

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

EBERTH ELEUTÉRIO DOS SANTOS

TESE DE DOUTORADO

CAMPINAS

2008

Santos, Eberth Eleutério dos

Sa59i **O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática / Eberth Eleutério dos Santos.**
- - Campinas, SP : [s. n.], 2008.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Co-orientador: Jairo José da Silva.

**Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.**

**1. Cantor, Georg, 1845-1918. 2. Filosofia - Ciência.
3. Matemática - Filosofia. 4. Infinito. I. D'Ottaviano, Ítala M.
Loffredo (Ítala Maria Loffredo). II. Silva, Jairo José da.
III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e
Ciências Humanas. IV. Título.**

(cn/ifch)

Palavras chave em inglês (Keywords): Philosophy – Science
Mathematics-Philosophy
Infinite

Banca examinadora: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano, Rubens Gouvea Lintz, Ubiratan D'Ambrosio, Décio Krause, Maria Eunice Quilici Gonzalez

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

AGRADECIMENTOS

Eberth Eleutério dos Santos

O infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática.

Tese de doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciência Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação da Prof.^a Dr.^a. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano e Co-Orientação do Prof. Dr. Jairo José da Silva.

A todos, obrigado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela comissão julgadora em 30/05/2008.

Banca Examinadora:

Prof.^a. Dr.^a. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano (orientadora)

Prof. Dr. Rubens Gouvea Lintz (membro)

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio(membro)

Prof. Dr. Décio Krause(membro)

Prof.^a. Dr.^a. Maria Eunice Quilici Gonzalez(membro)

CAMPINAS

Maio de 2008

2008 16 19 5

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar é necessário dizer que esta tese não teria sido realizada sem o apoio financeiro da **CAPES** e sem os recursos humanos, técnicos e materiais prontamente oferecidos pelo **IFCH**. Acima de tudo, esta tese não teria sido realizada sem o cordial acolhimento oferecido pelo **Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência**, na forma de seus professores, alunos e de todos que lá trabalham. Em especial, sou extremamente grato pela paciência e pela orientação atenta oferecida pela professora Itala, que me conduziu até aqui.

A todos, obrigado.

*“If the doors of perception were cleansed
every thing would appear to man as it is,
infinite”.*

William Blake

Resumo

Georg Cantor foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX. A idealização de sua teoria de conjuntos representa um marco no desenvolvimento da matemática. De fato, o aparecimento e o desenvolvimento dessa teoria tiveram profundas consequências que não se limitaram ao círculo da matemática. O debate científico que se seguiu a certos resultados como, por exemplo, a apresentação dos números transfinitos, reavivou uma discussão que remonta a antigas disputas ontológicas da filosofia pré-socrática, exatamente àquelas discussões que se voltavam para a afirmação do *Ser* como infinito. Essa discussão nasce na Grécia antiga e perpassa toda a história do pensamento ocidental. Conhecêmo-la por meio de nomes como Anaximandro, Pitágoras, Parmênides, Platão, Aristóteles. Atravessando os séculos, essas idéias povoaram a mente de personagens como Bruno, Galileu, Leibniz, Kant e muitos outros. Nos séculos XIX e XX, os trabalhos de Cantor reavivaram e deram novo impulso ao tema. Esforçamo-nos em mostrar que estes trabalhos são absolutamente revolucionários. Motivados pelo filósofo da ciência Thomas Kuhn, concluímos que o aparecimento da Teoria de Conjuntos de Cantor representa a revisão de um antigo paradigma filosófico-matemático. Paradigma este que teve sua primeira elaboração lógica e filosófica com Aristóteles e que se desenvolveu como a maneira dominante de pensar a idéia de infinito. Destacamos que alguns dos aspectos apontados por Kuhn como sintomáticos de uma revolução científica estão presentes no trabalho de Cantor e que há, possivelmente, outras maneiras de argumentar em favor da qualidade revolucionária deste trabalho. Em um sentido mais amplo, foi-nos possível vislumbrar que o desenvolvimento da matemática também pode ser lido através do enfoque das *revoluções*, e o mais recente exemplo disto é representado pelo esforço intelectual de Cantor.

Palavras-Chave: Infinito, Revolução Científica, Filosofia da Matemática, Epistemologia.

Abstract

Georg Cantor is one of the most important mathematicians of the end of the 19th century. The idealization of the *set theory* represents a landmark in the development of mathematics. In fact, the creation and development of this theory had deep consequences not restricted only to the circle of mathematics. The scientific debate that followed some of the results, as for instance the presentation of the transfinite numbers, revived a quarrel that retraced old ontological disputes of the pre-Socratic philosophy, accurately topics like the *being* of the infinite. This quarrel is born in old Greece and crosses all the history of the occidental philosophical think. We know it through names like Anaximander, Pitagore, Parmmenides, Plato, Aristotle among others. Crossing the centuries, such ideas fill the mind of characters like Bruno, Galileo, Leibniz, Kant and others. In the 19th and 20th centuries, Cantor's works give a new life and color to the subject. In this thesis, we argue that these works are absolutely revolutionary. Based on Thomas Kuhn's conception, we conclude that the appearance of Cantor's set theory represents the disruption of one old *philosophical-mathematical paradigm*. Such a paradigm, that had its first logical and philosophical elaboration by Aristotle, had characterized the dominant way of thinking the concept of infinite. We have succeeded in detaching that some aspects pointed by Kuhn as symptomatic of a scientific revolution are present in Cantor's work and we also propose other ways to argue in favour of the revolutionary aspect of this work. In a more ample sense, we glimpse that the development of mathematics can also be understood by means of *revolutions*, whose more recent example seems to be the intellectual effort of Cantor.

Key Words: Set Theory, Infinite, Scientific Revolutions, Philosophy of Mathematics, Epistemology

Sumário

INTRODUÇÃO.....	15
1. O INFINITO NA HISTÓRIA DA FILOSOFIA.....	21
1.1 ANAXIMANDRO.....	21
1.2 PITAGÓRICOS	24
1.2.1 <i>A diagonal e as magnitudes incomensuráveis</i>	28
1.3 PARMÊNIDES	32
1.3.1 <i>Zenão e Melissus</i>	35
1.4 PLATÃO.....	38
1.4.1 <i>O Filebo</i>	40
1.4.2 <i>O Parmênides</i>	45
1.4.3 <i>Apêndice</i>	51
1.5 ARISTÓTELES	54
1.5.1 <i>O intransponível</i>	57
1.5.2 <i>Apêndice</i>	66
1.6 GOTTFRIED LEIBNIZ.....	70
1.7 IMMANUEL KANT.....	79
2. CANTOR E A TEORIA DE CONJUNTOS	95
2.1 CONCEPÇÃO NAÍVE VERSUS AXIOMÁTICA FORMAL	95
2.1.1 <i>Axiomática clássica</i>	97
2.1.2 <i>Axiomática formal</i>	100
2.2 TEORIA DE CONJUNTOS.....	108
2.2.1 <i>Teoria de conjuntos naïve</i>	110
2.2.2 <i>O continuum</i>	121
2.2.3 <i>Cardinalidade</i>	124
2.2.4 <i>Os paradoxos</i>	127
2.3 A FUNDAMENTAÇÃO FILOSÓFICA DO INFINITO CANTORIANO	133
2.3.1 <i>Os aspectos religiosos</i>	134
2.3.2 <i>Ontologia do transfinito</i>	138
3. THOMAS KUHN: UMA NOVA HISTORIOGRAFIA PARA AS CIÊNCIAS	145
3.1 PARADIGMA	146
3.1.1 <i>Generalizações simbólicas</i>	149
3.1.2 <i>Crenças</i>	149
3.1.3 <i>Valores</i>	150
3.1.4 <i>Os exemplares</i>	151
3.2 CIÊNCIA NORMAL	154
3.2.1 <i>A ciência normal como solução de quebra-cabeças</i>	155
3.3 ANOMALIAS	156
3.3.1 <i>Crise</i>	158
3.4 REVOLUÇÃO CIENTÍFICA	159
3.4.1 <i>A dinâmica das revoluções científicas</i>	160
3.4.2 <i>A circularidade na manutenção dos paradigmas</i>	163
3.4.3 <i>A história oficial</i>	170
4. REVOLUÇÃO EM MATEMÁTICA.....	175
4.1 SOBRE O CONCEITO DE REVOLUÇÃO EM MATEMÁTICA.....	178
4.1.1 <i>O conceito de revolução em matemática</i>	185
4.1.2 <i>Exemplos</i>	189
4.1.3 <i>A teoria de conjuntos como revolução científico-matemática</i>	198
4.1.4 <i>Conclusão do capítulo</i>	208
4.2 A HIPÓTESE DO CONTINUM	209

4.3 UMA NOVA MATEMÁTICA	214
4.3.1 A matemática finitária de Hilbert.....	216
CONSIDERAÇÕES FINAIS	231
BLIOGRAFIA.....	253

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal argumentar que o núcleo dos resultados matemáticos obtidos por Georg Cantor no final do século XIX, cujas idéias mais fundamentais orbitam em torno de sua especial concepção de infinito, possui as necessárias qualidades de inovação e grandeza para ser considerado como um avanço revolucionário em matemática.

A revolução a que nos referimos, e que acreditamos ter ocorrido com o surgimento da Teoria de Conjuntos de Cantor, constitui um marco no desenvolvimento da matemática. Este marco, parece-nos não poder ser ignorado, quer pelos matemáticos, quer pelos historiadores e tão pouco pelos filósofos.

É necessário, portanto, deter-nos sobre a virada conceitual e metodológica que constitui essa revolução, que bem poderíamos designar como *revolução do conceito de infinito*. Em outras palavras, é necessário compreender em que termos essa novidade revolucionária foi conduzida e sobre que bases podemos conferir esse *status* a ela.

Acreditamos que a radical mudança na abordagem sobre o infinito promovida por Cantor no final do século XIX pode ser mais bem destacada com uma análise sob três ângulos, que interpretamos como três pontos de vista sobre o infinito: o histórico, o filosófico e o matemático. Essa separação é arbitrária e obedece a uma motivação simplesmente heurística; na verdade, estes três aspectos estão fortemente entrelaçados, sendo praticamente inseparáveis.

Assim, o primeiro aspecto interpretativo sobre o infinito é o histórico. Talvez não haja outro conceito na história da civilização humana que tenha ocupado um número tão grande de pensadores durante tanto tempo e de maneira tão intensa. Logo, para entendermos a revolução de Cantor, que é uma revolução na própria idéia de infinito, precisamos ter em conta algo que podemos chamar de *sentido histórico* da palavra infinito.

Esse sentido foi construído e desconstruído diversas vezes durante mais de dois mil anos, de modo que se faz necessário tentar resgatá-lo em uma síntese conceitual que chamamos de *tradição histórica*. Esta tarefa é de suma importância para nos ajudar a compreender melhor a idéia que está sendo proposta, como uma novidade de ampla

magnitude, separando assim, no que diz respeito ao infinito, a novidade revolucionária dessa tradição histórica.

O aspecto filosófico se refere a um tipo de interpretação que certamente envolve uma ontologia e uma epistemologia do infinito. Essas duas formas interpretativas, que poderíamos chamar de *filosofia do infinito*, estão muito presentes nos sistemas que observamos desde a antiguidade. De fato, elas continuaram a ser sumamente relevante em Cantor, que não descuidou em fornecer uma interpretação bastante particular a essas formas de análise filosófica.

O terceiro aspecto, o matemático, diz respeito a todas aquelas tentativas de interpretar e instrumentalizar matematicamente o infinito. Tentativas essas que remontam aos primeiros momentos em que esse conceito se mostrou como um problema pertinente. É neste terceiro aspecto que a idéia de infinito ganha suas nuances que mais facilmente identificamos como mais *complexas* e *sofisticadas* e que, de início, se concentravam na geometria e na aritmética.

Assim, para demarcar historicamente a idéia de infinito, com o objetivo de encontrar uma síntese conceitual para ela, passaremos necessariamente por nomes que transitaram tanto pela filosofia como pela matemática. O conceito de infinito que encontraremos adiante possuirá, portanto, essa dupla configuração matemático-filosófica que também assinalaremos como estando presente em Cantor.

No Capítulo 1 desta tese tentamos construir, em algumas poucas páginas — certamente menos do que seriam necessárias para a realização de um trabalho mais amplo, ou um trabalho que obedecesse a uma matriz exclusivamente histórica —, uma análise de fragmentos do pensamento de alguns importantes personagens da filosofia ocidental ao se voltarem sobre a análise do conceito de infinito.

Podemos adiantar que não nos detivemos nesta tarefa mais do que o necessário, já que nosso esforço, como dissemos, não segue uma matriz exclusivamente histórica. Nossa intenção, todavia, com a construção resumida da narrativa sobre alguns daqueles estudiosos que já se depararam com o problema do infinito, é a de criar um certo contexto que possa realçar o foco principal de nossa atenção, a saber, a forma assumida por essa discussão no final do século XIX e início do XX, principalmente ao ser destacada pela originalidade do pensamento que surge nesse período.

É importante lembrar que tomamos o cuidado de não nos iludir com a pretensão de abarcar todos os possíveis pontos de vista que uma história do infinito possa indicar, uma vez que nosso esforço, neste primeiro capítulo, é suficiente apenas para nos inteirarmos razoavelmente da tradição que envolve o tema, sem jamais pretender esgotá-lo.

A história que apresentamos será dividida em apenas dois grandes momentos.

No primeiro, nos dedicaremos aos *antigos*, considerando, de maneira bastante sintética, os pensamentos de Anaximandro, dos pitagóricos e dos eleatas. Seleccionamos apenas estes três pontos de vista, em detrimento de outros tantos importantes pensadores da antiguidade como, por exemplo, Demócrito ou Anaxágoras, tendo em vista que pretendemos nos ater a um certo enfoque interpretativo acerca do infinito.

A idéia que queremos evidenciar é a de um infinito matemático que nasce, pouco a pouco, de uma ancestral discussão acerca de um infinito que poderíamos chamar de *metafísico* e cujas bases perpassam, necessariamente, o pensamento de Platão e de Aristóteles que, de um modo, ou de outro, estão presentes na concepção de infinito de Cantor.

Assim, como dissemos, a base argumentativa de nossa tese passa, inevitavelmente, pelo pensamento de Platão e Aristóteles. E acreditamos que, para melhor entender a idéia central de um infinito matemático, é necessário tomar conhecimento, em linhas gerais, da disputa filosófica que envolveu esses dois importantíssimos filósofos. Essa disputa encontra suas raízes, justamente, em Anaximandro, nos pitagóricos e nos eleatas.

No segundo momento desse capítulo histórico, cuidaremos de alguns elementos do pensamento medieval, renascentista e moderno, e para isso passaremos rapidamente por nomes como Plotino, Sto. Agostinho, Sto. Tomás, Giordano Bruno, Galileu, Descartes, Leibniz e Kant, entre outros.

Sabemos que uma análise assim tão diversificada apresenta diversas lacunas que poderiam ser preenchidas por interessantes conexões de pensamento, tanto filosóficas como matemático. Contudo, é necessário manter o foco da discussão dentro dos parâmetros limitados pelo nosso objetivo principal que é, como já dissemos, a discussão do infinito em Cantor. Ainda assim, sentimos a forte necessidade de, ao menos,

mencionar alguns personagens que, uns mais outros menos, dentro de um ponto de vista mais cuidadoso, fazem parte da discussão a respeito do conceito de infinito que tentamos ilustrar como uma tradição histórica.

Uma vez que nos inteiramos brevemente sobre essa tradição histórica, estamos preparados para, no Capítulo 2, introduzirmos o novo conceito de infinito elaborado por Cantor. Este conceito, que tomou um formato matematicamente bastante sofisticado em sua teoria de conjuntos, mais precisamente em sua teoria dos números transfinitos, merece uma atenção muito cuidadosa de nossa parte. Assim, de início realizamos certas distinções para melhor esclarecer, em um nível mais filosófico que propriamente matemático, o grau de inovação ao qual somos transportados com o infinito atual de Cantor.

Estas distinções preliminares dizem respeito ao que se entendia por teoria axiomática à época de Cantor e aquilo que fora elaborado primordialmente por Aristóteles nos *Segundos Analíticos* e, mais tarde, por Euclides em seus *Elementos*. Deixamos os detalhes para o momento oportuno; no entanto, podemos adiantar que essa distinção é vital para contextualizar a forma de elaboração da teoria de conjuntos de Cantor e, conseqüentemente, a concepção de seu conceito de infinito.

Desta feita, franqueamos nosso caminho para as origens da construção da Teoria de Conjuntos, da maneira como Cantor a entendia e, em seguida, apontamos algumas das críticas feitas a ela, assim como a reação a essas críticas. Assim temos, diante de nós, a oportunidade de realizar uma discussão dos fundamentos da teoria de conjuntos, na qual confrontamos concepção axiomática grega e concepção axiomática contemporânea.

Encerramos o Capítulo 2 com considerações sobre fatos que poderíamos chamar de “matematicamente menos interessantes”, mas que são de suma importância para entender o conceito de infinito por uma ótica mais abrangente. Esses fatos estão relacionados com as motivações religiosas de Cantor para a defesa de seu infinito atual, assim como com uma espécie de sistematização filosófica por ele esboçada.

O que vem em seguida é um capítulo complementar, no qual discutimos, com certa quantidade de detalhes, a historiografia que Thomas Kuhn elaborou para descrever o avanço da ciência que, segundo ele, pode ser mais bem descrito por meio da metáfora com as revoluções políticas (**Kuhn 2003**).

A despeito das diversas críticas que esse modelo historiográfico recebeu por parte daqueles que o consideraram por demais irracionalista, concordamos com aquilo que nele compreendemos como essencial, para estendê-lo de maneira a explicitar também em que medida as “revoluções” se aplicariam ao desenvolvimento da ciência matemática.

Isto é, acreditamos que o modelo apresentado por Kuhn pode acomodar o desenvolvimento da matemática. E, justamente, o nosso grande exemplo se encontra no conceito de infinito em Cantor, entendido como uma dessas revoluções que, por vezes, toma de assalto o avanço de quaisquer formas expressivas do intelecto humano, não constituindo exceção a ciência matemática.

Aqueles que dominam suficientemente a teoria de Kuhn, assim como foi apresentada em sua obra mais importante, *A estrutura das revoluções científicas*, podem considerar esse capítulo como acessório e passar imediatamente para o Capítulo 4, no qual é efetuada uma interpretação do infinito de Cantor nos moldes do modelo kuhniano.

É neste capítulo final que pretendemos apresentar uma análise para a idéia de revolução em matemática. Para tanto, nos apoiamos na argumentação do historiador da matemática J. Dauben, um dos que primeiramente observou, já nos idos da década de 60, a relação entre a obra de Kuhn e o desenvolvimento da matemática.

Mais especificamente, Dauben notou a proximidade entre a idéia de sucessão de paradigmas científicos, por meio de revoluções científicas, e a própria teoria de conjuntos de Cantor, como um desses momentos de ruptura, com um passado cristalizado na forma de um paradigma matemático-filosófico, a saber, o paradigma aristotélico de infinito potencial.

É claro que este não é o único exemplo de superação de paradigma em matemática, nem foi J. Dauben o único a defender essa posição. De fato, ele próprio cita outros momentos na história, nos quais eventos matemáticos são notadamente delineados como revolucionários. Este foi o caso, por exemplo, da descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos, ou da construção do cálculo infinitesimal, ou ainda da introdução de um novo padrão de rigor em análise por Cauchy e, mais recentemente, a criação da análise não-*standard* por Abraham Robinson.

Como podemos inferir a partir disso, o tema ao qual nos dedicamos poderia não ser considerado de todo original, ainda que tenhamos tomado conhecimento dos trabalhos

de Dauben somente depois que nossa própria pesquisa já estava em pleno desenvolvimento. É importante dizer, no entanto, que no momento em que tomamos conhecimento dos trabalhos de Dauben concordamos que, se ainda restava algo de original para a confecção dessa tese, isso ficaria a cargo de um tratamento mais estruturador, que tornasse mais sistemática a assimilação dessas idéias.

Assim, trabalhamos nesse sentido e esperamos ter atingido esse objetivo; qual seja, tornar mais palatável a idéia de que revoluções também ocorrem em matemática e que, mesmo nessa ciência, tida como a mais pura de todas, precisamos considerar fatores que em certa medida não estão estritamente relacionados a uma produção matematicamente cumulativa, tornando mais fácil concluir o quanto essa ciência possa ou não ser assim julgada.

1. O INFINITO NA HISTÓRIA DA FILOSOFIA

Em suas buscas por um princípio, a *arkhé*, os filósofos materialistas pré-socráticos lançaram mão de muitas hipóteses e intuições acerca da conformação primeira da matéria e da natureza. Esta busca representou uma mudança na maneira como os antigos enxergavam o mundo à sua volta. Significou o abandono de uma forma absolutamente passiva de encarar a existência, fruto do arbítrio divino, para uma outra, em que a natureza passa a ser, ela mesma, um objeto pertinente ao cuidado da inteligência humana.

Esse foi o caso de interessantes personagens como Anaximandro, Anaxágoras, Xenófanes, Tales, Pitágoras, Heráclito, Parmênides, Anaxímenes, Empédocles, Demócrito, Leucipo, Demóstenes, entre tantos outros. Cada um deles apresentou idéias próprias sobre como poderiam ser considerados, em sentido filosófico ou metafísico, os princípios constitutivos primeiros do universo.

Em última instância, esta era uma discussão sobre a natureza do *ser*. Isto é, essas discussões caminhavam no sentido de definir as propriedades do *ser*, sua forma, sua dinâmica, sua estrutura etc. De certa maneira, uma definição mais precisa sobre a natureza do *ser* não poderia ignorar uma pergunta bastante fundamental, a que se projeta sobre o infinito.

1.1 Anaximandro

De onde as coisas têm seu nascimento, para lá também devem afundar-se na perdição, segundo a necessidade; pois elas devem expiar e ser julgadas pela sua injustiça segundo a ordem do tempo.

Anaximandro¹

Anaximandro, já no século V a.C., foi um dos primeiros cujo pensamento se voltou, de maneira mais substancial, para aquilo que os gregos chamavam de *to apeiron*², ou *aquilo que não tem limites*, o ilimitado. Nesse sentido, e do ponto de vista da origem de todas as coisas, uma explicação minimamente convincente para a matéria seria

¹ Anaximandro 1973, p.25.

² As traduções oferecidas para *to apeiron* variam de acordo com o uso realizado por cada filósofo. No entanto, em geral, *to apeiron* significa “aquilo que não apresenta limite ou forma”, o que naturalmente ganhou o sentido de “aquilo que não tem começo nem fim: o infinito ou o ilimitado”.

certamente aquela que buscasse apresentar a fundação desse substrato primeiro.

Para o pensador de Mileto, uma explicação desse tipo envolveria, necessariamente, o infinito, já que, para além dessa idéia primordial, nada mais poderia ser concebido (Gompers 1996). O infinito era, a partir desse modo de encarar as coisas, aquilo que deveria constituir a base de qualquer explicação mais fundamental sobre a ordem das coisas no mundo, não havendo nada a ser buscado racionalmente para além dele.

O infinito, no pensamento de Anaximandro, se mantém como uma noção limite. Trata-se daquilo que se coloca entre o que pode e o que não pode ser explicado de maneira suficientemente razoável. Para compreendermos melhor, atentemos para o que Anaximandro entendia por esse conceito que se apresenta como o princípio de todas as coisas.

Como muitos outros pensadores gregos desse período, Anaximandro não distingue claramente hipóteses empíricas daquelas outras que poderíamos chamar de *a priori* (Gompers 1996). Os mundos físico e metafísico se fundem em suas explicações. É certo que o que se entendia, à época, por *matéria*, ou por *materialidade*, não é o que hoje entendemos por esses termos.

De fato, e somente para nos ajudar a entender melhor esse ponto, podemos dizer que aquilo que se constitui como o *átomo* de todas as coisas, pode muito bem ser compreendido como algo com uma dupla natureza. Ainda que os próprios atomistas não façam esse tipo de caracterização dualista em suas teorias, haveria, de um lado, aquilo que nos acostumamos a chamar de natureza física e, de outro, aquilo que passamos a chamar de natureza metafísica, unidos em um mesmo conceito, a *arkhé*.

Bastante aconselhável é, portanto, não tomarmos o infinito de Anaximandro nem em um sentido exclusivamente metafísico, nem em um sentido exclusivamente físico. Realizar essa restrição seria o mesmo que separar e afastar, esses dois aspectos. Em outras palavras, isso significaria assumir uma dualidade, que é posterior a esse tipo de pensamento.

Anaximandro atribuía um sentido ético ao seu elemento primeiro, o infinito. Tudo na Terra se apresentava na forma de antagonismos, como o bem e o mal, como o dia e a noite, como o quente e o frio, como o seco e o úmido etc. Segundo ele, esses

antagonismos tendem a se resolver em uma diluição contínua e sem fim, um no outro. Essa diluição não conhece limite. Assim, não sabemos ao certo quando termina o dia e começa a noite, quando o pequeno se torna grande ou vice-versa.

O próprio movimento de diluição dos conflitos representa um círculo, que não possui começo ou fim. Se um conflito qualquer se resolve, então outro tem início, ocupando o seu lugar, sendo o término de um o início de outro. O fim do dia dá lugar ao começo da noite, entre um e outro não se reconhece limite e onde não encontramos limite, lá está o infinito (Gompers 1996).

Em tudo o que Anaximandro podia observar, reconhecia ele a ausência de limite. Contudo, o conflito contínuo, aparentemente sem fim e sem começo, se mostra também como uma estabilidade eterna, quando do ponto de vista de quem se coloca para além dos conflitos particulares. É o infinito, portanto, segundo Anaximandro, o *espaço* ou o *momento* privilegiado onde poderiam ser acomodados esses conflitos.

Para Anaximandro, decidir sobre um princípio deveria envolver um regresso a um momento e a um lugar em que esses antagonismos ainda não existissem. Logo, deveria envolver um tempo ou um espaço nos quais as coisas ainda fossem indefinidas, homogêneas, indistintas (Gompers 1996).

Obviamente, este tempo e este espaço poderiam ser apenas imaginados, hipoteticamente, como limites para tudo o que pode ser concebido como um *ser*. Nele mesmo, neste prototempo e neste proto-espaço não há *ser* e nada pode ser concebido pela imaginação humana, a menos de uma homogeneidade absoluta e informe.

Aí está o princípio para Anaximandro, *to apeiron*. Ao infinito pertenceriam necessariamente todos os seres e estes seriam legítimos representantes de uma ancestral ausência de limite. Todos os seres teriam uma origem comum nesta pura indeterminação.

Prova disso, segundo Anaximandro, é que mesmo como corpos (formas determinadas), *péras*, (limites) os seres se apresentam numa variedade sem fim, tanto quantitativa como qualitativamente. E se, por um lado, os seres se apresentam em grande número de espécies e tipos indeterminadamente variados, estas mesmas espécies e tipos, em si mesmos, individualmente, apresentam variações sem fim como, por exemplo, temperatura, cor, tamanho, peso e volume, que são diferentes aspectos sensíveis do princípio infinito que se manifesta nestes particulares (Gompers 1996).

O infinito é a matriz de toda a diferenciação e, por este motivo, de todo antagonismo entre os graus dessas variações. Anaximandro via neste tipo de explicação algo menos arbitrário do que a assunção de outros elementos mais ligados à intuição sensível como a água, ou o ar, ou a terra (Gompers 1996). Para ele, água, ar, terra ou o que quer que fosse passível de uma determinação, mesmo que aproximada, já seria exemplo de algum grau de antagonismo e, por este motivo, já deveria resgatar sua origem de um momento anterior no tempo. Logo, estes supostos elementos não poderiam ser, eles mesmos, princípio de o que quer que fosse.

1.2 Pitagóricos

Only the Pythagoreans place the infinite among the objects of sense (they do not regard number as separable from these), and assert that what is outside the heaven is infinite.

*Aristotle*³

Os pitagóricos acreditavam em um mundo *essencialmente* organizado. Isto é, enxergavam nele uma estrutura refinada, que revelava uma ordem absolutamente divina e inabalável. Essa ordem, essa organização, só poderia ser observada e compreendida por aqueles que dominassem a manipulação de certos *mistérios*. Estes se resumiam, essencialmente, à especial atribuição de significados conferidos a certas manipulações matemáticas. Como fundamento a isso, é possível encontrar uma teoria ontológica que conferia aos números uma existência e uma função bastante privilegiadas.

Falando de maneira muito abreviada, a filosofia pitagórica se mostra, portanto, como a forma discursiva que registra uma compreensão, a um só tempo metafísica e matemática do Universo. Esse cosmo aparece, à intuição e ao intelecto dos pitagóricos, como números que encarnam a bondade, a harmonia, a justiça e a perfeição. É importante ressaltar que esse número/entidade é, exatamente, o *princípio pitagórico*, o elemento, o átomo.

Na verdade, atribuíam eles uma existência bastante realista aos números, não os separando, efetivamente, da existência de outros elementos e, muitas vezes, confundindo-

³ Aristotle, Physics, Book 3, 203a10-203a16, p. 346

os com eles, ou ainda, substituindo-os através de uma compreensão mais abstrata dos objetos da natureza:

Contemporaneously with these philosophers and before them, the Pythagoreans, as they are called, devoted themselves to mathematics; they were the first to advance this study, and having been brought up in it they thought its principles were the principles of all things. Since of these principles numbers are by nature the first, and in numbers they seemed to see many resemblances to the things that exist and come into being — more than in fire and earth and water.

(Aristotle 1993, *Metaphysics*, Book. 1, 986a14-986a22, p. 1559)

Desse ponto de vista, os números gozavam de um papel ímpar na constituição dos demais fenômenos. Ainda assim, a natureza poderia ser considerada distintamente de sua estrutura teórico-metafísica, mesmo que não fosse completamente possível separá-la em duas realidades independentes.

Isto é, os ciclos das estações, os movimentos celestes, as proporções do corpo humano, a simetria dos cristais e tudo o mais, revelavam uma estrutura que poderia ser compreendida, *aprioristicamente*, pelas relações que poderiam ser estabelecidas entre os números.

Em suma, apesar de gozar de um *status* ontológico equivalente ao dos fenômenos naturais, os números possibilitavam aos pitagóricos um grau de abstração maior que permitia que fossem pensados como princípio.

Podemos dizer que a metafísica pitagórica revela a crença em um universo arquitetado como um enigma que contém, em si mesmo, a própria solução. Para eles, essa solução certamente poderia ser constatada quando efetuada a correta manipulação das proporções numéricas na música, na matemática, na arquitetura, na escultura etc.

Nesse sentido, conhecer a forma correta de manusear os números e as medidas é o mesmo que reconhecer a ordem com que o universo fora soerguido. Ao ser humano, portanto, estava reservado protagonizar o papel de revelador das intenções dos deuses, já que só aos humanos fora concedido o dom da razão, cujo principal instrumento era a matemática.

O exercício desse dom, a racionalidade, estava em desvendar as proporções secretas do universo. Nesse sentido, é o número, o metro, a determinação das grandezas, a forma mais adequada disponível para a manipulação inteligível das proporções e para o

agrupamento harmônico das correlações possíveis, na música, na arquitetura, na escultura, na pintura etc.

A geometria e a matemática, entendidas como uma ciência única, contêm, em si mesmas, a chave para a descoberta dessas verdades. São essas as ciências que bem conduzem o investigador, senhor de seus segredos, à determinação das proporções diversas da natureza e à construção de novas harmonias possíveis no mundo abstrato. São essas ciências, portanto, do ponto de vista pitagórico, que melhor conduzem à verdade sobre o universo. São elas que aproximam o homem do plano divino e o conduzem à sabedoria dos deuses, tornando-o co-participante da criação e da organização do universo.

Podemos mais facilmente entender agora o sentido místico e metafísico contido na filosofia dos pitagóricos. Também fica mais fácil entender o papel quase sagrado desempenhado pelos números⁴, como uma *encarnação intelectual* da ordem divina do universo. Para os pitagóricos, os números inteiros positivos *encarnavam* a bondade e a beleza da mais perfeita proporção. Os números inteiros expressavam os desígnios divinos e *davam forma* aos próprios deuses.

Assim, segundo eles, toda a perfeição, toda harmonia, tudo o que poderia ser considerado belo e justo, poderia e deveria ser expresso, de algum modo, através de proporções numéricas que envolvesse números inteiros.

(...) such and such a modification of numbers being justice, another being soul and reason, another being opportunity — and similarly almost all other things being numerically expressible (...)

(Aristotle 1993, *Metaphysics*, Book I 986a14-986a22, p. 1559)

Com igual intensidade, os pitagóricos condenavam o que não pudesse receber determinação, o que não pudesse receber um metro, uma medida, um número. As formas geométricas, a harmonia das proporções, o fruto do plano divino, tudo isso era *determinável*, era *péras*. O contrário disso é o indeterminado, é aquilo que carece de medida, é a desmesura. Trata-se de *apeíron*, isto é, a ausência de *péras*, com o qual associamos o infinito.

E, como ausência de determinação, como o *indeterminado*, o infinito só poderia

⁴ Devemos ter em mente que os pitagóricos consideravam apenas a existência dos números inteiros positivos.

receber um valor moral negativo, considerando-o como *horrendo e diabólico*, justamente por carecer da manipulação divina, que se manifesta pela determinação, por *péras*. Para os pitagóricos, o infinito é o abominável *caos*, o interminável conflito sem trégua e sem ordem.

Tal abominação ao infinito contamina o discurso ético dos pitagóricos. Assim, moralmente condenável é tudo aquilo que traz consigo a marca do *excessivo*, tudo aquilo que não conhece um limite, tudo o que não pode ser regrado ou contido. Em suma, abominável é tudo o que não pode receber uma medida, um número.

Again, it is possible to fail in many ways (for evil belongs to the class of the unlimited, as the Pythagoreans conjectured, and good to that of the limited), while to succeed is possible only in one way (for which reason one is easy and the other difficult — to miss the mark easy, to hit it difficult); for these reasons also, then, excess and defect are characteristic of vice, and the mean of excellence

(Aristotle 1993, *Nicomachean Ethics*, Book 2, 1106b36-1107a8, p. 1748)

Entendemos que os pitagóricos viam com horror o infinito, pois esse representava a linha limítrofe que delimitava um território inacessível à razão e, por conseguinte, inacessível ao filósofo, ao matemático, ao moralista etc. Consideravam, portanto, o infinito como uma aberração, fruto da ausência de determinação. Como aquilo que se recusava a receber um número, justamente porque *péras* não havia logrado submeter *apeíron*.

O próprio número *1*, tido como uma divindade entre os pitagóricos e nascido da união entre os elementos primordiais *par* e *ímpar*, só existia porque *péras* se impusera sobre o *apeíron*, dotando-o de forma, de medida, tornando finito o infinito.

(...) these thinkers [os pitagóricos] also consider that number is the principle both as matter for things and as forming their modifications and states, and hold that the elements of number are the even and the odd, and of these the former is unlimited, and the latter limited; and the 1 proceeds from both of these (for it is both even and odd), and number from the 1; and the whole heaven, as has been said, is numbers.

(Aristotle 1993, *Metaphysics*, Book. 1, 986a14-986a22, p. 1559)

Os pitagóricos atribuíam ao infinito a imperfeição própria do mundo natural. Enquanto os números revelam a perfeição contida no mundo dos deuses, trazida até o nível humano pelo poder da abstração — dádiva concedida a poucos para a compreensão

da constituição última do universo —, o infinito revela o contrário disso, a ignorância oferecida pela sedução dos sentidos.

1.2.1 A diagonal e as magnitudes incomensuráveis

Ironicamente, apesar de seus esforços para sustentar esse magnífico sistema místico-metafísico, coube aos próprios pitagóricos desferirem o golpe que colocaria abaixo a sua cara estrutura. Esse golpe atingiu exatamente a base do sistema matemático dos pitagóricos, a perfeição das proporções numéricas e suas relações geométricas.

Sabemos, e devemos isso a eles, que é possível calcular o comprimento da diagonal de um quadrado, se conhecemos a medida de seus lados. Para tanto, existe a fórmula que, em linguagem atual, pode ser traduzida como: *O quadrado da diagonal de um quadrado é igual à soma do quadrado de seus lados.*

É possível, portanto, encontrar a proporção numérica entre a diagonal do quadrado e cada um de seus lados, o que deverá se mostrar por meio de uma razão entre números. Devemos lembrar que os pitagóricos concebiam apenas os números inteiros. Por meio deles todas as outras coisas ganham forma; isto é, são os números inteiros os elementos que, combinados, apontam para as formas divinas do céu; são eles que constituem a imagem da perfeição do Cosmos pitagórico que, a um só tempo, se apresenta, corporificado nas figuras da geometria, à intuição sensível e à razão humana; os números inteiros são o *princípio* e o *fim*, os elementos fundamentais do universo; por meio deles, tudo o que é belo, justo e bom, pode ser compreendido e descrito como proporções numéricas perfeitas.

Os números inteiros positivos representam o finito, *péras*. Ou seja, representam aquilo que está ao alcance da razão, o racional. Por outro lado, tudo o que for incapaz de receber um número inteiro é imperfeito e associado com o próprio mal. Neste caso estamos diante do *apeíron* ao qual é atribuído um valor negativo, seja ele moral ou metafísico. *apeíron* é a desmesura, é o excessivo, é o ilimitado, é a ausência de medida, é o infinito.

O que dizer do quadrado de lado igual a 1? Qual seria a razão entre os lados e a diagonal, nessa figura geométrica que corporifica o número divino por excelência, para a escola pitagórica? Assim como nas cordas musicais que, produzindo as oitavas e as

quintas na escala tonal, e cujos comprimentos eram comensuráveis entre si — isto é, eram mensuráveis por um número inteiro, ou ainda, possuíam um número inteiro como divisor comum —, algo semelhante deveria acontecer com o quadrado. Deveria ser possível demonstrar a comensurabilidade dos elementos componentes dessas formas. Mais especificamente, os lados e a diagonal.

Justamente, esse não é o caso do quadrado de lado igual a 1. Sabemos que a diagonal, nesse caso, apresenta valor⁵ $\sqrt{2}$. Isto é, $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$. Sabemos também que este número não pode ser expresso por meio de uma razão entre dois números inteiros. Em poucas palavras, não é possível encontrar um número inteiro que sirva de fator comum para as medidas apresentadas pela diagonal e o lado do quadrado.

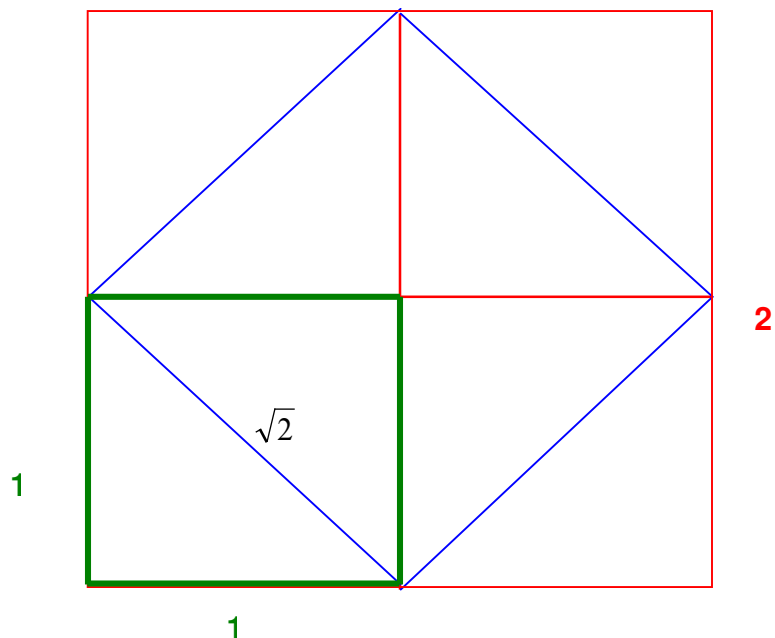
Provavelmente, esta descoberta marcou o início do fim do projeto matemático-metafísico pitagórico⁶. Já que este projeto criava um vínculo muito especial entre as formas geométricas e sua peculiar teoria dos números.

Para chegar a esse resultado auto-destrutivo, no entanto, os pitagóricos só podiam contar com uma geometria baseada, principalmente, no uso de régua e compasso. Assim, observando a figura abaixo, notamos que se o quadrado verde apresenta lado igual a um, então o quadrado vermelho, construído a partir do alinhamento de mais três quadrados idênticos ao verde, possui lado igual a dois. Notamos, também, que a projeção da diagonal do quadrado verde, no interior do quadrado vermelho, produz uma série de triângulos equiláteros que, unidos, resultam no quadrado azul⁷.

⁵ Ao mencionarmos aqui o número irracional $\sqrt{2}$ estamos, obviamente, cometendo um anacronismo como próprio texto já deve ter deixado claro. Os pitagóricos apenas se davam conta dos números inteiros positivos, pelas razões metafísicas e cosmológicas já apresentadas. Cometemos esse anacronismo para facilitar nossa explicação, dada a familiaridade que possuímos hoje com os números irracionais.

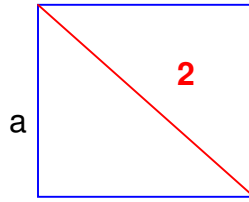
⁶ Essa descoberta é, muitas vezes, atribuída ao pitagórico Hippasus de Metapontium quem, segundo a lenda, e para sua infelicidade, fora imediatamente atirado ao mar por seus companheiros. Ver K. Von Fritz (1945) e S. Heller (1958).

⁷ Entre as possíveis demonstrações geométricas para o Teorema de Pitágoras, escolhemos a que foi apresentada acima pela sua simplicidade e não por ter sido a utilizada pelos pitagóricos.



É fácil perceber que o quadrado azul possui o dobro da área do quadrado verde, apresentando o dobro de triângulos em seu interior, e que o lado do quadrado azul coincide com a diagonal do quadrado verde. Logo, encontrar o lado do quadrado azul equivale a encontrar a diagonal do quadrado verde. Sabemos que a área do quadrado vermelho é duas vezes maior que a do quadrado azul. A área deste é, portanto, igual a dois, já que a área do quadrado vermelho é igual a quatro, justamente por ser quatro vezes maior que a área do quadrado verde, que sabemos ser igual a 1.

Então, se a área do quadrado azul é igual a dois, sua diagonal fornecerá dois triângulos, e cada um deles apresentará uma área igual à metade da área total desse quadrado. A área de cada um desses triângulos é igual ao *quadrado* dos lados multiplicado por $\frac{1}{2}$ ou, mais especificamente nesse caso, $a^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, ou ainda $a^2 = 2$ que, por conseguinte, resulta em $a = \sqrt{2}$. Se o lado do quadrado azul é igual $\sqrt{2}$, então este também deverá ser o resultado para a diagonal do quadrado verde. E a diagonal do quadrado azul é, obviamente, igual ao lado do quadrado vermelho, medindo dois.



$$a = \sqrt{2} \text{ ou } a.a = 2$$

A questão chave aqui não é exatamente se podemos ou não encontrar o valor da diagonal do quadrado, mas se o valor dessa diagonal e desse lado podem ser mensuráveis entre si. Isto é, existe um número inteiro que sirva como fator comum para 1 e $\sqrt{2}$? Ou ainda, existiria um par de números inteiros a e b , tal que $\frac{a}{b}$ expressa a razão entre $\sqrt{2}$ e 1.

O que se pretende investigar é a possibilidade de se estabelecer a equivalência $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, onde a e b são números inteiros. Mas $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ é equivalente a $a^2/b^2 = 2$, isto é, $a^2 = 2b^2$.

E coube novamente aos próprios pitagóricos fornecer uma prova por meio da qual ficava estabelecido que não é possível encontrar um par de números inteiros que obedeça tal condição. Isto é, não é possível encontrar um par de números inteiros tais que o quadrado do primeiro seja equivalente a duas vezes o quadrado do segundo.

Ainda assim, é possível escolher uma seqüência infinita de pares de números inteiros que se aproximam mais e mais dessa condição, sem, no entanto, alcançá-la de todo. São eles, 7 e 5, 17 e 12, 41 e 29, 99 e 70, 239 e 169, ... ; notamos que esses pares obedecem a um padrão: o segundo elemento de cada par é composto pela soma entre os elementos do par imediatamente anterior; além disso, o primeiro elemento de cada par é formado pela soma entre o segundo elemento do par a que pertence e o segundo elemento do par imediatamente anterior. É interessante notar que, em cada par dessa seqüência, o quadrado do primeiro elemento sempre difere, por uma unidade, do dobro do quadrado do segundo elemento.

Podemos presumir que, do ponto de vista pitagórico, essa aproximação infinita revelaria uma perniciosa ausência de limite, que deveria ser evitada a qualquer custo, já

que conduz ao *apeíron*, à irracionalidade que, por essas vias, se faz presente mesmo para além do mundo sensível, mesmo na ciência que, por essência, deve ser a *porta voz* da razão.

1.3 Parmênides

Parmênides é, sem dúvida, um dos grandes nomes da filosofia ocidental. Nascido na cidade de Eléia, é o fundador do eleatismo. Ficou conhecido pela oposição entre *ser* e *aparência*. Essa oposição tem por base a negação do *vazio* como possibilidade para o que é *ser*. Ou seja, Parmênides se opõe à concepção segundo a qual o universo é uma estrutura que admite o *vazio* e o *infinito* como seus elementos fundamentais o que, como vimos, foi anteriormente defendido por Anaximandro e, a seu modo, pelos pitagóricos ao descreverem a tabela de opostos, na qual *apeíron* aparece em oposição a *péras*. Posteriormente, Demócrito também construirá uma argumentação em defesa do movimento e do *vazio*, baseando-se em uma certa assunção de infinito (Voelke 1990).

Mas Parmênides abandona o pensamento pitagórico do qual fazia parte, e passa a distinguir aquilo que apenas *aparenta ser* (o *múltiplo*) e aquilo que realmente *é ser* (o *uno*).

É fato conhecido que das obras de Parmênides (515 a 450 a.C.) restaram apenas 154 fragmentos do poema *Sobre a Natureza* (Parmênides 1973). Somando-se a isso, sobreviveram algumas leis legadas aos cidadãos de Eléia. Em *Sobre a Natureza*, Parmênides estabelece a identidade entre a existência e o pensamento, sendo uma e a mesma coisa o *pensar* e o *ser*. A única realidade de fato é a realidade do pensamento. Esta é a realidade *estrito senso*. Realidade em sentido forte, lógico, filosófico e racional. Pois somente o pensamento regado não admite o *ser* e o seu contrário (o *não-ser*), simultaneamente⁸.

O *ser* não admite quer o *vazio*, quer o *ilimitado*. Também não admite a geração e, muito menos, a corrupção. O *ser* é eterno e uno. O *ser* é, em toda parte, homogêneo e indiviso. Além disso, possui o *ser* uma fronteira que o limita de dentro para fora, ganhando a forma de uma esfera perfeita, na qual todos os pontos de sua superfície estão à mesma distância de seu centro.

⁸ Essa concepção se opõe diretamente às concepções heraclitianas sobre o *ser*.

Então, pois limite é extremo, bem terminado é, de todo lado, semelhante a volume de esfera bem redonda, do centro equilibrado em tudo; pois ele nem algo maior nem algo menor é necessário ser aqui ou ali;

(Parmênides 1973, p.149)

Enquanto o caminho do *ser*, que é o caminho do pensamento correto e completo, em si e por si mesmo, é paralelo ao caminho da verdade, o caminho do *não-ser*, que é o caminho da degenerescência do movimento, segue de par com a via da opinião sobre o sensível mutante, levando aqueles que o seguirem a se afastarem bastante do rumo das verdades permanentes.

Ou seja, tudo o que existe para Parmênides é sempre *ser*. O restante nem existe, pois é *não-ser*. Neste sentido, constituem severo erro todos os discursos sobre o que não existe⁹, sobre o *não-ser*, nos quais podemos facilmente encontrar a irracionalidade, provocada pela ausência de limite (ou a presença do infinito). Em poucas palavras, o *não-ser* é um sem-sentido, constituindo-se como a origem de infindáveis equívocos nas reflexões filosóficas, tornando-as insensatas e degeneradas.

Pois bem! E tu acolhes as palavras que ouvires,
os únicos caminhos de busca que são [para o] pensar:
um, [o] que *é*, e que não é [o] *não-ser*,
é o caminho da persuasão (pois acompanha a verdade);
outro [o] que *não é*, e [em] que é necessário [o] *não-ser*,
este, advirto-te, é [um] caminho em que nada se pode aprender,
porque nem poderás conhecer o que *não é* (pois [isso] não [é] factível),
nem mencioná-lo. {grifos nossos}

(Parmênides 1973, p.148).

O *ser* é, justamente, aquilo que detém o estatuto da existência, em sentido forte ou em sentido verdadeiro. Todo o resto, o *não-ser*, pode revelar, quando muito, uma aparência de *ser*. Para o eleata, o *não-ser* é um artifício místico, que só pode convencer os espíritos mais simples. Esses espíritos são aqueles dados às ilusões e às superstições.

O critério para a distinção entre aquilo que é de fato e aquilo que apenas parece ser será fornecido por elementos retirados, exclusivamente, do exercício da razão. Principalmente por meio de uma lógica incipiente, cujos princípios demarcarão as verdades universais que haverão de se impor, necessariamente, sobre as opiniões fornecidas pela intuição sensível (Gompers 1996).

De modo que a filosofia de Parmênides se caracteriza, em grande parte, pela

⁹ Como é o caso de Heráclito, a quem Parmênides dirige suas mais severas críticas, como as que lemos em alguns de seus fragmentos mais conhecidos.

imposição de limites para o pensamento, ou para o *ser*. Esses limites encontram fundamento em verdades imediatamente evidentes, diferentemente daquelas que nascem de algumas interpretações bastante herméticas realizadas, por exemplo, pelos pitagóricos sobre as relações entre as divindades, os números e as formas geométricas. Essas interpretações pitagóricas, a respeito dos números e dos deuses, evidenciaria, do ponto de vista de Parmênides, um apego a um tipo de pensamento do qual pretende se afastar¹⁰.

Em franca oposição a essa maneira de pensar, Parmênides renega, como já mencionamos, a escola pitagórica, em prol de bases mais explícitas para o discurso filosófico. Acima de tudo, Parmênides pretende sustentar a unidade e a independência do *ser*, mesmo quando este se apresenta como suposta multiplicidade. Em outras palavras, trata-se de garantir unidade e independência a todas as coisas que *são*, suprimindo concepções errôneas acerca do *ser*, tais como o movimento, a duração do tempo, a continuidade do espaço e o aspecto plural fornecido pelos sentidos. Tudo isso está ligado, de uma maneira ou de outra, à consideração do vazio, do *não-ser*, que é a origem do múltiplo e do ilimitado, nos sistemas metafísicos (Gompers 1996).

Essa franca oposição aos pitagóricos está de acordo com uma concepção cosmológica mais fundamental de Parmênides. Segundo ela, a perfeição é a essência do universo, devendo ser ele, portanto, uno, eterno, esférico e indiviso. Este universo não pode admitir a geração ou a corrupção. Tampouco pode admitir a ausência de limite, o movimento ou o vazio, que são representados, mitologicamente, pela desordem (*kaos*) e pelo nada (*méden*). Parmênides concorda que o *ser* é uma entidade independente, isto é, não pode depender de seu contrário, mesmo com as ressalvas impostas pelos pitagóricos, que atribuíam ao *apeíron* um valor negativo.

Em resumo, as máximas eleáticas se opõem à consideração do movimento e do tempo como possibilidades para o que *é*; ou seja, como propriedades do *ser* (Voelke 1990). Em Parmênides, o movimento e o tempo são incompatíveis com a idéia de *ser* que é, antes de tudo, uno e imutável, não admitindo seja a geração seja a corrupção, que são processos derivados da assunção das categorias do tempo e do movimento. O único movimento possível é o do próprio pensamento, desenvolvendo-se sobre si mesmo, como

¹⁰ É importante lembrar que os mitos serviam de parâmetro para a conduta moral, intelectual e social dos gregos.

unidade analítica.

Totalmente avesso ao pensamento de Parmênides, por exemplo, podemos mencionar a máxima muitas vezes traduzida como “no mesmo rio entramos e não entramos, somos e não somos”. Este pensamento devemos a Heráclito de Éfeso. Ele condensa um panorama bem divergente do elaborado pelo eleatismo (Heráclito 1973).

Para Heráclito, o devir, o movimento, são considerados como princípio e essência de todas as coisas *criadas*. Tudo o que *é* e que *não é*, carregam consigo, simultaneamente, a marca do uno e do múltiplo.

Muitos consideram que o pensamento de Heráclito traz consigo uma grande dose de irracionalismo, na medida em que se opõe frontalmente aos princípios extraídos dos versos de Parmênides. Isto é, Heráclito considera a *contradição* algo intrínseco ao universo (Heráclito 1973).

Este só pode ser compreendido, de fato, como uma luta incessante entre forças antagônicas que se batem a todo instante, inclusive no próprio pensamento, no *ser*. É desse combate cego que o universo obtém sua origem e sustentação. Assim, o *ser* não pode ser entendido como uno, homogêneo, imutável, finito etc, mas como múltiplo, heterogêneo, mutável e infinito (Heráclito 1973).

Outro exemplo bastante contundente daquilo que os eleatas consideravam como um pensamento irracional, ou desregrado, pode ser encontrado nos inúmeros paradoxos e falácias que surgiram por volta desse período e que, segundo eles, têm sua origem na assunção do múltiplo, do *não-ser*, que, no mais das vezes, assume a forma de um *reductio ad infinitum*.

1.3.1 Zenão e Melissus

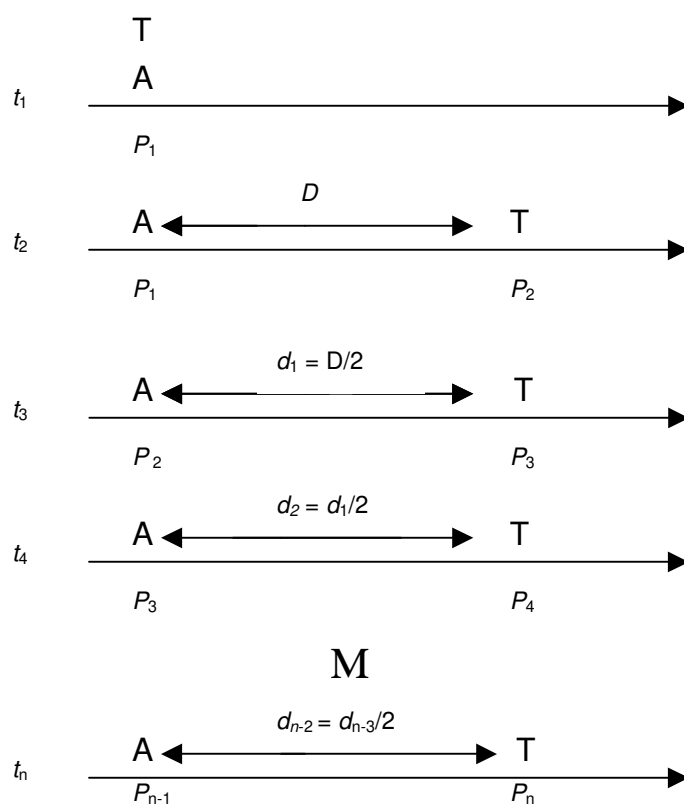
Os paradoxos e falácias acima mencionados se encontram fortemente conectados aos nomes de Zenão e Melissus. Esses dois discípulos do eleatismo surgem como uma bifurcação do mesmo tronco filosófico. Apenas os mencionaremos, sem descrever detalhadamente suas teorias.

Para defender da maneira mais firme possível o pensamento de Parmênides, Zenão elabora quatro paradoxos¹¹, dos quais o mais famoso é certamente o de *Aquiles e a*

¹¹ Ver apêndice da seção dedicada a Aristóteles.

tartaruga. Nele, Aquiles, conhecido por ser extremamente veloz, nunca chega a alcançar sua rival, a tartaruga, em uma curta corrida. A chave para essa conclusão está em se considerar o intervalo de tempo e a distância entre Aquiles e a Tartaruga como constituído por uma quantidade infinita de pontos indivisíveis que podemos chamar de *instantes e posições*.

Supondo que a tartaruga inicie sua corrida em um instante t_1 e Aquiles em um instante t_2 , onde t_1 antecede t_2 na linha do tempo, constitui-se entre os competidores um intervalo D , que corresponde à diferença das posições P_1 e P_2 que pertencem, respectivamente, a Aquiles e à tartaruga no instante t_2 ¹².



Quando a tartaruga se move, ela atinge a posição P_2 no instante t_2 . Aquiles tem que percorrer a distância D para atingir P_2 . Ao atingi-lo, no instante t_3 , a tartaruga terá atingido P_3 . Supondo que Aquiles corra, por exemplo, duas vezes¹³ mais rápido que a

¹² Uma variação possível para esse paradoxo é supor que Aquiles e a Tartaruga iniciem sua corrida simultaneamente, porém com a Tartaruga em uma posição adiante de Aquiles.

¹³ Em uma das versões para essa paradoxo, Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga. Ver, BORGES, “La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga” e “Avatares de la tortuga”, en *Discusión*. Traduzidos por Josely Vianna Baptista, BORGES, *Obras completas, volume I*.

tartaruga, então ele terá percorrido D na metade do tempo gasto pela tartaruga, de modo que a distância entre os competidores diminui pela metade e, no instante t_3 , $d_1 = D/2$.

A cada t_{n+1} , a distância entre os competidores é dividida pela metade em relação à distância anterior. Supondo que esse processo se estenda ao infinito, pois é sempre possível encontrar um índice n para cada instante t , então sempre haverá uma distância a ser percorrida entre Aquiles e a tartaruga, distância essa que tende a ser infinitamente pequena.

Por esse motivo — e desde que se considere o espaço entre eles como contínuo, sendo portanto possível supor sua divisão infinita — a distância entre Aquiles e a tartaruga jamais será transposta pelo corredor mais rápido. Isto porque Aquiles tem que ultrapassar todos os infinitos pontos dessa distância, o que não é possível.

Com esse paradoxo, Zenão pretende mostrar que as considerações sobre o movimento em geral, assim como a existência desses pontos em quantidade infinita, a partir dos opositores de Parmênides como, por exemplo, os atomistas, permite um raciocínio cuja conclusão é um absurdo. A conclusão absurda de Zenão, para mostrar justamente que nem o espaço nem o tempo podem ser assumidos como magnitudes constituídas por partes distintas, em quantidade infinita, é que Aquiles jamais alcançará a tartaruga.

A consideração de um tempo e de um espaço infinitamente divisível é exatamente o que Parmênides e Zenão não desejam, já que tanto o tempo como o espaço, encarados como infinitos neste aspecto, configuram a via do múltiplo, estabelecido pelo *vazio* e pelo *não-ser* que se interpõem entre os interstícios do *ser*. E que, por esse motivo, não pode ser *uno*, homogêneo, eterno, indiviso etc. Ou seja, configura-se desse modo a via do *não-ser*, (Voelke 1990) pela qual o discurso se desvirtua em infinitas armadilhas possíveis para o pensamento: os paradoxos.

Melissus (Melissus 1973), entretanto, apresenta um ponto de vista um pouco diferente ao afirmar que o universo é infinito. Sem negar o que Parmênides havia dito sobre os limites do *ser*, Melissus considera que esse limite, por não ser imposto de fora para dentro, mas de dentro para fora — assim como seu mestre deixou claro em muitas passagens ao afirmar que somente o *ser é* (existe), como esférico, uno, imutável, incorruptível e indivisível —, não torna o *ser* necessariamente finito.

De fato, raciocina ele que não há nada que possa estar além do *ser*, já que ele é tudo o que há. Desse modo, ele é infinito, pois só o infinito possui a propriedade de impor um limite a si mesmo. Para Melissus, um universo infinito e que, ainda assim, apresenta limite não é contraditório e não está em desacordo com o principal do que Parmênides acreditava (**Aristotle 1993**). Isto é, para Melissus um *ser* infinito não está em desacordo com um *ser* limitado, homogêneo, indiviso, eterno, imutável e uno (**Aristotle 1993**).

Em resumo, e de certo ponto de vista, toda a preocupação de Parmênides poderia ser interpretada como pré-lógica. Ou seja, tratar-se-ia, em última instância, de tornar claras certas assunções fundamentais para o discurso filosófico, que deveria ser balizado por princípios tais como o da *não-contradição*, ou da *identidade*, os quais poderiam ser extraídos da famosa máxima “O *ser* é e o *não-ser* não é” (Parmênides 1973).

Tendo em vista o que dissemos até agora sobre o infinito, encontramos os primeiros tijolos que ajudarão a compor o alicerce da edificação da racionalidade ocidental. Tal edificação irá se configurar de maneira mais firme e duradoura nos pensamentos de Platão e Aristóteles que, naquilo que diz respeito ao nosso tema, iremos rapidamente expor a seguir.

1.4 Platão

Os filósofos pré-socráticos representaram um marco na formação do pensamento ocidental, especialmente devido ao estabelecimento de concepções ontológicas muito fundamentais ligadas à natureza do *ser* (Gompers 1996).

Platão é um legítimo herdeiro do pensamento pré-socrático, sendo um grande devedor, principalmente, das concepções de Anaximandro, dos Pitagóricos, de Heráclito e de Parmênides (Findlay 1974). Em Platão, encontramos a síntese dessas tradições que, ao tempo delas, eram quase inconciliáveis. É nele que o nosso tema de investigação, o infinito, ganhará um sentido ainda mais complexo que em qualquer um de seus antigos mestres.

De certa forma, Platão deu continuidade às investigações de seus predecessores. Ainda assim, o pensamento platônico significou um novo divisor de águas para a história da filosofia como um todo. Os resultados de suas investigações sobre o *ser*, concentrados na bastante divulgada *Teoria das Idéias*, deram origem a uma tradição filosófica com

características absolutamente próprias (Reale 1991).

É bem verdade que, apesar de sua imensa divulgação, a mais famosa teoria platônica não é muito conhecida em seus detalhes mais profundos. Ainda assim, o conhecimento de suas linhas mais gerais foi suficiente para ajudar a perpetuar temas de pesquisa bastante variados em diversas áreas do conhecimento como na ética, na política, na religião, na estética e, é claro, na metafísica e na matemática.

De maneira muito sucinta poderíamos dizer que a *Teoria das Idéias* abre a possibilidade para a consideração de mundos supra-sensíveis. Para tanto, lança mão de um processo de abstração do *ser* sensível, para a concepção de um *ser* como pura forma, ou como ideal, habitando em esferas supra-sensíveis. Contudo, é preciso situar essa teoria dentro de um domínio mais amplo, sem o qual ela encontra diversos problemas teóricos e, por esse motivo, perde muito de sua força argumentativa.

Esse domínio mais amplo ficou conhecido sob o nome de *Teoria dos Princípios Formadores*. Segundo ela, *apeíron* e *péras* representam os dois princípios por meio dos quais as idéias ganham a possibilidade da existência. Assim, esses *princípios formadores* não são idéias em sentido próprio, mas condições de possibilidade para elas (Reale 1991).

Platão considerou essa discussão como um passo fundamental para entender a totalidade da imensa construção teórica realizada durante toda sua vida, reservando um espaço privilegiado de sua obra para isso. Os diálogos *Filebo* e *Parmênides* marcam uma importante fase dos escritos platônicos. É justamente nestes diálogos que essa temática ganha um destaque mais explícito e consistente.

Nesses dois diálogos Platão realiza um resgate teórico de sua *Doutrina das Idéias*, lançando mão de uma argumentação ainda mais fundamental. Tanto no *Filebo* como no *Parmênides* notamos a existência de um debate que Platão trava com suas próprias origens filosóficas, apontando para aquilo que não estava totalmente explícito em seus escritos anteriores.

Essas *origens revistas*, com que Platão se depara nesse exame auto-crítico, certamente fazem referência à escola eleática e pitagórica, ainda que não fique restrito a elas (Reale 2003). Com isso, ele pretende fornecer uma resposta para o problema da natureza do *ser* em Parmênides e em sua própria *Teoria das Idéias*, recompondo toda discussão que tem seu início mais evidente em Anaximandro, passando pelos eleatas e

pelos pitagóricos.

Muitos historiadores da filosofia antiga e estudiosos do pensamento platônico estão concordes com o fato de que a *Doutrina dos Princípios Formadores* não é coisa que se deu somente na velhice de Platão. De fato, vários dos elementos dessa doutrina são mencionados em muitos diálogos do período da maturidade (Godschmidt 2002).

Afirma-se, nestes círculos investigativos, entre os quais encontramos a *Escola de Tübingen*, que é possível supor que Platão delegou a uma tradição oral o principal desta doutrina, deixando aos *diálogos* apenas aquilo que pudesse denunciar sua estrutura mais geral.

Nesse sentido, defendem a tese de que Platão pode ter realizado uma revisão de todo o pensamento Socrático, desde o início da formação do próprio pensamento platônico. Assim, mesmo sem fornecer indicações explícitas nos diálogos da juventude, paulatinamente ele teria se afastado do pensamento de Sócrates, de modo a culminar nas declarações de seus últimos diálogos, em que as idéias de Sócrates são completamente retificadas (Godschmidt 2002).

1.4.1 O *Filebo*

Segundo a *Teoria dos Princípios Formadores*, as *idéias*, as formas puras do mundo inteligível, nasceriam da união do limite com o ilimite¹⁴, ambos absolutos e, nesse sentido, ambos indeterminados quando tomados isoladamente. Assim como em Anaximandro, Platão vê nesses princípios uma total indeterminação, como se fossem fronteiras para o pensamento, além das quais nada é concebível (**Platão 1974a**). A essa total indeterminação associamos uma noção bastante crua de infinito; isto é, trata-se daquilo que é inconcebível por sua natureza mesma, aquilo que escapa tanto da razão como da imaginação (**Platão 1974a**).

No entanto, em Platão, o infinito também pode ser localizado em um outro nível de abstração. Exatamente naquele em que encontramos as *idéias*. De modo que a própria idéia de infinito é apenas uma entre tantas outras possíveis. Isto é, o infinito, como idéia platônica, é também uma forma, uma determinação (Reale 1991).

É possível afirmar que Platão considera níveis distintos de abstração para o

¹⁴ Ilimite: Tradução para o português de *péras* e *apeíron* realizada por Marcelo Perine, vide Giovanni Reale, *Para uma nova interpretação de Platão*, 1991.

infinito. No primeiro deles, encontramos os *Princípios Formadores* que constituem, em si mesmos, uma grande indeterminação. No nível seguinte, encontramos as *idéias*, de certo modo já determinadas pela mistura de limite com o ilimite.

Apeíron é um infinito indeterminado, pois se trata de um dos princípios formadores das idéias. Ele não tem forma. Sobre ele nada pode ser dito, exceto quando misturado com *péras* e transformado em uma *idéia*. Neste caso, o infinito não é mais o princípio formador, mas algo determinado pela mistura de limite e ilimite, uma *idéia* ou uma *forma abstrata* (Platão 1974a).

Platão enfatiza que o trabalho do verdadeiro sábio é encontrar o ponto médio entre os graus corretos de mistura do limite com o ilimite (Platão 1974a). Ou seja, sábio é aquele que bem realiza sucessivas abstrações, ou que bem realiza a ascese, ou a mistura.

O trabalho do sábio é conferir uma medida, ou um limite, ao ilimitado¹⁵. Este ponto médio entre limite e ilimite é denominado por Platão *número*. Podemos lembrar que esta solução se assemelha bastante com aquela oferecida pelos pitagóricos, quando afirmavam que o número surge espontaneamente da imposição de *péras* sobre *apeíron*.

No texto do *Filebo*, portanto, Platão admite os seguintes quatro grandes gêneros:

1. Ilimite (*apeíron*)
2. Limite (*péras*)
3. Mistura (*idéias*)
4. Causa da Mistura (*demiurgo*)

1. O Ilimite (*apeíron*):

À primeira vista, o termo *ilimite* nos remete instantaneamente à ausência de determinação que, por sua vez, nos conduz à ausência de unidade. Ou seja, nos remete à negação de *uno* e de *totalidade*.

A escolha dessa designação para um de seus *princípios formadores*, no entanto, ressalta a intenção platônica de rever os ideais de Parmênides, que enxergava no ilimitado apenas uma inefável multiplicidade sem fim: como uma ausência de unidade, como um desvio pernicioso do pensamento racional. Devemos lembrar que Parmênides concebia o

¹⁵ Ver exemplo acerca do sábio egípcio Teute (*Filebo* 18b).

ser como limitado e esférico, pois tudo que não pudesse ser definido deste modo não poderia ser visto como *uno* (como uma totalidade).

Para Platão é justamente essa ausência de fim no múltiplo, tanto para mais como para menos, que revela no *ilimite* um princípio de unidade (**Platão 1974a**). Ou seja, é a ausência de lacunas, o contínuo do ilimitado, que pode acomodar uma certa concepção de unidade.

Essa unidade que Platão atribui, em primeira instância, ao ilimitado já representa uma certa revisão de um dos princípios máximos do eleatismo, que nem sequer cogitava a possibilidade de uma unidade ilimitada, fosse como princípio, fosse como idéia.

De modo que, imediatamente, o ilimitado já é considerado como uma unidade do ponto de vista platônico. Essa unidade, contudo, deve ser considerada apenas no sentido de um princípio sobre o qual podemos apoiar uma vaga noção de totalidade. Ou seja, a unidade do ilimitado tem o mesmo sentido da expressão ‘unidade da humanidade’ ou de ‘unidade da natureza’.

2. O Limite (*péras*)

O *limite* não tomará para si as noções de *mais* e de *menos*, mas as de *igual* e *diferente*, que também podem ser compreendidas sob o selo do *homogêneo* e do *heterogêneo*, ou do *misto* e do *puro*.

Enquanto o *ilimite* engloba uma infinidade que se acomoda na unidade oferecida pela noção de mais e de menos, o *limite* engloba unidades que se reúnem sob a idéia do *diverso*. Isto é, estas unidades podem ser comparadas¹⁶ entre si como elementos mutuamente avulsos e que são, por este motivo, precisamente determinados como iguais ou desiguais entre si.

Ou seja, essas unidades já constituem uma medida quando tomadas em separado umas das outras. O que quer dizer que elas não podem ser consideradas como indeterminadas, seja para mais seja para menos. Contudo, como indivíduos, podem ser agrupados uns com os outros em uma cadeia, ou conjunto. Por outro lado, este conjunto pode ser considerado como uma indeterminação para mais ou para menos e, desta feita, constituir uma ordem infinita de elementos finitos.

¹⁶ O ato de *comparar* razões, números, conceitos ou *idéias* deve ser entendido como um método cuidadosamente trabalhado por Platão e que exigia, daqueles que o praticavam, o esforço de uma vida inteira. Trata-se do método dialético, cujos detalhes foram legados a uma tradição oral platônica.

Com relação a tudo o que é limitado, Platão conecta a idéia de número ou de medida. Ou seja, o limitado se identifica com tudo aquilo que é passível de receber um número.

O *limite* possui, portanto, e do ponto de vista da *Teoria dos Princípios Formadores* de Platão, uma natureza finita e infinita: por um lado é unidade, medida individual de si mesma, princípio de identidade, número. Por outro lado, este *limite*, unidade indivisível, homogeneidade elementar, também se encaixa no gênero do *ilimite*, como uma reunião sem fim de formas idênticas.

3. Mistura de Ilimite e Limite

Como mencionamos anteriormente, as populares formas platônicas, as idéias ou os ideais, propriamente falando, são engendradas somente a partir do terceiro gênero, o da *mistura*. Tanto no primeiro gênero, como no segundo, encontramos nada além de *proto-formas* ou *proto-idéias*. É no terceiro gênero, portanto, no da *mistura*, que o *ser* se manifesta como *idéia*.

A suma concepção da *mistura* do *ilimite* com o *limite* também recebe o nome de *medida*¹⁷. Dessa mistura nasce a harmonia. Isto é, formas que se revelam num jogo de proporções e que podem ganhar um número como seu representante matemático ideal.

Tudo o que é assim gerado, portanto, mantém com estes dois princípios formadores a comunicação com o que é finito e com o que é infinito. Seja por meio da multiplicidade, a aglomeração das formas heterogêneas em um conjunto harmônico, seja por meio da unidade que as formas exibem imediatamente quando tomadas em conjunto ou isoladamente. Uma e outra, a unidade e a multiplicidade das formas, carregam consigo o finito e o infinito, dada sua gênese comum no *limite* e no *ilimite*.

Platão funde em sua teoria os versos de Parmênides e de Heráclito. Suas formas puras, as idéias, o *ser* em si, ou a verdade inteligível, são mistura de *ser* e de *não-ser*, de *péras* e de *apeíron*. Nele, a pureza parmenidiana do *ser* é relegada à condição de uma proto-idéia, não sendo suficiente, quando tomada em separado do seu contrário, o *não-ser*, para o engendramento das formas ideais.

¹⁷ Essa sentença trás de volta de maneira reformulada, como já foi mencionado, a solução pitagórica para a natureza do *ser*, que ganhará uma versão ainda mais refinada nas mãos de Platão.

4. Causa da Mistura

Agora nos deparamos com o gênero em que cabem todas as concepções do *ser* que não podem ser encaradas, ou como puras idéias, ou como proto-idéias e, tampouco, como aparência do *ser*, ou cópia sensível. Em outras palavras, aqui se explicita um *ser* que não é entendido quer como princípio de síntese do conceito, quer como o conceito engendrado pela mistura dos princípios formadores (Platão 1974a).

Não pretendemos explicar detalhadamente este quarto gênero, pois para tanto seria necessário resgatar outra teoria platônica, mais precisamente aquela explicitada nos diálogos *Timeu*, *Fédon* e *Sofista*. Estamos falando da *Teoria do Demiurgo*, que poderia ser entendida como a proposta platônica para uma inteligência cósmica criadora do universo em sentido amplo.

Basta-nos saber, por ora, que Platão tenciona explicar o quarto gênero do *ser* como um *agente*, ou uma *inteligência*, que é capaz de reunir os princípios formadores e, assim, realizar a síntese das idéias. Para ele o intelecto é a *causa* de tudo o que é gerado e, em se tratando do *ser*, tudo o que pode ser gerado são as idéias.

Platão esclarece que aquilo que é usado na geração, os princípios formadores, é sempre distinto da *causa* dessa geração. Essa última é o que *promove*, por assim dizer, a mistura para o efeito do surgimento das idéias

O *ser* como *causa*, a inteligência demiúrgica, também participa do movimento dialético do *uno-múltiplo*. Assim, a uma inteligência cósmica, sempre una, conectam-se inteligências múltiplas, que são as inteligências individuais de cada ser (Platão 1974a).

O mundo inteligível, causado por essa inteligência, é duplamente gerado: como algo perene e eterno, enquanto criação cósmica divina; e como algo que é acessado particularmente, por cada um dos sujeitos que se aproximam desse gênio por seus próprios méritos intelectuais. Assim, para Platão, acessar este mundo é também participar, pessoalmente, de uma experiência de criação.

A conclusão do diálogo *Filebo* é que o *uno* é a essência do bem. Ou seja, o demiurgo, como artífice supremo ou como aquele indivíduo que pratica o bem, pois é sábio, tem como meta e *fim último* a geração da unidade (o misto) a partir da aplicação do *limite* ao *ilimite*, obtendo a *medida*, a *harmonia*, a *proporção*, o *número* (Platão 1974a). E todas essas coisas estão associados com o que é bom, enquanto que a ausência dessas

coisas está associada com o que é mal. Essa distinção nos remete novamente ao cerne do pensamento pitagórico.

A seguir, realizaremos uma rápida digressão sobre a discussão que aparece no diálogo *Parmênides* a respeito do *uno* e do *múltiplo*. O leitor menos interessado nesta discussão pode se remeter diretamente à seção dedicada a Aristóteles (p. 47), sem maiores prejuízos para a compreensão da idéia principal deste trabalho.

1.4.2 O *Parmênides*

Notamos que no texto do *Parmênides* Platão explora, assim como ocorre no *Filebo*, as possibilidades de análise do *uno* e do *múltiplo* como princípios formadores¹⁸.

Devemos ter em mente que Platão (**Platão 1974b**) anseia por um embasamento ontológico da realidade que, no conjunto de sua obra, é prioritário. Esse embasamento não se desvincula do método para alcançá-lo, que é o método dialético. O lógico e o ontológico são planos que dificilmente podem ser encontrados separados no pensamento platônico.

Muito sucintamente falando, nesse diálogo o *ser* aparece como uma unidade do real, e este real se escalona em graus de abstração do *ser*. Para a realização dessa abstração é necessário considerar o movimento argumentativo dialético, em que pese a restrição imposta pela negação do *ser*, relativa ou absolutamente. Assim, o número pode ser entendido como *uno* (absolutamente) ou como unidade (relativamente), de acordo com o grau de abstração a que o método dialético nos conduz.

Para Platão (**Platão 1974a**) o número é um *ser*, como tudo o mais que é gerado pela ascese do pensamento. Portanto, é necessário ter sempre em consideração qual é o grau ontológico em que o discurso se encontra no uso que faz do conceito de *número*. Seja como unidade aritmética (idéia particular), seja como unidade do múltiplo sensível (número aparente), ou ainda como *uno* universal (idéia generalíssima). Em meio a essas diversas possibilidades para o número encontramos o infinito, ou como idéia, ou como pluralidade sensível (**Platão 1974a**).

Para além da demarcação desses níveis ontológicos concebidos por Platão,

¹⁸ Como ocorre com o *Filebo*, o *Parmênides* também se apóia em outros diálogos dos quais resgata teorias e linhas argumentativas. De modo que nos veremos obrigados a cometer muitas omissões em favor da brevidade. Ainda assim, vale ter como referência os diálogos *Fedro* e *Fédon*.

temos apenas os *Princípios Formadores*: o limite e o ilimite. Ambos permeiam todos os níveis ontológicos.

No menor nível de abstração, os números se aproximam das formas sensíveis, praticamente se identificando com elas. Já no plano mais elevado, o número não pode mais ser tomado como uma representação da quantidade, mas como a pura representação da medida, isto é, como a contenção da desmesura. Nesse plano mais elevado, o número se identifica com o *Belo* e com o *Bom*, com a perfeição suprema, com o conhecimento imediato do *ser absoluto*, com o infinito e com o finito considerados absolutos.

O *Parmênides* pode ser dividido em três momentos distintos. No primeiro (*Parmênides*, 126a – 128e), há uma pequena disputa entre Sócrates e Zenão acerca do *uno* e do *múltiplo*. No segundo (*Parmênides*, 128e – 135c), a *Teoria das Idéias* é apresentada, assim como ela se mostra na fase de maturidade de Platão, que é a fase da *República*, do *Banquete* e do *Fédon*. Finalmente, na terceira e última parte (*Parmênides*, 135c – 166c), há uma exposição de Parmênides no sentido de *resgatar* a dialética que, segundo ele, estava perdida quando observada do ponto de vista dessa *Teoria das Idéias*, enfraquecida por uma série de argumentos eleatas.

O núcleo do diálogo está nesta terceira parte e, sem perder tempo, nos remetemos diretamente a ela, na qual a *Doutrina dos Princípios Formadores* é remodelada no sentido de explicitar a *Doutrina dos Princípios Formadores*.

Através de Sócrates, Platão expõe aquilo que poderíamos chamar de primeira versão da *Doutrina das Idéias*; isto é, a doutrina ainda não reforçada pela dos *Princípios Formadores*. Essa doutrina fraca, por assim dizer (*Parmênides*, 128e – 130a), é apresentada do seguinte modo:

- a) As *idéias* são *unas*;
- b) Os objetos sensíveis, em sua pluralidade, não *são*;
- c) Só com a participação na unicidade das idéias é que os objetos sensíveis podem *ser*.

Concluímos disso que as bases eleatas estão presentes na doutrina fraca da seguinte forma:

- a) A verdade é o *ser*;
- b) O *ser* é *uno*;

c) A verdade não pertence ou não é a pluralidade, senão quando esta é reunida sob o selo da unidade conferida pelo conceito de *ser*.

Parmênides, no entanto, apresenta sete refutações a essa doutrina, que resumimos abaixo para nos ajudar a entender a reformulação que deverá ser apresentada em seguida:

1. Sócrates não parece seguro em admitir que existam *idéias* para todas as coisas, tais como pêlos, escamas, lama etc. Parmênides atribui esta dificuldade à imaturidade filosófica do jovem Sócrates (*Parmênides*, 130c);
2. Não fica claro de que modo os objetos sensíveis participam das *idéias*, se inteira ou parcialmente. Ou seja, as *idéias* não se mostram íntegras nos objetos sensíveis, pois se o fizessem estes seriam indiscerníveis dessas *ideações*, de tal modo que não haveria sentido em separar as *idéias* dos objetos sensíveis. Então, os objetos sensíveis só podem participar parcialmente das *idéias*. Mas, neste caso, as *idéias* não poderiam ser consideradas unas e indivisíveis, mas, sim, múltiplas e divisíveis, o que é contraditório com sua natureza ideal (*Parmênides*, 131a – e);
3. Há um grave problema lógico na forma como Sócrates concebe a ascensão dos objetos às *idéias*: como reunir os objetos sensíveis às *idéias*, das quais todos eles supostamente participam, sem um terceiro termo do qual ambos (objetos sensíveis e *idéias*) devam participar simultaneamente? O mesmo ‘princípio de participação’ pode ser aplicado um cem número de vezes sem nunca se obter um termo final.¹⁹ (*Parmênides*, 132a – b)
4. Sócrates se vê na situação de ter que desviar os problemas levantados acima, afirmando que as *idéias* podem ser entendidas apenas como pensamentos e não como entidades em si mesmas. Assim, não haveria mais esta multiplicidade infinita de *idéias*, mas um único pensamento que, à vontade, se desdobra em muitos por causa de uma única *idéia*. Contudo, Parmênides rebate que todo pensamento é sempre pensamento de algo (*ser*) e nunca pensamento de nada (*não-ser*), não podendo ser o próprio pensar este algo. Logo o pensar não pode tomar o lugar do *ser*. (*Parmênides*, 132c)
5. Ao tratar os objetos como cópias das *idéias*, Sócrates tem que admitir que estes símiles devam sempre se reunir sob o selo da *semelhança* quando participam da *idéia* de semelhança. Logo, para a afirmação de que as cópias são semelhantes às *idéias*, já tivemos que abstrair uma semelhança que está um nível acima da própria *idéia* de semelhança, sob a qual reunimos as cópias e a *idéia* da qual participam. (*Parmênides*, 132d – 133b)
6. Sócrates baseia sua doutrina numa total separação entre os mundos sensíveis e inteligíveis, cada um dependendo exclusivamente de si mesmo: as *idéias* dependem exclusivamente das relações mútuas entre elas e os objetos sensíveis exclusivamente das relações mútuas entre eles. E tem de ser assim, pois de outro modo, com algum termo médio entre estes dois mundos, não se estabeleceria que as *idéias* são em si mesmas, no sentido do *ser* eleático (*uno* e Verdadeiro). Contudo, essa separação não permite a comunicação entre os mundos, logo as *idéias* são incognoscíveis por qualquer via que se adote. (*Parmênides*, 133b – 134c)
7. A sétima dificuldade levantada por Parmênides se mostra como a mais grave de todas e é o avesso da que acabamos de observar. Na medida em que os mundos são absolutamente estanques, aquele que detém o conhecimento em si do mundo inteligível,

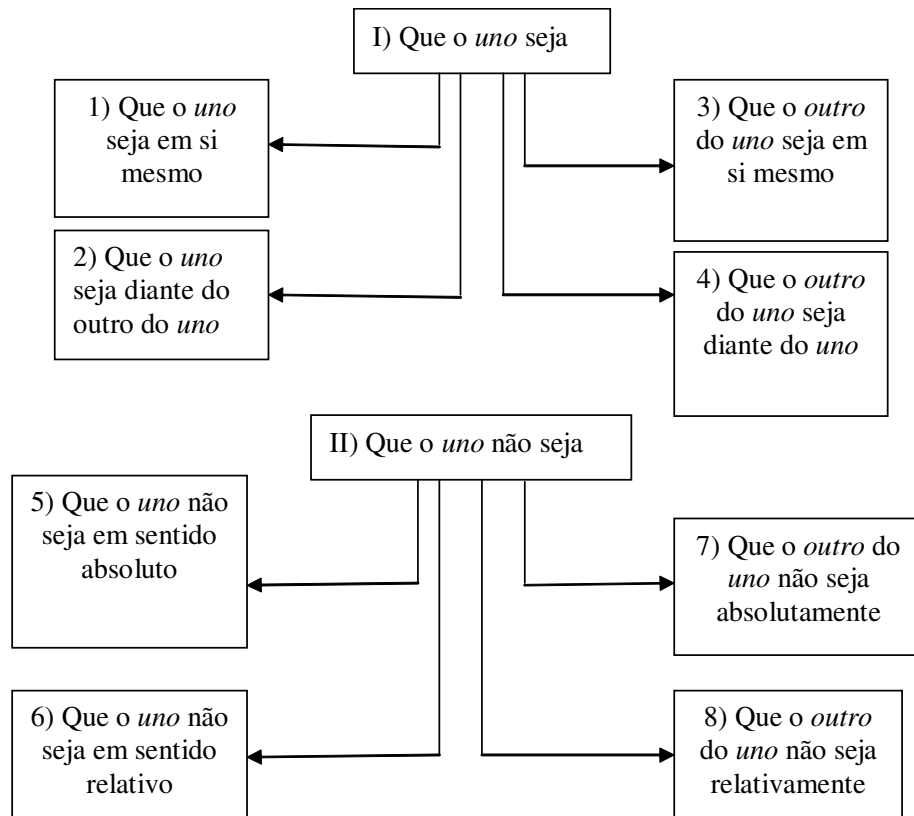
¹⁹ Aristóteles possui uma longa série de argumentações contra a *Doutrina das Idéias* que vão nesta mesma linha e que ficaram conhecidas pelo nome de Argumento do Terceiro Homem. Vide Aristóteles, *Metafísica*, A 9, 990b.

o demiurgo, não pode jamais chegar a conhecer o mundo sensível. O que se revela como um absurdo; pois, desta forma, o sumo criador dos mundos não chega a conhecer os mundos que criou. (*Parmênides*, 134c-e)

Mas é também Parmênides que se esforça em salvar a dialética; isto é, salvar a *Doutrina das Idéias*. Na verdade, neste diálogo o personagem de Parmênides personifica e dá voz às idéias já bem amadurecidas do *velho* Platão. E para este velho Platão, as dificuldades de Sócrates, ou da velha teorias das idéias, se originam de uma confusão entre os quatro gêneros mencionados acima: *Ilimite*, *Limite*, *Mistura* e *Causa*.

O método dialético, extremamente difundido entre os membros da *Academia*, é habilidosamente empregado para a dissolução dessa confusão. Em geral, constitui-se de uma exaustiva análise de uma idéia ou problema qualquer — em *Parmênides* é examinada a meta-idéia do *uno* — até que todas as possibilidades se desdobrem explicitamente, evidenciando-se como verdades ou como *aporias*.

A estrutura dessa investigação pode ser observada pelo esquema que apresentamos a seguir no qual, das oito conseqüências possíveis para a análise da proto-idéia do *uno* temos que os resultados afirmativos e negativos, tanto para a existência como para a negação da existência do *uno*, em si mesma, ou relativamente ao seu contrário (o *outro* do *uno*), parecem se igualar, culminando em um resultado que se mostra aparentemente nulo, mas que traz resultados favoráveis a uma revisão do eleatismo e da *Teoria das Idéias*:



1. **Que o *uno* seja em si mesmo ou absolutamente:** Esta hipótese é eliminada logo de início por culminar no ilimite absoluto sobre o qual nada pode *ser* no sentido de uma idéia que é gerada para o *ser* (medida ou número). É importante notar que ela coincide com a tese monista forte do eleatismo, mais propriamente de Zenão do que de Parmênides;
2. **Que o *uno* seja diante do *outro* do *uno* ou relativamente:** Nesta hipótese Platão propõe sua teoria de geração dos números a partir da pluralidade infinita de tudo o que participa do *ser*. Do que é gerado para *ser*. Assim, ele considera o par como o número dois (número ou medida), a partir do *uno* e do *ser* que são distintos e que são *um* (número ou medida). Um dos componentes do par (o *um*) somado ao par (o *dois*), fornece o número *três* (que é número ou medida). E assim num raciocínio contínuo do qual todos os números inteiros positivos são obtidos. Todo este raciocínio se funda na distinção entre *um* (unidade) e *ser* (ente) que são *meta-idéias* oriundas da aplicação do limite ao ilimite. O *uno* e o *ser* em si mesmos, considerados absolutamente, como no eleatismo ou na primeira versão para a *Doutrina das Idéias*, só geram uma espécie de unidade indistinguível que, por este motivo, não é medida.
3. **Que o *outro* do *uno* seja em si mesmo ou absolutamente:** Nesta hipótese o múltiplo em si mesmo (em sentido absoluto) não conhece limite. É, portanto, uma pluralidade infinita (*apeíron*) da qual não se pode obter uma *idéia* (mistura), pois não há consideração do gênero limite. Logo, dele não se pode obter número ou medida. Interessante observar que o *uno* absoluto e o *outro* do *uno* absoluto são indiscerníveis por suas conseqüências (*apeíron*). As hipóteses (1) e (3) se identificam por serem estéreis, ainda que sejam afirmações antitéticas.
4. **Que o *outro* do *uno* seja diante do *uno* ou relativamente:** A multiplicidade ilimitada conhece o limite e, assim, tornam-se multiplicidade limitada. O infinito se atualiza e se

torna finito, ou seja, ganha número e medida. Da mesma forma que a hipótese (2) os números são gerados, dessa vez, porém, da perspectiva do infinito para o finito.

5. **Que o *uno* não seja em si mesmo ou absolutamente:** O *uno* nesta hipótese não pode receber nenhum predicado, pois ele não é absolutamente. Desse modo, não pode ser limitado e voltamos novamente às hipóteses (1) e (3).
6. **Que o *uno* não seja diante do *outro* do *uno* ou relativamente:** Que o *uno* não seja relativamente, significa a afirmação do diverso. Isto é, esta hipótese é a antípoda da (5). Logo ela afirma a possibilidade da medida, ou seja, do número, ainda que de maneira relativa.
7. **Que o *outro* do *uno* não seja em si mesmo ou absolutamente:** Aqui o *múltiplo* é simplesmente negado em qualquer sentido possível o que é o mesmo que afirmar a hipótese (1) já descartada. Tanto em uma como em outra se recai no ilimite e na impossibilidade do número.
8. **Que o *outro* do *uno* não seja diante do *uno* ou relativamente:** O *múltiplo* é negado quando posto diante do *uno*. O infinito recebe a medida através da imposição do limite. Mas, desta vez, o número que daí advém é meramente aparente, pois se mostra pela reunião das formas sensíveis. Os objetos serão pares e ímpares de acordo com sua forma geométrica aparente e de acordo com sua disposição no espaço. Há uma limitação sensível da forma, o número existe apenas num sentido sensível.

Assim, das oito hipóteses acima, quatro conferem possibilidade ao número, enquanto as outras quatro retiram esta possibilidade do jogo dialético. Os números sempre aparecem da adição do limite ao ilimite, enquanto que a impossibilidade do número é decorrência da assunção do limite ou do ilimite separados um do outro, isto é, quando tomados como absolutos.

Na verdade, essas oito hipóteses se intercalam em um jogo mútuo de afirmação e negação, uma em relação à outra.

A) Em um primeiro plano encontramos os *Princípios Formadores*, o limite e o ilimite. Estes podem ser traduzidos ainda, com algumas ressalvas, como *uno* e *múltiplo*, ou como finito e infinito. Em separado um do outro nada pode ser dito sobre eles. Ao se unirem, no entanto, pela ação da geração, transformam-se em medida, número, idéia ou forma. De modo que este primeiro nível deve ser entendido apenas como ferramenta heurística e não como plano ontológico *stricto sensu*;

B) Agora temos propriamente o plano em que esta mistura aparece: as *idéias*. Estas podem ser entendidas por um processo de abstração cujo fim são os números metafísicos. Neste sentido, as *idéias* são números, como também são formas geométricas metafísicas, como os polígonos absolutamente ideais.

C) Neste plano encontramos as *idéias* gerais para tudo aquilo que identificamos como suas cópias no mundo sensível. Estas idéias se desdobram daquelas do nível imediatamente acima e também podem ser traduzidas em números que, conquanto ideais, pois habitam o mundo supra-sensível, são múltiplos e, portanto, considerados particulares e objetos das diversas opiniões.

D) Aqui estão os objetos da geometria e da aritmética, os números e as formas tomados particularmente, com as quais as diversas manipulações são feitas para a execução de uma determinada técnica, como a arquitetura, a música ou a astronomia. Este constitui o nível da opinião verdadeira.

E) Por último, nos situamos no plano sensível, onde as aparências reinam absolutas. Neste nível se situam todas as opiniões não confiáveis, assim como os prazeres ligados aos apetites humanos. Os números aqui aparecem de maneira aparente como, por exemplo, pela reunião de objetos em grupos, nos corpos e nos diversos tipos de arte figurativa.

De qualquer forma, os números são entendidos aqui em quatro níveis sucessivos de abstração que, do mais baixo ao mais alto, podem ser resumidos da seguinte forma: (E) aparências numéricas, reuniões de corpos ou formas sensíveis particulares (número sensível); (D) relações ou grandezas úteis e objetos das artes diversas (o número aritmético); (C) *idéias abstratas* particulares (números ideais); (B) *puras idéias* (o número metafísico).

De (E) até (B) ocorre um paulatino refinamento na concepção do número, conduzindo o agente, mergulhado no processo de abstração, do puro múltiplo ao uno absoluto. Entre um e outro encontramos os números dos níveis (D) e (C), que traduzem a unidade ou a diversidade das *idéias particulares* e que servem de intermediário entre um extremo e outro. Para Platão, o verdadeiro exercício da inteligência está em conferir (gerar) medida ao infinito, seja ele o infinito do múltiplo sensível de um lado, seja o infinito do uno absoluto e indeterminado do outro extremo. A atividade do sábio, portanto, reside em ascender dos planos ontológicos intermediários para os mais altos: a *ascese platônica*.

A ascese platônica deve ser encarada como o esforço de conferir determinação ao indeterminado (**Reale 1991**); isto é, encontrar as idéias por meio das quais se pode escalar para níveis cada vez mais altos de abstração, sem que, com isso, se diminua o grau de generalidade que carregam consigo que é justamente em que consiste o seu atrativo filosófico. O trabalho do sábio consiste, portanto, em encontrar uma explicação, um uso, para as idéias generalíssimas e tanto maior será o seu gênio, quanto mais clara for esta explicação, ou este uso, e quanto mais geral for a idéia tomada para análise.

1.4.3 Apêndice

Nesse apêndice apresentamos um roteiro resumido das principais passagens de Platão que pode facilitar a leitura dos diálogos que analisamos acima, o *Filebo* e o *Parmênides*.

O Filebo:

(Filebo, 14c-15c) Através de diversos exemplos, Sócrates chama a atenção de Protarco para o fato de que muito do que se diz acerca do uno e do múltiplo geram controvérsias que poderiam ser evitadas, desde que se adote a abordagem correta ao se lidar com estas duas noções.

(Filebo, 16d-e) O que é a unidade primitiva? Sócrates assevera que ao percorrer a idéia desta unidade se concluirá que ela é una, múltipla e infinita.

(Filebo, 17b) O exemplo da voz que é una e múltipla simultaneamente.

(Filebo, 14c- 17e) Apelando para o exemplo da música, como uma clara referência aos pitagóricos, Sócrates começa a desenvolver a idéia de que a sabedoria se mostra num domínio múltiplo, porém finito. Isto é, sábio não é aquele que rapidamente conclui que tudo é em si uno e múltiplo, rapidamente indo da unidade ao infinito. Pois tanto aquele que diz coisas acerca da unidade, como aquele que diz coisas acerca do infinito perdeu de vista o termo médio onde esta multiplicidade é determinada de alguma forma.

(Filebo, 18b) O *Princípio Demiúrgico* de Sócrates consiste em sempre adotar um termo médio em qualquer investigação que possa conduzir da unidade ao infinito, ou vice-versa. Adotando este princípio, em toda investigação que leve em conta as idéias de unidade e infinito, evitar-se-á, por meio da adoção de um termo médio que é uma quantidade determinada, a especulação inócua que cambia livremente da unidade ao infinito sem que, disso, se retire algo de proveitoso. Em *Filebo* 18c, Sócrates dá o exemplo do sábio Teute que soube determinar a quantidade e as espécies das letras que podem representar a linguagem (a voz humana).

(Filebo, 22d-e) O bem não é, nem sabedoria, nem prazer, tomados separadamente, mas uma “vida mista de ambos”. Ambos, disjuntos, cuidadosamente analisados se mostram carentes, ora de um, ora de outro elemento: à sabedoria falta o prazer e ao prazer falta a sabedoria. Deste modo, não podem, separados, encerrar a perfeição que deve incidir sobre a idéia do verdadeiro bem, de que nada carece. Contudo, Sócrates irá manter a

sabedoria como causa dessa vida mista, defendendo a tese de que o prazer jamais poderá servir de causa dessa vida mista.

(Filebo, 23d-e) Sócrates retoma o estudo do uno e do múltiplo.

(Filebo, 24a-b) A ausência de limite promove a consideração do infinito. Exemplo do mais quente e menos quente, ou mais frio e menos frio. Em *Filebo* 24e, Sócrates chega a mencionar a possibilidade de considerar a “natureza do infinito”. Da mistura entre o ilimitado (o infinito) com o limitado (o finito) nascem a medida e a proporção e essas duas qualidades estão na base daquela outra que é o belo.

(Filebo, 26d) As três classes: 1) a do infinito reduzida à unidade por meio do selo comum do mais e do menos; 2) a do finito que aparece imediatamente como uma unidade determinada, ainda que seja um múltiplo; 3) o produto dos dois primeiros, sua intersecção. Ou seja, a medida, a proporção, o metro.

(Filebo, 27c) A quarta classe diz respeito àquilo que funciona como causa da mistura entre as classes 1 e 2, dando origem a 3. Em *Filebo* 30e, Sócrates conclui, por meio de um longo estratagema, que a sabedoria pertence à esta quarta classe, como causa de tudo. Já o prazer pertence à primeira classe, por não possuir limite, sendo, portanto, sempre sem medida ou infinito.

O Parmênides:

(Parmênides, 127e – 130a) Nos capítulos II e III Sócrates extrai as contradições da assunção de um *ser* múltiplo, desviando astuciosamente o principal do pensamento eleático para a sua própria doutrina das idéias; Esta matriz está exposta no poema de Parmênides intitulado *Peri Physeos* ou *Sobre a Natureza*, no qual defende a imutabilidade e a unidade do *ser*.

(Parmênides, 130b – 136e) Nos Capítulos IV ao VIII ocorre o confronto entre o

platonismo e o eleatismo, confronto que coloca em xeque a natureza ontológica das *idéias*, assim como seu valor epistêmico. Parmênides comenta ironicamente: “Já vês Sócrates em que aperto se mete quem admite a existência à parte das *idéias* em si mesmas” (*Parmênides*, 133a). As *idéias* representariam, na doutrina platônica, o resultado do relacionamento entre as coisas mutáveis e as imutáveis. A pergunta principal aqui, colocada por Parmênides, é: “Como é possível a relação entre as idéias e suas cópias? Pois, senão, como poderia aquele que admite as idéias chegar um dia a conhecê-las, se estas estão sempre numa esfera acima das possibilidades humanas?”.

(*Parmênides*, 137a – 166c) No Capítulo IX tem início a tentativa de salvar a dialética ameaçada pela pergunta de Parmênides. Trata-se de salvá-la para se salvar o próprio arcabouço metafísico da filosofia. Antes de verificar a natureza do Belo, do Justo e do Bom, é o caso de procurar algo ainda mais geral que é a idéia comum a todos estes universais: o número. Descobre-se que esta *idéia generalíssima* é a do próprio *ser* da unidade destes universais: o *uno*. Platão se voltará então para a investigação do *uno* e do *múltiplo*.

1.5 Aristóteles

Nas seções precedentes acompanhamos o paulatino desenvolvimento do conceito de infinito. Desde Anaximandro até Platão, o discurso sobre o infinito foi gradativamente adquirindo a forma do discurso filosófico clássico, ganhando o *status* de *problema* para a filosofia como um todo (Gompers 1996).

Como vimos, as dimensões lógicas desse problema começaram a ganhar profundidade com Parmênides e ganharam um papel quase central em Platão. No entanto, contrariando a tradição, Aristóteles adota uma estratégia de abordagem um tanto diferente. Essa nova estratégia para a construção de seu próprio discurso sobre o infinito faz parte do conjunto mais amplo de suas refutações aos ditames pitagóricos, eleatas e, principalmente, platônicos (Reale & Antiseri 2003).

A abordagem filosófica aristotélica, em particular para o problema do infinito, constitui-se como um misto de *empirismo* e lógica. Isto é, a filosofia de Aristóteles será pautada pelo princípio de que a lógica e a matemática são instrumentos necessários para a

compreensão do real, mas o real, em si mesmo, não pode ser reduzido à lógica, à matemática ou a considerações meramente abstratas.

Ainda assim, apesar dessa irredutibilidade do real à lógica, ou à matemática, não se pode derivar disso que existam dois planos ontológicos distintos e irredutíveis um ao outro, que se configurariam como um plano inteligível e um outro sensível, assim como pretendia Platão. Tão pouco, como um plano em que números e objetos concretos podem ser, em algum sentido, intercambiáveis, assim como acreditavam os pitagóricos (Reale & Antiseri 2003).

Considerada como um todo, a filosofia de Aristóteles irá se rebelar contra as fórmulas eleatas e pitagóricas, que ganharam sua síntese mais cabal nas doutrinas platônicas. Será através dessa abordagem antagônica ao pensamento platônico, portanto, que serão depositadas as esperanças aristotélicas de uma resolução para o problema do infinito, como parte de uma solução mais geral para as lacunas ontológicas e epistemológicas deixadas pelos seus antecessores.

Antes de Aristóteles, as afirmações acerca do infinito costumavam se fundamentar, de uma maneira ou de outra, em uma cisão ontológica entre as chamadas *natureza inteligível* e *natureza sensível* do mundo (Gompers 1996).

Percebemos tal perspectiva na consideração pitagórica dos números como entidades perfeitas e que, ainda que existentes *de fato*, derivavam diretamente dos princípios *péras* e *apeíron*, que se encontravam para além de qualquer experiência. De maneira ainda mais evidente, também verificamos essa perspectiva nas afirmações eleatas sobre o uno e seu oposto, isto é, sobre o *ser* e o *não-ser*.

Contudo, é em Platão que essa concepção, a de um mundo transcendente ao mundo natural, ganha sua força e expressão máximas. Justamente, com a apresentação da *Teoria das Idéias*.

De maneira bastante inovadora, Aristóteles irá se contrapor a essa visão dual do mundo, na qual o sensível e o inteligível constituem realidades distintas e antagônicas. Para ele, a experiência é parte inextricável do processo de compreensão do mundo e o mundo natural contém, em si mesmo, tudo o que é necessário para a sua apreensão racional (Reale & Antiseri 2003).

A substância, a essência do mundo, não pode se localizar completamente fora do

alcance da percepção sensível. De modo que as categorias de espaço e tempo devem ter um papel crucial em qualquer teoria filosófica que se esforce em fornecer uma compreensão razoável daquilo que seja considerado um relevante objeto de investigação filosófica.

Está claro que, para Aristóteles, uma investigação sobre a natureza do infinito passa, necessariamente, por uma investigação sobre a natureza nela mesma. O infinito ainda constitui um problema lógico e conceitual, porém a compreensão desse conceito não pode descartar a investigação de suas possibilidades empíricas denunciadas pela natureza.

Isto é, trata-se de saber, em primeiro lugar, se há algo no mundo natural que pode ser considerado infinito e, em segundo lugar, se este algo pode ser amplamente analisado. E é bastante expressivo que o núcleo da discussão acerca das possibilidades lógicas e empíricas que envolvem o infinito se concentrem na obra intitulada *Física*:

The science of nature is concerned with magnitudes and motion and time, and each of these is necessarily infinite or finite, even if some things are not, e.g. a quality or a point — it is not necessary perhaps that such things should be put under either head. Hence it is incumbent on the person who treats of nature to discuss the infinite and to inquire whether there is such a thing or not, and, if there is, what it is.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III - 203a1-203a3 p. 346)

Assim, Aristóteles será o primeiro a dar um tratamento lógico mais sistemático e instrumental à questão do infinito, sem perder de vista as considerações sobre o seu fundamento na realidade. De modo que, na filosofia aristotélica, particularmente quando esta se volta para o problema do infinito, o que observamos é um tratamento lógico entrelaçado com uma investigação empírica, onde esses dois níveis argumentativos se mesclam para reforçar uma estratégia única de investigação filosófica.

Como resultado, surge uma discussão que irá aprofundar e determinar uma compreensão mais rigorosa para o uso do termo infinito. Esse uso não se lastreará, tão somente, assim como em Platão, em considerações que reforçam ainda mais a distinção e o afastamento entre *mundo sensível* e *mundo inteligível*. Pelo contrário, o esforço de Aristóteles é o de realizar uma aproximação cada vez maior desses dois mundos (Reale & Antiseri 2003).

1.5.1 O intransponível

Diferentemente de seus antecessores, Aristóteles não procurou definir o infinito em termos de limite, ou ilimite. Ao invés disso, o infinito seria mais bem compreendido, intuitiva e fundamentalmente, como o *intransponível*.

We must begin by distinguishing the various ways in which the term 'infinite' is used: in one way, it is applied to what is incapable of being gone through, because it is not its nature to be gone through (the way in which the voice is invisible); in another, to what admits of a traversal which cannot be completed, or which can only be completed with difficulty, or what naturally admits of a traversal but does not have a traversal or limit.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III - 204a7-204a7 p. 347)

Temos aqui uma proto-definição que já revela uma independência em relação à maior parte daquilo que a filosofia do mundo grego já havia apresentado anteriormente.

Aristóteles reconhece que a idéia de infinito, associada à de *intransponibilidade*, pode se mostrar dúbia. *Transpor*, ou *atravessar*, algo presume uma ação com uma extensão no tempo, ou uma duração, finita. Assim como quando dizemos que atravessamos um longo dia, ou quando transpomos obstáculos na estrada. No entanto, ainda é possível considerar algo transponível de maneira um pouco diferente quando, por exemplo, consideramos ser possível *transpor* uma seqüência de números por meio das operações de adição ou de divisão.

Aristóteles está considerando tudo que não pode ser de modo algum transposto, justamente por não possuir um fim determinado pela lógica ou pela experiência sensível. É nesse sentido que algo pode ser considerado intransponível. Ou seja, intransponível é aquilo que não pode ser superado por meio da ação do corpo ou do pensamento.

Esta proto-definição não se pretende livre da circularidade. O que é o *intransponível*? O infinito. E o que é o infinito? Aquilo que é intransponível por meio de uma ação empírica ou abstrata. O intransponível é aquilo que possui uma duração infinita, ou é aquilo que necessita de um tempo infinito para a sua inteira efetivação.

Inversamente, o que é o *transponível*? É justamente aquilo que pode ser realizado em um tempo finito. Isto é, transpor algo pressupõe uma duração finita. Trata-se aqui de associar uma duração finita com uma ação que possa ser inteiramente acomodada dentro de seus limites.

Vemos que aqui começa a se delinear a impossibilidade lógica para uma certa aceção da palavra infinito, isto é, no sentido de algo que possa ser abstrata ou empiricamente realizado. Justamente porque o uso do termo infinito associado com uma tarefa finita acarreta contradição com a natureza infinita do tempo necessário para a realização dessa tarefa. Ou seja, uma tarefa com uma duração infinita não pode se dar por realizada jamais.

Porém, por enquanto o importante nesse esboço de definição é a postura naturalista assumida por Aristóteles para antagonizar com seus predecessores, mais especificamente para antagonizar com Platão.

Ainda assim, Aristóteles considera o infinito como algo essencial na investigação da natureza e, por esse motivo, é preciso fornecer uma caracterização mais precisa a essa idéia. De modo que Aristóteles lista cinco razões por meio das quais podemos cogitar a existência do infinito:

1. Devido à natureza do tempo, que não admite fim ou começo e que, portanto, deve ser infinita;
2. Devido à natureza das magnitudes, a matéria, que, por princípio, admite uma divisão contínua e, por esse motivo, admite em si o infinito;
3. O interminável movimento do devir denuncia que deve haver um suprimento inesgotável para a geração e para a corrupção dos corpos, o que também revela o infinito;
4. Tudo o que existe materialmente, os corpos, encontra o seu limite em algo fora de si mesmo. Portanto, não deve haver um limite final para todas as coisas em parte alguma, já que isso implicaria em haver algo para além desse limite que também fosse limitado por algo outro, e assim sucessivamente, numa cadeia sem fim.
5. Por fim, os números e as magnitudes jamais se esgotam em nosso pensamento. Isto é, *in abstracto*, a seqüência dos números é infinita, dado que por maior que seja o número que obtemos em nosso pensamento, é sempre possível adicionar a ele um novo número.

O argumento (3) é imediatamente rejeitado por Aristóteles, já que uma quantidade finita de matéria pode fornecer uma combinação ilimitada de novos corpos através da destruição dos velhos, é a própria idéia da transformação.

E (4) também é refutado, já que Aristóteles estabelece uma diferença entre *ser tocado* e *ser limitado*; ser tocado presume sempre uma relação, enquanto que ser limitado é uma condição absoluta; isto é, algo pode ser limitado sem ser tocado por nada.

Contudo, ainda restam três considerações possíveis para o infinito em Aristóteles:

- 1) o infinito do tempo;
- 2) o infinito do espaço;
- 3) o infinito matemático.

Na verdade, essas três considerações estão interligadas e se referem a um único infinito que se apresenta a partir desses três pontos de vista. De maneira ainda mais geral, esses três pontos de vista redundam em apenas duas predicções possíveis para o infinito:

- 1) Infinito por adição contínua;
- 2) Infinito por divisão contínua.

Further, everything that is infinite may be so in respect of addition or division or both.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III - 204a8-204a16 p. 347)

Essas duas predicções se fazem valer para as magnitudes físicas (a matéria), para o tempo, para os números ou outras magnitudes somente pensadas. Com isso, a conclusão de Aristóteles é que, por um lado, o infinito não pode ser concebido em isolado, isto é, como *substância*, já que esta não admite divisão em partes menores.

Na verdade, Aristóteles está negando a concepção de uma substância una, indivisível e infinita, como afirmava o eleata Melissus. Essa primeira conclusão está de acordo com a posição de que o infinito, o que quer que ele seja, não pode ser completamente abstraído das formas sensíveis, seja como princípio, seja como pura idéia.

Now it is impossible that the infinite should be a thing which is in itself infinite, separable from sensible objects. If the infinite is neither a magnitude nor an aggregate, but is itself a substance and not an accident, it will be indivisible; for the divisible must be either a magnitude or an aggregate. But if indivisible, then not infinite, except in the way in which the voice is invisible. But this is not the way in which it is used by those who say [neither] that the infinite exists, nor that in which we are investigating it, namely as that which cannot be gone through. But if the infinite is accidental, it would not be, *qua* infinite, an element in things, any more than the invisible would be an element of speech, though the voice is invisible.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III - 204a17-204a19 p. 348)

Por outro lado, o infinito também não pode ser concebido como um *acidente*, matéria atualizada em forma, um corpo, já que este é, em princípio limitado e, portanto,

finito. Assumir a existência de corpos infinitos conduz necessariamente a diversos paradoxos como, por exemplo, os do eleata Zenão.

Como consequência temos que, seja entre os objetos da matemática, ou entre os diversos conceitos (formas puras ou idéias), seja entre os corpos sensíveis, não existe algo que seja um infinito dado:

1. Infinito não é uma coisa atual
2. Infinito não é uma substância

If 'bounded by a surface' is the definition of body there cannot be an infinite body either intelligible or sensible. **Nor can number taken in abstraction be infinite**; for number or that which has number is numerable. If then the numerable can be numbered, **it would also be possible to go through the infinite**. {grifos nossos}

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III, 204b10-204b11 p. 348)

Contudo, o infinito deve existir de algum modo, do contrário obteríamos muitos problemas e conclusões absurdas como, por exemplo, a obrigação de determinar um início e um fim para o tempo²⁰. Além disso, os próprios tamanhos não seriam mais redutíveis a outros tamanhos já que um tamanho é *sempre* um todo composto por partes e, nesse sentido, é *sempre* divisível. E a pior das consequências possíveis é que os próprios números não poderiam mais ser infinitos.

But on the other hand to suppose that the infinite does not exist in any way leads obviously to many impossible consequences: there will be a beginning and an end of time, a magnitude will not be divisible into magnitudes, number will not be infinite. If, then, in view of the above considerations, neither alternative seems possible, an arbiter must be called in; and clearly there is a sense in which the infinite exists and another in which it does not.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III, 206a14-206a18 p. 351)

A única solução é restringir o uso do termo infinito. Isto é, todas as considerações sobre o infinito deverão remeter a uma existência tão somente potencial e jamais a uma existência atual:

Now things are said to exist both potentially and in fulfillment. Further, a thing is infinite either by addition or by division. Now, as we have seen,

²⁰ Lembrando que Aristóteles concebe o tempo como infinito em princípio.

magnitude is not actually infinite. But by division it is infinite. (There is no difficulty in refuting the theory of indivisible lines.) The alternative then remains that the infinite has a potential existence.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III, 206a19-206a25 p. 351)

O infinito potencial é, em geral, entendido como a possibilidade de uma sucessão contínua de *objetos* que cedem lugar uns aos outros no momento privilegiado do *agora*, sucessão essa que se estende ao longo de um tempo que é por natureza infinito. Tomados em separado, isolados dessa cadeia temporal infinita por meio da abstração, esses objetos são formas finitas e distintas entre si. De modo que há a necessidade de ressaltar a diferença nos usos da palavra *existir*, ou *ser*, quando relacionada ao infinito.

O infinito não *existe*, ou *é*, como fenômeno isolado do tempo, ou tomado *in abstracto*, assim como são as puras formas ou idéias.

Isto é, o infinito não pode existir do mesmo modo que a idéia de beleza, quando se diz, por exemplo, que uma estátua eternizou a essência de um corpo que, a seu turno, se degenera passo a passo ao longo do tempo. Neste caso, a forma do corpo idealizada na estátua traduz um tipo de existência que se coloca fora do alcance da ação do tempo.

Diz-se, porém, que o infinito *existe* da mesma maneira como o dia existe, isto é, como uma atualização constante das formas pela ação do tempo, como um fenômeno de mutação contínua que não conhece limites bem definidos.

The infinite exhibits itself in different ways — in time, in the generations of man, and in the division of magnitudes. For generally the infinite has this mode of existence: one thing is always being taken after another, and each thing that is taken is always finite, but always different. [Again, 'being' is spoken of in several ways, so that we must not regard the infinite as a 'this', such as a man or a horse, but must suppose it to exist in the sense in which we speak of the day or the games as existing — things whose being has not come to them like that of a substance, but consists in a process of coming to be or passing away, finite, yet always different.]

(Aristotle 1993, *Physics*, Book III, 206b1-206b3 p. 351)

Assim, há de se fazer notar, de maneira mais clara, a diferença que se evidencia quando tomamos o infinito da perspectiva do espaço e quando o tomamos da perspectiva do tempo.

As magnitudes espaciais, que se mostram a nós na diversidade dos corpos, possuem uma qualidade que não está presente nas magnitudes temporais. Ou seja, as magnitudes espaciais *permanecem* e podem ser isoladas umas das outras, são

independentes.

Já as magnitudes temporais só podem ser notadas dentro da cadeia de momentos que se configuram como uma sucessão. Ou seja, essas magnitudes existem apenas em função umas das outras e são consideradas, por esse motivo, dependentes e não podem ser tomadas em isolado para uma análise que se efetua longe da consideração do próprio tempo, ou *in abstrato*, o que significaria afastá-las delas mesmas, ou de sua essência.

Na medida em que *permanecem*, as magnitudes espaciais podem ser analisadas *in abstrato*. Podem ser divididas continuamente, numa cadeia sem fim que sempre apresentará uma *nova* magnitude a ser devidamente analisada. Por outro lado, as magnitudes temporais, por não *permanecerem*, caracterizam-se por apresentarem um sucessor em uma série temporal contínua e sem fim. De modo que, nas magnitudes espaciais temos o infinito por divisão contínua, enquanto que nas magnitudes temporais encontramos o infinito por adição contínua.

O que se mostra como dois tipos distintos de infinito, infinito por adição e infinito por divisão, correspondem, contudo, a duas facetas do mesmo *objeto*; isto é, esse objeto se mostra com características particulares e distintas somente quando a categoria do tempo é tomada em separado da categoria do espaço. As operações de divisão e de adição somente orientam para o sentido em que devemos procurar entender o aparecimento de um novo elemento.

Considerando simultaneamente o tempo e o espaço nas digressões sobre os corpos sensíveis, então o que temos é apenas a possibilidade de uma infinita sucessão de novas magnitudes, que se somam ou que se subtraem, denunciando um infinito meramente potencial.

Assim, seja por redução (divisão), seja por adição, o infinito existe apenas potencialmente. Contudo, findo em algum momento arbitrário o processo de adição ou de divisão, o que se obtém, de fato, como objeto atualizado por esse processo, é sempre uma magnitude finita, nunca infinita. Isto é, seja *in concreto*, seja *in abstrato*, o infinito atual não existe para Aristóteles.

Se tomarmos como exemplo os números naturais, em termos aristotélicos, eles jamais constituirão um conjunto completo. Desde que, dada qualquer coleção de números, podemos sempre adicionar a ela um novo objeto (Lavine 1998).

Em Aristóteles, os números naturais são, portanto, apenas potencialmente infinitos. Em ato, no entanto, todas as magnitudes, ou coleções, são finitas, sejam elas obtidas por redução, seja por adição (Lavine 1998).

Somente *in abstracto* é que o conjunto dessas magnitudes pode ser considerado infinito, ou intransponível, justamente porque é possível abstrair uma cadeia temporal com duração infinita, à qual associamos um processo de contagem igualmente infinito.

Deste ponto de vista, alguns paradoxos, como os de Zenão, são oriundos de uma confusão na qual não se distingue perfeitamente os usos do termo infinito. Assim, muitas vezes se atribui uma existência atual a algo que só pode existir potencialmente²¹.

A idéia de um infinito meramente potencial, por divisão ou por adição contínua, oferece, desse modo, uma solução para uma longa tradição de problemas. A idéia de *intransponibilidade*, unida à de possibilidade lógica, com ênfase em uma abordagem empírica e lógica para a problemática do infinito, soluciona, ao menos do ponto de vista aristotélico, aquilo que antes se mostrava como o gerador das muitas disputas entre pitagóricos, platônicos e eleatas.

Para Aristóteles, o erro daqueles que o antecederam foi o de menosprezarem este ponto de vista, ao darem demasiada ênfase para o aspecto ontológico da questão, de modo que pouca importância foi dirigida para a investigação sobre as possibilidades amplas, empíricas e lógicas, de uso e aplicação do termo infinito.

Exemplo disso é o problema da incomensurabilidade da diagonal do quadrado. Para Aristóteles, não há problemas em aceitar que uma das coisas que essa incomensurabilidade demonstra é que *há*, pelo menos, um segmento de reta cuja representação numérica se estende numa seqüência decimal potencialmente infinita. Antes dele, no entanto, havia a compreensão de que, intuitivamente, a diagonal, um segmento finito, abarcaria, de uma única vez, a pura indeterminação.

Para Aristóteles, o problema no qual os pitagóricos se viram envolvidos residia na má compreensão da distinção de um aspecto puramente lógico, no qual as magnitudes podem, *in abstracto*, ou como números, serem representadas através de um procedimento

²¹ Para mais detalhes da refutação de Aristóteles aos paradoxos de Zenão, ver apêndice no final dessa seção. Outras refutações ao paradoxo de Aquiles aparecem em J. S. MILL, *Sistema de lógica*, livro V, capítulo 7; H. BERGSON, *Ensaio sobre os dados imediatos da consciência*; B. RUSSELL, *Introduction to Mathematical Philosophy* e *Our Knowledge of the External World*; W. JAMES, *Some Problems of Philosophy*.

aritmético temporalmente infinito, com questões de ordem ontológica acerca de uma existência atual e completa de um conjunto infinito de números.

Isto é, o erro pitagórico foi o de tratar números como coisas de fato, cuja consequência mais desastrosa foi, inevitavelmente, confundir o infinito potencial com o infinito atual. Essa confusão os conduziu à armadilha da qual não encontraram saída nos termos de sua própria concepção cosmológica (Moore 1990).

Por esse mesmo motivo, pela primitiva confusão que culmina nas considerações de existência do infinito atual, Aristóteles também se distancia da concepção platônica de pura idéia do infinito ou de multiplicidade infinita dos corpos sensíveis.

Não pode haver uma idéia do infinito, ou uma idéia infinita, pois isso seria o mesmo que conferir uma existência atual ao infinito. Além disso, como os corpos não são outra coisa que matéria constantemente atualizada em formas que se sucedem no tempo e como estão, por esse motivo, em constante determinação, Aristóteles irá descartar a existência de um corpo infinito, seja por adição contínua, seja por divisão contínua, já que a sua assunção também resulta em contradição.

Considerar um corpo qualquer como atualmente infinito é novamente confundir uma existência *de fato* como uma existência apenas *possível*. Se um corpo tivesse suas partes contínua e indefinidamente divididas, ou somadas, ele não poderia ser considerado *in concreto*, como uma atualidade, mas somente como um *ser possível*.

A cada momento presente (o *agora*) um corpo qualquer é sempre tomado como uma atualidade. Somente quando visto com olhos voltados para um futuro possível, como algo que ainda não se atualizou em uma determinada forma, é que os corpos podem ser encarados como meras potências, como infinitos (Moore 1990).

Apenas as magnitudes tomadas abstratamente admitem o infinito; ainda assim, apenas como algo que se agrega a essas magnitudes, como um predicado possível a um processo de contagem dessas magnitudes. O processo de enumeração pode ser considerado potencialmente infinito, mas não os números propriamente. Aristóteles se recusa, assim, a aceitar a idéia de um *número infinito*.

Destarte, uma das razões para que Aristóteles admita tão somente o infinito potencial é, justamente, por ser a assunção da existência de um infinito, dado e completo, o principal gerador de paradoxos tais como os de Zenão. Para Aristóteles, estes

paradoxos nada mais são do que raciocínios que confundem propriedades pertencentes ao domínio empírico com propriedades exclusivas do domínio lógico-conceitual. Esta confusão significa, em última instância, conferir uma existência atual ao infinito, ainda que em um plano meramente conceitual.

Afirmar que um intervalo qualquer de tempo ou de espaço seja *infinitamente divisível*, não é o mesmo que afirmar que este intervalo contém, em si, infinitas partes. Significa apenas afirmar que este intervalo admite um processo infinito de divisão. Ou seja, dado um certo número de partes em que este intervalo fora prévia e arbitrariamente dividido, é sempre possível aumentar esse número, por meio de novas divisões.

No entender de Aristóteles, esta idéia está bastante longe daquela outra que constitui o núcleo dos paradoxos de Zenão, segundo a qual neste intervalo *existe, a priori*, um número infinito de partes, independentemente do processo aritmético que conduz a elas.

Podemos inferir dessas considerações que o que causa perplexidade no paradoxo de Aquiles e a tartaruga não é a mera possibilidade lógica e matemática de dividir infinitamente a distância entre os dois corredores. A perplexidade se origina da confusão implícita entre o infinito potencial e o infinito atual, levando aqueles que ignoram essa distinção a concluir que o intervalo entre Aquiles e a tartaruga é atualmente infinito. Por conseqüência, obtêm que Aquiles jamais logrará alcançar a tartaruga.

Em resumo, a distinção entre infinito atual e infinito potencial está necessariamente relacionada à idéia da natureza infinita do tempo. Isto é, existir atualmente, ou existir como uma atualidade, significa existir em um certo ponto definido do tempo, o *agora*. É exatamente este o ponto que marca a fronteira entre o futuro e o passado.

Necessarily, too, the now — the now so-called not derivatively but in its own right and primarily — is indivisible and is inherent in all time. For the now is an extremity of the past (no part of the future being on this side of it), and again of the future (no part of the past being on that side of it): it is, we maintain, a limit of both. And if it is proved that it is of this character and one and the same, it will at once be evident also that it is indivisible.

(Aristotle 1993, *Physics*, Book VI, 234a5-234a23 p. 395)

Existir atualmente é existir no *agora*, é existir no momento presente, é ser finito. Por outro lado, existir potencialmente significa existir como um processo que se estende

sobre um tempo que é, em princípio, indefinido. Nesse sentido, a existência potencial de algo se orienta, preferencialmente, para um futuro que não conhece qualquer limite último, justamente porque o tempo possui uma natureza infinita.

O infinito é o intransponível, é aquilo que demanda um tempo infinito para a sua transposição. O infinito, portanto, não pode ser algo que se dê em um tempo definido, em um *agora* qualquer, pois, se assim fosse, seria *transponível*, o que é contraditório com a proto-definição.

A conclusão é que, segundo Aristóteles, não há nenhum sentido na afirmação da existência de um infinito atual, restando tão somente o infinito concebido como mero artifício lógico e matemático.

1.5.2 Apêndice

Realizamos aqui a transcrição daquelas passagens de Aristóteles que consideramos relevantes. São passagens que versam sobre alguns dos pontos discutidos acima. Mais precisamente trazemos os seus comentários e a sua refutação para o *Paradoxo de Aquiles*.

Physics, Book VI, §§ 1 e 2 (231a29 p. 391 - 234a4 p. 395)

1. Now if the terms 'continuous', 'in contact', and 'in succession' are understood as defined above — things being continuous if their extremities are one, in contact if their extremities are together, and in succession if there is nothing of their own kind intermediate between them — nothing that is continuous can be composed of indivisibles: e.g. a line cannot be composed of points, the line being continuous and the point indivisible. For the extremities of two points can neither be one (since of an indivisible there can be no extremity as distinct from some other part) nor together (since that which has no parts can have no extremity, the extremity and the thing of which it is the extremity being distinct).

Moreover, if that which is continuous is composed of points, these points must be either continuous or in contact with one another: and the same reasoning applies in the case of all indivisibles. Now for the reason given above they cannot be continuous; and one thing can be in contact with another only if whole is in contact with whole or part with part or part with whole. But since indivisibles have no parts, they must be in contact with one another as whole with whole. And if they are in contact with one another as whole with whole, they will not be continuous; for that which is continuous has distinct parts, and these parts into which it is divisible are different in this way, i.e. spatially separate.

Nor, again, can a point be in succession to a point or a now to a now in such a way that length can be composed of points or time of nows; for things are in succession if there is nothing of their own kind intermediate between them, whereas intermediate between points there is always a line and between nows a period of time.

Again, they could be divided into indivisibles, since each is divisible into the parts of which it is composed. But, as we saw, no continuous thing is divisible into things without parts.

Nor can there be anything of any other kind between; for it would be either indivisible or divisible, and if it is divisible, divisible either into indivisibles or into divisibles that are always divisible, in which case it is continuous.

Moreover, it is plain that everything continuous is divisible into divisibles that are always divisible; for if it were divisible into indivisibles, we should have an indivisible in contact with an indivisible, since the extremities of things that are continuous with one another are one and are in contact.

The same reasoning applies equally to magnitude, to time, and to motion: either all of these are composed of indivisibles and are divisible into indivisibles, or none. This may be made clear as follows. If a magnitude is composed of indivisibles, the motion over that magnitude must be composed of corresponding indivisible motions: e.g. if the magnitude ABC is composed of the indivisibles A, B, C, each corresponding part of the motion DEF of Z over ABC is indivisible. Therefore, since where there is motion there must be something that is in motion, and where there is something in motion there must be motion, therefore the being-moved will also be composed of indivisibles. So Z traversed A when its motion was D, B when its motion was E, and C similarly when its motion was F. Now a thing that is in motion from one place to another cannot at the moment when it was in motion both be in motion and at the same time have completed its motion at the place to which it was in motion (e.g. if a man is walking to Thebes, he cannot be walking to Thebes and at the same time have completed his walk to Thebes); and, as we saw, Z traverses the partless section A in virtue of the presence of the motion D. Consequently, if Z actually passed through A after being in process of passing through, the motion must be divisible; for at the time when Z was passing through, it neither was at rest nor had completed its passage but was in an intermediate state; while if it is passing through and has completed its passage at the same time, then that which is walking will at the moment when it is walking have completed its walk and will be in the place to which it is walking; that is to say, it will have completed its motion at the place to which it is in motion. And if a thing is in motion over the whole ABC and its motion is DEF, and if it is not in motion at all over the partless section A but has completed its motion over it, then the motion will consist not of motions but of movings, and will take place by a thing's having completed a motion without being in motion; for on this assumption it has completed its passage through A without passing through it. So it will be possible for a thing to have completed a walk without ever walking; for on this assumption it has completed a walk over a particular distance without walking over that distance. Since, then, everything must be either at rest or in motion, and it is therefore at rest in each of A, B, and C, it follows that a thing can be at the same time continuously at rest and in motion; for, as we saw, it is in motion over the whole ABC and at rest in any part (and consequently in the whole) of it. Moreover, if the indivisibles composing DEF are motions, it would be possible for a thing in spite of the presence in it of motion to be not in motion but at rest; while if they are not motions, it would be possible for motion to be composed of something other than motions.

And if length and motion are thus indivisible, it is similarly necessary that time also be indivisible, that is to say be composed of indivisible nows; for if every motion is divisible and bodies of equal velocity will move less in less time, the time must also be divisible; and if the time in which a thing is carried over A is divisible, A must also be divisible.

2. And since every magnitude is divisible into magnitudes — for we have shown that it is impossible for anything continuous to be composed of indivisible parts, and every magnitude is continuous — it necessarily follows that the quicker of two things traverses a greater magnitude in an equal time, an equal magnitude in less time, and a greater magnitude in less time, in conformity with the definition sometimes given of the quicker. Suppose that A is quicker than B. Now since of two things that which changes sooner is quicker, in the time FG, in which A has changed from C to D, B will not yet have arrived at D but will be short of it: so that in an equal time the quicker will pass over a greater magnitude. More than this, it will pass over a greater magnitude in less time; for in the time in which A has arrived at D, B being the slower has arrived, let us say, at E. Then since A has occupied the whole time FG in arriving at D, it will have arrived at H in less time than this, say FJ. Now the magnitude CH that A has passed over is greater than the magnitude CE, and the time FJ is less than the whole time FG; so that the quicker will pass

over a greater magnitude in less time. And from this it is also clear that the quicker will pass over an equal magnitude in less time than the slower. For since it passes over the greater magnitude in less time than the slower, and (regarded by itself) passes over the greater in more time than the lesser — LM than LN —, the time PR in which it passes over LM will be more than the times PS in which it passes over LN: so that, the time PR being less than the time T in which the slower passes over LN, PS will also be less than T; for it is less than PR, and that which is less than something less is also itself less. Hence it will traverse an equal magnitude in less time. Again, since the motion of anything must always occupy either an equal time or less or more time, and since, whereas a thing is slower if its motion occupies more time and of equal velocity if its motion occupies an equal time, the quicker is neither of equal velocity nor slower, it follows that the motion of the quicker can occupy neither an equal time nor more time. It can only be, then, that it occupies less time, and thus it is necessary that the quicker will pass over an equal magnitude too in less time.

And since every motion is in time and a motion may occupy any time, and the motion of everything that is in motion may be either quicker or slower, both quicker motion and slower motion may occupy any time: and this being so, it necessarily follows that time also is continuous. By continuous I mean that which is divisible into divisibles that are always divisible: and if we take this as the definition of continuous, it follows necessarily that time is continuous. For since it has been shown that the quicker will pass over an equal magnitude in less time than the slower, suppose that A is quicker and B slower, and that the slower has traversed the magnitude CD in the time FG. Now it is clear that the quicker will traverse the same magnitude in less time than this: let us say in the time FH. Again, since the quicker has passed over the whole CD in the time FH, the slower will in the same time pass over CJ, say, which is less than CD. And since B, the slower, has passed over CJ in the time FH, the quicker will pass over it in less time: so that the time FH will again be divided. And if this is divided the magnitude CJ will also be divided in the same ratio; and again, if the magnitude is divided, the time will also be divided. And we can carry on this process for ever, taking the slower after the quicker and the quicker after the slower, and using what has been demonstrated; for the quicker will divide the time and the slower will divide the length. If, then, this alternation always holds good, and at every turn involves a division, it is evident that all time must be continuous. And at the same time it is clear that all magnitude is also continuous; for the divisions of which time and magnitude respectively are susceptible are the same and equal.

Moreover, the current arguments make it plain that, if time is continuous, magnitude is continuous also, inasmuch as a thing passes over half a given magnitude in half the time, and in general over a less magnitude in less time; for the divisions of time and of magnitude will be the same. And if either is infinite, so is the other, and the one is so in the same way as the other; i.e. if time is infinite in respect of its extremities, length is also infinite in respect of its extremities; if time is infinite in respect of divisibility, length is also infinite in respect of divisibility; and if time is infinite in both respects, magnitude is also infinite in both respects.

Hence Zeno's argument makes a false assumption in asserting that it is impossible for a thing to pass over or severally to come in contact with infinite things in a finite time. For there are two ways in which length and time and generally anything continuous are called infinite: they are called so either in respect of divisibility or in respect of their extremities. So while a thing in a finite time cannot come in contact with things quantitatively infinite, it can come in contact with things infinite in respect of divisibility; for in this sense the time itself is also infinite: and so we find that the time occupied by the passage over the infinite is not a finite but an infinite time, and the contact with the infinities is made by means of moments not finite but infinite in number.

The passage over the infinite, then, cannot occupy a finite time, and the passage over the finite cannot occupy an infinite time: if the time is infinite the magnitude must be infinite also, and if the magnitude is infinite, so also is the time. Let AB be a finite magnitude, and an infinite time C, and let a finite period CD of the time be taken. Now in this period the thing will pass over a certain segment of the magnitude: let BE be the segment that it has thus passed over. (This will be either an exact measure of AB or less or greater than an exact measure: it makes no difference which it is.) Then, since a magnitude equal to BE will always be passed over in an equal time, and BE

measures the whole magnitude, the whole time occupied in passing over AB will be finite; for it will be divisible into periods equal in number to the segments into which the magnitude is divisible. Moreover, if it is the case that infinite time is not occupied in passing over every magnitude, but it is possible to pass over some magnitude, say BE, in a finite time, and if this measures the whole, and if an equal magnitude is passed over in an equal time, then it follows that the time too is finite. That infinite time will not be occupied in passing over BE is evident if the time be taken as limited in one direction; for as the part will be passed over in less time than the whole, this must be finite, the limit in one direction being given. The same demonstration will also show the falsity of the assumption that infinite length can be traversed in a finite time. It is evident, then, from what has been said that neither a line nor a surface nor in fact anything continuous can be indivisible.

This conclusion follows not only from the present argument but from the consideration that the opposite assumption implies the divisibility of the indivisible. For since the distinction of quicker and slower may apply to motions occupying any period of time and in an equal time the quicker passes over a greater length, it may happen that it will pass over a length twice, or one and a half times, as great as that passed over by the slower; for their respective velocities may stand to one another in this proportion. Suppose, then, that the quicker has in the same time been carried over a length one and a half times as great, and that the respective magnitudes are divided, that of the quicker into three indivisibles, AB, BC, CD, and that of the slower into two, EF, FG. Then the time may also be divided into three indivisibles; for an equal magnitude will be passed over in an equal time. Suppose then that it is thus divided into KL, LM, MN. Again, since in the same time the slower has been carried over EZ, ZH, the time may also be divided into two. Thus the indivisible will be divisible, and that which has no parts will be passed over not in an indivisible but in a greater time. It is evident, therefore, that nothing continuous is without parts.

Physics, Book VI, § 9
(239b10 p. 404 - 240b7 p. 405)

9. Zeno's reasoning, however, is fallacious, when he says that if everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always in a now, the flying arrow is therefore motionless. This is false; for time is not composed of indivisible nows any more than any other magnitude is composed of indivisibles.

Zeno's arguments about motion, which cause so much trouble to those who try to answer them, are four in number. The first asserts the non-existence of motion on the ground that that which is in locomotion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal. This we have discussed above.

The second is the so-called Achilles, and it amounts to this, that in a race the quickest runner can never overtake the slowest, since the pursuer must first reach the point whence the pursued started, so that the slower must always hold a lead. This argument is the same in principle as that which depends on bisection, though it differs from it in that the spaces with which we have successively to deal are not divided into halves. The result of the argument is that the slower is not overtaken; but it proceeds along the same lines as the bisection-argument (for in both a division of the space in a certain way leads to the result that the goal is not reached, though the Achilles goes further in that it affirms that even the runner most famed for his speed must fail in his pursuit of the slowest), so that the solution too must be the same. And the claim that that which holds a lead is never overtaken is false: it is not overtaken while it holds a lead; but it is overtaken nevertheless if it is granted that it traverses the finite distance. These then are two of his arguments.

The third is that already given above, to the effect that the flying arrow is at rest, which result follows from the assumption that time is composed of moments: if this assumption is not granted, the conclusion will not follow.

The fourth argument is that concerning equal bodies which move alongside equal bodies in the stadium from opposite directions — the ones from the end of the stadium, the others from the middle — at equal speeds, in which he thinks it follows that half the time is equal to its double.

The fallacy consists in requiring that a body traveling at an equal speed travels for an equal time past a moving body and a body of the same size at rest. That is false. E.g. let the stationary equal bodies be AA; let BB be those starting from the middle of the A's (equal in number and in magnitude to them); and let CC be those starting from the end (equal in number and magnitude to them, and equal in speed to the B's). Now it follows that the first B and the first C are at the end at the same time, as they are moving past one another. And it follows that the C has passed all the A's and the B half; so that the time is half, for each of the two is alongside each for an equal time. And at the same time it follows that the first B has passed all the C's. For at the same time the first B and the first C will be at opposite ends, being an equal time alongside each of the B's as alongside each of the A's, as he says, because both are an equal time alongside the A's. That is the argument, and it rests on the stated falsity.

Nor in reference to contradictory change shall we find anything impossible — e.g. if it is argued that if a thing is changing from not-white to white, and is in neither condition, then it will be neither white nor not-white; for the fact that it is not wholly in either condition will not preclude us from calling it white or not-white. We call a thing white or not-white not because it is wholly either one or the other, but because most of its parts or the most essential parts of it are so: not being in a certain condition is different from not being wholly in that condition. So, too, in the case of being and not-being and all other conditions which stand in a contradictory relation: while the changing thing must of necessity be in one of the two opposites, it is never wholly in either.

1.6 Gottfried Leibniz

I am so in favor of the actual infinite that instead of admitting that Nature abhors it, as is commonly said, I hold that Nature makes frequent use of it everywhere, in order to show more effectively the perfections of its Author. Thus I believe that there is no part of matter which is not — I do not say divisible — but actually divisible; and consequently the least particle ought to be considered as a world full of an infinity of different creatures

*Leibniz*²²

Dentre os autores modernos que discutiram em profundidade o problema do infinito, tais como Descartes, Pascal e Spinoza, colocamos em destaque apenas o nome de Gottfried Leibniz (1646 – 1716), já que foi o único dentre eles a propor um *cálculo* para, ou sobre, o infinito — o *cálculo infinitesimal* — e a introduzir matematicamente, por meio dele, o conceito de *grandeza infinita*.

Seu sistema de pensamento é bastante abrangente, envolvendo não só a lógica e a matemática, mas também a física, a moral e a metafísica. Suas incursões nesses campos aparentemente distintos tiveram como objetivo obter um pensamento único, fundado no ideal de um conhecimento completo que estaria de acordo com um mesmo registro filosófico.

Segundo esse registro, as grandes questões universais como, por exemplo, o problema da liberdade humana, tem sua origem e solução em uma investigação sobre o infinito. De modo que não há qualquer possibilidade de se investigar séria e

²² Citado por Cantor 1883l, p.179.

critérios as questões metafísicas sem se deparar com a análise mais fundamental de todas, qual seja, aquela que versa sobre os contornos do Ser.

Mes méditations fondamentales roulent sur deux choses, savoir sur l'unité et sur l'infini.

(Leibniz, citado por Bourbague 1993, p.6)

Uma filosofia deve, segundo Leibniz, ser uma *Scientia Infiniti*²³; isto é, ela deve propiciar um acordo sobre a existência do infinito e sobre a forma de como podemos nos expressar rigorosamente sobre ele. Só assim, as outras problemáticas filosóficas ganharão o foco correto e, só assim, poder-se-á vislumbrar alguma perspectiva para elas que não redunde em novas aporias.

A perspectiva matemática que Leibniz confere à sua própria análise sobre o infinito, principalmente através de sua formulação do *cálculo infinitesimal*, aparece como uma maneira de remediar uma situação que vinha se repetindo por toda a Idade Média e que não se mostrou muito inovadora na Renascença.

A metafísica estava sobrecarregada de afirmações cujas justificações pareciam se restringir, exclusivamente, a argumentos teológicos. Contudo, para Leibniz, a *filosofia primeira*, a ciência mais fundamental, pois serve de ponto de partida para as outras ciências, deve ter seu uso estendido também para as esferas terrenas do conhecimento. Nesse sentido, acreditava que a metafísica necessitava passar por uma reformulação, de modo a encontrar seu lugar em meio a todas as outras ciências, sejam elas naturais ou exatas (Bourbague 1993).

A justificativa para esse *resgate* da metafísica que Leibniz deseja realizar, está no fato de ser ela, justamente, aquela teoria geral que determina os parâmetros sobre a existência em sentido bastante amplo. Isto é, sem a formulação do conceito central de *substância*, sobre o qual encontramos apoiado o de *Ser*, o de *identidade*, o de *movimento*, o de *tempo*, entre outros, não haveria possibilidade de criar uma fundamentação, um mesmo vocabulário, para as investigações em física, em moral ou, até mesmo, em matemática.

Criar uma unidade ontológica para os diversos aspectos do conhecimento humano é um dos principais objetivos de Leibniz. E essa unidade só pode ser alcançada

²³ Título de uma das obras jamais publicadas por Leibniz.

com o resgate da metafísica através de sua reformulação em termos mais precisos.

Fornecer uma argumentação matemática para o infinito significava também restabelecer à razão um poder e um alcance deixado na antiguidade clássica. Nesse sentido, também Leibniz se verá envolto com teses platônicas e aristotélicas. É com a reapresentação dessas teses, através de uma cuidadosa investigação matemática, que uma nova metafísica poderá surgir como ciência unificadora.

Leibniz se propõe a reformar a filosofia e a resgatar a antiga força daqueles resultados mais fundamentais, cujo exemplo mais poderoso é a filosofia grega. Portanto, é sobre a metafísica que todas as preocupações devem se voltar, no sentido de encontrar uma teoria que forneça uma unidade de discurso para a filosofia e para as ciências (Bourbague 1993).

Os infinitesimais e a idéia de limite aparecem para os entusiastas do projeto leibniziano como úteis ferramentas em questões de ordem metafísica, física, moral, etc. Para esses entusiastas tanto a química e a biologia, assim como aquelas ciências mais de acordo com os aspectos sociais e humanos, como a história, podem se beneficiar grandemente por meio dessas analogias com o *cálculo*, principalmente através de uma reinterpretação de suas proposições atômicas em termos de *variáveis diferenciais e integrais*.

Seja em questões relativas ao nascimento e à morte, ou aquelas ligadas à liberdade, assim como em tudo que possa envolver a determinação de um começo e um fim, a introdução das grandezas diferenciais, na forma da notação “ dx ”, abre espaço para a formulação de raciocínios por analogia ao *cálculo*.

Porém, Leibniz se mostra cauteloso em assumir uma ligação mais explícita e direta entre problemas tidos como puramente filosóficos, ou metafísicos, e o *cálculo*. Mesmo assim, a mera sugestão dessas aproximações em suas incursões metafísicas lhe renderam pesadas críticas, principalmente advindas de d’Alembert, que lhes atribuiu o predicado de “abusivas” (d’Alembert 1998) já que não se submetem aos princípios claros e bem determinados ditados pela prudência do raciocínio científico.

Para o enciclopedista, Leibniz não só ultrapassou as fronteiras que a ciência aconselha jamais atravessar, como também não compreendeu que o infinito não se submete livremente, dada a natureza mesma do conceito, a abordagens que estão para

além das demarcações fornecidas pelo *cálculo diferencial*, principalmente por meio a idéia de *limite*.

O exemplo mais claro do que d'Alembert pretende dizer com as expressões *metafísica legítima* e *metafísica abusiva* pode ser obtido, justamente, na contraposição entre as versões de Leibniz e de Newton para o *cálculo*. Está claro para ele que, ao contrário de Leibniz, Newton submete suas assunções metafísicas às exigências do método científico. Exemplo disso está, justamente, na ênfase que cada um dá a aspectos distintos em suas versões para o *cálculo*.

Enquanto Newton dá prioridade ontológica às relações entre as grandezas, culminando na idéia de *limite*, em Leibniz o foco não está nas relações, mas nas grandezas elas mesmas, que apresentam um tipo de *existência* independente, pré-teórica. Para d'Alembert, as assunções de Leibniz, a afirmação da existência dessas grandezas infinitamente pequenas, está para além do alcance de uma análise rigorosa e, por esse motivo, sua metafísica merece o adjetivo de “abusiva” (Bourbage 1993).

Para d'Alembert, em Newton encontramos uma teoria sobre os *limites*, que é bastante coerente com a exigência de assunções metafísicas claras e estritamente necessárias para o bom desenvolvimento de sua teoria; em Leibniz encontramos uma teoria que postula a existência dos *infinitesimais*, como misteriosas entidades que, por esse motivo, fazem parte de uma prática metafísica que excede os critérios de precisão e economia científica (Bourbage 1993).

Nessa linha argumentativa, d'Alembert assevera que a verdadeira metafísica, aquela que serviria de fundamento para o *cálculo diferencial* — uma metafísica legítima e não abusiva, já que não extrapola uma base finita para o raciocínio —, só pode ser encontrada na versão newtoniana do cálculo.

Ainda na linha crítica de d'Alembert, a adoção dos infinitesimais tornou o sistema de Leibniz obscuro e místico. São muitos os momentos de dubiedade em suas afirmações como quando, por exemplo, este se pergunta se o infinito seria um predicado exclusivamente divino ou se poderia ser entendido como um atributo fundamental da natureza. Para d'Alembert, esse tipo de questionamento abre espaço para interpretações que estão muito além do trabalho científico.

Ainda que Leibniz não possa ser acusado de praticar um realismo ingênuo com

as afirmações sobre os infinitesimais, assim como parece acreditar d'Alembert, nem por isso se pode concluir que esses infinitesimais são apenas nomes sem qualquer referência no mundo.

Para Leibniz, ainda que o pensamento se baseie antes numa espécie de cálculo do que na intuição, não há, todavia, cálculo sem que haja, primeiro, uma intuição qualquer do mundo. Deve haver, portanto, alguma *intuição prévia* para a afirmação dos infinitesimais.

A tentativa de renovação da metafísica realizada por Leibniz revitaliza, como não poderia deixar de fazê-lo, a questão muito fundamental sobre a realidade primeira de todas as coisas, isto é, sobre o conceito de substância.

Parte dessa revitalização é a adoção do conceito de *mônada*, como elemento fundamental, princípio da existência de todas as coisas para além do qual nada conhecemos.

Uma teoria sobre a existência e a dinâmica dessa substância, a *monadologia*, será o alicerce de toda metafísica leibniziana e, por consequência, de todos os outros resultados em física, em moral, em matemática ou em qualquer outra parte.

Antes, no entanto, é necessário entendermos os diversos usos que Leibniz faz do conceito de infinito que está, como podemos presumir, intrincado nesta teoria monadológica.

Em primeiro lugar, infinito é um predicado que decorre naturalmente da própria assunção da existência de Deus. Neste caso, infinito é a idéia mesma de perfeição. O que é perfeito deve ser infinito e, reciprocamente, o infinito, por tudo abarcar, é a própria perfeição. Deus é o *Princípio de Razão Suficiente*, sem o qual o mundo cairia na absoluta contingência. A sua existência infinita, como causa primeira, à Aristóteles, paradoxalmente, põe fim a um regresso infinito que deixaria órfã toda causalidade.

Uma vez assumida a existência de Deus, Leibniz deduz uma infinidade de mundos possíveis sendo, cada um deles, por si mesmos, infinitos. Essa infinitude, contudo, nunca ultrapassa a capacidade de Deus em compará-los para verificar a qual dessas infinidades possíveis será dada a realidade da concretização em um determinado universo.

L'infinité des possibles, quelque grande qu'elle soit, ne l'est pas plus que celle de la sagesse de Dieu, qui connaît tous les possibles. On peut même dire que si cette sagesse ne surpasse point les possibles extensivement, puisque les objets de l'entendement ne sauraient aller au-delà du possible, qui en un sens est seul intelligible, elle les surpasse intensivement, à cause des combinaisons infiniment infinies qu'elle en fait, et d'autant des réflexions qu'elle fait là-dessus. La sagesse de Dieu, non contente d'embrasser tous les possibles, les pénètre, les compare, les pèse les uns contre les autres, pour en estimer les degrés de perfection ou d'imperfection, le fort et le faible, le bien et le mal; elle va même au-delà des combinaisons finies, elle en fait une infinité d'infinies, c'est-à-dire une infinité de suites possibles de l'univers, dont chacune contient une infinité de créatures; et par ce moyen, la sagesse divine distribue tous les possibles qu'elle avait envisagés à part, en autant de systèmes universels, qu'elle compare encore entre eux; et le résultat de toutes ces comparaisons et réflexions est le choix du meilleur d'entre tous ces systèmes possibles...

(Leibniz citado por Bourbage 1993, p.24-5)

É importante notar que Leibniz concebe uma infinidade de possíveis infinitos, cada um deles distintos entre si, e ainda assim, passíveis de serem agrupados e comparados. O que devemos entender por isso é que o entendimento divino é capaz de realizar uma manobra de comparação e de combinação que ultrapassa *intensivamente* a possibilidade desses sistemas infinitos; isto é, a própria criação infinita é fruto de um cálculo que manipula uma infinidade de infinitos.

O terceiro uso faz referência à substância. Isto é, o infinito não é um atributo exclusivo de Deus, mas a substância, as mônadas, que existem realmente como seres, ou átomos espirituais, são em número infinito. Cada uma delas, em sua singularidade e unicidade, é capaz de representar todo o universo. Em cada mônada se reúne aquilo que pode definir o finito e o infinito de uma única vez. E, se nos permitimos usar de uma expressão tipicamente leibniziana, uma mônada é *um espelho capaz de refletir o universo em sua totalidade infinita*.

Toute substance est comme un monde entier et comme un miroir de Dieu ou bien de tout l'univers, qu'elle exprime chacune à sa façon, à peu près comme une ville est diversement représentée selon les différentes situations de celui qui la regarde.

(Leibniz citado por Bourbage 1993, p.27)

Na metafísica de Leibniz não há uma oposição radical entre finito e infinito. Cada substância é, em si mesma, um mundo que reúne todas as possibilidades de consideração sobre o finito e o infinito.

Chaque portion de la matiere n'est pas seulement divisible à l'infini, comme les Anciens l'ont reconnu, mais encore sous-divisée actuellement sans fin, chaque partie en parties, dont chacune a quelque mouvement propre, autrement il serait impossible que chaque portion de la matière pût exprimer tout l'univers... Chaque portion de la matière peut-être considérée comme un jardin plein de plantes, et comme un étang plein de poissons. Mais chaque rameau de la plante, chaque membre de l'animal, chaque goutte de ses humeurs est encore un tel jardin ou un tel étang.

(Leibniz citado por Bourbage 1993. p.32)

E uma vez que cada parte contém, em si mesma, o infinito, um processo infinito de divisão é possível. Está claro para Leibniz que jamais obterá êxito aquele que desejar concluir que a matéria possua uma menor parte. O processo de divisão infinito revela que a matéria, como tudo o mais, é apenas um fenômeno. Um fenômeno não pode possuir uma menor parte material, pois cada parte material é em si um infinito, mas pode e deve possuir um fundamento, ou uma causa, uma unidade substancial.

Pour parler précisément, la matière n'est pas composée d'unités constitutives, mais elle en résulte, puisque la matiere ou masse étendue n'est qu'un phénomène fondé dans les choses comme l'arc-en-ciel ou le parhélie, et toute réalité n'appartient qu'à des unités. Les phénomènes peuvent donc toujours être divisés en phénomènes plus petits qui pourraient apparaître à d'autres animaux plus petits, mais jamais on ne parviendra à des phénomènes qui seraient les plus petits. En fait les Unités substantielles ne sont pas les parties, mais les fondements des phénomènes.

(Leibniz citado por Bourbage 1993, p.33)

Contra o cartesianismo vigente, que considerava a idéia do infinito potencial por demais obscura, Leibniz recupera a argumentação aristotélica, contudo de maneira revisada. Assim, o infinito deve também possuir uma existência potencial, já que permite um regresso ou um avanço que, em comunhão com o tempo, se estende como um processo que não conhece limite.

No entanto, ao lado desse infinito potencial, Leibniz também se posiciona a favor do infinito atual. As próprias operações de adição e de divisão se tornam peças de argumentação em favor dele.

A própria possibilidade de realização dessas operações já demonstraria que deve existir uma realidade pré-teórica por elas desvelada e sobre a qual se projetam.

Dividir continuamente pressupõe algo a ser dividido. É porque o mundo é infinito em todas as suas possibilidades que torna possível a realização dessas operações ao infinito. E a existência prévia de um mundo infinito é condição de possibilidade de um

procedimento infinito de divisão e adição.

O infinito potencial, ou matemático, reafirma a existência do infinito atual, ou metafísico. Isto é, para Leibniz, esses dois tipos de infinito não são opostos, ou excludentes, mas são modos distintos de descrever uma mesma realidade. A argumentação matemática pode tentar se aproximar, a seu modo, principalmente pelo recurso aos infinitesimais, de uma realidade que é, em essência, infinita (Bourbague 1993).

Mesmo tendo consciência do gênero de pressupostos implícitos na assunção dos infinitesimais, Leibniz ressalta que o rigor dos procedimentos que levam a esses resultados não pode ser questionado. Para ele, esse rigor garante a validade dos resultados e a veracidade dos pressupostos. Assim, ao contrário das restrições que comumente se faziam à análise que ele oferecia, os infinitesimais não são apenas um mero jogo de palavras, mas se referem a uma realidade que eles próprios se encarregam de revelar por meio do *cálculo*.

Movimento, velocidade e força são aspectos de uma mesma realidade e, como grandezas contínuas, serão melhor mensuráveis por meio do tipo de análise tornada possível através do apelo aos infinitesimais. Contudo, Leibniz resiste fortemente a concluir que existam, de fato, elementos materiais infinitamente pequenos.

Como já salientamos acima, as mônadas se referem a um *princípio* do fenômeno, que não pode ser identificado com o átomo. Isso leva a um posicionamento bastante complexo. Se por um lado os infinitesimais não são apenas nomes, em um jogo de palavras sem referência na realidade, por outro lado esses mesmos infinitesimais não cumprem outro papel senão tornar possível, no seio da matemática, a análise do infinitamente pequeno.

A nova metafísica não é o *cálculo*, este pode servir de ferramenta a ela, mas apenas no sentido de tornar mais clara e precisa uma linguagem matemática sobre o conceito de infinito. Há uma independência entre a matemática e a metafísica que deve ser mantida, para que a seriedade desses dois conjuntos teóricos seja preservada.

Aqueles que se viram tentados, como Fontenelle, a enxergar no cálculo uma ciência matemática sobre a realidade primeira, como uma *metafísica formal do infinitamente pequeno*, viram-se frustrados com as declarações de Leibniz que chamavam a atenção para o erro que residia em alimentar tais esperanças.

J'attends vos belles méditations sur l'infini ou infiniment petit. Il est vrai que chez moi, les infinis ne sont pas des tous et les infiniment petits ne sont pas des grandeurs. Ma métaphysique les bannit de ses terres. Elle ne leur donne retraite que dans les espaces imaginaires du calcul géométrique, ou ces notions ne sont de mise que comme les racines qu'on appelle imaginaires.

La part que j'ai eu à faire valoir le calcul des infinitésimales ne m'en rend pas assez amoureux pour les pousser au-delà du bon sens. Et la vraie métaphysique ou philosophie si vous voulez ne me paraît pas moins importante que la géométrie, surtout s'il y a moyen d'y introduire aussi les démonstrations qui n'en ont été que trop bannies jusqu'ici, avec le calcul qui sera nécessaire pour leur donner toute l'entrée dont elles ont besoin...

Entre nous je crois que M. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il voulait faire des éléments métaphysiques de notre calcul. Pour dire le vrai, je ne suis pas trop persuadé moi-même, qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses idéales ou des fictions bien fondées. Je crois qu'il n'y a point de créature au-dessous de laquelle il n'y ait une infinité de créatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ni même qu'il puisse y en avoir d'infiniment petites, et c'est ce que je crois pouvoir démontrer. Il est que les substances simples (c'est-à-dire qui ne sont pas des êtres par agrégation) sont véritablement indivisibles, mais elles sont immatérielles, et ne sont que principes d'action...

(Leibniz citado por Bourbague 1993, p.99)

A independência operacional do cálculo em relação à metafísica, tornando-o praticamente imune às interpretações realistas oferecidas para os infinitesimais — como, por exemplo, a de serem os infinitesimais os legítimos representantes, no reino científico, para entidades muito fundamentais postuladas pela filosofia —, não isola em definitivo essas duas formas de conhecimento, pelo menos não no entender de Leibniz, que continua acreditando na possibilidade de fornecer uma linguagem rigorosa para a metafísica.

Para Leibniz os infinitesimais não são quantidades determinadas. Referir-se a eles como *infinitamente pequenos*, ou como *coisas*, ou ainda como quantidades determinadas, não revela nada mais que expressões, ou maneiras de falar, que podem se tornar úteis em algum nível interpretativo, como imagens que ajudam na compreensão de sua metafísica. Mas essas ficções carecem de rigor e não apresentam qualquer relação mais estreita com os infinitesimais *stricto senso*, senão aquela fornecida pelo uso metafórico livre.

É o próprio processo de diferenciação de grandezas que caracteriza os

infinitesimais (Bourbague 1993). Assim, é necessário ter em mente que os infinitesimais só podem ser considerados, ou expressos, como infinitamente pequenos quando colocados nessa relação com grandezas determinadas. Ou seja, eles não possuem uma existência independente. Sua existência está condicionada à determinação dessas grandezas e ao processo de diferenciação entre elas.

Os infinitesimais só existem relativamente a parâmetros dados pelo contexto matemático no qual estão inseridos. Isto está bastante longe de tratá-los como o fundamento último das grandezas, como a parte infinitamente pequena que as compõem. Essa diferença de tratamento é justamente aquela que está na base da distinção entre um infinito atual e um infinito potencial. O primeiro possui uma existência pré-teórica, absoluta, independente, o segundo só existe em relação a um procedimento intelectual inserido no tempo.

1.7 Immanuel Kant

Encerramos nossa exígua discussão histórica sobre as possibilidades conceituais do infinito com o filósofo de Königsberg, Immanuel Kant (1724 – 1804). O núcleo de sua obra se concentra em seus *escritos críticos*, *A Crítica da Razão Pura*, *A Crítica da Razão Prática* e a *Crítica do Juízo*.

Sem nos determos nos muitos e importantes elementos que constituem a sua doutrina filosófica, limitar-nos-emos apenas em apontar um pequeno momento de seu *criticismo*, mais precisamente aquele em que a histórica argumentação acerca das possibilidades da idéia de infinito ressurgiu de maneira mais explícita e reveladora. Estamos falando de suas *Antinomias da razão pura*, localizadas na *Crítica da Razão Pura*²⁴.

Com a apresentação das duas primeiras *Antinomias*, Kant acredita fornecer um *fecho crítico*, por assim dizer, à uma controvérsia que se prolongou por mais de dois mil anos em torno do conceito de infinito. Essa controvérsia diz respeito, em parte, às antigas disputas cosmológicas que observamos se desenvolver com os *Antigos* e que se arrastou até os dias de Kant sem uma solução definitiva, são elas: sobre se o espaço e o tempo

²⁴ Mais precisamente localizada na *Doutrina Transcendental dos Elementos*, *Lógica Transcendental*, *Dialética Transcendental*, Livro Segundo: *Raciocínios Dialéticos da Razão Pura*, Cap. II.

podem ser considerados infinitamente grandes e se matéria pode ser considerada infinitamente divisível.

Kant pretende mostrar que essa é uma disputa mal fundada. Isto é, devido à ausência até então de uma crítica da razão pura, não se percebeu que tanto a tese como a antítese desse debate podem ser demonstradas verdadeiras. De modo que, no entender de Kant, esse é um debate inócuo pois as afirmações contrárias possuem o mesmo peso e, assim sendo, anulam-se mutuamente, conduzindo os debatedores sempre ao ponto em que já se encontravam antes de iniciar a disputa. Ou seja, nada se ganha com esse debate a não ser o conhecimento de que é uma discussão que necessita de uma crítica mais fundamental.

Primeira antinomia da razão pura

(A) Tese: O mundo tem um começo no tempo e é limitado no espaço.

(B) Antítese: O mundo não tem nem começo no tempo nem limites no espaço.

Essa primeira antinomia se refere à disputa entre aqueles que defendem um mundo infinitamente grande, seja no tempo, seja no espaço e aqueles outros que afirmam que o mundo é finito espacial e temporalmente.

As argumentações kantianas utilizam o método de prova por absurdo e, no mais das vezes, apresentam-se em duas etapas. No caso da primeira antinomia, a etapa inicial se refere à finitude ou infinitude temporal do mundo e a segunda etapa se refere à sua finitude ou infinitude espacial.

(A') O mundo tem um começo no tempo. (O mundo é finito no tempo)²⁵

Para Kant uma série infinita de estados de coisas no mundo é caracterizada pela impossibilidade de se realizar, em qualquer instante dado, uma síntese dessa série. Contudo, assumindo-se que o mundo não tenha um começo, isto é, assumindo-se que o mundo seja temporalmente infinito, então qualquer estado de coisas no mundo, tomado arbitrariamente em um instante qualquer, poderia ser considerado uma síntese de uma série infinita de estados de coisas, uma vez que todo instante é precedido por uma série temporal que não conhece começo. Contudo, isto não é possível, logo o mundo deve ser

²⁵ Tanto as teses com as antíteses, assim como suas respectivas argumentações, aparecem de maneira simplificada em nosso texto. Ao lado de cada tese e de cada antítese, apresentamos entre parênteses a nossa interpretação para elas.

temporalmente finito.

(A'') O mundo possui limites no espaço. (O mundo é finito no espaço)

Assumindo-se que o mundo não possua limites no espaço, então o mundo é uma totalidade infinita de coisas existentes a um só tempo. Mas se assim o fosse, a síntese das infinitas partes que compõem o mundo deveria ser realizada de uma única vez por nossa intuição sensível. Contudo, essa síntese não é ela mesma uma parte do mundo, mas é obtida por uma adição, contínua e infinita, de coisas umas às outras. Então, é necessário que essa síntese seja conquistada em uma sucessão temporal que deve ser infinita para poder abarcar a quantidade infinita de objetos do mundo. Mas isto não é possível, já que tal síntese requer que uma sucessão temporal infinita seja completada o que, por (A') se mostrou impossível. Logo, o mundo deve possuir limites espaciais.

(B') O mundo não tem começo no tempo. (O Mundo é infinito no tempo)

Supondo que o mundo teve um começo, então deve ter havido um tempo no qual o mundo ainda não existia. Kant chama a isso um tempo nulo. Um tempo nulo é completamente indiferenciado com relação às suas partes, nenhuma delas apresentando distinção ou preferência sobre qualquer outra, de modo que não há nada no tempo nulo que propicie o nascimento do que quer que seja, já que não há nada nesse tempo que faça a existência prevalecer sobre a não-existência. Assim sendo, dado que o mundo existe, nunca deve ter havido tal tempo nulo, e nem um começo para o mundo.

(B'') O mundo não é limitado no espaço. (O mundo é infinito no espaço)

Assumindo-se que o mundo seja finito no espaço, então o mundo está contido em um espaço que, para além dos limites do mundo, é vazio. Esse espaço vazio ofereceria limites ao mundo, relacionando-se com ele pela imposição dessa limitação. Contudo, nesse espaço vazio nada pode haver, e por esse motivo não pode ser estabelecida a dita relação entre o mundo e o espaço vazio que o contém por suposição. Essa relação não existe, não podendo, pois, o espaço vazio impor limites ao mundo. Portanto, o mundo não conhece limite no espaço, é infinito no espaço.

Segunda antinomia da razão pura

(A) Tese: Toda substância composta é constituída por partes simples e não existe

nada além de substâncias simples ou compostas.

(B) Antítese: Nenhuma coisa composta é constituída por partes simples, nem existem tais coisas como partes simples.

A segunda antinomia se refere ao debate entre aqueles que pretendem que o infinito exista por divisão contínua e aqueles que não concordam que algo possa ser dividido infinitamente. O que está em jogo aqui é o infinito por divisão contínua ou, em outras palavras, se há algo que possa ser conhecido como a *menor parte*, ou *parte simples*.

(A) As partes simples existem. (O infinito por divisão contínua não é possível)

Supondo o contrário, isto é, que não existam tais coisas como *partes simples*, e se realizarmos um esforço de abstração para eliminar qualquer substância composta, então nada restaria. Porém, dado que é impossível realizar tal processo de abstração, uma vez que o resultado disso é o nada, então deve haver algo que sempre resiste ao processo de decomposição. Logo o simples deve existir e o que podemos inferir disso é que não existe o infinito por divisão contínua.

(B) Não existem partes simples. (O infinito por divisão contínua é possível)

Kant inicia sua argumentação supondo que existam substâncias compostas por partes simples. Assim, como todo composto só pode existir no espaço, possuindo um número de partes simples equivalente ao espaço por ele ocupado, então a cada uma dessas partes simples devem corresponder uma determinada posição no espaço. Mas se as partes simples ocupam um lugar no espaço, como coisas reais, então cada uma dessas partes simples deve possuir tantas partes quanto o espaço que ocupam. Mas disso se deriva que o simples é composto, o que é absurdo.

Mais do que isso, o simples não pode ser objeto da experiência possível. Isto é, não é possível uma intuição do simples. Todos os fenômenos se apresentam à nossa intuição como diversidades constituídas por elementos exteriores uns aos outros, que somente aparecem como unidades pela síntese promovida pela intuição e pelo entendimento. Porém o simples subsiste como mera *idéia*, por meio da qual a síntese do múltiplo é possível. Em decorrência da impossibilidade da experiência do simples, deduz-se que o infinito por divisão contínua é possível.

Nas duas antinomias acima, o que vemos é a reformulação, sempre presente, da antiga disputa entre os que defendem o infinito como algo efetivo e os que fazem restrições a ele. À época de Kant, esse debate tradicionalmente metafísico havia recentemente sido incrementado com a instrumentação matemática oferecida pelo *cálculo diferencial*, com Leibniz e Newton.

Contudo, Kant estava convicto de que, tanto os seguidores de Newton como os de Leibniz não haviam realizado a crítica mais fundamental, qual seja, aquela que se pergunta sobre os limites da razão e, por esse motivo, continuamente recorriam aos mesmos argumentos que, ao longo da história, haviam sofrido apenas alterações superficiais, isto é, alterações em sua forma, mas que substancialmente continuavam os mesmos.

Sua conclusão é que esse ancestral debate acerca dessas considerações cosmológicas conectadas ao conceito de infinito é completamente inócuo, na medida em que suas argumentações, sejam elas pró ou contra a existência do infinito, seja com relação ao tempo seja com relação ao espaço, recaem todas no erro de assumirem como premissa justamente aquilo que pretendem justificar. O resultado é uma controvérsia fundada em argumentos sub-reptícios.

Apêndice Medievais e Renascentistas

Aqueles que se propuseram a investigar o *Ser*, viram-se inevitavelmente obrigados a perseguir, em alguma medida, as pegadas deixadas por Platão e Aristóteles. Assim procedendo, forneceram suas próprias contribuições para alargar a compreensão do que, desde então, passou a ser entendido e nomeado por *infinito*; porém, sempre tendo como porto seguro aquilo que foi previamente estabelecido na antiguidade clássica pelos criadores da Academia e do Liceu. Apesar das novas e diversas roupagens que foram conferidas ao termo infinito, o seu núcleo conceitual se manteve praticamente intacto durante a Idade Média e a Renascença.

Por esse motivo, decidimos reunir alguns desses filósofos neste apêndice, mesmo cientes da arbitrariedade que cometemos ao fazê-lo.

Assim procedendo, criamos uma única linha demarcatória, separando aqueles

pensadores que viveram na antiguidade clássica dos que os seguiram. Concentramo-nos em apenas alguns poucos nomes, somente aqueles nos quais percebemos, de maneira praticamente indiscutível, essa síntese entre Platão e Aristóteles.

Casos paradigmáticos dessa síntese são, por exemplo, o de Plotino, de Santo Agostinho, Santo Tomás de Aquino e Nicolau de Cusa. Casos menos evidentes, mas também sintomáticos de uma continuidade do pensamento clássico, são os de Jean Buridan, Duns Scotus, Guilherme de Ockham, Gregório de Rimini, entre outros que, feitas as devidas considerações históricas, acrescentaram, cada um a seu tempo e modo, suas próprias fórmulas às antigas concepções clássicas acerca do infinito (Moore 1990).

Assim, podemos passar imediatamente ao primeiro e, possivelmente, mais sonoro exemplo dessa alternância entre o pensamento platônico e aristotélico. Historicamente localizado entre o final da antiguidade clássica e início do pensamento medieval, Plotino (205 - 270 d.C) nos revela exatamente aquilo que achamos por bem chamar indistintamente de *medievais*, tendo em mente o que dissemos acima acerca do pensamento que se mostra oscilante entre a doutrina platônica e a doutrina aristotélica. Muitas vezes realizando, por meio dessa oscilação, uma síntese que convenientemente afirma ou nega partes dessas doutrinas.

A influência do cristianismo no pensamento de Plotino já anuncia aquilo que se mostrará de maneira ainda mais forte no apogeu da filosofia medieval, que é a busca por uma argumentação filosófica clássica para os ditames cristãos. Toda a discussão sobre o infinito durante a idade média estará relacionada, em graus maiores ou menores, aos argumentos teológicos cristãos (Moore 1990).

Contra o naturalismo aristotélico, Plotino retoma a oposição ‘aparência *versus* realidade’, que animou o cerne da doutrina platônica. Como consequência disso, e em forte comunhão com a doutrina cristã, Plotino irá argumentar no sentido de um infinito atual e completo, nos moldes platônicos (Moore 1990). Ou seja, ele não se mostra avesso, assim como Aristóteles, ao infinito atual metafísico, cuja existência é coerente com o ponto de vista platônico e sumamente necessária a partir dos pressupostos cristãos, que assume a existência da potência única e infinita de Deus como suma verdade.

A infinita potência divina, assumida pelo cristianismo e reforçada pelas teses neo-platônicas, traduz a idéia de um poder infinito e absoluto, concentrado em um *Ser*

perfeito, que contém em si, completamente, uma totalidade infinita. Trata-se aqui de um infinito metafísico, ou atual, e não meramente potencial, ou matemático (como algo que pode ser melhor entendido como um processo que, *in abstracto*, se estende infinitamente sobre o tempo sem nunca se dar por encerrado), como pretendia Aristóteles.

Para Plotino, o infinito é um atributo divino. Deus é o Uno infinito, estando longe da imperfeição do mundo que nos aparece à sensibilidade, longe da geração e da corrupção que acompanha o devir das coisas no mundo. Portanto, esse infinito não pode jamais ser confundido com o infinito concebido por Aristóteles. Ao invés disso, trata-se de uma existência que, em sua atualidade, reúne o infinito inteira e completamente, de uma única vez, longe de qualquer consideração temporal.

De maneira um tanto curiosa, contudo, Plotino adota parte da argumentação aristotélica, contra a existência do infinito atual, mais precisamente aquela que nega sua existência no mundo físico, para reforçar a sua própria concepção platônica do infinito atual em um mundo *supra-sensível*.

É digno de nota que esta estratégia se baseia numa descaracterização da filosofia aristotélica em favor de sua própria argumentação. Isto é, ao rejeitar o infinito atual, Aristóteles toma como princípio uma investigação lógica e empírica, apoiada em uma forte recusa da distinção entre aparência e realidade.

O que Plotino faz, por sua vez, é redirecionar a argumentação aristotélica. Isto é, Plotino usa Aristóteles para reforçar a distinção entre aparência e realidade, resgatando as teses platônicas para sustentar as afirmações cristãs sobre a existência de um mundo não terreno.

Como Aristóteles, Plotino recusa a idéia de um número infinito, ou de corpos com extensão infinita e endossa a natureza infinita do tempo. Porém, como Platão, aceita a distinção entre aparência e realidade, ou entre mundo sensível e mundo inteligível. Associa o infinito potencial às considerações sobre o mundo sensível e sobre a matemática, uma vez que tanto um como outro possuem uma estreita afinidade com processos temporais. Ao mundo inteligível, dada sua imutabilidade e perfeição inerentes, com as quais se identificam as esferas supra-sensíveis ou divinas, Plotino associa o infinito atual.

Podemos encontrar outra síntese semelhante à que observamos acima no

pensamento de Santo Agostinho (354 – 430 d.C.) que, a bem da verdade, foi grandemente influenciado pelo pensamento de Plotino. No compasso da crescente influência cristã no mundo ocidental, Santo Agostinho também obedece a fortes motivações religiosas para recusar a concepção naturalística de Aristóteles, que conduzia à afirmação de um infinito meramente potencial.

Para ele, a infinitude de Deus não podia se limitar a uma concepção meramente potencial, já que isto não está de acordo com o que se entende como a perfeição e a pura potência de Deus (Sto. Agostinho 1973a). De acordo com Santo Agostinho, se Deus é infinito, Ele o é de uma única vez, é pleno. Deus deve ser atualmente infinito, já que sua perfeição não admite quaisquer acréscimos, nem quaisquer divisões. Nessa linha teológico-filosófica de argumentação, se Deus existe, então o infinito atual deve existir.

Ainda segundo Santo Agostinho, a plena e pura potência de Deus pode, por exemplo, ter consciência da totalidade dos números naturais e, ao fazê-lo, torna essa totalidade completa em sua consciência atemporal que tudo abarca. Ainda que não nos seja possível entender de que forma isso se dê, já que, como seres limitados, não temos acesso aos processos envolvidos na consciência plena e pura de Deus.

Assim, estamos fadados, segundo ele, a considerar os números naturais de nossa posição limitada. Como um conjunto que sempre está incompleto. Desse ponto de vista terreno, os números naturais são apenas potencialmente infinitos, o que está de acordo com o humano processo temporal de contagem.

Deus, por outro lado, na eternidade de sua existência supra terrena, transcende completamente essas limitações e é capaz de abarcar inteiramente essa coleção, tomando-a como completa, ainda que infinita.

Como Sto. Agostinho, Sto. Tomás de Aquino (1225 – 1274) também apóia suas considerações no platonismo e no aristotelismo. Ainda em acordo com as teses agostinianas, Santo Tomás reafirma o infinito metafísico de Deus; isto é, Deus deve ser atualmente infinito, ainda que esse *atualmente* não se identifique com algo que ocupa uma determinada posição na linha do tempo, como em Aristóteles.

Santo Tomás (Moore 1990) também reinterpreta Aristóteles para que sua filosofia assimile os cânones neo-platônicos. Assim, junto com Aristóteles, Santo Tomás afirma que nada na criação é atualmente infinito, mas apenas potencialmente infinito,

desde que considerada a infinitude do tempo. Por exemplo, não existe um dia que não acabe, no entanto a coleção de todos os dias não pode possuir um fim, a não ser do ponto de vista de Deus que, do alto, fora do tempo, observa o início e o fim dos dias.

Apesar de toda essa discussão em Plotino, Santo Agostinho e Santo Tomás parecer girar, tão somente, em torno de uma justificativa para as assunções cristãs, devemos lembrar que ela foi fundamental para a independência que o tema ganharia, posteriormente, na forma de uma investigação mais matematizada sobre o infinito.

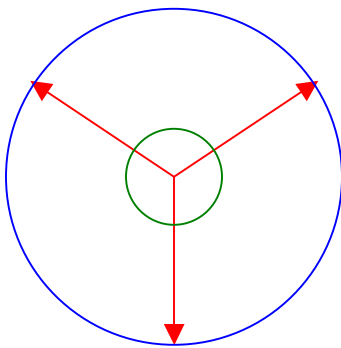
A crescente influência da Igreja foi muito importante para a disseminação das leituras de Platão e de Aristóteles. Por toda a parte surgiram pessoas interessadas em fornecer uma solução menos cristianizada à junção das doutrinas platônica e aristotélica em torno do infinito.

Em outras palavras, a divulgação cristã das obras de Aristóteles e de Platão serviu para que muitas discussões ganhassem corpo, mesmo longe dos argumentos teológicos, ainda que, vez ou outra, essas discussões buscassem amparo e apoio nesses argumentos. Assim, os debates teológicos passaram, paulatinamente, a se tornar, apenas, um contexto apropriado, como um pano de fundo, para as discussões filosóficas, lógicas e matemáticas.

Como exemplo, podemos lembrar que a discussão sobre os infinitesimais aparece um tanto distanciada do contexto religioso e mais ligada ao ponto de vista lógico e matemático.

A discussão sobre os infinitesimais pode ser remetida às argumentações em torno do Paradoxo de Aquiles e a tartaruga. A distância entre dois pontos não pode ser encarada como um conjunto infinito e completo de pontos. Para Aristóteles, é esse tipo de assunção, que poderíamos chamar de assunção dos infinitesimais, que culmina nos raciocínios falaciosos sobre o infinitamente pequeno. O que existe é, tão somente, um processo de divisão ou de adição que, tomando-se o tempo como principal parâmetro, pode se estender infinitamente.

O filósofo e teólogo escocês John Duns Scotus (1266 – 1308) apresenta uma prova bastante intuitiva contra a existência dos infinitesimais (Moore 1990).



Se os dois círculos concêntricos da figura acima são compostos por infinitesimais, isto é, se estes dois círculos são compostos por um número infinito de partes infinitamente pequenas, e dado que podemos interligar esses pontos infinitesimais, um-a-um, pelas setas, então podemos concluir que o número de pontos no círculo interno é igual ao do círculo externo. Ou seja, ambos possuem a mesma quantidade de partes, e cada uma dessas partes possui uma mesma dimensão infinitamente pequena, logo os círculos devem ser iguais em tamanho. Porém, visivelmente, notamos que os dois círculos não possuem as mesmas dimensões. Logo, para Scotus, uma distância qualquer entre dois pontos, uma linha reta ou curva, não é composta por um número infinito de partículas infinitamente pequenas.

Já para Guilherme de Ockham (1285 – 1349), os infinitesimais constituem apenas uma maneira resumida de falar de dimensões ilimitadas. Assim, dizer que é *infinitesimal* um ponto qualquer em que, por exemplo, uma esfera toca um plano, significa apenas dizer que não há limite para a consideração das diminutas dimensões desse ponto. E o mesmo pode ser dito sobre todos os outros pontos da esfera que não tocam a superfície do plano (Moore 1990).

Dizer que esses pontos podem ser considerados infinitamente pequenos dentro de um processo temporal de raciocínio lógico e matemático, não é o mesmo que assumir a sua existência dada, de uma única vez, de maneira independente desse processo. O que temos aqui é a reafirmação da distinção entre infinito atual e potencial.

Tanto Scotus como Ockham refletem uma posição relativamente comum nesse período. À medida em que o núcleo das discussões sobre o infinito se afasta das argumentações teológicas para se aproximar de uma investigação lógico-matemática, o

ponto de vista aristotélico passa a predominar sobre o ponto de vista platônico.

A prevalência do panorama aristotélico é confirmada quando o Papa João XXI (1220 – 1227) estabelece a distinção entre os usos *categoremático* e *sincategoremático* para o termo infinito. Infinito, no sentido categoremático, refere-se a algo que imediatamente transcende qualquer idéia de finitude. Já no sentido sincategoremático, o infinito é entendido como aquilo que sempre permite a consideração de uma finitude maior que uma outra finitude qualquer, por maior que esta seja. Essa distinção aparece como uma espécie de reedição da distinção aristotélica entre infinito atual e potencial (Moore 1990).

Apesar de não trazer grande novidade em termos filosóficos, a distinção entre infinito categoremático e sincategoremático torna oficial, tendo em vista que a Igreja é a instituição de maior influência nesse período, que as considerações filosóficas, lógicas ou matemáticas sobre o infinito não devem se distanciar muito daquilo que foi, desde há muito, estabelecido por Aristóteles.

Em outras palavras, em se tratando de infinito, as conclusões de Aristóteles resumem o posicionamento oficial da Igreja, a partir do papado de João XXI, pelo menos quando essas conclusões estão restritas a um ponto de vista lógico ou matemático. Somente naquilo que se refere às argumentações de ordem teológica é que se torna permissível, senão necessário, transcender essas considerações meramente potenciais acerca do infinito e afirmar sua existência atual.

Talvez tenha sido Gregório de Rimini (1300 – 1358) o primeiro nesse período a tecer afirmações realmente novas a respeito do infinito. Este é o caso quando propõe, por exemplo, que certas comparações podem apontar para infinitos de tamanhos distintos. Sendo que, sem contradições, um infinito pode estar contido ou conter outro infinito. Essas afirmações conduzem-no a aceitar, ainda que apelando para um argumento baseado na onipotência de Deus, um infinito atual que não se identifica propriamente com Deus (Moore 1990).

Um de seus argumentos poderia ser resumido da seguinte forma: Deus pode, de maneira ilimitada, adicionar uma certa quantidade de matéria a uma pedra, de modo a criar uma pedra infinita; para tanto, procederia adicionando uma parcela de matéria em um determinado momento (t_1), meia hora depois (t_2) adicionaria outra certa quantidade de

matéria, três quartos de hora mais tarde (t_3) mais outra, e assim indefinidamente; ao término de uma hora (t_n), Deus haveria criado uma pedra infinita.

Jean Buridan (1295 – 1356) não estava de acordo com as afirmações de Rimini acerca da existência, sem contradições, do infinito atual. Para Buridan, é possível aceitar que Deus adicione matéria, cada vez mais rapidamente, à pedra. No entanto, a sua tarefa jamais poderá ser dada por completo (Moore 1990).

Para ajudar a compreender o seu ponto de vista, Buridan utiliza a metáfora de uma espiral infinita. Mesmo guiando-se dentro dos limites cada vez mais reduzidos impostos pelo avanço da linha, que conduz para o interior de um espaço cada vez mais reduzido, nem por isso é possível encontrar um ponto final.

De maneira análoga, Deus agiria cada vez mais rápido, na medida em que sua tarefa *progredisse*, aprofundando-se dentro de limites temporais cada vez mais reduzidos do intervalo de uma hora, em uma espécie de espiral infinita do tempo. Infinitamente se aproximando do término de sua obra, sem contudo jamais encontrá-lo.

O caso da controvérsia entre Rimini e Buridan serve para ilustrar que, apesar de o aristotelismo ser a visão predominante até mesmo no meio religioso — e principalmente entre aqueles que não se deixavam guiar exclusivamente por argumentos de cunho teológico, ou por argumentos que apelassem tão somente para a atemporalidade ou para a onipotência de Deus —, o infinito atual ainda se fazia sentir de maneira bastante intensa, o que denuncia que o aristotelismo não tinha sido capaz de justificar suficientemente todas as suas afirmações contra o infinito atual.

O exemplo mais marcante do que poderíamos chamar de uma *resistência platônica*, nos foi deixado por Nicolau de Cusa (1401 – 1464), cujo ponto de vista sobre o infinito resgata um platonismo bastante radical. Para o pensador de Cusa, o infinito é algo que não pode ser comparado com nada mais, como um valor que não admite qualquer relativização ou restrição (Moore 1990). A verdade contida no infinito, ou que se identifica com o infinito, é una e só pode ser alcançada de uma única vez, não admitindo graus de aproximação. Essa concepção está bastante próxima de um platonismo mais ingênuo ou, até mesmo, do eleatismo de Parmênides e Zenão.

Dentro dessa idéia de infinito, como verdade absoluta, é admissível que as rígidas regras para o pensamento não funcionem, ou que não sejam capazes de se ajustar

a esse absoluto, tendo em vista que as regras impõem algum tipo de restrição como é o caso, por exemplo, da não admissão da contradição²⁶ como em Parmênides e outros. Mas essas regras são restrições para o pensamento, o que não quer dizer que o infinito metafísico não exista como algo independente de qualquer pensamento.

As maneiras de pensar o infinito podem, por esse motivo, se dissolver em mil contradições e paradoxos, mas o absoluto, nele mesmo, em nada é afetado pelas limitações do raciocínio. Como exemplo, Cusa sugere que imaginemos um círculo de raio infinito, cuja curva da circunferência nos aparece como uma linha reta.

As limitações de nosso raciocínio não podem ser condição *sine qua non* para a postulação da *existência* do infinito que, por sua essência mesma, transcende qualquer limitação. Essa existência, por sua vez, é dada pré-teoricamente e, ao tentarmos definir esse elemento pré-teórico, nós o restringimos através de nossas regras para o pensamento e geramos, assim, as muitas contradições, tornando falso aquilo que deveria ser considerado, apenas, como indefinível ou como inominável.

A solução para a postulação da existência do infinito em Nicolau de Cusa, mais uma vez, só pode ser encontrada na fé, que possibilita uma apreensão direta e imediata do absoluto como manifestação divina. Todas as nossas convenções intelectuais, nossos nomes e teorias racionais, fazem sentido justamente porque se baseiam em parâmetros fornecidos pela nossa finitude intrínseca.

Contudo, nosso desejo e esperança de conhecer o infinito já é prova suficiente de que somos símiles de algo que transcende completamente o finito.

Nosso desconforto em relação ao infinito reside em sabermos de nossas limitações por meio do raciocínio, e ainda assim intuirmos a perfeição pela força transcendental que, do ponto de vista espiritual, intimamente nos anima. Assim, para ele, só a fé é capaz de resgatar nossa origem e fornecer a consciência plena do infinito.

Localizado historicamente no final do período renascentista, Giordano Bruno (1518 – 1600) foi bastante influenciado por Nicolau de Cusa e, justamente por isso, um ilustre continuador do neo-platonismo. Sua concepção de infinito envolve, certamente, uma particular percepção de divindade, imensamente conflituosa com os dogmas

²⁶ Pelo menos esse é o ponto de vista da lógica clássica, explicitamente expresso pelo *Princípio da não-contradição*.

vigentes da Igreja (Bruno 1973).

Deus, ou o infinito, está inextricavelmente relacionado a uma percepção de um universo temporal e espacialmente infinito, a tal ponto que Deus e o universo chegam a se confundir dentro dessa visão que os identifica pelo recurso a essa qualidade essencial, a infinitude.

Contrariamente ao pensamento filosófico-cristão predominante, isto é, o pensamento assinado pela igreja romana, percebemos em Giordano Bruno a defesa de um infinito atual baseado na percepção sensível de um todo material infinito que é a própria natureza ou o próprio universo.

Para ele é possível encontrar amostras desse tipo de infinito na própria criação. Isto é, a comunhão entre criador e criatura só é possível porque ambos compartilham da mesma natureza que é infinita, da mesma substância material infinita que, mesmo assim, se corporifica e se torna disponível ao intelecto e aos sentidos. A natureza, assim como Deus, é infinita, e porque é infinita ela se identifica com a deidade absoluta. Deus é a natureza e a natureza é Deus.

A defesa desse pensamento resultou no fim trágico deste filósofo, sentenciado à morte pelo Santo Tribunal da Inquisição em 1600.

Ainda seria necessário que mencionássemos muitos outros que, como os que comentamos rapidamente acima, forneceram importantes contribuições para o conceito de infinito, como Avicenna, Ibn Qurra, Abu Hãmid, Boecius, Philoponus, etc. Contudo, faremos apenas mais um rápido comentário sobre Galileu Galilei (1564- 1642), justamente porque ele nos fornece, através da formulação de seu famoso paradoxo, uma argumentação contrária à existência do infinito atual que, como veremos mais adiante, será tomada como parte da própria definição de um conjunto infinito (Moore 1990).

Essa inversão argumentativa só será possível com a mudança de perspectiva promovida pelo aparecimento de uma forma diferente de interpretar a tradição aristotélica. Ou seja, é somente com uma mudança de paradigma no interior do próprio desenvolvimento da matemática que um problema, como o paradoxo de Galileu, usado como argumento contra a existência de um determinado objeto teórico, o infinito atual, pode se tornar parte da argumentação em favor da existência desse mesmo objeto.

Galileu obtém seu paradoxo apresentando uma correspondência entre duas

coleções infinitas de números naturais: para cada número natural n da coleção A , fazemos corresponder o número natural n^2 na coleção B . Assim, podemos representar essa relação da seguinte forma:

A	0	1	2	3	4	∞	n
	↓	↓	↓	↓	↓		↓
B	0	1	4	9	16	∞	n^2

Para Galileu, a relação um-a-um entre esses dois conjuntos mostra que a coleção A possui a mesma quantidade de objetos que a coleção B . Porém, a coleção A também parece possuir um número maior de objetos que a coleção B , já que para cada elemento n em A encontramos relacionado apenas um elemento n^2 em B e é fácil perceber que tanto n como n^2 estão presentes em A , logo deve haver muito mais elementos em A do que em B . No entanto, cada objeto da coleção A se relaciona com apenas um objeto da coleção B , e vice-versa, de modo que, paradoxalmente, deve haver o mesmo número de objetos em ambas coleções.

Como vemos, o Paradoxo de Galileu se apóia no princípio de que o todo é sempre maior que a parte. No entanto, a relação acima revela que, em se tratando de coleções infinitas, esse princípio apresenta dificuldades em se justificar, já que mesmo sendo B uma parte de A , não é possível obter uma demonstração que B é menor que A .

O que Galileu pretende mostrar é que a consideração de coleções infinitas cria problemas muito fundamentais para o raciocínio. Para ele, o infinito está muito além de nossa capacidade argumentativa e, uma vez que assumimos a existência desse tipo de coleções, então quaisquer conclusões se tornam possíveis, trivializando todas as teorias que se apóiem nessa assunção.

A seu turno, René Descartes (1596 – 1650), conhecido como pai do movimento racionalista francês no século XVII, se posiciona de maneira contrária à visão de que o infinito é um conceito derivado, como simples negação, do conceito mais fundamental de finito, assim como preconiza, por exemplo, o empirismo inglês do mesmo período.

Para Descartes, assim como para outros importantes racionalistas contemporâneos a ele, como Pascal (1623 – 1662) e Spinoza (1632 – 1677), a idéia de

infinito desempenha um papel tão ou mais fundamental que a de finito, tanto em lógica, como em matemática e também em filosofia.

Segundo Descartes, a idéia de infinito pode muito bem ter sido em um primeiro momento adicionada em nosso espírito por vontade do ser criador do universo, sendo ele próprio a consubstanciação e manifestação originária do infinito. Contudo, dada a nossa natureza finita, tentamos a todo momento acomodar essa idéia em um formato acessível ao nosso ser finito. Esta seria a forma mais adequada à natureza racional.

E assim é quando, por exemplo, conferimos à diagonal do quadrilátero de lado 1 o número 2 , ou quando nos indagamos sobre o maior número, o número de todos os números. No entanto, apesar da constante impressão deixada em nosso espírito que a razão é incapaz de abarcar, por essas vias, a idéia do infinito, o núcleo do pensamento racionalista repousa na afirmação de que é só por meio dela, da ação racional do pensamento, que podemos e devemos desvendar esse conceito basal, ainda que o infinito se mostre arredio à razão e suscetível de ser apreendido unicamente pela intuição ou pela fé.

O infinito para Descartes não é aquilo que seus adversários chamavam de *ilimitado*, como um tipo de negativo do que é finito — à maneira como se poderia entender um infinito meramente potencial —, baseado na ausência de uma constatação sensível de um universo limitado e, portanto, finito. Contrariamente a isso, para ele o infinito se impõe positivamente, como conceito afirmativo. Assim, o infinito em Descartes é associado ao infinito atual, como unidade, seja no pensamento, como idéia, seja na natureza, como força por si só insondável.

2. CANTOR E A TEORIA DE CONJUNTOS

Ainda que o alvo de nossos estudos não seja, propriamente, a teoria de conjuntos, e sim o tratamento que Cantor fornece ao conceito de infinito, a partir da perspectiva de uma filosofia da ciência do século XX, não podemos ignorar o fato de que esse tratamento passa, inexoravelmente, pelo núcleo da teoria de conjuntos.

Assim sendo, nos esforçaremos agora no sentido de compreender a dimensão da novidade que o gênio de Cantor nos apresentou em seus anos mais produtivos de trabalho. Para fazê-lo, precisamos analisar algumas distinções filosóficas e matemáticas contemporâneas desse período. Veremos que o contexto histórico e conceitual no qual a teoria de Cantor se insere exigiu dela certas adaptações e refinamentos. Essas adaptações e refinamentos, por sua vez, criaram um novo contexto filosófico e matemático no qual floresceram intensas discussões acerca dos conceitos, dos pressupostos e da legitimidade de certos fundamentos da matemática.

Devemos ressaltar, contudo, que a exposição que se segue não pretende, de modo algum, deter-se nos detalhes formais da teoria de conjuntos. Trata-se aqui, tão somente, da compreensão de aspectos conceituais, muito fundamentais, sem os quais não estaríamos de posse das referências que constituem o pano de fundo de nossa discussão principal — o infinito.

2.1 Concepção naïve versus concepção axiomática

Antes de tudo, é necessário distinguir entre o que se costuma chamar de uma *teoria axiomática de conjuntos*, em relação à qual um dos principais nomes é certamente o de Zermelo, e aquilo que ficou conhecido como *teoria naïve de conjuntos*, que está indiscutivelmente associada ao nome de Cantor.

É pertinente discorrer um pouco sobre essa distinção, na medida em que houve, e ainda há, certas controvérsias sobre os verdadeiros motivos e objetivos da axiomatização de uma teoria, assim como ocorreu no início do século XX com a teoria de conjuntos. Além disso, é preciso averiguar a marca distintiva a ser considerada entre uma teoria dita *naïve* e uma teoria dita *axiomática*.

Se há uma diferença importante entre essas duas concepções, e acreditamos que há, então essa diferença não poderá, em hipótese alguma, ser ignorada em nosso trabalho, que deverá registrar em que termos ela ocorre. Isto é, precisamos averiguar qual o grau e a natureza dessa diferença; quais as conseqüências que podem haver ao se assumir uma posição ou outra em relação à teoria de conjuntos. Acima de tudo, é necessário averiguar se é o caso de uma diferença puramente metodológica, ou se há nela aspectos conceituais importantes.

Para Viero (**Viero 1997**) a discussão gerada pela oposição forte entre teoria *naïve* e teoria axiomática é conduzida sem o devido cuidado. A seguir acompanharemos, em linhas gerais, a sua argumentação e a utilizaremos como base de uma investigação que tentará conhecer mais a fundo aspectos precisos da ontologia e da epistemologia de Cantor acerca do infinito. Aspectos estes que podem ter seus conteúdos *esvaziados* a partir da não consideração, ou da *má* compreensão, de certas características da concepção dita *naïve* da teoria de conjuntos.

É necessário entender, portanto, como uma teoria axiomática era encarada à época de Cantor e Zermelo. Isto é, precisamos entender as mudanças de concepção que a própria formulação clássica de uma teoria axiomática sofreu a partir do século XIX. Assim, devemos considerar a diferença conceitual entre uma teoria axiomática para Euclides e uma teoria axiomática para Hilbert.

Como ponto de partida podemos tomar duas possíveis formulações do conceito de teoria axiomática, que resumem duas concepções distintas. Estas formulações poderiam ser rapidamente esboçadas do seguinte modo:

I) Uma teoria é considerada axiomática se todo o seu desenvolvimento gira em torno de alguns poucos enunciados, os axiomas, cuja validade não pode ser questionada, dado que a veracidade deles é tida como imediata.

II) Dado um conjunto de enunciados, cuja aceitação prescinde de qualquer demonstração, os axiomas, uma teoria é dita axiomática se a construção dessa teoria é baseada exclusivamente nesse conjunto inicial de enunciados; isto quer dizer que novos enunciados podem ser obtidos através do recurso a um desenvolvimento sintático desses axiomas em teoremas.

Esses dois esboços de definição de teoria axiomática expressam, na verdade,

duas concepções histórico-filosóficas distintas daquilo que poderia ser considerado, em primeiro lugar, um axioma. Em (I) encontramos uma posição que se identifica com a postura filosófica que predominou durante mais de dois mil anos. Trata-se da idéia de axioma que se tornou bastante conhecida com os *Segundos Analíticos* de Aristóteles²⁷ e os *Elementos* de Euclides. Podemos chamá-la de **concepção clássica de teoria axiomática**.

Em oposição a ela encontramos uma visão bem mais recente de método axiomático, cujo cerne aparece em (II). Esta nova visão de teoria axiomática ganhou destaque no final do século XIX, mais precisamente em 1899, com a publicação dos *Grundlagen der Geometrie*. Nessa obra, David Hilbert se referiu a esta nova visão de axiomática como uma *axiomática formal*, para salientar sua distinção da concepção clássica.

2.1.1 Axiomática Clássica

Uma das críticas mais comuns em relação a (I) é a que diz respeito ao psicologismo a ela intrínseco. Esta conceituação ofereceria problemas de difícil solução como, por exemplo, o de se saber, ao certo, de quais “recursos racionais” se estaria falando. Ou mesmo, o de se saber se estes recursos estão, realmente, disponíveis, de maneira necessária e suficiente, a toda mente racional.

Ao invés de enveredarmos em uma longa discussão psico-cognitiva, poder-se-ia optar por uma conceituação menos problemática, uma que eliminasse toda e qualquer referência explícita a um sujeito cognitivo, assim como ocorre em (II). Contudo, veremos que a discussão que se nos oferece não trata, simplesmente, do psicologismo de (I), que (II) se esforça em eliminar.

A crítica que se detém, exclusivamente, no psicologismo mais aparente de (I) passa à margem de um problema mais fundamental e que diz respeito a uma determinada compreensão do núcleo de toda e qualquer teoria axiomática — o axioma.

Ao analisar o que a concepção clássica entende por axioma, percebemos que a

²⁷ Existe em Aristóteles uma distinção entre axioma e postulado, distinção essa acatada por Euclides: “An immediate deductive principle I call a **posit** if one cannot prove it but it is not necessary for anyone who is to learn anything to grasp it; and one which it is necessary for anyone who is going to learn anything whatever to grasp, I call an **axiom** (for there are some such things)” Aristotle 1993, *Posterior Analytics*, Book I, 72a25-72a31 p.116.

crítica acima perde parte de sua razão de ser, na medida em que, nessa concepção, um sujeito cognitivo não pode ser inteiramente eliminado da idéia de axioma. Essa crítica, quando devidamente interpretada, tem o efeito apenas de deixar explícito o contraste entre os significados atribuídos ao conceito de axioma em uma ou outra acepção de teoria axiomática.

Podemos começar investigando o que se entende por axioma a partir do ponto de vista clássico para, em seguida, comparar com aquilo que se entende contemporaneamente por esse conceito. Frege foi talvez, como salienta Viero (1997), o único pensador do século XIX a construir uma teoria axiomática tomando por base a concepção clássica de axioma. E é de sua autoria uma passagem que resume, brilhantemente, essa visão de axioma:

Os axiomas são verdades como são os teoremas, mas os axiomas são verdades para as quais nenhuma prova pode ser dada no nosso sistema, e para os quais nenhuma prova é necessária. Disto se segue que não existem axiomas falsos, e não podemos aceitar um pensamento como um axioma se estivermos em dúvida a respeito de sua verdade; pois ou o pensamento é falso e, portanto, não é um axioma, ou ele é verdadeiro e necessita de alguma prova e neste caso, conseqüentemente, não é um axioma.

(Frege 1979, p.205, em Viero 1997, p.165).

Frege se refere aos axiomas como aquelas verdades irrefutáveis, para as quais, contudo, não é possível nenhuma prova. Trata-se, portanto, de um contra-senso tentar fornecer uma prova para uma verdade auto-evidente, seja devido à natureza dessa verdade, que não admite, em princípio, uma refutação, seja devido ao teor extremamente primitivo do conteúdo do que é expresso na proposição. Os dois casos, muitas vezes, se identificam numa única e mesma condição, aquela que determina se uma afirmação pode ou não ser considerada um axioma do ponto de vista clássico, uma verdade imediata e inabalável.

A questão que se impõe agora é de ordem epistemológica. De que maneira se pode entender o termo chave *verdade*, em particular, *verdade indemonstrável*? Tanto para Aristóteles como para Euclides, a verdade de uma proposição não poderia ser inteiramente dissociada do conteúdo dessa mesma proposição. Isto é, uma proposição é considerada em princípio verdadeira se seu conteúdo é auto-evidente e, por esse motivo, imediatamente apreendido (axioma), ou se seu conteúdo pode ser deduzido de uma outra

proposição auto-evidente.

Não podemos esquecer que a intuição, como aquele expediente capaz de conferir conteúdo a tudo o que pode ser compreendido e, por conseguinte, a tudo o que pode ser enunciado sabiamente, é elemento essencial para o ideal de verdade grega. E é este ideal de verdade que está associado à concepção clássica de axioma. O que é verdadeiro é o que pode ser imediatamente intuído por uma imaginação ou pela percepção e, desta maneira, ao passar pelo tratamento oferecido pela razão, gerar um conhecimento legítimo sobre algo.

O conhecimento legítimo é um dado irrefutável, visto que é auto-evidente ou é obtido por meio de uma demonstração. Um conhecimento se identifica sempre com uma afirmação verdadeira sobre algo. Isto é, um conhecimento é sempre a compreensão de uma verdade. Não é possível, portanto, um conhecimento sobre algo que não exista, dado que nenhuma verdade, assim como nenhuma falsidade, pode ser afirmada sobre o que não existe.

De modo que se há uma verdade, esta é sempre uma verdade sobre algo. No caso de um axioma, este algo deve sempre ser apreendido por uma intuição de qualquer natureza. Ou seja, a concepção clássica de axioma não pode prescindir da idéia de um sujeito que afirma uma verdade sobre um objeto concreto ou abstrato. Não pode prescindir do sujeito que conhece. E só ao sujeito é permitido chegar, no uso que faz de sua intuição e de sua razão, a uma afirmação verdadeira sobre algo, seja por meio de prova, seja imediatamente pela *apreensão* intuitiva de um axioma.

Então, o que é um axioma, no sentido clássico do termo? Podemos resumir afirmando que é uma verdade irrefutável, uma *afirmação verdadeira sobre algo*. Afirmação essa que não admite demonstração e que, no entanto, constitui um conhecimento que é obtido, imediatamente, por meio de uma intuição de uma natureza qualquer. Ou ainda, um axioma é uma afirmação verdadeira sobre algo que é imediatamente apreendido pela intuição, gerando um determinado conhecimento. Em suma, um axioma é a expressão ou a compreensão de uma verdade imediata sobre um domínio pré-teórico.

Um axioma sempre se refere a um objeto concreto ou abstrato. Logo, um axioma, do ponto de vista clássico, não pode prescindir do conceito de *existência*. Este

conceito, para os gregos, está relacionado ao de *substância*²⁸. Um axioma expressa, sempre, a *essência de algo*, ou seja, um axioma pode ser entendido como a mais pura manifestação de uma verdade. É o conhecimento em sua forma pura e primitiva e, nesse sentido, é auto-evidente, já que é imediatamente apreendido pelo *espírito*. A afirmação de um axioma denuncia uma realidade tangível ou intangível e, no entanto, sempre alcançável pelo uso simultâneo da intuição e da razão.

Na concepção clássica, os axiomas são proposições com conteúdo e não abrem mão de uma intuição. Intuição esta que, por sua vez, não pode prescindir de um sujeito cognitivo. E se um axioma é uma verdade sobre algo cuja existência é atestada por uma intuição qualquer, então um axioma só pode se constituir como uma verdade sobre uma realidade pré-existente ou pré-teórica. E é só porque este algo existe, em sua condição primitiva pré-teórica, que o axioma é possível.

Logo, existe uma condição para o axioma clássico, qual seja: a de um conteúdo que se apóia sobre algum nível de realidade pré-teórica. Há sempre uma ontologia a ser considerada quando estamos diante dessa concepção clássica de verdade e, por conseguinte, da concepção clássica de axioma. Se há um axioma, então deve haver uma realidade, absolutamente pré-teórica, que confere o suporte necessário para a sua afirmação.

2.1.2 Axiomática Formal

A concepção clássica de axioma prevaleceu desde Aristóteles até o início do século XIX. Mas foi exatamente por esse período que uma nova aceção do termo começou a ganhar força, exatamente quando alguns problemas na geometria euclidiana foram detectados. Estes problemas se resumiam, basicamente, a certas suposições que Euclides assumia em suas demonstrações e que não recebiam, de sua parte, quaisquer justificativas.

Aparentemente essas *suposições injustificadas* não representavam problema algum para Euclides, dado que recebiam a justificativa necessária diretamente da intuição. Essas suposições *injustificadas* se apoiavam em um domínio pré-teórico e de lá retiravam a necessária justificação.

²⁸ Outro ponto seria o de saber se este conceito de substância está mais próximo do ponto de vista aristotélico ou do ponto de vista platônico.

Entre os geômetras do início do século XIX, no entanto, começou a prevalecer a tendência de se eliminar o apelo a qualquer tipo de intuição em suas demonstrações (Wolf 1945). O que se pretendia era, justamente, aumentar o rigor dessas demonstrações retirando, do meio matemático, sobrecargas metafísicas. As demonstrações não deveriam depender de assunções que não estivessem absolutamente explicitadas na teoria.

Esse clamor por maior rigor na geometria acarretou uma profunda reformulação na maneira de conceber uma teoria axiomática. E essa reformulação passa, sem dúvida alguma, pelo próprio conceito de axioma.

Por se tratar de uma investigação meta-teórica, os geômetras do século XIX logo perceberam que as reformulações necessárias deveriam utilizar recursos da lógica. Inicialmente, perceberam ser necessário um mecanismo de controle das assunções básicas de uma teoria. Ou seja, era necessário encontrar uma maneira de deixar explícitos *todos* os enunciados primitivos de uma teoria.

Estes enunciados irredutíveis constituem o pilar de uma determinada teoria axiomática. Havia a necessidade, portanto, de encontrar um método que deixe absolutamente evidente que nenhum enunciado, neste domínio fundamental, tivesse sido colocado ali de maneira ilegítima. Um tal método também deveria permitir mostrar que estes enunciados não são contraditórios.

Em segundo lugar, também era necessário um rigoroso método de prova, o mais isento possível de concepções pré-teóricas. Esse método teria o objetivo de garantir que os teoremas obtidos, a partir do domínio fundamental de enunciados, não sofreriam qualquer influencia de pressuposições estranhas à teoria. Em suma, este método deveria ser isento, simples e geral, de modo a facilitar a transparência das demonstrações e não permitir o aparecimento de teoremas não derivados, única e exclusivamente, dos enunciados básicos.

No que se refere ao primeiro requisito, a maneira mais fácil de controlar as assunções iniciais é, simplesmente, fazer coincidir a idéia de axioma com a idéia de definição.

A partir desse momento, o conceito de axioma é esvaziado de seu significado original. Um axioma não é mais entendido como uma *verdade sobre algo*, ou como um conhecimento puro e primitivo sobre algo. Os axiomas passam a ser compreendidos

como a explicitação de uma relação primitiva entre variáveis ou termos primitivos. Deste modo, não é mais necessário pressupor a existência de uma entidade, concreta ou abstrata, sobre a qual o axioma denuncia uma verdade e uma existência pré-teórica. Não é mais necessária uma ontologia para justificar as verdades dos axiomas.

Dentro da teoria, o axioma passa a ser, apenas, a mera **descrição** de uma relação formal entre elementos que são definidos como primitivos ou como variáveis. Estes elementos, primitivos ou variáveis, têm sua existência garantida, tão somente, pelo próprio enunciado do axioma.

Do ponto de vista da nova axiomática, os axiomas não mais denunciam verdades sobre a existência pré-teórica de um objeto. Os axiomas apenas definem os objetos da teoria e as relações que podem ser estabelecidas entre eles. Não se pode mais falar em proposições primitivamente significativas, já que nenhum conteúdo é fornecido de antemão por qualquer intuição.

O que há são apenas relações formais entre objetos teóricos possíveis, uma vez que essas relações e objetos são definidos pelos próprios axiomas. Assim, tanto faz falar em ‘pontos’ ou ‘retas’ ou ‘conjuntos’, desde que o que se entenda por estes nomes não afete a estrutura formal da teoria e seus resultados.

Segundo os defensores da axiomática formal, alterando-se dessa maneira o conceito de axioma, afasta-se a intuição das demonstrações em qualquer teoria axiomática e, junto com a intuição, dispensa-se toda e qualquer pressuposição não admitida explicitamente no seio da própria teoria. Eliminando o conteúdo dos axiomas, transformando-os em definições, obtém-se o perfeito mecanismo de controle, do que vale e do que não vale, do que existe e do que não existe, tanto para os objetos como para as relações que os axiomas definem.

Este tipo de expediente passou a ser considerado uma solução satisfatória para o problema do controle das suposições iniciais. Uma vez que os axiomas definiriam o significado dos termos e das relações primitivas, a introdução de algum tipo de pressuposição adicional estaria completamente descartada da base do sistema. Como toda a informação relevante estaria contida nas definições básicas (axiomas) e uma vez que somente elas seriam utilizadas na base das demonstrações a integridade destas estaria garantida a partir de sua base.

(Viero 1997, p.159-160)

São duas as vantagens mais aparentes ao se assumir essa nova postura diante dos

axiomas. A primeira delas, como já foi mencionado, é o completo afastamento das evidências intuitivas utilizadas como justificativas de certos resultados em geometria ou matemática. Resultados esses que, aparentemente, não poderiam se valer de tal recurso²⁹ e que, por esse motivo, acabavam provocando certos embaraços teóricos.

A segunda é que, por meio dessa reformulação, descartam-se, de imediato, algumas definições de difícil aceitação como, por exemplo, a de *ponto* em Euclides — “aquilo que não possui partes” — já que, a partir da nova concepção de axioma, por *ponto* se poderia entender qualquer objeto, desde que este objeto satisfizesse as condições expressas pelos axiomas.

Ou seja, o conceito de *ponto* passa a ser compreendido como primitivo, ou como uma variável que pode ou não ter um conteúdo a ela atribuído. Neste caso, o único critério a ser observado é que este conteúdo deve se compatibilizar com as relações expressas pelos axiomas.

O importante aqui é considerar apenas a mera possibilidade de atribuição do conteúdo à variável e não o conteúdo em si mesmo. Este perde o papel central que desempenhava na concepção clássica de axioma e assume um papel secundário. Daí o nome bastante apropriado de axiomática formal, uma vez que são as puras relações formais que passam a ocupar o espaço privilegiado nas teorias axiomáticas.

Mas esta nova visão de uma teoria axiomática faz retornar, de maneira igualmente revisada, o questionamento epistemológico que acompanhamos quando discutíamos a concepção clássica de axioma. Cabe-nos averiguar, agora, o que esta nova concepção axiomática entende por conhecimento.

O novo conceito de axioma é entendido como uma descrição formal, como uma definição. Assim, tendo em vista que o valor de uma definição é fornecido pela sua adequação à teoria correspondente, e não por uma adequação a qualquer realidade que transcenda o seu próprio poder criador, a idéia de verdade também sofre uma reformulação.

A partir da axiomática formal, não faz mais sentido perguntar se uma definição é verdadeira ou falsa, do ponto de vista clássico, mas apenas se é adequada para a teoria, se através dela se pode chegar a melhores resultados, ou ainda se ela está bem formulada.

²⁹ Um exemplo clássico é o de como justificar, intuitivamente, a existência do miriágono (ou quiliógono).

É necessário lembrar que esta identidade entre as idéias de *axioma* e de *definição*, era evitada pelos gregos. A respeito disso, assumiam eles que se tratava de conceitos que se aplicavam sobre diferentes objetos. Nos *Segundos Analíticos* Aristóteles explicita isto, distinguindo axioma, suposição e definição:

An immediate deductive principle I call a posit [tese] if one cannot prove it but it is not necessary for anyone who is to learn anything to grasp it; and one which it is necessary for anyone who is going to learn anything whatever to grasp, I call an axiom (for there are some such things); for we are accustomed to use this name especially of such things. A posit [tese] which assumes either of the parts of a contradiction — i.e., I mean, that something is or that something is not — I call a supposition; one without this, a definition. For a definition is a posit [tese] (for the arithmetician posits that a unit is what is quantitatively indivisible) but not a supposition (for what a unit is and that a unit is are not the same).

(Aristóteles 1993, Posterior Analytics, Book I, 72a25-72a31 p. 116)

Os questionamentos de ordem epistemológica e/ou ontológica para os quais a adoção dessa nova concepção de teoria axiomática conduz — ou seja, o que é o conhecimento? O que é verdadeiro? Ou, o que existe? — nos remetem diretamente ao segundo requisito para uma teoria axiomática qualquer, a saber: o de se obter um método que garantisse a legitimidade dos teoremas que fossem obtidos a partir dos axiomas.

Uma vez que todos os axiomas foram reduzidos a definições e podendo-se, deste modo, exercer um controle efetivo sobre eles — não permitindo que sejam consideradas quaisquer pressuposições que não estejam explícitas no seio da teoria —, torna-se agora necessário, também, mostrar que estes axiomas são: 1) independentes e 2) consistentes. Só assim se pode garantir a legitimidade dos teoremas gerados pelos desenvolvimentos sintáticos desses axiomas.

E aqui, o papel que Hilbert desempenha ao publicar os *Grundlagen der Geometrie* (1899) é extremamente importante. De fato, para mostrar a independência de seus axiomas Hilbert adota uma conhecida estratégia, já bastante bem utilizada em sua época. Trata-se da construção de diferentes modelos, para uma dada teoria, nos quais um dos axiomas não vale, enquanto todos os outros são considerados válidos.

Ora, o fato de um axioma valer ou não em um determinado modelo já implica uma certa noção de verdade. Se um axioma é válido em um modelo, então este axioma é verdadeiro para este modelo. Caso contrário, o axioma é dito falso. A verdade e a

falsidade dos axiomas, então, dependem da construção de um modelo e da matemática utilizada. Um axioma é verdadeiro ou falso somente em relação a um modelo específico. Conseqüentemente, só faz sentido falar em um conhecimento qualquer, a partir do ponto de vista da *possibilidade de interpretação* de uma dada teoria, isto é, a partir da possibilidade de construção de um modelo para ela.

Ainda resta garantir que os teoremas da teoria não sejam mutuamente contraditórios. Isto é, na medida em que os axiomas não passam de definições, é necessário garantir que essas definições não sejam inconsistentes entre si. Ora, na concepção clássica de axioma, entendido como uma verdade irrefutável, este problema não se apresenta, desde que a garantia da consistência dessas verdades é fornecida pré-teoricamente.

Pois um axioma deve ser necessariamente verdadeiro, é impossível para os axiomas serem inconsistentes. Desta forma, qualquer discussão deste tipo, aqui, seria mera perda de tempo (...).

(Frege 1979, 205, em Viero 1997, p.166)

Discussões epistemológicas em torno dos axiomas dificilmente evitarão questionamentos ontológicos. E pudemos notar isso quando fizemos nossos comentários acerca da axiomática clássica. No entanto, mesmo a axiomática formal se vê envolta nesse tipo de questionamento que é, contudo, transportado e contextualizado de modo a se acomodar à nova idéia de axioma que ela traz consigo.

Antes da publicação de seu *Grundlagen*, Hilbert já apresentava uma postura lógico-filosófica que defendia um tipo específico de formalismo que, de certa maneira, se contrapunha com as versões mais radicais da axiomática formal.

Em primeiro lugar, Hilbert não considerava seu formalismo como um mero jogo simbólico. A matemática deveria ser uma ciência com um conteúdo, ou seja, deveria produzir enunciados significativos. As verdades matemáticas só são possíveis porque os objetos matemáticos *existem*. Contudo, dizer que um objeto matemático existe, não tem, para Hilbert, o mesmo significado que encontramos, por exemplo, em Platão.

Com a apresentação de sua prova de existência de uma base para as formas algébricas, na teoria dos invariantes algébricos³⁰, Hilbert mostra que tanto a concepção de

³⁰ Nesta demonstração, Hilbert, em um primeiro momento, abandona a estratégia computacional elaborada por Paul Gordan e apresenta uma solução de certa forma bastante simples, que consistia numa prova por

verdade como a de existência dos objetos matemáticos deveria ser regida pelo critério de consistência.

Uma vez que a verdade matemática é balizada pela consistência de suas afirmações, fica também garantida a existência dos objetos matemáticos que estas afirmações definem. Em geral, uma teoria é dita verdadeira na medida em que ela não apresenta contradições. E, pelo mesmo motivo, é legítimo dizer que os objetos dessa determinada teoria existem. Assim, o conteúdo da matemática, da geometria, ou de qualquer outra teoria formal é rigorosamente estabelecido, isto é, desde que sejam apresentadas as provas de consistência dessas teorias.

(...) Se os axiomas, arbitrariamente assumidos, juntamente com todas as suas consequências não se contradizem entre si, então eles são verdadeiros e as coisas definidas por eles existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.

(Hilbert 1980, em Viero 1997, p. 185).

Enquanto a corrente mais radical da axiomática formal se esforçava, sem muito sucesso, em abolir completamente toda e qualquer referência à *intuição*, *verdade*, *justificativa* e *existência* de seu corpo meta-teórico, Hilbert tratava de acomodar essas idéias em sua própria visão de axiomática formal. Porém, esse posicionamento também cobra um certo preço.

Ainda que muito atraente, já que compatibiliza as noções de verdade e existência à moderna concepção de axioma — resgatando uma matemática *verdadeira* e *significativa*, em oposição àquilo que poderia ser considerado um mero jogo simbólico —, o posicionamento de Hilbert o força a explicar como podemos entender algo como uma *definição verdadeira* e, além disso, obriga-o a fornecer uma prova segura de consistência que possa fornecer a legitimidade necessária para qualquer teoria formal.

Assim, na medida em que Hilbert não abre mão das noções de verdade e existência para a sua concepção de axiomática formal, torna-se necessário um critério de consistência para seus axiomas. Esse critério aparece já no seu *Grundlagen der Geometrie*, com a construção de dois modelos aritméticos para o seu sistema

redução ao absurdo. Este tipo de estratégia acabou por gerar ferozes críticas de Gordan e também de Kronecker.

geométrico³¹.

Uma vez demonstrado que seu conjunto de axiomas se comporta como esperado nestes dois modelos, Hilbert se depara com um problema que iremos apenas mencionar aqui e que pode ser destacado na seguinte pergunta: Uma vez provado que seu sistema formal é consistente e, portanto, seus axiomas tidos como verdadeiros e os objetos que definem tendo, assim, sua existência garantida, o que nos permite continuar predicando este sistema como formal?

Como já dissemos, Hilbert não desejava que sua teoria fosse um mero jogo simbólico e, por isso, não abria mão das noções de verdade e existência. Acreditava que seu sistema possuía um conteúdo e, assim sendo, era significativo. Isto é, o seu sistema descrevia, ou lidava com, uma determinada *realidade*. No entanto, também acreditava que os axiomas cumpririam bem a sua função se não possuísem um conteúdo pré-teórico. Os axiomas não deveriam pressupor nada, deveriam ser vazios de conteúdo, apresentando meras relações formais.

Em suma, Hilbert acomoda noções clássicas, como as de verdade e existência, às idéias defendidas pela axiomática de sua época. Sua proposta é que o significado de uma teoria formal é dado a partir de sua construção, e não anteriormente a ela assim como ocorre na postura clássica. De modo que a realidade do objeto é garantida pela teoria, uma vez que seja demonstrada a sua consistência.

A princípio, os objetos dessa teoria não existem. Os axiomas se referem, exclusivamente, a meras possibilidades como conjuntos, pontos e retas, que bem poderiam receber outros tantos nomes. Uma vez que as devidas adaptações aos axiomas são realizadas, os significados dos objetos de uma determinada teoria começam a se cristalizar naquilo que intuitivamente entendemos por conjuntos, pontos ou retas.

É possível, portanto, distinguir dois momentos no posicionamento de Hilbert acerca da axiomática formal. O primeiro deles diz respeito àquilo que é puramente formal na teoria, o estabelecimento das puras relações pelos axiomas. Este momento é a gênese da teoria formal, no qual nenhuma referência às noções de existência e verdade deve ser feita, assim como nenhuma realidade deve ser pressuposta. Não faz sentido, neste

³¹ Para uma rápida visão sobre os modelos que Hilbert construiu para o seu sistema geométrico, ver Viero, *A axiomatização da teoria de conjuntos*, 1997, p.188-189.

momento, dizer que o sistema formal descreve qualquer realidade, ou que seus axiomas são verdadeiros, ou mesmo que eles afirmam a existência de quaisquer objetos. Até este momento não sabemos, propriamente falando, de que objetos, *realmente*, trata a teoria em questão.

A partir do desenvolvimento dessa teoria a situação se transforma completamente. Essa transformação é marcada, justamente, pela demonstração da consistência dos axiomas. A *união consistente* de todos os axiomas cria a perspectiva de um *objeto*, de uma realidade que se adapta à teoria. Todas as afirmações sobre estes objetos se tornam, dentro deste enfoque axiomático, passíveis de serem julgadas falsas ou verdadeiras.

Em resumo, a demonstração da consistência de uma teoria formal é, no entender de Hilbert, vital para que ela não recaia na armadilha de ser uma teoria sobre nada, ou uma teoria sobre qualquer coisa; a consistência é vital para que a teoria não seja considerada um mero jogo simbólico.

2.2 Teoria de Conjuntos

Cantor foi o fundador da teoria de conjuntos em sua versão mais primordial. A essa versão é atribuído, muitas vezes, o predicado *naïve* que, entre as muitas acepções do termo, pode ser livremente traduzido por *ingênuo*. De certa forma, essa versão é tida como mais *fraca* que a versão axiomática — considerada como não ingênua — já que ela deve necessariamente passar por ajustes para se adaptar às definições e axiomas que substituirão formalmente quaisquer concepções pré-teóricas como vimos acima.

No entanto, a identidade estabelecida entre *definições* e *axiomas* pela visão axiomática formal nos faz refletir sobre a real distância entre a teoria *naïve* de Cantor e a teoria axiomática de conjuntos como, por exemplo, a de Zermelo.

A definição de conjunto de Cantor, nos *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, é de particular importância aqui:

Por agregado (Menge) entenderemos qualquer coleção M considerada como totalidade, de objetos definidos e separados m , da nossa intuição ou pensamento. Estes objetos são chamados de ‘elementos’ do conjunto.

De forma simbólica: $M = \{m\}$
(Cantor 1955[1897], em Viero 1997, p.49)

Se, como muitas vezes acontece, consideramos essa definição segundo a axiomática formal, então diversas dificuldades começam a aparecer.

Em primeiro lugar, essa *definição* apresentaria dificuldades bastante semelhantes às daquelas que já mencionamos no início da seção dedicada à axiomática clássica. Existem conceitos filosoficamente problemáticos como os de *objeto* e *coleção*, sem falar nos termos *intuição* e *pensamento*. Aparentemente há, além disso, a pressuposição de um sujeito psicológico que realize, por meio da intuição, a separação dos objetos em uma coleção e que seja capaz de considerá-los, a todos, como uma totalidade.

No entanto, é necessário dizer que esta é uma dificuldade que existe apenas em um nível de consideração com a qual a definição acima, em si mesma, não parece sequer estar preocupada. Ou seja, esta é uma dificuldade que se coloca somente se passarmos a encarar esta definição do ponto de vista da axiomática formal.

Em segundo lugar, os defensores desse tipo de abordagem argumentam que a versão *naïve* conduz a antinomias e que estas, por sua vez, colocam em xeque o desenvolvimento da teoria de conjuntos. Para estes, seria necessário realizar uma formalização rigorosa dessa teoria.

Este teria sido o motivo da grande concentração de esforços por uma *Teoria Axiomática Formal de Conjuntos*. No entanto, outros argumentam que tanto Cantor como Zermelo não estavam grandemente preocupados com as famosas antinomias. Para eles, o motor de suas investigações era, na verdade, o problema central da teoria em questão. A saber, encontrar uma demonstração definitiva para a hipótese de *continuum*, sem a qual esta teoria seria sempre assombrada pelo fantasma da inconsistência e da falsificação.

É nos *Grundlagen* que Cantor apresenta, pela primeira vez, os números transfinitos, como uma extensão completada das coleções infinitas de números até então conhecidas; é também nos *Grundlagen* que aparece uma das primeiras tentativas de um tratamento formal para o *continuum*. Se tivéssemos, portanto, que definir uma data de nascimento para a teoria de conjuntos, em sua versão original *naïve*, esta certamente deveria coincidir com a data de aparecimento dos *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, em 1883.

De toda esta investigação surge o núcleo de sua teoria de conjuntos, a teoria dos números transfinitos, cuja forma mais bem acabada é apresentada somente depois de

mais de dez anos, em seus dois artigos que constituem os *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, respectivamente em 1895 e 1897.

2.2.1 Teoria de Conjuntos *naïve*

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo no dia 3 de março de 1845, porém apenas 11 anos depois sua família se mudou para a Alemanha. Lá chegou a residir em Wiesbaden, Frankfurt, Darmstadt, Zürich e finalmente em Berlim onde, como estudante da Universidade de Berlim, se viu grandemente impressionado pelo curso de *Herr Professor* Karl Weierstrass.

Desde muito cedo, Cantor já mostrava forte vocação para os estudos em matemática. Apesar do enorme desejo de seu pai, Georg Woldemar Cantor, em ver seu filho primogênito gerindo os negócios da família, este se decidiu, no ano de 1862, a aprofundar os estudos que o levariam a seguir uma carreira puramente acadêmica.

Assim, em 1863 Cantor inicia seus estudos em Zürich, no *Polytechnicum*, onde tem a oportunidade de se aprofundar em diversas áreas como artes, filosofia, física, música, mas, principalmente, em matemática. Em 1868, gradua-se³² na Universidade de Berlim e no ano seguinte aceita um cargo de *Privatdozent* no Departamento de Matemática em Halle.

Durante sua estada em Halle, aceita a sugestão do amigo Eduard Heine, que desenvolvia estudos em séries trigonométricas, para tentar demonstrar a unicidade de funções representadas por séries trigonométricas. Em três anos Cantor publica cinco artigos sobre o assunto, sendo que no último artigo da série (1872) apresenta uma solução bastante geral para o problema proposto por Heine.

Cantor não só mostrou a unicidade da representação de qualquer função, representada por uma série trigonométrica³³, como também obteve, por meio de sua prova, uma série de conjuntos infinitos de pontos. E através do conceito de *ponto limite de um conjunto de pontos* foi possível conceber uma coleção infinita de conjuntos infinitos de pontos que poderiam ser colocados lado a lado, hierarquicamente, da seguinte maneira: dado um conjunto de pontos P , o conjunto P' é definido como o conjunto

³² Equivalente ao Doutorado no Brasil.

³³ Para mais detalhes sobre a demonstração do teorema da unicidade para séries trigonométricas, cujos coeficientes não necessariamente assumem a forma de uma *Integral de Fourier*, ver **Cantor 1955**, p.24-31.

contendo todos os pontos limite p de P ; assim, P' constitui o *primeiro conjunto derivado* de P . Do mesmo modo, P'' contém todos os pontos limite de P' e constitui, por esse motivo, o *segundo conjunto derivado* de P .

Definition: By a "limit point of a point set P " I mean a point of the line for which in any neighborhood of same, infinitely many points of P are found, whereby it can happen that the (limit) point itself also belongs to the set. By a "neighborhood of a point" is understood an interval which contains the point in its interior. Accordingly, it is easy to prove that a point set consisting of an infinite number of points always has at least one limit point.

(Cantor 1872, em Dauben 1979, p.41)

Desse modo, para qualquer conjunto P , é possível derivar a sequência $P', P'', \dots, P^n$, definindo toda a hierarquia de conjuntos de pontos de *primeira espécie* como sendo aquela coleção de conjuntos de pontos $P', P'', \dots, P^n$, tal que $P^n = \emptyset$, para algum índice n .

Cantor havia estabelecido uma relação entre conjuntos finitos, ou infinitos, de valores (*Wertmenge*) e conjuntos finitos, ou infinitos, de pontos (*Punktmenge*) em uma reta (linha). Assim, para cada conjunto de pontos era possível associar um ponto em uma reta que, por sua vez, estava associado a um determinado valor numérico.

Se P é o conjunto de todos os pontos racionais, que são todos os pontos pertencentes à reta associada ao conjunto dos números racionais, então P' , o conjunto de todos os pontos limites p de P , é o conjunto de todos os pontos pertencentes à reta real; isto é, P' contém exatamente aqueles pontos que correspondem ao conjunto de todos os números reais.

Desse modo, Cantor começa a esboçar os elementos que irão constituir a sua futura teoria geral de conjuntos. A idéia básica de hierarquia de conjuntos e de número transfinito começa a germinar na hierarquia mais fundamental de conjuntos $P', P'', \aleph, P^\infty, P^{\infty+1}, \aleph$. No entanto, o número sucessor de todo número finito ainda não pode ser adequadamente definido em 1872, como ressalta Dauben (1984):

Cantor had no precise basis for defining the first transfinite number ∞ following all finite natural numbers n . A general framework within which to establish the meaning and utility of the transfinite numbers was lacking. The only guide Cantor could offer was the vague condition that $P^n \neq \emptyset$ for all n , which separated sets of the first species from those of second. Cantor could not begin to make meaningful progress until he had realized that there were further distinctions yet to be made in orders of magnitude between

discrete and continuous sets. Until the close of 1873, Cantor did not even suspected the possibility of such differences.

(Dauben 1984 [1992], p.59)

Cantor percebe que necessita de uma análise mais detalhada de seus conjuntos de pontos limite que formam a hierarquia $P', P'', \dots, P^\infty, P^{\infty+1}, \dots$, necessariamente se vê em meio a pesquisas sobre as propriedades dos números irracionais. Trata-se aqui de uma segunda fase de seu trabalho, na qual tenta obter as conseqüências mais interessantes da demonstração do teorema da unicidade da representação de funções arbitrárias representadas por séries trigonométricas.

Durante os primeiros momentos da elaboração de sua demonstração para o teorema da unicidade, Cantor necessitou se ater aos conjuntos de pontos de *primeira espécie* $P^{(1)}, P^{(2)}, K, P^{(v)}$, onde $P^{(v)} = 0$ para algum $v < \infty$. Em 1872 vai além e inicia suas considerações acerca da seqüência completa de conjuntos derivados de *segunda espécie*, definidos como $P^{(v)} \neq 0$, para qualquer valor finito arbitrariamente grande de v .

A partir daí, Cantor adota a notação ∞ para representar o menor número infinito, sucedendo todos os valores finitos de v . Por meio de um raciocínio análogo ao efetuado para os conjuntos de pontos de *primeira espécie*, obtém uma ordem infinita também para os conjuntos infinitos de *segunda espécie*:

$$P^{(\infty)}, P^{(n\infty)}, P^{(\infty+1)}, P^{(\infty+n)}, P^{(\infty n)}, P^{(\infty^n)}, P^{(\infty^\infty)}, K.$$

Com sua teoria envolvendo conjuntos infinitos de pontos, Cantor considera que está de posse das ferramentas necessárias e suficientes para efetuar uma análise puramente matemática do *continuum*, principalmente através de um estudo mais profundo das coleções enumeráveis e não-enumeráveis que, até aquele momento, eram tidas pelos matemáticos como formas de conceber infinitos por enquanto apenas *qualitativamente* diferentes.

Take the collection of all positive whole numbers n and denote it by (n) ; then think of the collection of all real numbers x and denote it by (x) ; the question is simply whether (n) and (x) may be corresponded so that each individual of one collection corresponds to one and only one of the other? At first glance one might say no, it is not possible, for (n) consists of discrete parts while (x) builds a *continuum*; but nothing is won by this

objection, and as much as I am inclined to the opinion that (n) and (x) permit no such unique correspondence, I cannot find the reason, and while I attach great importance to it, the reason may be a very simple one.
(Cantor/Dedekind 1937, em Dauben 1979, p.49)

Um dos primeiros resultados mais extraordinários que se seguiram dessas observações foi a descoberta que o conjunto dos números reais é não-enumerável. E isso era justamente o que faltava para Cantor dar início à sua inovadora teoria para o infinito. Contudo, até 1873, tudo o que possuía eram apenas indícios de que o conjunto dos números reais era muito mais rico em elementos que os outros conjuntos infinitos nele contidos.

Em geral, os matemáticos deste período aceitavam com certa naturalidade que o *continuum* poderia apresentar características diferentes de outros conjuntos infinitos tais como, por exemplo, o conjunto de todos os números naturais ou o conjunto de todos os números racionais. No entanto, mesmo em matemática, a idéia do *continuum* ainda estava profundamente arraigada à intuições de magnitudes físicas, como o *continuum* do tempo ou o *continuum* do espaço.

O conjunto dos racionais era denso mas não contínuo, e isso criava a suspeita de que existiam, de fato, dois tipos distintos de conjuntos infinitos: um primeiro tipo capaz de reunir todos aqueles conjuntos que poderiam ser colocados em uma relação um-a-um com o conjunto dos números naturais, e entre si; e um segundo tipo, cuja característica era, justamente, a de não aceitar uma correspondência, um-a-um, com aqueles conjuntos do primeiro tipo. Em poucas palavras, tudo indicava que havia infinitos de *tamanhos distintos*, isto é, infinitos que apresentam quantidades distintas de elementos.

Tanto Cantor como Dedekind estavam completamente cientes de que o conjunto dos números irracionais era mais complexo que o conjunto dos racionais, tanto no que diz respeito ao número de elementos, como no que concerne às propriedades desses elementos. Ainda assim, faltava-lhes uma demonstração direta de que o *continuum* encerrava um infinito *maior* que os outros conjuntos infinitos.

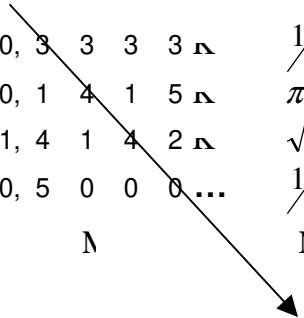
A maneira encontrada por Cantor para obter esse resultado foi, justamente, tentar estabelecer uma correspondência, um-a-um, entre o conjunto dos números naturais, o conjunto infinito enumerável por excelência, e o conjunto que encerra o *continuum*, o conjunto dos números reais.

E é no início de 1874 que Cantor publica um artigo no *Mathematische Annalen*, com o título *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no qual apresenta a prova da não-enumerabilidade dos números reais³⁴.

Informalmente falando, uma das maneiras por meio das quais podemos ilustrar essa prova, que também ficou conhecida como *argumento da diagonalização*, é através de um esquema representando uma relação um-a-um entre os reais e um conjunto enumerável como, por exemplo, o dos naturais.

Assumiremos, como ponto de partida, o número real ‘0, ...’, para o qual devemos fornecer sua seqüência decimal, que será construída tomando como base os números reais apresentados abaixo:

0	$\Leftrightarrow$	0, 3 3 3 3 $\aleph$	$\frac{1}{3}$
1	$\Leftrightarrow$	0, 1 4 1 5 $\aleph$	π
2	$\Leftrightarrow$	1, 4 1 4 2 $\aleph$	$\sqrt{2}$
3	$\Leftrightarrow$	0, 5 0 0 0 ...	$\frac{1}{2}$
$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$


 0,5550 $\aleph$

Para obter o número 0,5550... obedecemos as seguintes regras: sempre que a seta passa por um algarismo maior ou igual a 5 escrevemos ‘4’ e sempre que a seta passa por um algarismo menor que 5 escrevemos ‘5’, exceto quando a seta passa por 0, e neste caso escrevemos ‘0’. O número real obtido, a partir dessa combinação de regras, foi ‘0,5550...’.

Nesse esquema³⁵ a diagonal representada pela seta sempre passa por um dos algarismo da expansão decimal de um número real. O número obtido por meio da diagonal não pode, em princípio, pertencer à relação esboçada acima, já que ele jamais aparecerá na coluna dos números reais que o antecedem. Assim, não é possível estabelecer uma relação um-a-um entre os reais e um conjunto enumerável.

³⁴ A demonstração que aparece originalmente em carta enviada a Dedekind, em 1873, e posteriormente publicada no artigo de 1874, pode ser encontrada de maneira abreviada em Dauben, 1979, p. 51-53.

³⁵ Essa forma simplificada do método da diagonalização de Cantor aparece, com leves modificações em Moore 1990, p. 118-121.

O que Cantor mostrou, através de sua prova de 1873-4, bastante mais complexa que o esquema acima, foi a possibilidade de se encontrar pelo menos um número real que jamais constará na coleção dos passos enumerados, mesmo que essa coleção seja enumeravelmente infinita, como é o caso.

It thus follows directly that the collection (x) cannot be uniquely corresponded with the collection (n), and I conclude there from that among collections and sets of values distinctions exist which until recently I could not establish.

(Cantor 1932 p.85, em Dauben 1979, p.53)

Nos três anos que se seguiram à publicação do artigo de 1874, Cantor se viu em meio às considerações acerca da hierarquia dos conjuntos infinitos. Estava claro para ele que nenhum conjunto de pontos poderia ultrapassar, em tamanho, o conjunto dos números reais. No entanto, a idéia de *tamanho de um conjunto infinito* ainda precisava receber um tratamento mais preciso.

O método de correspondência e comparação de conjuntos o ajudou a desenvolver o conceito de *potência de um conjunto*. Conjuntos possuem a mesma potência (*Mächtigkeit*) se for possível estabelecer, entre eles, uma correspondência do tipo um-a-um.

Em 1878 é publicado o importante artigo *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, no qual Cantor não só estabelece a *classe* de conjuntos enumeráveis, como também descreve a hierarquia dos conjuntos pertencentes a esse primeiro tipo de infinito. A primeira classe de conjuntos é constituída, justamente, por todos aqueles conjuntos infinitos equinumeráveis entre si e com o conjunto dos naturais. Esses são os conjuntos infinitos enumeráveis e, no interior deles, também é possível estabelecer uma hierarquia, na qual aparece um menor conjunto infinito: o conjunto de todos os números inteiros positivos.

Além disso, outro importante resultado obtido em 1878 foi o de que existem apenas duas classes de conjuntos infinitos. Em primeiro lugar, há a classe dos conjuntos infinitos enumeráveis, que reúne todos os conjuntos equipotentes ao conjunto de todos os números naturais. Em segundo lugar, aparece a classe de todos os conjuntos infinitos não-enumeráveis, ou que possuem a potência do *continuum*.

Através de suas investigações com espaços n -dimensionais, Cantor conclui que o estudo da continuidade desses espaços pode ser reduzido ao estudo da continuidade do

conjunto dos números reais. Isto é, seja qual for a dimensão desses espaços, eles são considerados equivalentes, no que diz respeito à potência, ao *continuum* representado pela reta dos reais; por sua vez, a reta dos reais possui a mesma potência do conjunto de todos os números reais.

Da mesma maneira como o conjunto dos números naturais serve de base de *enumerabilidade* para todos os conjuntos infinitos enumeráveis, o conjunto dos números reais serviria de base de *continuidade* para todos os conjuntos infinitos contínuos.

Thus the linear aggregates would consist of two classes of which the first includes all spaces which can be given the form of a function of v (where v runs over all positive whole numbers), while the second class takes on all those aggregates which are reducible to the form of a function of x (where x can assume all real values ≥ 0 and ≤ 1). Corresponding to these two classes, therefore, would be only two powers of infinite linear aggregates; the exact study of this question we put off for another occasion.

(Cantor 1878, p.132-3, em Dauben 1979, p.66)

Nos cinco anos seguintes, Cantor publica uma série de seis artigos contendo as bases do que viria a se tornar a sua nova teoria de conjuntos. O quinto artigo dessa série reaparecerá em seguida como o núcleo matemático do que viria a ser o seu *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* que, juntamente com o sexto artigo da série, reúne aquilo que há de mais essencial na nascente teoria geral de conjuntos.

No primeiro artigo (1879) já aparece uma definição de *conjunto denso* e as propriedades que, a partir disso, se pode estabelecer entre conjuntos de primeira espécie e conjuntos derivados de segunda espécie. É também nesse primeiro artigo que surge, de maneira mais consistente, o que se pode entender por *igualdade de potências*. Cantor fala de apenas duas classes de potências, a dos conjuntos enumeráveis e dos conjuntos não-enumeráveis.

No segundo artigo da série (1880), aparece o que se pode chamar de embrião de um número transfinito. Tomando como ponto de partida o conjunto derivado P' de P , Cantor observa que P' pode ser apresentando como a seguinte composição: $P' \equiv \{Q, R\}$, onde Q é o conjunto de todos os pontos pertencentes aos conjuntos de primeira espécie de P' e R é o conjunto de pontos de todos os conjuntos derivados de P' , nesse caso R é um conjunto de segunda espécie.

Assim, temos que $R \equiv \mathcal{D}(P', P'', \dots)$, onde $\mathcal{D}(P', P'', \dots)$ é a intersecção de

todos os conjuntos P^n , ou seja, $\mathcal{D}$ é o conjunto comum a todos os conjuntos da reunião P^n . E já que R é o conjunto de pontos pertencentes a todo conjunto derivado de P' , e assumindo que $P^{(\infty)}$, é o conjunto de ordem ∞ derivado de P , então $R \equiv P^{(\infty)}$.

Cantor está de posse do suficiente instrumental teórico para apresentar um conceito absolutamente inovador, o de *número transfinito*. Tomando como princípio o exposto no parágrafo anterior, $R \equiv \mathcal{D}(P', P'', \dots, P^{(v)}, \dots) \equiv P^{(\infty)}$, para $P^{(\infty)} \neq 0$, é possível obter o primeiro conjunto derivado de $P^{(\infty)}$, denotado por Cantor como $P^{(\infty+1)}$, assim como também o n -ésimo conjunto derivado de $P^{(\infty)}$, $P^{(\infty+n)}$. Desta forma, Cantor pode construir sua hierarquia de conjuntos de segunda espécie, formalmente dando início à sua teoria dos números transfinitos.

Com relação aos *símbolos infinitos* acima mencionados, Cantor se refere a eles como derivados de maneira bastante “concreta”. Isto é, não se trata de meros rótulos ou de símbolos vazios de significado. Na verdade, para defender a idéia de números infinitos, Cantor chega a usar o termo “dialética” para se referir ao modo como obteve seus símbolos infinitos derivados de sua hierarquia de conjuntos infinitos de pontos. Como se, de algum modo, esses símbolos nomeassem objetos pertencentes a algum tipo de *realidade extra teórica*, como veremos mais adiante.

$$v_0 \infty^\mu + v_1 \infty^{\mu-1} + K + v_\mu, K, \infty^\infty, K, \infty^{\infty^\infty}, K$$

Here we see a **dialectic generation** of conceptions, which always leads yet farther, and remains both free from every arbitrariness and necessary and logical in itself.

(Cantor 1955[1897], p.36, *grifos nossos*)

No terceiro artigo da série (1882) aparecem os dois teoremas mais fundamentais sobre de conjuntos enumeráveis, são eles: I) Toda parte infinita de um conjunto enumerável é um conjunto enumerável; II) Dado um conjunto finito, ou enumeravelmente infinito de conjuntos (E') , (E'') , (E''') , ..., o conjunto que reúne todos os elementos desses conjuntos é enumerável. Esses dois teoremas formam a base para a distinção entre conjuntos discretos e conjuntos contínuos.

No ano de 1883 sua teoria sobre o infinito ganha a independência necessária de sua pesquisa inicial sobre conjuntos de pontos. É publicado, então, o *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, no qual a teoria geral sobre os números transfinitos

já aparece de maneira bastante madura.

Nessa obra Cantor apresenta a hierarquia das classes de números infinitos como tipos de ordem de conjuntos bem ordenados. A idéia principal aqui é mostrar essa hierarquia como uma extensão natural das coleções infinitas já conhecidas, como a dos números naturais. Mais do que isso, trata-se também, e fundamentalmente, de uma revisão do que até então se entendia pela natureza dos números e sobre o próprio conceito de infinito, baseando-se em uma nova compreensão da própria natureza e geração dos números.

As risky as this might seem, I can voice not only the hope, but my strong conviction, that in time this will have to be regarded as the simplest, most appropriate and natural extension [of the concept of number]. But I realize that in this undertaking I place myself in a certain opposition to views widely held concerning the *mathematical infinite* and to opinions frequently defended on the nature of numbers.

(Cantor 1883, p.165, em Dauben 1979, p.96, *grifos nossos*)

O infinito matemático ao qual se refere Cantor é justamente aquele apontado por Aristóteles e que já tivemos a oportunidade de analisar com mais cuidado no primeiro capítulo deste trabalho. Trata-se da idéia de algo que pode ser constantemente acrescido sem jamais conhecer um limite final. O infinito matemático, em geral, se mostrava como coleções de números que não apresentariam, jamais, um maior elemento. Isto é, para cada elemento arbitrariamente escolhido nessas coleções infinitas, é sempre possível apontar um sucessor.

A proposta de Cantor é que é possível, sem contradições, estender essa classe de números, através de um procedimento de geração de novas classes, fundado na idéia de *número infinito limite*, ou número transfinito. Essas classes seriam arranjadas naturalmente em uma hierarquia, cada uma delas apresentando elementos cujas propriedades são análogas àquelas identificadas nas coleções infinitas já conhecidas.

Em oposição à idéia de um infinito potencial, ou tomado em sentido *impróprio* (*Uneigentlich-Unendliches*), encontramos então aquela de um infinito atual, ou infinito em sentido *próprio* (*Eigentlich-Unendliches*). No primeiro caso encontramos uma variável que pode ser estendida para além de qualquer medida, no segundo encontramos um infinito que pode ser encarado como um todo completo, encerrado dentro de uma certa concepção de *número*.

Para Cantor, o melhor exemplo desse tipo de infinito só pode ser encontrado em sua própria teoria dos números transfinitos. A idéia de uma coleção infinita completa é, para ele, muita mais sólida e *real* que a idéia vigente até então de infinito matemático, nos moldes de um infinito potencial aristotélico.

Aqui começamos a perceber que a concepção de Cantor acerca da natureza dos números se aproxima daquela oferecida por Platão. Trataremos na próxima seção de investigar a que Cantor se refere quando atribui aos seus números uma *realidade* que até então eles não possuíam, principalmente quando afirma que, anos antes (1872), havia sido conduzido à sua grande descoberta sem se dar conta disto:

A number of years ago I was led to the infinite real whole numbers [*die unendlichen realen ganzen Zahlen*] without having realized that they were **concrete numbers of real significance**.

(Cantor 1883, p.166, em Dauben 1979, p.97, *grifos nossos*)

Com relação à natureza e à geração dos números, Cantor faz três distinções, que aparecem como três princípios. O *primeiro princípio* (*Erzeugungsprinzip*) é aquele relacionado à geração da seqüência dos inteiros positivos e que conhecemos intuitivamente como a adição sucessiva de unidades umas às outras.

A coleção $\{1, 2, 3, \aleph\}$ claramente não possui um maior elemento, no entanto é possível conceber um número limite ω , representando a coleção $\{1, 2, 3, \aleph\}$ em sua totalidade, de tal modo que $\omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. Assim, ω se configura como o primeiro número transfinito, isto é, o primeiro número sucessor da coleção inteira de números naturais, tomada completamente. Na verdade, ω é o menor número inteiro maior que qualquer $n \in N$.

O mesmo princípio que gerou a seqüência dos números naturais pode ser novamente aplicado sobre ω , para produzir a seqüência dos números ordinais transfinitos $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \aleph, \omega + \nu$. E do mesmo modo que os números naturais, essa nova seqüência não possui um maior elemento, no entanto, obedecendo ao raciocínio anterior, é possível supor um novo número 2ω , tal que $2\omega = \{\omega+1, \omega+2, \aleph, \omega+\nu, \aleph\}$. E assim, a cada vez, uma nova ordem de conjuntos enumeráveis é gerada.

Notamos que ω e 2ω são ordinais limites. Isto é, são os menores ordinais maiores que a seqüência inteira de ordinais que os antecedem, lembrando que essas

seqüências não possuem um maior elemento. A geração de ω e 2ω , assim como do restante dos ordinais limites, obedece ao *segundo princípio de geração* dos números, segundo o qual, uma vez que uma seqüência infinita de números possa ser gerada por meio do primeiro princípio, então é sempre possível gerar um novo número transfinito, configurando-se como o menor número sucessor de qualquer número dessa dada seqüência infinita de números inteiros.

I call it the second principle of generation of *real* [realen] whole numbers and define them more precisely: if any definite succession of defined whole *real* numbers exists, for which there is no largest, then a new number is created by means of this second principle of generation which is thought of as the limit of those numbers, i.e., it is defined as the next number larger than all of them.

(Cantor 1883, p.196, em Dauben 1979, p.98, grifos nossos)

Pela aplicação alternada dos dois primeiros princípios é possível gerar uma seqüência ilimitada de conjuntos infinitos de números ordinais, além dos próprios números transfinitos limite que dão início a cada nova ordem de sucessão de números e que segue aumentando indefinidamente:

$$\omega, \omega+1, \aleph, \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \aleph + \nu_\mu, \aleph, \omega^\omega, \aleph.$$

Porém, para controlar esse processo de geração, Cantor propõe um terceiro princípio, o *princípio da limitação* (*Hermungsprinzip* ou *Beschränkungsprinzip*). O princípio da limitação garante que a primeira classe de números possua um limite superior, de modo a gerar outras classes de ordens ainda mais elevadas. Esse terceiro princípio cria uma separação entre o que Cantor chama de primeira classe de números e classes superiores de números.

Definition: We define therefore the second number class (II) as the collection of all numbers α (increasing in definite succession) which can be formed by means of the two principles of generation:

$$\omega, \omega+1, \aleph, \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \aleph + \nu_\mu, \aleph, \omega^\omega, \aleph, \alpha, \aleph.$$

which are subject to the condition that all numbers preceding α (from 1 on) constitute a set of power equivalent to the first number class (I).

(Cantor 1883, p.197, em Dauben 1979, p.98)

Os conjuntos, finitos ou infinitos, que antecedem α perfazem a primeira classe de números. A segunda classe é constituída por α e seus sucessores, perfazendo a segunda classe de números, cuja a potência é diferente da primeira classe de números. De acordo com a *Hipótese do continuum* não há qualquer potência intermediária entre essas duas classes de números.

É importante chamar a atenção para a troca da simbologia utilizada para denotar o infinito. O símbolo ∞ , introduzido pelo matemático inglês John Wallis (1616 – 1703), era utilizado para denotar uma quantidade maior ou menor que qualquer quantidade dada: essa notação se referia, portanto, ao infinito potencial. Cantor deixa de lado o símbolo ∞ , que em suas investigações preliminares era utilizado para distinguir alguns conjuntos de pontos derivados de segunda espécie, e adota o símbolo ω .

Com o novo símbolo ω , Cantor pretende enfatizar seu novo conceito de infinito completo, por meio de um número transfinito que possui uma determinada potência e que não pode ser entendido como uma variável assim como se poderia interpretar o tradicional símbolo ∞ , historicamente associado a um infinito potencial. Além disso, com essa mudança fica patente que, na medida em que o interesse de Cantor sobre a potência do *continuum* aumenta, sua teoria original sobre conjuntos de pontos, cuja notação ainda era ∞ , passa a perder espaço para uma teoria de conjuntos em sentido próprio.

No processo de geração dos números por meio dos três princípios acima expostos, Cantor mostrou que a potência da segunda classe de números (II) é maior que a potência da primeira classe (I) de números transfinitos enumeráveis. E foi mais além, afirmando que não havia qualquer outra coleção de conjuntos que apresentasse uma potência intermediária às classes (I) e (II):

Theorem: If (α') is any set of numbers contained in the collection (II), then only the following three cases can occur: either (α') is a finite collection, i.e., it consists of a finite number of numbers, or (α') has the power of the first number class; or thirdly, (α') has the power of (II).

(Cantor 1883, p.200, em Dauben 1979, p.100)

2.2.2 O Continuum

Desde a publicação dos *Grundlagen* em 1883, obter uma formulação matemática mais precisa para o *continuum* se tornou um dos principais objetivos no trabalho de

Cantor. Grande parte de sua motivação para a realização desta tarefa se devia, principalmente, ao seu desconforto diante da idéia, de certo modo generalizada, que o *continuum* era fruto de uma espécie de intuição de magnitudes físicas e que, por isso, se encontrava para além de qualquer formalização. Desconforto justificável, na medida em que o progresso de seus trabalhos com as coleções transfinitas estava intimamente relacionado com uma resposta decisiva para o problema do *continuum*.

O problema do *continuum* remonta aos antigos gregos e pode ser reduzido à sua clássica formulação espacial, resumindo-se ao debate filosófico sobre se o espaço possui uma menor parte ou se, por outro lado, pode ser infinitamente divisível, sem jamais se obter algo que possa ser tratado com o *elemento fundamental*. Para Cantor, a escola aristotélica representa o segundo ponto de vista, enquanto que a escola epicurista é partidária da idéia segundo a qual deve existir uma menor parte para as magnitudes em geral.

Como terceira alternativa, há a síntese, de certa forma negativa, fornecida por Santo Tomás de Aquino, ao considerar que as magnitudes não possuíam uma quantidade finita de partes, nem uma quantidade infinita. Em Santo Tomás, essas magnitudes não possuem partes e devem ser consideradas como um todo homogêneo e indivisível, como uma idéia primitiva, que se refere, em última instância, a uma intuição do infinito absoluto, que se encontra longe da capacidade analítica da razão.

Ainda que atraído pelas afirmações de Santo Tomás (1944), Cantor reconheceu nelas uma declaração de renúncia investigativa de um sério problema que carecia de uma explicitação mais clara e precisa.

De certo modo, a posição negativa de Santo Tomás de Aquino se fazia bastante presente à época de Cantor. O *continuum* era tratado como uma categoria absolutamente incompatível com a análise matemática que, até o aparecimento dos resultados mais recentes da teoria de conjuntos, não possuía, e nem poderia chegar a possuir, os recursos necessários e suficientes para se adaptar à natureza não-discreta do *continuum*.

No entanto, ao construir sua teoria dos números reais, Cantor concluiu que era possível fornecer uma análise puramente aritmética do *continuum*, isto é, uma análise livre das comuns acepções espaciais e temporais acerca do *continuum*.

Tomando como ponto de partida sua definição de números reais (1872),

conjuntos derivados de conjuntos de números racionais, e com o auxílio das definições elaboradas nos *Grundlagen*, principalmente as de *conjunto denso* e de *conjunto perfeito*, Cantor pôde definir o conceito de *ponto conectado*. Conclui que a idéia de *ponto conectado* é central para a consideração de um conjunto contínuo.

Here 'perfect' and 'connected' are not simply words, but through the preceding definitions they are quite general predicates, conceptually characterized most sharply, of the *continuum*.

(Cantor 1883, p.194, em Dauben 1979, p.110)

De posse das definições acima mencionadas, Cantor acredita ter circunscrito formalmente a essência da noção de continuidade, apontando falhas nas abordagens tanto do matemático tcheco Bolzano, como na de seu próprio amigo e correspondente Richard Dedekind.

Segundo Cantor, tanto um como outro apontaram, de maneira isolada, uma ou outra dessas duas propriedades do *continuum*. Bolzano apontou o que poderíamos chamar de *conectude* e Dedekind a *perfeição*; contudo, segundo Cantor, é necessário unir essas duas idéias para a obtenção de uma idéia mais fidedigna do *continuum*.

Mesmo apontando a importância de uma definição mais precisa do *continuum*, Cantor não consegue estabelecer de maneira definitiva uma relação formal entre os conceitos de *potência* e *continuum*. Ou seja, era necessário ainda estabelecer, de maneira mais explícita, as afirmações sobre a potência do *continuum*.

Até o momento Cantor havia estabelecido que a potência da segunda classe de números era maior que a potência da primeira classe. Somente em 1895 e 1897, com as publicações da primeira e da segunda parte dos *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, é que essa questão ganha um tratamento mais definitivo por parte de Cantor, por meio da apresentação da sucessão hierárquica dos números cardinais transfinitos. Assim, durante os anos dos *Grundlagen*, ao menos duas classes de infinitos estavam firmados, a dos conjuntos enumeráveis e a dos conjuntos não-enumeráveis.

Nos termos dos *Beiträge*, dado qualquer subconjunto A de $\aleph$, ou A possui a cardinalidade de $\aleph$, ou A é enumerável. Como vemos, há apenas duas alternativas: ou A é um conjunto enumerável, ou é não-enumerável.

A hipótese do *continuum*, como passou a ficar conhecida a afirmação segundo a qual não há uma cardinalidade intermediária entre as cardinalidades dos *naturais* e dos

reais, pode ser representada com a igualdade

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Essa igualdade resume a idéia de que não há outras coleções infinitas, que se apresentem como subconjuntos de $\aleph_1$, cujas cardinalidades sejam diferentes de $\aleph_0$ ou do próprio $\aleph_1$. Apesar da aparente simplicidade dessa afirmação e de sua verdade intuitiva, Cantor não obteve êxito em uma demonstração convincente para ela, não obstante suas muitas tentativas.

2.2.3 Cardinalidade

A idéia de cardinalidade que encontramos nos *Beiträge* depende, em grande parte, do desenvolvimento que a definição de conjunto sofreu desde a publicação dos *Grundlagen*.

Em 1883 era importante que a idéia mais básica de um conjunto fosse a de um todo dado completamente, uma coleção completa de elementos. Essa característica essencial de conjunto estava de acordo com o projeto dos números transfinitos. Era necessário conceber as coleções de números infinitos como completas para que a idéia de um número transfinito tivesse êxito. É assim que encontramos essa definição de conjunto nas palavras de Cantor, onde toda a energia é focada na idéia de coleção completa:

By an “aggregate” or “set” I mean generally any multitude which can be **thought** of as a whole, i.e., any collection of definite elements which can be united by a law into a whole.

(Cantor 1883, p.204, em Dauben 1979, p.170, *grifos nossos*)

Nos *Beiträge*, a definição de conjunto preserva a idéia estabelecida nos anos anteriores de um todo completo; no entanto, com o aparecimento da definição de potência de um conjunto, notamos que ocorre um deslocamento do centro de gravidade desse conceito:

By an “aggregate” (*Menge*) we are to understand any collection into a whole (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) M of definite and separate objects m of our **intuition** or our **thought**. These objects are called the “elements” of M .

In signs we express this thus:

$$M=\{m\}.$$

(Cantor 1955[1897], p.85, grifos nossos)

A teoria de conjuntos de pontos está cada vez mais em segundo plano, e a teoria geral de conjuntos começa a se apoiar em suas próprias conquistas. Uma delas é, justamente, a idéia de *cardinalidade* que passa a expressar a potência de um conjunto M . A notação utilizada por Cantor é $\overline{\overline{M}}$, apresentada pela primeira vez em 1887, denotando que o conjunto M passa por um duplo processo de abstração no qual, *por força do pensamento*, ignoramos as qualidades individuais de cada elemento m , pertencente a M , assim como a possível relação de ordem entre esses elementos.

We will call by the name "power" or "cardinal number" of M the general concept which, by means of our active faculty of **thought**, arises from the aggregate M when we make abstraction of the nature of its various elements m and of the order in which they are given.

We denote the result of this double act of abstraction, the cardinal number or power of M , by

$$\overline{\overline{M}}.$$

(Cantor 1955[1897], p.86, grifos nossos)

Também não podemos deixar de assinalar que tanto na definição geral de *conjunto* como na definição de *número cardinal*, ou *potência de um conjunto*, Cantor recorre ao que ele chama de “poder do pensamento”, para se referir à capacidade de abstrair certas qualidades e relações no ato da formação de ambos os conceitos. Esse apelo a intuição está diretamente vinculado a sua concepção filosófica de axioma.

Neste momento nos encontramos um passo além em relação às concepções anteriores de conjunto e potência de um conjunto, dado que, tanto uma quanto a outra, ainda se mostravam, em algum grau, dependentes de noções oriundas da geometria e da física. Devemos lembrar que um conjunto era concebido, primordialmente, como um agregado qualquer de pontos em um espaço n -dimensional.

A partir das definições acima Cantor apresenta os números cardinais finitos como coleções finitas de elementos $\overline{\overline{A}}=1, \overline{\overline{B}}=2, \overline{\overline{C}}=3, \dots$, onde o conjunto $\overline{\overline{A}}$ possui exatamente um elemento, $\overline{\overline{B}}$ possui exatamente dois elementos, $\overline{\overline{C}}$ possui exatamente três elementos, etc.

Entre os muitos resultados obtidos por meio dessas definições encontramos um dos mais importantes para nós. Através da apresentação de uma seqüência finita de números cardinais, Cantor está pronto para apresentar uma relação hierárquica entre eles. Assim, dada a sucessão finita de cardinais $1, 2, 3, \dots, n$ é possível estabelecer que, para todo n nessa sucessão, $n+1$ contém n ou que, em outras palavras, $n+1$ é estritamente maior que n . Além disso, entre n e $n+1$, não há nenhum outro número cardinal inteiro. Disso se deriva que não é possível estabelecer uma relação, um-a-um, entre um conjunto finito qualquer e um subconjunto próprio desse conjunto. O princípio *o todo é maior que a parte* é preservado no caso dos coleções finitas.

Após definir conjuntos finitos como conjuntos que podem ser expressos por um número cardinal finito, ou que possuem uma cardinalidade finita, Cantor apresenta o primeiro número cardinal transfinito, denotado por $\aleph_0$ (*Aleph zero*), como o número cardinal das coleções infinitas de primeira classe, onde $\aleph_0$ tem a potência da coleção de todos os números cardinais finitos.

A escolha dessa notação possui um significado muito especial para Cantor. A primeira letra do alfabeto hebraico, o $\aleph$, também é utilizada, nessa língua, para representar a *unidade*, seja em sentido aritmético, seja em sentido teológico. Os números transfinitos deveriam representar unidades infinitas, um conceito bastante longínquo das concepções matemáticas de então, no entanto bastante próximo das concepções teológicas da tradição judaico-cristã. O $\aleph$ representa essa unidade do infinito buscada por Cantor e, simultaneamente, o $\aleph$ também representa uma união entre seu amplo interesse pela matemática e suas profundas convicções místico-religiosas.

A partir da idéia de conjuntos bem ordenados e do primeiro número cardinal transfinito, $\aleph_0$, Cantor é capaz de conceber uma sucessão bem ordenada, infinita, de números cardinais transfinitos, $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph, \aleph_\nu, \aleph, \aleph_\omega$, porém nada nos *Beiträge* se apresenta como uma demonstração definitiva da existência de $\aleph_\omega$.

Somando-se a isso ainda deve ser assinalada a ausência de uma prova de que todo conjunto pode ser bem ordenado, assim como a ausência de um mecanismo mais efetivo de comparação e distinção para todos os números cardinais, sem falar na própria *Hipótese do Continuum*, que ainda aguardava o *status* de teorema.

2.2.4 Os paradoxos

O aparecimento das antinomias de Burali-Forti (1981 [1897]) e de Russell (1985 [1903]) suscitaram a sensação geral entre os matemáticos de que a teoria de conjuntos de Cantor não caminhava bem.

O paradoxo de Burali-Forti, ou o paradoxo do maior número ordinal, coloca em xeque um importante resultado dos *Beitrage*. Como sabemos, nessa obra Cantor associa um número ordinal a todo conjunto bem ordenado. Mencionamos, na seção anterior, que ele também obtém, como teorema, a afirmação que todos os números ordinais devem ser comparáveis entre si, isto é, para todo número ordinal α e β , uma das três condições seguintes é sempre satisfeita: $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Para Burali-Forti é fácil gerar uma inconsistência da afirmação que todo conjunto bem ordenado possui um número ordinal correspondente. Seja W o maior conjunto bem ordenado, ou o conjunto de todos os números ordinais. Então W possui um número ordinal β maior que qualquer número ordinal. Porém, W deve conter todos os números ordinais, incluindo β , resultando na afirmação de que $\beta < \beta$.

Da consequência $\beta < \beta$, Burali-Forti conclui que é falsa a afirmação segundo a qual, dados dois números ordinais quaisquer, estes são necessariamente comparáveis entre si, nos termos em que Cantor propõe essa comparação. O caso exemplar é o próprio *maior número ordinal*.

Como contra-argumento, Cantor afirma que a coleção de todos os números ordinais não é uma coleção bem definida. Isto é, W não é, de fato, um conjunto. Como vimos, uma de suas definições mais importantes afirma que conjunto é apenas aquele agregado, abstraído de um dado domínio de elementos, que permite, sem contradição, ser concebido como um todo completo.

Para defender parte da teoria de conjuntos em relação ao paradoxo de Burali-Forti, especialmente a comparabilidade entre números ordinais, Russell opta por interpretar que W não pode ser um conjunto bem ordenado. No entanto, essa interpretação também é danosa à teoria de conjuntos. Particularmente, o teorema de que todo conjunto pode ser bem ordenado perde sua razão de ser. De igual modo, a comparabilidade entre números cardinais também fica sem fundamento.

E é também Russell quem, por sua vez, apresenta outra importante antinomia. O

surgimento do paradoxo que ganhou o seu nome está explicitamente vinculado ao projeto logicista. Especificamente, ao sistema lógico elaborado por Frege com o intuito de criar uma base puramente lógica para a aritmética. E para entendermos o paradoxo de Russell é necessário saber como ele afeta o sistema de Frege.

Esse sistema aparece em duas obras, os *Grundlagen der Arithmetik* (1884) e o *Grundgesetze der Arithmetik* (1903). Nelas Frege se esforça em mostrar que a aritmética pode ser completamente desvinculada do psicologismo como, por exemplo, o encontrado na doutrina kantiana, na qual a matemática se reduz a juízos sintéticos *a priori*.

Para Frege, as proposições da aritmética são verdades analíticas. Isto é, a aritmética pode ser reduzida, sem prejuízo, à lógica. Nesse sentido de analiticidade, a matemática seria uma ciência pura, totalmente distante daquilo que pretendiam, por sua vez, os empiristas, que a encaravam como um conjunto de afirmações que generalizava, por meio do princípio de indução, as verdades retiradas da observação atenta da natureza.

Ao construir seu sistema lógico, Frege pretende criar as condições para que as verdades aritméticas possam ser colocadas, consistentemente, em termos estritamente lógicos. Assim, por exemplo, a idéia fundamental de número, antes entendida como um predicado livremente atribuível a coleções ou a coisas, se torna um predicado estritamente atribuível a conceitos. Ainda que os números existam *realmente* e de maneira independente, como objetos lógicos, só é legítimo falar deles quando entendidos como predicados de conceitos.

Seja F um conceito qualquer, o número desse conceito é denotado por $NxFx$. Seja também a *extensão* do conceito F, a coleção de todos os objetos que recaem sob F, então o número desse conceito passa a ser definido como a extensão de F. Se é possível criar uma correspondência, um-a-um, entre as extensões de dois conceitos, F e G, então estes dois conceitos são ditos *equinumericos*, isto é, possuem o mesmo número.

$$NxFx = NxGx \Leftrightarrow F \approx G$$

Está é a lei número V de Frege, que traduz o princípio de Hume, segundo a qual dois conceitos possuem a mesma extensão, ou possuem o mesmo número, ou são *equinumericos* se, e somente se, é possível criar uma relação um-a-um entre eles. Por meio dessa relação, a seqüência dos números naturais pode ser gerada hereditariamente do modo seguinte.

Se F é o conceito {equinúmero a $x \neq x$ }, a extensão de F , ou o número de F , ou ainda a coleção de todos os objetos que recaem sob este conceito, é denotada por 0. Logo, $NxFx = 0$. Seja G o conceito {equinúmero a $NxFx$ }, então o número de G , a extensão do conceito G , ou ainda a coleção dos objetos que recaem sob o conceito G , é denotado por 1, já que é possível encontrar apenas um objeto que satisfaz a restrição expressa pelo conceito G , a saber, o número do conceito F . Assim, $NxGx = 1$.

Do mesmo modo, seja H o conceito {equinúmero a $NxFx$ ou $NxGx$ }, o número de H é dado pelo conceito equinúmero à extensão de H , logo $NxHx$ é 2. Em resumo, um número é sempre a extensão de um conceito. Assim, um número é real e independente se existir um conceito para o qual ele sirva de predicado, como sua extensão ou como seu número. Assim, a definição de número pode ficar restrita ao contexto da lógica.

Além disso, no sistema de Frege a relação de pertinência não é um primitivo, mas é definida do seguinte modo: $x \in y$ se, e somente se, existe um conceito F , tal que Fx , e y é a extensão de F . Isto é, dentro da coleção y de objetos que recaem sob o conceito F , encontramos o objeto x , e denotamos $x \in y$.

Russell sugere, em carta a Frege, a consideração do conceito R {extensão que não contém a si mesma}, ou seja, Russell sugere um conceito perfeitamente aceitável dentro da proposta de Frege e cuja extensão, naturalmente, deve reunir todos aqueles objetos que recaem sob ele. O paradoxo aparece no exato momento em que propomos a pergunta: a extensão de R , recai sob o conceito R ? Ou, de outro modo, a extensão de R pode ser considerada como um objeto que pertence à coleção dos objetos definidos pelo conceito R ? Ou ainda, a extensão de R pertence a si mesma?

Seja x a extensão de R e y a coleção dos objetos definidos pelo conceito R , então $x \in y \Leftrightarrow y \notin y$, porém x e y se referem ao mesmo objeto, logo $x \in x \Leftrightarrow x \notin x$. De modo que, se respondemos a pergunta “a extensão de R recai sob R ?” pela negativa, então a extensão de R satisfaz a condição imposta pela definição do conceito e, portanto, deve recair sob R , contrariando a nossa resposta negativa. Por outro lado, se respondemos pela afirmativa, então a definição do conceito exclui esse objeto, e mais uma vez temos nossa resposta contrariada.

Assim, qualquer que seja nossa resposta para a pergunta de Russell, a inconsistência aparece. O sistema de Frege sofre um severo golpe em sua base. É

justamente a lei número V, unida à definição de pertinência, que gera a nociva antinomia. O sistema de Frege se mostra inconsistente e seu projeto logicista naufraga de maneira estrondosa, afetando também outros projetos de fundamentação da aritmética, como a própria teoria de conjuntos.

Os dois paradoxos acima são muitas vezes utilizados como principal peça de ataque à concepção *naïve* da teoria de conjuntos³⁶. Ao mesmo tempo, os paradoxos são também utilizados como base argumentativa em prol de uma postura axiomática, ou seja, a postura axiomática evitaria o aparecimento dos paradoxos, como os de Russell e de Burali-Forti.

No cerne da problemática que reúne o aparecimento dos paradoxos está o princípio segundo o qual todo predicado possui uma extensão. É justamente este princípio que sofre uma restrição com a substituição do *Axioma da Compreensão* pelo *Axioma da Separação*, no seio da teoria axiomática de Zermelo.

Mas a pergunta que nos propomos aqui não é, propriamente, se a postura axiomática é ou não a única alternativa para as dificuldades da teoria de conjuntos *naïve*. Anterior a esta questão, e de maneira mais fundamental, trata-se de saber se Cantor considerava o aparecimento das antinomias como um problema real para a sua teoria.

Obviamente Cantor sabia dos resultados de Russell. Mais do que isso, anos antes ele mesmo já havia considerado as conseqüências de se assumir um conjunto sem qualquer restrição. Isto fica bastante claro em uma carta endereçada a Hilbert em 26 de setembro de 1897:

(...) Totalidades que não podem ser consideradas como sendo conjuntos (um exemplo é a totalidade de todos os *alephs* como foi mostrado anteriormente), eu denominei há muitos anos de ***totalidades absolutamente infinitas***, as quais eu distingui cuidadosamente dos conjuntos transfinitos
(Cantor, citado por Viero 1997, p. 126, grifos nossos)

Pode-se dizer que Cantor estava menos preocupado com a consideração dos paradoxos do que com a procura de uma demonstração para a *Hipótese do Continuum*. Isto se justifica se considerarmos que, além dos resultados matemáticos mais imediatos de sua teoria, Cantor tinha a intenção clara de fornecer um tratamento matemático e

³⁶ É possível mencionar ainda os paradoxos de Cantor e de Richard, para mais detalhes ver Karel Hrbacek & Thomas Jech 1978.

conceitual, absolutamente novo, para a idéia de infinito. Mas, para ele, este novo tratamento, assim como a própria idéia de infinito, envolviam muitos outros aspectos. Aspectos estes que não podiam se limitar àqueles da axiomática formal.

A *rigidez* da postura axiomática formal descartaria, antecipadamente, a consideração de tais aspectos anteriores à própria teoria, colocando em segundo plano uma discussão que Cantor bem poderia querer trazer para o centro das atenções. Os chamados paradoxos eram apenas a consideração problematizada da perspectiva lógico-formal, de parte vital de sua concepção filosófica e teológica do *Absolutum*.

O infinito atual pode ser dividido em três categorias: a *primeira*, o infinito perfeitamente realizado em *Deo* o qual eu denomino de absoluto; a *segunda*, o infinito presente no mundo criado e a *terceira* o infinito como objeto matemático, i.e., como cardinal, como ordinal ou tipo ordinal que pode ser considerado *in abstracto* pelo intelecto humano. As duas últimas categorias, que evidentemente representam uma versão limitada do infinito atual na medida em que elas são capazes de serem aumentadas e que eu denomino de *Transfinitum* ao qual eu cuidadosamente diferencio do *Absolutum*.

(Cantor, segundo Purket 1989, p. 59, em Viero 1997, p. 127)

Cantor via os paradoxos de uma perspectiva mais ampla, na qual estes se tornavam um aspecto do infinito atual, o *Absolutum*, que por sua natureza mesma não poderia jamais receber um número³⁷. Não podemos dizer que essa perspectiva do pensamento de Cantor representa uma mera estratégia para se afastar *ad hoc* das dificuldades que os paradoxos representavam para sua teoria, tendo em vista a ordem cronológica em que estes fatos se apresentam.

Da mesma forma não se pode negar, e nisto testemunhos históricos são abundantes, que as concepções teológicas e filosóficas de Cantor o aproximam de uma postura platônica. Essa postura estava em franca oposição às de alguns matemáticos que, à sua época, defendiam com igual intensidade tanto a axiomática formal como a idéia de um infinito potencial aristotélico. Assim, o *platonismo* de Cantor não pode ser colocado como coadjuvante neste enredo, sob pena de esvaziarmos o significado filosófico de sua teoria.

Este esvaziamento filosófico acabou sendo realizado por uma vasta literatura

³⁷ Vide seção sobre Platão (análise dos diálogos *Filebo* e *Parmênides*), na qual um raciocínio semelhante é apresentado.

especializada que, de certa forma, ignorou muitos, ou quase todos, aspectos não-matemáticos envolvidos nos trabalhos de Cantor, não se dando conta, principalmente, daqueles que envolviam suas concepções filosóficas e teológicas.

Ao assumirem esta postura, muitos pesquisadores acabaram por ignorar parte substancial das motivações que levaram Cantor a não se preocupar, por exemplo, em construir um modelo axiomático formal para a sua teoria³⁸.

Exemplo disso é que um dos principais alvos de ataque à teoria *naïve* é, entre outros, sua base, qual seja, a definição de conjunto fornecida nos *Grundlagen*. É, vez por outra, denunciada a fragilidade dessa definição, suscitando uma controvérsia acerca do que pode e do que não pode ser considerado uma coleção, uma totalidade, ou mesmo sobre aquilo que pode conferir significado ao termo objeto.

Além disso, a definição dos *Grundlagen* limita a concepção de conjunto somente àqueles objetos que podem ser reunidos, como uma coleção totalizada, em nossa intuição ou pensamento. Não é necessário dizer que isto limita a classe dos conjuntos somente àquilo que nos é acessível ao intelecto. E saber o que nos é acessível ao intelecto, por si só, já representa uma acirrada e muitas vezes infrutífera disputa filosófica. Por outro lado, o conjunto vazio pode não ser contemplado por esta definição, já que para todo conjunto é pressuposta uma coleção de objetos definidos.

Há ainda, na definição de 1883, o uso explícito dos termos “pensamento” e “intuição”, o que, também, justificaria longas discussões. Não é de espantar que matemáticos e filósofos considerem a definição dos *Grundlagen* como problemática e fonte de polêmicas intermináveis.

Como se todas estas dificuldades ainda não fossem suficientes, ainda existe a polêmica em torno das antinomias, derivadas de uma leitura axiomatizada da concepção *naïve* da teoria de conjuntos. Assim, para os críticos mais ácidos, e entre eles encontramos Kronecker e Poincaré, essa definição dos *Grundlagen* deixou de ser estéril para se tornar fértil em inconsistências³⁹.

³⁸ Ver Viero 1997, p.7-109

³⁹ Para a obtenção de uma prova da inconsistência da teoria *naïve* a partir da perspectiva axiomática ver Viero 1997, p.51-52.

2.3 A fundamentação filosófica do infinito cantoriano

Com o aparecimento da concepção aristotélica de infinito, esta paulatinamente passou a predominar em filosofia e em matemática, tornando-se o pensamento oficial sobre o assunto.

É justamente essa matriz teórica sobre o conceito de infinito que tomaremos como paradigma (Kuhn 2003)⁴⁰. Do nosso ponto de vista, este paradigma sofreu um severo golpe, a partir dos séculos XIX e XX, com o surgimento da teoria dos números transfinitos de Cantor.

Sabemos que a influencia do paradigma aristotélico do infinito não se limitou aos escolásticos, atingindo também os filósofos do século XVII e XVIII e chegando até aos nossos dias.

Certamente Cantor não estava alheio à grande novidade que estava a ponto de introduzir e à conseqüente oposição que sofreria, tanto por parte de matemáticos, como pelos filósofos e, até mesmo, por teólogos e religiosos em geral. Prova disso é que parte dos *Grundlagen*, além de muitos outros escritos posteriores, foi resultado de um esforço em fornecer argumentações extra-matemáticas à essa idéia radicalmente contrária à longa tradição fundada pelo infinito potencial aristotélico.

Segundo a fórmula aristotélica existiriam, em ato, apenas números finitos. Como conseqüência disso, conjuntos infinitos não existiriam como *formas* (idéias) completas. Isto é, apenas conjuntos finitos poderiam receber um número ou, em outras palavras, ser enumerados. A possibilidade de enumeração de conjuntos infinitos ficava absolutamente excluída.

Um exemplo do tipo de argumentação bastante utilizada contra a existência de números infinitos era a de que esta existência faria colapsar verdades matemáticas bem consolidadas como, por exemplo, uma bem conhecida propriedade da adição na qual, dados quaisquer números inteiros positivos a e b , $a + b > a$ e $a + b > b$. O que também pode ser expresso pela fórmula: *o todo é sempre maior que a parte*.

Porém Cantor entende que a proibição, em princípio, da consideração de conjuntos infinitos completos e enumeráveis não estava suficientemente justificada. Assevera ele que é possível realizar uma aritmética para números infinitos sem, com isso,

⁴⁰ Explicitaremos em detalhes o uso do conceito de Paradigma nos dois capítulos seguintes.

gerar inconsistências com as propriedades da aritmética para números finitos:

All so-called proofs of the impossibility of actually infinite numbers are, as may be shown in every particular case and also on general grounds, false in that they begin by attributing to the numbers in question all the properties of finite numbers, whereas the infinite numbers, if they are to be thinkable in any form, must constitute quite a new kind of number as opposed to the finite numbers, and the nature of this new kind of number is dependent on the nature of things and is an object of investigation, but not of our arbitrariness or our prejudice.

(Cantor 1955[1897], p.74)

De seu ponto de vista, uma aritmética infinitária não faz colapsar a aritmética finitária. Trata-se de uma extensão inteiramente nova do campo das propriedades aritméticas e não de simples geração de antinomias. Indo bastante além nas idéias de desbravadores como Leibniz e Bolzano, Cantor entendeu que é possível quantificar o infinito, causando espanto na comunidade matemática.

Esse espanto se alastrou pela comunidade filosófica e atingiu, até mesmo, alguns importantes setores da Igreja que não concordavam com a forma como as coisas se encaminhavam no sentido da subversão do paradigma vigente. Basicamente, para os defensores desse paradigma, o infinito tem somente a si mesmo como medida, não estando ao alcance da razão humana legislar sobre ele.

2.3.1 Os aspectos religiosos

Lembro que Cantor era de ascendência judaica e que há, na tradição mística do povo judeu, a idéia de Moisés como intérprete da voz divina para os filhos de Israel. Essa visão foi desenvolvida, mais radicalmente, por Maimonides, cujo pensamento encontra, no Rabino Mendel de Rymanóv, seu mais importante porta voz. Segundo este, tudo o que Israel ouvira da revelação no Monte Sinai foi o Aleph, com que o texto bíblico começa o primeiro Mandamento — o Aleph da palavra ‘anokhi’ (eu). Aliás, o aleph sempre foi tido, pelos cabalistas, como a raiz espiritual de todas as outras letras, encompassando, em sua essência, o alfabeto todo e, portanto, todos os outros elementos do discurso humano. Mas, ouvir o Aleph é ouvir quase nada, não transmite um significado específico. No entanto, por isso, o ocorrido no Monte Sinai transforma-se em uma revelação mística, impregnada de um significado infinito e que, para tornar-se uma fundamentação da autoridade religiosa, deve ser traduzida na linguagem humana. Foi o que fez Moisés.

Ouso interpretar que ao escolher o Aleph para representar as infinidades, mesmo que não conscientemente, Cantor chama para si o papel de Moisés, vertendo para a língua dos homens a, até então, inconcebida linguagem do infinito

Irineu Bicudo⁴¹.

⁴¹ **Bicudo 2003**, p.20.

Com a discussão dos aspectos religiosos envolvidos na idéia de infinito em Cantor, queremos deixar claro que nela podemos encontrar uma complexidade que transcende a estrutura puramente matemática dos *Grundlagen* e dos *Beiträge*, indo se acomodar em âmbitos cuja importância não pode ser ignorada se pretendemos conhecer as bases mais fundamentais que motivaram e sustentaram esses trabalhos.

Nos anos que se seguiram à publicação dos *Grundlagen* Cantor se viu envolto em uma polêmica religiosa envolvendo sua nova teoria sobre o infinito atual (Dauben 1979). Segundo uma determinada tradição teológica, uma teoria como a de Cantor poderia ser interpretada como contrária ao pensamento oficial da Igreja, pensamento este que havia sido expresso desde o Papa João XXI⁴².

Alguns padres da alta cúpula do Vaticano não viam com bons olhos uma teoria a respeito de coleções infinitas e completadas de números, pois isto poderia significar a racionalização sobre a própria potência divina e o reavivamento de uma antiga disputa entre teólogos.

Esta disputa pode ser resumida como a oposição entre os teólogos que afirmavam que as ciências deveriam se acomodar às verdades da Igreja, nesse grupo se encontrava o próprio Papa Leo XIII como líder dos denominados *tomistas*, e aqueles outros que acreditavam que as afirmações das ciências não necessariamente se colocariam de maneira antagônica a essas verdades. Esses últimos eram denominados *neo-tomistas*.

Dentro desse contexto, é importante mencionar um artigo de 1886 de Constantin Gutberlet, um importante estudioso de questões filosóficas e teológicas que encabeçava o movimento *neo-tomista* na Alemanha⁴³. No interior dessas discussões, Gutberlet era um defensor da tendência que apoiava o livre desenvolvimento das ciências.

Para ele, o estudo do infinito atual na matemática representava um desses fatos científicos que não poderiam ser ignorados nas discussões de ordem teológica. Em particular, porque os estudos de Cantor se conformavam com a sua própria argumentação no sentido de provar a existência de um tipo teológico de infinito atual. Argumentação essa que, nesse momento específico, sofria muitos ataques dos *tomistas*, principalmente,

⁴² Ver discussão realizada no primeiro capítulo, principalmente a seção dedicada aos medievais.

⁴³ Ver **Dauben 1979**, p.140-148

de Caspar Isenkrahe.

A contra-argumentação de Isenkrahe tinha por base um tipo de argumentação clássica⁴⁴. A defesa dessa tradição conduzia Isenkrahe à conclusão de que as assunções de Gutberlet implicavam em uma flagrante contradição. Isto é, o conceito de infinito atual era evidentemente problemático, para não dizer auto-contraditório.

Os detalhes do debate entre Isenkrahe e Gutberlet importam menos que a estratégia adotada por Gutberlet para proteger as suas próprias idéias. Essa estratégia consistia, justamente, em defender o infinito atual de Cantor, como uma consequência da natureza mesma de Deus. Em suma, se Deus existe, como ser onipotente, então os números transfinitos de Cantor devem necessariamente existir, como uma consequência natural dessa onipotência.

But in the absolute mind the entire sequence is always in actual consciousness, without any possibility of increase in the knowledge or contemplation of a new member of the sequence.

(Gutberlet 1886, in Dauben 1979, p. 143)

Nos termos da argumentação de Gutberlet, um infinito outro que não o atual não poderia representar o *verdadeiro* infinito, já que um infinito concebido como meramente potencial contradiz a onipotência divina. Essa onipotência deveria garantir, portanto, a existência, ou a realidade *in abstracto*, tanto de uma solução para a *Hipótese do Continuum* como, também, da coleção completada de todos os números reais. Contudo, é necessário explicitar em que termos está pautada, para Gutberlet, a existência do infinito atual, garantida pela onipotência de Deus.

Mas também, e igualmente por razões puramente teológicas, Gutberlet negava enfaticamente a existência *in concreto* de um infinito atual. É sabido que a aproximação entre a potência infinita de Deus e o mundo concreto gera, no interior das discussões religiosas, uma postura panteísta considerada oficialmente herética pelo decreto do Papa Pio IX, de 1861⁴⁵. Assim, é compreensível porque, tanto Gutberlet como seu professor, o Cardeal Franzelin, membro do Conselho do Vaticano, só podiam admitir a coleção infinita completada de números transfinitos *in abstracto* e não como *natura naturata*, ou *in*

⁴⁴ Ver a seção dedicada aos medievais, principalmente o momento sobre São Tomas de Aquino, no primeiro capítulo deste trabalho.

⁴⁵ Como ilustres defensores da posição Panteísta encontramos Giordano Bruno e Spinoza.

concreto, como pretendia Cantor (Dauben 1979).

Devemos lembrar que o fervor religioso de Cantor era tal que o mantinha em estreita relação, através de uma constante troca de correspondências, com diversas personalidades do interior da Igreja Romana. Entre eles estava o próprio Cardeal Franzelin, ao qual, em uma carta datada de 22 de Janeiro de 1886, Cantor explicita sua distinção entre (1) *Infinitum aeternum increatum sive naturata* e (2) *Infinitum creatum sive Transfinitum*, acreditando, com isso, poder resgatar, em sua teoria, uma visão do infinito atual *in concreto* e, ao mesmo tempo, afastar definitivamente o problema do Panteísmo.

Para ele, o atributo (1) às entidades infinitas, reservava-se exclusivamente à instância divina, enquanto (2) poderia ser atribuído, sem problemas, a uma determinada *realidade concreta*.

Esta *realidade concreta* e infinita teria começado a se revelar, como tal, através da coleção dos números transfinitos. Estes representariam, *in abstracto*, a coleção infinita atual dos objetos existentes no universo criado. Assim, acreditava Cantor, seu infinito poderia ser aceito pela Igreja não apenas como um infinito lógico, mas também como um infinito concreto, prova da potência criadora de Deus (Dauben 1979).

O infinito absoluto estaria reservado a Deus, enquanto que o transfinito atual seria uma qualidade do Universo criado. E, com essa distinção, Cantor conseguiu vencer as últimas resistências que Franzelin ainda impunha ao seu infinito atual.

Thus the two concepts of the Absolute-Infinite and the Actual-Infinite in the created world or in the *Transfinitum* are essentially different, so that in comparing the two one must only describe the former as *properly Infinite*, the latter as improperly and equivocally infinite. When conceived in this way, so far as I can see at present, there is no danger to religious truths in your concept of the *Transfinitum*.

(Franzelin, em Dauben 1979, p.146)

O endosso da teoria dos números transfinitos, por parte da Igreja, é realizado, como se vê, em termos pouco elogiosos e mesmo diversos do *status* que Cantor almejava para o seu infinito atual, isto é, como infinito em sentido próprio. No entanto, Cantor estava bastante satisfeito, e até mesmo orgulhoso, por sua conquista junto a uma das autoridades religiosas mais próximas do Papa. Essa conciliação estava de acordo com os seus impulsos mais íntimos de vocação e contribuição religiosa. Esses impulsos aparecem

na forma de sua ontologia dos números.

Acreditamos que esses comentários são importantes para que doravante possamos sopesar de maneira mais equilibrada nossas considerações acerca do contexto em que a ontologia dos números transfinitos se coloca. Trata-se de um contexto que não se reduz, exclusivamente, aos anseios puramente matemáticos, assim como reitera Dauben:

In fact, for him the mathematical, metaphysical, and theological aspects of his transfinite set theory were mutually reinforcing. Cantor was convinced that his discoveries were not only essential for the future development of pure mathematics but that set theory could even be used to refine philosophy and to support theology.

(Dauben 1979, p.119)

Para Cantor, a existência dos números transfinitos poderia ser compreendida tanto *a priori* como *a posteriori* (Dauben 1979). O primeiro nível de existência dos números transfinitos, a existência *a priori*, estaria garantido pela própria existência de Deus. Isto é, uma vez assumida a perfeição de um *ser* criador onipotente, e aqui Cantor parece tomar emprestada a argumentação de Gutberlet, a coleção dos números transfinitos seria não apenas uma possibilidade, mas uma necessidade.

O segundo nível de existência, *a posteriori*, poderia ser verificado com o auxílio das ciências naturais. Na medida em que uma coleção finita de enunciados, por maior que fosse essa coleção, não poderia jamais explicar *completamente* o menor dos fenômenos empíricos, vê-se garantida a necessidade da assunção de um *transfinitum* em uma realidade do tipo *natura naturata*. Ou seja, somente uma coleção infinita de enunciados seria suficiente para explicar *completamente* os fenômenos naturais. Daí a necessidade, para Cantor, da aceitação do *transfinitum in concreto*.

2.3.2 Ontologia do Transfinito

Dedicar-nos-emos agora a tentar compreender com mais detalhes a filosofia que serve de suporte a essa nova concepção de infinito em Cantor. Esta filosofia se resume, basicamente, a uma ontologia dos números transfinitos que, por sua vez, para alguns historiadores, está fundada numa especial forma de platonismo.

Esta ontologia constitui o cerne filosófico do posicionamento cantoriano acerca da existência dos números transfinitos e, também, aquilo que consideramos ser uma má

compreensão da oposição entre concepção *naïve* e concepção axiomática da teoria de conjuntos.

É essencial tentar entender um pouco melhor essa concepção ontológica dos números para compreender, por exemplo, porque Cantor não enxergava como problemática sua definição de conjunto, ao contrário dos adeptos da axiomática formal.

Assim, faz-se necessário, em primeiro lugar, penetrar na distinção cantoriana entre “*realidade imanente*” ou “*realidade intra-subjetiva*” e “*realidade transiente*” ou “*realidade trans-subjetiva*”.

Sobre o primeiro tipo de realidade Cantor nos diz:

First, we may regard the whole numbers as **real** in so far as, on the basis of definitions, they occupy an entirely determinate place in our understanding, are well distinguished from all other parts of our thought and stand to them in determinate relationships, and thus modify the substance of our minds in a determinate way.

(Cantor, em Tait 1998, p.12, *grifos nossos*).

E sobre a segunda forma de realidade acrescenta:

But then, reality can also be ascribed to numbers to the extent that they must be taken as an expression or copy of the events and relationships in the external world which confronts the intellect, or to the extent that, for instance, the various number classes are representatives of powers that actually occur in physical or mental nature.

(Cantor, em Tait 1998, p.12).

Antes de tudo, é importante notar que nos *Grundlagen* Cantor usa de maneira distinta os termos *reellen* e *realen* para se referir aos números. A expressão *reellen Zahlen* é usada para se referir aos números reais de maneira técnica, isto é, como um determinado conjunto de números, denotado por $\mathbb{R}$, que se diferencia de outros grupos de números como, por exemplo, os números naturais. Já a expressão *realen Zahlen*, possui um sentido extra-matemático, um sentido ontológico.

Os *realen Zahlen* são aqueles números cuja existência transcende o puro formalismo. Ou seja, são números que existem de maneira *concreta e atual*, são números que possuem uma concretude em uma dada realidade, seja ela *imanente* ou *transiente* (Dauben 1979).

Para Cantor, seus números transfinitos podem alçar o mesmo *status* ontológico que os números inteiros positivos. Ou seja, tanto os números finitos como os infinitos

estão fundados nos mesmos princípios intuitivos. Do mesmo modo como é possível atribuir, ou enumerar, coleções finitas de maneira bastante natural e intuitiva, igualmente é possível realizar o mesmo procedimento com coleções infinitas.

Como os números finitos encontram suporte em uma dada intuição do mundo, servindo como representações matemáticas para grupos de objetos, também os números infinitos possuiriam um referencial no mundo físico. Os números infinitos seriam legítimos representantes matemáticos de várias instâncias físicas e, assim sendo, encontrariam suporte em uma realidade objetiva, *realidade transiente*.

Quando indagado sobre quais instâncias físicas os números transfinitos seriam representantes matemáticos, Cantor se aproveita da terminologia de Leibniz e propõe, como resposta, a seguinte pergunta: Qual é a potência do conjunto de todas as *mônadas*?⁴⁶ Ainda que não forneça uma resposta precisa à sua própria pergunta, sente que há fortes motivos para acreditar que a matemática dos números transfinitos pode ser uma grande auxiliar em física teórica e aplicada.

No entanto, a teoria dos números transfinitos e, com ela, a totalidade da teoria dos conjuntos não precisava, em princípio, desempenhar qualquer papel numa realidade física dada, assim como é entendida a *realidade transiente* ou objetiva. Sua matemática era acima de tudo uma *matemática livre*, expressão que preferia no lugar da usual *matemática pura*. Por *matemática livre*, Cantor entendia uma matemática cujo único critério de existência para seus objetos fosse a consistência.

Assim, seus números transfinitos possuem uma existência *intrasubjetiva* garantida pela consistência. Nesse sentido, sua definição de conjunto, presente nos *Grundlagen*, não representa uma dificuldade em sua teoria, pois se funda, justamente, na concepção ontológica segundo a qual o número é um *objeto real*.

Sua concepção teórica está, portanto, voltada para uma postura clássica (*naïve*) em que, em um primeiro momento, justificativas ontológicas são necessárias para a apreciação de certos conceitos, assim como para a atestação da existência dos objetos que recaem sob eles. O reconhecimento das verdades dos enunciados que podem ser proferidos sobre ambos é fornecido pela consistência de uma determinada teoria que também garante a existência desses conceitos e objetos.

⁴⁶ Ver referência a carta de Mittag-Leffler de 14 de Novembro de 1884, in: **Dauben 1979**, p.126.

Desde que a existência, *in abstracto*, dos números transfinitos está fundada na intuição de uma dada realidade e desde que as principais asserções verdadeiras sobre eles são dadas pela teoria dos números transfinitos, então os conjuntos, em particular conjuntos transfinitos, são entidades legítimas do ponto de vista da ontologia platônica de Cantor.

Aqueles que discordavam disto ou não estavam de acordo com a sua ontologia — neste caso se trata de uma discordância de princípios, não necessariamente matemáticos —, ou não compreendiam a natureza de sua distinção entre multiplicidades consistentes e multiplicidades inconsistentes. No entender de Cantor, ambas multiplicidades existiam. No entanto, só sobre as primeiras era legítimo formular enunciados matemáticos e julgá-los verdadeiros.

É interessante comparar agora a definição de conjunto dos *Grundlagen* com uma definição posterior.

I call a manifold (an aggregate [Inbegriff], a set) of elements, which belong to any conceptual sphere, well-defined, if on the basis of its definition and in consequence of the logical principle of excluded middle, it must be recognized that it is internally determined whether an arbitrary object of this conceptual sphere belongs to the manifold or not, and also, whether two objects in the set, in spite of formal differences in the manner in which they are given, are equal or not. In general the relevant distinctions cannot in practice be made with certainty and exactness by the capabilities or methods presently available. But that is not of any concern. The only concern is the internal determination from which in concrete cases, where it is required, an actual (external) determination is to be developed by means of a perfection of resources.

(Cantor 1932, p. 150, Tait 1998, p.4)

O que podemos entender de imediato é que esta não é uma nova versão de definição de conjunto, introduzida para substituir a dos *Grundlagen* ou aquela que encontramos nos *Beiträge*. Trata-se tão somente da explicitação de um caso particular, a saber, o de *conjuntos bem definidos*.

Cantor estava preocupado em salientar uma distinção crucial para a qual, ao que tudo indica, poucos tinham dedicado a devida atenção, qual seja: a distinção vital entre *multiplicidades consistentes e inconsistentes*⁴⁷.

Ao mesmo tempo, também estava preocupado em reforçar a concepção de uma

⁴⁷ Para verificar esta problemática recomendamos Viero 1997 (Capítulo 3.2) e Casanave 1995.

matemática livre, isto é, desprendida de quaisquer condições externas do sujeito.

Para legitimar essa matemática livre, Cantor assume que certas entidades, entre elas os objetos de uma esfera conceitual, assim como os próprios conjuntos, devem estar previamente presentes e acessíveis a uma mente dotada dos princípios lógicos que lhes permita manipulá-los devidamente.

Contudo, apesar da liberdade propiciada pela *realidade imanente*, Cantor não exclui a participação da matemática em momentos concretos da *realidade transiente*. Estes momentos envolveriam recursos e desenvolvimentos particulares e contingentes, para cada caso e para cada época específica.

É claro que de um ponto de vista mais rigoroso, ou formal, a definição de conjunto apresentada acima ainda incorre em algumas deficiências a serem reparadas como, por exemplo, uma melhor definição de uma *esfera conceitual*. No entanto, é importante tomar o cuidado necessário para não se tomar os critérios de uma concepção axiomática, qualquer que ela seja, para julgar um domínio de afirmações que não partilham dos mesmos pressupostos.

Cantor não pretendia erguer a sua teoria nas mesmas bases do que veio a ser a axiomática formal e, portanto, não estava preocupado com o que, a partir deste ponto de vista, poderiam ser considerados como excessos e/ou deficiências, visto que suas definições sucessivamente apelavam para pressupostos extra-teóricos.

Ainda assim, Cantor tem o cuidado de salientar que uma *esfera conceitual* só pode fazer referência àquela da aritmética, da teoria das funções e da geometria. No entanto, a princípio, isto em nada impediria que outras esferas conceituais pudessem futuramente ser consideradas a partir dos desenvolvimentos dos métodos e dos recursos técnicos que se tornassem disponíveis.

O que isto quer dizer é que a definição acima e a ontologia de Cantor são suficientemente amplas para abranger tanto os objetos puramente abstratos, tais como os números, como aqueles da ordem do mundo concreto, perfazendo, assim, a base de uma matemática que pode ser considerada tanto livre como aplicada.

Ou seja, a realidade *intra-subjetiva* não descarta a realidade *trans-subjetiva*. Há apenas, por assim dizer, uma prioridade lógica, uma ordem, em que a primeira antecede, necessariamente, a segunda para a construção de uma compreensão intelectual de mundo.

Ou seja, a apreensão matemática de uma realidade *intra-subjetiva* não pressupõe a apreensão matemática de uma realidade *trans-subjetiva*, porém ambas realidades existem.

3. THOMAS KUHN: UMA NOVA HISTORIOGRAFIA PARA AS CIÊNCIAS

Kuhn, em *A Estrutura das Revoluções Científicas*⁴⁸ (1962), chama a atenção para o modo como temos encarado, desde há muito, a filosofia e a história da ciência. Segundo ele, é lugar comum a crença na idéia de que o fazer científico é um processo cumulativo em seu conteúdo e evolutivo em sua marcha.

Desde o início de seu livro, Kuhn defende a posição de que existem diferentes formas de contar a história das muitas ciências particulares e da ciência em geral. A mais cristalizada, contudo, é a que pode ser denominada de história oficial. Esta apresenta a ciência por meio de cartilhas, manuais, compêndios, enciclopédias etc. A principal característica da história oficial da ciência é apresentar o conhecimento científico como o produto de um contínuo e pacífico desenvolvimento da racionalidade humana. Desenvolvimento este que nos aparece como um progresso necessário do puro exercício do intelecto humano.

Kuhn aponta, entretanto, para uma interpretação da história das ciências na qual as mudanças e os desenvolvimentos se dão por meio do que passou a chamar de revoluções científicas. Essa característica revolucionária da prática científica não faz parte da história oficial da ciência.

É, portanto, esta interpretação de uma ciência revolucionária, não-linear, descontínua, repleta de elementos determinantes outros que não a pura racionalidade, e que não são narrados nos livros escolares, que Thomas Kuhn se esforça em esmiuçar durante toda *A Estrutura das Revoluções Científicas*⁴⁹.

O nosso objetivo é mostrar que algo muito semelhante ao explicitado por Kuhn, em *A Estrutura*, também pode ser observado, num panorama mais aberto de consideração. Este panorama pode receber o rótulo de filosofia da matemática. Para tanto, tomaremos um momento isolado da história da matemática que mostra, como nenhum outro, a tentativa de racionalização e de representação daquilo que nos acostumamos a chamar de Problema do infinito.

Desse modo, faremos aqui um apanhado que nos permitirá observar o esquema

⁴⁸ Utilizamos aqui, em grande parte, da 8ª edição de 2003.

⁴⁹ Passaremos a nos referir a esta obra simplesmente como *A Estrutura*.

geral no qual se acomodam os elementos constitutivos da filosofia da ciência de Kuhn. Esta é por ele apresentada de maneira bastante detalhada e cuidadosa, contudo nos deteremos naquilo que consideramos ser o mais essencial para a sua compreensão, tendo em foco os nossos objetivos específicos.

3.1 Paradigma

Kuhn reconhece que sua escolha do termo paradigma, assim como o uso que dele é feito no corpo de *A Estrutura*, pode sugerir algumas interpretações diferentes daquela que ele mesmo tentou conferir a este conceito, no início de seu prefácio a esta obra, quando afirma, por exemplo:

Considero “paradigmas” as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência.

(Kuhn 2003, p.13)

Não entraremos nas discussões sobre os motivos que conduziram Kuhn a uma reformulação de sua apresentação do conceito na reedição de seu livro⁵⁰. De modo que simplesmente tomaremos este termo nos dois sentidos oficialmente reconhecidos por Kuhn e reafirmados por ele no *Posfácio* de 1969:

Percebe-se rapidamente que na maior parte do livro o termo “paradigma” é usado em dois sentidos diferentes. De um lado, indica toda a constelação de crenças, valores, técnicas etc., partilhadas pelos membros de uma comunidade determinada. De outro, denota um tipo de elemento dessa constelação: as soluções concretas de quebra-cabeças que, empregadas como modelos ou exemplos, podem substituir regras explícitas como base para a solução dos restantes quebra-cabeças da ciência normal.

(Kuhn 2003, p.220)

O primeiro sentido, também chamado por Kuhn de “sociológico”, é bastante geral e reúne as crenças, as técnicas e os valores que são compartilhados por uma comunidade qualquer, em particular pelas comunidades científicas. Podemos entender este sentido sociológico do termo como um acordo tácito ou explícito, bastante amplo, entre os membros de uma determinada comunidade de pesquisa científica. Sob o

⁵⁰ Essas polêmicas giram em torno, principalmente, das diversas acusações de que Kuhn estivera tentando transformar a narrativa da prática científica em um amontoado de afirmações subjetivas, irracionais ou relativistas.

emblema deste acordo, encontramos as normas, os objetivos, a linguagem e os ideais assumidos pelo grupo de pesquisadores que o compartilham.

Nesse sentido amplo ou sociológico, paradigma se assemelha a uma “bandeira”, a um “emblema”. Paradigma é algo a ser defendido e fortalecido pela prática diária que, ao mesmo tempo, obedece, justamente, os preceitos fornecidos pelo próprio paradigma. Portanto, o paradigma fornece a coesão da comunidade científica e esta, com suas realizações, consolida o paradigma. Percebemos que, em princípio, este sentido do termo já oferece dificuldades de interpretação, principalmente devido à complexidade inerente ao conceito.

Essa compreensão complexa do termo é importante porque nos empurra, de imediato, para uma interpretação não linear do processo de amadurecimento de uma comunidade, especialmente de uma comunidade científica e de suas práticas habituais ou anômalas. Isso, por si só, já bastaria para colocar Kuhn em uma rota direta de colisão com a concepção clássica de desenvolvimento da ciência. Os defensores dessa concepção mais tradicional irão dizer que essa complexidade também pode ser interpretada como uma certa imprecisão, na definição do conceito de paradigma.

De modo que, para os opositores de Kuhn, essa definição ampla abre espaço para pesadas críticas, todas elas baseadas na circularidade de sua definição de paradigma. Assim, se fosse reescrever o seu livro, diz Kuhn, o faria de modo a evitar essa circularidade que, segundo ele, representa uma dificuldade real em sua obra. Em seu entender, essa circularidade seria evitada definindo comunidade científica de maneira independente da noção de paradigma:

As comunidades podem e devem ser isoladas sem recurso prévio aos paradigmas; em seguida esses podem ser descobertos através do escrutínio do comportamento dos membros de uma comunidade dada.

(Kuhn 2003, p.221-222)

E com esse objetivo em mente, fornece uma proto-definição de comunidade científica, que ele supõe estar afastada de qualquer apelo à idéia de paradigma. Trata-se, segundo ele, de uma noção intuitiva de comunidade, que é compartilhada amplamente por cientistas, sociólogos e por muitos historiadores:

De acordo com essa concepção, uma comunidade científica é formada pelos praticantes de uma especialidade científica. Estes foram submetidos a

uma iniciação profissional e a uma educação similares, numa extensão sem paralelos na maioria das outras disciplinas. Neste processo absorveram a mesma literatura técnica e dela retiraram muitas das mesmas lições.

(Kuhn 2003, p.222)

Todos os membros dessas comunidades, maiores ou menores, podem ser facilmente identificados por apresentarem uma ou muitas das características que os definem enquanto tais. Entre essas diversas características podemos destacar aquelas mais evidentes, como as altas titulações, a participação em grupos de pesquisa vinculados a respeitadas instituições de ensino e a produção bibliográfica como artigos para periódicos científicos, livros etc.

A noção de comunidade, acima citada, admite ainda um escalonamento, uma hierarquização, em diversos graus e etapas, desta identificação técnica e profissional que ocorre entre os membros de uma comunidade. Há nas comunidades científicas grupos e subgrupos cooperando e competindo entre si. Dependendo do nível de especialização em que se encontram, esses grupos podem compartilhar critérios mais gerais ou mais específicos de prática científica.

Disto entendemos que há a possibilidade real de paradigmas mais específicos, que se acomodam no interior de paradigmas mais amplos, cada um deles orientando as atividades científicas em diversos níveis e determinando o grau de especialização das comunidades de pesquisadores.

Em resumo, um paradigma é algo que é partilhado, em maior ou menor grau, por estas pessoas que são, assim, identificadas como membros de uma comunidade científica. Os paradigmas também se apresentam em níveis bastante diversos, sendo mais gerais e abertos, ou mais específicos e limitados, dependendo da comunidade a que dizem respeito. E podemos, até mesmo, encontrar paradigmas competidores ou cooperadores dentro de paradigmas cada vez mais amplos.

Ainda neste primeiro sentido de paradigma, Kuhn apresenta, pelo menos, quatro aspectos que melhor esclarecem o teor do que entendemos como um compartilhamento de compromissos. O último desses quatro aspectos condensa, em si, o sentido filosoficamente mais importante para Kuhn. É, também, aquele aspecto que mais atraiu as críticas de seus adversários. Por este motivo, Kuhn dedica a esse quarto aspecto uma atenção especial, conferindo-lhe a responsabilidade de trazer, consigo, o segundo sentido

de paradigma que será analisado em seguida por meio de um escrutínio de seus aspectos mais relevantes, são eles: as generalizações simbólicas, as crenças, os valores e os exemplares.

3.1.1 Generalizações simbólicas

São fórmulas, ou expressões, que podem se apresentar na forma de símbolos, como os símbolos lógicos, por exemplo, e que codificam chaves, ou rótulos, basilares para a compreensão de determinados modelos teóricos. Essas chaves simbólicas servem como base investigativa, ou como pontos de partida, que são largamente aceitos pelo grupo e que raramente têm sua validade questionada dentro de uma prática científica pacífica. Trata-se aqui daqueles princípios mais fundamentais, assumidos por esta ou por aquela ciência, para o início do trabalho investigativo. Estes princípios são traduzidos em expressões que concentram, em si, grande poder de síntese.

O membro de uma comunidade científica específica deve ser um bom manipulador dessas generalizações formais. Assim, mesmo que elas não sejam essenciais para a compreensão dos conceitos centrais das disciplinas, acabam se tornando critério de avaliação do poder de seus defensores e também de seus críticos. Constituem, portanto, uma linguagem específica, técnica, e desempenham papel central no fortalecimento interno da comunidade de pesquisadores.

3.1.2 Crenças

As crenças são aspectos muito relevantes na consolidação, tanto dos paradigmas, como das comunidades científicas. Kuhn menciona a crença em modelos ou metáforas explicativas, que são analogias entre teorias diversas cumprindo um fim quase sempre didático⁵¹.

Essas analogias e paralelos dependem de nossa disposição pessoal em aceitá-los como possíveis. Uma vez aceitos, estes passam a ser utilizados de maneira propedêutica, reforçando ainda mais a crença de que correspondem a uma modelização possível da realidade. Como exemplo, podemos citar a analogia do circuito elétrico com um sistema hidrodinâmico em equilíbrio, ou ainda a comparação exaustivamente realizada nas

⁵¹ Poderíamos substituir a palavra “didático” por “catequético”, para ajustarmos a idéia de crença com a de fé.

escolas primárias entre o sistema solar e a disposição dos elétrons em torno do núcleo de um átomo.

Esses exemplos ilustram o compromisso de grupos de pesquisadores com tipos de modelos heurísticos e/ou ontológicos que dependem, exclusivamente, de uma disposição intencional específica; neste caso, a crença. Os resultados das pesquisas fornecem os indícios necessários para que a crença nesses modelos seja estimulada ou desaconselhada.

3.1.3 Valores

Os valores constituem o aspecto do paradigma que se estende por sobre as comunidades, atingindo-as de maneira relativamente comum. Diferentemente do que costuma acontecer com as generalizações simbólicas, que aparecem como uma espécie de marca distintiva de um determinado grupo de pesquisadores, os valores são responsáveis por uma identidade mais ampla.

Kuhn afirma que esse aspecto de um paradigma se mostra de maneira mais evidente em momentos de crise dos paradigmas.

Assim, é no momento específico da crise, do qual falaremos mais adiante, que os pesquisadores se unem para defender os chamados *valores científicos*, principalmente aqueles que zelam pela possibilidade das previsões e das explicações guiadas pelos modelos quantitativos. Há, também, aqueles valores bastante caros à ciência, que clamam pela simplicidade dos modelos, ou pelo potencial de pesquisa que estes possam fornecer, ou ainda por uma compatibilidade com outros modelos já firmemente assentados.

Mas há ainda uma gama muito mais geral de valores, que costuma aparecer em discussões que envolvem os aspectos sociais, morais, religiosos ou políticos das ciências. Estas discussões geralmente apontam para questões e polêmicas de difícil solução e que estão fadadas a serem amplamente ignoradas nas práticas científicas comuns, por um único e simples motivo, qual seja, elas atravancam ou impedem completamente essa prática científica comum. É só em momentos em que essa prática comum se vê suspensa, o momento da crise, que esses valores são levantados e essas questões e polêmicas ganham força argumentativa nas discussões científicas de base.

Contudo, devemos considerar ainda que os valores científicos não são algo

igualmente distribuídos entre os cientistas. Há valores que são comuns a uma vasta parcela de pesquisadores e há aqueles que geram grande discordância. Como exemplo desses dois tipos de valores, Kuhn menciona os julgamentos com relação à acuidade que, segundo ele, se mostram relativamente estáveis entre os mais diversos grupos de pesquisadores. E os julgamentos com relação à simplicidade, coerência interna, plausibilidade, etc, que se mostram como a causa de enormes divergências entre eles:

Aquilo que para Einstein era uma incongruência insuportável na velha teoria dos quanta, a ponto de tornar impossível a prática da teoria normal, para Bohr e outros não passava de uma dificuldade passível de resolução através dos meios normais (...). Uma teoria pode ser mais acurada, mas menos coerente ou plausível que outra.

(Kuhn 2003, p.232)

Alguns valores podem pesar mais que outros no momento de uma crise científica. E não é possível descartar uma certa dose de subjetivismo nas considerações acerca dos valores, muito menos quando deles dependem os futuros caminhos que serão trilhados pela ciência.

3.1.4 Os exemplares

Os *exemplares* encerram em si um aspecto muito importante do segundo sentido do termo paradigma. A idéia convencional que se tem dos exemplares é a de que estes nada mais são que aqueles exemplos compartilhados pela comunidade científica e que se mostram como problemas, cujas soluções já estão bastante bem consolidadas, dentro daquilo que até agora vimos como o sentido mais amplo do termo paradigma.

Estes exemplares freqüentemente aparecem na forma de exercícios, para os novos praticantes das ciências. Através deles, estes estudantes adquirem o espírito necessário para a investigação a que se propuseram, se inteirando ainda mais das técnicas e do contexto conceitual de sua área de pesquisa.

A forma tradicional de enxergar os exemplares não lhes confere o mesmo *status* heurístico que é concedido ao aprendizado das teorias e das regras. Os exemplares são encarados, apenas, como a oportunidade de exercitar a aplicação das regras sobre uma teoria previamente consolidada, na mente do cientista iniciante. Assim, dessa perspectiva tradicional, os exemplares assumem uma posição heurísticamente secundária, aparecendo logo após a teoria e as regras. Contrariamente, porém, Kuhn confere aos exemplares um

papel primordial na consolidação de um paradigma:

Até agora os filósofos da ciência não têm, em geral, discutido os problemas encontrados por um estudante nos textos científicos ou nos seus trabalhos de laboratório, porque se pensa que servem apenas para pôr em prática o que o estudante já sabe. (...)

(Kuhn 2003, p.235)

Para Kuhn, os exemplos, ou exemplares, são mais do que meras ilustrações ou parâmetros fixos de conduta dentro dos paradigmas. Através deles, os candidatos a neófitos aprenderão, pela primeira vez, o significado da atividade de “resolver quebra-cabeças”.

Como percebemos, Kuhn pretende inverter o papel desempenhado por teoria e exemplares, no jogo científico. O modo tradicional de enxergar os exemplares assevera que estes não passam de exercícios de aplicação das regras sobre a teoria, tendo em vista que os resultados por eles apresentados já estão firmemente consolidados pela história e, por este motivo, já não podem ser encarados como problemas do tipo “quebra-cabeças”. Porém, do modo como Kuhn os vê, os exemplares são responsáveis pela construção da própria teoria, no arcabouço intelectual do cientista iniciante.

Com esta inversão da importância dos exemplares, Kuhn pretende rejeitar a clássica proposta de que o aprendizado e a prática científica consistem, apenas, do conhecimento prévio e total do conteúdo de uma determinada teoria. Isto é, ele pretende rejeitar a tradicional idéia de que o conhecimento científico é fruto exclusivo de um esforço, pessoal ou coletivo, em obedecer a regras basilares que se projetam sobre uma teoria:

(...) Afirma-se que ele não pode resolver nenhum problema antes de ter aprendido a teoria e algumas regras que indicam como aplicá-la. O conhecimento científico está fundado na teoria e nas regras; os problemas são fornecidos para que se alcance destreza daquelas. Todavia, tentei argumentar que esta localização do conteúdo cognitivo da ciência está errada. O estudante que resolveu muitos problemas pode apenas ter ampliado sua facilidade para resolver outros mais. Mas, no início e por algum tempo, resolver problemas é aprender coisas relevantes a respeito da natureza. Na ausência de tais exemplares, as leis e teorias anteriormente aprendidas teriam pouco conteúdo empírico.

(Kuhn 2003, p.235)

A mera aplicação das regras sobre a teoria não parece ser suficiente para a

resolução eficiente de exercícios. Isto é, não parece ser suficiente para explicar como o estudante se torna um solucionador de problemas o que será, justamente, a principal atividade do futuro cientista.

As generalizações simbólicas, que são amplamente utilizadas nesses livros para transportarem o conteúdo das teorias, não podem ensinar os estudantes a desenvolver a habilidade de resolver problemas absolutamente novos. A solução desses problemas quase sempre transcende a simples aplicação de regras sobre o conteúdo da teoria.

Em geral, novas generalizações simbólicas importantes, fórmulas que descrevem as relações de força de um fenômeno, por exemplo, em algum momento são acrescentadas no interior de certas teorias. Essas novas fórmulas, naturalmente, não têm um equivalente literal no interior da teoria original pois, do contrário, não poderíamos dizer que são fórmulas novas. A pergunta que Kuhn nos propõe é: “como isso é possível?”

Esses acréscimos à teoria são frutos da habilidade dos cientistas em solucionar problemas muito reais. No entanto, a teoria, por si só, não pode prever o aparecimento de tais fórmulas. Isto é, não podemos chegar a estas fórmulas por meio de um método puramente analítico que percorre todas as proposições da teoria.

Para Kuhn, a nova generalização simbólica não estava escondida sob a teoria. Seu aparecimento dependeu de algo que não pode ser explicado, apelando-se, tão somente, para a argumentação clássica que se baseia na aplicação de regras sobre a teoria. Ou seja, para Kuhn a habilidade de solucionar problemas transcende a argumentação clássica. E, em princípio, essa habilidade nasce do esforço que o estudante investe na solução desses exemplares.

Os problemas a serem solucionados assumem características tanto mais precisas quanto mais especializada se torna a prática do pesquisador. Este conquista uma relativa independência dos exemplares, na proporção exata de seu amadurecimento como cientista. Em circunstâncias especiais, pode até mesmo chegar o momento em que o pesquisador rompe, definitivamente, com os exemplares, em um certo contexto de seu trabalho.

Este rompimento pode levá-lo a afirmações inusitadas que contradizem fortemente a prática comum de seu momento presente. Certamente, este rompimento não estava previsto em qualquer teoria e, menos ainda, poderíamos encontrá-lo na aplicação

das regras sobre ela.

Ainda assim é, muitas vezes, difícil negar que o conjunto dessas novas afirmações assim obtidas — que rompem ou não com a prática científica comum que, de início, consistia apenas em observar os exemplares — se imponham com uma força arrasadora diante do antigo paradigma.

Isto é, não podemos concluir, sem mais, que este conjunto de afirmações excepcionalmente novas foi obtido com a pura aplicação de regras sobre uma teoria dada. Para Kuhn, o aprendizado científico se dá, antes de tudo, praticando a ciência e não, apenas, aplicando regras sobre teorias⁵².

Em outras palavras, resolver problemas e se inteirar do conteúdo de uma teoria parecem ser atividades distintas. É justamente aí que o pensamento de Kuhn se distancia do pensamento tradicional. Para este, a solução dos problemas é decorrência de uma boa assimilação da teoria. Kuhn mostra, todavia, que o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas apela para algo mais que a mera assimilação da teoria. Para ele, se aprende ciência fazendo ciência e não simplesmente adquirindo regras para fazê-lo. É exatamente esse algo a mais, algo que não pode estar no conteúdo de qualquer teoria, aquilo que seus adversários chamaram de subjetivismo ou de irracionalismo.

3.2 Ciência Normal

Dissemos que é o paradigma, cada vez mais consolidado por uma comunidade científica, através de suas práticas habituais de pesquisa, que fornece os critérios de constituição dessa mesma comunidade. Mas nada dissemos sobre o que seria aquilo que chamamos de uma prática habitual de pesquisa científica. Kuhn a denomina ciência normal.

Enquanto o paradigma é a medida do que deve e do que não deve ser considerado pertinente e suscetível à investigação científica, a ciência normal reúne o esforço de um exército de pesquisadores no sentido de provar que o paradigma aceito os estão conduzindo na direção certa.

A efetiva cristalização desses parâmetros de pesquisa ocorre na medida em que

⁵² Nas páginas 235-239 de *As Estruturas* (2003), Kuhn oferece dois interessantes exemplos, em física, de como a observação de exemplares conduz a novas maneiras de solucionar problemas que, aparentemente, não podem resultar da mera obediência a regras e a teorias pré-determinadas.

eles são capazes de propor problemas e formas de resolvê-los. Essas soluções servem de amparo ao paradigma, firmando-o, em um dado momento, como a interpretação mais correta possível de uma certa concepção de natureza.

3.2.1 A ciência normal como solução de quebra-cabeças

Os problemas são o impulso para todo agir científico. Sem algum problema para o qual tentar oferecer uma solução, o trabalho científico não pode ter início. Cientista algum trabalha sem ter diante de si um problema ou um grupo de problemas. Estes podem ser, desde uma incompreensão do que está posto pelo paradigma, até um mero ajuste de dados experimentais aos dados teóricos e vice-versa.

Todavia, um paradigma também não pode deixar margem a uma quantidade demasiadamente grande de problemas. Isto é, o paradigma não pode ser nem muito inconsistente, nem muito incompleto. Neste caso, ele se tornaria trivial, pois tudo poderia decorrer dele, na medida em que a excessiva flexibilidade, por assim dizer, permitiria tanto o vislumbre como a solução de qualquer problema em seu interior. Contudo, não há critérios objetivos para a decisão ou para a delimitação deste ajuste fino do paradigma.

Kuhn utiliza a expressão “resolver quebra-cabeças” para se referir ao escrutínio sistemático realizado pela ciência normal, em sua empresa cotidiana de dissolução de problemas. E esta é uma boa analogia, porque ela nos remete facilmente aos jogos e estes, por sua vez, às regras. Estas regras podem, ou não, ser explicitadas de antemão pelo paradigma. Ou seja, as regras para uma determinada prática científica não decorrem necessariamente de um paradigma, podendo haver grande discordância sobre regras específicas, em grupos de pesquisa que partilham do mesmo paradigma.

Difícilmente as regras se apresentam, de maneira independente, logo no início da formulação de uma teoria científica. Geralmente elas aparecem atreladas aos exemplares. O estudante aprende a isolar as regras válidas, do jogo ordinário da ciência, no exercício comum de solucionar quebra-cabeças. E, do mesmo modo como o teórico que se dedica à teoria dos jogos se vê envolto em uma dificuldade intransponível quando pretende apresentar a regra universal, ou seja, a regra para todo o tipo de regras — isto é, quando o filósofo pretende descobrir o que, em geral, faz de uma atividade qualquer um jogo, ou quando pretende definir o que é comum a todos os jogos — também o filósofo

da ciência não pode definir quais são, em geral, as regras para as diferentes práticas científicas. Ele só poderá fazê-lo assumindo as diversas particularidades dessas práticas individualmente. Essas regras serão sempre particulares.

Grandes problemas conceituais se colocam fora da atividade de “resolver quebra-cabeças”, que é justamente a atividade que mais caracteriza a ciência normal. Esse tipo de questionamento de base está excluído da prática diária do cientista. Está excluído justamente por envolver, quase sempre, uma discussão sobre a validade das regras. Ou seja, por envolver a discussão genérica sobre o que são os jogos ou qual deve ser a regra para as regras:

Em geral os cientistas não precisam ou mesmo desejam ser filósofos. Na verdade, a ciência normal usualmente mantém a filosofia criadora ao alcance da mão e provavelmente faz isso por boas razões. Na medida em que o trabalho de pesquisa normal pode ser conduzido utilizando-se do paradigma como modelo, as regras e pressupostos não precisam ser explicados.

(Kuhn 2003, p.119)

Dentro do exercício comum da ciência normal, não faz sentido questionar a validade das regras propostas pelo paradigma. Ou seja, não faz sentido discussões acerca dos fundamentos das ciências. Esses fundamentos devem ser aceitos e ajustados de modo a se afinarem ao máximo às pretensões ideais dos cientistas. Resolver quebra-cabeças é, desse modo, realizar um trabalho de ajuste fino do paradigma e não o de questionar sua validade.

3.3 Anomalias

A maioria das novidades na ciência normal acontecem no âmbito técnico, ou metodológico, e não no âmbito conceitual, que é justamente aquilo que o paradigma fornece antecipadamente. Mudanças de base, ou mudanças conceituais, envolvem certamente uma alteração na perspectiva paradigmática.

Em alguns momentos específicos, todavia, surgem condições adversas ao bom desempenho das previsões. Situações inusitadas que se apresentam como um entrave ao avanço contínuo da ciência normal. Essas situações colocam em xeque o paradigma sobre o qual a ciência normal se assenta. Esses momentos se configuram, ou como novos problemas, absolutamente imprevistos, ou como uma metodologia ineficaz, ou ainda

como uma natureza que não se comporta como deveria. Essas configurações danosas à ciência normal não possuem uma fronteira bem definida, sendo aspectos de um mesmo fenômeno, a anomalia.

Quando o cientista se vê diante de uma determinada anomalia, ele pode se manter firmemente convencido de que este problema possui uma solução passível de ser alcançada, dentro dos limites do quadro conceitual compartilhado por ele e seus colegas. Neste caso, esse cientista se dedicará a uma atividade científica normal. Sua pesquisa não ultrapassará a busca por uma solução de algo tido, apenas, como mais um quebra-cabeça científico. Nenhum questionamento sobre o quadro conceitual adotado é proposto por este pesquisador.

Porém, outro cientista, trabalhando no mesmo problema, pode chegar à conclusão de que este não possui nenhuma solução possível na perspectiva do paradigma atual, o que poderá conduzi-lo a um questionamento acerca das bases conceituais adotadas em seu trabalho.

Muitos são os motivos que levam um cientista a adotar uma das duas posturas mencionadas acima, desde evidências experimentais diversas, até condições extremamente idiossincráticas ao pesquisador, como posicionamentos religiosos, idade, experiências particulares etc. Em alguns casos, a anomalia só é notada por meio de uma profunda transformação dos conceitos que fundamentam as pesquisas.

Para entendermos melhor esses diversos aspectos das anomalias, assim como sua dinâmica em relação ao paradigma, remeter-nos-emos à analogia traçada por Kuhn entre uma experiência psicológica realizada com cartas de baralho⁵³ e o processo de descoberta científica.

A experiência citada consistia na identificação das cartas de um baralho que continha algumas cartas anômalas. Os sujeitos que se submetiam à identificação dessas cartas não eram informados sobre esta presença anômala. Ao se variar o tempo de observação individual, notou-se que aumentava ou diminuía o grau de insatisfação dos observadores, quando colocados diante das cartas anômalas. Alguns desses observadores

⁵³ Antes de descrever a experiência psicológica de J.S. Bruner e Leo Postman, Kuhn (**Kuhn 2003**, p.78-89) fornece detalhes da disputa entre Priestley e Lavoisier pela datação da descoberta do oxigênio; também descreve o processo de descoberta dos Raios X, por Roentgen, e menciona a experiência com a garrafa de Leyden. Todos esses exemplos reforçam a idéia de que anomalia e paradigma se encontram numa dinâmica complexa, em que a afirmação de um depende de como se encara a afirmação do outro.

não eram capazes de dizer o que havia de errado quando lhes era mostrado, por exemplo, um quatro de copas preto.

Cartas anômalas eram, muitas vezes, encaradas como cartas normais, com um tempo de exposição mínimo. Quanto mais se aumentava o tempo para o reconhecimento dessas cartas anômalas, mais complexa se tornava essa atividade. Chegando-se ao ponto de um dos observadores não conseguir definir, nem mesmo a cor, se preto ou vermelho, da carta que tinha diante de si.

Ao mencionar essa experiência, unindo-a aos muitos outros exemplos extraídos das ciências naturais, Kuhn pretende tornar claro que o reconhecimento de um fenômeno, como uma anomalia ou como um simples quebra-cabeça, dependerá de condições diversas. A principal delas é, certamente, o modo como estamos habituados a lidar com a situação que nos circunda. Esse modo é ditado pelo quadro conceitual fornecido pelo paradigma e por uma enorme carga de experiências pessoais que trazemos conosco em qualquer atividade que realizemos.

A tendência predominante em qualquer cientista é encarar todos os fenômenos como, em princípio, previsíveis em uma prática científica normal. Mas, ao passo que as condições se diversificam, as anomalias começam a ganhar força diante do panorama normal da ciência. Chega o momento, então, em que essas anomalias forçam uma revisão do quadro conceitual.

Uma vez realizada esta revisão, a natureza pode passar a novamente corresponder a um certo quadro de referência e, então, as anomalias se transformariam assim em fenômenos perfeitamente previsíveis. Em muitos casos, portanto, uma descoberta científica importante só ocorre com a transmutação do paradigma. Antes disso, essa descoberta era tratada como um problema a ser solucionado pelas vias normais de pesquisa.

3.3.1 Crise

As anomalias são, portanto, falhas nas previsões de certos fenômenos, quando estes são colocados diante do pano de fundo de um determinado paradigma. Portanto, só faz sentido se falar em anomalias quando temos diante de nós um quadro conceitual de referência. As anomalias se constituem, dessa forma, como problemas cujas soluções se

mostram, pelo menos, insatisfatórias dentro do alcance da ciência normal.

Se estes problemas não forem rapidamente contornados, isto é, se não forem habilmente absorvidos pelos meios normais de explicação, então, possivelmente, provocarão um momento de crise científica que pode abalar, de maneira muitas vezes definitiva, a credibilidade no paradigma vigente.

Essa crise pode ainda se auto-alimentar, uma vez que esse abalo na credibilidade no quadro conceitual em vigor dá margem ao aparecimento de linhas alternativas de pesquisa. Essas pesquisas não ortodoxas, justamente por sentirem a forte necessidade de se afastarem do paradigma, se orientam de modo a antagonizar com o antigo paradigma, podendo aumentar enormemente o número de anomalias.

Essas linhas de pesquisa não convencionais promovem, por sua vez, uma revisão dos antigos problemas e soluções. Alguns desses antigos problemas, solucionados ou não, podem, finalmente, encontrar uma resposta definitiva, ou mais adequada. Ou ainda podem ser completamente descartados, por só possuírem respaldo dentro da antiga perspectiva teórica.

E repentinamente, o que em termos históricos pode durar algumas dezenas de anos, a ciência normal se desestabiliza. O que estava firmemente consolidado começa a ser encarado com desconfiança. E agora, ao invés de uma ciência normal, o que se observa é uma ciência extraordinária, na qual o velho paradigma ainda exerce seu poder, mas na qual, também, e justamente por isso, as anomalias brotam por toda parte.

3.4 Revolução Científica

Uma das características mais marcantes sobre a abordagem histórico-filosófica oferecida por Kuhn para o avanço da ciência é o descarte da tradicional idéia segundo a qual há um avanço contínuo e pacífico, que poderíamos visualizar como uma linha reta e ininterrupta, através do qual a ciência acumula resultados que apontam para um progresso crescente e sem fim. Ao invés disso, Kuhn propõe um tipo de seleção natural para as teorias científicas na qual, em determinados momentos bastante precisos, os paradigmas competiriam entre si em um ambiente histórico hostil, substituindo-se, uns aos outros, em um padrão que pode ser descrito como revolucionário:

A transição de um paradigma em crise para um novo, do qual pode surgir uma nova tradição de ciência normal, está longe de ser um processo cumulativo obtido através de uma articulação do velho paradigma.

(Kuhn 2003, p.116)

De modo especial, a discussão precedente indicou que consideramos revoluções científicas aqueles episódios de desenvolvimento não-cumulativo, nos quais um paradigma mais antigo é total ou parcialmente substituído por um novo, incompatível com o anterior.

(Kuhn 2003, p.125)

O momento de transição de um paradigma a outro é marcado por uma ambivalência paradigmática. Os paradigmas competidores, o novo e o velho, se aplicam de maneira mais ou menos equivalente sobre os mesmos fenômenos. Isto é, as duas formas antagônicas de encarar os fenômenos se entrecruzam em uma disputa territorial. Nessa disputa, haverá problemas para os quais o novo paradigma sugere respostas mais convincentes do que as formas já conhecidas de explicação. Por outro lado, existirão ainda outros problemas que só poderão ser compreendidos eficientemente pela antiga visão de mundo.

O sucesso do novo paradigma ocorrerá na medida em que este se firmar como a alternativa mais atraente de explicação para fenômenos novos e para os já conhecidos. E, paulatinamente, o novo paradigma irá se apoderar do território antes dominado pelo antigo. Se tudo correr bem para o novo paradigma, ele deverá se consolidar como a maneira mais simples e precisa de explicar os fenômenos que, no passado, foram compreendidos pelo viés paradigmático precedente.

Isto é, o novo paradigma substituirá o antigo por meio de um trabalho que não apresenta resultados imediatos e sobre o qual já tivemos oportunidade de tecer alguns comentários; a saber, a ciência normal. Esta sim, apresentando um padrão que pode ser descrito como contínuo e cumulativo, na medida em que se encontra sobre o abrigo de um paradigma consolidado.

3.4.1 A dinâmica das revoluções científicas

No momento de sua apresentação, o sistema heliocêntrico proposto por Copérnico apresentava tantas lacunas, ou até mais, quanto aquelas que eram freqüentemente apontadas no sistema geocêntrico de Ptolomeu. O sucesso do paradigma copernicano dependeu, em grande parte, de um contexto histórico, no interior do qual a

astronomia já ansiava por um sistema que pudesse melhor explicar os fenômenos celestes, e por um trabalho posterior de escrutínio e afinação da teoria, realizado por muitos astrônomos que sucederam a Copérnico e que, basicamente, *acreditaram* que o novo paradigma tinha mais a oferecer que o antigo.

De um lado se colocavam aqueles que não viam grandes ganhos com o novo sistema astronômico. Um sistema que, do ponto de vista dos conservadores, oferecia mais riscos para a estabilidade das observações que resultados concretos, como os já conquistados pelo antigo sistema. De outro lado, encontravam-se aqueles que não viam mais qualquer possibilidade em tentar compreender o universo por meio do sistema ptolomaico, que se mostrava cada vez mais suscetível a críticas diversas.

Um exemplo dessa suscetibilidade às críticas, à qual estava sujeito o sistema ptolomaico, era a afirmação de que este havia atingido um grau de complexidade tão grande que dele havia tantas versões quanto o número de astrônomos que o empregavam. Para os revolucionários, isto era uma evidência bastante forte de que chegara a hora de dar lugar à nova visão copernicana. Acreditavam que, ao se contrapor os benefícios e os custos oferecidos pelo sistema geocêntrico, ficava claro que ceder espaço para o risco que as novidades do sistema heliocêntrico traziam consigo não poderia ser mais prejudicial para a astronomia que a confusão em que ela já se encontrava mergulhada.

Esse tipo de avaliação favorável dos riscos só é possível em fortes momentos de crise. E são nesses momentos que, em geral, se percebe mais nitidamente o desenvolvimento do momento pré-revolucionário, como também é conhecido o período de transição de um paradigma a outro. Este é o momento da ciência extraordinária, em que os cientistas procuram apontar para os pontos fracos do antigo paradigma, simultaneamente aos seus esforços de encontrar uma forma fundamentalmente nova de construção das teorias.

Essas formas fundamentalmente novas de encarar a realidade não constituem uma simples extensão da visão tradicional, não representam uma continuidade dos trabalhos anteriores. Constituem, sim, um rompimento filosófico com o antigo pensamento e, por esse motivo, não conquistam seu espaço sem que haja resistência.

Esse processo não poderia receber outro nome senão o de revolução científica, dado que representa uma abrupta ruptura, que tem início com a profusão do sentimento

de que os preceitos vigentes não correspondem mais às crenças e valores de uma parcela, por vezes restrita, mas sempre significativa, da comunidade científica:

Por que chamar de revolução uma mudança de paradigma? Face às grandes e essenciais diferenças que separam o desenvolvimento político do científico, que paralelismo poderá justificar a metáfora que encontra revoluções em ambos? A esta altura um dos aspectos do paralelismo já deve ser visível. As revoluções políticas iniciam-se com um sentimento crescente, com frequência restrito a um segmento da comunidade política, de que as instituições existentes deixaram de responder adequadamente aos problemas postos por um meio que ajudaram em parte a criar. De forma muito semelhante, as revoluções científicas iniciam-se com um sentimento crescente, também seguidamente restrito a uma pequena subdivisão da comunidade científica, de que o paradigma existente deixou de funcionar adequadamente na exploração de um aspecto da natureza, cuja exploração fora anteriormente dirigida pelo paradigma. Tanto no desenvolvimento político como no científico, o sentimento de funcionamento defeituoso, que pode levar à crise, é um pré-requisito para a revolução. Além disso, embora esse paralelismo evidentemente force a metáfora, é válido não apenas para as mudanças importantes de paradigma, tais como as que podemos atribuir a Copérnico e Lavoisier, mas também para as bem menos importantes, associadas com a assimilação de um novo tipo de fenômeno, como o oxigênio ou os raios X.

(Kuhn 2003, p.125-6)

O paralelo com as revoluções políticas não é um mero recurso explicativo do qual Kuhn faz uso para tornar mais clara sua visão do desenvolvimento científico. Para ele, as semelhanças entre esses dois aspectos essencialmente humanos, a política e a ciência, atingem um grau muito mais profundo, chegando a se encontrar e a se tocar.

Uma das principais características de uma revolução no âmbito político é, justamente, a substituição dos personagens e dos papéis das instituições, sempre precedido por uma forte crise em que essas personagens e instituições vêem sua autoridade desmoronar rápida ou lentamente.

Nesses momentos de crise, os sujeitos se encontram divididos em partidos que apóiam ou se opõem fortemente a estas instituições. Se de um lado estão aqueles que acreditam que a manutenção da situação é suficiente para por fim à crise, de outro estão os partidários de uma completa substituição dos conceitos que sustentam as instituições vigentes. Para estes, a situação de crise é derivada de uma insatisfação, que só tende a se agravar com a permanência das idéias atuais e das pessoas que as defendem. Para os conservadores, essa substituição coloca em risco as conquistas obtidas por um sistema

que serviu bem no passado e que pode continuar servindo ainda por muito mais tempo.

Os personagens desse enredo se polarizam em dois grupos antagônicos. A disputa que começa a se configurar entre eles tem, como alvo, conceitos e ideais que sustentam o atual estado de coisas. Essa disputa não pode ser mediada institucionalmente, pois é a própria instituição o objeto da disputa. Na medida em que consideram, cada um de seu lado, não haver nenhuma estrutura superior para a qual recorrer, ambos se percebem na situação de terem que se defender da melhor forma possível o que, inevitavelmente, os conduzirá à reunião de aliados e ao ataque mútuo:

Por discordarem quanto à matriz institucional a partir da qual a mudança política deverá ser atingida e avaliada, por não reconhecerem nenhuma estrutura supra-institucional competente para julgar diferenças revolucionárias, os partidos envolvidos em um conflito revolucionário devem recorrer finalmente às técnicas de persuasão de massa, que seguidamente incluem a força.

(Kuhn 2003, p.127)

Do mesmo modo, quando cientistas divergem sobre a manutenção de um paradigma é porque o momento de crise já se abateu sobre eles. Nestes casos, dependendo do agravamento da crise e do peso dos opositoristas, a ciência normal não pode ser mais um recurso de decisão aplicável. Na verdade, quando esse momento chega, a ciência normal já cedeu lugar a uma ciência extraordinária, o que tende a agravar ainda mais a crise.

Ou seja, quando a questão é a validade de um paradigma, a ciência normal não tem valor argumentativo, senão para aqueles que defendem a manutenção do paradigma. Isto é, na medida em que a ciência normal só pode existir sob a tutela dos parâmetros oferecidos por um paradigma aceito, ela não pode avaliar, senão negativamente, os méritos de um novo paradigma. O mesmo se dá com as instituições políticas, que raramente divergem do sistema político vigente.

3.4.2 A circularidade na manutenção dos paradigmas

Disso tudo, o que podemos notar é que a defesa de um paradigma é algo que só se efetua quando se está imerso na óptica do mesmo. Uma argumentação favorável deverá buscar elementos que só poderão ser encontrados no interior do próprio paradigma. Assim, essa argumentação possui um caráter essencialmente circular; qual

seja, o de buscar elementos no interior de um discurso para defendê-lo.

Igualmente circular é o modo como se consolidam os novos discursos científicos. Os novos fenômenos que aparecem quando da emergência de um novo paradigma só ganham a oportunidade de existência e sustentação, se há uma aceitação mínima dos conceitos e das idéias que sustentam esse paradigma emergente. Por sua vez, é o trabalho de investigação desses novos fenômenos que garante a solidez dos conceitos e idéias radicalmente novas que os sustentam:

Naturalmente a circularidade resultante não torna esses argumentos errados ou mesmo ineficazes. Colocar um paradigma como premissa numa discussão destinada a defendê-lo pode, não obstante, fornecer uma mostra de como será a prática científica para todos aqueles que adotarem a nova concepção da natureza. Essa mostra pode ser imensamente persuasiva, chegando muitas vezes a compelir à sua aceitação. Contudo, seja qual for a sua força, o *status* do argumento circular equivale tão-somente ao da persuasão.

(Kuhn 2003, p.128)

A força de um paradigma, como vemos, surge de sua habilidade de persuasão. A disputa entre paradigmas antagônicos será vencida, em parte, pelo grau de convencimento que oferecem. Essa persuasão se efetua de modo um tanto arbitrário e as condições que a favorecem são, como já tivemos oportunidade de mencionar, bastante complexos, mas que, em geral, dependem de um contexto histórico de crise, no qual existe uma enorme ânsia por um novo paradigma. Este não precisa ser, de início, necessariamente mais eficiente que o antigo, mas é necessário que haja uma polarização entre eles.

Assim, para Kuhn, critérios lógicos e empíricos não são, por si só, decisivos para a escolha de um determinado paradigma. Para ele, não há uma forma de decisão que seja essencialmente objetiva nesses casos. E a analogia com as revoluções políticas se torna, assim, cada vez mais contundente:

Na escolha de um paradigma — como nas revoluções políticas —, não existe critério superior ao consentimento da comunidade relevante. Para descobrir como as revoluções científicas são produzidas, teremos, portanto, que examinar não apenas o impacto da natureza e da lógica, mas igualmente as técnicas de argumentação persuasiva que são eficazes no interior dos grupos muito especiais que constituem a comunidade dos cientistas.

(Kuhn 2003, p.128)

Contra esse ponto de vista revolucionário, encontra-se aquele outro que encara as teorias científicas como complementares. De acordo com esse ponto de vista, o aperfeiçoamento científico pode ser mais bem compreendido se encarado como uma análise cada vez maior dos fenômenos. Análise esta que é tanto mais acurada quanto mais dados são descobertos sobre estes fenômenos.

Nesse sentido, a ciência não pode, jamais, contradizer descobertas anteriores. Pode sim, no máximo, adicionar informações e melhor explicar fenômenos, antes compreendidos de maneira ainda relativamente deficiente.

Neste caso não haveria mudanças drásticas, caracterizadas pela destruição do antigo regime mas, apenas, a simples passagem de uma concepção teórica menos eficiente para uma outra mais eficiente, isto é, que esteja mais de acordo com pesquisas recentes bem sucedidas.

As descobertas científicas nasceriam de análises cada vez mais acuradas dos fenômenos, em um movimento evolutivo e contínuo, sem que houvesse, propriamente, a superação de qualquer paradigma.

Contra isso, no entanto, Kuhn afirma que historicamente, e do ponto de vista de seu confronto com a natureza, o cientista só encontra três tipos de fenômenos: aqueles que são bem compreendidos dentro da perspectiva paradigmática e que, por este motivo, não instigam mudanças radicais nos procedimentos tradicionais de investigações; aqueles outros que, apenas em seus detalhes mais específicos, ainda carecem de maiores investigações, essas são realizadas com o intuito de reafirmar ainda mais a confiança no paradigma; por fim, o cientista pode ter diante de si aqueles fenômenos que se mostram inteiramente anômalos, isto é, aqueles fenômenos que não podem ser minimamente compreendidos dentro do quadro conceitual em voga.

Apenas esse terceiro tipo de fenômeno oferece o estímulo necessário para uma investigação do tipo revolucionária. Quando este terceiro tipo de fenômeno for explicado e assimilado como um fenômeno normal, é porque o paradigma que o enquadrava como uma anomalia já foi, em grande parte, superado. Isso aponta para uma incompatibilidade visceral entre o novo e o antigo paradigma. Ambos não podem coexistir pacificamente diante do mesmo leque de fenômenos.

Do ponto de vista histórico e conceitual, o que há é sempre a substituição de

uma concepção paradigmática por outra, com o conseqüente aniquilamento da concepção anterior e com o aparecimento de grandes novidades no campo científico. Nesses termos, uma evolução científica, em que há uma sucessão contínua, pacífica e complementar dos conceitos científicos, é impensável em uma prática que não seja a da ciência normal. E, como já vimos, esta não apresenta grandes descobertas científicas, mas trabalha para consolidar as descobertas que, outrora, provocaram a quebra da continuidade da ciência normal que se praticava anteriormente.

Sem o ponto de vista revolucionário, não há a possibilidade de explicar as descobertas científicas de peso. Resumindo, descobertas de peso destroem antigos conceitos científicos e novos conceitos científicos promovem grandes descobertas.

Segundo Kuhn, porém, ainda resiste, com bastante força nos dias de hoje, uma concepção científica, intimamente relacionada com o positivismo lógico, que vai de encontro com o que foi exposto em *A Estrutura*. De acordo com ela, os sentidos das teorias científicas deveriam ser revistos de modo a assimilar certas restrições no interior das mesmas. Conseqüência disso é que, uma vez realizadas essas restrições de sentido, uma teoria jamais poderia conflitar com outra. Mesmo que, quando colocadas lado a lado, e comparadas sob o prisma do alcance de suas previsões, ambas aparentemente divergissem quanto à natureza e a dinâmica de fenômenos símiles.

Para ilustrar essa visão, que se opõe à sua própria, Kuhn menciona as concepções teóricas de Newton e Einstein que, do ponto de vista de sua teoria das revoluções científicas, representam paradigmas absolutamente antagônicos. No entanto, para os defensores da posição mencionada a pouco, a teoria relativista não serviu para derrubar a física de Newton, pois esta ainda é empregada de maneira bastante eficiente se determinadas restrições, principalmente quanto ao alcance de suas previsões, forem razoavelmente efetuadas. Assim, a mecânica newtoniana poderia ser perfeitamente encarada como um caso particular da teoria da relatividade, o que reforça o ponto de vista de uma ciência que avança de maneira pacífica, sem saltos abruptos ou disputas paradigmáticas.

Contra isso, Kuhn afirma que nenhuma teoria pode conflitar com seus casos particulares, como ocorre se assumirmos as restrições à física newtoniana. Mesmo sob a salvaguarda das medidas restritivas, ambas as teorias possuem pressupostos antagônicos,

o que não deveria ser o caso se uma fosse apenas um caso particular da outra. De qualquer forma, se ignorarmos isso e considerarmos que, de fato, a teoria de Newton representa um caso particular daquela proposta por Einstein⁵⁴ — sendo apenas necessário que se tomem algumas precauções, como eliminar aquelas proposições que jamais poderiam ter sido proferidas pela física newtoniana, por exemplo, a de que esta teoria produz previsões acertadas, mesmo quando são consideradas velocidades relativamente bastante elevadas — então, assim excluídas essas sentenças que só tiveram lugar em uma análise ainda pouco eficiente dos fenômenos, o que temos são teorias complementares. Ambas válidas sob seus respectivos domínios. Exemplos de um acúmulo uniforme, contínuo e progressivo do conhecimento científico.

Para Kuhn, a proposta acima, de apelo muito popular no interior da comunidade científica contemporânea, possui, no entanto, um grave problema. Para ele, se de fato fosse suficiente que um determinado domínio de ação fosse delimitado, para que uma teoria científica fosse considerada válida, especialmente aquelas que tenham se mostrado eficientes dentro dele, mas absolutamente equivocadas quando suas considerações ultrapassam essas fronteiras, então jamais se poderia, novamente, mostrar a falsidade de qualquer teoria científica.

Além disso, antigas teorias, abandonadas há tempos, deveriam ser ressuscitadas, pois, em um ou outro domínio, mais amplos ou mais restritos, toda a teoria criada pelo homem, e que já foi considerada científica, fora útil e eficiente para a previsão de certos fenômenos. Como exemplo, Kuhn cita a abandonada teoria do flogisto que, contudo, fora bastante útil e explicativa para muitos fenômenos. A teoria do flogisto fora abandonada por se mostrar contraditória com a descoberta do oxigênio e com os pressupostos da nova teoria termodinâmica.

Assim, toda e qualquer teoria que tenha se aplicado de maneira eficiente, sob um conjunto restrito de fenômenos, mesmo que este conjunto seja bem pequeno, teria sua validade garantida. Além disso, essa concepção que assevera a restrição das teorias científicas aos seus domínios específicos de atuação possui ainda um outro problema. Se

⁵⁴ Para Kuhn, não é possível derivar a teoria de Newton como um caso particular da teoria de Einstein. Justamente porque não é possível derivar as leis de Newton do conjunto de proposições da teoria da relatividade. As leis de Newton tomam, como pressuposto, uma concepção de universo incompatível com a concepção que Einstein precisou assumir para derivar suas previsões. Trata-se aqui de uma divergência de base. Se a teoria relativista contiver a teoria clássica newtoniana, então a primeira é inconsistente.

encarada de maneira séria, essa concepção deveria impedir que as teorias realizassem previsões quando os fenômenos estivessem, por assim dizer, fora de alcance.

Em poucas palavras, essa concepção, que podemos chamar de restritiva, sepultaria qualquer possibilidade de avanço na ciência, na medida em que toda teoria se voltaria somente para aqueles fenômenos que já estejam dentro de seus respectivos campos de atuação. Levada ao extremo, essa concepção pode congelar todo e qualquer avanço na atividade científica, cujo aspecto mais fundamental é a transcendência, em algum grau, dos limites colocados por um campo de pesquisa. Em outras palavras, os progressos científicos importantes, aqueles realmente revolucionários, estão associados, de um modo ou de outro, às investigações que ultrapassam os domínios de pesquisa que são observados pela ciência normal.

Para nos ajudar a entender este ponto, Kuhn faz uso de exemplos retirados da psicologia das formas⁵⁵. Esses experimentos têm o poder de ilustrar alguns dos aspectos das revoluções científicas, justamente aqueles que se referem às mudanças na maneira de encarar o mundo, que se efetuam quando este é colocado sob o foco de um ou de outro paradigma. As experiências psicológicas em questão⁵⁶, de certa maneira, sugerem que as imagens, formadas em nosso campo visual, dependem de um contexto cognitivo muito complexo. Esse contexto, no qual está inserida a história pessoal do sujeito, assim como a maneira como essa história pessoal é capaz de influenciar a sua interação com o mundo à sua volta, é considerado como uma das condições determinantes dos resultados das experiências.

Como no caso das cartas anômalas que, em condições especiais, eram ou não identificadas como cartas normais, também o cientista tende a enxergar o mundo de acordo com a perspectiva de um paradigma. Exemplo disso foi a descoberta de Urano, em 1781, que promoveu uma mudança nas expectativas dos astrônomos no sentido de procurar novos planetas.

Essa mudança de expectativa fez com que os astrônomos olhassem para o céu de maneira bem diferente daquele modo como já estavam acostumados antes dessa descoberta. Como as cartas de baralho, que em certas condições eram consideradas

⁵⁵ Psicologia da *Gestalt*

⁵⁶ Kuhn cita as experiências realizadas por George M. Stratton, Harvey A. Carr, Albert H. Hastorf, Jerome S. Bruner, Leo Postman e John Rodrigues.

normais apesar de suas características anômalas, antes de 1781 Urano era encarado como uma estrela, apesar de seu movimento estranho ao de uma estrela. Aparentemente, esse movimento estranho não fora percebido até então.

Somente com o aperfeiçoamento do telescópio de Sir William Herschel, que lhe permitiu a observação da forma discóide de Urano, absolutamente incomum na observação de uma estrela, é que este movimento anômalo começou a ser notado. Após algumas tentativas infrutíferas de tratar Urano como um cometa, *Sir* Herschel anunciou a descoberta de um novo planeta à comunidade de astrônomos.

Herschel não poderia ter realizado a descoberta de Urano se se limitasse à prática comum da ciência normal de sua época. Essa prática comum apenas lhe permitia ver estrelas e cometas, nenhum novo planeta. Do mesmo modo, a prática científica normal não permitia a Copérnico propor um novo sistema astronômico, mas apenas trabalhar para ajustar suas observações às de seus companheiros, dentro de limites normais de pesquisa:

Embora as evidências sejam equívocas, a pequena mudança de paradigma forçada por Herschel provavelmente ajudou a preparar astrônomos para a descoberta rápida de numerosos planetas e asteróides após 1801. Devido a seu tamanho pequeno, não apresentavam o aumento anômalo que alertara Herschel. Não obstante, os astrônomos que estavam preparados para encontrar planetas adicionais foram capazes de identificar vinte deles durante os primeiros cinquenta anos do século XIX, empregando instrumentos-padrão. A história da astronomia fornece muitos outros exemplos de mudanças na percepção científica que foram induzidas por paradigmas, algumas das quais ainda menos equívocas que a anterior. Por exemplo, será possível conceber como acidental o fato de que os astrônomos somente tenham começado a ver mudanças nos céus - que anteriormente eram imutáveis - durante o meio século que se seguiu à apresentação do novo paradigma de Copérnico?

(Kuhn 2003, p.153)

Somente quando Urano começou a se impor como uma anomalia para a ciência normal, é que surgiu a crise que promoveu a oportunidade para uma relativa suspensão das pesquisas que se limitavam ao domínio comum de investigação. Fora necessário que Herschel dirigisse seu esforço investigativo para além das considerações normais, para que pudesse realizar sua importante descoberta. E essa descoberta não se deu imediatamente. Assim, o que antes era encarado como uma estrela, ganhou o *status* de cometa e, finalmente, atingiu a condição de planeta.

Uma importante tese defendida por Kuhn é a de que nosso modo de ver os objetos depende do nosso atual quadro conceitual de referência. Segundo ele, por exemplo, até 1781 os astrônomos não conseguiam ver nenhum novo planeta. Nos anos subseqüentes, contudo, os astrônomos estavam aptos para observar toda uma nova coleção desse tipo de astro.

3.4.3 A história oficial

Apesar dos variados exemplos que corroboram sua visão de progresso científico, para Kuhn a idéia mais comum que se tem da ciência, assim como de seu desenvolvimento histórico, não deixa entrever as revoluções cuja existência foram até agora largamente defendidas. E, segundo ele, há bons motivos para essa virtual invisibilidade das revoluções científicas.

Em primeiro lugar, é necessário considerar a existência de algo como uma autoridade científica. Esta é a fonte das idéias que popularmente se têm da ciência e de sua prática. Para Kuhn, essas idéias são ativamente propaladas, pelos meios oficiais, com o intuito de encobrir que o movimento científico não ocorre de maneira linear e cumulativa.

Essas fontes oficiais podem ser divididas em três grupos: manuais científicos, textos de divulgação e obras filosóficas que se baseiam nos dois primeiros. Juntos esses três veículos informativos corroboram o paradigma vigente, pois discorrem sobre os resultados que se consolidaram após uma determinada revolução científica e não sobre as próprias revoluções, tomadas em si mesmas.

Ou seja, cada uma dessas três categorias, que se voltam simultaneamente para o trabalho do cientista, apesar de se debruçarem sobre ele de pontos de vista diferentes e com objetivos distintos, possuem como conteúdo principal somente o trabalho da ciência normal de cada época. Aparentemente, não há nenhum compromisso com a descrição do processo que culminou com a ciência normal. No caso dos manuais científicos há até mesmo razões funcionais para que as revoluções sejam sistematicamente encobertas.

Por fornecerem, aos seus leitores, o conteúdo da prática científica normal mais recente, os manuais científicos devem ser reescritos a cada troca de paradigma. Nessa reedição do conteúdo da ciência normal, os manuais omitem os conteúdos anteriormente

válidos, que agora não possuem mais lugar, por não corresponderem ao novo quadro conceitual em vigor.

A menos que o pesquisador tenha testemunhado essa troca de paradigmas, ele será levado a acreditar que os conteúdos desses manuais possuem uma referência histórica muito anterior à da emergência do paradigma ao qual correspondem.

Exemplo disso é que esses manuais pouco, ou quase nada, se dedicam a um tratamento histórico da disciplina científica cujo conteúdo estão preocupados em transmitir. Quando o fazem reservam, para isso, um rápido capítulo, em geral o primeiro, cujo objetivo é o de trazer uma espécie de lastro histórico aos princípios assumidos pelas idéias neles apresentadas.

Ou seja, esses capítulos introdutórios tentam passar a idéia de que existe uma tradição para as idéias e os princípios que serão tratados nos capítulos seguintes. Assim, os cientistas de tempos passados são tratados como heróis e seus trabalhos como precursores do que hoje se considera um conhecimento mais completo.

Esses trabalhos que, nos manuais, são considerados como precursores de uma determinada atividade científica, passam por uma compilação que seleciona apenas aqueles dados e apenas aquelas características que mais se afinam com a visão do paradigma em vigor e, do qual, o manual científico é o principal defensor. Esses dados e características são, muitas vezes, descontextualizados e distorcidos de modo a criar a sensação, no jovem pesquisador, que esses heróis do passado estavam trabalhando exatamente nos mesmos fenômenos e problemas para os quais muitas soluções foram encontradas, posteriormente, por outros tantos cientistas.

Esse jovem cientista, que agora se encontra diante desta história bem sucedida, se sente convidado a também poder fornecer alguma contribuição importante para este desenvolvimento que parece apenas somar resultados:

Em parte por seleção e em parte por distorção, os cientistas de épocas anteriores são implicitamente representados como se tivessem trabalhado sobre o mesmo conjunto de problemas fixos e utilizado o mesmo conjunto de cânones estáveis que a revolução mais recente em teoria e metodologia científica fez parecer científicos. Não é de admirar que os manuais e as tradições históricas neles implícitas tenham que ser reescritas após cada revolução científica. Do mesmo modo, não é de admirar que, ao ser reescrita, a ciência apareça, mais uma vez, como sendo basicamente cumulativa.

(Kuhn 2003, p.177-178)

O que ocorre, nessa leitura que os manuais realizam da história, portanto, é uma flagrante revisão do passado do ponto de vista do presente, sempre no sentido de acomodar aquele a este. Um exemplo utilizado por Kuhn merece ser mencionado aqui.

Nos referimos à afirmação de Newton de que Galileu havia descoberto que a força sempre constante da gravidade promove um movimento que é proporcional ao quadrado do tempo. Na verdade, Newton se refere a um teorema que pode ser traduzido dessa forma desde que assumidos os conceitos da dinâmica do próprio Newton. Contudo, Galileu não chega a falar de forças como, por exemplo, a da gravidade, em suas digressões acerca da queda dos corpos (Kuhn 2003, p.179).

Deste modo, ao assumir que Galileu estava diante de um fenômeno que seus pressupostos conceituais não lhe permitiam testemunhar, Newton disfarça o aspecto revolucionário do trabalho desse grande investigador da Renascença. Qual seja, a passagem da dinâmica aristotélica para a de Galileu, ao mesmo tempo em que também disfarça a passagem da dinâmica de Galileu para as suas próprias explicações sobre as leis que regem o movimento dos corpos.

O ponto de vista do paradigma presente tende a enxergar todas as pesquisas que se realizaram, dentro de paradigmas anteriores, como investigações incipientes daquilo que, atualmente, se vê como os *últimos resultados*. Todos os pesquisadores que trabalharam em seus respectivos fenômenos são aliciados no exército do paradigma mais recente, e todos estes fenômenos passados são encarados como uma visão pouco amadurecida dos fenômenos estudados no presente:

Enquanto pedagogia, essa técnica de apresentação está acima de qualquer crítica. Mas quando combinada com a atmosfera geralmente a-histórica dos escritos científicos e com as distorções ocasionais ou sistemáticas examinadas acima, existem grandes possibilidades de que essa técnica cause a seguinte impressão: a ciência alcançou seu estado atual através de uma série de descobertas e invenções individuais, as quais, uma vez reunidas, constituem a coleção moderna dos conhecimentos técnicos. O manual sugere que os cientistas procuram realizar, desde os primeiros empreendimentos científicos, os objetivos particulares presentes nos paradigmas atuais. Num processo freqüentemente comparado à adição de tijolos a uma construção, os cientistas juntaram um a um os fatos, conceitos, leis ou teorias ao caudal de informações proporcionado pelo manual científico contemporâneo.

(Kuhn 2003, p.180)

A tese de Kuhn é que essa visão da ciência é extremamente enganosa. A maioria dos fenômenos tratados nos manuais atuais não existiam a bem pouco tempo atrás. Estes fenômenos só ganharam existência com a emergência dos atuais paradigmas científicos.

Cada geração de pesquisadores aprendeu a lidar com conjuntos de problemas que lhe eram próprios, apenas alguns poucos problemas são legados de uma geração a outra. O mesmo pode ser dito dos métodos, dos conceitos e dos pressupostos, que povoam o domínio de ação do cientista a cada época. Todos esses elementos se combinam para a formação de uma visão da natureza que, por sua vez, varia igualmente de época para época, apresentando, a cada vez, fenômenos distintos que, só do ponto de vista dos manuais, podem ser encarados como um único e o mesmo.

Teorias e fenômenos surgem, como que simultaneamente, ajustando o mundo a uma nova interpretação oriunda de um paradigma emergente que tem, como uma de suas mais importantes tarefas, suprimir a interpretação anterior. Uma das conseqüências dessa supressão, trabalho da ciência normal de cada época, é a eliminação dos rastros deixados pelo antigo paradigma. Eliminação esta que acaba, concomitantemente, apagando a memória da revolução que lançou os parâmetros científicos em vigor.

4. REVOLUÇÃO EM MATEMÁTICA

Revolutions in mathematics may not involve crisis or the rejection of earlier mathematics (...). New discoveries, particularly those of revolutionary import, provide new modes of thought within which more powerful and general results are possible than ever before. To the question of whether or not revolutions occur in mathematics, my answer is an emphatic “yes”.

*Joseph Dauben*⁵⁷

Antes de aplicarmos o conceito de revolução sobre certos eventos matemáticos será necessário tecer algumas considerações para ajudar a clarificar o sentido mais específico que desejamos atribuir ao termo *revolução*.

Já mencionamos que quando Kuhn se apropria da idéia de revolução para descrever o desenvolvimento das ciências naturais, ele o faz através de uma aproximação do sentido político do termo. Essa aproximação deve ser efetuada com certo cuidado, dado que não é possível atribuir, sem mais, atributos de uma esfera como a política a outra como a ciência, mais especificamente a ciência matemática.

Mesmo no sentido mais comum do termo *revolução*, como movimento de cunho político e social no qual o velho regime é substituído, muitas vezes de maneira violenta, por outro sistema totalmente novo, existem certas nuances que não permitem uma idéia unânime e final sobre o que seja ou não revolucionário.

No interior dessa discussão Donald Gillies (1992) nos apresenta um rápido ensaio sobre como poderíamos entender as revoluções matemáticas. Na verdade, estabelece ele uma distinção bastante razoável que pode nos ajudar a entender certas nuances nas revoluções políticas e, com isso, melhorar a caracterização do modelo que adotaremos para as revoluções em matemática.

Tomando os três grandes exemplos de revoluções políticas na história da Europa moderna e contemporânea, a Revolução Inglesa (1640/1688), a Revolução Francesa (1789) e a Revolução Russa (1917), é possível estabelecer uma classificação desses três grandes momentos históricos em pelo menos dois grupos distintos (**Gillies 1992**).

No primeiro grupo encontramos as Revoluções Inglesa e Francesa. Tratam-se aqui daqueles momentos revolucionários em que o antigo regime, no caso duas das principais monarquias absolutistas da Europa, foi violentamente derrubado para

⁵⁷ Dauben 1992, p.229

novamente ser restabelecido, anos depois, na forma amenizada de uma monarquia parlamentarista.

No segundo grupo, todavia, aquele que inclui a Revolução Russa, o antigo regime foi deposto de maneira igualmente violenta sem, porém, ser restabelecido posteriormente por nenhuma forma explícita de monarquia, mesmo que por uma forma monárquica amenizada como no primeiro grupo.

Coincidentemente ou não, esses três grandes momentos de perturbação político-social têm datas demarcatórias muito próximas das três revoluções mais importantes nas ciências naturais: a revolução na física e na astronomia com a publicação do *Principia* por Newton em 1687, a revolução na química com a publicação do *Tratado Elementar da Química* por Lavoisier em 1789 e, novamente na física e na astronomia, com a publicação da *Teoria Geral da Relatividade* por Einstein em 1915 (Gillies 1992).

Porém, o que queremos ressaltar aqui é a característica que permite a separação das revoluções nos dois grupos acima mencionados, o das revoluções do tipo *franco-inglesa* e o das revoluções do tipo *russo*. Essa característica é a presença ou a ausência do que se decidiu chamar de *Princípio de Destituição do Antigo Regime*. Notamos que este princípio está presente apenas nas revoluções como a que se deu na Rússia em 1917 (Gillies 1992).

Muitos dos opositores da idéia de revolução em matemática argumentam que as verdades nesse campo são sempre preservadas, mesmo com o aparecimento de novas teorias. Por esse motivo, o uso do conceito de revolução nestes casos é um erro, já que esse conceito traz consigo aquilo que foi chamado a pouco de *princípio de destituição do antigo regime*.

Por outro lado, aqueles que defendem que revoluções também podem e devem ser constatadas em matemática afirmam que a metáfora empregada nesses casos não pode ser referendada sem quaisquer ressalvas, como parece ter ocorrido no caso das ciências naturais, nas quais as revoluções em geral destituem inequivocamente antigos sistemas teóricos.

E de fato as verdades matemáticas são, pelo menos em algum nível de consideração, preservadas com o aparecimento de totalmente novas teorias. No entanto, para que essas verdades sejam preservadas, e para que continuem a ter uma aplicação

efetiva dentro da matemática, surge a necessidade de serem reavaliadas e remodeladas dentro dos parâmetros indicados pelas novas escolas e teorias matemáticas.

Exemplos dessa remodelagem das antigas estruturas matemáticas podem ser notadas desde a reformulação da escola pitagórica por Teeteto e Eudoxo, passando pela introdução do cálculo com Leibniz e Newton, chegando até à refundação da aritmética por meio da Teoria de Conjuntos de Cantor.

Esses três exemplos, que trataremos mais detidamente nesse capítulo, além de muitos outros não citados, reforçam a tese de que as revoluções costumeiramente ocorrem em matemática e que a melhor metáfora para entendê-las é aquela que nos remete às revoluções do tipo franco-inglesas. E com isso nos referimos àquelas transformações revolucionárias nas quais não devemos levar em conta qualquer *princípio de destituição*.

As revoluções em matemática se parecem com certos eventos que, por vezes, também percebemos ocorrer nas ciências naturais. A teoria da relatividade de Einstein é, sem dúvida, um marco na história da física e da astronomia contemporânea. Depois de Einstein componentes curriculares em cursos de graduação e de pós-graduação tiveram que ser revistos, novos campos de pesquisa foram abertos, livros escolares se tornaram ultrapassados. Em suma, a física e a astronomia do século XX em diante não pode mais ser considerada a mesma desde então.

Se levamos em conta o *princípio de destituição* não podemos afirmar que houve qualquer revolução na física a partir da publicação do *Zur allgemein Relativitätstheorie* em 1915. As verdades da física newtoniana não perderam o seu valor, isto é, se consideramos apenas o campo teórico delimitado pelos seus axiomas e teoremas mais importantes. Exatamente da mesma maneira, o aparecimento das geometrias não-euclidianas não fez evaporar a geometria euclidiana.

Tendo isso em vista, somos forçados a supor que o *princípio de destituição* não pode ser considerado o critério decisivo para a constatação de revoluções em ciências naturais e que ele não se faz presente em quase nenhum momento quando nos propomos o desenvolvimento revolucionário da ciência matemática.

No lugar do *princípio de destituição* é necessário lançar mão de um princípio mais geral, de preferência um que leve em conta o grau de inovação com que as novas

teorias se projetam sobre as antigas; isto é, necessitamos levar em conta se estas novas teorias se projetam sobre todo o campo científico no qual estão inseridas ou se só se fazem sentir em determinadas regiões muito determinadas. Além disso, é necessário também poder avaliar a magnitude com que a projeção dessa nova teoria é capaz de deslocar, sobre si mesma, a atenção dos pesquisadores e é preciso poder considerar o peso de decisão e influencia que esses pesquisadores possuem na comunidade científica local e internacional.

Em suma, é necessário desde já alertarmos que o *princípio de destituição* não é suficiente para avaliarmos o caráter revolucionário de um evento científico, seja em ciências naturais, seja em matemática. Trata-se de um critério um tanto grosseiro que necessita de uma revisão. E o objetivo de nosso trabalho é justamente mostrar que é possível constatar revoluções matemáticas, em particular que a Teoria de Conjuntos de Cantor pertence a essa categoria de eventos matemáticos revolucionários.

4.1 Sobre o conceito de revolução em matemática

Face à pergunta: existiriam revoluções em matemática? — pergunta que se refere ao desenvolvimento da história da matemática, assim como a seus conteúdos e afirmações —, observamos posicionamentos diversos e muitas vezes contrários.

Muitos são os que respondem negativamente a essa pergunta, afirmando que, em matemática, não existem fenômenos aos quais possamos atribuir o nome de revoluções. Asseveram que a matemática possui um desenvolvimento cumulativo, no qual não é possível constatar intervenções que mereçam o nome de revolução.

Por outro lado há quem acredite que é possível observar, também na matemática, um padrão de desenvolvimento semelhante ao das outras formas de conhecimento científico, padrão este que se aproxima de uma concepção claramente revolucionária. Esta é a posição que defendemos e que pretendemos tornar mais explícita a partir deste momento.

Joseph Dauben se coloca entre os defensores da idéia de revolução em matemática. Aqui destacamos um de seus artigos diretamente voltados para o tema, intitulado *Are there revolutions in mathematics?* (1992), no qual apresenta, logo de início, o posicionamento contrário de importantes autores, no sentido de ilustrar essa

discussão nos termos em que ela já foi colocada durante os últimos séculos:

In most sciences one generation tears down what another has built, and what one has established, another undoes. In mathematics alone each generation builds a new story to the old structure.

(H. Hankel 1889, Dauben 1992, p.205)

While ‘Imagination, fancy, and invention’ are the soul of mathematical research, in mathematics there has never yet been a revolution”

(C. Truesdell 1968, Dauben 1992, p. 205)

The calculus — it all embellishes the spirit and has created, in the world of geometry, an unmistakable revolution.

(B. Fontenelle, Dauben 1992, p.205)

Nonstandard analysis is revolutionary. Revolutions are seldom welcomed by the established party, although revolutionaries often are.

(G.R. Blackley, Dauben 1992, p.205)

A tensão criada pela escolha dessas citações denuncia um certo equilíbrio entre as duas posições contrárias. No entanto, existe uma tendência majoritária contra a idéia de que as revoluções possam ser identificadas no interior da matemática. Segundo esse ponto de vista majoritário — que poderíamos identificar como uma interpretação tradicional da história da matemática —, diferentemente das ciências naturais, a matemática apresenta um desenvolvimento cumulativo e, nesse sentido, linearmente evolutivo e, portanto, não revolucionário.

A interpretação tradicional entende essa ciência como um corpo teórico que jamais descarta suas antigas conquistas. Embutida nessa concepção está a idéia de que a matemática é uma ciência que não depende de contextos históricos, psicológicos, religiosos ou sociais.

Esta independência é o que melhor garantiria tanto a universalidade como a atemporalidade das verdades matemáticas e é o que a tornaria uma *ciência à parte das outras*, como defende Claude Bernard no seguinte trecho de seu *An introduction to the study of experimental medicine*:

Mathematical truths are immutable and absolute (...) mathematics grows by simple successive juxtaposition of all acquired truths. [Já as ciências experimentais, por apresentarem apenas verdades relativas] can move forward only by revolutions and by recasting old truths in a new scientific forms.

(Bernard 1927, p.41, Dauben 1992, p.206)

Claude Bernard defende, portanto, que a matemática é unicamente constituída por verdades absolutas e imutáveis. Essas verdades apenas se justapõem umas às outras no decorrer do desenvolvimento histórico dessa ciência. Concluímos disso que qualquer coisa diferente desse constante acúmulo de verdades não deveria ser considerado parte da matemática, mas algo de outra estirpe, assim como são, por exemplo, os elementos das ciências experimentais que, cada um a sua maneira, avançam por meio de revoluções.

Mais recentemente, como defensor da idéia tradicional de que revoluções não ocorrem em matemática, encontramos o historiador da matemática Michael J. Crowe que, através de um restrição no conceito que comumente se faz da matemática, pretende definir esta ciência como cumulativa por excelência.

Essa restrição, na verdade, faz referência à amplitude do que pode e do que não pode ser considerado sob o rótulo de matemática; de tal modo que recairiam sob este signo apenas aquelas teorias, de conteúdo matemático claramente definido; isto é, aqueles conteúdos que não pudessem ser enquadrados, nem como pertencentes à *história da matemática*, nem como pertencentes à *filosofia da matemática*.

Tomando por princípio essa restrição, Crowe não nega que revoluções possam se avizinhar da matemática. No entanto, elas se manteriam a uma distância segura do núcleo daquilo que pode ser entendido como *matemática em sentido próprio*. Isto é, essas revoluções estariam restritas a um plano histórico-filosófico, não atingindo o que poderíamos entender como *a matemática em si mesma*.

As geometrias não-euclidianas, por exemplo, conduziram a uma drástica mudança na maneira de encarar a natureza da matemática o que, por sua vez, marcou revolucionariamente a história e a consideração filosófica de certos conceitos matemáticos. A isso Crowe chama de *revolução na filosofia da matemática*, ou na *história da matemática*. Contudo, discorda ele, veementemente, que as geometrias não-euclidianas tenham causado qualquer alteração revolucionária no interior da *matemática em si mesma*, isto é, no sentido próprio que ele conferiu a esta ciência.

Quanto a isso, uma das principais críticas feitas a Crowe é a de que sua definição do conceito de revolução exclui, de antemão, a possibilidade de seu aparecimento na matemática. Ou, vice-versa, de que seu conceito de matemática descartaria, *a priori*, as revoluções. Isto é, a matemática em sentido próprio seria justamente aquela ciência na

qual não pudéssemos encontrar quaisquer traços revolucionários. Assim, em princípio, ou por definição, não há revoluções em matemática. Daí a segurança com que Crowe enuncia sua décima lei, segundo a qual, revoluções nunca ocorrem em matemática⁵⁸: “*Revolutions never occur in mathematics*” (Crowe 1975, apud Gillies 1992 p.19).

No entanto, para saber se revoluções podem ou não aparecer na matemática, ou em qualquer outra ciência, é necessário tentar entender melhor o sentido mais original do termo *revolução*.

Do ponto de vista político, o termo revolução pode indicar uma drástica e violenta mudança de perspectiva e de ação no seio das instituições públicas, guiada por um grupo de interesses ampla e abertamente discordantes daqueles que, em um determinado momento histórico, controlam as formas de organização social do Estado.

Do ponto de vista da história da ciência, por sua vez, esse termo apareceu pela primeira vez relacionado com a astronomia, justamente com a publicação do *De Revolutionibus orbium coelestium* de Copérnico. Nessa obra, como sabemos, a palavra revolução indica o movimento cíclico dos planetas do sistema solar.

O sentido que atualmente, e de maneira mais comum, conferimos à palavra revolução, porém, comporta uma certa ambivalência que parece surgir da união dos dois usos já indicados no parágrafo anterior.

Como vimos, do ponto de vista político, revolução indica uma violenta ruptura com um regime de governo estabelecido; trata-se do abandono de um sistema em prol de um outro que lhe é contraditório e que deverá substituí-lo integralmente; o antigo regime deve ser esquecido em todos os seus aspectos e os revolucionários trabalharão com o máximo vigor para que isso aconteça.

No sentido empregado pela astronomia do século XVII, porém, revolução indica o movimento cíclico e perpétuo dos planetas em torno de um astro ou de outro eixo celeste qualquer; revolução é, nesse sentido, algo que se repete, sempre e exatamente da mesma maneira e com determinada frequência; assim entendido, este termo indica o eterno trilhar de antigos passos, já muitas vezes perseguidos; trata-se da perseguição de uma trajetória cíclica e fixa, isto é, de uma jornada que não leva a lugar algum, já que o

⁵⁸ Esta lei, junto com as nove precedentes, apareceram originariamente em um artigo de 1975 intitulado Ten ‘Laws’ Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics, *Historia Mathematica*, 2 (1975), p.161-166, reeditado em Gillies (1992), 15-20p.

movimento, no qual consiste, volta-se continuamente sobre si mesmo; revolução aqui se refere a uma rota que não oferece nem novidade, nem escapatória.

Nos dias de hoje é possível realizar um amálgama desse dois sentidos mais primitivos. Assim, revolução é, a um só tempo, e paradoxalmente, o mesmo e o diverso.

Fontenelle, no século XVII, foi o primeiro a usar o termo revolução de maneira próxima ao sentido ambíguo acima apresentado (**Dauben 1992**). Particularmente, Fontenelle estava preocupado com as recentes novidades matemáticas, mais especificamente, com as mudanças ocasionadas pela introdução dos novos métodos, por Newton e Leibniz, com a criação do cálculo infinitesimal. Para Fontenelle, principalmente com Leibniz, a nova análise do infinitamente pequeno se oferecia ao mundo como uma radical mudança nas antigas formas de se fazer matemática.

Em uma primeira análise, é possível identificar aqui um uso do termo revolução que se aproxima apenas do primeiro sentido acima mencionado. Trata-se de uma novidade de grande magnitude e que modifica inteiramente as antigas formas de conduta científico-matemáticas. Essa novidade se impõe de tal modo que sobrepuja todo o conservadorismo, assim como a resistência das antigas práticas e modos de percepção até então vigentes em matemática. Desse ponto de vista, o cálculo não pode, e não deve, ser considerado como um simples acúmulo de verdades sobre antigas estruturas matemáticas previamente consolidadas:

In describing the "new geometry" as bringing about an "unmistakable revolution", it was also a "quantum leap" from the old mathematics in the sense that a theory of infinitesimals and limits was not part of previously accepted branches of mathematics — in particular Euclidean geometry, number theory, or even analytic geometry. The "new geometry" it might be said, constituted a breach requiring a leap of faith to new comprehensive concepts and methods that were not part of earlier mathematical practice.

(**Dauben 1992**, p.208)

(...) Suffice it to say that the appearance or the calculus was "revolutionary", requiring the introduction of wholly new elements — having so substantial an effect on the content, methods and meaning of mathematics as to constitute a true, or as Fontenelle says, "unmistakable" revolution.

(**Dauben 1992**, p.209)

Ainda assim, e se nos detivermos mais atentamente sobre este ponto, mesmo o cálculo surgindo como uma invenção sem precedentes, principalmente ao revelar novos conteúdos, métodos, linguagens e ferramentas matemáticas, Fontenelle não emprega o

conceito de revolução de modo a descartar, como equivocadas, as antigas formas de entender a matemática. A matemática, antes do cálculo infinitesimal, era qualitativamente diferente da matemática revolucionária introduzida pelo advento do cálculo.

A matemática *pós-cálculo* revê seus antigos resultados e recomeça sua trajetória de um ponto, a um só tempo, novo e velho. Novo porque a forma de pensar e realizar a matemática muda radicalmente com o cálculo (sentido político de revolução); mas também é velho, porque a matemática volta a uma posição já ocupada anteriormente, como se um ciclo fosse completado e ela novamente estivesse a repisar antigas pegadas, revendo antigos resultados de uma nova perspectiva (sentido astronômico de revolução).

A forma de fazer matemática antes do cálculo não estava *errada*, mas após Newton e Leibniz ela se torna ultrapassada e surge a necessidade de uma reconstrução. A reconstrução da matemática a partir do cálculo é, por si só, uma reafirmação de seus antigos resultados de um novo ponto de vista. Trata-se de uma reforma da matemática e não do abandono de uma antiga matemática em prol de uma outra completamente nova (sentido atual de revolução).

Clearly this revolution was qualitative, as all revolutions must be. It was a revolution which Fontenelle perceived in terms of character and magnitude, without invoking any displacement principle — any rejection of earlier mathematics — before the revolutionary nature or the new geometry or the infinite could be proclaimed. For Fontenelle, Euclid's geometry had been surpassed in a radical way by the new geometry in the form of the calculus, and this was undeniably revolutionary.

(Dauben 1992, p.209)

Assim, o modo como empregamos o conceito de revolução em matemática, ou em qualquer outra ciência, não toma isoladamente, nem o político, nem o astronômico, mas passa por ambos, adquirindo um terceiro sentido, que se evidencia como a união desses dois primeiros.

Revolução constitui, desse modo, a descontinuidade de um sistema, assim como podemos entender uma estrutura social, ou política, ou religiosa ou científica. Essa descontinuidade — essa ruptura se assim preferirmos — acarreta ou é conduzida por novidades que, devido à força com que se impõem, não podem ser recusadas. Contudo, essas novidades não destroem a história ou os antigos conteúdos das estruturas sobre as quais recaem. A revolução cria uma perspectiva inteiramente nova sobre elas. Mesmo

assim, disso não podemos concluir que aquilo que antes da revolução era verdadeiro, se torna, automática e universalmente, falso depois do evento revolucionário, mas apenas obsoleto, ou em desuso, ou ultrapassado, ou apenas inadequado para determinadas abordagens.

A física antes de Einstein não estava errada, assim como não estava errada antes de Newton. Ainda que a teoria newtoniana rejeite a aristotélica — assim como a de Einstein, em seus princípios mais fundamentais, abandone a de Newton —, o que temos são apenas teorias físicas diferentes, em contextos históricos diferentes, construídas sobre novos enfoques e alicerces.

Em relação a esse sentido de revolução, Dauben nos chama a atenção para o fato de que, de maneira muito símile, a monarquia na Inglaterra de hoje não é a mesma da monarquia que existia antes da *Revolução Gloriosa* de 1688, e que marcou a drástica virada política na casa dos Stuart. Ainda que o regime de governo tenha se mantido, este teve que se readequar a novas tendências políticas que sobre ele se faziam sentir. Essa readequação atingiu tal magnitude e extensão que, ao final, não se podia mais dizer que se tratava do mesmo tipo de governo, mesmo que o reconheçamos pelo mesmo nome.

Dauben concorda que a matemática também passa por esses momentos de ruptura em seus conceitos e práticas, o que não implica que antigas maneiras de pensar e fazer matemática estivessem equivocadas:

In much the same sense, it seems clear that revolutions have occurred in mathematics. However, because of the special nature of mathematics, and the unique character of its principles and the logical structure of its arguments, it is not always the case that an older order is necessarily refuted or rejected outright. Although it may persist, the old order nevertheless does so under different terms, often in radically altered or expanded contexts.

(Dauben 1992, p.209)

As idéias de revolução e de resolução podem ser justapostas de modo a nos ajudar a compreender mais claramente o avanço da matemática. As revoluções devem ser entendidas como inovações de grande magnitude, que possuem o papel de aumentar o grau de complexidade e detalhamento dos conteúdos dessa ciência, isto é, aumentar o grau de resolução de seus problemas e conteúdos.

Revolução e resolução se superpõem em um mesmo sentido. Isto é, as teorias

matemáticas são constantemente completadas por novos resultados que, assim como Leibniz, Cantor e Hilbert⁵⁹ propuseram, devem respeitar e obedecer apenas o critério de consistência. Esses novos resultados melhoram a perspectiva sobre a matemática que, em alguns momentos, pode ser encarada, segundo Dauben, como uma prática totalmente nova em relação a momentos anteriores, recentes ou longínquos:

Because the progress of mathematics is restricted only by the limits or self-consistency, the inherent structure of logic determines the structure of mathematical evolution. I have already suggested the way in which this evolution is necessarily cumulative. As theory develops, it provides more complete, more powerful, more comprehensive problem-solutions, sometimes yielding entirely new and revolutionary theories in the process. But the fundamental character of such advance is embodied in the idea of resolution. Like the microscopist, moving from lower to higher levels of resolution, successive generations of mathematicians can claim to understand more, with a greater stockpile of results and increasingly refined techniques at their disposal.

(Dauben 1992, p.228)

O conceito de resolução matemática e, por conseqüência, o de revolução devem ser compreendidos como uma aproximação e como um refinamento, cada vez maiores, tanto dos problemas existentes como das soluções que possam se aplicar sobre eles. Trata-se aqui do terceiro sentido que expusemos há pouco, a saber, o de uma novidade que se sobrepõe e se ajusta às antigas estruturas.

O desenvolvimento da matemática se encontra no desvelamento daqueles detalhes antes invisíveis. A revelação desses detalhes, contudo, não elimina os detalhes mais rudimentares, já descobertos por ferramentas menos sutis.

4.1.1 O conceito de revolução em matemática

No início do terceiro capítulo, dissemos que o modelo historiográfico apresentado por Thomas Kuhn (2003 [1962]) descrevia um desenvolvimento científico que seria mais bem compreendido como “revolucionário”. Isto é, a ciência se desenvolve por uma sucessão de paradigmas que se substituem, uns aos outros, por meio de uma dinâmica que pode ser descrita por analogia com as revoluções políticas.

Esperamos já ter esclarecido que o emprego do termo “revolução” motivou-se no contexto político. Trata-se de uma metáfora, cuidadosamente elaborada e enriquecida

⁵⁹ Sobre este ver Hilbert (1925), *On The Infinite*, 1983.

com uma longa lista de exemplos em *A Estrutura*, que no entanto ainda necessita ser utilizada com certa cautela, tanto quando nos referimos ao desenvolvimento das ciências naturais, como quando nos concentramos no desenvolvimento da matemática — isto é, quando queremos apontar, nesta ciência, criações que também gostaríamos e poderíamos chamar de revolucionárias.

Tendo em vista a análise já realizada sobre o conceito de revolução científica, explicitaremos a seguir, sucintamente, as condições que estabelecemos como fundamentais para a caracterização de um evento, ou criação científica, como uma *revolução científica*:

I. Remodelação do contexto científico: paradigmas científicos⁶⁰ são substituídos ou alterados por outros, provocando assim uma drástica mudança conceitual e metodológica no contexto científico.

II. Invalidação total ou parcial dos princípios do antigo paradigma: A transformação provocada por ocasião da alteração de paradigmas pode atingir uma magnitude tal que acaba por invalidar, total ou parcialmente, princípios já bastante bem estabelecidos.

III. Excentricidade das causas: A decisão por um novo paradigma dentro de uma determinada comunidade científica dependerá de fatores tão diversos quanto excêntricos à própria idéia tradicional de ciência, tais como nacionalidade, cultura, contextos históricos, contextos religiosos, etc.

IV. Novas Metodologias e Solubilidade de Problemas: Um novo enfoque — novos conceitos ou novos fundamentos — em geral possibilitam novas metodologias ou metodologias mais potentes para a solução de problemas novos ou para problemas antigos que já tinham sido solucionados, ou não, pelo antigo paradigma; ou para a apropriação de novos problemas.

⁶⁰ Ver p.145-153.

V. Descontinuidade: O desenvolvimento científico não poderá mais ser compreendido apenas como uma cadeia ininterrupta, linear e cumulativa de eventos que, somando-se uns aos outros, corroboram a idéia de um progresso contínuo, ou de uma evolução pacífica da ciência.

Das cinco condições acima é possível derivar, pelo menos, dois sentidos do conceito de revolução científica:

1. *Sentido estrito de revolução:* Em um primeiro momento, revolução científica significa um rompimento efetivo, de uma parcela de possivelmente poucos mas importantes membros de uma determinada comunidade científica, com os valores e as crenças, assim como com a prática teórica e aplicada, da visão predominante de seus antigos mestres ou teorias de referência freqüentemente apresentadas em manuais e compêndios científicos. Esse rompimento se apresenta na forma de propostas científicas totalmente novas que não podem ser consideradas como simples extensões, ou *decorrências necessárias*, dos trabalhos que já se vinham realizando normalmente. Na verdade, a nova proposta científica se torna antagônica à proposta vigente. Neste primeiro momento, estamos diante do *sentido estrito* de revolução científica.

2. *Sentido estendido de revolução:* Há momentos, porém, em que revoluções científicas podem ser claramente delineadas sem que haja um rompimento radical com o antigo paradigma, isto é, sem que haja a invalidação e o conseqüente descarte do mesmo. Neste caso, revolução científica também deve ser entendida como um evento sem precedentes e totalmente novo, possuindo a força de se impor de maneira irrevogável à comunidade científica, tendo o poder de alterar o curso das pesquisas e de causar a reformulação de certas idéias fundamentais do campo científico sobre o qual recai. Ao fazê-lo, no entanto, essa forma de revolução não onera a ciência — como um todo ou em particular — com o descarte de suas antigas conquistas já bem consolidadas. Podemos chamar este segundo momento de *sentido geral*, ou *sentido estendido*, de revolução científica.

Em suma, vislumbramos dois sentidos para o uso da expressão *revolução*

científica. Um primeiro sentido, estrito, no qual antigos paradigmas são abandonados por outros que os substituem completamente, descartando no processo as afirmações que foram anteriormente estabelecidas; e um segundo sentido, geral, no qual não ocorre necessariamente esse descarte das afirmações do antigo paradigma, há apenas um deslocamento do foco de atenção e da concentração de esforços dos pesquisadores para o novo paradigma.

Quando nos voltamos para a matemática notamos que o sentido de revolução a se adotar deve ser em geral o segundo, o *sentido estendido de revolução*, dado que diante da observação atenta do aparecimento de grandes novidades no desenvolvimento desta ciência, notamos que, de modo muito símile a alguns eventos em ciência natural, os antigos paradigmas matemáticos não são em geral descartados.

Na matemática, em particular, um evento será considerado revolucionário se — além de ter passado pelo crivo das cinco condições que esboçamos acima — acatar também a seguinte condição especial:

VI. Descontinuidade matemática: Um novo paradigma em matemática será aquela criação, puramente matemática, que não pode ser encarada como uma simples continuidade do que já vinha se realizando anteriormente. Ainda que por causa dessa nova criação matemática não haja, em geral, descarte dos antigos fundamentos teóricos, sejam eles filosóficos ou metodológicos, não se pode dizer que estes mantêm o mesmo grau de relevância que detinham antes do aparecimento do novo paradigma. Restam assim, duas alternativas para as afirmações matemáticas que se localizam no âmbito do antigo paradigma:

- a) Esses fundamentos são revisados de modo a serem reinterpretados pelos novos conceitos ou fundamentos recentemente introduzidos;
- b) Essas afirmações não são revisadas e continuam tendo importância em um contexto que se torna cada vez mais restrito e, por causa disso, podem perder sua operacionalidade dentro do novo paradigma.

4.1.2 Exemplos

Eventos revolucionários na história da matemática

Por meio dos dois exemplos, que forneceremos a seguir, reiteramos que revoluções também ocorrem em matemática.

Rapidamente discorreremos sobre o que ocorreu com a teoria das proporções dos pitagóricos, totalmente revisada após o golpe da descoberta dos incomensuráveis, através dos excelentes trabalhos de geometrização de Teeteto e Eudoxo, culminando, finalmente, no enorme trabalho de fundamentação da geometria por Euclides (**Lintz 2007**).

Em seguida falaremos, igualmente de maneira muito sucinta, sobre o advento do cálculo diferencial que proveu a matemática com novos conceitos e recursos tais que não se pode dizer que ali não houve um fantástico salto qualitativo no desenvolvimento da matemática ocidental.

1) Os incomensuráveis:

Tivemos a oportunidade de analisar o papel que os números cumpriam na concepção cosmológica pitagórica. A *estrutura* mais fundamental do universo conhecido ganhava representação nos números inteiros positivos. Porém, esses números constituíam algo que ia muito além das meras representações, e lembramos que algumas vezes chegavam a se identificar com as próprias divindades.

Para os pitagóricos essa identificação se justificava plenamente, tendo em vista a maneira harmônica com que os números, bastante apropriadamente, se conciliavam com as muitas manipulações racionais, principalmente através da teoria das proporções, conferindo e se ajustando, deste modo, às idéias bastante primordiais de beleza, de harmonia, de bondade e de perfeição. Assim, os números consubstanciavam essas idéias mais primordiais e constituíam o princípio universal sob o qual se apoiava toda a estrutura da criação.

Fosse na música, na astronomia, na geometria, na aritmética ou na filosofia, os números inteiros positivos constituíam a pedra de toque pitagórica. A universalidade

proporcionada pelas análises das razões numéricas reforçava uma postura filosófica que tinha na *tábua de opostos* sua síntese mais bem acabada.

Nessa tábua, o finito e o infinito encabeçavam uma série de outros *títulos* que se referiam, cada um a seu modo, aos diversos aspectos positivos e negativos que fundavam o mundo racional. Sob o título do finito, recaía tudo aquilo que fosse bom e perfeito, tudo o que possuísse limite, forma, medida e número. Por sua vez, sob o título do infinito se ajustava tudo o que não pudesse ser assim entendido, ou seja, o informe, o ilimitado, a desmesura, isto é, tudo que não ganhasse um número inteiro como sua representação sendo, portanto, pernicioso e mal.

Tendo isso em mente, podemos estimar a reviravolta ocorrida com a descoberta dos incomensuráveis⁶¹. Isto é, com a descoberta de grandezas que não se submetiam à antiga concepção cosmológica de um mundo ordenado, justo, belo, bom e, acima de tudo, finito, os pitagóricos e seus contemporâneos se viram diante de uma revolução em todos os níveis do conhecimento.

Na verdade, a enorme universalidade conferida aos seus *números-princípios* teve que ser radicalmente revista. Os números inteiros positivos perderam o *status* de *portadores da égide divina*, uma vez que o ilimitado também se infiltrava entre eles, se acomodando mesmo naqueles sítios aparentemente harmônicos, como o quadrado de lado igual a 1, cuja diagonal conferia uma forma geométrica ao princípio irracional do infinito, mesmo no cerne da geometria e da aritmética pitagórica.

Euclides traz à tona a magnitude dessa revolução em um pequeno trecho dos seus *Elementos*, no qual alude o que talvez tenha ocorrido com aquele a quem foi dado ser o possível autor dessa descoberta sem precedentes para os gregos:

It is well known that the man who first made public the theory of irrationals perished in a shipwreck in order that the inexpressible and unimaginable should ever remain veiled (...) and so the guilty man, who fortuitously touched on and revealed this aspect of living things, was taken to the place where he began and there is forever beaten by the waves.

(Euclides, *Elements*, Livro X, in Dauben 1992, p.54)

Aqui, a própria diagonal do quadrado de lado igual a 1 recebe o nome de “o inconcebível” (*alogon*), ou seja, aquilo que não pode ser descrito, o que não pode ser

⁶¹ Ver neste trabalho a seção dedicada aos pitagóricos no Capítulo 1.

racionalmente discutido, o inominável e impensável. Com a diagonal os gregos ficaram frente a frente com o ilimitado, com a desmesura que insistia em se projetar para dentro do mundo pitagórico da perfeita harmonia.

Tanto a geometria como a aritmética passaram por grandes avanços em decorrência da descoberta dos incomensuráveis. Assim, as provas geométricas ganharam mais destaque com o enfraquecimento da tese de que as provas aritméticas eram superiores. Esta tese era defendida pelos primeiros pitagóricos, ainda imbuídos de seus princípios acerca da universalidade e do poder dos números como divindades.

Através de seus trabalhos, tanto Teeteto (407-369 a.C.) como Eudoxo (406-355 a.C.), jovens pitagóricos que já estavam sob o efeito de todas essas novidades, se esforçaram em estender a geometria de modo a abarcar os irracionais. Ainda que não imediatamente, também a aritmética se viu afetada por esses trabalhos, principalmente com os trabalhos posteriores de geometrização de certos resultados algébricos. Com isso, a antiga teoria da proporção pitagórica teve que ser readequada para acomodar também as magnitudes incomensuráveis.

Os campos da geometria e da aritmética foram grandemente transformados com novos métodos e resultados, e a partir desse momento não fazia mais sentido pensar a matemática por meio da primitiva visão pitagórica. Não era mais possível imaginar a matemática sem os irracionais. Uma antiga visão de mundo fora suplantada por uma nova, os antigos resultados pitagóricos continuaram valendo, mas as suas diretrizes mais importantes ruíram completamente e, com elas, todas as antigas concepções filosóficas, artísticas, astronômicas, matemáticas, etc, se viram abaladas.

Exemplos desse rompimento epistemológico e ontológico com as doutrinas pitagóricas já foram apresentados no primeiro capítulo, podemos mencionar o surgimento da escola de Eléia e, principalmente, as filosofias de Platão e de Aristóteles que representaram, cada uma a seu modo, a tentativa de uma readequação a novos tempos em que ainda não estavam claros os rumos a serem seguidos. Mas uma coisa era certa, a marcha para a aceitação dos números irracionais, com o mesmo *status* ontológico dos números inteiros, não poderia mais ser detida.

Com sua décima lei, Crowe distingue a história da matemática (ou a filosofia da matemática) da *matemática em sentido próprio*. Com essa distinção ele pretende abolir

qualquer interpretação revolucionária no desenvolvimento da matemática, fazendo com que essa interpretação recaia sobre sua história ou sobre sua filosofia. Porém, como dizer que os incomensuráveis não representaram uma guinada no desenvolvimento de uma prática puramente matemática?

Nesse contexto, os aspectos conceituais e matemáticos estão de tal modo entrelaçados que não é possível dizer que Teeteto e Eudoxo representam uma continuidade linear com a antiga concepção pitagórica; seja em filosofia, seja em *matemática em sentido próprio*, assim como gostaria Crowe. As verdades pitagóricas foram grandemente abaladas e por causa disso as investigações em matemática foram drasticamente afetadas. Podemos resumir assim as transformações deste período:

1. Transformação conceitual da idéia de número
2. Introdução das magnitudes irracionais
3. Crise na antiga concepção cosmológica
4. Geometrização da aritmética
5. Introdução de totalmente novos métodos e resultados em geometria

Em resumo, tendo em vista nossa caracterização de revolução (p.227-230), a descoberta dos incomensuráveis é por nós considerada um evento revolucionário porque:

1. Remodelação do contexto científico: A partir dessa descoberta houve o rompimento com o paradigma baseado na idéia de que o alcance da matemática estava restrito a considerações que tinham por base os números inteiros, gerando uma completa alteração conceitual e metodológica no trabalho matemático, além de uma drástica reformulação de grande parte de seu conteúdo;

2. Invalidação total ou parcial dos princípios do antigo paradigma: Os princípios mais fundamentais dos pitagóricos perderam seu poder de fundamentação e se mostraram inoperantes a partir da descoberta dos incomensuráveis. Como exemplo, deixa de valer o princípio de que a matemática só lida com números racionais;

3. Excentricidade das causas: A descoberta dos incomensuráveis está envolvida em dúvidas acerca de sua autoria, no entanto o mais provável é que esse resultado já fosse de

conhecimento entre os pitagóricos e que a decadência dos princípios do antigo paradigma tenha dependido, em grande parte, de um contexto no qual os interessados em uma reformulação da matemática tenham sentido surgir a oportunidade de levar adiante suas idéias. Como *pivô* dessa reestruturação podemos citar Eudoxo.

4. *Novas Metodologias e Solubilidade de Problemas:* De fato, sabemos que foi Eudoxo o grande nome da nova matemática pós-incomensuráveis. Seus métodos de geometrização da aritmética provocaram um grande salto no sentido de solucionar problemas novos e antigos, cujo método da exaustão é o exemplo mais presente;

5. *Descontinuidade ou inovação matemática:* Os princípios presentes no paradigma pitagórico excluem uma matemática capaz de lidar com os irracionais. Assim, o surgimento desses números, como objetos legitimamente matemáticos, não pode ser considerado uma simples extensão dos antigos princípios pitagóricos. Há uma ruptura conceitual importante e a matemática que aparece depois é, em parte, inconciliável com esses antigos princípios.

2) O cálculo infinitesimal:

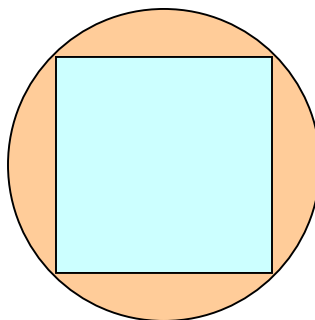
Nas seções que dedicamos a Leibniz, fizemos alusão ao cálculo infinitesimal como parte de um projeto maior de revivificação da metafísica grega, que se perdia em meio às disputas teológicas. Sua teoria monadológica constitui o núcleo dessa metafísica revisitada. Portanto, a revolução leibniziana deve ser acoplada a esse contexto mais geral; no entanto, essa qualidade revolucionária em Leibniz, conceitual ou metodológica, pode ser imediatamente observada no interior do desenvolvimento da matemática por ela mesma.

Tanto Leibniz como Newton, independentemente um do outro, são os inventores do método bastante geral, baseado na quadratura das curvas lineares, conhecido hoje como cálculo infinitesimal. De maneira geral, o cálculo é empregado para a determinação da variação de grandezas, a diminuição ou o aumento das quantidades ao infinito, que percebemos ocorrer nas superfícies que são limitadas por linhas curvas, grandezas essas que tendem para um certo limite.

O cálculo diferencial e o cálculo integral, relacionam-se com os conceitos mais fundamentais de *derivada* e *integral* que, por sua vez, ligam-se originariamente em geometria aos problemas de traçar a tangente a uma curva dada e em determinar a área da superfície de algumas figuras planas como o círculo e outras.

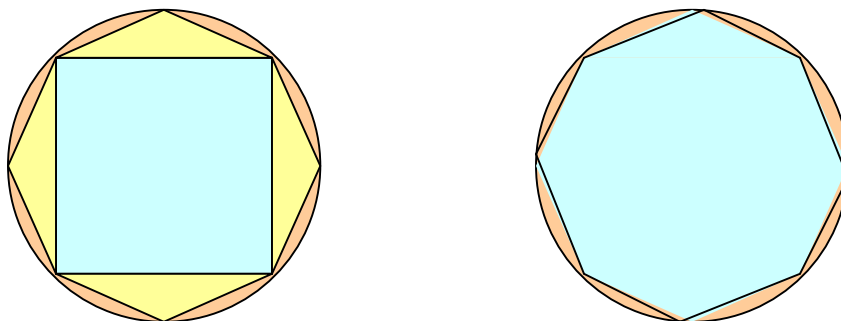
Por meio do cálculo Leibniz e Newton, cada um a seu modo, tiveram êxito em oferecer uma solução para problemas tão antigos quanto difíceis, como encontrar tangentes, áreas, comprimentos e centros de gravidades em superfícies curvas, além de fornecer um tratamento algébrico mais eficiente para soluções de problemas geométricos que até aquele momento dispunham apenas do método da exaustão de Eudoxo-Arquimedes.

Esses problemas já se encontravam bastante consolidados desde Eudoxo, que desenvolveu o método da exaustão, aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C). Trata-se da utilização de áreas já conhecidas para o cálculo da área desconhecida de uma superfície curva qualquer. Assim, por exemplo, dado um círculo de área desconhecida, é possível inscrever nele um quadrado por meios puramente geométricos⁶².



Utilizando-se os lados do quadrado é possível traçar triângulos que propiciam o aparecimento de um octógono regular cuja área, em relação à área do quadrado que lhe deu origem, se aproxima mais da área do círculo.

⁶² Sobre os métodos geométricos de Eudoxo e Teeteto, assim como os de Euclides e outros, ver a excelente obra de Rubens G. Lintz, *História da Matemática*, vol.1.



O mesmo procedimento é repetido n vezes, *exaurindo*, por assim dizer, a área do círculo, numa aproximação contínua, cujo limite é a própria área que se pretende obter. Esse é um processo infinito e que, no entanto, possui claramente um limite definido pela própria linha da circunferência.

Arquimedes, por meio de uma aproximação cada vez maior, com polígonos inscritos e circunscritos, obteve um valor para a área do círculo de raio unitário, denominada por π , de $3,140845 < \pi < 3,142857$.

Do método da exaustão, para o cálculo integral há uma importante mudança conceitual.

O cálculo infinitesimal surgiu como um método muito geral e inovador que se voltava para problemas que também se alinhavam com a recém apresentada geometria analítica de Descartes e Fermat. De fato, os primeiros esforços de Leibniz em geometria foram inicialmente inspirados pelos resultados obtidos por Pascal (1623-1662) em 1659, com seu *Traité des sinus du quart de cercle*, no qual apresenta uma solução para o cálculo da área de uma superfície gerada pela rotação do quadrante de um círculo em torno de seu eixo-x. Leibniz notou que esses resultados, restritos ao círculo criado em torno do eixo-x, poderiam ser generalizados para uma curva qualquer.

Essa generalização pode ser entendida como uma redução do problema original de se encontrar uma área obtida pela rotação de um quadrante de um círculo em torno de um eixo dado, para o problema de se encontrar a quadratura de um plano qualquer. Porém, a solução leibniziana para esse problema mais geral ainda se encontrava no reino da geometria pura. As leituras do *Géométrie* de Descartes forneceram a Leibniz o aparato teórico necessário para tratamento algébrico desse problema.

Ao estabelecer uma nova maneira de relacionar séries numéricas com a geometria da época, descrevendo relações entre curvas e equações, Leibniz mergulha em

uma interpretação algébrica que pode ser considerada híbrida, já que se alimenta tanto do ponto de vista algébrico finitarista de Descartes como do ponto de vista infinitarista de Pascal.

Ao adotar a notação dx para designar a diferença entre abscissas adjacentes dadas por uma série infinita, Leibniz pretende representar uma magnitude que decresce infinitamente em um processo infinito de diferenciação. E, no rumo inverso do processo de diferenciação, obtém a soma dessa série infinita de quantidades cada vez menores, o valor limite dessa soma infinita recebe o nome de *integral*, conforme sugestão de Bernouille.

Linhas curvas puderam ser descritas como polígonos de infinitos lados e, através dos símbolos d e $\int$, representando as operações, inversas entre si, de diferenciação e integração, não apenas surgiu um novo método geral para a solução de antigos problemas em geometria — como o de encontrar tangentes, cumprimentos de linhas e áreas de superfícies curvas, efetuar a quadratura do círculo, etc —, como também apareceu um novo conceito que se impôs na matemática do século XVIII, o de uma magnitude infinitamente pequena, tratada como um termo finito, o *infinitesimal*.

Fontenelle, assim como o próprio Leibniz, não demoraram em perceber a força inovadora do cálculo, tanto no plano conceitual como no plano metodológico, e insistiram que se encontravam diante de um momento revolucionário, “uma porta para um completamente novo reino de invenção matemática”⁶³.

Com relação à força inovadora, tanto os trabalhos de Newton como o de Leibniz permitiram uma generalização até então inaudita de antigos problemas e soluções. Quase dois séculos mais tarde foi possível, para Augustin Louis Cauchy (1789-1857), realizar estudos que aprimorariam conceitos fundamentais do cálculo, dando novo fôlego para os desenvolvimentos da análise matemática. Um desses desenvolvimentos foi obtido pelo matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), que obteve um método mais apurado, que o antigo método de obtenção de limites de somas, para obter as derivadas e integrais, a partir da definição de limite de uma função, introduzida por Karl Weierstrass.

A partir da discussão que acabamos de realizar notamos que é possível encontrar na criação do cálculo diferencial e integral os fatores que mencionamos como

⁶³ Leibniz, in: **Dauben 1992**, p.215.

importantes critérios para a consideração de revoluções científicas em matemática:

1. Remodelação do contexto científico: A partir da criação do cálculo por Leibniz e Newton a matemática se reestruturou completamente. Antigas maneiras de resolver problemas puderam ser abandonadas, novos conceitos foram introduzidos e, desde então, a matemática ganhou grande parte das características algébricas e formais que conhecemos hoje. Particularmente falando, o grande *insight* dessa revolução em matemática foi a percepção de que o comportamento de uma curva qualquer, em um determinado ponto, poderia ser caracterizado pelo comportamento da tangente à curva nas vizinhanças desse ponto. Há autores⁶⁴, inclusive, que consideram que é exatamente com a criação do cálculo que a matemática ocidental ganha sua identidade, diferenciando-se da matemática grega.

2. Invalidação total ou parcial dos princípios do antigo paradigma: Dois importantes princípios foram total ou parcialmente invalidados com o surgimento e o desenvolvimento do cálculo; primeiro aquele princípio que ainda sustentava uma matemática essencialmente geométrica e, segundo, o que assegurava uma matemática exclusivamente finitista.

3. Excentricidade das causas: O contexto no qual surge o cálculo é o do desenvolvimento da filosofia moderna. No entanto, a filosofia de Leibniz possui a peculiaridade de negar certos princípios dessa filosofia, entre eles encontramos o mecanicismo cartesiano. O cálculo aparece cercado pela teoria monadológica que pretende substituir esse mecanicismo.

4. Novas Metodologias e Solubilidade de Problemas: A mudança de enfoque, da geometria pura para a álgebra, inaugurada principalmente por Descartes e Fermat, permitiu a Leibniz a possibilidade de generalizar essa alternativa algébrica para antigos problemas e fornecer a eles novas soluções. É indiscutível que o cálculo inaugura uma nova geração metodológica. Essa nova geração possui uma abrangência que o método da

⁶⁴ Ver Lintz, vol.2

exaustão de Idoso não poderia alcançar, tendo em vista suas características essencialmente geométricas (da Silva 2007).

5. Descontinuidade ou inovação matemática: Ainda que influenciado pelos recentes trabalhos em matemática de Descartes, e também de Pascal, o cálculo representa um grande salto qualitativo em relação a esses dois antecessores. Esse salto aparece em vários níveis: no da precisão e rigor na obtenção de novos resultados, no do desenvolvimento metodológico, com uma totalmente nova forma de tratar e solucionar problemas, e também no nível conceitual, no qual nos vemos diante de novos conceitos matemáticos como *infinitésimos*, *derivada*, *integral* e *limite de uma função*.

4.1.3 A teoria de conjuntos como revolução científico-matemática

“(...) ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”

David Hilbert

Trataremos agora do aparecimento da teoria de conjuntos, no final do século XIX e, com base no que discutimos no início deste capítulo, reafirmaremos que esse aparecimento não pode ser encarado como um evento usual na história da matemática. O grau de arregimentação de esforços, neste caso em especial, atingiu um nível tão alto que chegamos a considerar que a matemática pode ser dividida em *pré-teoria de conjuntos* e *pós-teoria de conjuntos*.

Direcionaremos nossa atenção para o conceito de infinito em sentido próprio, como coleção completa, e ordenaremos as consequências desse conceito em uma análise baseada na concepção kuhniana de desenvolvimento científico.

Antes de Cantor o infinito era considerado uma idéia limite como, por exemplo, em Anaximandro, ou mesmo como uma espécie de variável limite de algum modo relacionada à categoria do tempo, como em Aristóteles. Vale lembrar mais uma vez que Aristóteles nega a existência de um infinito atual em favor de um infinito meramente potencial.

Cantor, assim como Hilbert, era um fervoroso defensor de uma *matemática livre*. Isto é, a matemática deveria se prender, apenas, ao critério de consistência. As

afirmações matemáticas não podem estar vinculadas a pressupostos físicos ou metafísicos, já que esta vinculação poderia excluir de antemão resultados matematicamente consistentes, e portanto verdadeiros, sobre objetos matemáticos realmente existentes.

Contrariamente a Aristóteles, por exemplo, ele acreditava que o infinito era passível de uma representação, um número, sendo, portanto, uma grandeza atual, sem que isso acarretasse em contradições. As contradições a que Aristóteles se refere ao considerar como problemática a idéia de um infinito atual, principalmente na *Física*, não dizem respeito a uma *matemática livre*.

No entanto, e ainda que sob o risco de contradizer o que acabamos de dizer acerca da defesa de uma *matemática livre*, a idéia de infinito em Cantor, como uma coleção completa, não se exime totalmente de uma certa carga de pressupostos metafísicos.

É digno de nota que o pensamento de Cantor cria uma aproximação com certos aspectos do que Platão já havia tornado público, principalmente a partir de seus últimos diálogos, os quais tivemos o cuidado de analisar em nosso primeiro Capítulo. Esta aproximação se torna explícita na citação abaixo, na qual Cantor apresenta uma distinção platônica bem-vinda à sua própria concepção de infinito:

Por conjunto eu entendo, em geral, uma multiplicidade que pode ser pensada como uma unidade, isto é, qualquer domínio de elementos definidos que, segundo as regras, podem ser superiormente limitados numa totalidade (...) assim como Platão, em seu diálogo *Filebo*, nomeia *μικτον*. Platão o contrapõe ao *απειρον*, isto é, o ilimitado, indeterminado, o qual chamo de infinito não genuíno, assim como ao *περαζ*, isto é, o limite e explica este como uma mistura ordenada desses dois últimos (204, 93)”

(Cantor em **Lavine 1998**, p.85, grifos nossos)

O termo transfinito foi cunhado para representar números, ou conjuntos, que ultrapassam, em magnitude, as coleções finitas ou infinitas já conhecidas e que, mesmo assim, podem ser matematicamente aceitáveis. Para Cantor, o transfinito é algo que se coloca à inteira disposição da razão, como número, como um intermediário entre o infinito absoluto (*apeíron*) e as magnitudes finitas (*péras*).

Se preferirmos transportar essas idéias para o vocabulário platônico, o transfinito de Cantor é o produto do demiurgo que proveu o gênio humano com a habilidade de

executar a correta *mistura* (idéia) entre *Péras* e *Apéiron*. Como resultado dessa mistura encontramos os números transfinitos (*μικτον*), ou ainda, a medida do infinito.

Não precisamos entrar nos detalhes da teoria de conjuntos fundada por Cantor para entender algumas de suas idéias mais fundamentais. Mesmo sem os recursos simbólicos e formais mais rigorosos oferecidos a nós pela concepção axiomática, percebemos que Cantor promove uma cisma no interior da comunidade filosófico-matemática com a introdução do número ω .

“Nada se opõe à concepção de um novo número — chama-lo-emos de ω — o qual é a expressão disso: que a totalidade de um domínio é dado em uma sucessão natural de acordo com as regras”

(Cantor em **Lavine 1998**, p. 87)

As regras mencionadas por Cantor dizem respeito às especificações que determinam aquilo que pode, segundo ele, ser considerado um conjunto legítimo. Esta determinação nasce de certas afirmações, os axiomas, tidos como verdades fundamentais sobre um determinado domínio.

Os axiomas vislumbrados por Cantor pressupõem um ‘domínio’ pré-estabelecido de elementos que podem ser representados como uma seqüência ordenada de números. A novidade introduzida por Cantor é que esta coleção de elementos, apesar de infinita, pode ser perfeitamente compreendida como uma totalidade completada. Verificamos isso já na simples apresentação de algumas de suas afirmações mais fundamentais:

1. Os números ordinais são linearmente ordenados por $<$;
2. Existe um número ordinal menor que qualquer outro, 0;
3. Todo número ordinal α tem um sucessor imediato, $\alpha + 1$;
4. Existe um número ordinal ω tal que $0 < \omega$; para qualquer número ordinal α , se $\alpha < \omega$ então $\alpha + 1 < \omega$. E para todo número ordinal α , diferente de zero, $\alpha < \omega$, existe um número ordinal β , tal que $\alpha = \beta + 1$;
5. Um conjunto é o contra domínio de uma função cujo domínio é um segmento próprio inicial de números ordinais.
6. Conjuntos com os mesmos membros são iguais;
7. Todo conjunto de ordinais possui um limite superior;

8. Para todo número ordinal α existe um conjunto associado (α) se, e somente se, β é um número ordinal e o conjunto de predecessores de α é o contra-domínio de uma função injetora que tem como domínio os predecessores de β ;
9. Para todo número ordinal α , existe um número ordinal $\beta > \alpha$, tal que o conjunto de predecessores de β não é o contradomínio de uma função injetora cujo domínio são os predecessores de α ;

A Proposição 7 tem um atrativo especial, com ela Cantor assegura que qualquer conjunto, mesmo um conjunto infinito, pode ser encarado como uma totalidade infinita. O número transfinito ω é, portanto, a concretização dessa concepção de uma totalidade infinita. É principalmente através dessa idéia que Cantor irá divergir da tradição do pensamento matemático, que se estabeleceu sob o selo aristotélico de uma concepção meramente potencial acerca do infinito.

O infinito, para Cantor, pode ser expresso por um número e, assim, pode ser considerado como um infinito particular, entre outros, permitindo que entre os diversos infinitos se estabeleça uma relação de ordem, da mesma maneira como ocorre com os números naturais, inteiros, racionais etc.

Assim, seus conjuntos infinitos, ou totalidades infinitas, apresentariam a mesma relação de boa ordem que os conjuntos finitos. Podemos expressar a relação de boa ordem pelas três condições seguintes: i) todo conjunto bem ordenado, não vazio, possui um primeiro (menor) elemento; ii) todo elemento de um conjunto bem ordenado, não unitário, possui um sucessor; iii) para qualquer elemento de um conjunto bem ordenado, finito ou infinito, existe um outro elemento que é o primeiro a suceder todos eles.

Se tomamos um conjunto infinito qualquer, um conjunto que não possui um maior elemento — o dos naturais, por exemplo —, ao obedecermos a condição (iii), obteremos um número que é o primeiro elemento de uma seqüência transfinita. Aqui ω representa o primeiro ordinal transfinito, tomando sempre o cuidado em não confundi-lo com algo como o ‘último natural’, ou tomá-lo como o ‘maior natural’ que, como sabemos, não existe.

$\{\}$	$\rightarrow$	'0'	$\{0,1,2,3,\dots\}$	$\rightarrow$	' ω '
$\{0\}$	$\rightarrow$	'1'	$\{\omega\}$	$\rightarrow$	' $\omega + 1$ '
$\{0,1\}$	$\rightarrow$	'2'	$\{\omega + 1\}$	$\rightarrow$	' $\omega + 2$ '
$\{0,1,2\}$	$\rightarrow$	'3'			
		$\mathbb{N}$			$\mathbb{N}$

A consequência mais imediata e surpreendente destas considerações, e por muitos considerada como aberrante, é a afirmação da existência de coleções infinitas cujos tamanhos (potências) são distintos. Isto é, no exato momento em que o infinito ganha um número, ele deixa de ser uma idéia limite, uma magnitude absoluta. O infinito se transforma em um número particular e a ele podem ser atribuídas potências determinadas.

A primeira justificativa desse raciocínio foi fornecida pela prova que ficou conhecida como *argumento da diagonal*, ou *método da diagonalização*⁶⁵. Essa argumentação indica que o conjunto de todos os números reais, tomados entre os pontos 0 e 1, possui um tamanho maior que qualquer conjunto infinito de números como, por exemplo, a coleção dos naturais.

O cerne desta argumentação reside em mostrar que não é possível contar a coleção dos números reais, da mesma maneira como o fazemos com os naturais. Em outras palavras, Cantor obteve uma demonstração da não equinumerabilidade entre os naturais, ou entre qualquer outra coleção enumerável, e a coleção dos números reais. Em suma, Cantor obteve uma prova da não-enumerabilidade dos números reais.

Já vimos que uma das primeiras versões dessa prova fora enviada em uma carta para Dedekind, em Dezembro de 1873. Em 1874, a demonstração foi publicada, com algumas modificações, sob o título *Über eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. Tratava-se de uma demonstração por contradição, na qual Cantor assume a enumerabilidade dos reais e constrói uma relação, um-a-um, entre os reais e os naturais. Uma vez feito isto, mostra que é sempre possível encontrar pelo menos um elemento que não pertence à coleção gerada por essa relação⁶⁶.

Essa demonstração não foi imediatamente bem recebida, gerando alguma resistência. Exemplo disso é que ao tentar relacionar os naturais com os reais em suas próprias investigações, o filósofo Charles Sanders Peirce obteve resultados semelhantes aos de Cantor, porém sua conclusão acerca desses resultados foi, justamente, o de que era impossível realizar uma tal relação numérica na medida em que, tanto a coleção inteira

⁶⁵ Ver página 113-114.

⁶⁶ Para detalhes da prova original de Cantor, em Dauben 1979, p.51-54.

dos números reais como a coleção inteira dos números naturais, não constituem totalidades em um sentido próprio do termo e, portanto, não existem atualmente. Assim sendo, não são objetos capazes de acomodar propriedades típicas desse tipo de existência como, por exemplo, a comensurabilidade.

A conclusão de Peirce diverge da de Cantor porque sua concepção de conjunto, como um objeto matemático efetivo, *realmente existente*, está de acordo com o paradigma aristotélico. Ou seja, um conjunto é um objeto finito. Assim, mesmo diante dos mesmos resultados — a não enumerabilidade dos reais em relação aos naturais —, Peirce não conclui disso que se tratam aqui de conjuntos infinitos de tamanhos distintos porque, na verdade, em última instância, não poderíamos sequer chamá-los de conjuntos, a não ser em um sentido lasso.

O matemático alemão Leopold Kronecker, professor de Cantor durante muitos anos, fora um dos que mais fortemente se posicionara contra o infinito atual, chamando a isto de um *non-sense matemático*. Kronecker levou suas críticas às últimas conseqüências. Uma de suas máximas era de que Deus havia criado os números inteiros, todo o resto era invenção humana e, portanto, não possuía o mesmo *status*. Outro famoso matemático, Henri Poincaré, chegou a classificar o trabalho de Cantor como uma perversa patologia no seio da matemática.

Na vertente oposta, nomes como Hilbert e Russell endossaram grande parte da nova forma de conceber infinitos numericamente determináveis. Para esses matemáticos, a inserção desta nova forma de encarar o infinito, nas discussões e nas teorias lógico-matemáticas, aparecia como a mais recente aquisição na sala de troféus da razão e não deveria jamais ser classificada como mera excentricidade e, sim, como a mais fantástica invenção matemática desde o cálculo infinitesimal.

Kronecker e Poincaré, assim como Frege, eram os patriarcas do pensamento matemático de sua geração. Já Hilbert, Russell, Gödel, além de tantos outros jovens matemáticos, representavam uma escola insurgente, tinham em Cantor uma espécie de eminente anunciador de uma nova ordem.

Enquanto Kronecker e seus companheiros se mantinham fiéis ao paradigma aristotélico, Cantor realizava um grande salto revolucionário na matemática do final do século XIX. Foi Cantor quem, assumindo uma nova perspectiva diante de algumas idéias

bastante fundamentais, recriou o modo de enxergar a matemática.

Algumas dessas idéias podem ser encaradas como marginais à matemática. Assim, a influência de Platão, mesclada à própria religiosidade de Cantor, fizeram-no enxergar uma outra forma de infinito, utilizando-se para isso dos mesmos, ou quase os mesmos, recursos disponíveis a todos os matemáticos de sua época, entre eles obviamente Kroenecker.

Para um matemático tradicional, ainda acostumado a conceber o infinito matemático como meramente potencial, considerar a seqüência $1/2, 3/2, 7/5, \dots, x/y, (x + 2y)/(x+y), \dots, \pi^2$ como um infinito atual — onde π^2 é um número limite irracional —, soa como um *abuso* do conceito de infinito.

Para os matemáticos defensores do antigo paradigma, Aristóteles já havia alertado sobre este equívoco. Contudo, a nova maneira de enxergar o infinito introduzida por Cantor deixava evidente que o que estava em jogo não era somente a existência ou não de um número como π , ou como ω , mas a possibilidade de um trabalho matemático consistente e mais rico que o que se vinha fazendo até então. Ou seja, em termos kuhnianos esses novos matemáticos não viam mais os conjuntos infinitos como *anomalias*, mas como formas de expressão matemática perfeitamente aceitáveis, que apontavam para um novo horizonte a partir de uma mudança de paradigma.

A idéia de que Cantor tenha iniciado um novo paradigma no interior da matemática é para nós bastante certa, tendo em vista que sua teoria de números transfinitos pode ser considerada um daqueles raros momentos em matemática que podemos chamar de revolucionário, segundo as cinco especificações abaixo:

1. Remodelação do contexto científico: A partir da investigação de um problema ainda não resolvido⁶⁷, Cantor lança as bases para a criação de sua teoria dos números transfinitos e atrai para si a atenção de proeminentes matemáticos que perceberam estar diante de algo completamente novo. Essa novidade se impôs de tal modo, que não pôde ser ignorada nem mesmo pelos seus opositores que, sem sucesso, não mediram esforços no sentido de desacreditá-la. Para os seus defensores, porém, a teoria de Cantor renovava as esperanças de uma reformulação matemática em sentido bastante amplo. Desse modo,

⁶⁷ Ver p. 111.

esforçaram-se por validar os seus resultados ou, pelo menos, torná-los mais rigorosos. Exemplo disso foi a própria axiomatização da teoria de conjuntos, efetuada por uma série de importantes matemáticos — dentre os quais podemos citar Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Bernays, Gödel, Quine —, a axiomatização possuía o objetivo de tornar essa teoria, a um só tempo, menos vulnerável ao ataque de seus críticos e mais de acordo com a tendência formalizante desse momento matemático. O esforço de axiomatização da teoria de conjuntos, que perdura até os dias de hoje, torna claro que houve uma transformação do cenário matemático a partir de seu aparecimento. Desde então, todos os livros textos e todos os cursos, do ensino mais fundamental de matemática até aos mais avançados, tiveram que acomodar a novos conceitos e resultados como os de números cardinais e ordinais, além da aritmética para esses números. Absolutamente inovador foi a apresentação dos números cardinais e ordinais transfinitos, assim como a aritmética transfinita que promoveu uma grande reviravolta no cenário matemático como um todo.

2. Invalidação total ou parcial dos princípios do antigo paradigma: Para tornar evidente que não fazia sentido falar sobre o infinito atual, Galileu lança mão de um argumento matemático⁶⁸, por meio do qual tenta demonstrar que a assunção de coleções infinitas (completas) vai de encontro ao princípio fundamental, segundo o qual, *o todo é sempre maior que a parte*. Para Galileu, esse princípio era inquestionável justamente porque pertencia a uma coleção de afirmações, muito fundamentais, que poderiam ser tomadas como verdades básicas de qualquer teoria que se pretendesse científica. Em Cantor, esse princípio deixa de valer porque, para ele, a matemática deve ser *livre*. Isto é, basta à matemática ter o *critério de consistência* como seu princípio mais fundamental. Se é possível demonstrar, de maneira matematicamente consistente, que conjuntos infinitos possuem o mesmo tamanho (a mesma cardinalidade) que as coleções a que pertencem, então o princípio de que *o todo é sempre maior que a parte* deixa de ser válido em geral. Esse princípio perde sua generalidade tendo em vista o princípio mais fundamental da *liberdade matemática*. Porém, a perda de generalidade desse princípio, assumido tão naturalmente por Galileu, só foi possível porque, em um contexto mais amplo, outro grande princípio foi deixado de lado. O princípio de que a matemática é uma ciência que

⁶⁸ Ver p. 113

trabalha apenas com magnitudes atualmente finitas, ou com magnitudes apenas potencialmente infinitas. Esse último princípio aparece nas conclusões de Aristóteles em sua *Física*⁶⁹, que podem ser condensadas na afirmação de que todo número, assim como todo conjunto, é finito. Em resumo, com Cantor temos a invalidação dos princípios que sustentam o velho paradigma finitista aristotélico.

3. *Excentricidades das causas:* A revolução a que Cantor deu início com sua teoria de conjuntos não ganhou sua forma final com os próprios trabalhos de Cantor. A revolução promovida pela teoria de conjuntos, em um sentido mais abrangente, foi se cristalizando paulatinamente, principalmente com os acalorados debates sobre os fundamentos da matemática que se seguiram a partir daí, principalmente com Hilbert, Russell, Brouwer, Gödel etc. As repercussões desses debates se fazem sentir até os dias de hoje e podemos dizer que essa revolução ainda está em andamento. Essas discussões fundamentais sobre a *verdadeira natureza* e sobre *objetivo* da matemática, assim como sobre a legitimidade de seus métodos e resultados, não foram negligenciadas por Cantor. Assim, não podemos concordar com as afirmações de que as investigações sobre os fundamentos da matemática são um *efeito colateral* (um assunto marginal) da teoria de conjuntos. Essas discussões estão na base da teoria de conjuntos. Tanto foi assim que Cantor se dedicou intensamente a sustentar filosoficamente suas conquistas. O impulso para a criação da teoria de conjuntos também tem sua origem na tentativa de criar novos fundamentos para a matemática. Sabemos que a proposta desses fundamentos não se restringe a um esforço exclusivamente matemático.

4. *Novas metodologias e solubilidade de problemas:* Com relação à teoria de conjuntos, muitas foram as inovações metodológicas surgidas em função de seu aparecimento. Particularmente, a axiomatização dessa teoria, concebida inicialmente por Cantor em sua formulação dita *naïve*, assim como já mencionamos no *item 1* desta seção (*Remodelação do contexto científico*), é o primeiro e mais evidente grande exemplo de como os problemas inerentes à sua concepção inicial, e também aqueles problemas que já se faziam presentes antes disso, puderam ser efetivamente tratados dentro de um escopo

⁶⁹ Ver p.66

metodológico inovador e, simultaneamente, extremamente de acordo com a tendência matemática que predominava no final do século XIX. Para não nos demorarmos apresentando uma longa lista de problemas pontuais que foram solucionados, podemos apenas mencionar que, em termos bastante gerais, a formalização axiomática da teoria de conjuntos explicitou formalmente diversos conceitos matemáticos como o de *relação*, *função*, *número racional*, além da própria definição de número real através do método de *Cortes de Dedekind*. Além disso, foram explicitadas rigorosamente as relações entre as cardinalidades dos números racionais, inteiros, naturais e reais. A explicitação formal dos axiomas da teoria de conjuntos foi outra grande conquista para a matemática e para a ciência em geral, já que devido à enorme simplicidade e generalidade desses axiomas, suas representações formais permitiram sustentar, mais clara e firmemente, grandes resultados tanto na matemática como em áreas afins. Assim ocorreu com a formalização do Axioma da Escolha que, apesar de ter sido, e continuar sendo, vastamente utilizado de maneira informal em muitos campos científicos, apenas tornou-se rigorosamente formalizado a partir da axiomatização da teoria de conjuntos. Desde então pode-se obter a demonstração da equivalência entre o axioma da escolha e diversas outras afirmações tidas até então como independentes. Temos demonstrações de resultados de existência, entre os quais, por exemplo, a demonstração de que “*todo espaço vetorial tem uma base*” pode ser formalmente sustentada pelo Axioma da Escolha. Para finalizar, não podemos nos esquecer que Hilbert citou como o primeiro, de sua lista de 23 problemas matemáticos que deveriam ocupar a mente dos matemáticos do século XX, o *problema de Cantor sobre a potência do Continuum*. Isso por si só provocou uma corrida na busca de métodos que pudessem aproximar os matemáticos de uma solução satisfatória. Como é de conhecimento geral, em 1938 Gödel demonstrou a consistência da *Hipótese do Continuum* com ZFC ⁷⁰, através da construção de um modelo de ZF, conhecido como Universo $\mathcal{L}$ dos conjuntos construtíveis⁷¹ (**Bicudo 2003**). Também de conhecimento geral é a independência da *Hipótese do Continuum*, demonstração devida a Paul Cohen em 1963, pelo método de *forcing* por ele criado (**Bicudo 2003**). Ainda que a Hipótese do Continuum nunca tenha sido demonstrada, os trabalhos de Gödel e de Cohen,

⁷⁰ Teoria de Conjuntos de Zermelo-Frankel adicionado o Axioma da Escolha.

⁷¹ Trata-se do “menor” modelo de ZF, contendo todos os números ordinais. (Ver **Bicudo 2003**, p.23)

impulsionados por Cantor e Hilbert, proveram a matemática com dois importantes métodos de prova que foram bastante úteis para a matemática como um todo. De modo que o sentido da forte afirmação de Hilbert se torna cada vez mais evidente, “(...) ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”⁷²

5. Descontinuidade ou inovação matemática: Muitos foram os críticos da teoria de conjuntos. Entre eles encontramos proeminentes matemáticos, como por exemplo Kronecker e Poincaré. Neste caso, percebemos uma grande movimentação no meio científico, no sentido de combater idéias consideradas perniciosas à matemática. Sabemos que um grande ataque, principalmente um grande ataque que falhou, é sinal de descontinuidade e inovação no desenvolvimento natural de qualquer ciência. Porém, além desse sintoma negativo das revoluções científicas, temos também os efeitos positivos dessa descontinuidade e inovação. Na matemática, a criação da teoria de conjuntos gerou o aparecimento de novas teorias e formas de tratamento matemático, entre elas destacamos a tentativa de um tratamento exclusivamente matemático para o problema do *continuum*, as propostas de fundamentação da matemática de Hilbert e os grandes resultados de Gödel sobre a incompletude na teoria dos números naturais. Essas foram inovações diretamente relacionadas com o desenvolvimento da teoria de conjuntos de Cantor. Neste caso, essas novidades não podem ser consideradas como decorrências naturais da matemática praticada antes da criação e do aperfeiçoamento da teoria de conjuntos. Essa teoria promoveu uma ruptura no desenvolvimento da matemática até então.

4.1.4 Conclusão do capítulo

Com a única exceção da descoberta dos incomensuráveis, nos casos que analisamos acima, as verdades matemáticas anteriores não foram invalidadas ou descartadas como falsas, mas sofreram um abatimento de seu *status*. Também não se pode dizer que a matemática não deu um fantástico salto qualitativo com a descoberta dos incomensuráveis, com o advento do Cálculo e a criação da teoria de conjuntos.

Em resumo, o sentido do conceito de revolução que adotamos aqui é o sentido

⁷² Hilbert [1925]1983, p.53.

mais comum, que chamamos de geral, justamente porque não apela para a destituição das antigas formas de pensamento estabelecidas. Dentro desse sentido, revolução se constitui como uma interrupção, uma descontinuidade (o surgimento de novos paradigmas que trazem consigo novas metodologias), no desenvolvimento natural da matemática, promovida pelo aparecimento de uma teoria, ou conjunto de teorias extraordinárias, que atraem para si todo o esforço da comunidade científica interessada, seja em apoiá-la seja em rebatê-la.

Ao ser bem sucedida nesse debate, a teoria, ou conjunto de teorias, constituir-se-á como um novo paradigma matemático e não haverá como ser negligenciada nos manuais para iniciantes ou em livros e artigos para especialistas. Com relação à teoria de conjuntos percebemos esse fato mais claramente, já que desde os manuais para as crianças do ensino fundamental, até os artigos matemáticos extremamente sofisticados publicados em revistas especializadas, essa teoria se faz de algum modo presente.

4.2 A hipótese do continuum

Este teorema é o seguinte: Todo sistema de infinitos números reais, isto é, todo conjunto infinito de números (ou de pontos) é ou equivalente ao conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ... ou ao conjunto de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito à equivalência há, portanto, somente dois conjuntos de números, o conjunto enumerável e o continuum.

David Hilbert⁷³

Uma demonstração para a *Hipótese do Continuum* foi considerado por Cantor algo que naturalmente deveria brotar das investigações acerca da cardinalidade de um conjunto infinito enumerável e da cardinalidade de um conjunto infinito não enumerável. Poderíamos condensar a idéia que está por trás da *Hipótese do Continuum* do seguinte modo: qualquer sistema infinito de números reais pode ser colocado numa relação de equivalência com o conjunto dos números naturais ou com o conjunto de todos os números reais. Isto implica na afirmação de que qualquer conjunto finito ou infinito de números é enumerável ou não-enumerável. Ou ainda, qualquer conjunto finito ou infinito é ou enumerável ou possui a cardinalidade do *continuum*.

Se uma prova para este enunciado fosse de algum modo obtida, seguiria dela que

⁷³ Citado na *Revista Brasileira de História da Matemática*, publicação da Sociedade Brasileira de História da Matemática, Vol.3, n°5 (Abril/2003)

a cardinalidade do *continuum*, a cardinalidade do conjunto de todos os números reais (ou a cardinalidade do conjunto de todos os pontos de uma reta), segue imediatamente à cardinalidade dos conjuntos enumeráveis. Não havendo, portanto, a possibilidade da consideração de nenhuma outra cardinalidade intermediária.

Bicudo (2003) salienta que, no sentido de estimular o surgimento de tal prova, Hilbert dá ênfase especial à estratégia empregada por Cantor de aplicar o conceito de boa ordem aos conjuntos de números reais. Aparentemente Hilbert concordava que poder apontar um primeiro elemento, em qualquer conjunto de números reais, indicaria já uma demonstração para a *Hipótese do Continuum*⁷⁴.

As pesquisas de Cantor com alguns tipos de funções o conduziram a resultados cada vez mais gerais no que diz respeito às representações dessas funções em séries trigonométricas. Contudo, Cantor sentiu a necessidade de uma teoria dos números reais mais precisa. Nesse projeto se depara com alguns resultados que foram considerados extravagantes por alguns de seus contemporâneos.

Como já comentamos antes, em sua carta de 29 de novembro de 1873 endereçada a Dedekind, Cantor demonstra a impossibilidade de se criar uma correspondência um-a-um entre a coleção dos naturais e a coleção dos reais. Se tornava assim cada vez mais claro que a coleção dos reais possuía uma potência maior que a das demais coleções de números. O passo seguinte foi estabelecer uma correspondência um-a-um entre os pontos contidos em um plano e os pontos contidos em uma reta, o que se mostrou exequível.

Esses e outros estudos o levaram a concluir que, dado um conjunto infinito qualquer, este conjunto ou possui a cardinalidade dos naturais, isto é, poderia ser colocado numa relação de equivalência com o conjunto dos naturais, ou este conjunto possui a cardinalidade dos reais, dado que uma equivalência com os naturais seria impossível.

Por um processo de indução, em cuja descrição não entraremos aqui, somos levados ao teorema de que há somente duas classes de números: uma primeira classe contendo todos os agregados suscetíveis de serem postos na forma: *functio ipsius* v , em que v pode receber todos os valores inteiros positivos; e outra contendo todos os

⁷⁴ O problema da boa ordem nos conjuntos de números reais foi solucionado por Zermelo em 1904.

agregados da forma: *functio ipsius x*, em que x pode tomar todos os valores reais no intervalo $(0,1)$.

Em resumo, Cantor aponta para a existência de apenas duas classes de números: a classe ν , cujos agregados infinitos pertencentes a ela podem ter seus elementos colocados numa correspondência *um-a-um* com a coleção dos inteiros positivos, e a classe x , cujos agregados infinitos só podem ser colocados numa relação de equivalência com o conjunto dos números reais. Ou seja, existem apenas duas classes de números: a classe ν enumerável e a classe x não-enumerável, e nesta encontramos o *continuum* matemático.

Na citação acima Cantor faz uso do termo “agregado” para se referir a uma coleção qualquer de elementos. No entanto, uma apresentação mais precisa desse termo só aparece nos *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*:

By an "aggregate" (*Menge*) we are to understand any collection into a whole (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) M of definite and separate objects m of our intuition or our thought. These objects are called the "elements" of M .

In signs we express this thus:

$$M=\{m\}.$$

(Cantor 1955[1897], p.85)

E, em relação à cardinalidade de um agregado (conjunto) qualquer de elementos Cantor acrescenta:

Every aggregate M has a definite "power," which we will also call its "cardinal number."

We will call by the name "power" or "cardinal number" of M the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate M when we make abstraction of the nature of its various elements m and of the order in which they are given.

We denote the result of this double act of abstraction, the cardinal number or power of M , by

$$\overline{M}.$$

(Cantor 1955[1897], p.86)

O conceito de número cardinal, ou de cardinalidade de um conjunto, é obtido, portanto, por meio desse duplo ato de abstração que realizamos sobre uma coleção

qualquer de elementos dada em nossa intuição.

Diante do conceito de cardinalidade abrimos mão da ordem e da natureza de cada elemento desse agregado. E o conceito resultante dessas duas abstrações, o número cardinal, a potência de um conjunto, aceita a relação de igualdade ou de desigualdade (maior que ou menor que).

Além disso, Cantor define as operações de adição, multiplicação e exponenciação para números cardinais. E é de grande relevância o fato de que, pela primeira vez, como nos lembra Bicudo (2003), Cantor faz uso da letra hebraica $\aleph$ (Aleph) para se referir à cardinalidade dos conjuntos transfinitos. Sendo $\aleph_0$ o primeiro número transfinito.

Em seguida Cantor estabelece uma ordem entre os cardinais transfinitos, colocando-os em certa correspondência com os conjuntos finitos bem ordenados:

After we have introduced the least transfinite cardinal number $\aleph_0$ and derived its properties that lie the most readily to hand, the question arises as to the higher cardinal numbers and how they proceed from $\aleph_0$. We shall show that the transfinite cardinal numbers can be arranged according to their magnitude, and, in this order, form, like the finite numbers, a "well-ordered aggregate" in an extended sense of the words. Out of $\aleph_0$ proceeds, by a definite law, the next greater cardinal number $\aleph_1$ out of this by the same law the next greater $\aleph_2$ and so on. But even the unlimited sequence of cardinal numbers

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega$$

does not exhaust the conception of transfinite cardinal number. We will prove the existence of a cardinal number which we denote by $\aleph_\omega$, and which shows itself to be the next greater to all the numbers $\aleph_v$; out of it proceeds in the same way as $\aleph_1$ out of $\aleph_0$ a next greater $\aleph_{\omega+1}$ and so on, without end.

(Cantor 1955[1897], p. 108-9)

Observamos que Cantor, neste texto, primeiramente define o conceito de número cardinal e somente depois define um conjunto simplesmente ordenado, ou um número ordinal denotado por $\overline{M}$. Assim, o conceito geral de número ordinal é compreendido se,

dada uma coleção qualquer de objetos m de M , abstraímos somente a sua natureza e preservamos a ordem em que esses elementos se dão; isto é, estabelecemos, nesse conjunto, uma relação de precedência entre os seus elementos.

Ao se referir à teoria cantoriana dos números transfinitos, Hilbert faz uso das seguintes palavras: “Esta parece-me a mais maravilhosa floração do espírito matemático e, no todo, uma das mais altas realizações da atividade puramente intelectual da humanidade”

(Hilbert, cit. por **Bicudo 2003**, p.21).

A ênfase dada por Hilbert à questão do bom ordenamento de qualquer conjunto de números reais, referindo-se a isso como o caminho mais provável para a demonstração da hipótese do *continuum*, residia no fato de que, mesmo com toda essa “bela floração do espírito humano”, uma comparação entre dois cardinais infinitos só podia ser estabelecida se estes fossem conjuntos bem ordenados, o que não era o caso do *continuum* linear, que só podia ser expresso como um conjunto de números reais com ordem simples. Este conjunto, portanto, não apresentava a clareza necessária, nem a simplicidade pretendida, assim como já acontecia com outros conjuntos.

Em poucas palavras, a boa ordem era, para Hilbert, a condição *sine qua non* para a comparabilidade entre dois números cardinais em geral. Sem esta possibilidade de comparação, no caso das coleções infinitas de números reais, não se podia alcançar uma prova para a hipótese de que existem apenas duas classes de números. Em suma, o que se esperava era poder transformar qualquer cardinal transfinito (inclusive e principalmente o *continuum*) em um *Aleph* e, portanto, em um conjunto bem ordenado. A idéia era de que assim se alcançaria a prova para a *Hipótese do Continuum* que foi formulada da seguinte maneira:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Ou ainda de maneira mais geral:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

Em 1904 o matemático Julius König apresentou uma prova, aparentemente bem construída, da falsidade da hipótese do *continuum*. No entanto, apenas dois dias depois dessa apresentação Zermelo refuta esta prova, denunciando problemas em suas bases

argumentativas e restabelecendo a esperança daqueles que, como Hilbert, acatavam a idéia intuitiva trazida pela *Hipótese do continuum*. Contudo, apesar de insistentes tentativas, nem Cantor, nem Hilbert, lograram obter uma prova para a afirmação definitiva da *Hipótese*.

Em 1938 Kurt Gödel construiu um modelo⁷⁵ para a axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF) para a teoria de conjuntos de Cantor. Através desse modelo, mostrou que, tanto a *Hipótese do Continuum*, como a *Hipótese Generalizada do Continuum*, não causavam contradição tanto em ZF quanto em ZFC⁷⁶.

Em 1963, Paul Cohen mostrou, pelo seu método de *forcing*, o que Gödel havia sugerido anos antes, a saber, que supondo os axiomas de ZFC consistentes, estes são insuficientes para a demonstração da *Hipótese do continuum*. Isto é, Cohen mostrou que a *Hipótese do continuum* é indecidível em ZFC. A consequência disso é a afirmação de que esta hipótese é independente de ZFC.

Em resumo, Gödel e Cohen, cada um em seu tempo e providos com técnicas próprias, mostraram que tanto a afirmação como a negação, cada uma em separado, não provocam contradições no seio de ZFC. Os métodos de modelização criados por Gödel e Cohen, além de muitos outros esforços investigativos, resultaram em significativos avanços para a matemática do século XX.

4.3 Uma nova matemática

*Because of this extraordinary position which distinguishes mathematics from all other sciences, and which produces an explanation for the relatively free-and-easy way of pursuing it, it especially deserves the name of **free mathematics**, a designation which I, if I had the choice, would prefer to the now customary 'pure' mathematics⁷⁷.*

Georg Cantor

Em Cantor a essência da matemática reside na sua liberdade. Assim, é apenas ao critério de consistência que os matemáticos devem tributo quando diante de suas construções teóricas. É justamente essa liberdade que tornam as revoluções matemáticas praticamente invisíveis.

⁷⁵ O universo L dos conjuntos construtíveis.

⁷⁶ ZF acrescido do *Axioma da Escolha*.

⁷⁷ Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, p.182

Quando o foco de nossa atenção tenta capturar o exato momento de ruptura no desenvolvimento da matemática, que é aquele instante de transgressão dos valores tradicionalmente aceitos no cerne da comunidade, tudo o que se percebe inicialmente são teorias que se apresentam em uma sucessão consistente e que em nada se assemelha a qualquer transgressão ou ruptura, ou a um drástico antagonismo entre o novo e o velho paradigma.

Na medida em que os desenvolvimentos matemáticos se desprendem quase que totalmente de um substrato físico e, na medida em que as teorias dificilmente explicitam aqueles fundamentos conceituais que lhes conferem suporte, então, contrariamente ao que costuma ocorrer nas ciências naturais no interior das quais anomalias e crises se tornam tão evidentes que não é possível recusar-lhes a existência, na matemática essas anomalias e crises praticamente inexistem ou, se existem, estão tão suavizadas que facilmente são tomadas como problemas comuns da prática normal de trabalho e que ainda aguardam soluções dentro de uma perspectiva de solução tradicional.

Mesmo sendo considerado revolucionário, o cálculo infinitesimal não invalidou a geometria de seu tempo, ele se insere consistentemente dentro dessa geometria. Não há qualquer inconsistência de vida ou morte entre Leibniz e Euclides, assim como não há qualquer inconsistência entre os resultados de Eudoxo e Pitágoras, ou entre Cantor e Aristóteles.

Advances in mathematics, therefore, are generally compatible and consistent with previously established theory; they do not confront and challenge the correctness or validity of earlier achievements and theory, but augment, articulate, and generalize what has been accepted before. Cantor's work managed to transform or to influence large parts of modern mathematics without requiring the displacement or rejection of previous mathematics.

(Dauben 1984, p.62)

No entanto, assim como Leibniz transformou definitivamente a maneira de encarar algumas idéias centrais em matemática — principalmente tornando algebricamente operacionais conceitos tidos antes como estritamente geométricos, através de um método totalmente novo e suficientemente geral —, dotando a matemática com um novo arcabouço metodológico e criando as condições para uma reedição conceitual desse campo do conhecimento, também Cantor proveu a matemática com recursos tais que provocou uma enorme mobilização de diversos estudiosos de áreas

distintas, no sentido da reavaliação de seus fundamentos.

Assim, é muitas vezes por suas conseqüências, mais do que por suas características inerentes, que notamos a qualidade revolucionária de um evento em matemática. Nesse sentido, em matemática é sempre mais fácil distinguir um evento revolucionário, tirando o foco de nossa atenção do evento em si mesmo e dirigindo-a para as suas proximidades. Ou seja, é quando nos concentramos naqueles fenômenos periféricos, freqüentemente tão importantes quanto o próprio evento que queremos entender, que conseguimos conferir o seu exato contorno e calcular a sua magnitude revolucionária.

Seja pelas respostas positivas, seja pelas negativas, são as reações contemporâneas, ou imediatamente posteriores, a uma grande novidade científica que a fazem repercutir estrondosamente, como o ribombar de uma revolução. De fato, o impacto que a teoria de Cantor proporcionou, pode ser medido pelos esforços que importantes matemáticos dedicaram a ela, no sentido de sanar seus problemas, dirimir suas fraquezas, restaurar seus fundamentos ou aprimorar seus resultados.

4.3.1 A matemática finitária de Hilbert

Durante a mudança de paradigma no seio da matemática, que começa no final do século XIX e se estende até meados do século XX, muitos matemáticos se destacaram como defensores da proposta de um infinito atual nos moldes propostos por Cantor. E como um dos maiores defensores desse paradigma encontramos David Hilbert que em 1900, em Paris⁷⁸, realiza uma convocação geral por um esforço no sentido de uma nova matemática.

Mais de duas décadas depois, mais precisamente em 4 de Junho de 1925, Hilbert profere uma conferência com o título *Sobre o infinito*, no Congresso da Sociedade Matemática de Westfalia. Mais do que uma mera especulação sobre os novos rumos para a matemática, *Sobre o infinito* é um manifesto que assevera uma determinada concepção de ciência matemática.

Em 1900, Hilbert apresentara uma lista de problemas para procurar delinear um cronograma de trabalho para os matemáticos. Nela notamos uma proposta para uma nova

⁷⁸ *Problemas Matemáticos*, David Hilbert (conferência proferida no 2º Congresso Internacional de Matemáticos), 1900.

concepção de matemática para o século XX. Isto é, com a conferência de 1900, Hilbert assumira a tarefa de traçar as linhas mestras, conceituais e metodológicas, que norteariam a prática da ciência matemática.

Hilbert traz para si a responsabilidade pela defesa de um novo enfoque⁷⁹ em matemática. Enfoque este que começou a se esboçar, principalmente, com os trabalhos de análise matemática de Weierstrass (1927), mas que apenas ganhou uma manifestação mais explícita com a teoria de conjuntos de Cantor.

Contudo, 25 anos se passaram e nenhum esforço fora suficiente para possibilitar uma resposta definitiva ao problema que encabeça a lista apresentada em 1900, qual seja, o que versa sobre a potência do *continuum*. Mesmo assim, buscando inspiração nas conquistas do trabalho crítico de Weierstrass, em análise matemática, e em seus próprios resultados no sentido de uma axiomatização consistente para a geometria, Hilbert percebe que é necessário insistir em seu programa que, entre outras coisas, sugere que todo problema em matemática, inclusive o problema do *continuum*⁸⁰, possui uma solução.

“Um exemplo do tipo de questões fundamentais que podem ser tratadas deste modo é a tese de que todo problema matemático é solúvel. (...) De fato, uma das motivações principais para nos ocuparmos de um problema matemático é que ouvimos sempre este grito dentro de nós: aí está o problema, ache a resposta; você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois não há *ignorabimus* em matemática.”

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.58).

É este o espírito de *Sobre o infinito*, o mesmo espírito que animou as conferências de 1900 em Paris. Isto é, este discurso se aproxima de um manifesto, de um guia de como deve ser pensada e conduzida a matemática do século XX e o que devem esperar dela aqueles que a praticam — uma matemática finitária.

Para Hilbert, somente uma matemática com métodos finitários pode fazer uso legítimo da idéia de infinito apontado por Cantor. Portanto, é a única matemática possível para o século XX. Isto é, a partir de bases finitaristas, esta matemática espera empregar, de maneira bem fundada, o infinito atual como um conceito perfeitamente justificável e útil.

No entanto, Hilbert alerta para o fato de que ainda existe grande falta de clareza

⁷⁹ Poderíamos dizer, de um novo *paradigma* (à Kuhn em **A Estrutura das Revoluções Científicas**, 1962).

⁸⁰ Uma maneira de apresentar este problema é através da pergunta: “Existe alguma coleção infinita cujo cardinal seja maior que N e menor que R ?”.

e enormes discordâncias em questões críticas e que, por esse motivo, necessitam de uma revisão mais profunda e detalhada. Essas questões críticas são, justamente, aquelas que envolvem o significado do termo infinito.

Apesar dos esforços de Weierstrass em eliminar o infinitamente grande e o infinitamente pequeno em análise, substituindo-os por relações entre grandezas finitas, o infinito ainda subsiste mal definido quando, por exemplo, na definição de número real, são mencionadas as séries numéricas infinitas, concebidas como uma totalidade completa e dada de imediato. Além disso, o uso que Weierstrass faz de deduções lógicas envolvendo o conceito de infinito — quando fala em todos os números reais que possuem a certa propriedade, ou quando afirma que existem números reais com tal ou qual propriedade —, deixa implícito que o infinito é um conceito presente em análise.

Hilbert afirma poder resolver o problema dessa presença disfarçada e incômoda do conceito de infinito em análise, transformando-o em uma mera *façon de parler*, da mesma maneira como Weierstrass lidou com os conceitos de infinitamente pequeno e de infinitamente grande.

Do mesmo modo em que operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por operações com o finito, que apresentam exatamente os mesmos resultados e as mesmas elegantes relações formais, os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possíveis as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.47)

Quando atingir esse objetivo, Hilbert acredita poder ter oferecido o que a abordagem de Weierstrass ficou devendo à análise; restaurando, assim, a confiabilidade nos métodos matemáticos que foram abalados, segundo ele, pela ausência de uma definição mais precisa do conceito de infinito. Conceito este utilizado de maneira arbitrária e, por este motivo, tendo sido considerado o causador das acirradas polêmicas que envolveram os matemáticos do final do século XIX e início do XX, principalmente após o aparecimento da teoria de conjuntos de Cantor.

Inicialmente, Hilbert deixa clara sua posição acerca de quais seriam os critérios de validação de uma teoria: a ausência de contradições no seio de uma teoria, quando da inserção de determinado conceito, justifica completamente o uso deste conceito em seu

interior. Em suma, a consistência é o único critério para se aceitar, ou não, o uso de um novo conceito em uma dada teoria matemática. Isto posto, fica claro que ele se coloca contra todos aqueles que se baseiam em critérios outros como, por exemplo, algum tipo de existência ideal (platônica) para os objetos matemáticos. Notamos aqui uma tentativa de *varredura* do platonismo inerente à Teoria de Conjuntos de Cantor, eliminando da nova matemática que está para surgir quaisquer impurezas metafísicas.

Assim, em Hilbert, a existência dos objetos matemáticos é guiada por um critério puramente formal, o que dá o tom formalista à sua concepção de matemática. Isto é, um objeto matemático x só existe se não provocar contradição quando inserido no interior de uma teoria y . Nesse sentido, y é uma teoria matemática válida, desde que consistente.

Não só como matemático, mas também como humanista, como um indivíduo dedicado à causa do pensamento, sendo esta a marca distintiva da existência humana, é que Hilbert se preocupa com o infinito. O infinito não constitui apenas um problema a ser solucionado com o único intuito de por fim às longas disputas matemáticas. Trata-se, também, de resgatar a “dignidade do intelecto humano”; dignidade esta que se viu, de certa forma, ameaçada pela aparente insolubilidade da questão espelhada pela idéia do infinito atual.

Como humanista e como matemático é que Hilbert se propõe a entender o termo infinito. De modo que, a princípio, o infinito deve ser abordado no âmbito da natureza. E o que ele percebe é que os estudos mais refinados da física contradizem nossa impressão acerca da aparente possibilidade de um processo infinito de divisão da matéria. E, no que diz respeito à sua menor parte, a matéria se apresenta como finita, para os diversos campos da física.

De fato, o atomismo é a doutrina mais aceita em física. Ao contrário do que poderia ser chamado de um continuísmo homogêneo da matéria que, se seriamente considerado, acarretaria a introdução do infinitamente pequeno na realidade presente dos corpos. A infinita divisibilidade da matéria é, para a física, apenas uma *façon de parler*.

De tal modo que se pode considerar a tendência da física moderna como de emancipação do infinitamente pequeno; em lugar do antigo princípio *natura non facit saltus* poderíamos mesmo afirmar o oposto, “a natureza dá saltos”.

((Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.48).

Igualmente, o infinitamente grande também não possui nenhum respaldo na ciência, não se mostrando como uma realidade, nem na astronomia, nem na geometria euclidiana. E embora um dos pressupostos dessa geometria seja o de um espaço dado como absoluto e infinito, e mesmo sendo esta teoria um sistema perfeitamente consistente, não devemos inferir disso uma realidade física infinita. Como se de um perfeito desenho de um cavalo alado passássemos a supor que tal animal exista de fato.

E, além disso, a própria geometria euclidiana não tem correspondido mais aos anseios daqueles que projetam teorias e modelos para uma nova concepção físico-espacial do universo. A idéia destes é a de que teorias e modelos geométricos consistentes não necessitam mais do pressuposto de um espaço absoluto e infinito. Assim, o próprio universo enquanto tal deixa de ser compreendido como infinito e passa a ser considerado apenas como ilimitado.

Portanto, seja no que se refere ao infinitamente pequeno, seja no que diz respeito ao infinitamente grande, os últimos resultados das ciências especializadas à época de Hilbert não corroboram a idéia de infinito numa realidade dada.

Ainda assim, é possível considerar que o infinito seja uma necessidade do pensamento puro, nas palavras de Hilbert um “conceito indispensável”. E que, por este motivo, reclame e mereça uma justificativa, uma formalização, que o desnude à razão e que o torne livre de qualquer má-compreensão.

Assim é, por exemplo, na teoria ingênua pura dos números, na qual se observa que qualquer número inteiro pode substituir a variável n na igualdade abaixo:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

Finita em sua construção e tendo como resultado um número finito, para qualquer n inteiro positivo, a fórmula acima possui uma infinidade de instâncias possíveis em n .

Ainda que Frege e Dedekind tenham, cada um a seu modo, em seus trabalhos de fundamentação da matemática, feito uso de um conceito de infinito atual, é somente em Cantor que este conceito ganha uma forma explícita bastante desenvolvida. Assim, se

pensamos na coleção dos inteiros positivos $\{1,2,3,\dots\}$ fazemo-lo segundo a perspectiva de que esta é uma coleção infinita inteiramente dada e completada, do mesmo modo como podemos conceber a reunião de todos os pontos no intervalo entre os números 0 e 1.

No entanto, ao se tomar estas duas coleções infinitas, segundo os seus tamanhos respectivos, percebe-se que elas não são equipotentes. Em outras palavras, a coleção dos naturais (assim como a dos racionais, dos inteiros etc) não é equipotente com a coleção dos números reais.

Se concebermos a ordem apresentada pela coleção $1,2,3, \dots$ como uma coleção infinita completada e a chamarmos de ω , então é razoável que o raciocínio empregado para a construção dessa coleção não se restrinja a ela e continue para mais além. Estendendo, deste modo, o processo de contagem para além de ω . E assim, como vimos, Cantor pôde construir uma escala numérica concebida por meio desse processo de uma contagem transfinita:

$$\begin{aligned} &1,2,3, \dots \\ &\omega, \omega+1, \omega+2, \dots \\ &\omega.2, \omega.2+1, \omega.2+2, \dots \\ &\omega.3, \omega.3+1, \omega.3+2, \dots \\ &\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \dots \\ &\omega^2+\omega, \omega^2+\omega.2, \omega^2+\omega.3, \dots \\ &\omega^2.2, \dots \\ &\omega^2.2+\omega, \dots \\ &\omega^3, \dots \\ &\omega^4, \dots \\ &\aleph \\ &\omega^\omega, \omega^\omega, \dots \end{aligned}$$

Porém, apesar de seus imensos esforços no campo do infinito atual, Frege, Dedekind e Cantor tiveram que arcar com reveses em suas teorias. Fosse porque a reação a elas fora, muitas vezes, violenta, fosse porque a grandiosidade dessas idéias em alguns momentos encobriam falhas de fundamentação de certos conceitos básicos ou de correção dos métodos empregados em suas deduções. O resultado mais dramático se deu com o aparecimento dos paradoxos⁸¹ e a crise dos fundamentos da matemática que se seguiu.

Para tentar fornecer um arremate para o infinito atual, Hilbert recorre ao método

⁸¹ Ver Cap. 2, Seção referente aos Paradoxos de Burali-Forti e Russell

dos elementos ideais já utilizado com sucesso nas geometrias não-clássicas. Ocorre nessas geometrias que o método dos elementos ideais possibilita e legitima a consideração de certos teoremas, tidos como não-válidos na geometria clássica. É o caso, por exemplo, do teorema que afirma o encontro de duas retas paralelas em um ponto projetado no infinito.

Aqui dois elementos ideais possibilitam a consideração e a legitimação de um tal teorema: retas infinitas e pontos no infinito; e graças a eles se obteve uma geometria mais universal que a própria geometria euclidiana. Isto porque nessa nova geometria vale o teorema de que, dadas duas retas (mesmo retas paralelas), estas sempre hão de se interceptar em um ponto.

Do mesmo modo, os chamados paradoxos do cálculo infinitesimal devem sua origem, segundo Hilbert, à confusão que facilmente realizamos entre a idéia de infinito e a idéia do *muito grande*. Com os avanços do cálculo infinitesimal e com as conquistas obtidas em análise, percebeu-se, contudo, que aqui tratamos de duas categorias distintas de objetos e que a identidade entre elas só pode conduzir a inconsistências como as que foram percebidas, por exemplo, pelos antigos gregos e por Galileu.

Isto é, percebeu-se que alguns teoremas válidos em uma categoria não o são em outra. Este é o caso, por exemplo, da afirmação de que é sempre verdade que o todo é maior que a parte. Também notamos algo semelhante com as afirmações da existência do mínimo e do máximo de uma função, ou da comutatividade das operações de adição ou de multiplicação.

Foi somente com a introdução da teoria de conjuntos de Cantor que as distinções e peculiaridades entre essas categorias se tornaram mais evidentes. Para Hilbert, a teoria proposta por Cantor está mais próxima, do que a análise, da generalidade filosófica necessária para a compreensão das sutilezas envolvidas nessa distinção de categorias. E é por este motivo que a teoria de conjuntos logrou obter resultados mais gerais que a análise, consolidando-se, assim, como o mais surpreendente e valioso bem para a matemática do século XX:

Esta teoria me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.50).

Enquanto em análise o infinito aparece no conceito de limite, como o infinitamente grande ou o infinitamente pequeno que, em suma, é ainda um tipo de concepção meramente potencial do infinito, na teoria de conjuntos encontramos uma *atualização* do conceito de infinito. O verdadeiro infinito é, na concepção de Hilbert, aquele que aparece como uma coleção inteiramente dada, completada e, no entanto, inexaurível.

Hilbert propõe um esforço para restaurar a fé nos métodos de dedução que se viram abalados com a crise dos fundamentos, proclamando dois princípios que deverão reger as ações dos pesquisadores que quiserem se unir à sua empresa de restabelecimento dos objetos e dos métodos matemáticos:

1) Definições frutíferas e métodos dedutivos que tiverem uma esperança de salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

2) É necessário estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções da teoria elementar dos números, onde ninguém duvida e onde contradições e paradoxos só ocorrem devido ao nosso descuido.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.53).

É o infinito, portanto, o conceito chave que requer uma fundamentação para que haja uma manutenção da análise, da teoria cantoriana e dos métodos dedutivos tão caros à matemática.

A princípio, Hilbert decide se aproximar do conceito de infinito pelo viés das ciências naturais. E nelas nota que o infinito não é um objeto quer da física do mundo microscópico, quer da física do mundo macroscópico. As ciências naturais tratam o infinito de uma maneira puramente formal. Para estas ciências, o infinito é uma *façon de parler*. Nem a física, nem a astronomia, acreditam seriamente poder encontrar algo como o infinito na realidade.

O uso da dedução material envolvendo objetos infinitários é ilegítimo. Trata-se, portanto, de seguir em matemática os mesmos passos realizados nas ciências naturais. A saber, acomodar a idéia de infinito em uma base finita perfeitamente justificada pela intuição. Uma vez realizado isto, também a matemática poderá distinguir aquelas formas simbólicas, tratáveis e úteis.

Existem, portanto, pré-requisitos para o uso da dedução material. Toda vez que

ignoramos estes pré-requisitos nos encontramos diante de um uso ilegítimo destas formas de raciocínio. Delas obtemos, invariavelmente, conclusões indevidas e argumentos viciosos. Esses pré-requisitos se tornam evidentes quando nos atemos às afirmações através das quais Hilbert coloca o seu pensamento ao lado do pensamento de Kant e conclui, com ele, que a matemática não pode depender apenas da lógica.

Ao reconhecer que existam tais pré-requisitos, que devem ser levados em conta, encontramos-nos em pleno acordo com os filósofos, notadamente com Kant. Já Kant havia ensinado e isso é parte integral de sua doutrina, que a matemática trata de um tema independente da lógica, portanto a matemática não pode e nem poderá nunca ser fundamentada somente na lógica.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.53).

Ou seja, existem pressupostos fundamentais para a matemática que em nada têm que ver com a lógica.

Estes pressupostos são, em linguagem kantiana, as duas formas puras da intuição sensível: os espaço e o tempo. Hilbert se refere a elas somente pelo nome genérico de *intuição*. Fundamentalmente, esta intuição seria capaz de fornecer os objetos, os dados da experiência imediata do sujeito com o mundo, para o entendimento. Estes objetos estariam então para alguém do alcance de qualquer fundamentação lógica já que constituiriam, eles mesmos, a matéria prima de todo o pensar; isto inclui o pensar matemático e o pensar lógico. Estes objetos seriam os átomos do pensamento e não admitiriam um recuo para algo ainda mais fundamental.

Em particular, na matemática estes objetos aparecem, em Hilbert, como aqueles símbolos imediatamente claros e auto-evidentes. O caso exemplar é o da teoria elementar finitária dos números, cuja estrutura parte de uma intuição material e de considerações acerca dessa intuição.

Sabemos, contudo, assim como Hilbert, que a matemática é muito mais do que equações numéricas. No entanto, reside aí um núcleo sólido e confiável para ela, a partir do qual se pode iniciar uma fundamentação consistente para esta ciência. Resta averiguar, tão somente, em que base pode ocorrer esta fundamentação, a partir de uma tal teoria finitária dos números.

Se tomarmos, seguindo exatamente o mesmo raciocínio de Hilbert, os símbolos |, ||, |||, ||||, como representações destes objetos materiais extra-lógicos,

notamos que estes símbolos são formados por iterações arbitrárias do símbolo mais simples $|$. Não se pode afirmar que estes símbolos primitivos possuam um significado em si mesmos. Além disso, outros símbolos podem ser utilizados para nos referirmos a eles. Deste modo, estes últimos símbolos são utilizados de maneira significativa no interior da teoria quando, por exemplo, usamos o símbolo 2 para designar o símbolo numérico primitivo $||$ e 3 para o símbolo $|||$. Há outros símbolos que, também, possuem um significado preciso como $+$, $=$ e $>$. Estes são utilizados para relacionar os símbolos numéricos e, assim, construir proposições significativas como, por exemplo, $2 + 3$, que pode ser encarado como uma maneira possível de designar o símbolo primitivo $|||||$.

Ainda de maneira mais afastada daqueles símbolos primitivos, encontramos os símbolos a , b , c , ... que podem ser empregados para designar símbolos numéricos quaisquer na composição de proposições significativas do tipo $a > b$, na qual é expressa a idéia que o símbolo numérico representado por a é maior que o símbolo numérico representado por b .

Tendo dito isto, Hilbert pode dar o primeiro exemplo para ilustrar o poder e a abrangência de seu método finitário de dedução. Para tanto, apresenta o maior número primo conhecido à sua época:

$$p = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

Sabe-se pelo método que é devido a Euclides que entre $p + 1$ e $p! + 1$ se obtém, pelo menos, um novo número primo maior que p .

Se dissermos, então, que entre $p + 1$ e $p! + 1$ existe pelo menos um novo número primo, não estamos fazendo nada mais que afirmar que ou $p + 1$, ou $p + 2$, ou $p + 3$, ..., ou $p! + 1$ é um novo número primo maior que p . O existencial na afirmação acima não é empregado de maneira ilegítima, já que não se projeta sobre um campo infinito e indeterminado. Esse existencial apenas abrevia o processo de fatoração de p . O novo número primo $p + k$ será, portanto, algum número entre p e $p! + 1$:

De modo que o teorema euclidiano,

$$(1) p < p + k \leq p! + 1$$

assim expresso, se adapta perfeitamente à idéia de uma matemática e de um método de dedução finitários.

Enquanto que a afirmação parcial deste teorema,

$$(2) p < p + k$$

não condiz com a proposta finitária de Hilbert.

E embora (2) expresse uma idéia muito mais geral que (1), a primeira proposição é mais forte que a segunda. Porque (1) possui um conteúdo mais delimitado e, portanto, mais significativo que (2). De acordo com a proposta de uma matemática finitária, devemos optar pelas proposições com um conteúdo claramente determinado ao invés daquelas em que isto não ocorre.

O raciocínio que conduz de (1) a (2) envolve, segundo Hilbert, um passo transfinito. Esse passo, por sua vez, pode conduzir a proposições não significativas se esquecermos, por exemplo, que só podemos obter (2) como generalização de (1). Isto é, a rigor, de um ponto de vista finitarista, (2) não pode ser considerada uma proposição auto-evidente, ou independente de (1).

Segundo essa concepção finitária, uma proposição só é significativa quando ela é elemento de um universo significativo, isto é, determinado.

De nossa posição finitária, uma proposição existencial da forma “existe um número com uma certa propriedade” em geral só tem significado como uma proposição parcial, isto é, como parte de uma proposição melhor determinada.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.55)

Uma proposição só pode ser considerada significativa quando fizer parte de uma coleção previamente especificada de proposições significativas. Uma tal coleção só é possível quando nos atemos àqueles objetos concretos, extra-lógicos, que fundamentam o raciocínio. Isto é, quando nos mantemos dentro dos limites do finito e aceitamos aquelas verdades auto-evidentes como, por exemplo, a proposição

$$A) a + 1 = 1 + a.$$

Aceitando esses parâmetros, então estamos de acordo com a perspectiva finitária de Hilbert. No entanto, se uma proposição qualquer não puder ser colocada na forma de uma disjunção finita, então estamos diante do infinito. E, do mesmo modo, um passo

transfinito é dado quando negamos uma proposição geral válida, como a proposição (A).

É importante ressaltar ainda que, dessa perspectiva finitária, as leis aristotélicas como $\alpha \vee \neg\alpha$, por exemplo, perdem sua validade como na instanciação

$$B) (A) \vee \neg(A)$$

Isto porque a afirmação de B tem, como assunção, a possibilidade da proposição A ser falsa, o que não se sustenta, desde que A é sempre verdadeira. Ou seja, dentro de uma perspectiva finitária, as leis aristotélicas não valem, já que estas leis, dada a universalidade inerente a elas, estendem-se naturalmente para além de conjuntos parciais.

Hilbert se vê, assim, diante da delicada situação de ter que rever a universalidade das leis aristotélicas. E de fato, não é sua intenção abandoná-las, pois, segundo ele, representam uma conquista permanente tanto para a matemática como para o pensamento em geral. É aqui, então, que ele irá recorrer ao método dos elementos ideais para resgatar a abrangência das leis aristotélicas.

Desse modo, para preservar a validade das leis aristotélicas, mesmo sob um ponto de vista finitarista, são introduzidos alguns elementos que possuem o poder de generalizar (idealizar) aquelas proposições numéricas gerais sempre válidas para valores arbitrariamente determinados.

Trata-se aqui de um novo processo de abstração, no qual deixamos de lado o campo dos valores numéricos e suas representações para ceder lugar a elementos idealizados não significativos que, no entanto, podem ganhar significado quando interpretados em certos contextos adequados. Esses contextos podem ser puramente lógicos ou puramente matemáticos. As leis aristotélicas são, desta maneira, preservadas no projeto finitarista. Pois, com a inserção dos elementos ideais, não estamos mais tratando com valores numéricos gerais ou arbitrários, mas sim com símbolos puramente formais que expressam estruturas tão gerais quanto as próprias leis de Aristóteles. Isto é, essas estruturas independem da *intuição*.

Só assim podemos expressar uma proposição, em uma base finitária, sem comprometer, por exemplo, o *tertium non datur*. Essa proposição recebe o nome de *asserção ideal*. Ela não existe por si mesma. Não é, por si só, significativa. Isto é, essa asserção não é representante de nenhum aspecto da natureza. É justamente esse distanciamento da intuição que permite, aos elementos idéias, preservar as leis

aristotélicas no seio da proposta finitarista.

De maneira geral, podemos conceber a matemática como uma coleção de fórmulas de duas espécies: primeiramente, aquelas às quais correspondem as comunicações de asserções finitárias com sentido e, em segundo lugar, outras fórmulas sem significado e que são a estrutura ideal de nossa teoria.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.56)

Enquanto, por exemplo, a equação $a + b = b + a$ comunica o fato de que os símbolos numéricos, representados aqui pelos elementos $a + b$ e $b + a$, coincidem e que, por este motivo, são intercambiáveis entre si, a asserção ideal $a + b = b + a$ não possui um significado imediatamente dado por uma intuição, mas ilustra tão somente a relação aceita entre os elementos nela inseridos. Esta asserção ideal apenas denuncia uma estrutura a ser observada, sem qualquer referência ao seu possível conteúdo. Ao se substituir os elementos ideais a e b pelos símbolos 1,2,3, ..., a,b, ... obtemos proposições finitárias significativas.

De modo que em matemática é necessário estar atento para três tipos de proposições:

- 1. Proposições arbitrárias significativas:** aquelas que contêm apenas símbolos numéricos arbitrários e que, do ponto de vista finitarista, não oferecem quaisquer problemas às leis aristotélicas;
- 2. Proposições gerais significativas:** aquelas que constituem unidades gerais válidas e que, do ponto de vista finitário, oferecem resistência às leis aristotélicas;
- 3. Proposições ideais:** aquelas não significativas em si mesmas e que são constituídas pelos elementos ideais com o intuito de preservar, simultaneamente, as leis aristotélicas e aquelas unidades gerais válidas da teoria dos números.

Mesmo os operadores lógicos devem ser revistos para se adequarem à perspectiva do método dos elementos ideais. Como aqui tratam-se, todas, de proposições não significativas, os operadores lógicos cumprirão um outro papel daquele desempenhado em proposições significativas. Assim, deve-se ter em mente que, juntamente com os demais símbolos matemáticos, são adicionados os operadores lógicos ideais:

$\&, \vee, \rightarrow, \sim$

E juntamente com as variáveis $a, b, c, \dots$, das equações numéricas e das fórmulas gerais válidas, são introduzidas as variáveis proposicionais $A, B, C, \dots, Z$.

Também os símbolos lógicos simples (variáveis proposicionais e operadores) e complexos (fórmulas bem formadas) são destituídos de qualquer significado imediatamente dado nas asserções ideais.

Disponibiliza-se, assim, um modo seguro de construir argumentos e produzir inferências de maneira muito mais geral que as primitivas equações matemáticas restritas às proposições significativas. Este novo modo argumentativo, no entanto, nada acrescenta ao primitivo conhecimento matemático. Isto é, não é inserido neste primitivo conhecimento nenhum novo elemento significativo antes desconhecido. Não se inventa com isso nenhum novo objeto, nenhuma nova intuição. A introdução dos elementos ideais é, em sentido estrito, antes, uma retirada que um acréscimo.

O que a introdução deste método garante é, tão somente, a explicitação de uma certa estrutura universalmente válida, garantida pelas regras gerais do pensamento. Nessa estrutura algumas proposições cumprem o papel de axiomas e outras proposições podem ser derivadas destes axiomas, como teoremas, por meio de regras explícitas.

E a única condição imposta a uma tal estrutura, construída pela inserção dos elementos ideais, é a aquela concernente à consistência do sistema obtido. Em poucas palavras: não é permitido que nenhuma extensão de um domínio qualquer provoque contradição neste domínio, sob pena de tornar esta extensão ilegítima. No que diz respeito à estrutura obtida pela introdução dos elementos ideais, não se pode obter como fórmula final de um processo de inferência nesse domínio estendido, algo do tipo $1 \neq 1$.

Da mesma forma, deve-se poder encontrar, nessa estrutura ideal, uma prova para a irracionalidade de $\sqrt{2}$; ou seja, deve-se poder encontrar uma forma de inferência que demonstre que $\sqrt{2}$ é um número que não pode ser expresso como razão entre dois inteiros. Em suma, todas as verdades do domínio original são preservadas no domínio estendido.

Mas o que Hilbert tem a dizer acerca da consistência da aritmética?

Em geometria, assim como em teorias físicas, o problema de se decidir sobre a

consistência dos métodos axiomáticos ali empregados é resolvido reduzindo-o ao problema da consistência dos axiomas da aritmética. Mas que fazer em relação à própria aritmética? Obviamente não se pode reduzi-la a nenhuma outra teoria mais fundamental. De modo que, tanto a geometria, como as ciências físicas, clamam todas por uma solução para o problema da consistência dos axiomas da aritmética. Neste caso, Hilbert defende a idéia de que a introdução dos elementos ideais constitui a “pedra fundamental na construção doutrinária da axiomática” da aritmética.

A teoria da prova, apenas esboçada no discurso de 1925, é o fundamento sobre o qual a matemática deve se apoiar para se ver permanentemente livre, segundo Hilbert, daqueles problemas de consistência que tanto mal estar causaram na comunidade de pesquisadores. Essa confiança é tão efusiva que lhe permite afirmar enfaticamente:

O que já vivenciamos por duas vezes, uma vez com os paradoxos do cálculo infinitesimal, e outra vez com os paradoxos da teoria dos conjuntos, não ocorrerá uma terceira vez, nem nunca mais.

(Hilbert 1925 em Carnielli 2006, p.58)

E é este o projeto fundacional que Hilbert propõe para uma matemática do século XX. A formalização da matemática é, segundo ele, a única tábua de salvação à qual devem se agarrar todos aqueles que não quiserem se afogar em confusões e mal-entendidos provocados por esforços vãos e, muitas vezes, equivocados.

Hilbert conclui seu discurso de 1925 reiterando suas posições sobre o infinito, a saber que o infinito não existe, se tomamos o numa acepção platônica ou fisicalista. Isto é, o infinito não existe como uma entidade, nem em um mundo inteligível, nem como algo do mundo físico ou concreto. Pelo menos, a prova da existência do infinito, em qualquer um desses dois sentidos, ainda está além de qualquer possibilidade racional.

O infinito é, antes de tudo, uma forma de se referir a uma idéia problemática, assim como Kant o entendia. A saber, como algo que transcende, em princípio, toda experiência possível e que, no entanto, serve como um fio condutor para a razão quando esta, no uso que faz do entendimento, lança mão de idéias (problemas) com o único intuito de realizar a síntese que guarda, em si, um ideal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

*Para ver um mundo em um grão de areia
E um céu em uma flor silvestre,
Segure o infinito na palma de sua mão,
E a eternidade em uma hora.*

William Blake

Realizaremos agora nossas últimas considerações sobre alguns dos pontos defendidos nesta tese. Com elas tentaremos responder algumas perguntas que nos foram dirigidas por alunos e professores durante nosso exame de qualificação, ou durante a apresentação de seminários e conversas informais. Acreditamos ser esta a forma mais adequada de concluir nosso trabalho.

Vimo-nos obrigados a restringir o número de indagações a serem comentadas, assumindo como critério o número repetido de vezes que elas surgiram, o maior grau de dificuldade em respondê-las de imediato e o interesse geral que levantaram.

Decidimos reunir essas dúvidas, críticas e sugestões em um número reduzido de seis questões. De certo modo, todas as respostas que apresentaremos a partir de agora correspondem a uma pergunta mais fundamental: *o conceito de revolução científica pode ser transportado para o reino da matemática?*

1. Por que situar Platão e Aristóteles no âmbito da discussão que realizamos sobre a revolução científico-matemática engendrada por Cantor?

Um dos assuntos a que demos bastante destaque foi a apresentação da doutrina das idéias de Platão nos diálogos *Filebo* e *Parmênides*, por entendermos que o pensamento de Platão exerceu grande influência sobre as concepções filosóficas de Cantor.

Lembremos que, ao rebater as falhas apontadas em sua doutrina⁸², Platão revela que a doutrina das idéias aponta para um arcabouço teórico mais profundo, a *doutrina dos princípios formadores*. Nossa conclusão foi que o conjunto da teoria platônica não é contraditório, quer com uma certa assunção de *infinito atual*, quer com o núcleo do

⁸² Ver seção dedicada a análise do diálogo *Parmênides*.

pensamento pitagórico.

Para reforçar essa conclusão, destacamos aqui uma passagem de Aristóteles, através da qual podemos relembrar a importância do infinito, tomado em sentido próprio, tanto em Platão como nos pitagóricos:

Some, as the Pythagoreans and Plato, make the infinite a principle **as a substance in its own right**, and not as an accident of some other thing. Only the Pythagoreans place the infinite among the objects of sense (they do not regard number as separable from these), and assert that what is outside the heaven is infinite. Plato, on the other hand, holds that **there is no body outside** (the Forms are not outside, because they are nowhere), yet that the infinite is present not only in the objects of sense but in the Forms also.

(Aristotle 1993 1993, *Physics*, Book III, 203a10-203a16 p. 346)

A postura que chamamos aqui de *pitagórico-platônica* acerca de um infinito como princípio, o infinito total ou absoluto, não é referendada por Aristóteles, cuja argumentação, como já tivemos a oportunidade de apreciar⁸³, culmina na assunção de um infinito meramente potencial. Para tornar isso evidente, apresentamos, ainda no primeiro capítulo, o posicionamento aristotélico que se coloca em oposição bastante acentuada ao núcleo do pensamento platônico.

Reforçamos que Aristóteles possuía um posicionamento finitista, ou melhor, empírico-naturalista, antagonizando, em diversos aspectos, com o núcleo da filosofia de Platão. Esse posicionamento finitista deu início ao que chamamos de *Paradigma Aristotélico* para o conceito de infinito, que foi rompido no campo da matemática somente com o aparecimento do pensamento de Georg Cantor no final do século XIX.

2. Assim sendo, Cantor pode ter retomado um suposto paradigma platônico-pitagórico? Se assim fosse, seu trabalho continuaria sendo revolucionário?

Ao romper com Platão, imediatamente podemos conjecturar que o paradigma aristotélico — que defende a existência de um infinito meramente potencial — havia se colocado como substituto a um paradigma anterior. Esse paradigma anterior seria, então, aquele que chamamos de paradigma platônico-pitagórico. Se assim fosse, seria correto afirmar que Cantor pode ter simplesmente retomado as linhas mestras desse paradigma

⁸³ Ver seção dedicada a Aristóteles.

pré-aristotélico. Isto praticamente poderia anular a abordagem que defendemos nesta tese, uma vez que seu protagonista não teria feito mais que retomar antigas concepções pitagórico-platônicas. Mas não é este o caso.

O paradigma finitista aristotélico sistematizou e conferiu um aspecto formal ao conhecido *paradigma cosmológico grego* que, posteriormente, foi assimilado pelos pensadores medievais e renascentistas, muitos deles ligados à Igreja⁸⁴.

Desconsiderando-se algumas correntes divergentes, surgidas no transcurso desse período no interior da própria Igreja, esse *paradigma cosmológico grego* foi conservado no mundo ocidental por ser consistente com as prerrogativas teológicas oficiais do mundo cristão, que nele se inseriram, tendo lá encontrado uma acomodação teórica bastante rica.

Ainda que Platão ocupe um lugar central no mundo grego antigo e, portanto, com igual importância, faça parte do *paradigma cosmológico grego*, grande parte de seu pensamento não deixou de passar pelo crivo negativo de Aristóteles. Como exemplo, é possível dizer que as concepções platônicas acerca do infinito não correspondem com as de Aristóteles, uma vez que decorrem de uma teoria (a Doutrina das Idéias) não compartilhada de todo por Aristóteles. Desse modo, essas concepções acerca do infinito não chegaram a se cristalizar positivamente no paradigma cosmológico grego, a não ser de maneira bastante restrita.

Atribuímos isso às próprias características do pensamento platônico. Devemos considerar os depoimentos de Aristóteles, e de outros membros da *Academia*, que a estrutura de ensino vigente nesta escola obedecia a uma tradição essencialmente oral⁸⁵.

Uma das consequências diretas dessa tradição oral foi o obscurecimento dos fundamentos últimos da escola platônica. Isto é, o *mais importante* da doutrina platônica, ficava restrito a alguns iniciados. Isso conferiu ao platonismo um isolamento teórico-conceitual pouco propício à constituição de um *paradigma científico*, assim como o mundo ocidental passou a entender essa expressão, a partir dos desenvolvimentos que tiveram início a partir de Aristóteles.

E é justamente este o motivo mais evidente para que a doutrina platônica não possa ser aceita como fundadora de um paradigma científico, nos moldes expostos por

⁸⁴ Ver seção dedicada aos medievais e renascentistas, Cap.1.

⁸⁵ Ver Goldschmidt (2002) e Reale (1991), entre outros.

Kuhn em *A estrutura*. O sentido da palavra *paradigma* em Kuhn se baseia, como já foi mencionado no final do Capítulo 3, em uma tradição científica explicitamente calcada nos princípios sistematizadores de Aristóteles, cuja opção filosófica empírico-naturalista⁸⁶ inaugurava o método de investigação dito científico.

Essa opção filosófica trazia consigo uma estrutura amplamente analítica, na qual a organização, a simplicidade e a precisão do discurso foram, a partir daí, adotadas como a base para qualquer discurso que almejasse o grau de cientificidade. Não que esses elementos já não estivessem presentes em Platão, mas a forma que adquiriram no conjunto da obra aristotélica foi a que se desenvolveu como modelo para o discurso filosófico-científico ocidental.

O sentido do termo *paradigma*, portanto, cunhado já dentro dessa concepção científico-filosófica aristotélica, só pode se alinhar com esse modelo de discurso. Não faz sentido, assim, falar em *paradigma* pitagórico-platônico para o infinito, porque não faz sentido utilizar o termo *paradigma científico* associado a qualquer modelo do pensamento presente antes de Aristóteles.

Mas, acima de tudo, devemos destacar a originalidade do pensamento de Cantor. Ainda que possamos considerar esse pensamento como filosoficamente apoiado em algumas concepções platônicas, como já mencionamos anteriormente, há nele um conjunto de idéias fundamentais que não podemos, de modo algum, concluir como criação de Platão.

Obviamente não estamos nos referindo ao arcabouço estritamente matemático desenvolvido nesse pensamento e que, por si só, poderia destacá-lo como *revolucionário*. Estamos nos referindo a certas idéias básicas que bem poderiam estar explicitadas em Platão, mas que efetivamente não estão. Como exemplo, mencionamos a existência e a operacionalidade de um *número infinito real* (como entidade efetiva) que, de acordo com Aristóteles, não se apresenta em Platão, assim como o trecho a seguir parece denunciar:

Plato also made the infinities two in number, because it is supposed to be possible to exceed all limits and to proceed *ad infinitum* in the direction both of increase and of reduction. Yet though he makes the infinities two, he does not use them. For in the numbers the infinite in the direction of reduction is not present, as the monad is the smallest; nor is the infinite in the direction of increase, for he makes numbers only up to the decad.

⁸⁶ Ver p.56.

Assim, nem Aristóteles surge como revolucionário diante de Platão, ao contestar a existência de um número infinito, nem Cantor tem sua originalidade matemático-filosófica diminuída já que, mesmo sem considerar os desenvolvimentos puramente matemáticos por ele engendrados, foi o primeiro a postular a existência de um número infinito *real*, dentro de uma teoria matemática coerente.

Em suma, não existe um paradigma pitagórico-platônico sobre o infinito que tenha sido retomado por Cantor. Existe, sim, uma proximidade inegável entre esses dois pensamentos. Proximidade essa que é colocada em destaque justamente quando Cantor rompe com o paradigma aristotélico do infinito, com a criação de sua teoria de conjuntos e teoria de números transfinitos.

3. Ainda assim, o trabalho de Cantor poderia ser considerado completamente original?

No que diz respeito à originalidade filosófica e matemática do pensamento de Cantor, é necessário mencionar ainda que o matemático tcheco Bernard Bolzano (1781 – 1848) talvez tenha sido um dos que mais se aproximaram de algumas de suas principais idéias. E é Cantor quem reconhece isso quando diz que os números infinitos já podem estar, de certo modo, presentes em Bolzano:

Bolzano talvez seja o único no qual os números propriamente infinitos gozam de um certo direito de serem afirmados; pelo menos, por diversas vezes [Bolzano] refere-se a eles.

(Cantor 1883, p.180)

Com seu livro *Paradoxien des Unendlichen*, Bolzano aparenta distinguir dois tipos de infinito. De um lado, o infinito da análise, considerado por Cantor como um infinito em sentido impróprio, ou meramente potencial, uma vez que se refere à pura possibilidade de variação infinita dentro da qual, ao final, só podemos nos dar conta de números finitos. De outro lado, há o infinito em sentido próprio, o *infinito verdadeiro*, que Bolzano deriva da noção de conjunto por ele introduzida:

Un certain système (inbegrieff) de choses est un tout consistant en certaines parties (...) Un système dans lequel l'ordre des parties est indifférent s'appelle un ensemble.

(Bolzano 1899, p.4 citado por Cavailès 1962, p.67)

Bolzano define uma *multiplicidade* como uma coleção de unidades que recaem sob um determinado conceito. Só deste modo essas unidades se tornarão *partes* (*parties*) de um *tudo* (*tout*), o conjunto propriamente falando.

Para afirmar a existência de um conjunto, é necessário, portanto, decidir se uma *unidade* indeterminada qualquer pode ser chamada de *parte*; isto é, se essa unidade pode receber uma determinação e, com isso, passar a pertencer a uma totalidade, que também pode ser considerada uma multiplicidade. Ou, dito ainda de outro modo, se essa *unidade* recai sob um conceito, caracterizando assim um conjunto bem definido.

Essa caracterização permite a Bolzano conferir uma certa autonomia à sua noção de conjunto, libertando-a das restrições finitistas implícitas em outras definições mais intuitivas ou psicológicas. E, uma vez que para uma multiplicidade ser tomada como um conjunto bastaria que suas unidades constituintes recaíssem sob um determinado conceito, então é possível engendrar, de maneira independente e consistente, uma *totalidade*, ou um conjunto infinito do seguinte modo:

Nous avons déterminé de la façon la plus complete l'ensemble (...) infini des points entre m et n , aussitôt que nous avons déterminé les deux points m et n . Car alors, par ce peu de mots, il est déjà décidé exactement pour tout autre point s'il appartient ou non à cet ensemble.

(Bolzano 1899, p.38 citado por Cavaillès 1962, p.68)

Com essas palavras Bolzano pretende introduzir a caracterização da noção de um conjunto atualmente infinito, como uma totalidade consistente, em contraste à noção de infinito da análise. Bolzano também concebe um cálculo envolvendo esses sistemas infinitos, dentro do qual estão definidas as operações de adição e multiplicação para os conjuntos de números inteiros, tomando como base para isso o estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos.

No entanto, segundo Cavaillès (1962), a caracterização dessa correspondência e, por conseguinte, das operações de adição e multiplicação — assim como, de maneira geral, todas as outras caracterizações existentes em *Paradoxien des Unendlichen* — não consegue se desprender dos próprios exemplos fornecidos por Bolzano e, por conseguinte, de uma apreensão intuitiva dos procedimentos envolvidos. De modo que, ainda segundo Cavaillès, parece prevalecer alguma incerteza com relação aos conceitos fundamentais de *parte* e de *igualdade entre dois conjuntos*.

D'où un flottement à propos d'abord de la notion de partie — sous ensemble — et de l'égalité de deux ensembles.

(Cavaillès 1962, p.69)

Para Cavaillès, esta deficiência não permite que o predicado *infinito* possa ser, rigorosamente falando, associado ao conceito de conjunto, mas tão somente à noção de multiplicidade.

Les prédicats fini et infini ne sont déterminés que pour les multiplicités (...) dont on connaît la loi d'engendrement, qui constituent des séries: lorsque la multiplicité peut être obtenue tout entière par adjonction successive d'un élément, elle est finie; “une multiplicité telle que tout ensemble fini en représente une partie est appelée multiplicité infinie”(Bolzano 1899, p.6)

(Cavaillès 1962, p.69)

Podemos concluir, então, que ainda não existe, em Bolzano, uma definição precisa de conjunto infinito. No entanto, mesmo que essas dificuldades tivessem de algum modo sido superadas, restar-nos-ia a dúvida se a idéia de conjunto infinito em Bolzano poderia ser enquadrada, dentro de nossa discussão, como uma revolução científico-matemática.

Pensamos que não, uma vez que uma revolução científica não se caracteriza, tão somente, com o lançamento de uma idéia absolutamente nova. É preciso avaliar também, e principalmente, a repercussão dessa idéia na comunidade científica. Ou seja, é preciso avaliar o impacto que essa idéia provoca no meio em que se insere. É preciso avaliar o poder que ela tem de alavancar esse meio e de criar as condições necessárias para transformá-lo. Tendo isso em vista, é necessário avaliar o grau de influência de seu proponente, assim como o poder político de seus defensores dentro da comunidade científica.

No entanto, não podemos nos esquecer que uma revolução também é feita por aqueles que se opõem a ela, os contra-revolucionários. Assim, uma teoria revolucionária também é caracterizada pelo poder de fogo de seus antagonistas e pela forma como ela é capaz de se defender aos ataques.

Para a comunidade matemática, Bolzano se apresenta como legítimo precursor daquelas idéias fundamentais que, no entanto, somente irão amadurecer e ganhar sua

forma plena em Cantor. Trata-se aqui de um pensador pré-revolucionário como outros⁸⁷ que, algum tempo antes, começaram a lançar os primeiros indícios do que estaria por vir. No entanto, no que diz respeito ao conceito de infinito atual, é em Cantor, e não em Bolzano, que vemos reunidas todas as condições que mencionamos há pouco como parâmetros para uma verdadeira revolução científica em matemática.

4. Como poderíamos interpretar o aparecimento das geometrias não-euclidianas segundo o enfoque apresentado de revolução científica?

De fato, quase nada dissemos sobre o período que antecedeu imediatamente as descobertas de Cantor. Referimo-nos aqui à efervescência que envolvia o meio científico-matemático desde meados do século XIX, que teve efeitos diretos e indiretos na criação da teoria de conjuntos. Mais especificamente, falaremos um pouco do surgimento das geometrias não-euclidianas que inspiraram uma série de inovações em lógica e em matemática.

O século XIX testemunhou o desenvolvimento da geometria projetiva⁸⁸. Trata-se de uma geometria mais geral que a euclidiana, afastando-se da concepção corrente de espaço. Uma das conseqüências do aparecimento da geometria projetiva foi a conclusão de que a geometria poderia ser tratada como uma teoria derivada de um conjunto puramente formal de axiomas; isto é, a geometria não necessariamente deveria ser uma ciência cujas afirmações correspondessem diretamente às intuições do mundo empírico. E ainda nessa mesma linha de geometrias abstratas, temos o aparecimento da geometria de um número qualquer de dimensões, criada e desenvolvida principalmente por Grassmann e Cayley.

A obra de Grassmann constituiu-se, embora não bem compreendida na época, numa das maiores revoluções na história da matemática. A possibilidade do desenvolvimento de novas geometrias mostrou que esta disciplina poderia desenvolver-se de um modo abstrato, podendo tomar-se independente da geometria física, que é a ciência que estuda o espaço físico real.

(da Costa 1992, p.61)

⁸⁷ Dedekind, também é considerado um legítimo antecipador das idéias de Cantor. No entanto, nunca chegou a publicar em vida o seu artigo *Allgemeine Sätze über Räume*, no qual isso aparece de maneira mais clara.

⁸⁸ Entre os geômetras que desenvolveram a geometria projetiva encontramos Desargues, Poncelet, Chasles, entre outros.

Também Hamilton desenvolveu, mas dessa vez na álgebra, um sistema matemático no qual a operação de multiplicação não era comutativa. Assim, através de suas *álgebras não-comutativas*, Hamilton percebeu que a lei da comutatividade poderia não valer em geral. A partir daí, e juntamente com criação da álgebra linear de Grassmann, a álgebra passou também a ser tratada de maneira puramente abstrata, desvinculando-se da noção de uma ciência ligada ao mundo físico, o que hoje é algo bastante claro para nós, mas que à época ainda se mostrava bastante confuso e obscuro:

Assim, com as obras de Hamilton e Grassmann, efetuou-se uma mudança radical na maneira de se encarar a matemática. A matemática era algo meio confundido com a ciência física e a partir desses autores, ela passou a tornar-se abstrata, começando a separar-se radicalmente das ciências naturais, especialmente da física. Mesmo no início deste século, com Poincaré e outros, a matemática ainda era algo difícil de se separar da física. A matemática francesa tardou muito a adquirir uma visão mais moderna dessa disciplina, que para os alemães já era bastante clara.

(da Costa 1992, p.61)

Mas quando nos referimos, especificamente, às geometrias não-euclidianas, estamos nos referindo, então, àquelas geometrias desenvolvidas, especialmente, a partir dos estudos de János Bolyai (1802 - 1860) e Nikolai Lobatchevsky (1793 - 1856) sobre o famoso e antigo problema das paralelas de Euclides⁸⁹.

Como se sabe, tratava-se de saber se o quinto postulado de Euclides (o postulado das paralelas) poderia ser demonstrado por meio dos outros postulados. Apesar de quase dois mil anos de tentativas isso não se realizou⁹⁰. No entanto, verificou-se que o postulado, enunciado a seguir, poderia ser negado e, até mesmo substituído, sem causar contradições na geometria euclidiana.

Se uma reta corta outras duas retas e faz ângulos internos, do mesmo lado, menores do que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas, encontrar-se-ão do lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

(Lintz 2007, p.177)

⁸⁹ Há fortes indícios de que também o grande matemático Johann Gauss (1777-1855) tenha chegado aos mesmos resultados de Bolyai e Lobatchevsky, no entanto não ousou publicá-los, aparentemente temendo as reações da comunidade matemática.

⁹⁰ Segundo Rubens G. Lintz, este é um pseudo-problema, um mal entendido histórico, dado que a forma como se passou a entender a geometria a partir do século XIX, como uma construção simbólica, em nada se assemelha com a maneira como os gregos, entre eles Euclides, entendiam os fundamentos desta ciência. Para maiores detalhes sobre esta discussão, ver **Lintz 2007**, p.179-182.

Ainda que a palavra “paralela” não apareça no postulado acima⁹¹, concluiu-se que ele é equivalente a qualquer uma das proposições abaixo:

1. Se uma reta intersecta uma das paralelas, intersectará a outra;
2. Retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si;
3. Duas retas que se intersectam não podem ser paralelas a uma mesma reta;
4. Dada uma reta AB e um ponto C não pertencente a AB , podemos traçar uma, e somente uma, reta paralela a AB passando pelo ponto C .

Isso quer dizer que qualquer uma dessas proposições, unidas aos outros quatro postulados de Euclides, implicam no postulado das paralelas.

Bólyai e Lobatchevsky concluíram, sem sofrer influências um do outro, que o quinto postulado era independente; isto é, que o postulado das paralelas poderia ser negado sem maiores prejuízos formais. Somando-se a este fato uma série de outros desenvolvimentos, acabaram propiciando a geração de muitas outras geometrias tão rigorosas quanto a euclidiana e igualmente interessantes.

Entre elas, podemos citar a geometria de Bernhard Riemann (1826 - 1866) que, junto com Bólyai e Lobatchevsky, permitiu a emancipação de muitos cientistas da concepção de espaço absoluto euclidiano⁹². Desse modo, a quarta proposição, mencionada acima, foi reformulada de acordo com a posição de cada nova geometria:

Na geometria de Lobatchevsky: Dada uma reta AB e um ponto C não pertencente a AB , podemos traçar pelo menos duas retas paralelas a AB passando pelo ponto C .

Na geometria de Riemann: Dada uma reta AB e um ponto C não pertencente a AB , não podemos traçar qualquer reta paralela a AB passando pelo ponto C

Sem entrar em maiores detalhes envolvendo as geometrias não-euclidianas

⁹¹ De fato, é somente na Definição 23 que Euclides usa a palavra “paralela”: *Retas paralelas são retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente, em ambos os sentidos, não se encontram em qualquer dos dois sentidos* (Davis & Hersch 1986, 252).

⁹² Entre os quais podemos citar Albert Einstein, que se utilizou da *geometria diferencial* como formalização das geometrias não-euclidianas na elaboração de sua teoria geral da relatividade.

podemos, de imediato, passar a considerar se é o caso aqui de uma revolução científica. Com efeito, essas novas geometrias, efetivamente, romperam com um paradigma que permanecia intacto desde, pelo menos, o aparecimento dos *Elementos*, por volta do século III a.C.

1. Com o aparecimento das geometrias não-euclidianas há uma evidente transformação no contexto científico. Essa remodelação do foco das pesquisas não se restringe à geometria, mas atinge também, e principalmente, a física além de motivar e instigar os lógicos do final do século XIX e início do século XX;

2. A negação do postulado das paralelas representa, ao fundo, a negação do princípio fundamental, consolidado pela geometria de Euclides, de um espaço absoluto; Esse princípio é um dos pilares do paradigma cosmológico grego, do qual Aristóteles se mostra, objetivamente, como um dos primeiros proponentes;

3. O aparecimento das geometrias não-euclidianas ocorre no contexto da própria geometria. No entanto, foi somente com as diversas possibilidades de sua aplicação fora da geometria, principalmente na física, que elas começaram a ganhar reputabilidade e se consolidar, também, como uma conquista nas ciências naturais, tornando-se passíveis de respeitabilidade científica para além do puro jogo formal. De modo que há uma motivação externa, mesmo que a posteriori, para a sustentação das geometrias não-euclidianas.

4. É, sem dúvida, na física, que as geometrias não euclidianas, em especial a geometria elaborada por Riemann, possibilitaram um maior número de desenvolvimentos metodológicos e conceituais. Apareceram trabalhos⁹³ propondo que os espaços microscópicos deveriam ser tratados como não-euclidianos. Em seguida surgiram os trabalhos de Einstein afirmando que os espaços macroscópicos se comportavam de maneira consistente com a geometria de Riemann. Antes disso, porém, J.M. de Tilly, assim como Genocchi, independentemente um do outro, desenvolveram os princípios das

⁹³ Consultar ainda W.K. Clifford, R. Lipschitz, E. Dühring, E. Schering.

mecânicas não-euclidianas — baseando-se para isso em um artigo de Daviet de Foncenex que tentava estabelecer, a priori, as leis fundamentais da mecânica. Também Jules Andrade realizou um trabalho semelhante ao de Tilly e Genocchi, que chamou de mecânicas abstratas.

5. Após o aparecimento das geometrias não-euclidianas, desapareceu a idéia comum de que existe apenas uma geometria correta, ou apenas uma geometria válida. Isto é, a idéia de que a geometria euclidiana é a geometria do mundo real perdeu grande parte de seu antigo poder de convencimento. Por fim, a sociedade científica, em especial a sociedade dos geômetras e dos físicos, se viu diante da possibilidade de muitas geometrias, assim como de muitos espaços possíveis, pelo menos, tão possíveis como o espaço absoluto, plano e tridimensional defendido pela geometria euclidiana.

Em resumo, ao negarem o postulado das paralelas, essas geometrias rompem com um universo teórico greco-ocidental, fortemente baseado na intuição sensível. Desde o aparecimento dessas geometrias, assinaladas por muitos de seus opositores como *extravagantes, excêntricas, irrealis*, etc, tornou-se possível a concepção de espaços curvos e de retas igualmente curvas, como “geodésicas”, assim como foi concebido através da pseudo-esfera de Beltrami (**Wolf 1945**).

Assim sendo, não nos é possível negar o caráter revolucionário do surgimento das geometrias não-euclidianas no contexto científico, assim como vislumbramos ocorrerem as revoluções científicas.

5. Como as lógicas não-clássicas se enquadrariam em nossa caracterização de revolução científica?

As geometrias não-euclidianas anunciaram um novo momento científico no século XIX, influenciando diretamente a física, a matemática e a lógica. E é sobre esta que nos direcionamos agora para averiguar se houve, também nesse campo do conhecimento, algo comparável a uma revolução científica. Acreditamos que sim, tendo isso ocorrido justamente com a criação das lógicas ditas não-clássicas, nos princípios do

século XX (com trabalhos precursores no final do século XIX), grandemente impulsionadas por questões de ordem filosófica e pelo ressurgimento vivido pela geometria desde o século XIX.

(...) as geometrias não-euclidianas sugeriram a possibilidade de lógicas diferentes da clássica: a geometria projetiva contribuiu para que se concebesse a lógica de maneira formal e abstrata; as obras de Cayley, Grassmann e Hamilton corroboraram a importância dos desenvolvimentos provocados pelo impacto das geometrias não-euclidianas; o cantorismo conduziu às axiomatizações da teoria de conjuntos e à formulação das chamadas lógicas abstratas; e a concepção matemática de Poincaré e de outros matemáticos franceses desembocou no construtivismo contemporâneo das lógicas intuicionistas.

(da Costa 1992, p. 65)

Na teoria de conjuntos de Cantor a lógica subjacente é, em geral, a lógica clássica aristotélica. Isto é, a lógica desenvolvida a partir das leis básicas do pensamento expostas por Aristóteles no *Organon*. No entanto, a partir do surgimento de certas concepções teóricas, principalmente em geometria e em física, e de problemas matemáticos cujas soluções não estavam contempladas dentro dos limites da lógica clássica, surge a motivação para as elaborações de *lógicas alternativas* que — seja pelo fato de possuírem uma linguagem mais rica, ou possuírem uma semântica distinta, ou ainda por não se fundarem sobre os mesmos princípios aristotélicos — não poderiam recair sobre o selo de lógica clássica.

Assim, podemos considerar as lógicas não-clássicas divididas em duas categorias básicas. Aquelas ditas *complementares* (à lógica clássica) e aquelas outras ditas *alternativas*, ou heterodoxas:

As do primeiro tipo não infringem os princípios básicos da lógica clássica e não questionam sua validade universal, apenas ampliando e complementando seu escopo. Em geral, a linguagem clássica é enriquecida com a introdução de novos operadores. São exemplos de lógicas complementares, as *lógicas modais*, com os operadores modais de possibilidade e necessidade; as *lógicas deônticas*, com os operadores deônticos proibido, permitido, indiferente e obrigatório; as *lógicas do tempo*, com operadores temporais, relevantes para os fundamentos da física e para a lingüística; as *lógicas epistêmicas*, *lógicas imperativas*, etc.

(D'Ottaviano 2003, p.41)

Pertencente ao grupo das lógicas heterodoxas, que são aquelas que derogam pelo menos um dos princípios da lógica clássica e que, por esse motivo, podem ser consideradas como uma alternativa mais radical às *lógicas complementares*, encontramos três subgrupos: as *lógicas não-reflexivas*, nas quais não vale (em geral) o princípio da

identidade, como é o caso da lógica quântica; as *lógicas paracompletas*, onde não vale (em geral) o princípio do terceiro excluído, como nas lógicas intuicionistas e nas lógicas polivalentes; as *lógicas paraconsistentes*, nas quais não vale (em geral) o princípio da (não-)contradição.

Para nossa menção de uma revolução científica no campo da lógica tomaremos o caso particular das lógicas paraconsistentes, nas quais o princípio da (não-)contradição é, de certo modo, restringido. Isto é, para uma dada teoria T , em cuja linguagem ocorre o símbolo de negação “ $\neg$ ” se A e $\neg A$ são teoremas em T , a partir dessa contradição não se pode deduzir qualquer fórmula em T . Em outras palavras, T é *não-trivial*, mesmo com o aparecimento de uma contradição no seu interior, tratando-se, portanto, de uma *teoria paraconsistente*.

Uma lógica é dita paraconsistente se pode ser usada como a lógica subjacente para teorias inconsistentes e não triviais, que são chamadas *teorias paraconsistentes*.

(D’Ottaviano 2003, p.42)

Entre os precursores da lógica paraconsistente estão Lukasiewicz em 1910, com o seu *Zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, posteriormente publicado como em alemão como *Über den Satz Von Widerspruch bei Aristoteles* (Lukasiewicz 1970b), e Vasiliev com *Imaginary (non-aristotelian) Logic* de 1925. Ainda devemos destacar os trabalhos pioneiro de Jaśkowski, primeiramente publicado em polonês, em 1948 e 1949, sob o título *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*⁹⁴, e de Newton da Costa, em 1963, com *Sistemas formais inconsistentes*⁹⁵.

Há muito interesse nas lógicas paraconsistentes, na medida em que permitem o tratamento formal de teorias sabidamente inconsistentes mas não triviais. A importância filosófica do advento da lógica paraconsistente se reflete, por exemplo, com o possível fortalecimento da teoria dialética que, como sabemos, acomoda o conceito de inconsistência como a sua mola mestra.

Uma das críticas de Popper (1982) à dialética é de que esta admite em seu interior as ditas *contradições verdadeiras*; isto é, a dialética admite um tipo de

⁹⁴ Jaśkowski, *Propositional calculus for contradictory deductive systems*, 1969.

⁹⁵ Da Costa e colaboradores publicaram, a partir de 1963, uma série de artigos sobre o tema em periódicos de circulação internacional.

argumentação onde uma sentença e sua negação podem ser consideradas ambas verdadeiras:

[...] a dialética é o pensamento da contradição. Uma afirmação é ultrapassada por sua negação, e esta, por sua vez, pela negação da negação, isto é, uma nova afirmação. Esse movimento é peculiar: cada momento de dialética e da história ao mesmo tempo ultrapassa o anterior e o conserva [...]. O método dialético de interpretação da história não é o estabelecimento prévio de um caminho a ser seguido, mas uma orientação nas possibilidades revolucionárias de que cada época é portadora .

(Matos, 1993, p. 14-15)

Popper considera a existência de apenas uma lógica, a lógica clássica aristotélica, na qual vale o princípio da não-contradição. O ataque de Popper à dialética⁹⁶ deixa de fazer sentido se assumirmos que a lógica subjacente a ela for, por exemplo, a paraconsistente; ou seja, esse ataque se enfraquece se a própria dialética for concebida como uma teoria paraconsistente, como acreditamos que de fato o seja.

A metodologia científica em geral, e particularmente nas ciências naturais, é grandemente orientada segundo os princípios da lógica clássica. No entanto, é possível observar que as contradições estão freqüentemente presentes nas pesquisas científicas e que os resultados dessas pesquisas poderiam receber um tratamento paraconsistente, de modo a expandir a gama de resultados e a maneira de obtê-los.

Também na matemática as lógicas paraconsistentes poderiam permitir a assimilação de importantes resultados que, de um modo ou de outro, se tornam fragilizados com o surgimento dos muitos paradoxos que os cercam quando a única lógica subjacente admitida é a clássica.

Do nosso ponto de vista, as lógicas não-clássicas, como vimos com relação à lógica paraconsistente, permitem uma revisão de nossa perspectiva científica como um todo. Em outras palavras, as lógicas não-clássicas podem permitir uma alteração de *resolução*⁹⁷ do que entendemos por lógica e, também, por ciência, assim como com relação àquilo que elas pode nos oferecer.

Ou seja, a partir do momento em que a lógica clássica deixa de ser considerada a *única* lógica possível, a ciência como um todo ganha a possibilidade de estabelecer

⁹⁶ Ver o célebre debate entre Popper e Adorno no qual vemos o embate entre o positivismo do *Círculo de Viena* e a teoria crítica da *Escola de Frankfurt*.

⁹⁷ Ver p.182.

soluções e metodologias mais específicas para campos e problemas igualmente mais precisos.

Falando de maneira ainda mais geral, o advento das lógicas não-clássicas, em especial das lógicas heterodoxas, permite que se realize uma profunda revisão de conceitos e noções filosóficas tradicionalmente dependentes das lógica aristotélica, como o de Verdade, Razão, Conhecimento, Crença. Ao apontar alternativas à lógica clássica, as lógicas não-clássicas naturalmente forçam a filosofia a rever esses conceitos e noções extremamente basilares.

Assim, e apenas mencionando como um estudo ainda a ser desenvolvido, concluímos que o advento das lógicas não-clássicas constitui um evento cientificamente revolucionário na medida em que:

- 1) Propiciam a remodelação do contexto científico, dentro e fora da lógica;
- 2) No caso das lógicas heterodoxas ocorre a não validação, em geral, de pelo menos um dos princípios do antigo paradigma, a lógica clássica aristotélica;
- 3) As lógicas não-clássicas foram externamente motivadas, principalmente por questões filosóficas e pela criação das geometrias não-euclidianas;
- 4) Na ciência como um todo, em especial na matemática e na própria lógica, a criação das lógicas não-clássicas permitiu a possibilidade do aparecimento de metodologias novas, de soluções novas e de problemas igualmente novos;
- 5) Por fim, a lógica se reestruturou com o aparecimento das lógicas não-clássicas. A originalidade do trabalhos de Łukasiewicz, Vasiliév, Jaśkowski e da Costa, entre tantos outros, tornaram possível a inauguração de muitas outras novas áreas de pesquisa em lógica, dando origem a diversas escolas de lógica pelo mundo todo.
6. Os Teoremas de Incompletude de Gödel poderiam ser considerados uma revolução científica em matemática?

Durante o desenvolvimento desta tese, surgiram dúvidas sobre a aplicabilidade do conceito de revolução científica a outros importantes eventos matemáticos. Entre eles, destacamos os dois Teoremas de Incompletude de Gödel (1931), dada relevância que tiveram no contexto filosófico, lógico e matemático do século XX. Assim, achamos oportuno iniciar a discussão da seguinte questão: constituiriam os teoremas acima mencionados um evento revolucionário no interior da matemática?

Inicialmente, é necessário dizer que com o aparecimento da imensa gama de paradoxos, no final do século XIX e começo do século XX, veio à tona todo um debate sobre os fundamentos da matemática. Como núcleo desse debate, encontramos a questão sobre a consistência da matemática.

Nesse contexto, Hilbert desempenhou um papel ímpar, convocando seus colegas a se lançarem num esforço comum para, por assim dizer, *salvar* a matemática, sendo ele próprio o principal articulador de um projeto que, com todo rigor, como esperava ele, logo atingiria este objetivo.

Em poucas palavras, o projeto formalista de Hilbert pretendia eliminar as ambigüidades do seio da matemática, principalmente através do uso de uma aritmética formal finitarista que a despojaria de excessos metamatemáticos considerados nocivos. Esses excessos metamatemáticos eram tidos como os principais causadores dos paradoxos auto-referenciais.

Como os paradoxos matemáticos surgem de um certo entrelaçamento de considerações metamatemáticas com objetos puramente matemáticos, era justo imaginar que estes seriam eliminados ou, pelo menos, melhor examinados, e possivelmente esclarecidos, se traduzidos para uma linguagem segura, isto é, sem ambigüidades, como a aritmética.

Não é de se estranhar, portanto, que se buscou reduzir a matemática a uma linguagem baseada em uma aritmética formal, como sendo a melhor maneira de eliminar dela grande parte de sua *fragilidade metamatemática* e, deste modo, fundamentá-la de maneira firme e segura. Uma matemática fundada em uma linguagem aritmética, formal e consistente seria, portanto, uma matemática rigorosa e igualmente consistente.

Dentro desse contexto formalista, Kurt Gödel (1906 – 1978) cria uma linguagem

numérica, buscando mapear, através de um algoritmo, cada expressão matemática e reduzi-la a uma expressão da aritmética. Como consequência desse mapeamento, Gödel associa a cada fórmula da linguagem da aritmética um número natural, conhecido como *número de Gödel* da fórmula. De modo que, para cada fórmula da aritmética, era possível encontrar um *número de Gödel* a ela associado. Pretendia, desse modo, restringir mecanicamente todas as expressões aritméticas a expressões em um âmbito puramente formal.

No entanto, os resultados obtidos por Gödel acabaram por enterrar as pretensões de uma fundamentação formal-aritmética para a matemática, como foram lançadas originariamente pelo programa de Hilbert. Isto é, com seus dois famosos teoremas (**Gödel 1931**), Gödel mostra que, se a aritmética formal é consistente, então sua consistência não pode depender de recursos exclusivos da aritmética e, desse modo, se a aritmética é consistente, então devemos admitir sua *incompletude* ou, em outras palavras, devemos admitir a existência de proposições indecidíveis; isto é, proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas exclusivamente pela própria aritmética.

Gödel constrói a proposição $P(x,y,z)$ que deve ser lida como “a demonstração de número x é uma demonstração da fórmula y , onde z é o valor de sua variável livre”. Se o cálculo para a veracidade de $P(x,y,z)$ é obtido formalmente na teoria, então $P(x,y,z)$ é verdadeira e, portanto, demonstrável na teoria.

Aceitemos, por hipótese, que a aritmética formal é consistente. Suponhamos que u seja o número de Gödel para a fórmula $\forall x \neg P(x,y,z)$. Logo, u é o número da fórmula segundo a qual existe pelo menos uma fórmula, cujo número é y , que não possui uma demonstração, cujo número é x , dentro da teoria. Ou seja, u é a afirmação da incompletude da aritmética formal.

Então, $P(x,u,u)$ não pode ser verdadeira pois, se $P(x,u,u)$ for verdadeira, então $P(x,u,u)$ seria demonstrável; isto é, existiria uma demonstração para a fórmula $\forall x \neg P(x,u,u)$ e, desse modo, uma demonstração para $\neg P(x,u,u)$, gerando a inconsistência. Se a aritmética formal for completa — ou seja, se não existe nenhuma fórmula da aritmética formal que não encontre uma demonstração dentro da própria aritmética formal —, então ela é inconsistente. Por outro lado, se assumirmos a consistência da aritmética formal, então ela deve ser incompleta.

De forma brilhante, e de maneira relativamente simples, Gödel mostra que existe pelo menos uma fórmula que não pode ser demonstrada e que poderíamos traduzir, informalmente, como “existe uma fórmula que não pode ser demonstrada”. Essa fórmula não pode ser demonstrada, sob pena de inconsistência da teoria.

Os resultados apresentados por Gödel, em 1931, ocasionaram um impacto tremendo, não só para o projeto formalista de Hilbert, mas para a comunidade matemática como um todo. Indiretamente, Gödel acabou reforçando a argumentação a favor dos intuicionistas, para os quais Hilbert pretendia fornecer uma resposta com a prova da consistência de sua aritmética formal⁹⁸.

Apesar desse impacto ter sido imenso na comunidade matemática, não consideramos os resultados de Gödel como revolucionários, na medida em que outros fatores pertinentes não se fazem presentes. Entre eles, devemos destacar os seguintes:

1. Não há o aparecimento de nenhum novo conceito em matemática, o que é sumamente importante para a caracterização de revolução científica;
2. Não há qualquer invalidação de um princípio estabelecido. Ou seja, a aritmética formal de Hilbert não havia atingido ainda o status de paradigma. Assim, o que poderíamos chamar de Princípio da Consistência da Aritmética Formal não estava ainda estabelecido. Deste modo, não há a invalidação de nenhum princípio, mas somente a refutação de uma hipótese.
3. Apesar dos diversos comentários acerca do misticismo e da religiosidade de Gödel, não há, ao que tudo indica, motivações outras para os seus resultados além daquelas inseridas dentro de um âmbito estritamente matemático.
4. Não há descontinuidade no desenvolvimento matemático, já que os resultados de Gödel estão inseridos dentro de um rumo normal de pesquisa matemática. Um problema estava colocado, a saber, o da consistência da matemática. Este problema fornecia o

⁹⁸ No entanto, Gödel continua defensor de um projeto formalista, ainda que mais fraco relativamente à proposta original de Hilbert.

impulso para uma grande ordem de pesquisas filosófico-matemáticas. Entre elas estava incluída a busca por uma aritmética completamente formalizada. Gödel participa dessas pesquisas, não rompendo com elas em nenhum momento. Em particular, não há ruptura com o projeto formalista de Hilbert, o que ocorre é o seu enfraquecimento.

Porém, mesmo que relevássemos os fatores acima e nos concentrássemos, exclusivamente, na incrível originalidade e genialidade da metodologia empregada por Gödel, ainda assim não poderíamos considerar seus resultados como revolucionários em matemática, a não ser em um sentido bastante reduzido.

Isto é, os resultados de Gödel causam um impacto negativo no desenvolvimento da matemática. A palavra *negativo* aqui não está sendo tomada em um sentido pejorativo. O resultado de Gödel é *negativo* porque, de certo modo, aparece como o fim, como a negação, de um programa de pesquisa original.

Em outras palavras, com Gödel não há o lançamento de um novo programa de pesquisa que interrompe, por força de seu antagonismo e originalidade, o programa anterior. Ainda assim, nada impede que os resultados originais de Gödel impulsionem novos programas de pesquisa em matemática, mas apenas como uma consequência indireta desses resultados.

Uma questão filial seria a de se saber se os resultados de Gödel seriam *metamatemáticamente revolucionários*. Para tentar responder isso, haveríamos ainda de melhor precisar o conceito de *revolução metamatemática*, mas dado o impacto das consequências mais gerais dos resultados de Gödel, a saber:

1. Se, sob certas condições, a aritmética é consistente, sua consistência não pode ser demonstrada na própria aritmética;
2. Se a aritmética for considerada consistente, essa consistência não poderá ser determinada por nenhuma argumentação metamatemática que possa ser redutível à aritmética.

E uma vez que esses resultados impõem, de maneira clara e irrevogável, limites

às pretensões **metamatemáticas** — inaugurando, assim, um novo período em que não se almeje mais provar a consistência da matemática, seja por que meios forem —, então, dentro desse ambiente metamatemático, é justo supor que os resultados de Gödel sejam considerados revolucionários. Isto porque nitidamente interrompem uma pretensão metamatemática, que pode ser interpretada pelo famoso lema de Hilbert segundo o qual na matemática não existe *ignorabimus*. Como Gödel demonstrou, há questões indemonstráveis ou indecidíveis.

Inaugura-se assim uma nova fase na matemática, a da busca por demonstrações de indecidibilidade, o que não constituiria, a nosso ver, uma revolução na matemática. Apenas, possivelmente, na metamatemática que pretendemos estudar em trabalhos futuros.

BIBLIOGRAFIA

ADORNO (1983), Teodor. W, *Introdução sobre o positivismo na sociologia alemã*, in W. Benjamin, M. Horkheimer, T. W. Adorno, J. Habermas. *Textos Escolhidos*. São Paulo: Abril Cultural, p. 209-257 (Coleção Os Pensadores).

ADORNO (1986), Teodor. W, *Sobre a lógica das ciências sociais*, in Theodor W. Adorno. São Paulo: Editora Ática, p. 46-61 (Coleção Grandes Cientistas Sociais).

ANAXIMANDRO (1973), *Fragmentos* (Doxografia), Trad. Wilson Regis, com introd. de José Cavalcante de Souza e comentários críticos de diversos autores, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 19 – 54.

ARISTOTLE (1993), The complete works of aristotle, The revised Oxford Translation, Edited by Jonathan Barnes, Bollingen Series LXXI · 2, Oxford, 1993.

BERGSON (1974), Henri. Cartas, conferências e outros escritos. Seleção de Rose-Marie Mossé Bastide, tradução de Franklin Leopoldo e Silva. In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1974. p. 7 – 245.

BERNAYS (1964), P., *On platonism in mathematics*. In: Benacerraf. Paul e Putnam, Hilary (eds.): *Philosophy of Mathematics*, New Jersey, Prentice-Hall, 1964, pp. 274-286.

BERNOULLI (1744), Jean, *Opera*. Genevae: Cramer & Philibert (ed.), 1744.

BICUDO (2003), Irineu, *A hipótese do continuum ou o primeiro problema de Hilbert*, in: Revista Brasileira de História da Matemática, Vol.3, nº5 (Abril/2003 — Setembro/2003), org. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Unesp, Rio Claro, pp15-26.

BLAKE (1995), William, *O Matrimônio do céu e do Inferno*. Trad. José Antonio Arantes, 4ª ed. Iluminuras, 2001.

BÓLYAI (1913), Janos, & **BÓLYAI**, W. *Geometrische Untersuchungen*. Leipzig: Druck, 1913.

BÓLYAI (1955), Janos, *The science of absolute space*. In: Bonola, R. *Non-euclidean geometry*. New York: Dover, 1955. (Apêndice)

BOLZANO (1990), B. *Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions. (Appendice des Contributions à une exposition mieuxfondée des mathématiques (1810».* *Philosophie*, Paris, 27: 2-12, 1990.

BOLZANO (1993), Bernard. *Les paradoxes de l'infini*. Trad. Hourya Sinaceur. Seuil, 1993.

BORHEIM (2001), Gerd. *Metafísica e finitude*, Col. Debates dirigida por J. Guinsburg, Editora Perspectiva, São Paulo, 2001.

BOURBAGE (1993), Frank; CHOUCHAN, Nathalie, *Leibniz et l'infini*. Paris: Presses Universitaires de France, 1993. (Philosophies)

BROUWER (1985), L. E. J., *Intuitionism and formalism*, in BENACERAF, P. e

PUTNAM, H., (eds). *Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985, p. 77-89.

BRUNO (1973), Giordano, *Sobre o infinito, o universo e os mundos*. Trad. Elda Barraco e Nestor Deola, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 7 – 97.

BURALI-FORTI (1896), C. *Sopra un teorema del sigo G. Cantor*. Accademia delle Scienze di Torino, 32: 229-237, 1896.

BURALI-FORTI (1981), C. *A question on the transfinite numbers and on well-ordering classes*, in HEIJENOORT, J. van., (ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press, 1981, p. 104-112.

CANTOR (1874), Georg, *Über eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. J. Reine Angew. Mathematische Annalen.. v. 77, p. 258-262, 1874.

CANTOR (1883a), Georg, *Sur les séries trigonométriques*. *Acta Mathematica*, 2: 329-335, 1883.

CANTOR (1883b), Georg, *Extension d'un théoreme de la théorie des séries trigonométriques*. *Acta Mathematica*, 2: 336-348, 1883.

CANTOR (1883c), Georg, *De la puissance des ensembles parfaits de points*. *Acta Mathematica*, 4: 381-392, 1883.

CANTOR (1883d), Georg, *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans une espace continu a N dimensions*. *Acta Mathematica*, 2: 410-414, 1883.

CANTOR (1883e), Georg, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points I*. *Acta Mathematica*, 2: 1883, 349-355.

CANTOR (1883f), Georg. *Sur les Ensembles Infinis et Lineaires de Points II*. *Acta Mathematica*, 2: 357-360, 1883.

CANTOR (1883g), Georg, *Sur les ensembles infinis et lineaires de points III*. *Acta Mathematica*, 2: 361-371, 1883.

CANTOR (1883h), Georg, *Sur les ensembles infinis et lineaires de points IV*. *Acta Mathematica*, 2: 372-380, 1883.

CANTOR (1883i), Georg, *Sur une propriété du systeme de tous les nombres algébriques réels*. *Acta Mathematica*, 2: 305-310, 1883.

CANTOR (1883j), Georg, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*. *Acta Mathematica*, 2: 381-408, 1883.

CANTOR (1883k), Georg, *Une Contribution a la théorie des ensembles*. *Acta Mathematica*, 2: 311-327, 1883.

CANTOR (1883l), Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, 1883.

- CANTOR (1895)**, Georg, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (erster Artikel). *Mathematische Annalen.*, v. 46, p. 481-512, 1895.
- CANTOR (1897)**, Georg, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (zweiter Artikel). *Mathematische Annalen.* v. 49. p. 207-246, 1897.
- CANTOR (1955)**, Georg, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover, 1955.
- CANTOR (1981)**, Georg, *Letter to Dedekind*. in HEIJENOORT, J. van., *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press, 1981, p. 113-117.
- CARNIELLI (2006)**, Walter & **EPISTEIN**, Richard L., *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*, Unesp, 2006.
- CARVALHO (2004)**, Tadeu F., *Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa*. Tese de Doutorado, IFCH/CLE, Unicamp, Campinas, 2004.
- CASANAVE (1995)**, Abel L., *Dos fundamentos à filosofia da aritmética: uma interpretação do programa de Hilbert*. Tese de Doutorado, IFCH, Unicamp, Campinas, 1995.
- CASSIRER (2001)**, Ernst. *Indivíduo e Cosmos na Filosofia do Renascimento*. trad. João Azenha Jr. e Mario Eduardo Viaro. São Paulo: Martins Fontes, 2001.
- CAUCHY (1821)**, A. L., *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique: 1^{er} Partie (analyse algébrique)*. In: *Oeuvres complètes 2*. Paris: Gauthier-Villars, 1821. v.3.
- CAUCHY (1829)**, A. L., *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal: leçons sur le calcul différentiel*. In: *Oeuvres complètes 2*. Paris: Gauthier-Villars, 1826 /1829. v.4.
- CAVAILLÈS (1962)**, Jean, *Philosophie mathématique*, 2^a Ed., *Histoire de la pensée*, Editions Scientifiques Hermann, Paris, 1962.
- CHARRAUD (1994)**, Nathalie, *Infini et inconscient: essai sur Georg Cantor*. Paris: Anthropos, 1994.
- COUTURAT (1903)**, Louis, (ed.) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris, 1903.
- CROWE (1992)**, Michael, *Ten laws concerning patterns of change in the history of mathematics*. In: GILLIES, Donald. *Revolutions in mathematics*. Oxford: Clarendon, c1992. 353p. (Oxford Science Publications). p. 15-20.
- CUSA (1979)**, Nicolau de. *De la docte ignorance*. Trad. Moulinier, Introd. Abel Rey. Paris: Ed. de la Maisnie, 1979
- D'ALEMBERT (1998)** J., *Essai sur les éléments de philosophie*, ed. Fayard, 1998.
- D'OTTAVIANO (1990)**, I. M. L., *Paradoxos auto-referenciais e as lógicas não clássicas heterodoxas*. *Ciência e Cultura*, v. 42, n. 2, p. 164-173, 1990.

D'OTTAVIANO (1992), I. M. L., *A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. In : Évora, F. (org.). Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas : Universidade Estadual de Campinas CLE. (Coleção CLE, v.II, p. 65-93.), 1992.

D'OTTAVIANO (1999), I. M. L., **FEITOSA**, H.A. *Many-valued logics and translations*. In: CARNIELLI, W.A. (Ed.) Multi-valued logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v. 9, n. 1, p. 121-140.

D'OTTAVIANO (2003), I. M. L., **FEITOSA**, H.A., *História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas*, Coleção História da Matemática para Professores, Sérgio Nobre (org.), Sociedade Brasileira de História da Matemática (unesp – Rio Claro), abril, 2003.

DA COSTA (1959), N.C.A. *Observações sobre o conceito de existência em Matemática*. Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática, n. 2, p. 16-19, 1959.

DA COSTA (1963), N.C.A. Sistemas formais inconsistentes. (Tese), Universidade Federal do Paraná, Brasil, 1963.

DA COSTA (1992), N.C.A. *O ambiente matemático no século XIX e o lógico do século XX*. In : Évora. F. (org.). Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas : Universidade Estadual de Campinas - CLE. (Coleção CLE. v.II, p. 59-65.), 1992.

DA SILVA (1989), Jairo J. Sobre o predicativismo em Hermann Weyl. Campinas, Unicamp, coleção CLE v.6, 1989.

DA SILVA (2007), Jairo J., *Filosofias da matemática*, Ed. Unesp, São Paulo, 239 p., 2007.

DARWIN (2001), Charles, *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, *Elibron Classics*, 2001, 484 p.

DAUBEN (1979), Joseph W., *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*, Princenton University Press, New Jersey, 1979.

DAUBEN (1980), Joseph W., *The development of cantor set theory*, in Grattan Guinness, 1., (ed.). *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*. London, Gerald Duckworth & Co Ltd, 1980.

DAUBEN (1992), Joseph W., *Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge*. In: GILLIES, Donald. *Revolutions in mathematics*. Oxford: Clarendon, c1992. 353p. (Oxford Science Publications). p. 49-82.

DEDEKIND (1963), Richard, *Essays on the theory of numbers*. New York, Dover Publications

DESCARTES (1637), René, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyde: Jean Maire (ed.), 1637.

DESCARTES (1686), René, *La géométrie*. Paris: Hermann, 1686 (1.ed. 1637,

2.ed. 1659 - 1661).

DIANO (1970), C., *Il problema della materia in Platone dal Parmenide al Filebo*, Giornale crítico della filosofia italiana, 1970.

DUTRA (2001), Luiz H.A., *A Epistemologia de Claude Bernard*. Campinas: CLE/Unicamp, 2001.

EINSTEIN (2000), Albert., *A teoria da relatividade especial e geral*. Trad. do alemão por Carlos Almeida Pereira, revisão técnica Ildeu de Castro Moreira, 2ª ed., Editora Contraponto, Rio de Janeiro, 2000.

ERDMANN (1958), J.E. (ed.). (1840) G.W. Leibniz: *Opera philosophica quae extant latina gallica germânica omnia*. Berlim. 2 v. (reeditado por Aalen em 1958).

EUCLID (1956), *The thierteen books of Euclid's Elements*, Trad. Sir T.L. Heath, New York: Dover Publ. 1956.

ÉVORA (1989), Fátima R.R., *A revolução copernicano-galileana*, 2 ed. Col. CLE, Unicamp, Campinas, 1989.

FEITOSA (1997), Hércules A., *Traduções conservativas*. 1997. 161p. Tese (doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

FERMAT (1679), P. *Varia opera mathematica*. Editor D. Petri Fermat. Tolosae (Toulouse): Apud Joannem Pech, 1679.

FERMAT (1922), P *Oeuvres de Fermat*. Editadas por Paul Tannery et Charles Henry. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891-1922.

FINDLAY (1974), J.N., *Plato: The writtten and unwritten doctrines*, New York, 1974.

FONCENEX (1759), Daviet de, *Sur lês quantités imaginaires*. *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinesis*, 1:113-146, 1759

FRAENKEL (1929), A. A., *Sur l'axiome du choix*. *L'Eseignement Mathématique*, 34: 32-51, 1929.

FRAENKEL (1953), A. A., *Abstract set theory*. Amsterdam North-Holland Publishing Company, 1953.

FRAENKEL (1958), A. A., **BAR-HILEL**, Y. *Foundations of set theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958.

FRAENKEL (1967), A. A., *Zu den grundlagen der Cantor-Zermeloschen mengenlehre*. *Mathematische Annalen* n. 86, p. 230-237, 1922. Tradução para o inglês em Van Heijenoort 1967, p. 284-289.

FREGE (1966), Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*. Hildesheim Georg Olms Verlag. (Reimpressão da edição de 1893).- (1977) *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Oenkens*. Hildesheim : Georg Olms Verlag. (Reimpressão da edição de 1879).

FREGE (1974), Gottlob, *Sobre a justificação científica de uma conceitografia. Os fundamentos da aritmética*. Seleção e tradução de Luís Henrique dos Santos. In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1974. p. 193 – 282.

FREGE (1977), Gottlob, Begriffsschrift: eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1977. (Publicado originalmente em 1879).

FREGE (1986), Gottlob, Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Hamburg : Felix Meiner Verlag.

GALILEI (1973), Galileu, O ensaiador. Trad. Elda Barraco, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 99 – 238.

GALILEI (1635), Galileu, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Leida: Louis Elsevier (ed.), 1638. Tradução para o italiano da primeira edição, em latim, de 1635.

GALILEI (1909), Galileu, Le opere di Galileo Galilei. Edizione Nazionale. Firenze: Tip. di G. Barbera, 1890-1909.

GARCIA BACCA (1984), Juan David. Infinito, transfinito, finito. Barcelona: Anthropos, c1984

GELOWATE (2004), G., **KRAUSE**, D. ; **COELHO**, Antonio M N . Notas a respeito da neutralidade ontológica da matemática. In: F. T. Sautter; H. A. Feitosa. (Org.). Lógica e Filosofia da Lógica. Campinas: CLE-Unicamp, 2004, v. 39, p. 173-181.

GERHARDT (1978), C.I. (ed.), Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz. Hildesheim : Georg Olms Verlag. v.7. (Reimpressão da edição de 1890).

GILLIES (1992), Donald (Ed.). Revolutions in mathematics. Oxford: Claredon, c1992. 353p. (Oxford Science Publications)

GÖDEL (1965), Kurt, On undecidable propositions of formal mathematical systems: In: Davis, 1965.

GÖDEL (1967), Kurt, On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I, in Van Heijenoort, 1967.

GOLDSCHMIDT (2002), Victor, Os diálogos de Platão: estrutura e método dialético, Trad. Dion Davi Macedo, 5ª ed., PUF, 1993, edições Loyola, São Paulo, 2002.

GOMPERZ (1996), T. Greek thinkers: A history of ancient philosophy, Translated by G.G. Berry, Thoemmes Press, London, 1996, 6 V.

HALMOS (1970), Paul. Teoria Ingênua dos conjuntos. São Paulo: Polígono. Universidade de São Paulo, 1970.

HAMILTON (1982), F., Numbers, sets and axioms: The apparatus of mathematics. Cambridge University Press, 1982.

HERÁCLITO (1973), (Doxografia), Comentários críticos de diversos autores sobre o legado filosófico de Heráclito, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 79 – 142.

HILBERT (1925), David, *On the infinite*. In: Philosophy of mathematics: selected readings. Ed. P. Benacerraf and H. Putnam. Cambridge University Press, 1983.

HILBERT (1930), David, Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Druck.

HILBERT (1934), David., **BERNAYS. P.**, Grundlagen der Mathematik. Berlim : Springer.2v., 1934.

HILBERT (2003), David, *Problemas Matemáticos*: Conferência proferida no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900, trad. Sergio Nobre. in: Revista Brasileira de História da Matemática, Vol.3, nº5 (Abril/2003 — Setembro/2003), org. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Unesp, Rio Claro, pp. 5-12.

HRBACEK (1978), Karel; **JECH (1978)**, Thomas, Introduction to set theory. 2. ed. rev. and exp. Florida: University of Florida, 1978. 247 p. Inc, 1963.

JASKOWSKI (1948), S, *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*. Studia Societatis Scientiarum Torunensis. Sectio A. 1. 5. 1948, p. 55-77.

JASKOWSKI (1949), *O konjuncji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, Studia Societatis Torunensis, Sectio A, I, p. 171-172, 1949.

JASKOWSKI (1969), S, *Propositional calculus for contradictory deductive systems*. Studia Logica. n. 24. 1969, p. 143-157.

KANT (2001). I. (1787) Kritik der reinen Vernunft. Riga : Johanen Friedrich Hartknoch, 2001.

KEPLER (1615), J., Nova stereometria doliorum vinariorum. Lincii: J. Pancvs, 1615.

KRONECKER (1968), Leopold, Leopold Kronecker's Werke. Band 2. New York, N.Y. : Chelsea, 1968. v.2

KUHN (2003), Thomas S., A estrutura das revoluções científicas. Trad. Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira, 8. ed. São Paulo: Perspectiva, 2003 (Debates, dirg. J. Guinsburg).

LABRUNE (1996), M. JAFFRO, L. A construção da filosofia ocidental: um estudo metódico para a leitura das obras, Trad. Cristina Murachco, Flammarion, Paris, 1994, Mandarim, São Paulo, 1996.

LAVINE (1998), Shaum, Understanding the Infinite, Harvard University Press, 1998.

LEIBNIZ (1684), G.W., De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1686.

LEIBNIZ (1684), G.W., Nova methodus pro maximis et minimis, itemque

tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1684.

LEIBNIZ (1966), G.W., Logical papers. Trad. G. H. R. Parkinson. Oxford: Clarendon Press, 1966.

LEIBNIZ (1983), G.W., Oeuvre concernant le calcul infinitésimal. Trad. J. Peyroux. Bordeaux: A. Blanchard, 1983.

LINTZ (2007), Rubens, História da Matemática, Campinas : (vol. I e II), UNICAMP, Campinas, Coleção CLE, 2007.

LINTZ (1999), Rubens, História da Matemática. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v.1.

LOBATCHEVSKI (1955), Nicolai, Geometrical researches on the theory of parallels. In: Bonola. R. Non-euclidean geometry. New York: Dover. (Apêndice), 1955.

LUKASIEWICZ (1910), J., o Zasadzie sprzeczności u Arystotelesa: studium krytyczne. Kraków: Akademia Umiejętności, 1910.

LUKASIEWICZ (1970a), J., **TARSKI**, A., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe 111, v.23, p. 30-50, 1930. Tradução para o inglês em Borkowski 1970.

LUKASIEWICZ (1970b), J., *Über den satz von widerspruchs bei Aristoteles*. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie: Classe d'Histoire de Philosophie, p. 15-38, 1910. Tradução para o inglês em Borkowski 1970.

MANCOSU (1996), Paolo. Philosophy of mathematics & mathematical practice in the seventeenth century. Oxford University Press, New York/Oxford, 1996.

MANCOSU (1998), Paolo. From Brouwer to Hilbert: The debate on the foundations of mathematics in the 1920s, Oxford University Press, New York/Oxford, 1998.

MAQUIAVEL (1996), Nicolau, *O príncipe*. Rio de Janeiro : Bertrand Brasil, 1996

MATOS (1993), O. C. F., A Escola de Frankfurt. *Luzes e Sombras do Iluminismo*. São Paulo: Editora Moderna

MELISSUS (1973), Fragmentos (Doxografia), Trad. Remberto F. Huhn e Isis L. Borges, com introd. de José Cavalcante de Souza e comentários críticos de diversos autores, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 215 – 218.

MONDOLFO (1968), R., *O infinito no pensamento da antiguidade clássica*. São Paulo: Mestre Jou, 1968. 593.

MOORE (1990), A.W., The Infinite: The problems of Philosophy, their Past and Present, edited by Ted Honderich, Routledge, London and New York, 1990.

NAGEL (1958), E., **NEWMAN (1958)**, J.R., Gödel's Proof, New York University Press, New York, 1958.

- NEWTON (1671)**, Isaac, The method of fluxions and infinite series. Ed. John Colson. London, 1736. (De methodus fluxionum et serierum infinitarum, 1671)
- NEWTON (1687)**, Isaac, Philosophiae naturalis principia mathematica. London: Royal Society, 1687.
- NEWTON (1711)**, Isaac, De analysi per aequationes numero terminorum infinitas. London: William Jones (ed.), 1711.
- NEWTON (1981)**, Isaac, The mathematical papers of Isaac Newton. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1981. 8 v.
- NEWTON (1998)**, Isaac, The Principia: mathematical principles of natural philosophy, trad. I.B. Cohen, Univ. California Press, 1998.
- PARMÊNIDES (1973)**, Fragmentos (Doxografia), Trad. Remberto F. Huhn, com introd. de José Cavalcante de Souza e comentários críticos de diversos autores, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 143 – 198.
- PARMÊNIDES (1999)**, Sobre a natureza (Com Introdução e análise de António Monteiro e Miguel Real), Lisboa, 1999, Lisboa Editora.
- PASCAL (1887)**, Blaise, *Traité des sinus du quart de cercle*. In: . Oeuvres complètes. Paris : Librairie Hachette et Cie, 1887
- PEANO (1906)**, Giuseppe, *Supplement to 'On the Cantor-Bernstein theorem' (1906)*, in KENNEDY, H., (ed.). Selected Works of Giuseppe Peano. Toronto, University of Toronto Press, 1973.
- PEANO (1958)**, Giuseppe, *Opere Scelte*. U. Cassina (ed.). Rome, Edizione Cremonese, v.3, 1958.
- PEANO (1981)**, Giuseppe, *The principles of arithmetic, present by a new method*, in HEIJENOORT, J. van., (ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press, 1981, p. 83-97.
- PEIRCE (1974)**, Charles S., Escritos coligidos. Seleção de Armando Mora D'Oliveira e Tradução de Armando Mora D'Oliveira e Sergio Pomeroy. In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1974. p. 7 – 192.
- PITÁGORAS (1973)**, (Doxografia), Comentários críticos de diversos autores sobre o legado filosófico de Pitágoras, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 59 – 64.
- PLATÃO (1974a)**, Filebo, Trad. Carlos Alberto Nunes, in: Diálogos, Vol VIII, Universidade Federal do Pará, 1974.
- PLATÃO (1974b)**, Parmênides, Trad. Carlos Alberto Nunes, in: Diálogos, Vol VIII, Universidade Federal do Pará, 1974.
- POINCARÉ (1902)**, Henry, *Les fondements de La géométrie*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 26: 249-272, 1902.
- POINCARÉ (1924)**, Henry, Últimos pensamentos. Paris, Livraria Garnier, 1924.
- POINCARÉ (1972)**, Henry, *A negative appraisal by a mathematician*, in COPI, I

e GOULD, A., (eds.). *Readings on Logic*. New York, MacMillan Publishing Co., Inc, 1972, p. 206-214.

POINCARÉ (2001), Henry, *Science and hypothesis*; em *The Value of science: essential writings of Henri Poincaré*, pp. 1-178, Modern Library, New York, 2001.

POPPER (1978a), Karl, *A lógica das ciências sociais*, in _____. *Lógica das Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro/Brasília: Universidade de Brasília, 1978, p. 13-34.

POPPER (1978b), Karl, *Razão ou revolução?*, in _____. *Lógica das Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro/Brasília: Universidade de Brasília, 1978, p. 35-49.

POPPER (1980), Karl, *A Miséria do historicismo*. São Paulo: Editora Cultrix/Editora da Universidade de São Paulo, 1980.

POPPER (1982), Karl, *Que é dialética? Conjecturas e refutações*. Brasília: Universidade de Brasília, 1982.

PURKERT (1989), W., *Cantor's views on the foundations of mathematics*, in ROWE, D. e MACLEARY, J., *The History of Modern Mathematics Vol. I: Ideas and Their Reception*. Boston, Academic Press, 1989, p.49-65.

QUINE (1937), Willard. V. O., *New foundations for mathematical logic*. *American Mathematical Monthly*, v.44, p. 70-80, 1937.

QUINE (1976), Willard. V. O., *Word and object*. Cambridge, The MIT Press, 1960. *The ways of paradox and other essays*. Cambridge, Harvard University Press, 1976.

QUINE (1978), Willard. V. O., *Set theory and its logic*. Cambridge, The Belknap Press of Harvard University Press, 1978.

REALE (1991), Giovanni, *Para uma nova interpretação de Platão: Releitura da metafísica dos grandes diálogos à luz das "Doutrinas não-escritas"*, 14ª ed., trad. Marcelo Perine, Edições Loyola, São Paulo, 1991.

REALE (2003), G e **ANTISERI, D.**, *História da filosofia Vol. 1: Filosofia pagã antiga*, trad. I. Storniolo, Paulus, São Paulo, 2003.

RIEMANN (1868), B., *Über die Hypothesen. welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*. v. 13, 1868.

ROBINSON (1961), Abraham, *Non-standard analysis*. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, n. 64, p. 432-440. Amsterdam: 1961.

ROBINSON (1967), Abraham, **ZAKON, E.** *A set theoretical characterization of enlargements*. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. C.I.T., Holt, Rinehart and Winston, p. 109-122, 1967.

ROBINSON (1996), Abraham, *Non-standard analysis*. (Edição revisada da 1. ed. de 1966) Princeton: Princeton University Press, 1996.

ROSSI (2001), Paolo, *O nascimento da ciência moderna na Europa*, trad.

Antonio Angonese. – Bauru, SP: EDUSC, 2001.

RUSSELL (1908), Bertrand, *Mathematical logic as based on the theory of types*. American Journal of Mathematics, v.3D, p. 222-262. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1908.

RUSSELL (1948), Bertrand, *The principles of mathematics*. London, George Allen & Unwin LTD, 1948.

RUSSELL (1973), Bertrand, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, in LACKEY, D., (ed.). *Essays in Analysis* by Bertrand Russell. New York, George Braziller, 1973.

RUSSELL (1974), Bertrand, *Lógica e conhecimento*. Seleção e tradução de Pablo R. Mariconda. In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1974. p. 7 – 228.

RUSSELL (1977), Bertrand, *Misticismo e lógica*. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1977.

RUSSELL (1981), Bertrand, *La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos*, in MUGUERZA, J. (00.). *Lógica y Conocimiento*. Madrid, Taurus, 1981, p.75-144.

RUSSELL (1985), Bertrand, *Introduction to mathematical philosophy*. London, George Allen & Unwin, 1985.

SPINOZA (1962), Baruch, *Ética : demonstrada à maneira dos geômetras*. Coimbra : [Atlântida], 1962. v1

STO. AGOSTINHO (1973a), Confissões. Trad. J. Oliveira Santos, A. Ambrosio de Pina, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 9 – 316.

STO. AGOSTINHO (1973b), De Magistro. Trad. Ângelo Ricci, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 319 – 356.

STO. TOMAS (1944), de Aquino, *Basic writings of saint thomas Aquino*. New York : Randon House, 1944

TAIT (1998) W., *Finitism*, Journal of Philosophy, 78(9): 524-546, 1998.

TAIT, (1967) W., *From Frege to Gödel: A source Book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967.

TALES (1973), Fragmentos (Doxografia), Trad. Ernildo Stein, com introd. de José Cavalcante de Souza e comentários críticos de diversos autores, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 11 – 18.

VASILIEV (1925), N.A., *Imaginary (Non-Aristotelian) logic*. In: Congresso Internazionale di Filosofia. 5. Napoli. Atti... [S.l.] [s.n.].

VEDRINE (1974), Helene. *As Filosofias do Renascimento*. Lisboa: Europa-América, 1974.

- VIERO (1997)**, Arno A., A axiomatização da teoria de conjuntos. Tese de Doutorado, Centro de Teologia e Ciências Humanas do Departamento de Filosofia PUC, Rio de Janeiro, 1997.
- VILENKIN (1995)**, N. Ya, In search of infinity. Translated by Abe Shenitzer. Boston: Birkhauser, c1995.
- VOELKE (1990)**, André-Jean., Vide et non-être chez Leucippe et Démocrite, 1990.
- VON NEUMANN (1964)**, John. von, *The Formalist foundations of mathematics*. In: Benacerraf (1964), Paul e Putnam, Hilary (eds.): *Philosophy of Mathematics*. New Jersey, Prentice-Hall, 1964, pp.50-54.
- VON NEUMANN (1990)**, John, The Legacy of John von Neumann. Providence, R.I. : American Mathematical Society, c1990
- WALLIS (1963)**, J. Johannis, Wallis opera mathematica (3 v.). Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.
- WEIERSTRASS (1854)**, Karl, *Zur theorie der abelschen functionen*. Crelle's Journal. Berlim, 1854.
- WEIERSTRASS (1927)**, Karl, *Mathematische werke von Karl Weierstrass*. Berlim: Mayer & Müller, 1894-1927.
- WEYL (1987)**, Hermann, The Continuum: a critical examination of the foundation of analysis, trad. S. Pollard e T. Bole, Dover, New York, 1987.
- WHITEHEAD (1910)**, A.N., **RUSSELL**, B., Principia mathematica. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.
- WOLF (1945)**, H. E.; *Introduction to Non-Euclidian Geometry*; Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1945.
- ZELLINI (1980)**, Paolo, Breve Storia dell'Infinito. Adelphi, Milão, 1980.
- ZENÃO (1973)**, Fragmentos (Doxografia), Trad. Remberto F. Huhnen e Isis L. Borges, com introd. de José Cavalcante de Souza e comentários de diversos autores, In.: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultura, 1973. p. 199 – 214.
- ZERMELO (1967)**, E., *Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre*. Mathematische Annalen, n. 65, p. 261-281, 1908. Tradução para o inglês em **Van Heijenoort** 1967, p. 199-215.