DENISE MARIA MALDONADO DA CUNHA.

CRENÇAS NÃO DITAS, DITO DE CRENÇAS.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 25/02/2003.

BANCA:

PROF. DR. MARCELO ESTEBAN CONIGLIO – IFCH/CLE/UNICAMP

PROFA. DRA. RENATA WASSERMANN – IME/USP

PROF. DR. WALTER ALEXANDRE CARNIELLI – IFCH/CLE/UNICAMP

PROFA. DRA. ITALA MARIA LOFFREDO D´OTTAVIANO (SUPLENTE) – IFCH/CLE/UNICAMP

FEVEREIRO /2003.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Cunha, Denise Maria Maldonado da

C 914c Crenças não ditas, dito de crenças / Denise Maria Maldonado da Cunha . - - Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica. 2. Inteligência artificial. 3. Teoria do conhecimento. 4. Linguagens formais - semântica. 5. Lógica matemática não clássica. I. Carnielli, Walter A. (Walter Alexandre), 1952- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

RESUMO

O presente trabalho inicia seu estudo na contradição entre um dos postulados de AGM, acrônimo para Alchourrón, Gärdenfors e Makinson, com um princípio aqui designado por *critério da economia da informação incorporada*, muito citado na literatura especializada, inclusive em alguns trabalhos do próprio Peter Gärdenfors, como uma propriedade desejável, ou mesmo necessária, em várias aplicações. A contradição entre ambos é apresentada, seguindo [CCC??], e uma solução para esta incompatibilidade é desenvolvida a partir de uma nova leitura, dentro da linguagem de primeira ordem, para o postulado original, de forma a torná-lo consistente com o critério acima mencionado. O conjunto de postulados obtido por esta nova leitura origina a chamada teoria AGM∃. A formalização de AGM∃ é realizada, nos moldes de [CC02], dentro de estrutura bi-sortida. Os resultados que se seguem mostram que, na verdade, uma teoria sobre mudança racional de crença, no estilo de AGM, depende muito mais das características da metalinguagem, podendo ser aplicada a uma classe de lógicas (e não apenas à lógica clássica, para qual foi inicialmente desenvolvida). AGM∃, assim como AGM, permite que as identidades conhecidas como *identidades de Levi* e *Harper* permaneçam interdefiníveis.

Uma análise sobre quais teorias podem ser produzidas dentro do espaço lógico da linguagem de primeira ordem é iniciada, proporcionando que um estudo sobre a liberdade de expressão, das teorias tipo AGM, possa ser mais investigado.

Diferentemente das abordagens que têm sido apresentadas para AGM, o presente trabalho foi elaborado com enfoque nos conceitos lógicos envolvidos na formulação de uma teoria para mudança racional de crença e nos resultados teóricos que podem ser obtidos a partir desta análise. Uma abordagem algorítmica sobre os resultados aqui obtidos pode ser realizada posteriormente.

ABSTRACT

This investigation begins analysing the contradiction between one of the AGM postulates (acronym for Alchourrón, Gärdenfors and Makinson) and a criterion called here as the *criterion of incorporated informational economy*, widely cited in the specialized literature, including in some paper by Gärdenfors, as something desirable and even necessary in many applications. Once introduced the contradiction between them, as also described in [CCC??], a solution to the problem is proposed by giving a new reading, inside the first order language, to the AGM postulates, in a way that it becomes consistent with the criterion mentioned above. The new set of postulates obtained from this new reading originates the theory called AGM∃.

The formalization for AGM∃ is established, following [CC02], inside of a two-sorted structure. The results that follow show that, in fact, a theory about rational belief change, in AGM style, depends much on the properties of the metalanguage upon which it is developed, and can be applied to a class of logics (rather than to just classical logic, to which it was initially developed). AGM∃, like AGM, allows that the identities known as *Levi and Harper identities* still remain interdefinable.

An analysis about which theories can be produced inside the logical space of the first order language is initiated, providing that further studies about the degrees of expression of AGM style theories can be developed.

Distinctly from other approaches that have been discussed about AGM, this study was developed focalizing logical concepts involved in a formulation of a theory about rational belief change. The theoretical consequences that can be accomplished from this analyses allow further algorithmic approaches to the results obtained here.

AGRADECIMENTOS.

Em inúmeros momentos realizar uma dissertação de mestrado pode parecer uma tarefa bastante solitária, mas a realização do trabalho é fruto também do aprendizado e companheirismo que encontramos nas pessoas que convivemos e dividimos as nossas experiências.

A primeira vez que fui ao CLE tive a felicidade de encontrar com a Profª. Itala D´Ottaviano, que me deixou entusiasmada com a possibilidade de vir a estudar lá. Na verdade, pensei em estudar lógica porque, apesar de não ter a mínima idéia do que realmente tratava tal área, acreditava que ela encerrava um conhecimento diferenciado. Área esta que era muito mencionada por meu pai (apesar de não ser a sua formação, e eu dedico a ele este trabalho), mas que parecia muito difícil. Confesso que, ainda hoje, acho um estudo difícil, mas que pode parecer muito, mas muito mais complicado dependendo da sua forma de apresentação (e notação). Desenvolver uma tese de mestrado em lógica (e no CLE) não é uma tarefa na qual se passa incólume, felizmente. Por não ter uma formação estritamente matemática, o entendimento foi muito facilitado pela excelência do conhecimento dos professores do Grupo de Lógica Teórica e Aplicada de Campinas.

Escolher um assunto que estuda crenças, mesmo que seja a formalização de um processo que leva a crença em consideração, em conjunto com a lógica que existe por trás da acomodação de uma crença, é bastante motivador e desafiador. Pensar sobre crenças, mesmo que dentro de um contexto mais técnico, fez com que eu questionasse as minhas próprias idéias, muitas vezes analisando o processo de geração, aceitação ou revisão de crenças enquanto ser humano.

O assunto *Revisão de Crenças* foi-me apresentado pelo Prof. Marcelo Coniglio, que percebeu que este poderia despertar o interesse necessário para eu começar a idealizar uma tese de mestrado. Através de um curso, ministrado pela Profª. Renata Wassermann, tive a oportunidade de começar a entender um pouco sobre o assunto, e a felicidade de poder contar como seu apoio sempre que precisava de alguma explicação, ou simplesmente trocar idéias sobre o assunto.

A paciência do orientador, Prof. Walter Carnielli, que soube dosar o excesso de entusiasmo ou o excesso de descrença em determinados momentos, foi fundamental para a harmonização do trabalho. A sua conclusão também foi decorrente do amadurecimentos de idéias (e crenças) proporcionada pelos professores Walter Carnielli e Marcelo Coniglio.

Além dos professores, agradeço a todos os funcionários do CLE, que prestam seus serviços com muita dedicação e delicadeza, facilitando em muito a comunicação e a manutenção do bom humor, tão importantes no nosso dia a dia.

Agradeço ao colega Ricardo Tassinari pela importante troca de informações, a qual me motivou a trabalhar na idéia que, em muito, fundamentou o desenvolvimento deste estudo.

Entre os amigos, Janet, Helena, Greg, Judy, Michella, Maria Tereza, Flavinha, Tim, Cris, Mu e familiares, minha incrível mãe Celia, minha irmã Claudia, vó Dirce, tio Cássio, Junira e Klein, meus enteados Flávia e Fausto, que estão presentes em vários momentos da minha vida, outras duas pessoas foram, em especial, primordiais para que eu conseguisse realizar este projeto: agradeço à Egle Filiage por todo suporte emocional para que as minhas crenças fossem revisadas de forma muito positiva, e por facilitar o caminho do entendimento das minhas expectativas; agradeço ao homem com quem posso exercitar a forma plena do que é o amor, Antonio Wellington da Costa Lopes.

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS

APRESENTAÇÃO.

I INTRODUÇÃO

Uma *mudança de crença* pode ser definida como qualquer ato realizado de forma a se acomodar uma nova situação, decorrente de uma incorporação, ou exclusão, de uma crença dentro de um conjunto de crenças. Podemos falar de mudança de crença que realizamos no nosso dia a dia, mudança de crença de um sistema (quando tomamos a formalização da informação como crença), mudança de crença realizada por um agente; ou em qualquer situação que obrigue uma pessoa, ou agente artificial a se re-estabelecer perante algum fato inesperado.
Tomando como exemplo os fatos que acontecem corriqueiramente, podemos verificar que estamos freqüentemente mudando nossas crenças, e, muitas vezes, somos obrigados a rapidamente tomar uma decisão para que possamos concluir uma tarefa ou solidificar uma postura.
Suponha que uma pessoa vai para o trabalho todos os dias pelo mesmo caminho, e que hoje, por acaso, uma das ruas está bloqueada. Este pessoa pode ficar lá, parada no carro, esperando a rua abrir, ou pode tomar outro caminho e seguir para o trabalho. Esta última atitude ilustra o processo de "revisão de crença", ou seja, dada uma informação, geralmente inesperada, devemos revisar as opções ou crenças já estabelecidas para acomodar esta informação (e provavelmente tomar alguma decisão que permita a continuidade de uma tarefa). Voltando ao nosso

exemplo, a pessoa pode, ainda, resolver voltar para casa e tirar o dia de folga, porque a rua estava bloqueada. Vale observar que um procedimento insensato é justamente o que uma atitude epistêmica de revisão de crença tenta evitar. Provavelmente, a maioria das pessoas tomaria a decisão de pegar um outro caminho e seguir para o trabalho, porque tirar um dia de folga, ou ficar esperando a rua ser liberada, parecem opções insensatas. Exagerando a situação, podemos pensar em uma pessoa que simplesmente entra em colapso e resolve não trabalhar nunca mais, porque a rua estava fechada naquele dia.

Em outros casos, somos forçados a simplesmente aceitar determinadas situações, sem muitas alternativas, principalmente quando nos deparamos com fatos. Quando necessitamos sair de casa e cai aquele temporal, não há o que se fazer, a não ser aceitar este fato. Esta situação ilustra uma "expansão de crença", ou seja, a simples incorporação de uma determinada informação.

A "contração de crença" é simplesmente a operação de se excluir uma informação, como a de se apagar um endereço de uma agenda.

Mantida as devidas proporções, em um sistema existem tipos de informações, ou fórmulas, que podem ser adicionadas ao sistema sem que seja necessário se efetuar alguma alteração nas informações contidas no próprio sistema. Contudo, para que outras informações sejam adicionadas ao sistema, pode ser preciso que alguma revisão seja efetuada, se necessário que alguma(s) informação(ões) seja(m) retirada(s) do sistema para que se possa acomodar esta nova situação.

Outras vezes, a introdução de uma informação pode mesmo arruinar um sistema, se nada for realizado.

Dependendo dos conceitos adotados na teoria de mudança de crença alguns tipos de informação não são tratáveis. Por exemplo, vamos considerar uma situação em você está viajando de carro e pede uma informação sobre a localização de uma pousada. Uma primeira pessoa lhe diz que existe uma bem perto, e que é só continuar em frente. Você anda uns 10 minutos e uma segunda pessoa lhe informa que a pousada está bem mais longe. Você anda, então, 15 minutos mais e encontra a pousada. Na verdade, apesar de ambas informações serem desencontradas ou contraditórias, do tipo A e $\neg$A, elas indicam que as referências dos informantes é que eram contraditórias e indicavam que a verdade estava no meio termo de ambas. Dentro da Lógica Clássica, contudo, uma informação deste tipo, ou seja, contraditória, não é suportada pelo sistema, e para se incorporar ou trabalhar com informações deste tipo temos opções de se utilizar sistemas que estão baseados em lógicas paraconsistentes, como por exemplo baseados nas Lógicas da Inconsistência Formal - LFIs[1], as quais suportam informações contraditórias.

Por mais fácil que possa parecer o processo de mudança de crença, a tarefa de se formalizar e sistematizar este procedimento é bastante trabalhosa, pois deve considerar todos os procedimentos que, na maioria das vezes, efetuamos naturalmente em nossas atividades. Além disto, a formalização de uma teoria que utiliza a linguagem natural para expressar os seus preceitos, ou postulados, requer um cuidado especial na interpretação destes e na adequação da linguagem

[1] Para maiores detalhes sobre as LFIs ver [CMA00].

natural à linguagem formal, pois o poder de expressão da primeira é comprovadamente maior que da segunda. Existem várias abordagens para tentar se caracterizar e formalizar o mais próximo da realidade o comportamento de uma agente perante uma mudança de crença. Um resumo sobre algumas teorias sobre o assunto e os tipos de abordagem utilizado nesta área pode ser encontrado em [Was00].

Um aspecto fundamental em qualquer análise teórica que se faça para se representar um processo de revisão de crenças, é a avaliação das possibilidades de mudanças que podem ser efetuadas perante uma crença em conflito com o que se espera. Esta mudança, como veremos, não é única, mas a formalização das operações de mudança de crença irá requerer que a teoria resultante seja uma teoria coerente.

Entre as teorias mais estudadas sobre mudança de crença está a teoria AGM, devido a Alchourrón, Gardënfors e Makinson apresentada em [AGM85]. Esta teoria será a base para todos os estudos realizados nesta tese. Além de ser uma das mais estudadas, tanto com relação aos seus critérios e princípios filosóficos e epistemológicos, quanto da sua aplicação em áreas como a computação, inteligência artificial; os postulados de AGM carregam toda a simplicidade necessária para que muitas interpretações sejam apresentadas e discutidas sobre o que vem a ser e como podemos tratar das mudanças de crenças.

Embora a aplicação de operador de conseqüência lógica não monotônico em Mudança de Crença despertar interesse ([MG91], [GM94], [Boc00], [Bre91] e [Rot01]), neste trabalho trataremos apenas dos processos onde o operador de conseqüência lógica é monotônico.

II - A ORGANIZAÇÃO DA TESE.

No primeiro capítulo é apresentado um histórico sobre a formulação da teoria AGM, [AGM85] e uma breve investigação sobre a importância do que chamo aqui de *critério da economia da informação incorporada* - CEII na própria concepção de AGM. Um estudo sobre a contradição entre um dos postulados para operação de revisão, da teoria AGM e a sentença que traduz CEII, para a operação de revisão é elaborado de forma a demonstrar a existência de tal contradição. Uma solução para o problema é apresentada, através da releitura do postulado de AGM, dentro da linguagem de primeira ordem. O conjunto de postulados obtidos através desta releitura origina a chamada teoria AGM∃.

No Capítulo 2 é introduzida a formalização para AGM∃, dentro de uma estrutura bi-sortida de primeira ordem, que permite não apenas a obtenção dos resultados conhecidos, como a busca pelos requisitos mínimos que uma lógica, ou uma classe de lógicas, deve possuir para atender aos postulados formalizados.

No Capítulo 3 demonstramos a propriedade de interdefinição entre as identidades de Levi e Harper para AGM∃, de acordo com a formalização do capítulo anterior, evidenciando a aplicação destas identidades à uma classe ampla de lógicas.

No Capítulo 4 analisamos o espaço lógico onde podemos trabalhar com teorias do tipo AGM e a relação entre AGM∃ e outras teorias dentro deste espaço.

Considerações finais decorrentes do trabalho e sugestões para trabalhos futuros são discutidos na Conclusão Geral.

III - NOTAÇÃO PRELIMINAR.

A notação utilizada, inicialmente, será a notação usual para a lógica clássica e teoria de conjuntos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (*não*, *ou*, *e*, *condicional* e *bicondicional*), os quantificadores $\forall$, $\exists$ (*universal* e *existencial*), as constantes $\top$ (*verum*) e $\bot$ (*falsum*); e os símbolos $\subseteq$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ e $\in$ para subconjunto, subconjunto próprio, interseção, união e pertence, respectivamente. As fórmulas serão denotadas por letras minúsculas latinas, enquanto as letras minúsculas gregas denotarão sentenças. As letras maiúsculas latinas ou gregas denotarão conjuntos ou teorias, conforme o caso.

Os símbolos utilizados na formalização serão esclarecidos conforme as suas definições no decorrer do trabalho.

IV – O QUE É NOVO NESTE TRABALHO?

Apesar da contradição, entre o postulado da *consistência da revisão* e o *critério da economia da informação incorporada*, apresentada no Capítulo 1 ser do conhecimento dos estudiosos da área [Han99], não consegui encontrar nenhuma literatura que explorasse de forma detalhada, como neste trabalho, este fato.

Também não consegui encontrar em nenhum trabalho o levantamento (e defesa) do fato de que pelo menos na formulação inicial dos postulados de Gärdenfors o critério da economia da informação incorporada era sim importante, a ponto de ser considerado como um de seus postulados.

A proposta apresentada para que uma teoria *tipo* AGM possa aceitar modelos que incorporem o conceito determinado pelo postulado da consistência da revisão, ou modelos que incorporem o conceito do critério da economia da informação incorporada, é novo. Na verdade, AGM∃ é decorrente de uma transformação muito simples, mas que afeta consideravelmente o que pode ser realizado ou não por um conjunto de postulados. É original o fato de se aplicar um tipo (antigo) de análise à área de revisão de crenças, em particular à AGM, para se mostrar uma possível solução para uma incompatibilidade.

Foi fundamental, também, neste estudo a demonstração de que os postulados de AGM∃ estão vinculados às identidades de Levi e Harper, como no caso de AGM.

A formalização de uma teoria utilizando-se uma estrutura bi-sortida de primeira ordem não é nova [CC02], mas a demonstração de algumas propriedades e teoremas, conforme descrito no Capítulo 3, para revisão de crenças dentro desta formalização, é nova.

Na concepção de AGM∃ a utilização de ferramentas tão conhecidas da lógica deu origem a um estudo mais amplo do que poderia representar uma teoria do tipo AGM dentro do espaço lógico.

Para facilitar a identificação dos teoremas, lemas, corolários e propriedades originais, os mesmos encontram-se destacados em negrito e com bordas duplas sombreadas.

O que realmente não é novo é o fato de se verificar que quando lemos uma mesma sentença sob um outro ângulo podemos ampliar consideravelmente os conceitos que podem se esconder sob esta sentença.

1. UMA INCOERÊNCIA EM AGM ?

1.1- SOBRE A TEORIA AGM.

Em [AGM85], Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors e David Makinson apresentam o artigo intitulado “On the logic of theory change: Partial meet contractions and belief revision”. A grande novidade trazida neste artigo foi a demonstração de que os postulados, devidos a Gärdenfors, sobre as operações de mudança de crença, que tratavam do assunto sob um caráter mais filosófico e epistemológico, coincidiam com as construções matemáticas, chamadas de *partial meet contraction* e *revision functions*, sobre os mesmos processos de mudança de crenças, caracterizadas por Alchourrón e Makinson.

Antes de introduzirmos os postulados de mudança racional de crenças apresentados em [AGM85], vamos apresentar algumas das principais características e premissas lógicas dos postulados para uma mudança racional de crença, desenvolvidos por Gärdenfors:

a) Um conjuntos de crenças, designado por K[2], é representado por uma teoria logicamente fechada (ou simplesmente teoria), não necessariamente completa[3], da forma, $K=Cn(K)$, onde Cn é o operador de conseqüência (tarskiano) da Lógica Clássica. Lembramos que um operador de conseqüência lógica é tarskiano se obedece aos seguintes axiomas:

1. $K \subseteq Cn(K)$, *inclusão*
2. $K \subseteq H \Rightarrow Cn(K) \subseteq Cn(H)$, *monotonicidade*
3. $Cn(Cn(K)) \Rightarrow Cn(K)$, *iteração*

É conveniente lembrar que o operador de conseqüência tarskiano e o fato de estarmos trabalhando com teorias permitem obter uma propriedade que usaremos freqüentemente e que denominaremos como Regra do Corte, dada por: Se $x \in Cn(K \cup \{y\})$ e $x \in Cn(K \cup \{\neg y\})$, então $x \in Cn(K)$;

b) O conjunto trivial de crenças ou conjunto absurdo é designado por $K_{\perp}$, representando o conjunto de todas as crenças ou fórmulas;

c) As três operações para revisão de crenças são: expansão, representada pelo símbolo +, revisão, representada pelo símbolo *, e contração, pelo símbolo -.

---

[2] Em algumas referências o conjunto de crenças é designado por A, enquanto em outras A representa uma crença, ou fórmula.
[3] Uma teoria logicamente fechada é dita *completa* quando contém para cada fórmula, ou a sua afirmação ou a sua negação.

Como os próprios nomes indicam, expansão traduz a operação de, simplesmente, adicionar uma fórmula a uma teoria; revisão é a operação necessária para se introduzir uma fórmula em um conjunto de crenças de maneira que, sempre que possível, o conjunto resultante não seja o conjunto trivial; e contração é o ato se de retirar alguma informação da teoria;

d) o resultado de qualquer uma destas operações gera um outro conjunto de crenças, ou seja, uma teoria logicamente fechada, o qual pode ou não coincidir com o anterior; e

e) na operação de revisão, a fórmula da operação sempre tem prioridade sobre as demais fórmulas da teoria.

Geralmente encontramos na literatura o termo *agente* para designar o que ou quem retém a teoria ou conjunto de crenças sobre o qual estamos falando ou analisando.

Os postulados de AGM não estabelecem que uma tomada de decisão seja necessária para a realização de qualquer uma das operações de mudança racional de crença, mas a realização de uma operação de revisão ou contração pode requerer um processo de escolha, tanto com relação ao procedimento para se obter um resultado, quanto da escolha de um único resultado, dado um conjunto enumerável de resultados possíveis. Em [AGM85] demonstrou-se que existe um tipo de construção matemática que equivale aos postulados de Gärdenfors para uma mudança de crença, tanto para contração quanto para revisão. Outras construções seguiram-se desde então, com o intuito de se atender também aos postulados, mas que levam a um resultado, ou conjunto de resultados diferentes da construção inicialmente estudada.

Em [AGM85],e respeitando a ordem de apresentação no artigo, temos a seguinte formulação para os postulados de Gärdenfors[4] para contração:

> "Our first task is to show that all partial meet contraction and revision functions satisfy Gärdenfors postulates for contraction and revision. We recall (cf. [2][5] and [6][6,7]) that these postulates may conveniently be formulated as follows:
>
> (-1) $K - x$ is a theory whenever K is a theory (closure)
>
> (-2) $K-x \subseteq K$ (inclusion)
>
> (-3) If $x \notin Cn(K)$, then $K-x=K$ (vacuity)
>
> (-4) If $x \notin Cn(\emptyset)$, then $x \notin Cn(K-x)$ (success)
>
> (-5) If $Cn(x)=Cn(y)$, then $K-x=K-y$ (preservation)
>
> (-6) $K\subseteq Cn((K-x)\cup\{x\})$ whenever K is a theory (recovery)" [8]

---

[4] Denotaremos um conjunto de crenças, ou teoria logicamente fechada, por **K**, uma fórmula por **x**, a operação de revisão por * e contração por -, que não coincide com o a notação original, para melhor uniformidade de notação geral do texto.

[5] [2] PETER GÄRDENFORS, *On the logic of theory change: Contraction functions and their associated revision functions*, **Theoria**, vol.48 (1982),pp.14-37.

[6] [6] DAVID MAKINSON, *How to give it up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change*, **Synthese** (to appear).

[7] Esta referência foi publicada em Synthese, vol 62 (1985), pp. 347-363 e vol.68 (1986), pp.185-186, sob o título *How to give it up: A survey of some recent work on formal aspects of the logic of theory change.*

(-1) estipula que se K é uma teoria, então o resultado da contração de uma fórmula x em K também é uma teoria. A teoria resultante de uma contração por uma fórmula x é um subconjunto da teoria original, conforme descrito em (-2). Em (-3) é estabelecido que se uma fórmula não pertence a uma teoria K a contração por esta fórmula é igual a própria teoria.(-4) estabelece que uma fórmula só continuará na contração de uma teoria por ele se esta fórmula for uma tautologia, ou seja podemos sempre retirar uma informação de uma teoria se esta informação não for uma verdade incondicional para a lógica subjacente à teoria. Se duas fórmulas têm conseqüências lógicas equivalentes, então a contração é indiferente por uma ou por outra fórmula, conforme (-5). Em (-6) temos que uma teoria é um subconjunto da contração desta teoria por uma fórmula e posterior união com a fórmula contraída.

Os postulados para revisão foram apresentados conforme se segue:

"The Gärdenfors postulates for revision may likewise be conveniently formulated as follows:

---

[8] "Nossa primeira tarefa é mostrar que todas as funções de contração e revisão do tipo *partial meet* satisfazem aos postulados de Gärdenfors para contração e revisão. Lembramos (cf. [2][5] e [6][6,7]) que esses postulados podem ser convenientemente formulados como se segue: (-1) $K - x$ é uma teoria sempre que K é uma teoria (fechamento), (-2) $K-x \subseteq K$ (inclusão), (-3) Se $x \notin Cn(K)$, então $K-x=K$ (vacuidade), (-4) Se $x \notin Cn(\emptyset)$, então $x \notin Cn(K-x)$ (sucesso), (-5) Se $Cn(x)=Cn(y)$, então $K-x=K-y$ (preservação), (-6) $K\subseteq Cn((K-x)\cup\{x\})$ sempre que K é uma teoria (recuperação)".

(*1) K*x is always a theory

(*2) $x \in K^*x$

(*3) if $\neg x \notin Cn(K)$, then $K^*x=Cn(K\cup\{x\})$

(*4) If $\neg x \notin Cn(\emptyset)$, then K*x is consistent under Cn.

(*5) If $Cn(x)=Cn(y)$, then $K^*x=K^*y$

(*6) $(K^*x)\cap K=K - \neg x$, whenever K is a theory." [9]

(*1) estabelece que o resultado de uma revisão é uma teoria. Por (*2) temos que uma fórmula, irrestritamente, sempre pertence ao conjunto revisado por ela. (*3) institui que se a negação da fórmula não pertence à teoria de K então a revisão pela afirmação desta fórmula coincide com a união da teoria com a fórmula. Se a negação de uma fórmula não é uma tautologia, então a revisão pela afirmação da fórmula é consistente (não trivial), conforme (*4). Em (*5) temos que se duas fórmulas têm conseqüências lógicas equivalentes, então a contração é indiferente por uma ou por outra. E (*6) estabelece que se K é uma teoria, então a revisão por uma fórmula restrita à teoria é igual a contração da teoria original pela negação da fórmula.

A operação de expansão é a única operação que pode ser definida apenas por:

$K+x = C(K\cup\{x\})$.

[9] "Os postulados de Gärdenfors para revisão também podem ser convenientemente formulados como se segue: (*1) K*x é sempre uma teoria, (*2) $x \in K^*x$, (*3) Se $\neg x \notin Cn(K)$, então $K^*x=Cn(K\cup\{x\})$, (*4) Se $\neg x \notin Cn(\emptyset)$, então K*x é consistente sob Cn, (*5) Se $Cn(x)=Cn(y)$, então $K^*x=K^*y$, (*6) $(K^*x)\cap K=K - \neg x$, sempre que K é uma teoria.

Considerando a literatura após 1985, um dos livros mais referenciados sobre mudança de crença é [Gar88]. Neste livro, Gärdenfors apresenta a teoria para mudanças racionais de crenças, fornecendo as explicações para a existência de cada um dos postulados dentro dos critérios de racionalidade por ele adotado. Os conjuntos de postulados de [Gar88] são comumente tomados na literatura como os postulados originais de AGM. Seguiremos aqui esta tradição, e para facilitar a leitura apresentamos a seguir os postulados da referência acima.

EXPANSÃO:

$K + x = C(K \cup \{x\})$

A expansão é, simplesmente, o ato de se incorporar uma informação e realizar o seu fechamento lógico.

CONTRAÇÃO:

(K-1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K-x é uma teoria fechada (*fechamento*)

(K-2) $K-x \subseteq K$ (*inclusão*)

(K-3) Se $x \notin K$, então $K-x=K$ (*vacuidade*)

(K-4) Se $\nvdash x$, então $x \notin K-x$ (*sucesso*)

(K-5) $K \subseteq K-x+x$ (*recuperação*)

(K-6) Se $\vdash x \leftrightarrow y$ então $K-x = K-y$ (*preservação*)

(K-1) estabelece que a operação de contração gera uma teoria fechada, enquanto (K-2) institui que o resultado de uma contração gera sempre um subconjunto da teoria original. Em (K-3), vemos que, se a informação a ser retirada não pertencia ao conjunto de crenças, então não há nada a ser modificado na teoria original.

(K-4) nos diz que , se a informação a ser retirada não é uma tautologia, então, ela não estará mais na teoria resultante da contração. (K-5) estabelece que uma teoria pode ser recuperada através da retirada de uma informação e sua posterior inclusão e (K-6) diz que se duas informações são logicamente equivalentes, a contração por uma ou por outra, produz a mesma teoria.

REVISÃO:

(K*1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K*x é uma teoria fechada (*fechamento*)

(K*2) $x \in K^*x$ (*sucesso*)

(K*3) $K^*x \subseteq K + x$ (*inclusão*)

(K*4) Se $\neg x \notin K$, então $K+ x \subseteq K * x$ (*preservação*)

(K*5) $K^*x = K_\perp$ se e somente se $\vdash \neg x$ (co*nsistência*)

(K*6) Se $\vdash x \leftrightarrow y$, então $K^*x=K^*y$ (*equivalência*)

O postulado (K*1) estabelece que o resultado da operação de revisão é uma teoria fechada, ou seja, K*x = Cn(K*x). (K*2) diz que a nova informação sempre está na teoria revisada por ela. (K*3) diz que a revisão é um subconjunto da expansão. Em (K*4) temos que, se a negação de uma informação não esta na teoria original, então, a revisão coincide com a expansão, ou seja, a revisão por uma fórmula que não gera contradição com o conjunto é simplesmente o ato de expansão do conjunto pela informação.(K*5) institui que a revisão gera uma teoria trivial então a negação da nova informação é uma tautologia (já que, por (K*2), a nova informação deve pertencer ao conjunto revisado). Em (K*6) temos o equivalente para (K-6).

As tabelas a seguir exibem os postulados apresentados para as operações de contração e revisão, respectivamente, em [AGM85] e os apresentados em [Gar88], para que possamos verificar mais rapidamente a relação entre as formas de caracterização dos postulados em ambas as referências.

Tabela 1: Postulados para contração em [AGM85] e [Gar88].

[AGM85]	[Gar88]
(-1) K - x é uma teoria se K é teoria	(K-1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K-x é uma teoria fechada
(-2) K-x ⊆ K	(K-2) K-x ⊆ K
(-3) Se x ∉ Cn(K), então K-x=K	(K-3) Se x ∉ K, então K-x=K
(-4) Se x ∉ Cn(∅), então x ∉ Cn(K-x)	(K-4) Se ⊬ x, então x ∉ K-x
(-5) Se Cn(x)=Cn(y), então K-x=K-y	(K-6) Se ⊢ x↔ y então K-x = K-y
(-6) K⊆ Cn((K-x)∪{x}) se K é uma teoria	(K-5) K ⊆ K-x +x

Tabela 2: Postulados para revisão em [AGM85] e [Gar88].

[AGM85]	[Gar88]
(*1) K*x é uma teoria.	(K*1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K*x é uma teoria fechada
(*2) x ∈ K*x	(K*2) x ∈ K*x
(*3) Se ¬x ∉ Cn(K), então K*x=Cn(K∪{x})	(K*4) Se ¬x ∉ K, então K+ x ⊆ K * x
(*4) Se ¬x ∉ Cn(∅), então K*x é consistente sob Cn.	(K*5) K*x =K$_{\perp}$ se e somente se ⊢ ¬x
(*5) Se Cn(x)=Cn(y), então K*x=K*y	(K*6) Se ⊢ x↔ y, então K*x=K*y
(*6) (K*x)∩ K=K - ¬x, se K é teoria.	-----
-----	(K*3) K*x ⊆ K + x

Apesar dos postulados em ambas referências estipularem praticamente as mesmas regras para o processo de mudança racional de crença, e de estarmos adotando os postulados de [Gar88] como referência, não podemos deixar de observar que os postulados apresentados em [AGM85] são muito mais genéricos do que os postulados de [Gar88], pois independem de uma linguagem específica.

No caso da revisão observa-se que (*6) foi substituído por (K*3), liberando a operação de revisão de uma relação explícita com a operação de contração. Os postulados (K*3) e (K*4) implicam em (*3), enquanto (*6) representa, como veremos, a chamada identidade de Harper. Os postulados (*4) e (K*5) instituem a mesma propriedade, como veremos a seguir. Na verdade, (*4) é decorrente de (K*5), conhecido como **consistência da revisão**, o qual será objeto do nosso estudo, quando lembramos que este postulado pode ser separado em *Se* $K^*x = K_\perp$, *então* $\vdash \neg x$, mais, *Se* $\vdash \neg x$ *então* $K^*x = K_\perp$. Dado a existência do postulado sucesso da revisão e da monotonicidade da lógica clássica, podemos descartar a segunda parte, restando apenas: *Se* $K^*x = K_\perp$, *então* $\vdash \neg x$. A contraposição lógica desta sentença é dada por: Se $\nvdash \neg x$, *então* $K^*x \neq K_\perp$, equivalendo à (*4).

Como sabemos, na Lógica Clássica se a negação de uma informação não é uma tautologia, então ou a sua afirmação é uma informação contingente ou uma tautologia. Caso esta afirmação seja uma tautologia, então a revisão não deve alterar a teoria original, ou no mínimo não trivializar a teoria; e se for contingente deve haver alguma maneira de se acrescentar esta informação à teoria sem que haja a sua trivialização. Parece intuitivo considerar que tal postulado está tratando apenas de teorias consistentes, no sentido de que sempre há uma forma de fazer com que a teoria resultante da revisão seja uma teoria consistente, se a informação da revisão não for uma contradição, e se a própria teoria original for consistente.

Uma outra interpretação para (K*5) é encontrada (ver [Han99]) conforme:

*Se x é consistente, então K*x é consistente.*

Esta equivalência lógica decorre do fato de que *x consistente*, i.e., $Cn(\{x\}) \neq K_\perp$, implica em $\neg x \notin Cn(\emptyset)$, pois se $\neg x \in Cn(\emptyset)$ teríamos que $\neg x \in Cn(\{x\})$ e $x \in Cn(\{x\})$, ou seja, $Cn(\{x\}) = K_\perp$, o que nos levaria a um absurdo. Logo x consistente implica em $\neg x \notin Cn(\emptyset)$. Reciprocamente, $\neg x \notin Cn(\emptyset)$ implica em x consistente, ou x inconsistente implica em $\neg x \in Cn(\emptyset)$, pois, pela regra do corte, se $Cn(\{x\}) = K_\perp$, então $\neg x \in Cn(\{x\})$ e $\neg x \in Cn(\{\neg x\})$, ou seja $\neg x \in Cn(\emptyset)$. Logo, $\neg x \notin Cn(\emptyset)$ equivale a x consistente.

Assim, existe uma fórmula que não pertence a $Cn(\{x\})$, o que a torna uma fórmula consistente[10].

[10] O conceito de consistência pode ser diferente em outras abordagens.

O desejo de se obter um resultado consistente em qualquer instância, pode ser relacionado à máxima (lógica) de consistência tratada em [Rot01], pg 68[11]:

i) *As crenças de um agente devem ser consistentes.*

Apesar de desejável que as crenças, ou o conjunto de crenças de uma teoria sejam consistentes, não é sempre assim que isto acontece, e no caso em questão, esta “falha” é representada justamente pelo conjunto trivial ou conjunto de todas as crenças. Apesar da geração do conjunto de todas as crenças depender da propriedade de trivialização de uma teoria dentro da lógica, e esta propriedade variar de lógica para lógica, uma vez obtido, o conjunto trivial é único. Em termos teóricos, parece que, mais idealizado do que se tratar de teorias fechadas logicamente, dentro da lógica clássica, para representar as crenças de um agente racional, é o fato de se adotar apenas as teorias consistentes, como representantes de tal possibilidade. Impor, inicialmente, que todos conjuntos de crenças sejam consistentes, acarreta na inacessibilidade à teoria trivial por estes postulados de mudança de crença.

[11] Do original em inglês: i) *The beliefs of an agent should be consistent.*

Considerando-se, ainda que, em AGM não há restrição explícita à adoção do conjunto de todas as crenças como um conjunto de crenças para a teoria, ao tomarmos K por $K_\perp$, obteremos a seguinte forma para a consistência da revisão:

Se $\neg x \notin Cn(\emptyset)$, então $K_\perp{*}x$ é consistente sob Cn.

Neste caso teremos uma forma de tornar consistente uma teoria trivial, pois como na LPC os conceitos de consistência e não-contradição se confundem, uma teoria consistente é o mesmo que uma teoria livre de contradições, ou seja, não trivial. Podemos contudo questionar se é factível que ($K_\perp{*}x$) seja consistente sob o fechamento lógico, em termos teóricos. Por outro lado, se isto é necessário, é muito mais esperado que o seja em termos teóricos do que em termos práticos ([KM92]).

Uma outra questão a se considerar decorre da definição do que vem a ser uma operação de revisão de crença ou da sua necessidade. Comumente a literatura especializada coloca que a revisão decorre da necessidade de se manter a consistência de um conjunto quando uma **nova informação** deve ser adicionada ao conjunto, mas como esta informação é inconsistente com este conjunto alguma alteração deve ser realizada no conjunto original para se acomodar esta nova informação, se possível (ver [Rot01][12]); ou então do fato de que uma informação ao ser contraditória a alguma informação do conjunto gera a necessidade de revisão pelo mesmo motivo apontado acima (ver, [Gar88][13]). No caso do postulado da consistência da revisão, não podemos assumir tais posturas, pois nenhuma informação é realmente nova para o conjunto de todas as fórmulas, ao mesmo tempo em que qualquer informação é contraditória com várias informações do conjunto de todas as fórmulas.

É importante notar que nas referências citadas em [AGM85], apenas em [Gar84], página 140, aparece o postulado da consistência, o qual podemos traduzir por: *(10) Se* $\neg x$ *não é logicamente válido, então* $K^*x \neq K_\perp$. E nenhuma discussão posterior é fornecida.

Como mencionamos anteriormente, esta sentença caracteriza explicitamente a operação de revisão como uma operação corretiva, pois se tomarmos K como $K_\perp$ teremos que, para qualquer fórmula consistente o resultado da revisão por esta fórmula também é consistente.

[12] Em [Rot01] página 72: "In a *belief revision*, a new sentence that is typically inconsistent with a belief set K is added, but in order that the resulting system be consistent..."
[13] Em [Gar88], página 52: "The next type of belief change is when a sentence A, which represents the epistemic input to K, *contradicts* the beliefs that are already in K."

Antes de continuarmos o nosso estudo sobre AGM, apresentamos na próxima tabela uma comparação sobre os resultados possíveis para uma teoria sobre mudança racional de crença, considerando o tipo de teoria e de fórmula que podemos trabalhar para as operações de expansão, revisão e contração. Na tabela que se segue obtemos apenas os resultados válidos para AGM. Este tipo de apresentação de dado permite uma visão mais global dos resultados que podem ser obtidos em uma teoria sobre mudança racional de crença, como AGM.

Tabela 3: Possibilidades para a Mudança de Crença.

OPER.	Tipo da TEORIA FECHADA	CONDIÇÃO	INFORMAÇÃO NÃO CONTRADITÓRIA	INFORMAÇÃO CONTRADITÓRIA
$+$	K	$x \in K$	$K + x = K$	$(K = K_{\perp})$ (1)
		$x \notin K$	$K \subseteq K+x$	$K+x= K_{\perp}$
	$K_{\perp}$	---	$K_{\perp} + x= K_{\perp}$	$K_{\perp}+ x = K_{\perp}$
*	K	$x \in K$	$K * x = K$	$(K = K_{\perp})$
		$x \notin K$	$K* x \subseteq K + x$ (2)	$K* x = K'$ (3) $K* x = K$ $K* x = K_{\perp}$
	$K_{\perp}$	---	$K_{\perp} * x= K_{\perp}$ (4) $K_{\perp} * x\neq K_{\perp}$	$K_{\perp} * x = K_{\perp}$ (5) $K_{\perp} * x= K$
$-$	K	$x \in K$	$K- x \subseteq K$	$(K = K_{\perp})$
		$x \notin K$	$K - x = K$	$K - x = K$
	$K_{\perp}$	---	$K_{\perp} - x \subseteq K_{\perp}$	$K_{\perp} - x \subseteq K$ (6)

(1) Por *default* assumimos que neste caso $K = K_{\perp}$, pois poderíamos também considerar que, na realidade, x não pertencia ao conjunto K.

(2) Observamos neste caso a real necessidade da operação de revisão, ou seja, uma informação pode ser não trivializante com relação à lógica que governa o

agente, mas pode ser inconsistente com relação a alguma informação já existente neste conjunto. Como exemplo, considere uma teoria, a linguagem com apenas duas variáveis, **p** e **q**, representada apenas pela classe das combinações vero-funcionais possíveis, dentro da lógica Clássica, dada por:

$$C(\{p \wedge q\})=\{ p \wedge q, p, q, p \leftrightarrow q, p \vee q, p \rightarrow q, q \rightarrow p, \top\}$$

Uma revisão desta teoria por uma fórmula do tipo $\neg q$, poderia resultar em:

$$C(C(\{p \wedge q\})*\neg q) = \{p, q \rightarrow p, p \vee q, \top\}$$

(3) Neste caso podemos assumir que:

a) Se a fórmula que causa a revisão deve estar sempre no conjunto resultante ((K*2) é válido), então a revisão pode gerar um conjunto novo não trivial K', se a lógica do agente for alterada, por exemplo. Esta nova lógica deve suportar como não-trivializante a informação trivializante, no caso contraditória, para a lógica original.

b) Nesta alternativa a fórmula **x** não é incorporada ao resultado da revisão. Obviamente, neste caso, o postulado (K*2) deve ser modificado.

c) o resultado da revisão é o $K_\perp$, conforme descrito pelos postulados.

(4) Neste caso podemos adotar que ou vale o *critério da economia da informação incorporada* (definido na página 41), ou que poderíamos ter uma outra teoria resultante não trivial, conforme estipula (K*5) de AGM.

(5) Da mesma forma que podemos acreditar na correção de uma teoria trivial por uma informação não-trivial, poderíamos incluir a correção pela informação contraditória.

(6) Se considerarmos que a revisão deve corrigir uma teoria trivial então devemos considerar que a contração também deve corrigir uma teoria trivial, através da retirada de sua inconsistência (conforme AGM). Caso contrário, o resultado será o próprio $K_{\perp}$.

A tabela 4, a seguir, apresenta somente os resultados coerentes com os postulados de AGM. Evidentemente, nem todos os resultados possíveis apresentados são compatíveis entre si. Como verificamos, as propriedades escolhidas devem representar um conjunto consistente.

Tabela 4: Resultados coerentes com postulados originais.

OPER.	Tipo da TEORIA FECHADA	CONDIÇÃO	INFORMAÇÃO NÃO CONTRADITÓRIA	INFORMAÇÃO CONTRADITÓRIA
+	K	$x \in K$	$K + x = K$	$K = K_\perp$
		$x \notin K$	$K \subseteq K+x$	$K+x= K_\perp$
	$K_\perp$	---	$K_\perp + x= K_\perp$	$K_\perp+ x = K_\perp$
*	K	$x \in K$	$K * x = K$	$K = K_\perp$
		$x \notin K$	$K* x \subseteq K + x$	$K* x = K_\perp$
	$K_\perp$	---	$K_\perp * x \neq K_\perp$	$K_\perp * x = K_\perp$
–	K	$x \in K$	$K- x \subseteq K$	$K = K_\perp$
		$x \notin K$	$K - x = K$	$K - x = K$
	$K_\perp$	---	$K_\perp - x \subseteq K_\perp$	$K_\perp - x \neq K_\perp$

Observemos que nesta tabela os casos (3) e (5) ficam reduzidos ao caso onde o resultado é uma teoria consistente.

1.2 – O CRITÉRIO DA ECONOMIA DE INFORMAÇÃO INCORPORADA.

Em contraste com a propriedade corretiva que podemos considerar embutida no postulado de consistência da revisão, está o critério, citado aqui como *critério da economia da informação incorporada* – CEII, mencionado na seção anterior. O critério em análise será denotado desta forma, visto que ele é comumente designado apenas por *critério da economia da informação*, já que abordaremos um caso bastante específico, que é o caso da operação de revisão de crença quando a informação que causa a revisão já pertence à própria teoria a ser revisada.

Em [Gar84][14], página 136, este critério, citado como *criterion of informational economy*, estabelece, basicamente, que: devemos manter o máximo possível da nossas velhas crenças, sempre que, por um motivo ou outro, mudamos algumas crenças.

Em [Rot01], página 72, este critério é citado como sendo sustentado dentro da doutrina do conservadorismo da epistemologia, tendo a *máxima da mínima mutilação* de Williard V. O. Quine, como sua mais preeminente versão.

---

[14] [Gar84, pg.136]: "There is an internal criterion, here called the *criterion of informational economy*, that will be the focus of this article. The basic idea is that when we, for some reason or other, change our beliefs we want to retain as much as possible of our old beliefs. Information is in general not gratuitous and unnecessary losses of information are therefore to be avoided."

Mais adiante, pg. 73, Rott apresenta a máxima da mínima mutilação como uma máxima para mudança de crença; deixando claro, contudo, que o seu livro não tem esta máxima dentro do seu principal enfoque:

ii) *A quantidade de informação perdida em uma mudança de crença deve ser mínima.*

No texto, contudo Rott considera que esta máxima está relacionada à operação de contração, apenas.

Da forma como apresentada, pode-se mesmo pensar que a máxima acima está relacionada apenas à operação de contração, principalmente por que está sustentada dentro do conceito de perda de informação.

Manter-se o máximo possível um estado estabelecido originalmente pode diferir do fato de se minimizar um processo de perda de informação, se entendermos que no primeiro podemos ter a opção de, simplesmente, não se alterar em nada o "estado originalmente estabelecido", e esta é uma opção prioritária; enquanto no segundo, a condição de que alguma informação será perdida parece, necessariamente, já ter sido estabelecida e o princípio rege que esta perda seja a mínima possível. A distinção entre um e outro pode ser melhor observada quando consideramos o caso singular do conjunto de todas as crenças. Ao adotar a postura de que este conjunto não é alterado por nenhuma mudança racional de crença, o critério da economia da informação, parece ser atendido, enquanto ao adotar que é possível tornar este conjunto um conjunto consistente através da contração do que o torna trivial, então a máxima da mínima mutilação é que parece estar mais em concordância com este processo.

Muito se discute sobre a importância ou não de se adotar CEII dentro de uma teoria de revisão de crenças (ver, [Rot01]). Pode-se discutir também a própria concepção e formas de interpretação para este critério. Contudo, neste estudo vamos falar de uma forma de economia da informação mais simples e específica que diz respeito apenas àquelas informações ou crenças que já estão presentes na teoria em análise, por isto tratamos o *critério da economia da informação*, formulado por Gärdenfors, especificamente por critério da economia da informação incorporada - CEII.

Definição 1: ***Critério da economia da informação incorporada - CEII.***

A mudança racional de crença, através da expansão ou revisão, realizada por uma crença já incorporada a uma teoria, não altera o estado original do agente.

Dizemos que este critério é mais simples porque está relacionado apenas àquelas crenças que já estão dentro de um determinado conjunto ou teoria; e específico porque determinada a inalterabilidade do conjunto perante operações que podem adicionar a mesma crença que ele já contém.

No caso das operações de AGM, este princípio tem as seguintes versões, para expansão e revisão:

Se $x \in K$, *então* $K=K+x$ (CEII para expansão)

Se $x \in K$, *então* $K=K^*x$ (CEII para revisão)

É curioso observar que adoção de CEII, como um postulado para a revisão, está presente em [Gar79]. Este artigo parece ser o primeiro no qual Gärdenfors apresenta as regras, ou postulados que governam uma mudança racional de crença. Cabe aqui salientar que a operação conhecida como revisão é denominada inicialmente como "contravening", que poderíamos traduzir por uma operação de *questionamento*, ou de *contravenção*. Esta operação, após as operações de expansão e contração, respectivamente, é descrita no texto como:

> "A third kind of change of belief is that one is sometimes forced to accept a belief in a proposition, the negation of which was accepted earlier. A typical example is when you are about to pay your bill at a restaurant and, at your great surprise, when you look into your wallet, you cannot find any money in it, although you had been completely certain that it contained enough money to pay the bill. The kind of change produced by such a proposition will here be called belief contravening change."[15]

Mais adiante, quatro postulados para a revisão da crença são introduzidos, lembrando-se inicialmente da existência da identidade de Levi, onde a revisão de uma informação é obtida através da contração da negação da informação e posterior expansão pela própria informação; como decorrentes desta

[15] "Um terceiro tipo de mudança de crença é aquela na qual algumas vezes somos forçados a aceitar a crença em uma proposição, cuja a negação já foi aceita anteriormente. Um exemplo típico é quando você vai pagar a sua conta num restaurante e, para sua surpresa, quando você olha na carteira não encontra dinheiro algum, embora você estivesse completamente certo de que havia dinheiro suficiente para pagar a conta. O tipo de mudança produzida por tal proposição será chamada de mudança contravencional de crença."

identidade e/ou de postulados anteriormente descritos para a expansão e contração[16]:

"(12) Se $\neg x \notin K$, então $K^* x = K+ x$

(13) $x \in K^* x$

(14) Se $x \in K$, então $K^* x = K$

(15) Se $\vdash x \leftrightarrow y$, então $K^* x = K^* y$"

Uma especial atenção deve ser dada a sentença (14) que descreve justamente o critério em análise.

Ao mesmo tempo em que CEII parece ser desejável na teoria de AGM, a adoção da primazia da crença sobre a teoria, conforme estipula o postulado sucesso (K*2), e da obtenção da consistência a qualquer custo, impossibilita que CEII seja uma sentença válida.

Observe que em CEII podemos adotar qualquer K e qualquer x. Assim temos: por CEII para revisão que, *Se x (consistente)* $\in K_\perp$*, então* $K_\perp * x = K_\perp$, e pelo postulado de consistência da revisão (K*5) que, *Se x é consistente, então* $K_\perp * x$ *é consistente*!

[16] No texto original a revisão de um conjunto de crença K por uma proposição A é denotada por K_A, assim como a expansão por K^+_A e a contração por K^-_A.

Em [Rot01], existe uma menção aos conflitos que podem ocorrer quando desejamos adotar, o que aqui tratamos especificamente por critério da economia de informação incorporada e de propriedade de consistência irrestrita, dentro de operações de mudança de crenças. Na página 74 lemos: “There is a fundamental tension between the static and the dynamic Constraints for belief change.” “Static and dynamic constraints” que traduziremos por restrições estáticas e dinâmicas, referem-se justamente às máximas i) e ii), respectivamente; e enquanto a primeira de certa forma requer que todo esforço necessário deva ser empregado para que se obtenha a consistência ao final de uma mudança de crença (de acordo com (K*5)), a segunda requer que a alteração perante qualquer mudança de crença deve ser a mínima necessária para acomodar a nova situação (de acordo com CEII).

Conforme descrito ainda em [Gar88], Isaac Levi, em 1977, formulou uma igualdade para a operação de revisão em função das operações de contração e expansão, legitimando que a mudança de crença pode ser realizada apenas por estas duas últimas funções. Esta identidade, chamada de Identidade de Levi, é dada por: [IL] $K^*x= (K-\neg x)+ x$

Da mesma forma, Harper, em 1977, formulou a Identidade de Harper, onde a operação de contração pode ser obtida a partir da operação de revisão. A identidade de Harper é definida por: [IH] $K-x=(K^* \neg x) \cap K$

A demonstração de que ambas as igualdades definem uma função inversa é realizada através da aplicação de uma identidade na outra, e vice-versa; sendo demonstrado previamente que as funções * e −, definidas em Levi e Harper, respectivamente, atendem aos postulados para revisão e contração em AGM.

Em [Gar88], página 54, observação (3.11), CEII é considerado como sendo uma conseqüência dos postulados para revisão e utilizado para demonstrar que a identidade de Levi pode ser definida a partir da identidade de Harper.

Como vimos, CEII não só não é conseqüência dos postulados para revisão, como é contraditório ao (K*5). Contudo, em [AGM85] e [Mak97], temos alguns teoremas[17], e definições, que relacionam as operações de * e − (além da operação de expansão) com as identidades de Levi e Harper, para AGM.

Definição 2 ([Mak87]): O operador de revisão a partir da contração, $\mathbb{R}(-)$.

Seja K uma teoria fechada. Então $\mathbb{R}$ é a função que para cada operador − (de contração) em K, $\mathbb{R}(-)$ é o operador para K tal que para todo x, $K(\mathbb{R}(-))x = (K - \neg x) + x$.

Definição 3 ([Mak87]): O operador de contração a partir da revisão, $\mathbb{C}(*)$.

Seja K uma teoria fechada. Então $\mathbb{C}$ é a função que para cada operador * (de revisão) em K, $\mathbb{C}(*)$ é o operador para K tal que para todo x, $K(\mathbb{C}(*))x = (K^* \neg x) \cap K$

[17] Uma demonstração minuciosa destes teoremas pode ser encontrada em [Han99], páginas 276 a 278.

Teorema 1 ([AGM85]): Seja K uma teoria logicamente fechada e - uma operação de contração para K que satisfaz aos postulados (K-2)-(K-4) e (K-6), então $\mathbb{R}(-)$ é um operador para K que satisfaz aos postulados (K*1)-(K*6).

Teorema 2 ([AGM85]): Seja K uma teoria logicamente fechada e * uma operação de revisão para K que satisfaz aos postulados (K*1),(K*2), (K*4)-(K*6), então $\mathbb{C}(*)$ é um operador para K que satisfaz aos postulados (K-1)-(K-6).

Conforme ressalta [Han99], página 277, os teoremas 1 e 2 permitem que se obtenha um operador de contração a partir de um operador de revisão e vice-versa. Contudo isto não é suficiente para que se possa trocar livremente entre contrações e revisões. Para tanto é necessário que $\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)) = *$ e $\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)) = -$. Estas propriedades são obtidas pelos teoremas 3 e 4.

Teorema 3 ([Mak87]): Seja K uma teoria logicamente fechada e - um operador para K que satisfaz aos postulados (K-1)-(K-3) e (K-5) e (K-6), então $\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)) = -$.

Teorema 4 ([Mak87]): Seja K uma teoria logicamente fechada e * uma operação de revisão para K que satisfaz aos postulados (K*1)-(K*3) e (K*6), então

$\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)) = *$.

1.3 - ECONOMIZAR E CORRIGIR: PODEM AMBOS CONVIVER CONISISTENTEMENTE EM UMA TEORIA?

Embora a teoria AGM permita, por um lado, tratar de processos de mudança de crença de forma bastante intuitiva e simples, assegurando que construções matemáticas ou modelos matemáticos sejam caracterizados de acordo com estes postulados, por outro lado AGM impossibilita que uma forma muito simples de economia de informação, ou de esforço, possa ser validada.
A questão que surge desta incompatibilidade é: será possível alterar o postulado (K*5), preservando-se uma forma que se permita falar sobre a consistência de teorias quando revisadas por informações consistentes e ao mesmo tempo tornando AGM consistente com o critério da economia da informação incorporada para revisão, sem que seja necessário se estabelecer condições de consistência para a teoria inicial?

Uma resposta para a questão pode ser obtida quando entendemos que existem outras formas de leitura para o postulado original da consistência da revisão. Inicialmente, observaremos que a leitura de (K*5) se faz por:

(K*5) (*Para qualquer K)* $K{*}x = K_{\perp}$ ***se e somente se*** $\vdash \neg x$

Pois ao considerarmos o quantificador universal, *para todo*, desta forma, ou seja, abrangendo toda a sentença que vem depois, obtemos a equivalência lógica, mencionada anteriormente: *se x é consistente então K*x é consistente*.

Quando efetuamos esta leitura e queremos adotar CEII, verificamos que para o conjunto trivial de crenças, ou o conjunto de todas as crenças, esta sentença não se aplica, pois $K_{\perp} * x = K_{\perp}$ é válido também, para qualquer x. Para compatibilizarmos CEII com um postulado que fale sobre a consistência da revisão podemos efetuar a seguinte leitura: se a revisão por uma crença de uma teoria qualquer leva à trivialização da teoria, é porque a crença que gera a revisão é uma contradição. Neste caso, a leitura da sentença acima deve ser dada por:

(K*'5) (***Para qualquer K, $K*x = K_{\perp}$) se e somente se $\vdash \neg x$.***

Observe que aqui o quantificador universal está relacionado apenas à condição inicial da equivalência ($K*x = K_{\perp}$), e não podemos mais realizar a degeneralização lógica.

Para separarmos a sentença (K*'5) em duas sentenças lógicas, temos[18]:

Se (para qualquer K, $K*x = K_{\perp}$) então $\vdash \neg x$, mais,

Se $\vdash \neg x$ então, (para qualquer K, $K*x = K_{\perp}$)

[18] Para consulta sobre as equivalências lógicas na linguagem de primeira ordem ver [Dal97].

Onde utilizamos os parênteses desta forma para evidenciar a influência do quantificador universal.

A segunda sentença ***Se*** $\vdash \neg x$ ***então, para qualquer K,*** $K^*x = K_\perp$, é logicamente equivalente à (***Para qualquer K***), ***se*** $\vdash \neg x$ ***então,*** $K^*x = K_\perp$, que, conforme vimos, decorre diretamente da trivialização da Lógica Clássica por uma contradição, ou inconsistência, e do postulado (K*2).

No caso da primeira sentença estamos restringindo a adoção de qualquer K para aqueles casos em que isto realmente acontece, desconsiderando como válido o caso em que K é o próprio $K_\perp$. Isto fica mais evidente ao tomarmos a contraposição lógica desta sentença, a qual é dada por:

Se $\nvdash \neg x$***, então, existe K,*** $K^*x \neq K_\perp$, ou,
Se x é consistente, então, existe K, tal que K*x é consistente.

A diferença, apesar de sutil, traz uma caracterização completamente diferente para a consistência da revisão, pois aqui a revisão perde a propriedade de correção de qualquer teoria.

Na sentença corretiva para revisão, observamos a equivalência em se dizer que basta existir uma teoria que se trivialize pela revisão para caracterizar a informação da revisão como contraditória ou inconsistente. Apesar desta leitura parecer bastante razoável, ela mascara o fato de que esta característica não se aplica ao conjunto de todas as fórmulas, pois $K_{\perp}*x= K_{\perp}$ não necessariamente poderia decorrer do fato de que x é contraditório, mas do próprio fato de que a teoria original é a teoria trivial.

Vamos considerar agora um novo conjunto de postulados para revisão formados por (K*1)-(K*4) e (K*6), mais (K*'5). Assim como efetuamos uma releitura de (K*5) para englobarmos CEII, precisamos, similarmente, alterar (K-4), visto que este postulado estabelece que os modelos para AGM realizem a correção de uma teoria trivial através da contração. Uma nova leitura para (K-4) é dada por:

(K-'4) ***Se, para qualquer K, $x \in K-x$, então $\vdash x$***

Equivalentemente, temos que (K-'4) pode ser lida como:

Se $\nvdash x$, então existe K tal que $x \notin K-x$.

Designaremos por **AGM∃** o conjunto de postulados para expansão, contração e revisão dados por:

AGM∃

EXPANSÃO:

(K+) $K+x = Cn(K \cup \{x\})$

CONTRAÇÃO:

(K-1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K-x é uma teoria fechada (*fechamento*)

(K-2) $K-x \subseteq K$ (*inclusão*)

(K-3) Se $x \notin K$, então K-x=K (*vacuidade*)

(K-'4) Se, para qualquer K, $x \in K-x$, então $\vdash x$, (*contingência*)

(K-5) $K \subseteq K-x+x$ (*recuperação*)

(K-6) Se $\vdash x \leftrightarrow y$ então K-x = K-y (*equivalência*)

REVISÃO:

(K*1) Para qualquer conjunto de crenças K e qualquer sentença x, K*x é uma teoria fechada (*fechamento*)

(K*2) $x \in K*x$ (*sucesso*)

(K*3) $K*x \subseteq K+x$ (*inclusão*)

(K*4) Se $\neg x \notin K$, então $K+x \subseteq K*x$ (*preservação*)

(K*'5) Se, para qualquer K, $K*x = K_{\perp}$, então $\vdash \neg x$ (*persistência*)

(K*6) Se $\vdash x \leftrightarrow y$, então K*x=K*y (*equivalência*)

Considerando que alteramos apenas (K*'5) e (K-'4) e que os demais postulados ficam inalterados, obtemos os seguintes teoremas de para AGM∃:

TEOREMA 5: SEJA K UMA TEORIA LOGICAMENTE FECHADA E – UMA OPERAÇÃO DE CONTRAÇÃO PARA K QUE SATISFAZ AOS POSTULADOS **(K-'4)** E **(K+)**, ENTÃO A SUA FUNÇÃO DE REVISÃO ASSOCIADA, **ℝ(-)**, SATISFAZ AO POSTULADO **(K*'5)**.

Demonstração. Observemos que se x é consistente, então ¬x não é uma tautologia e por (K-'4) temos que existe K tal que ¬x ∉ K-¬x. (Pense em K=Cn({x}), por exemplo.)

Conseqüentemente, ¬x ∉ K-¬x + x, pois caso contrário, ¬x ∈ K-¬x + x e (pela inclusão tarskiana) ¬x ∈ K-¬x + ¬x. Usando a regra do corte teríamos que ¬x ∈ K-¬x, contrariando a nossa hipótese. Logo, existe K tal que ¬x ∉ K-¬x + x. Como K-¬x + x= K*x, então existe K*x consistente, ou seja, existe Kℝ(-)x consistente.■

TEOREMA 6: SEJA K UMA TEORIA LOGICAMENTE FECHADA E * UMA OPERAÇÃO DE REVISÃO PARA K QUE SATISFAZ AO POSTULADO **(K*'5)**, ENTÃO A SUA FUNÇÃO DE CONTRAÇÃO ASSOCIADA, **ℂ(*)**, SATISFAZ AO POSTULADO **(K-'4)**.

Demonstração. Observemos que se x não é uma tautologia, então ¬x é consistente e por (K*'5) temos que existe K tal que K*¬x é consistente.

Logo, $x \notin K^*\neg x$, pois caso pertencesse, pelo postulado sucesso da revisão x e ¬x pertenceriam a $K^*\neg x$, que não seria mais consistente. Como $x \notin K^*\neg x$ temos que, existe K tal que $x \notin K^*\neg x \cap K$, ou seja, existe K, tal que
$x \notin K\mathbb{C}(*)x$.■

Vale notar que os teoremas 3 e 4 continuam valendo, pois (K*'5) e (K-'4) não são utilizados em suas demonstrações. Assim, os operadores $\mathbb{R}(-)$ e $\mathbb{C}(*)$, definidos a partir da identidade de Levi e Harper, respectivamente, são interdefiníveis em AGM∃, isto é, $\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)) = *$ e $\mathbb{C}(\mathbb{R}(-) = -$. Como conseqüência, não há mais razões para se escolher AGM em detrimento de AGM∃, se desejamos manter as identidades de Levi e Harper. Além disto, se a adoção de CEII é imprescindível, a escolha recai necessariamente sobre AGM∃.

É importante notar que estamos buscando uma teoria que possa aceitar as propriedades ditadas por (K*5) ou CEII em seus modelos, utilizando-se não só, e apenas, de recursos lógicos, mas recursos lógicos que permitam manter a estrutura original de AGM para expressar ou estabelecer conceitos sobre a questão da consistência na operação de revisão. Verificamos que (K*'5) de AGM∃ não impõe mais que a propriedade de correção de qualquer teoria seja, necessariamente, adotada. Mas o que garante que desta forma estamos construindo uma teoria consistente com CEII? Uma forma de se mostrar que a operação de revisão de AGM∃ e CEII são consistentes é acharmos um modelo para ambos. Como veremos no próximo teorema, a operação de revisão de AGM∃ é consistente com CEII.

TEOREMA 7: A OPERAÇÃO DE REVISÃO DE AGM∃ É CONSISTENTE COM CEII PARA REVISÃO.

Demonstração. Para mostrar que a operação de revisão de AGM∃ é consistente com CEII, para revisão, vamos considerar o seguinte modelo para a contração de AGM∃.

$$K-'x = \begin{cases} K_{\perp} & \text{se } K \text{ é trivial} \\ Cn(K|\{x\}) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde $K|\{x\}$ significa a diferença entre os dois conjuntos. Para mostrar que este modelo é consistente com AGM∃, temos:

(K-1) *Fechamento*: tanto $K_{\perp}$ como $Cn(K|\{x\})$ são teorias logicamente fechadas.

(K-2) *Inclusão*: para $K_{\perp}$ temos que $K_{\perp} \subseteq K_{\perp}$. Para $Cn(K|\{x\})$ temos que nos dois casos, x sendo tautologia ou x sendo apenas consistente, e pela definição de diferença de conjuntos, $Cn(K|\{x\}) \subseteq K$.

(K-3) *Vacuidade*: se $x \notin K$, então $Cn(K|\{x\}) = K$.

(K-'4) *Contingência*: se x não é tautologia, e supondo que x é uma contradição, então existe K -' x = Cn(K|{⊥}). Considere K=Cn({¬x}) temos $K \neq K_\perp$ e x ∉ K. Logo, Cn(Cn({¬x}) |{⊥}) = Cn({¬x}), ou seja, existe K tal que x ∉ K-'x.
Caso x seja contigente, pelo mesmo argumento anterior teremos que Cn(Cn({¬x})|{x}) = Cn({¬x}).

(K-5) *Recuperação*: Admitindo que x∈ K, temos que:

a) K é trivial: temos obviamente que $K_\perp \subseteq Cn(K_\perp \cup \{x\})$.
b) No outro caso queremos mostrar que K ⊆ Cn((Cn(K|{x})) ∪ {x}). Vamos considerar que todo y ∈ K também é elemento de Cn((Cn(K|{x})) ∪ {x}). Primeiro supomos que y ∈ K e se y ∈ Cn(K|{x}), então y ∈ K e y ∈ Cn((Cn(K|{x}))∪{x}), para todo y. Vamos supor agora que y ∉ Cn(K|{x}), mas como y ∈ K, então y ∈ Cn((K|{x}) ∪ {x}), que é o próprio K. Como K|{x}⊆ Cn(K|{x}) temos que y ∈ Cn((Cn(K|{x})) ∪ {x}).

(K-6) *Equivalência*: supondo que x↔ y ∈ Cn(∅), então temos dois casos a analisar, para K consistente:

a) x ∈ K. Como x↔ y ∈ Cn(∅), temos que y ∈ K. Cn((K|{x})= K pois y ∈ K. Por outro lado, Cn((K|{y})= K, pois x ∈ K. Logo Cn((K|{x})= Cn((K|{y}).

b) x ∉ K. Como x↔ y ∈ Cn(∅), temos que y ∉ K. Por (K-3) obtemos que Cn((K|{x})= Cn((K|{y}) que é o próprio K.

Observamos agora que se este modelo atende a contração de AGM∃, então pela identidade de Levi temos que a revisão também atende a este modelo. Ou ainda:

$$K^{*'}x = \begin{cases} K_{\perp} & \text{se } K \text{ é trivial} \\ Cn((Cn(K|\{\neg x\})) \cup \{x\}) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para mostrar que este modelo é consistente com CEII para revisão, temos:

Se $x \in K$, então $K^{*'}x = K$.

Se K é trivial, então $x \in K_{\perp}$, e $K_{\perp}{}^{*'}x = K_{\perp}$

Se K é consistente e $x \in K$, então $K^{*'}x = Cn((Cn(K|\{\neg x\})) \cup \{x\})$

Mas, neste caso, $Cn(K|\{\neg x\})=Cn(K)$

Logo, Se $x \in K$, então $K^{*'}x = K$. ■

Este modelo não poderia ser um modelo para AGM já que (K-4) diz que se x não é uma tautologia então x não pertence a K-x, mesmo que K seja o conjunto de todas as fórmulas.

Se por um lado AGM∃ permite que uma construção bastante simples e intuitiva seja válida, por outro lado não podemos deixar de mencionar que esta construção nos mostra que AGM∃ pode aceitar construções inoperantes para a contração de crenças diretas, ou seja, crenças que aparecem por causa do fechamento lógico. Considere $K=Cn(\{w, w\rightarrow y\})$ e observe que $K-y=K$! Pois o fechamento lógico recuperará y. Neste sentido os postulados de AGM∃ são fracos, mas não poderiam deixar de o ser, visto que a proposta é ter uma teoria que possa aceitar construções que viabilizem os conceitos estipulados por (K*5) ou CEII, sem contudo ser uma teoria trivial.

OBSERVAÇÃO 1: TODO O MODELO PARA **AGM** É MODELO PARA **AGM∃**, MAS NÃO AO CONTRÁRIO.

Demonstração. Primeiro vamos observar que podemos considerar AGM e AGM∃ como duas teorias, compostas pelos seguintes conjunto de axiomas, respectivamente, para contração, Ax- = {-1,-2,-3,-4,-5,-6} e
Ax-'={-1,-2,-3,-'4,-5,-6}, e para revisão, Ax* = {*1,*2,*3,*4,*5,*6} e
Ax*'= {*1,*2,*3,*4,*'5,*6}. A relação entre estes axiomas é dada por: -4 ⇒-'4 e *5 ⇒*'5, sendo que todos os demais axiomas permanecessem iguais. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura que satisfaz aos axiomas de AGM tal que: $\mathfrak{A} \models$ -4 e $\mathfrak{A} \models$ *5. Logo, temos que: $\mathfrak{A} \models$ -'4 e $\mathfrak{A} \models$ *'5. Logo, todos os modelos para AGM são modelos para AGM∃.■

Assim, AGM∃, como AGM, também admite um modelo para a operação de revisão bastante radical, como por exemplo K*x=Cn({x}).

Voltando a questão do nosso item: “economizar e corrigir: podem ambos conviver consistentemente em uma teoria?”, a resposta é NÃO (ambos são contraditórios), para uma teoria consistente. Contudo, temos uma teoria que pode conviver com um ou com outro, consistentemente, separados.

1.4. UMA OUTRA SOLUÇÃO...

Uma outra solução para que uma teoria tipo AGM possa incorporar CEII sem ser contraditória é a substituição de (K*5), conforme descrito em [CCC??], por[19]:

(K*5') *Se* $\nvdash \neg x$ *e* $K \neq K_{\perp}$, *então* $K^{*}x \neq K_{\perp}$

Neste caso, estamos explicitamente mencionando que o conjunto de crenças da operação de revisão é um conjunto não trivial, e, portanto, a propriedade de correção de qualquer teoria não vale mais.
A teoria obtida da substituição de (K*5) por (K*5'), sem se alterar nenhum postulado para a contração, foi designada, na referência supracitada, de AGM*. Observe que em AGM* há restrições para a utilização das identidades de Levi e Harper, pois Harper não vale para $K= K_{\perp}$ e x uma fórmula que não é uma tautologia; enquanto que Levi não pode ser aplicada para x consistente e $K= K_{\perp}$. Portanto, se quisermos conservar a relação entre as identidades de Levi e Harper, esta solução não é a mais apropriada.

Uma característica outra de AGM* decorre do fato de estabelecer a contração como uma operação mais poderosa que a operação de revisão. Note que a

[19] Esta solução foi-me apresentada, também, pelo próprio Peter Gärdenfors, através de uma troca informal de *e-mails*.

contração é capaz de tornar não trivial um conjunto trivial, através da retirada de suas contradições, enquanto que a revisão não é capaz de tal procedimento.

Faço uma observação pessoal, contudo, no sentido de acreditar que a operação de contração parece ser muito mais decorrente da necessidade de um processo de revisão, do que ao contrário. A contração como processo isolado torna-se mais fundamental apenas quando pensamos neste caso extremo, i.e. o de lidar com a teoria trivial. Até mesmo quando estamos lidando com processos estritamente técnicos, como o de se apagar um dado de um determinado arquivo, este ato parece ser decorrente na entrada, ou recebimento, de uma informação anterior de que aquele dado não era mais necessário.

1.5. UMA OBSERVAÇÃO: A DEPENDÊNCIA DA TEORIA DA LÓGICA.

Quando falamos em teorias logicamente fechadas devemos nos lembrar que a existência destas não pode anteceder à lógica por sua própria formação. Contudo, podemos pensar, hipoteticamente ou não, em situações nas quais dada uma determinada teoria, como um conjunto de informações, do qual não sabemos inicialmente de qual lógica esta advém. Ainda assim, neste caso, não poderíamos gerar a lógica, que no caso de AGM é proposicional, através de uma teoria epistêmica, conforme afirma [Gar88], página 3: "As a first aplication in the second part of the book, I show how *propositional logic* can be generated from a theory of epistemic dynamics.[20]" Poderíamos, talvez buscar alguns dos preceitos lógicos que determinaram esta teoria, mas como veremos neste estudo, seja a teoria AGM, seja a teoria AGM∃, ambas podem ser aplicadas a uma classe de lógicas, incluindo lógicas paraconsistentes. Além disto, a descoberta de alguns esquemas de axiomas de uma determinada lógica não revela, necessariamente, objetos de estudos muito mais profundos relacionados a uma lógica, como sua corretude e completude em relação a uma determinada semântica.

Parece que, a pretensão de se investigar os preceitos lógicos que governam uma teoria através de postulados para uma mudança racional de crença incorpora a

[20] Apesar de não definido explicitamente no texto, o termo *theory of epistemic dynamics* pode ser entendido como uma teoria de mudança de crença.

tarefa de se achar a origem da existência dos próprios postulados. Este processo pode ser bastante útil no caso de amnésia ou de situações onde necessitamos encaixar um conjunto de crenças desconhecido dentro de uma perspectiva lógica, seja esta qual for, desde que possa justificar a teoria como não trivial. Este passo, contudo, ainda que possível, não garante que se determine qualquer lógica, mas somente a existência de uma apropriada.

1.6. OBSERVAÇÕES FINAIS.

A teoria AGM estabelece critérios que devem ser atendidos quando um agente efetua uma mudança racional de crença, através de uma das operações de expansão, revisão e contração.

A análise apresentada neste capítulo sobre a teoria AGM para mudança racional de crença teve como objetivo elucidar os seguintes aspectos:

1. Não existe apenas uma simples tensão entre a característica de correção de todas as teorias, inclusive a trivial, e um princípio específico de economia de informação, aqui designado por CEII para revisão. Existe mesmo uma inconsistência entre ambos. A adoção de um como postulado, como é o caso de AGM, impede que qualquer modelo que valide o outro seja adotado.

2. O princípio CEII foi considerado como um processo importante ou, pelo menos desejável, na elaboração dos postulados de Gärdenfors, visto a sua existência em referências anteriores ao [AGM85] e sua menção, equivocada, como sendo uma sentença decorrente dos próprios postulados.

3. Como o conjunto de todas as fórmulas não é o enfoque principal de AGM, (K*5) poderia estar se referindo especificamente aos conjuntos

consistentes, mas uma necessidade de interpretação extra-lingüística para qualquer postulado, cairia no duvidoso, sem efeito para uma análise formal e matemática sobre o assunto.

4. AGM∃ é um tipo de solução, e não a única, que permite que modelos para CEII possam ser adotados em conjunto com os seus postulados.

5. É importante salientar, contudo, que talvez AGM∃ possa ter muitos modelos matemáticos para mudança racional de crença. Ao mesmo tempo podemos considerá-la mais interessante, pelo fato de se conseguir conciliar tantos modelos em uma teoria que não é trivial.

6. Outras teorias podem ser formuladas dentro de uma (meta)linguagem de primeira ordem, simplesmente alterando-se a abrangência dos quantificadores.

7. As sentenças (K*5) e CEII para revisão não são conseqüências de AGM∃, mas podem ser adicionadas à teoria, separadamente, conforme o objetivo a ser alcançado no processo de mudança racional de crença.

8. A demonstração de que as identidades de Levi e Harper, uma vez satisfazendo aos postulados de AGM, são interdefiníveis não pode utilizar CEII para revisão.

9. AGM∃ aceita todos os modelos (construções) matemáticas, de AGM e Levi e Harper continuam sendo interdefiníveis.

No próximo capítulo apresentaremos um processo para a formalização dos postulados de AGM∃, através de uma estrutura bi-sortida de primeira ordem. A escolha certa da linguagem e da interpretação para a estrutura adotada permitirá que todos os teoremas conhecidos na metalinguagem para os postulados originais, que estão de acordo com as propriedades da linguagem de primeira ordem, devam ser demonstrados dentro da formalização apresentada. A formalização permitirá não só a confirmação dos resultados apresentados neste capítulo, como possibilitará a extensão dos conceitos envolvidos na formação dos postulados para LPC, para outras lógicas que não esta.

2. UMA FORMALIZAÇÃO PARA AGM∃.

"Quanto a mim estas dificuldades sugerem-me a possibilidade seguinte: cada linguagem tem, como o Sr. Wittgenstein diz, uma estrutura a respeito da qual, na linguagem, nada pode ser dito; mas pode haver uma outra linguagem, que se ocupe da estrutura da primeira, e que tenha por sua vez uma nova estrutura - e para esta hierarquia não existe um limite."

Bertrand Russel. *Inrodução* ao *Tratactus Logico-Philosophicus* de Ludwig Wittgenstein.

2.1. LINGUAGENS E ESTRUTURAS

A formalização dos postulados de AGM∃ será desenvolvida dentro dos conceitos apresentados em [CC02], onde uma estrutura bi-sortida de primeira ordem é utilizada para que a lógica possa englobar conceitos extra-lógicos e utilizar métodos de análise da teoria de modelos, tornando-se uma ferramenta engenhosa também para a investigação dos requisitos mínimos que uma lógica deve ter para atender aos postulados de mudança de crença.

Podemos entender a teoria estudada em [CC02] como uma teoria de primeira ordem que agrega os requisitos mínimos para que possamos expressar as propriedades de conjuntos.

2.1.1 PRELIMINARES

POR QUE PRIMEIRA ORDEM?

A utilização de uma metalinguagem de primeira ordem permite que os axiomas possam expressar propriedades da linguagem proposicional, a qual será nosso objeto de estudo. A linguagem de primeira ordem - LCPO, com igualdade e substituição, será considerada com os quatros conectivos primitivos usuais ($\rightarrow, \neg, \vee, \wedge$), e os quantificadores universal e existencial, $\forall, \exists$, respectivamente. O símbolo de equivalência lógica $\leftrightarrow$, como usual, indica o caso de implicação bilateral.

POR QUE UMA ESTRUTURA BI-SORTIDA?

Estruturas matemáticas têm como um de seus elementos o que chamamos de domínio (ou universo), que representa o lugar onde estão os elementos que iremos trabalhar. Caso a estrutura possua mais de um domínio, ela é dita multi-sortida. No nosso caso, a estrutura tem dois domínios: um para fórmulas e outro para conjunto de fórmulas, e, portanto, bi-sortida. Uma estrutura bi-sortida permite que se “fale” sobre ambos domínios e sobre a interação entre eles. Como revisão de crenças discursa sobre sentenças, ou fórmulas, em um universo de sentenças, a estrutura bi-sortida é a mais apropriada para tratar o assunto.

POR QUE UMA ESTRUTURA?

Uma estrutura pode ser considerada como um “espaço em aberto”, o que a torna muito apropriada para que se conecte conceitos lógicos com os utilizados por outras áreas, como os de Teoria de Conjuntos.
Outros elementos da estrutura são funções, relações e constantes, representadas por seus respectivos símbolos.
Uma vez estabelecidos os universos de trabalho, podemos pensar nas funções e relações como as ferramentas necessárias para se trabalhar com os elementos dos domínios. Estas ferramentas serão utilizadas de forma a permitir a melhor manipulação dos elementos, e conseqüentemente a se atingir o objetivo almejado.
As constantes, como sempre são invariáveis e uma vez definidas permanecem com o seu valou inalterado.

A linguagem associada à estrutura é, na verdade, uma extensão da linguagem de primeira ordem, visto que ela tem conjunto de domínios, de relações, de funções e de constantes como seus elementos. É deste conjunto que retiramos os símbolos para representar cada um destes elementos na estrutura. No nosso caso, se a linguagem for mais estendida para conter outros símbolos, então estes também poderão ser parte da estrutura. Desta forma, ambas, linguagem e estrutura, andam lado a lado. Ambas podem ser estendidas o quanto quisermos, mas, na prática, ambas devem ser otimizadas para representar exatamente o que precisamos.

Esta linguagem, à qual a estrutura deve obedecer, é chamada de metalinguagem, já que ela irá descrever o objeto, ou seja, a linguagem proposicional.

Por fim, é importante notar que a linguagem proposicional não necessariamente precisa seguir a metalingaguem clássica. Justamente o que procuramos são as condições mínimas da linguagem proposicional, nas quais podem estar contida em uma quantidade diversa de lógicas. Podemos visualizar este processo como o de uma observação "conservadora" a respeito de processos abertos.

Nas definições que se seguem tentamos seguir, sempre que possível, as definições encontradas em [CC02]. A maior diferença entre aquela abordagem e a abordagem utilizada neste trabalho decorre do fato de que no primeiro optou-se pela utilização do símbolo de predicado $\vdash$ (interpretado como símbolo de relação de conseqüência lógica) na estrutura bi-sortida para denotar a relação entre conjunto de fórmulas e fórmulas; enquanto a nossa abordagem utiliza o símbolo de função C para denotar o operador de conseqüência lógica (esta tem sido a abordagem encontrada na maioria das referências sobre Revisão de Crenças), que formará o conjunto de conseqüências lógicas (de um conjunto de fórmula(s)).

Algumas referências sobre Teoria de Modelos são: [CK90], [Hod97].

2.1.2. TIPOS DE ESTRUTURAS

Definição 4[CC02]: Linguagem bi-sortida de primeira ordem, $\mathbb{L}$.

Uma linguagem de primeira ordem bi-sortida é um conjunto

$\mathbb{L} = \{ \mathbf{A}_1\} \cup \{ \mathbf{A}_2\} \cup P \cup F \cup C$

Onde $\{ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$ é o conjunto dos tipos de domínios de $\mathbb{L}$, P é o conjunto de símbolos para predicados; F é o conjunto de símbolos para funções; e C o conjunto de constantes.

Para simplificação de notação assumiremos que o tipo de cada predicado P $\in P$ é da forma $\mathbf{A}_1^{\ n} \times \mathbf{A}_2^{\ m}$ para algum n,m$\geq$ 0. Uma notação análoga vale para símbolos de funções ([CC02]).

A linguagem acima é interpretada em uma estrutura bi-sortida.

Definição 5[CC02]: Estrutura bi-sortida, $\mathcal{U}$.

Seja $\mathbb{L}$ uma linguagem bi-sortida de primeira ordem. Uma estrutura bi-sortida $\mathcal{U}$ é uma quíntupla para $\mathbb{L}$:

$$\mathcal{U} = < A_1, A_2, P_{\mathcal{U}}, F_{\mathcal{U}}, C_{\mathcal{U}} >$$

Onde:

i) A_1 e A_2 são conjuntos não vazios.

ii) $P_{\mathcal{U}}$ contém, para cada $\mathrm{P} \in P$ da sorte $\mathbf{A}_1^n$ x $\mathbf{A}_2^m$ (n,m≥ 0), um subconjunto $P_{\mathcal{U}}$ de A_1^n x A_2^m .

iii) $F_{\mathcal{U}}$ contém para cada f: $\mathbf{A}_1^n$ x $\mathbf{A}_2^m \rightarrow \mathbf{A}_1$ em F, uma função $f_{\mathcal{U}}$: A_1^n x $A_2^m \rightarrow A_1$, e para cada g: $\mathbf{A}_1^r$ x $\mathbf{A}_2^s \rightarrow \mathbf{A}_2$ em F, uma função $g_{\mathcal{U}}$: A_1^n x $A_2^m \rightarrow A_2$ (para n,m,r,s≥ 0).

iv) $C_{\mathcal{U}}$ contém, para cada constante $c \in C$ da sorte $\mathbf{A}_1$, um elemento $c_{\mathcal{U}} \in A_1$ e, para cada constante $d \in C$ da sorte $\mathbf{A}_2$, então um elemento $d_{\mathcal{U}} \in A_2$.

Notação 1: Variáveis proposicionais.

I. $V_{\mathbf{A}_1} = \{v_0^{\mathbf{A}_1}, v_1^{\mathbf{A}_1}, v_2^{\mathbf{A}_1}, \ldots\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais do tipo $\mathbf{A}_1$. Usaremos x, y, w, z, etc, para denotar os elementos de A_1.

II. $V_{\mathbf{A}_2} = \{v_0^{\mathbf{A}_2}, v_1^{\mathbf{A}_2}, v_2^{\mathbf{A}_2}, \ldots\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais do tipo $\mathbf{A}_2$. Usaremos X, Y, W, Z, etc, ara denotar os elementos de A_2.

Definição 6: Linguagem Genérica - $\mathbb{LG}$.

A Linguagem Genérica é uma linguagem bi-sortida de primeira ordem dada por:

$\mathbb{LG} = \{f, F\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{\Cup, \Cap, s, C\} \cup \{0\}$

Onde $\{f, F\}$ é o conjunto de tipos de domínios de $\mathbb{LG}$, cujos elementos são fórmulas e conjunto de fórmulas, respectivamente,

ε é o símbolo para predicado da forma $f \times F$;

$\Cup$, $\Cap$, s, C são símbolos para as funções da forma:

$\Cup$: $F \times F \to F$,

$\Cap$[21]: $F \times F \to F$,

s: $f \to F$,

C: $F \to F$; e

0 é uma constante do tipo F.

Uma estrutura bi-sortida para $\mathbb{LG}$, que chamaremos por *Lógica Abstrata Genérica* (LAG), segue a definição abaixo.

[21] Como veremos mais tarde, $\Cap$ foi introduzido na estrutura para simplificação de notação, já que poderia ser definido em termos de $\Cup$.

Definição 7: Lógica Abstrata Genérica -LAG

Uma Lógica Abstrata Genérica - LAG é uma estrutura bi-sortida para $\mathbb{LG}$,

LAG = $< f, F, \varepsilon_{LAG}, \Cup_{LAG}, \Cap_{LAG}, s_{LAG}, C_{LAG}, 0_{LAG} >$

Que obedece ao seguinte conjunto de axiomas em $\mathbb{LG}$:

[Ax1] $\forall X \forall Y (X=Y \leftrightarrow (\forall x) (x \varepsilon X \leftrightarrow x \varepsilon Y))$

[Ax2] $\forall x \forall y (y \varepsilon s(x) \leftrightarrow x=y)$

[Ax3] $\forall X \forall Y \forall x (x \varepsilon X \Cup Y \leftrightarrow ((x \varepsilon X) \vee (x \varepsilon Y)))$

[Ax4] $\forall X \forall Y \forall x (x \varepsilon (X \Cap Y) \leftrightarrow ((x \varepsilon X) \wedge (x \varepsilon Y)))$

[Ax5] $\forall x \neg(x \varepsilon 0)$

[Ax6] $\forall X \exists Y \forall x (x \varepsilon X) \leftrightarrow \neg (x \varepsilon Y)$

O conjunto de axiomas {[Ax1], ..., [Ax6]}, nos permitem relacionar os símbolos em LAG à alguns conceitos lógicos e de teoria de conjuntos.

[Ax1] estabelece que a igualdade entre conjunto de formulas em *F*, equivale, logicamente, a ambos terem os mesmos elementos. Em teoria de conjuntos, este princípio é conhecido com *extensionalismo*.

[Ax2] estabelece que s(x) é um *conjunto unitário*. Isto significa que s(x) tem como elemento apenas x.

[Ax3] institui que uma fórmula está em relação com um conjunto formado pela função $\Cup$ se e somente se a fórmula se relaciona com pelo menos um desses conjuntos. Este axioma nos permite interpretar a função $\Cup_{LAG}$ como sendo a *operação de união* em teoria de conjuntos.

[Ax4] institui que uma fórmula está em relação com um conjunto formado pela função $\Cap$ se e somente se a fórmula se relaciona com ambos conjuntos. Da mesma forma, este axioma nos permite interpretar a função $\Cap_{LAG}$ como sendo a *operação de interseção* em teoria de conjuntos.

[Ax5] estabelece que não existe fórmula alguma que se relacione com a constante 0. A constante zero pode ser interpretada como representando o *conjunto vazio*, $\varnothing$, de teoria de conjuntos.

[Ax6] institui que existe o *complemento de um conjunto*.

Definição 8: *Extensão*.

Sejam $\mathcal{U}_1 = <A_1, A_2, P_1, F_1, C_1>$ e $\mathcal{U}_2 = <A_1, A_2, P_2, F_2, C_2>$ duas estruturas. Dizemos que $\mathcal{U}_2$ ***estende*** $\mathcal{U}_1$, ou $\mathcal{U}_2$ é uma ***extensão*** de $\mathcal{U}_1$, se $P_1 \subseteq P_2$, $F_1 \subseteq F_2$, e $C_1 \subseteq C_2$. Isto significa que $\mathcal{U}_2$ tem "mais estrutura" que $\mathcal{U}_1$, conseqüentemente, a linguagem $\mathbb{L}_2$ de $\mathcal{U}_2$ tem mais símbolos que a linguagem $\mathbb{L}_1$ de $\mathcal{U}_1$, e dizemos que $\mathcal{U}_1$ é o *reduto* de $\mathcal{U}_2$ para $\mathbb{L}_1$.

Definição 9: LAG *Padrão Tarskiana* - LAGPT

Seja $\mathbb{LG}'$ uma extensão de $\mathbb{LG}$. Uma LAG para $\mathbb{LG}'$, chamada de LAG *Padrão Tarskiana* - LAGPT é tal que:

.$F = \mathscr{P}(f) = \{\Gamma: \Gamma \subseteq f\}$; onde $\mathscr{P}(f)$ representa o conjunto das partes de f.

.$\varepsilon_{LAGPT} \subseteq f \times F$ é a relação de teoria de conjuntos de pertence $\in$;

.C_{LAGPT}: $F \rightarrow F$, é o operador (fechado) de conseqüência lógica, que satisfaz às seguintes condições:

[T1] $\forall X\ (X \subseteq C(X))$ *inclusão*

[T2] $\forall X \forall Y\ (X \subseteq Y \rightarrow C(X) \subseteq C(Y))$ *monotonicidade*

[T3] $\forall X\ (C(C(X)) \subseteq C(X))$ *iteração*

.$\Cup_{LAGPT}$: $F \times F \rightarrow F$, é a operação de conjuntos de união $\cup$;

.$\Cap_{LAGPT}$: $F \times F \rightarrow F$, é a operação de conjuntos de interseção $\cap$;

.0_{LAGPT} é conjunto vazio $\varnothing$.

.s_{LAGPT} : $f \rightarrow F$, é dado por $s_{LAG}(a)=\{a\}$ para todo $x \in f$.

Obedecendo ao seguinte axioma:

[Ax7] $(\forall x)\ (x\ \varepsilon\ s(x))$.

Observação 2: .$F = \mathscr{P}(f)$ é uma Álgebra Booleana com relação às operações de conjunto, tal que $\varnothing$, f são elementos de F.

.$\{x\} \in F$ para todo $x \in f$.

.Se $X \in F$ então $\{x \in f: x \in C(X)\} \in F$.

Lembramos que os axiomas [T1], [T2], [T3] correspondem às chamadas propriedades tarskianas de *inclusão*, *monotonicidade* e *iteração* para um operador de conseqüência lógica.

A inclusão significa que um conjunto é, pelo menos, subconjunto do conjunto de todas as suas conseqüências lógicas.

Monotonicidade significa que se um conjunto X é subconjunto de Y, então o conjunto das conseqüências lógicas de X, C(X), é subconjunto do conjunto das conseqüências lógicas de Y, C(Y).

Iteração significa que o conjunto das conseqüências lógicas de um conjunto já contém todas as conseqüências lógicas possíveis deste conjunto. A iteração da operação de conseqüência lógica não acrescenta informação.

Observação 3: Denotaremos, formalmente, que um conjunto t_1 é subconjunto de um conjunto t_2 por $t_1 \subseteq t_2$, para a abreviação da seguinte sentença em L:

$\forall x\ (x\ \varepsilon\ t_1 \rightarrow x\ \varepsilon\ t_2)$, onde t_1 e t_2 são termos do tipo F e x não ocorre livre em t_1, t_2.

Algumas conseqüências imediatas dos axiomas até agora vistos são :

[I1] $\forall X\ (C(X) = C(C(X))$

[I2] $\forall X \forall Y\ (C(X) \Cup C(X) \subseteq C(X \Cup Y))$

[I3] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup Y) = C(C(X) \Cup C(Y)))$

[I4] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup C(Y)) = C(X \Cup Y))$

[I5] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cap Y) \subseteq (C(X) \Cap C(Y))$

[I6] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cap Y) \subseteq (C(C(X) \Cap C(Y))))$

O conjunto de propriedades [I] corresponde às propriedades conhecidas na linguagem proposicional.

A seguir são apresentadas a verificação de algumas destas propriedades:

[I3] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup Y) = C(C(X) \Cup C(Y)))$

1. $X \subseteq C(X) \Cup C(Y)$	[T1], LCPO, [Ax3], degen
2. $Y \subseteq C(X) \Cup C(Y)$	1, subst.
3. $X \Cup Y \subseteq C(X) \Cup C(Y)$	1,2, LCPO, [Ax3]
4. $C(X \Cup Y) \subseteq C(C(X) \Cup C(Y))$	3,[T1],[T2], MP
5. $C(K) \Cup C(Y) \subseteq C(K \Cup Y)$	[I2]
6. $C(C(K) \Cup C(Y)) \subseteq C(K \Cup Y)$	5, [T2], MP, [I1]
7. $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup Y) = C(C(X) \Cup C(Y)))$	4,6, gen.

■

[I4] $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup C(Y)) = C(X \Cup Y))$

1. $X \Cup Y \subseteq X \Cup C(Y)$	[T1], LCPO, [Ax3], degen
2. $C(X \Cup Y) \subseteq C(X \Cup C(Y))$	1,[T2], MP
3. $X \subseteq C(X \Cup Y)$	LCPO, [Ax3],[T1],[T2],MP, transit.
4. $C(Y) \subseteq C(X \Cup Y)$	LCPO,[Ax3],[T1],[T2], MP
5. $X \Cup C(Y) \subseteq C(X \Cup Y)$	3,4,LCPO
6. $C(X \Cup C(Y)) \subseteq C(X \Cup Y)$	[T1],[T2], MP,[I1]
7. $\forall X \forall Y\ (C(X \Cup C(Y)) = C(X \Cup Y))$	2,6, gen.

■

LEMA 1: REDUNDÂNCIA DA UNIÃO PARA ELEMENTOS NA TEORIA.

[L1] $\forall X \forall x\ (x \varepsilon X \leftrightarrow X = X \Cup s(x))$

Para todo elemento X e todo elemento x, x está relacionado com X, ou é elemento de X, se e somente se X é igual a X em união com o conjunto unitário de x, $X \Cup s(x)$.

Demonstração.

1. $x \varepsilon X$	hip.
2. $x \varepsilon X \rightarrow (X \Cup s(x) = X)$	[Ax3], [Ax1], LCPO
3. $X \Cup s(x) = X$	hip.
4. $X \Cup s(x) = X \rightarrow \quad x \varepsilon X$	[Ax7], [Ax1], 1,2,MP
5. $\forall X \forall x\ (x \varepsilon X \leftrightarrow X = X \Cup s(x))$	2,4, gen.

■

LEMA 2: REDUNDÂNCIA DA UNIÃO PARA ELEMENTOS NA TEORIA LOGICAMENTE FECHADA.

[L2] $\forall X \forall x\ (x \varepsilon C(X) \leftrightarrow C(X) = C(X \Cup s(x))$

Para todo elemento X e todo elemento x, x está relacionado com C(X), ou é elemento do conjunto de conseqüências lógicas de X, se e somente se C(X) é igual ao conjunto de conseqüências lógicas de X em união com o conjunto unitário de x, $C(X \Cup s(x))$.

Demonstração: diretamente de [L1],degen,[T2], MP,gen.■

Notação 2: Teorias Fechadas ou Conjunto Logicamente Fechados.

Uma LAGPT suporta teorias logicamente fechadas se $X = C(X)$, para algum X. Podemos dizer que uma teoria contém todas as premissas e todas as “verdades” que podem ser derivadas dessas premissas, em si.
Como uma forma de distinguirmos quando estamos falando de teorias utilizaremos a notação Th(X), para $X=C(X)$.

Em uma estrutura LAGPT podemos demonstrar que a interseção de duas teorias logicamente fechadas é igual ao conjunto das conseqüências lógicas da interseção das duas teorias. Ou seja:

$$\boxed{[C1]\ \forall X \forall Y\ (Th(X) \wedge Th(Y) \rightarrow\ C(X) \Cap C(Y) = C(X \Cap Y))}$$

1. $C(X \Cap Y) \subseteq C(X) \Cap C(Y)$	[I5], degen
2. $C(X)=X \wedge C(Y)=Y$	hip.
3. $C(X \Cap Y) \subseteq X \Cap Y$	1, subst[C(X)/X,C(Y)/Y]
4. $X \Cap Y \subseteq C(X \Cap Y)$	[T1]
5. $X \Cap Y = C(X \Cap Y)$	3,4
6. $X \Cap Y = C(X) \Cap C(Y)$	2
7. $\forall X \forall Y\ (Th(X) \wedge Th(Y) \rightarrow\ C(X) \Cap C(Y) = C(X \Cap Y))$	5,6,gen.

■

2.1.3.TRABALHANDO COM AS FÓRMULAS.

Até agora todas as propriedades estudadas limitam-se, basicamente, às relações entre conjuntos de conjuntos de fórmulas. Os preceitos lógicos que governam o conjunto f serão ditados por axiomas adicionais.

Nos próximos passos estabeleceremos as regras iniciais para essa lógica, ou classe de lógicas, que está por trás do conjunto f. Estes serão, justamente os requerimentos mínimos e iniciais, para que mais tarde, uma lógica possa ser aplicável ao conjunto de postulados da teoria de revisão de crenças que iremos formalizar.

Primeiro, definiremos a assinatura proposicional baseados na especificação do tipo Cálculo de Hilbert, que será adicionada à linguagem; para então especificar os axiomas que esta lógica deverá atender.

2.1.3.1. CONSTRUINDO UMA LÓGICA.

Definição 11: *Assinatura base proposicional.*

Uma *assinatura base proposicional* é definido por $C = \{ C_k \}_{k \in \mathbb{N}}$, onde cada C_k é um conjunto de conectivos de aridade k. Conectivos em C_0 são designados de símbolos proposicionais. Seja $\mathbb{LG}^C$ a linguagem obtida de $\mathbb{LG}$ e C, considerando cada $h \in C_k$ como um símbolo de função $h : f^k \to f$. Em particular, cada
$p \in C_0$ é uma constante de tipo f. Uma especificação para um cálculo proposicional do tipo Hilbert é um par <C,R> onde C é uma assinatura base proposicional e R é um conjunto de sentenças na linguagem $\mathbb{LG}^C$ da forma
$(\forall)\ (\xi \in C(s(\xi_1, ..., \xi_n))$ e $(\forall)\ (\xi \in C(0))$,
onde $(\forall)\Phi$ denota o fechamento universal da fórmula Φ, e $s(\xi_1, ..., \xi_n)$ denota o termo $s(\xi_1)$ se $n = 1$ e $(...s(\xi_1) \Cup ...) \Cup s\ (\xi_n)$ se $n \geq 2$. Dada uma especificação
$E = <C,R>$ obtemos uma $LAGTP_E = < f, F, C_{LAGPTE}, C_{LAGPTE} >$ sobre $\mathbb{LG}^C$ definida como:

- *f* é uma álgebra livre gerada por C_{LAGPT}
- $F = P(f)$
- $C_{LAGPTE} = \cap \{C_1: \mathscr{P}(f) \to \mathscr{P}(f) : < f, F, C_1, C_{LAGPTE} > \vDash [Ax] \cup R \cup \{[T1],[T2],[T3]\}\}$

Dado $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq f$ dizemos que α é demonstrável de Γ em $LAGTP_E$ se
$LAGTP_E \vDash (x\ \varepsilon\ X)\ [\Gamma, \alpha]$.

O que a definição acima determina é que a lógica por trás de *f* seja uma lógica axiomatizável e, que além de obedecer ao conjunto de axiomas {[Ax]}, seu operador de conseqüência lógica também seja tarskiano, ou seja, atende ao conjunto de axiomas {[T]}, além das suas próprias relações **R**.

No próximo passo definiremos as constantes e os conectivos que serão utilizados por esta lógica, adicionando-se mais símbolos à linguagem $\mathbb{LG}^{C}$.

Definição 12: A Linguagem $\mathbb{LG}^{CB}$ [22]

Seja $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma assinatura base proposicional, onde C_k é um conjunto de conectivos de aridade k. Assuma que: i) $\sim\, \in C_1$ A linguagem $\mathbb{LG}^{CB}$ é definida como $\mathbb{LG}^{C} \cup \{\sim\}$.

Em i) definimos um conectivo unário, que será associado a algum tipo de negação de uma fórmula.

[22] A definição é apresentada para a incorporação de um conectivo unário e um conectivo binário, apenas. Contudo, a linguagem pode ser estendida conforme [CC02], definição 5.4 e 6.4.

Definição 13: LAGPT$_E$ Aplicável - LAGPTA.

Uma LAGPTA é uma LAGPT$_E$ que satisfaz aos seguintes axiomas em $\mathbb{LG}^{CB}$:
[T4] $C(s(x)) = C(s(\sim\sim x))$
[T5] $(\forall x)(\forall y)\ y \,\varepsilon\, C(s(x) \Cup s(\sim x))$
[T6] $C(s(x))= C(s(y)) \leftrightarrow C(s(\sim x)) = C(s(\sim y))$
[T7] $(\forall X)(\forall x)(\forall y)\ (y \,\varepsilon\, C(X \Cup s(x)) \wedge y \,\varepsilon\, C(X \Cup s(\sim x))) \rightarrow y \,\varepsilon\, C(X)$
[T8] $\exists X\, \exists y\, \neg(y \,\varepsilon\, C(X))$

[T4] estabelece que as conseqüências lógicas de uma fórmula e as conseqüências lógicas da dupla negação desta fórmula são iguais.

[T5] estabelece que a lógica subjacente a teoria atende ao denominado *princípio da explosão forte* - sPPS, conforme descrito em [CM01], página 23. Uma teoria dentro de uma lógica que atende ao sPPS é trivializada caso uma fórmula e sua negação forte (conforme definido em [CM01]) sejam elementos desta teoria. Vale observar que se uma lógica admite uma negação forte, então ela é finitamente trivializável ([CM01], fato 2.10, (i)).

[T6] estabelece que se duas fórmulas têm as mesmas conseqüências lógicas então a negação destas duas fórmulas também têm as mesmas conseqüências lógicas.

[T7] institui a validade da regra do corte para esta lógica.

[T8] estabelece que o operador de conseqüência lógica tem pelo menos uma teoria não trivial.

2.2. A LINGUAGEM E A ESTRUTURA PARA REVISÃO DE CRENÇAS

Definição 14[CC02]:linguagem para revisão de crenças – $\mathbb{LG}_{BR}$.

Seja $\mathbb{LG}_{BR}$ a linguagem obtida de $\mathbb{LG}^{CB}$ adicionando-se à assinatura de $\mathbb{LG}^{CB}$ os seguintes símbolos de funções:

+: **F x f→ F**

*: **F x f→ F**

–: **F x f→ F**

Definição 15: **LAGPTA**$_{BR}$ para Revisão de Crenças: AGM∃ formalizado.

Uma **LAGPTA**$_{BR}$ é uma extensão de **LAGPTA**:

$$\textbf{LAGPTA}_{BR} = < f,\ F,\ C_{LGPTA},\ +_{LGPTA}, *_{LGPTA}, -_{LGPTA} >$$ [23]

Satisfazendo aos seguintes axiomas em $\mathbb{LG}_{BR}$:

[23] Aqui não estamos representando mais os símbolos interpretados dentro da Teoria de Conjuntos.

EXPANSÃO:

$[K^{+}]\ \forall K \forall x\ (K + x = C(K \Cup s(x)))$

CONTRAÇÃO:

$[K_{-}1]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x) Th(K - x))$

$[K_{-}2]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ K - x \subseteq K)$

$[K_{-}3]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ (\neg(x \in K) \rightarrow K = K - x))$

$[K_{-}4]\ \forall x\ ((\forall K\ Th(K) \rightarrow x \in (K - x)) \rightarrow x \in C(0))$

$[K_{-}5]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ (K \subseteq (K - x) + x))$

$[K_{-}6]\ \forall K (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ ((C(s(x)) = C(s(y))) \rightarrow K - x = K - y))$

REVISÃO:

$[K_{*}1]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ Th(K * x))$

$[K_{*}2]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ (x \in K^{*}x\ ))$

$[K_{*}3]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ K^{*}x \subseteq K + x)$

$[K_{*}4]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ (\exists y\ \neg(y \in K \Cup s(x)) \rightarrow K + x \subseteq K^{*}x))$

$[K_{*'}5]\ \forall x\ ((\forall K\ Th(K) \rightarrow \forall y\ (y \in K^{*}x\ )) \rightarrow (\sim x \in C(0)))$

$[K_{*}6]\ \forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)(\forall y)\ ((C(s(x)) = C(s(y))) \rightarrow K^{*}x = K^{*}y)$

Conforme descrito em [CC02], a diferença entre [K*4] e (K*4) de AGM está no fato de que [K*4] não utiliza qualquer tipo de negação pra mostrar que se uma informação é consistente com o conjunto, então a revisão coincide com a expansão.

LEMA [KD+1]: DISTRIBUTIVIDADE DA EXPANSÃO NA INTERSEÇÃO.

[Kd+1] $\forall K \forall H\ (Th(K) \wedge Th(H) \rightarrow (\forall x)\ ((K+x) \Cap (H+x) = (K \Cap H) + x))$

1. $Th(K) \wedge Th(H)$ — hip.
2. $(K+x) \Cap (H+x) = C(K \Cup s(x)) \Cap C(H \Cup s(x))$ — [K+], degen
3. $C(K \Cup s(x)) \Cap C(H \Cup s(x)) = C((K \Cup s(x)) \Cap (H \Cup s(x)))$ — 1, [C1]
4. $C((K \Cup s(x)) \Cap (H \Cup s(x))) = C((K \Cap H) \Cup (H \Cap s(x)) \Cup (s(x) \Cap K) \Cup (s(x) \Cap s(x)))$ — De Morgan
5. $C((K \Cap H) \Cup (H \Cap s(x)) \Cup (s(x) \Cap K) \Cup (s(x) \Cap s(x))) = C((K \Cap H) \Cup s(x))$ — LCPO
6. $C((K \Cap H) \Cup s(x)) = K \Cap H + x$ — [K+]
7. $\forall K \forall H\ (Th(K) \wedge Th(H) \rightarrow (\forall x)\ (K+x \Cap H+x = K \Cap H + x))$ — 1,2,6,gen.

■

Observa-se que a distributividade da expansão é uma propriedade que depende, praticamente, apenas da álgebra da (meta)lógica, e do postulado de expansão.

LEMA [KD+2]: REDUNDÂNCIA DA EXPANSÃO PARA CRENÇAS INCORPORADAS.

[Kd+2] $\forall$K (Th(K) → ($\forall$x) (x ε K ↔ K+x = K))

1. Th(K)	hip.
2. x ε C(K) ↔ C(K)=C(K⋓s(x))	[L2], degen
3. x ε C(K) ↔ C(K) = K+x	[K+]
4. x ε K ↔ K = K+x	subst.[C(K)/K]
5. $\forall$K (Th(K) → ($\forall$x) (x ε K ↔ K+x = K))	4, 1, gen.

■

A propriedade de redundância da expansão para elementos já presentes na teoria, também independe da lógica presente em K. A expansão de uma teoria por um de seus próprios elementos em nada modifica o estado desta teoria.

LEMA [KD-1]: RECUPERAÇÃO DA CONTRAÇÃO

[Kd-1] $\forall$K (Th(K) → ($\forall$x) (x ε K ↔ (K-x)+x = K))

1. Th(K)	hip.
2. K+x = K	[Kd+2]
3. (K- x)+ x ⊆ K+x	[K-2], degen, [K+], LCPO
4. (K- x)+ x ⊆ K	subst. 2,3
5. K ⊆ (K-x)+x	[K-5], degen, LCPO
6. $\forall$K (Th(K) → ($\forall$x) (x ε K ↔ (K-x)+x = K))	1,2,[Kd+2],4,5,7,gen.

■

O postulado (K-5) mostra-se como um dos mais controversos em AGM ([Mak87], [Han99]). Contudo, aqui consideramos conjuntos logicamente fechados e verificamos que, nos aspectos teóricos, (K-5) possibilita uma constatação muito mais forte para o contexto de recuperação de uma teoria através da contração de uma informação e posterior expansão por esta mesma informação.

Conforme apresentado no capítulo anterior, as operações de revisão e contração são interdefiníveis através das identidades de Levi e Harper, tanto para AGM como para AGM∃.

No próximo capítulo analisaremos especificamente a formalização das identidades de Levi e Harper, de acordo com a formalização aqui adotada. A partir desta formalização iremos demonstrar que ambas as identidades são interdefiníveis, dado que a operação de revisão e de contração atendem a determinados postulados de AGM, sem que seja necessário a adoção de CEII para tal demonstração. A demonstração também permitirá verificar quais propriedades da lógica que governa a teoria são necessárias para validar esta interdefinição.

3. AS IDENTIDADES DE LEVI E HARPER.

As identidades de Levi e Harper para AGM e AGM∃, são representadas pelas seguintes sentenças, respectivamente, dentro de uma LAGPT para revisão de crenças:

[IL] $\forall K\,(Th(K) \rightarrow (\forall x)\; K^{*}x = (K - \sim x) + x)$

[IH] $\forall K\,(Th(K) \rightarrow (\forall x)\; K - x = K^{*} \sim x \Cap K)$

Inicialmente vamos demonstrar que valem as identidades de Levi e Harper, obtendo-se versões formais dos teoremas 3, 4, 5 e 6 do capítulo 1. Lembramos que os operadores $\mathbb{R}(-)$ e $\mathbb{C}(*)$ foram definidos no capítulo 1, definições 2 e 3, respectivamente.

Teorema 8: Seja K uma teoria logicamente fechada e - um operador para K que satisfaz aos postulados [K-2]-[K-'4] e [K-6], então $\mathbb{R}(-)$ atende aos postulados [K*1]-[K*6].

Demonstração.

A demonstração deste teorema segue o formato da demonstração da observação 3.54 de [Han99], página 276. Contudo, no nosso caso não necessitamos do teorema da dedução, pois usamos [T7], i.e., a regra do corte, conforme utilizado na demonstração do teorema 5, para mostrar que se - atende a [K-'4] então $\mathbb{R}$(-) atende a [K*'5].

■

Teorema 9: Seja K uma teoria logicamente fechada e * uma operação de revisão para K que satisfaz aos postulados [K*1],[K*2] e [K*4]-[K*6], então $\mathbb{C}$(*) atende aos postulados de [K-1]-[K-6].

Demonstração.

A demonstração deste teorema segue o formato da observação 3.55 de [Han99], página 276. Neste caso, contudo, também não necessitamos do teorema da dedução, para a demonstração do atendimento ao postulado [K-5] (recuperação) visto que podemos utilizar o lema [Kd-1], para o caso quando $x \varepsilon K$. No caso no qual $\neg(x \varepsilon K)$ é óbvio que $K \subseteq K\text{-}x+x$.

■

TEOREMA 10: SEJA K UMA TEORIA LOGICAMENTE FECHADA E * UM OPERADOR PARA K QUE SATISFAZ AOS POSTULADOS DE REVISÃO [K*1], [K*2], [K*3] E [K*6].

ENTÃO, EM [IL], $\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)) = *$.

Demonstração.

Para fazer a demonstração usaremos a Identidade de Haper na Identidade de Levi.

1. Th (K)	hip.
2. $K(\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)))x = ((K*\sim\sim x) \Cap K)+x$	[IL], degen, MP [IL],1
3. $K(\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)))x = ((K*x) \Cap K)+x$	[K*6], [T4]
4. $K(\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)))x = ((K*x)+x) \Cap (K+x)$	[Kd+1]
5. $x \,\varepsilon\, K*x$	[K*2], degen
6. $x \,\varepsilon\, K*x \rightarrow K*x= (K*x) +x$	[L1], degen, subst[K*x/K]
7. $K*x= (K*x) +x$	MP 5,6
8. $(K*x) \Cap (K+x) = K*x$	[K*3]
9. $K(\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)))x = K*\ x$	4,7,8
10. $\forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ K*x=(K-\sim x)+\ x)$	1,9,gen.

■

Conforme já mencionamos, a identidade de Levi pode ser adotada indiferentemente para AGM ou AGM∃. Na verdade, podemos considerar que a questão de se tornar uma teoria trivial através da conjunção de uma crença e sua negação, é mascarada pelo fato da equivalência das conseqüências lógicas entre uma crença e sua dupla negação. Em [Han99] página 278, há a demonstração do teorema acima, considerando-se os postulados usuais (não formalizados) de AGM e tendo-se a lógica proposicional clássica como subjacente à teoria. Outros recursos da LPC, como o Teorema da Dedução (Herbrand, 1930) são usados para aquela demonstração. No nosso caso, utilizamos outras propriedades, determinadas por [T4]-[T8], da lógica objeto para a realização desta demonstração, visto que a nossa meta-lógica, na verdade, já engloba recursos suficientes para liberar a lógica objeto de determinadas propriedades, e que sabemos, *a priori* , que necessitamos extrair a negação de uma crença (sempre que possível), para incorporamos a afirmação desta crença.

Verificaremos agora, que o mesmo resultado é válido com relação à operação de contração e a identidade de Harper.

TEOREMA 11: SEJA K UM CONJUNTO LOGICAMENTE FECHADO E − UM OPERADOR PARA K QUE SATISFAZ AOS POSTULADOS DE CONTRAÇÃO [K-1], [K-2], [K-3],[K-5] E [K-6]. ENTÃO, EM [IH], $\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)) = -$.

Demonstração

Para fazer a demonstração usaremos a Identidade de Levi na Identidade de Harper.

1. $Th(K)$	hip.
2. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x = (K-{\sim}{\sim}x) + {\sim}x \Cap K$	[IH], degen, MP [IH],1
3. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x = (K-x)+ {\sim}x \Cap K$	[T4], [K-6]
4. $\neg(x \varepsilon K)$	caso1
5. $K-x=K$	MP, 4, [K-3]
6. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x = (K-x)+ {\sim}x \Cap K-x$	5, subst.
7. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x=K-x$	[K+], LCPO
8. $(x \varepsilon K)$	caso 2
9. $(K-x)+x = K$	MP 1,degen[Kd-1]
10. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x = (K-x)+ {\sim}x \Cap (K-x) + x$	9, subst.[K/(K-x)+x], [T7]
11. $K(\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)))x = K-x$	[K+], LCPO
12. $\forall K\ (Th(K) \rightarrow (\forall x)\ K-x = K^{*} {\sim}x \Cap K)$	1,7,11,gen.

■

Observemos que ao adotarmos as identidades de Levi e Harper como as identidades que descrevem o comportamento de uma mudança racional de crença, podemos liberar algumas propriedades para serem definidas pelo modelo adotado para a operação de contração ou de revisão. Desta forma, estamos também amarrando que a contração e a revisão tenham posturas consistentes entre si, ou seja, conforme mostrado no capítulo 1, se um modelo admite que é possível a correção de uma teoria trivial através da contração de uma fórmula, então será possível realizar esta correção através de uma operação de revisão, e vice-versa. Se por outro lado, um modelo admite que o critério da economia da informação incorporada para revisão seja válido, então a contração associada a esta revisão não poderá admitir a correção de teorias triviais.

Outra questão a ser analisada é: quais lógicas podem ser englobadas na classe de lógicas que atendem a [T4]-[T8]? Em [CM01] e [CMA00] pode-se verificar que várias lógicas paraconsistentes podem ser canditadas para a lógica subjacente da teoria.

A tabela 5 a seguir mostra quais axiomas e postulados foram utilizados na demonstração de algumas das propriedades, lemas e teoremas aqui demonstrados.

Tabela 5: Utilização de axiomas e postulados nas demonstrações.

PROPRIEDADES E TEOREMAS

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	C1	L1	L2	Kd+1	Kd+2	Kd-1	$\mathbb{R}(\mathbb{C}(*)) = *$	$\mathbb{C}(\mathbb{R}(-)) = -$
T1	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X
T2	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
T3	X		X	X		X					X	X		X
T4													X	X
T5													X	X
T6													X	X
T7													X	X
T8													X	X
K+										X		X	X	X
K-1													X	X
K-2												X	X	X
K-3													X	X
K-'4													X	X
K-5												X	X	X
K-6													X	X
K*1													X	X
K*2													X	X
K*3													X	X
K*4													X	X
K*'5													X	X
K*6													X	X

Em uma consulta à tabela podemos verificar rapidamente que, por exemplo, para a demonstração de [L3], ou seja, $\forall X \forall x\ (x \in C(X) \leftrightarrow C(X)=C(X \uplus s(x))$, necessitamos da propriedade de monotonicidade do operador de conseqüência. Obviamente, não estamos apresentando nesta tabela os axiomas iniciais, relativos à LAGP, os quais especificam os requisitos mínimos para podermos formalizar uma teoria tipo AGM, nem alguma propriedade que decorre especificamente destes, como [I2].

O objetivo de elaborar este tipo de tabela é o de elucidar de outra forma quais axiomas foram usados para as demonstrações de determinados teoremas e propriedades. Em um trabalho futuro que tenha como objetivo estudar mais a fundo a questão da revisão de crenças em teorias baseadas em LFI's, esta tabela permitirá uma consulta rápida sobre esta questão.

3.1. As formas positivas de Levi e Harper.

Da mesma forma que os postulados de contração para AGM∃ foram formalizados positivamente, ou seja, sem a necessidade de definir a negação de uma fórmula, podemos também refinar a definição das identidades de Levi e Harper conforme:

$$[ILP]\ (\forall K)\ (\forall x)\ \ (Th(K) \wedge (\exists y)\ ((\forall z)\ z\ \varepsilon\ C(s(x) \Cup s(y)) \rightarrow K^{*}x = (K-y)+x))$$

$$[IHP]\ (\forall K)\ (\forall x)\ \ (Th(K) \wedge (\exists y)\ ((\forall z)\ z\ \varepsilon\ C(s(x) \Cup s(y)) \rightarrow K-x = K^{*}\ y \Cap K))$$

Poderíamos pensar em definir uma operação de mudança racional de crença através de [ILP] e [IHP] apenas? Parece que esta é uma alternativa que libera as propriedades de correção de qualquer teoria, o princípio da economia da informação incorporada, entre outras, para serem definidos pelos modelos ou construções matemáticas adotados para a implementação de uma mudança racional de crença.

Teríamos alguma alternativa neste tipo de formalização para a solução apresentada em 1.4, de forma a caracterizar que a operação de contração tem um caráter mais direto que a operação de revisão? Uma formalização deste tipo pode ser dada por:

$$[ILP'] \ (\forall K)\ (\forall x)\ \ (Th(K) \wedge \neg(K=K_{\perp}) \wedge (\exists y)\ ((\forall z)\ z\ \varepsilon\ C(s(x) \Cup s(y)) \rightarrow K^{*}x = (K-y)+x))$$

$$[IHP'] \ (\forall K)\ (\forall x)\ \ (Th(K) \wedge (\exists y)\ ((\forall z)\ z\ \varepsilon\ C(s(x) \Cup s(y)) \rightarrow K-x = K^{*}\ y \Cap K))$$

Desta forma estamos justamente restringindo a aplicação da identidade de Levi para os casos nos quais a teoria em consideração não coincide com a teoria trivial.

Uma das vantagens em se formalizar um postulado ou uma identidade de forma positiva, ou seja, sem o uso da negação, está no fato de liberarmos a aplicação do postulado ou identidade para um conceito mais abstrato. Um estudo interessante seria o de se verificar a interdefinição entre Levi e Harper para estas formalizações.

Inicialmente a teoria AGM, sendo elaborada para teorias dentro da lógica clássica, empregou a negação (clássica), para estipular que se a operação de revisão gera a teoria trivial, então a negação desta informação é uma tautologia, ou ainda, a afirmação em si é uma contradição. Na LPC os conceitos de contradição e inconsistência são indiscerníveis e ambos levam à trivialização de uma teoria. Quando necessitamos aplicar as caracterizações dadas em AGM para as operações de mudança de crença a uma outra lógica, digamos a uma lógica paraconsistente, é necessário reavaliar a caracterização de trivilização de uma teoria, visto que nas lógicas paraconsistentes de uma sentença do tipo $p \wedge \neg p$ não inferimos qualquer q, para todo q (embora também não demonstremos $x \wedge \neg x$, para qualquer x). Neste caso, a negação $\neg$ é uma negação paraconsistente, ou seja, a negação que é especificamente governada pelos axiomas da lógica paraconsistente. Uma negação é clássica, dentro de uma dada lógica, se nesta lógica vale os seguintes axiomas para esta negação ([CM01]):

$\vdash x \vee \neg x$

$\vdash \neg\neg x \rightarrow x$

$\vdash x \rightarrow (\neg x \rightarrow y)$

Observe que não utilizamos, nem mesmo definimos, todos estes axiomas na formalização. A negação tratada aqui é apenas aquela que gera a trivialização da teoria. No caso das lógicas estudadas em [CM01], a trivialização das lógicas finitamente trivializáveis é realizada pela chamada negação forte. Uma negação forte é uma negação que aplicada a um esquema de fórmulas x, este esquema com ~x gera a trivialização de qualquer teoria dentro desta lógica.

Note que, em alguns casos, o conceito de consistência de uma fórmula ou de inconsistência de uma fórmula, ou ambos, pode ser expresso, por exemplo, na lógica através de um conectivo unário. A inconsistência, denotada pelo conectivo •, leva a uma contradição, isto é $\bullet x \rightarrow x \wedge \neg x$, mas não leva à trivialização da teoria. Para que a trivialização aconteça é necessário que tenhamos o seguinte esquema de fórmula na teoria: $x \wedge (\neg x \wedge \neg \bullet x)$. Isto significa, também, que precisamos de um pouco mais de informação para trivializar uma teoria paraconsistente do que uma teoria clássica.

Devemos lembrar que para expressar outros conceitos, devemos estender a nossa linguagem com os símbolos necessários para a representação dos conceitos que necessitamos trabalhar. Uma vez estendida a linguagem, e formalizada a lógica paraconsistente, ela passa a ter o poder de "falar" sobre determinadas características de uma fórmula, o que não é possível dentro da lógica clássica.

Se na lógica paraconsistente a negação já não é mais suficiente para estabelecer um esquema de trivialização de uma teoria, devemos também entender que a negação originalmente representada em (K*5) deve ser compreendida de uma nova maneira para que a teoria de mudança de crença possa englobar teorias que são governadas por outras lógicas, sem contudo, perder a sua aplicação nas teorias clássicas.

Poderíamos dizer que a liberação da negação em AGM nos possibilita a liberação desta teoria também para a sua aplicação em teorias baseadas em outras lógicas. Um procedimento ainda mais liberal está, justamente, em se expressar o conceito de teoria não trivial sem a utilização de qualquer tipo de negação.

Por outro lado poderíamos perguntar: se por um lado ao discernirmos os conceitos de contradição, consistência, trivialização liberamos uma teoria de mudança racional de crença para ser aplicadas em outras realidades, por outro lado não perdemos a especificação de como a trivialização ocorre em uma teoria baseada na lógica clássica? Obviamente que sim, pois quanto mais genéricos formos numa formalização do que vem a ser uma revisão, contração ou expansão, mais conhecimento será exigido para que estas operações possam ser desenvolvidas por procedimentos corretos. Caso não tenhamos condições de entender as peculiaridades de cada lógica ou de uma classe de lógicas, podemos sempre retornar aos postulados originais de AGM.

4. TEORIAS TIPO AGM E A CONSISTÊNCIA DA REVISÃO.

> "Let it be so: I have another daughter, who, I am sure, is kind and confortable: when she shall hear this of thee, with her nails she'll flay thy wolfish visage. Thou shalt find that I'll resume the shape which thou dost think I have cast off for ever."
>
> William Shakespeare, *King Lear*.

Da mesma forma que alteramos a abrangência do quantificador em (K*5) de AGM de forma a obter um conjunto de postulados que não fosse contraditório com o CEII, podemos analisar quais outras sentenças podem ser obtidas pelo mesmo processo. Desta forma, estaremos gerando outras teorias tipo AGM, onde a relação de uma para outra será determinada pela relação entre os postulados tipo (K*5), quando existir. Da mesma forma que adotamos (K*'5) como mais fraco que (K*5), pelo fato do segundo implicar logicamente o primeiro, dizemos que "Φ é mais fraco Ψ " se na lógica clássica temos que

$\vdash \Psi \rightarrow \Phi$.

As sentenças aqui apresentadas serão escritas considerando-se que qualquer conjunto de crenças é uma teoria e, por *modus ponens*, representaremos apenas o conseqüente de (K*'5), na formalização descrita no capítulo 2. Esta representação é do tipo $\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x)$, onde $\Psi(K,x)$ é $(\forall y\ (y\ \varepsilon\ K^*x\ ))$ e $\Phi(x)$ é $(\sim x\ \varepsilon\ C(0))$. Desta forma temos que (K*5) é do tipo $(\forall K)(\forall x)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$, enquanto (K*'5) é do tipo $(\forall x)\ ((\forall K\ \Psi(K,x)) \Rightarrow \Phi(x))$.

Como queremos analisar apenas as sentenças onde cada variável está dentro da abrangência de um único quantificador, a tabela a seguir mostra todas as sentenças possíveis decorrentes deste tipo de combinação, totalizando 36 possibilidades.

Tabela 6: Sentenças que expressam a consistência da revisão, para teorias tipo AGM.

1	$(\forall K)\ (\forall x)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	19	$(\exists x)\ ((\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$
2	$(\forall x)\ (\forall K)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	20	$(\forall K)\ (\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
3	$(\forall K)\ (\exists x)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	21	$(\exists K)\ (\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
4	$(\exists K)\ (\forall x)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	22	$(\forall K)\ (\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
5	$(\forall x)\ (\exists K)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	23	$(\exists K)\ (\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
6	$(\exists x)\ (\forall K)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	24	$(\forall K)\ (\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
7	$(\exists x)\ (\exists K)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	25	$(\exists K)\ (\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
8	$(\forall K)\ ((\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$	26	$(\forall K)\ (\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
9	$(\forall K)\ ((\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$	27	$(\exists K)\ (\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
10	$(\forall K)\ ((\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$	28	$(\forall x)\ (\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
11	$(\forall K)\ ((\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$	29	$(\exists x)\ (\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
12	$(\exists K)\ ((\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$	30	$(\forall x)\ (\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
13	$(\exists K)\ ((\forall x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$	31	$(\exists x)\ (\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$
14	$(\exists K)\ ((\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\forall x)\ \Phi(x))$	32	$(\forall x)\ (\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
15	$(\exists K)\ ((\exists x)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$	33	$(\exists x)\ (\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
16	$(\forall x)\ ((\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	34	$(\forall x)\ (\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
17	$(\forall x)\ ((\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	35	$(\exists x)\ (\exists K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow (\exists x)\ \Phi(x))$
18	$(\exists x)\ ((\forall K)\ \Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$	36	$(\exists K)\ (\exists x)\ (\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x))$

É importante observar que neste momento não estamos preocupados em analisar o significado filosófico de cada uma das sentenças possíveis, apenas estamos buscando as possibilidades de expressão lógica, dentro da linguagem de primeira ordem, de uma sentença com um determinado formato lógico.

Podemos agrupar estas sentenças em suas formas *prenex*, conforme o esquema a seguir, onde representamos $\Psi(K,x) \Rightarrow \Phi(x)$ por $\sigma(K,x)$, e as setas representam implicações lógicas entre cada forma prenex :

$$\begin{tikzcd}
\text{A: } (\forall K)\,(\forall x)\,\sigma(K,x) \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
\text{B: } (\exists K)\,(\forall x)\sigma(K,x) \arrow[r] & \text{C: } (\forall x)\,(\exists K)\,\sigma(K,x) \arrow[d] & \text{E: } (\exists x)\,(\forall K)\,\sigma(K,x) \arrow[r] & \text{F: } (\forall K)\,(\exists x)\,\sigma(K,x) \arrow[dll] \\
& \text{D: } (\exists K)\,(\exists x)\,\sigma(K,x) & &
\end{tikzcd}$$

Enquanto um grupo é formado pelas sentenças dos blocos A, B, C e D, o outro grupo é formado por sentenças dos blocos A, E, F e D.

Neste esquema, as sentenças equivalentes à sentença em D são as mais fracas, enquanto as sentenças equivalentes à sentença em A são as mais fortes. Qualquer uma das 36 sentenças apresentadas na tabela 6 é equivalente a uma das sentenças de um dos blocos acima.

Ao passo que (K*5) de AGM está no topo do esquema, bloco A, ou seja, é uma sentença do tipo $(\forall K)\ (\forall x)\ \sigma(K,x)$, (K*'5) de AGM∃ é uma sentença intermediária do tipo $(\forall x)\ (\exists K)\ \sigma(K,x)$, do grupo C. O outro grupo de sentenças intermediárias representado por $(\exists x)\ (\forall K)\ \sigma(K,x)$ e $(\forall K)\ (\exists x)\ \sigma(K,x)$ não possui uma relação lógica com (K*'5). Observe que, enquanto (K*'5) estabelece que existe (pelo menos) uma teoria para qualquer fórmula, ou crença, onde uma determinada relação se estabelece, a outra sentença intermediária nos diz que existe uma fórmula ou crença, para qualquer teoria onde uma determinada relação se estabelece.

Será que sentenças do tipo $(\exists x)\ (\forall K)\ \sigma(K,x)$ ou $(\forall K)\ (\exists x)\ \sigma(K,x)$ são compatíveis com CEII?

Para respondermos esta pergunta, vamos lembrar que a sentença
$(\forall K)\ (\exists x)\ \sigma(K,x)$ tem como uma de suas instâncias o seguinte:
$(\exists x)\ (K_\perp * x = K_\perp \rightarrow\ \vdash \neg x)$. Por sua vez esta sentença tem a seguinte instância:
$K_\perp * x_0 = K_\perp \rightarrow\ \vdash \neg x_0$. Por outro lado, CEII também tem como uma de suas instâncias que, lembrando que CEII é uma sentença que vale para qualquer K e qualquer x: $x_0 \in K_\perp \rightarrow K_\perp * x_0 = K_\perp$!!!

Além disto, como os modelos de $(\exists x)\ (\forall K)\ \sigma(K,x)$ estão entre os modelos para $(\forall K)\ (\exists x)\ \sigma(K,x)$, podemos dizer que as sentenças do tipo $(\exists x)\ (\forall K)\ \sigma(K,x)$ também são contraditórias com CEII.

Concluímos que nem sentenças do bloco E, nem sentenças do bloco F podem substituir (K*5) em AGM de modo a se obter uma teoria consistente com CEII.

Por outro lado podemos nos perguntar quais sentenças do bloco B podem formar uma teoria tipo AGM que seja consistente com CEII.

O leitor pode observar que a tarefa de se verificar a consistência entre CEII e sentenças do bloco B já não é tão simples assim. Certamente, se ambas podem conviver consistentemente em uma teoria, então existe um modelo que atende a ambas. Mas repare que o modelo apresentado no capítulo 1, onde demonstramos a consistência entre CEII e AGM∃ não pode ser adotado, já que a sentença $(\exists K)\ (\forall x)\ (K^{*}x = K_{\perp} \rightarrow\ \vdash \neg x)$ não permite uma decisão sobre qual K do modelo estamos nos referindo.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A Teoria AGM, tendo como um de seus postulados o da consistência da revisão, não permite que construções matemáticas possam incorporar o princípio ditado pelo critério da economia da informação incorporada. O interesse em se elaborar uma teoria que permita que ambos conceitos possam ser adotados (obviamente que não ambos ao mesmo tempo) decorre do fato de que CEII, algumas vezes designado também por *idempotência* ([Han99], [KM92]), tem aplicação prática, principalmente com relação à atualização de base de dados.

A solução proposta através de AGM∃ libera a teoria original de AGM do que podemos chamar de "consistência a qualquer preço", preservando todos os demais postulados iniciais.

Não podemos nos esquecer que a liberação do conceito embutido em (K*5) ocorreu simultaneamente com a liberação do conceito de negação, das características da negação clássica, de uma fórmula. No processo de formalização de AGM∃ a negação adotada é a que podemos chamar de trivializante para a lógica subjacente. Isto viabiliza a adoção de algumas lógicas paraconsistentes como sendo esta lógica.

A questão da consistência passa na realidade a não ser mais tão fundamental, mas o da trivialização ainda o é, mantendo-se a propriedade de que as lógicas que governam as teorias tratadas em AGM∃ são lógicas que atendem ao designado por *Supplementing Principle of Explosion* ([CM01], pg. 23), o qual determina que a lógica, neste caso, tem uma negação forte, conforme definida naquele texto.

Em ([CB98]) os autores argumentam que a necessidade de se preservar a consistência em uma mudança de crença não tem sido questionada, mas apenas tomada como certa; e que agindo desta forma uma interessante possibilidade está sendo deixada de lado: a de se adotar uma teoria de revisão de crença onde inconsistências em um sistema de crença podem ser de grande valor.[24]
Neste sentido AGM∃ atende à necessidade de se ter uma teoria mais benevolente com relação ao conceito de consistência (mas não, necessariamente, com relação ao conceito de trivialização).

Outras caracterizações importantes sobre mudança de crença, tais como as definidas pelas identidades de Levi e Harper, que eram interdefiníveis em AGM,

[24] Em [CB98], no meio do segundo parágrafo da introdução temos: "... belief change has to be articulate in such a way that it meets consistency-preserving constraints; that is, according to such proposals, an acceptable belie4f change must avoid inconsistencies. However, as we shall argue in this paper, this assumption has not been argued for, but has been simply taken for granted. In doing so, an interesting and possibly rich alternative has been left behind from the outset: the development of a theory of belief change in which inconsistencies in belief systems can be taken at face value."

mantiveram esta característica em AGM∃. Esta propriedade de interdefinição foi preservada graças à releitura, também, do postulado (K-4). Em AGM∃ continuamos mantendo as operações de contração e revisão dentro de uma mesma hierarquia, como em AGM.

Enquanto AGM trata da teoria trivial como uma teoria qualquer quando trabalhando com crenças consistentes, AGM∃ não nivela todas as teorias neste mesmo caso.

Assim como iniciamos este estudo na análise da contradição entre (K*5) e CEII, e buscamos uma alternativa de releitura para elaborar uma teoria mais ampla, outras análises podem ser desenvolvidas para outros postulados de AGM. Contudo, estamos limitados ao poder de expressão da própria linguagem adotada, no caso, a clássica de primeira ordem. Não conseguimos expressar, por exemplo, condições que denotam a maioria ou a minoria. Podemos, entretanto, ampliar consideravelmente este estudo se incluirmos outros axiomas à estrutura, como por exemplo, um que expresse a compacidade, ou seja, *se* $x \in Cn(X)$*, então* $x \in Cn(X')$ *para algum subconjunto finito* $X' \subseteq X$; e verificar os resultados que podem ser obtidos neste caso.

A formalização de AGM∃ dentro de uma estrutura bi-sortida de primeira ordem, conforme aqui descrito, permitiu verificar que os conceitos envolvidos nos postulados iniciais de uma teoria tipo AGM são praticamente expressáveis pelas propriedades da linguagem de primeira ordem. Podemos mesmo dizer que o conceito teórico fundamental de uma mudança de crença está no conhecimento da característica de trivialização da lógica que governa a teoria em questão. Uma vez conhecida esta propriedade da lógica, questões práticas, como qual procedimento adotar para melhor se alcançar um determinado resultado passam, então, a ser relevantes para o sucesso de uma implementação de mudança racional de crença.

A análise apresentada no capítulo 4 mostra uma análise de AGM∃ dentro do espaço lógico da linguagem de primeira ordem. Apenas um estudo futuro poderá elucidar se podemos ou não afirmar que AGM∃ é a teoria tipo AGM, compatível com CEII, com menor número de modelos possíveis.

Obviamente, assim como AGM pôde ser questionada teoricamente com relação à propriedade de retificação de qualquer teoria embutida em (K*5), AGM∃ pode ser questionada com relação ao fato de que uma sentença do tipo *para todo existe um*, ser ou não necessária em uma teoria. Isto também dependerá da importância em se estabelecer a diferença entre ter conhecimento da existência de um determinado critério (e de sua incompatibilidade com outros critérios) e garantir que ele seja atendido, e não se estabelecer nada a respeito, que certamente pode ser tomado como desconhecimento do fato.

Trabalhando no espaço lógico pode-se obter novas visões para uma questão filosófica, um pouco do que Wittgenstein imaginava que poderia ser a terapia da linguagem para esclarecimento de questões filosóficas.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

. ANALISAR OS RESULTADOS QUE PODEM SER OBTIDOS INTRODUZINDO-SE O CONCEITO DA COMPACIDADE DENTRO DA FORMALIZAÇÃO.

. VERIFICAR SE SENTENÇAS DO GRUPO $\mathbb{B}$ (CAP. 4) PODEM ACEITAR MODELOS PARA CEII.

. É POSSÍVEL ACHAR UM TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO PARA AGM∃, COMO EM [AGM85]?

.PODEMOS MANTER LEVI E HARPER COMO INTERDEFINÍVEIS AO ADOTARMOS A SEGUINTE VERSÃO PARA (K*2): *X CONSISTENTE, ENTÃO* $X \in K^{*}X$? QUAIS AS IMPLICAÇÕES DESTA ALTERAÇÃO?

.[ILP] E [IHP] SÃO INTERDEFINÍVEIS?

. A TEORIA DE CONJUNTOS DE ZERMELO-FRAENKEL (ZF) É CONSISTENTE COM
$\forall x \exists y\ (x \in y \leftrightarrow F(x))$?

REFERÊNCIAS

[AGM85] Carlos E. ALCHOURRÓN, David MAKINSON and Peter GÄRDENFORS. *On the logic of theory change: Partial Meet Contraction and revision functions.* Journal of Symbolic Logic 50, pp.510-530, 1985.

[Boc00] Alexander BOCHMAN. *Belief Contraction as Nonmonotonic Inference.* Journal of Symbolic Logic 65, pp.605-626, 2000.

[Bre91] Gerd BREWKA. *Belief Revision in a Framework for Default Reasoning.* In André Fuhrmann and Michael Morreau (eds.). The Logic of Theory Change, Springer LNAI 465, Berlin etc., pp.206-222, 1991.

[CB98] Newton C. A. da COSTA e Otávio BUENO. *Belief Change and Inconsistency.* Logique & Analyse , pp.161-163, 1998.

[CC02] Marcelo E. CONIGLIO e Walter A. CARNIELLI. *Transfers between logics and their application.* Studia Logica 72, n. 3, pp.367-400, 2002.

[CCC??] Denise M. M. da CUNHA, Marcelo E. CONIGLIO e Walter A. CARNIELLI. *An inconsistency in AGM theory?*
Trabalho apresentado na ANPOF, 2002, São Paulo, Brasil. (A ser publicado)

[CK90] C. C. CHANG and H. J. KEISLER. *Model Theory.* North Holland, 1990.

[CMA00] Walter A. CARNIELLI, João MARCOS e Sandra de AMO. *Formal inconsistency and evolutionary databases.* Logic and Logical Philosophy 8, pp.115-152, 2000.

[CM01] Walter A. CARNIELLI e João MARCOS. *A Taxonomy of C-Systems.* "Paraconsistency- the Logical Way to the Inconsistent", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 228, pp.01-94, 2002.

[Dal97] Dirk van DALEN. *Logic and Structure*. Third Augmented Edition. Springer, 1997.

[Gar79] Peter GÄRDENFORS. *Rules for Rational Changes of Belief.* Philosophical Essays dedicated to Lennart Aqvist on his fiftieth birthday. Philosophical studies published by the Phil. Soc. and Dept. of Phil., Univ. of Uppsala, 1979.

[Gar82] Peter GÄRDENFORS. *On the logic of theory change: Contraction functions and their associated revision functions*, Theoria 48, 1982.

[Gar84] Peter GÄRDENFORS. *Epistemic importance and minimal changes of belief.* Australasian Journal of Philosophy 62, pp.136-157, 1984.

[Gar88] Peter GÄRDENFORS. *Knowledge in flux: modeling the dynamics of epistemic states*. The MIT Press, 1988.

[GM94] Peter GÄRDENFORS e David MAKINSON. *Nonmonotonic Inference Based on Expectations*. Artificial Inteligence 65, pp. 197-245, 1994.

[Han99] Sve Ove HANSSON. *A textbook of belief dynamics, theory change and database updating*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Hod97] Wilfrid HODGES. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.

[KM92] H. KATZUNO and A. O. MENDELZON. *On the difference between updating a knowledge base and revising it.* Gärdenfors ed., Belief Revision, pp.183-203. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Mak85] David MAKINSON. *How to give it up: A survey of some recent work on formal aspects of the logic of theory change*. Synthese 62, pp.347-363, 1985.

[Mak87] David MAKINSON. *On the status of the postulate of recovery in the logic of theory change*. Journal of Philosophical Logic 16, pp.383-394, 1987.

[MG91] David MAKINSON e Peter GÄRDENFORS. *Relations Between the Logic of Theory Change and Nonmonotonic Logic*. In André Fuhrmann and Michael Morreau (eds.). The Logic of Theory Change, Springer LNAI 465, pp.185-205. 1991.

[Rot01] Hans ROTT. *Change, choice and Inference. A study of belief revision and nonmonotonic reasoning*. Oxford Logic Studies 42. Oxford University Press, 2001

[Was00] Renata WASSERMANN. *Resource-bounded belief revision*. PhD Thesis. Universiteit van Amsterdam, 2000.