **A syntatical and semantical uniform treatment for the IDL &LEI** non **monotonic system.** 225 p. Tese (Doutorado) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco.

POOLE, D. (1988) A logical framework for default reasoning. **Artificial Intelligence**, v. 36, p.27-47.

REITER, R. (1980) A logic for default reasoning. **Artificial Intelligence**, v. 13, p. 81-132.

REITER, R. (1987) Nonmonotonic reasoning. **Annual Review Computer Science**, v. 2, p. 147-187.

RICH, E. (1988) **Artificial Intelligence**. Tradução: Newton Vasconcelos. McGraw-Hill.

SHOHAM, Y. (1988) **Reasoning about change**. MIT Press, Cambridge.

STALLMAN, N. S., SUSSMAN, G. J. (1977) Forward reasoning and dependency-directed backtracking in a system for computer-aided circuit analysis. **Artificial Intelligence**, v. 9, n.2, p. 135-196.

TARSKI, A. (1983) **Logic, Semantics, Metamathematics** – papers from 1923 to 1938. USA, Hackett Publishing Company.

WÓJCICKI, R. (1973) On matrix representations of consequence operations of Lukasiewicz sentencial calculi. **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik,** v. 19, p.239-247.

WÓJCICKI, R. (1988) **Theory of logical calculi – basic theory of consequence operations**. Kluwer Academic Publishers, v. 199.