JORGE ALBERTO MOLINA

PROBLEMAS DE UMA SEMÂNTICA PARA A LÓGICA INTUICIONISTA DE PRIMEIRA ORDEM

JORGE ALBERTO MOLINA

PROBLEMAS DE UMA SEMÄNTICA PARA A LOGICA INTUICIONISTA DE PRIMEIRA ORDEM

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA E CIENCIAS HUMANAS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇAO FINAL DA TESE DEFENDIDA E APROVADA PELA COMISSAO JULGADORA EM 1º/10/92

ORIENTADOR: CARLOS (ALBERTO) LUNGARZO

À minha esposa Silvina,

A minha filha María Sol

SUMARIO

INTRODUÇÃO

1 - Objetivo e Estrutura da Tese

Nesta tese, o nosso objetivo é o de examinar as dificuldades que surgem na tentativa de construir uma semântica para a lógica intuicionista de primeira ordem desde "o interior" do intuicionismo. Tentamos caracterizar uma semântica intuicionista ideal para a lógica intuicionista de primeira ordem, e compará-la com as semânticas usualmente propostas. Para este fim, deveremos discutir quando uma teoria é uma semântica, e quando é uma semântica intuicionista. A nossa pesquisa terá um perfil normativo, descritivo e valorativo. Pretendemos tratar as seguintes questões: (i) qual é o objetivo de uma semântica; (ii) quais as restrições que devem ser impostas aos esquemas de inferência, e aos conceitos de uma teoria para que esta teoria possa ser considerada uma semântica intuicionista; (iii) qual o caráter de uma teoria semântica, é ela um corpo de conhecimentos ordenados dedutivamente, ou, ao contrário, uma teoria descritiva; (iv) deve uma semântica fundamentar a prática da matemática intuicionista, em outros termos, deve ela fornecer uma explicação do porque devemos raciocinar de maneira intuicionística?

A conclusão deste trabalho é negativa, no sentido explicado a seguir. Suponhamos que nosso ideal de teoria semântica intuicionista exige: (i) que a teoria seja dedutiva, no mesmo sentido em que a geometria de Euclides o é; (ii) que os seus esquemas de inferência sejam aceitáveis intuicionisticamente, ou seja, que sejam os derivávéis no formalismo de Heyting para a lógica de predicados de primeira ordem; (iii) que os seus conceitos estejam definidos de um modo tal que qualquer intuicionista os considere aceitáveis (deveriam ser excluídos, por exemplo, conceitos definidos impredicativamente); (iv) que a teoria deve fundamentar a prática da matemática intuicionista, então sob estas condições nosso ideal é irrealizável. Não somente nenhuma das teorias semânticas usuais o satisfazem como também nenhuma teoria pode satisfazê-lo. Neste trabalho procuramos discutir a razoabilidade deste ideal e as possíveis vias para enfraquecê-lo.

A tese esta composta de uma introdução, cinco capítulos e a conclusão. A seguir faremos um breve resumo do seu conteúdo.

Na próxima secção desta introdução serão apresentados um inventário e uma classificação das semânticas propostas para a lógica intuicionista de primeira ordem. A classificação levará em conta o objetivo destas teorias (se constituem, por um lado, uma caracterização das constantes lógicas intuicionistas, ou, por outro lado, uma caracterização do conceito de verdade lógica) e seus conceitos e esquemas de inferência (se são aceitáveis intuicionisticamente ou não). Na última secção desta introdução serão discutidas as interpretações da matemática intuicionista que subdividimos em três: (i) a trivialização do intuicionismo (Tait), que sustenta ser a matemática intuicionista um subsistema da matemática clássica; (ii) a tese semântica (Dummett), que sustenta ser a matemática intuicionista uma concretização de princípios cuja justificação está na filosofia da linguagem; (iii) a tese ontológica (Brouwer), que afirma ser o caráter dos enunciados matemáticos resultado de uma construção dos objetos matemáticos pelo sujeito.

No primeiro capítulo serão discutidas as propriedades que uma semântica intuicionista para a lógica intuicionista deveria possuir.

No segundo capítulo serão expostas as teorias semânticas usuais para a lógica proposicional intuicionista. Nossa contribuição não está nos resultados obtidos, mas no seu modo de apresentação. Usaremos, nesta apresentação, tabelas semânticas como as de Fitting [1969]. Contudo, nos afastamos de Fitting ao procurar provas que sejam intuicionisticamente aceitáveis. Por esta razão demonstraremos a equivalência entre os modelos de Kripke, árvores de Beth e modelos topológicos via o teorema de representação para álgebras finitas de Heyting (cuja prova é aceitável do ponto de vista intuicionista), enquanto Fitting emprega para o mesmo fim o lema de Zorn. Não é possível obter uma metateoria intuicionisticamente aceitável para a lógica de predicados intuicionista, o mesmo não ocorrendo com a lógica proposicional intuicionista. Por esta razão achamos preferível apresentar separadamente as duas lógicas.

No terceiro capítulo trataremos das semânticas usuais para a lógica de predicados intuicionista. Novamente usaremos tabelas de Beth. Procuraremos destacar quais são os passos da prova de completude relativa aos modelos de Kripke e Beth, da lógica de predicados intuicionista, que não são intuicionisticamente aceitáveis.

No quarto capítulo nos ocuparemos da noção de modelo interno, que fornece uma teoria semântica diferente daquela das árvores de Beth e Kripke. Um modelo interno consiste de uma *espécie* D (o equivalente intuicionista de um conjunto) sobre a qual tomam valor as variáveis individuais, uma assinalação de predicados matemáticos as letras de predicado de uma fórmula da linguagem e de indivíduos fixos de D as constantes da linguagem. A noção de validade interna é mais forte que a noção de validade sobre árvores de Beth (toda fórmula internamente válida é válida sobre toda árvore de Beth). Este fato se demonstra através de meios intuicionisticamente aceitáveis. Kreisel demonstrou através de meios intuicionistas que se a lógica de predicados intuicionista é internamente completa então devemos admitir o princípio de Markov como um princípio da matemática intuicionista, e reciprocamente. Discutiremos este teorema de limitação e suas conseqüências. Além disso nos ocuparemos de outro teorema de limitação formulado por Kreisel (provado usando a lógica clássica), o qual afirma que, admitindo a tese de Church, o conjunto de fórmulas construtivamente válidas da lógica de predicados intuicionista não é recursivamente enumerável. Finalmente examinaremos se a teoria das árvores de Beth generalizadas constitui uma semântica apropriada para a lógica intuicionista de primeira ordem.

No quinto capítulo nos ocuparemos do problema de obter provas canônicas na lógica intuicionista de predicados e na aritmética intuicionista, com o intuito de determinar se a caracterização intuitiva das constantes lógicas intuicionistas em termos de "ter uma prova de ..." está livre de circularidade. Cumprido este objetivo tentaremos determinar se as árvores de Beth concordam com esta caracterização intuitiva das constantes lógicas.

Na conclusão do trabalho faremos o balanço final do assunto.

Duas advertências devem ser feitas antes de prosseguir.

Primeiro, nesta tese nos ocupamos da lógica intuicionista. Ora, nas primeiras formulações do intuicionismo[1] a lógica aparece em um papel subordinado à matemática. Nestas primeiras formulações, a lógica intuicionista consiste de um inventário das formas de raciocínio aceitáveis pela matemática intuicionista. Possuímos formalismos que representam a lógica intuicionista, deles o mais conhecido é o cálculo de predicados de Heyting. Devemos ter em conta que os sistemas formais foram criados originalmente com o objetivo de provar a consistência das teorias informais formalizadas. A construção destes sistemas foi feita dentro de um programa de fundamentação da matemática clássica. Tal programa consistia em fundamentar as diferentes teorias matemáticas (aritmética, análise e geometria) provando a não-contraditoriedade das mesmas. Implicitamente neste programa fazia-se uso da suposição leibniziana de que a não-contraditoriedade garante a existência. Porém o intuicionismo rejeita esta suposição. Embora possamos demonstrar por meio de uma prova de consistência relativa que a teoria de conjuntos não é contraditória, os intuicionistas não a aceitam. Eles não a aceitam pelo fato de que os objetos desta teoria não são construtíveis. Existe outro argumento que sustenta a rejeição intuicionista da identificação de uma teoria matemática com o formalismo que a representa, o argumento consiste em dizer que as formas de raciocínio intuicionista não podem ser completamente exprimidas em um sistema formal. Nas palavras de Heyting: "It must be remembered that no formal system can be proved to represent adequately an intuitionistic theory. There always remains a residue of ambiguity in the interpretation of the signs, and it can never be proved with mathematical rigour that the system of axioms really embraces every valid methods of proof" Heyting ([1956] pág. 102).

Somos conduzidos a traçar a seguinte distinção, de um lado o que chamaremos de lógica intuicionista intuitiva (ou não formalizada), e de outro lado a representação da lógica intuicionista por meio de cálculos axiomatizados, como o cálculo proposicional intuicionista (CPI) e o cálculo de predicados intuicionista, ou cálculo de predicados de Heyting (CQI). A lógica intuicionista não formalizada consiste do inventário dos modos de raciocínio admissíveis na matemática intuicionista, e deve ser entendido como um conjunto de regras de raciocínio e não como um cálculo axiomatizado. Um problema a ser resolvido é o da determinação do grau no qual os formalismos CPI e CQI representam o que chamamos de lógica intuicionista intuitiva. Para a lógica proposicional, Prawitz ([1978] pág. 34) formula este problema nos seguintes termos: (i) são definíveis através das constantes lógicas de CPI ($\{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee\}$) todas as operações lógicas cujo significado é dado através de condições para afirmar enunciados onde tais operações sejam o símbolo lógico principal?; (ii) todas as inferências corretas são deriváveis a partir das regras de inferência deste formalismos? Prawitz considera que a resposta à primeira questão é negativa. A situação seria análoga a situação existente entre a semântica clássica ordinária e os operadores modais. Os operadores modais representam operações sobre enunciados (sentencial operations) cujo significado está determinado pelas condições de verdade dos enunciados onde eles ocorrem, mas não são definíveis no cálculo proposicional clássico. Prawitz conjectura que a resposta a segunda questão é afirmativa, mas esclarece que a resposta "requires a definition of logical correctness, which I am not quite sure how to give" ([1978] pág. 34).

Pelas considerações anteriores, quando procuramos uma semântica para a lógica intuicionista seria desejável que obtivéssemos alguma coisa mais que modelos onde CPI e CQI fossem corretos (sounds) e completos. Seria desejável ter uma teoria dedutiva[2] que desenvolvesse do modo mais explícito possível nossa compreensão intuitiva das constantes lógicas intuicionistas, uma teoria que fosse ela mesma intuicionisticamente aceitável. Uma tal teoria é desejável porque em uma semântica procuramos dar uma representação clara dos conteúdos dos conceitos de verdade e validade, cujos significados conhecemos de modo implícito, não discursivo.

Segundo, nesta tese não nos ocuparemos da teoria das construções de Goodman-Kreisel, nem dos modelos resultantes da análise categorial da lógica, nem dos modelos de feixes. Nossa análise está limitada as semânticas mais tradicionais: árvores de Beth e de Kripke, modelos topológicos, modelos internos, realizabilidade, "proof interpretation". A teoria das construções de Goodman ainda não atingiu uma elaboração definitiva, por outro lado as teorias produzidas pela análise categorial são teorias que usam a lógica clássica. Embora nos últimos doze anos a investigação metamatemática sobre a lógica intuicionista teve um desenvolvimento muito grande, acreditamos que os resultados atingidos são irrelevantes para a discussão dos problemas aqui expostos, estes problemas são conseqüência de teoremas de limitação formulados por Kreisel e Gödel.

As observações, notas e comentários nos pertencem, como também a discussão dos resultados aqui expostos. Sobre a parte estritamente matemática da tese diremos o seguinte: o conteúdo dos capítulos II e III nos pertence, com exceção das provas de completude das tabelas de Beth sobre os modelos de Kripke. Os dois teoremas expostos no capítulo IV são de Kreisel, mas os lemas que permitem a sua demonstração foram refeitos por nós. Quando um resultado é reelaboração de um resultado alheio colocamos um asterisco diante do mesmo, quando um resultado é totalmente alheio indicamos entre parênteses o nome do autor. Nos casos restantes a prova do resultado é completamente nossa. A discussão da importância destes resultados para obter uma semântica intuicionista da lógica intuicionista nos pertence. A análise do conceito de validade interna é nosso. O teorema de normalização exposto no capítulo V é de Prawitz, mas o conteúdo restante deste capítulo é nosso. Também são nossas as provas de equivalência dos diferentes cálculos.

Os temas aqui expostos tem um lugar muito pequeno nas exposições sobre intuicionismo realizadas pelos lógicos de formação exclusivamente matemática. O antecedente imediato deste trabalho é o livro do lógico e filósofo inglês M. Dummett, Elements of Intuitionism. Acreditamos ter realizado uma análise mais detalhada que aquela exposta no livro de Dummett. Ao leitor cabe a comprovação do que acabamos de dizer.

2- Inventário das Diferentes Teorias Semânticas

Foram propostas diferentes semânticas para a lógica intuicionista de primeira ordem. Quanto aos objetivos podemos classificá-las em: as que tentam analisar o conceito de verdade lógica intuicionista, ou seja, verdade pela forma gramatical; e as que fornecem uma explicação das constantes lógicas intuicionistas. Quanto aos métodos podemos classificá-las em: as que usam conceitos e raciocínios aceitáveis intuicionisticamente, ou seja, as que são teorias intuicionistas; e as que são teorias clássicas. Deste modo dividimos as teorias semânticas em quatro classes.

A primeira classe está constituída por aquelas teorias que daqui para frente chamaremos de redutivas. Estas propoem-se a esclarecer conceitos semânticos como os de verdade intuicionista, ou validade intuicionista, desde um ponto de vista exterior ao intuicionismo. Reduzem estes conceitos a conceitos de teorias clássicas, com a ajuda da lógica clássica na metateoria. Não fornecem uma justificação dos modos de raciocínio intuicionista, porque usam formas de raciocínio clássicas, o que torna impossível fundamentar, a partir destas teorias redutivas, uma crítica da matemática clássica. São exemplos desta primeira classe: (i) a redução da lógica proposicional intuicionista ao sistema modal S4, que permite definir a noção de validade intuicionística a partir da noção de validade em S4; (ii) a tentativa de Kleene de caracterizar o conceito de enunciado aritmético intuicionisticamente verdadeiro através do conceito de realizabilidade recursiva[3].

A segunda classe está constituida por aquelas teorias que caracterizam a contribuição das constantes lógicas intuicionistas ao significado dos enunciados da matemática intuicionista em termos de "ter uma prova de ...". Basicamente estas teorias foram sustentadas por Kolmogoroff, Heyting, Dummett e Prawitz[4]. A partir destas teorias Dummett encontrou uma justificação para o seu programa de semântica filosófica cujo objetivo é o de substituir a caracterização do significado lingüístico em termos de condições de verdade, pela caracterização em termos de condições de asserção. Nestas teorias temos uma prova de $p \wedge q$ quando temos uma prova de p e uma prova de q, temos uma prova de $p \vee q$ quando temos ou uma prova de p ou uma prova de q, temos uma prova de $p \to q$ quando dada uma prova de p possamos obter a partir desta prova uma prova de q, temos uma prova de $\forall x\ A(x)$ quando dado um número natural n qualquer temos uma prova de $A(n)$, e finalmente temos uma prova de $\exists x\ A(x)$ quando possamos encontrar um número n tal que tenhamos uma prova de $A(n)$. Teremos uma prova de $\neg p$ quando a partir de qualquer prova de p possamos derivar uma contradição. Esta caracterização possui certas sutilezas nos casos da implicação, da quantificação universal e da negação, das quais nos ocuparemos no capítulo V parte 1.

Esta semântica em termos de "ter uma prova de ..." tem suas vantagens e desvantagens. As vantagens derivam do fato de que o significado dos enunciados está dado em termos de condições de asserção, e não em termos de condições de verdade, fazendo justiça a reivindicação, dos intuicionistas, de que os enunciados da matemática não tem um valor de verdade determinado e independente da nossa capacidade de dar uma prova deles. Assim, conhecemos o significado de um enunciado p quando conhecemos quais são as condições sob as quais podemos afirmar p, isto é, quais são as condições sob as quais podemos afirmar que dispomos de uma prova de p. Estas vantagens foram reconhecidas por Dummett[5]. As desvantagens derivam da imprecisão da teoria. Em primeiro lugar, faltaria determinar em que consiste a prova de um enunciado atômico. Se nos restringimos ao campo da aritmética elementar intuitiva não-formalizada podemos supor que um enunciado atômico é uma equação da forma $a=b$ onde a e b são termos que resultam da aplicação das operações aritméticas elementares $+,-,.,/$ sobre as constantes numéricas. Neste caso, poderíamos estabelecer que uma prova de um enunciado atômico consiste de uma computação. Assim esta primeira dificuldade poderia ser superada. Em segundo lugar, a explicação do significado dos enunciados da matemática intuicionista em termos de "ter uma prova de ..." usa os mesmos conectivos que aparecem na linguagem da matemática intuicionista dentro da metalinguagem. Também neste caso poderíamos superar a dificuldade se supormos que esta explicação é feita em termos de uma linguagem neutra, entre o uso intuicionista e o uso clássico dos conectivos e quantificadores. A superação da dificuldade apontada seria feita através da suposição de que o enunciado "ter uma prova de p" é decidível[6]. Em terceiro lugar, há uma dificuldade cuja resolução não aparece como imediata, e que de fato constitui o pricipal empecilho para esta segunda classe de semânticas. Consideremos, por exemplo, o caso da caracterização do significado de uma expressão do tipo $p \to q$, com p e q proposições atômicas, o que acontece quando o antecedente p é obtido por meio de $\to$

eliminação, isto é, por Modus Ponens? O razoável seria descartar este caso com a finalidade de evitar circularidades na caracterização de $\rightarrow$. Similarmente, no caso de uma expressão do tipo $\neg p$, p poderia ter sido obtida através de $\neg$ eliminação, a partir de q e $\neg q$, isto é por meio da regra ex falsum sequitur quodlibet. O mesmo acontece no caso de $\forall x\ A(x)$, $A(n)$ poderia ter sido obtida por instanciação universal a partir de $\forall x\ A(x)$. Em geral, trata-se de definir a expressao "ter uma prova de pCq" ou de definir a expressão "$C'p$" onde C é um conectivo binário e C' é ou um conectivo unário ou um quantificador, exigimos que as provas de p (ou de q) requeridas pela definição não sejam obtidas através de C eliminação nem C' eliminação. Assim, no caso da negacao exigiremos que a prova de p nào seja obtida por meio de ex falsum sequitur quodlibet, e no caso dos quantificadores pediremos que $A(n)$ não seja obtida por meio de simplificação universal ou existencial. Entretanto, isto não resolve todas as dificuldades pois, observemos que na verdade não é suficiente exigir, no caso de $p\rightarrow q$, que a prova de p não tenha sido obtida através de Modus Ponens, dado que no caso de p ter sido obtido a partir de $p\wedge q$ através da regra de simplificação deveríamos estar na posse do significado de $p\wedge q$. Para isto deveríamos exigir que as provas de p e de q, requeridas na caracterização de $p\wedge q$, não somente estejam livres de simplificação, mas também livres de Modus Ponens, se queremos evitar circularidades na caracterização de $p\rightarrow q$. Consequentemente o mais razoável, no caso de $p\rightarrow q$, é exigir que a prova do antecedente esteja livre de qualquer regra de eliminação de constantes lógicas. Se p fosse uma proposição aritmética a prova de p deveria consistir de uma computação. Extendemos as considerações expostas acima ao caso geral, quando estamos interessados na determinação do significado de $A\rightarrow B$, com A e B proposições moleculares quaisquer. Desta exigência de que não ocorra nenhuma regra de eliminação de conectivos e quantificadores na prova do antecedente A, infere-se que toda proposição que ocorre em uma demonstração de A seja uma componente de A. Esta é a chamada propriedade da sub-fórmula. Logo, como condições necessárias para evitar circularidades na caracterização de $A\rightarrow B$ estaríamos exigindo: (i) que toda prova Π do antecedente A possa ser transformada em uma prova Π' de A com a propriedade de que toda proposição que ocorre em Π' seja componente de A; (ii) que além disto Π' possa ser transformada em uma prova de B. Além disto, exigiremos que estas transformações sejam feitas com procedimentos finitistas.

Suponhamos que as constantes lógicas a ser caracterizadas ocorrem em enunciados da aritmética intuicionista. Não é verdadeiro que podemos satisfazer a condição (i) exposta acima em todos os casos. Não podemos afirmar que dada uma prova Π de uma proposição A qualquer possamos transformá-la sempre numa prova Π' de A com a propriedade da sub-fórmula. Supor isto é equivalente a afirmar que temos uma demonstração finitista da consistência da aritmética intuicionista (e consequentemente da aritmética clássica), pois sob essa suposição não poderia existir uma demonstração de 0=1. Se existisse uma tal demonstração, então deveria existir uma prova de 0=1 livre de regras de eliminação de constantes lógicas, o que é impossível. Poderíamos enfraquecer a exigência de que a passagem de Π a Π' seja feita apenas através de procedimentos finitistas. Poderíamos aceitar procedimentos intuicionistas que não sejam finitistas. Mas, neste caso, sendo a nossa metateoria taõ generosa perderíamos poder explicativo. Estaríamos usando no nível metateórico formas de argumentação que a teoria ela mesma deveria fundamentar. Isto é o que ocorre com uma teoria redutiva, dado que reduziríamos a semântica a uma teoria da demonstração (proof theory) intuicionista.

A terceira classe de teorias semânticas é aquela que chamaremos de classe das teorias modelísticas. Esta teorias procuram fornecer uma semântica para a lógica intuicionista usando estruturas matemáticas com forma de árvores (modelos de Beth e de Kripke). Na verdade, tais estruturas não fonecem uma interpretação do que chamamos lógica intuicionista intuitiva não-formalizada, mas de sua representação através de sistemas formais como o cálculo de predicados de Heyting. Tres dificuldades se apresentam para que estas teorias sejam uma semântica adequada para a lógica intuicionista. Primeiro, as provas de completude do cálculo de predicados de Heyting sobre os modelos de Beth e de Kripke não são intuicionisticamente admissíveis. Se existisse uma prova intuicionista da completude do cálculo de predicados de Heyting ou sobre os modelos de Beth ou sobre os modelos de Kripke, então existiria uma prova intuicionista do princípio de Markov $\forall n(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge \neg\neg\exists n P(n) \rightarrow \exists n P(n)$, principio que não é intuicionisticamente aceitável (ver o capítulo IV desta tese). Na verdade, demonstra-se que de toda prova inticionisticamente aceitável dessa completude pode ser obtida uma prova intuicionista do princípio de Markov. Desde um ponto de vista puramente matemático esta primeira dificuldade poderia ser evitada se substituimos as árvores de Beth comuns pelas árvores de Beth generalizadas.

Basicamente um modelo, ou árvore de Beth (como um modelo ou árvore de Kripke), consiste em um conjunto G ordenado por uma relação R tal que $\langle G,R\rangle$ tenha estrutura de árvore, e em uma relação V entre os elementos de G e as fórmulas do cálculo de predicados de Heyting. As seguintes três condições devem ser satisfeitas: (i) para toda fórmula atômica A e todo elemento $\Gamma \in G$ ou $V(\Gamma,A)$ ou não $V(\Gamma,A)$; (ii) se $V(\Gamma,A)$ e $\Gamma R \Delta$ então $V(\Delta,A)$; (iii) para todo nodo Γ não é verdade que $V(\Gamma,\bot)$, onde $\bot$ é o símbolo que denota o absurdo, isto é representa uma contradição. Intuitivamente podemos interpretar $V(\Gamma,A)$ como "no instante denotado pelo nodo Γ temos uma prova de A". Eliminando a condição (iii) acima obtemos as árvores de Beth generalizadas. Podemos dar um teorema de completude da lógica de predicados intuicionista sobre as árvores de Beth generalizadas que seja intuicionisticamente aceitável[7]. Neste caso torna-se difícil dar uma interpretação de $V(\Gamma,\bot)$ que seja também intuicionisticamente aceitável, dado que se admitimos que a matemática intuicionista não é contraditória então a interpretação "no instante Γ provamos uma contradição" é absurda. Em resumo, embora usando árvores generalizadas de Beth possamos construir uma semântica satisfatória desde um ponto de vista matemático, o problema do valor filosófico desta semântica fica em aberto.

Existem mais duas outras dificuldades apresentadas pelas semânticas em termos de árvores de Beth e de Kripke. Poderíamos perguntar-nos porque estes modelos fornecem uma semântica para a lógica intuicionista, dado que através deles não associamos significados às fórmulas mas apenas um esquema de uma possível demonstração destas fórmulas. A esta questão responderíamos que uma semântica para a lógica intuicionista deve ser expressada em termos das condições de asserção de um enunciado, e dado que as consdições de asserção derivam das condições de demonstração, então a representação dos passos possíveis da demonstração de uma fórmula constiutuiria, na verdade, uma associação de significado a esta fórmula. Mas isto nos conduz a considerar uma terceira dificuldade. Suponhamos que através de um modelo de Beth forneçamos uma associação implícita de significados as fórmulas. Dado que estes significados originalmente estão dados em termos de "ter uma prova de ... então deveria existir uma concordância entre a semântica dada pelas árvores de Beth e aquela dada em termos de "ter uma prova de ...".

Sobre uma árvore de Beth está definida uma relação $\Vdash$ entre fórmulas do cálculo de predicados de Heyting e nodos da árvore deste modo: se A é atômica, diremos que $\Gamma \Vdash A$ se existe uma barreira S de Γ tal que para todo nódulo Δ pertencente a S temos $V(\Delta, A)$. Uma barreira S de um nódulo Γ é um conjunto de nódulos tal que todo caminho (path) que atravessa Γ contém exatamente um nódulo pertencente a S. A partir disto definímos recursivamente a relação $\Vdash$ entre fórmulas do cálculo de predicados de Heyting e os nódulos de uma árvore G. As árvores de Beth e de Kripke são distintas nas condições sob as quais podemos afirmar $\Gamma \Vdash X \vee Y$, $\Gamma \Vdash \exists x Y(x)$; para as árvores de Beth as respectivas afirmações dependem do que aconteça nos nódulos posteriores a Γ, isto é, nos nódulos Δ tais que $\Gamma R \Delta$, para as árvores de Kripke as condições serão "locais" no sentido que dependem de Γ mesmo. Consequentemente em uma árvore de Beth infinita a relação $\Vdash$ não é em princípio decidível.

Na teoria intuicionista da demonstração usualmente distinguimos provas canônicas e demonstrações [8]. Em uma demonstração de uma proposição da matemática intuicionista podemos usar o princípio $X \vee \neg X$ quando X for decidível, sem estar obrigados a dar ou uma prova de X ou uma prova de $\neg X$, também podemos afirmar $\exists x Y(x)$ no caso de possuir um procedimento para encontrar um m tal que $Y(m)$, sem estar obrigado a efetuar todos os passos desse procedimento. Assim, por exemplo, no percurso de uma demonstração matemática podemos usar a disjunção ou n+1 é primo ou n+1 não é primo, para um n particular, sem estar obrigado a provar um ou outro dos membros da disjunção. Contrariamente, em uma prova canônica nenhum procedimento pode ficar sem ser efetuado, todas as operações em princípio indicadas como factíveis devem ser realizadas. Suponhamos que G seja uma árvore de Beth. Pelas condições sob as quais podemos afirmar $\Gamma \Vdash X \vee Y$ e $\Gamma \Vdash \exists x Y(x)$ devemos interpretar $\Gamma \Vdash Z$ como "no instante Γ temos uma demonstração de Z" e não como "no instante Γ temos uma prova canônica de Z". Mas a expressão "agora temos uma demonstração de Z" é decidível, e ao contrário a expressão "$\Gamma \Vdash Z$"

não é decidível.

Além das árvores de Beth e de Kripke, temos uma outra teoria modelística, a chamada teoria dos modelos internos. Esta teoria satisfaz a exigência de definir os conceitos semânticos (validade sobre um modelo, validade em geral) em termos de interpretações associadass as fórmulas do cálculo de predicados de Heyting, interpretações que as transformam em proposições. Aqui o conceito chave é o conceito de validade interna ou validade por substituição. Uma fórmula do cálculo de predicados de Heyting será internamente válida quando em todos os casos nos quais substituimos letras de predicado por predicados determinados e símbolos de constante por indivíduos pertencentes a um domínio determinado, obtemos uma proposição da matemática intuicionista verdadeira. Lamentavelmente, prova-se através de argumentos intuicionisticamente aceitáveis, que se o cálculo de predicados de Heyting fosse internamente completo, isto é, se toda fórmula internamente válida fosse teorema do cálculo de predicados de Heyting, então o princípio de Markov poderia ser demonstrado na matemática intuicionista[9]. Para os modelos internos existe, além desta, outra dificuldade: se admitimos a tese de Church podemos provar que o conjunto de fórmulas construtivamente válidas não é recursivamente enumerável, onde entendemos por fórmula construtivamente válida aquela fórmulas que torna-se verdadeira quando é interpretada em termos de funções construtivas e espécies cujas definições não contenham parâmetros para sequências de escolha[10].

Além destas três classes de teorias semânticas (redutivas, em termos de "ter uma prova de ..." e modelísticas) temos uma quarta classe de teorias semânticas. Na verdade, esta quarta classe não está formada por uma teoria dedutiva, no sentido de que as proposições estejam ordenadas como partes de uma cadeia dedutiva. Podemos falar aqui de uma "proto-teoria". Esta teoria foi formulada por Heyting em 1931[11] e posteriormente, devido as suas dificuldades, foi abandonada por ele mesmo. Basicamente as dificuldades a que nos referimos consistem na impossibilidade de uma formulação matematicamente fértil da teoria. Na exposicão desta teoria observamos a influência da fenomenologia de Husserl. Em seu artigo de 1931 "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik" Heyting traça uma distinção entre proposição (Aussage) e asserção de uma proposição (Satz). Uma proposição expressa uma expectativa, por exemplo, a proposição "a constante C de Euler é racional" exprime a expectativa de que possam ser encontardos dois números *a* e *b* tais que $C=a/b$. Heyting usa o termo intenção (Intention) para designar o que nós chamamos de expectativa. O conceito semântico chave não é mais o conceito de verdade, mas o conceito de satisfação de uma intenção (Die Erfülung der Intention). Quando a intenção expressada pela proposição tenha sido satisfeita afirmamos a proposição. Um problema matemático está dado através de um intenção. Estára resolvido ou quando a intenção, através de uma construção, tenha sido satisfeita, ou quando se demonstra que a intenção leva a uma contradição. Para Heyting a afirmação de uma proposição não é uma proposição. É a determinação de um fato empírico, isto é, a satisfação da intenção exprimida pela proposição. Mas, o que pode ser matematicamente considerado não são as intenções e sim a prova das proposições, isto é, as construções matemáticas que satisfazem as intenções.

Concluímos expondo o seguinte quadro.

Teorias semânticas para a lógica intuicionista de primeira ordem

Teorias redutivas	Realizabilidade (Kleene) Interpretação modal
Teorias em termos de prova (proof interpretation)	Heyting-Kolmogoroff-Dummett-Prawitz
Teorias modelísticas	Árvores de Beth e de Kripke Modelos topológicos Árvores de Beth generalizadas Modelos internos
Teoria intencional	Brouwer e Heyting (1931)

3 - Interpretações da matemática intuicionista

Dado que a lógica intuicionista deriva da matemática intuicionista, seria adequado dizer alguma coisa sobre a interpretação desta última. Acerca deste tema existem duas teses rivais. Chamaremos a primeira de tese ontológica. Foi formulada explicitamente por Beth[12] ([1959] cap. 15) e Quine [1953] e implicitamente por Brouwer. A segunda chamaremos de tese semântica e foi formulada por Dummett ([1978] cap. 14 e [1977] cap. 7) e por Prawitz [1977].

A primeira tese afirma ser o intuicionismo matemático uma concepção sobre a existência matemática: só são admissíveis aquelas entidades que possam ser construídas por nós. Podemos formular três objeções a esta tese. A primeira objeção repousa na ambiguidade do termo "construtivo"[13]. A segunda objeção repousa na impossibilidade de distinguir entre formas de construtivismo não intuicionistas (como o construtivismo de Herman Weyl ou o construtivismo de Hao Wang) e matemática intuicionista. A terceira objeção repousa sobre a dificuldade de derivar, a partir da tese ontológica, a rejeição do princípio do terceiro excluído. Um possível caminho para derivar esta rejeição consistiria na afirmação de que a inaplicabilidade do princípio deriva do fato de que as entidades matemáticas são produtos de nossa mente, e não são entidades que existam em si independentemente da nossa capacidade de concebê-las. Mas, pensemos agora no enunciado "nas comédias perdidas de Menandro há um personagem que nomeia Agamenão". Este é um enunciado que satisfaz as seguintes condições: (i) o enunciado refere-se à personagens de ficção que somente tem existência como criações do espírito humano; (ii) não temos modos de decidir se o enunciado é ou não verdadeiro, desde que as comédias estão perdidas; (iii) se simbolizamos este enunciado por p devemos afirmar $p \vee \neg p$.

A segunda tese, a tese semântica, afirma que o intuicionismo matemático exemplifica no âmbito da matemática uma determinada concepção sobre o significado lingüístico. As afirmações principais desta tese são: (i) os enunciados da matemática tem um significado por si mesmos e não como parte de uma teoria empírica que os use, por exemplo como parte de uma teoria da física; (ii) este significado deve ser explicado em termos de condições de asserção e não em termos de condições de verdade; (iii) o significado de um enunciado deve ser manifestado no uso, na verdade consiste no uso do enunciado. Destas a afirmação principal é a (iii), e a partir dela são deduzidas as outras duas.

A afirmação (iii) acima é uma tese que Dummett atribui a Wittgenstein. Para Dummett existiriam três razões para afirmar (iii). Primeira, o significado de uma expressão qualquer de uma linguagem particular deve ser comunicável, e a comunicação deve manifestar-se, objetivar-se. "To assume that there is some ingredient in the meaning of the sentence which cannot become manifest in the use made of it, it is to assume that part of the meaning cannot be communicated" (Prawitz [1977] pág. 4). "... the meaning of a statement consists solely in its role as an intrument of communication between individuals, just as the powers of a chess-piece consist solely in its role in the game according to the rules. An individual cannot communicate what he cannot be observed to communicate: if one individual associated with a mathematical symbol or formula some mental content, where the association did not lie in the use he made of the symbol or formula, then he could not convey that content by means of the symbol or formula, for his audience would be unaware of the association and would have no means of becoming aware of it" (Dummett [1978] pág. 216). Segunda, aprender uma expressão de uma linguagem é aprender seu uso. "When we learn a mathematical notation, or mathematical expressions, or more generally, the language of mathematical theory, what we learn to do is to make use of the statements of that language: we learn when they may be established by computation, and how to carry out the relevant computations, we learn from what they may be inferred and what may be inferred from them, that is, what role they play in mathematical proofs and how they can be applied in extra-mathematical contexts, and perhaps we learn also what plausible arguments can render them probable" (Dummett [1978] pág. 217). Terceira, o conhecimento do significado de uma expressão de uma linguagem é, em última instância, um conhecimento implícito. Pois, não é possível todas as vezes dar o significado de p através de uma expressão sinônima q, dado que isto implicaria entrar em um regresso infinito. Este conhecimento não é um conhecimento que seja todas as vezes verbalizável, não pode, este conhecimento, consistir na capacidade de poder dar sempre um sinônimo; em algum momento devemos admitir que existem expressões cujo significado podemos conhecer apenas de modo implícito. Possuindo este conhecimento implícito de algumas expressões da linguagem podemos fornecer sinônimos para as expressões restantes. Mas, para atribuir a alguém este conhecimento implícito, este conhecimento deve manifestar-se no comportamento do seu possuidor.Esta manifestação somente pode consistir no uso da expressão. "Hence that knowledge which, in general, constitutes the understanding of the language of mathematics must be implicit knowledge. Implicit knowledge cannot, however, meaningfully be ascribed to someone unless it is possible to say in what the manifestation of that knowledge consits: there must be an observable difference between the behaviour or capacities of someone who is said to have that knowledge and someone who is said to lack it. Hence it follows, once more, that the grasp of the meaning of a mathematical statement must, in general, consists of a capacity to use that statement in certain way or to respond in a certain way to its use by others" (Dummett [1978], pág. 217).

Observemos que o que Dummett faz não é definir, na verdade, "significado" mas a expressão "ter o mesmo significado", e define esta última expressão em termos do uso. "Significado" seria assim o que na epistemologia chamamos um termo teórico, termo este que deve ser relacionado com um dado observável. Podemos obter de (iii) acima dois corolários. O primeiro, se duas pessoas concordam no uso de uma expressão então concordam sobre o significado da mesma. O segundo, se duas expressões são usadas do mesmo modo, então tem o mesmo significado.

O trânsito de (iii) a (i) poderia ser justificado como a seguir. Dummett afirma que tanto o platonismo matemático como o intuicionismo afirmam (i) mas o formalismo não, dado que este encontraría-se ligado a uma espécie de holismo lingüístico vizinho ao proposto por Quine [1953]. Para este último autor, o que realmente é significativo é a totalidade da estrutura conceitual, e não um enunciado isolado pertencente à estrutura. Para Quine, aprenderíamos realmente o sgnificado de um enunciado quando aprendemos toda estrutura conceitual que o engloba. Esta última tese aplicada a filosofia da matemática diria que os enunciados da matemática são significativos somente como partes de uma teoria que os contenha, por exemplo, de uma teoria da física. A crítica de Dummett ao holismo lingüístico repousa na impossibilidade do mesmo em justificar uma crítica do uso lingüístico que provoque uma modificação de nosso quadro conceitual. Mas esta crítica não é totalmente adequada. Quine admite a possibilidade de mudanças de nossos esquemas conceptuais por razões pragmáticas. De fato, a concepção de Quine teria dificuldades para justificar uma mudança de lógica, por exemplo, a clássica pela intuicionista. A crítica de Dummett ao holismo lingüístico tem a seguinte forma: primeira premissa, o significado de um enunciado consiste no uso do mesmo; segunda premissa, o holismo não pode justificar a crítica da nossa prática lingüística, e consequentemente não pode justificar mudanças de significado de expressões como "força", "massa", "elétron", também não pode justificar mudanças nas nossas regras de inferência. Conclusão, o holismo é falso. Mas a segunda premissa não é convincente. Na verdade, o que o holismo não permite é justificar uma mudança de lógica.

É conveniente considerar a (i) e (iii) como afirmações independentes. O que é verdadeiro é que (i) da uma justificação das razões que poderiam conduzir a uma mudança nas regras de raciocínio comumente usadas, isto é, (i) permite justificar uma mudança de lógica, em contraposição a concepção holista. Consideremos a seguinte versão débil do holismo. Admitiremos que todo enunciado obtém seu significado da posição que ele ocupa na rede conceitual, da relação que ele tem com os enunciados restantes. "Thus, on such a view, we may accept a mathematical theory, and admit its theorems as true, only because we find in practice that it server as convenient substitute deep in the interior of the complex structure which forms the total theory: there can be no question of giving a representation of the truth condition of the statements of the mathematical theory under which they may be judged individually as acceptable, or otherwise, in isolation from the rest of language" (Dummett [1978], pág. 219). Nesta versão débil do holismo podemos considerar que existe uma classe de enunciados especiais, com a propriedade de que estes possuem em si mesmos significado independente do resto da linguagem. Por exemplo, se a estrutura lingüística considerada é uma teoria da física, os enunciados da classe especial seriam enunciados observacionais, se a estrutura lingüística considerada é uma teoria matemática, os enunciados da classe especial seriam computações muito simples. Nossa rede conceitual estaria armada de modo tal que todos enunciados restantes obterão seus significados a partir de sua relação com esta classe de enunciados especiais. Teríamos então duas razões para afirmar um enunciado. Primeira razão, quando o enunciado seja verdadeiro pelo seu significado específico, isto é, se o enunciado considerado é um enunciado observacional, exigiremos que concorde com o que a experiência mostra, se o enunciado considerado é um enunciado computacional, exigiremos que ele seja o resultado correto de uma computação. Segunda razão, quando o enunciado seja deduzido a partir de outros enunciados. Mas quando estejam em conflito a primeira e a segunda razão, é a primeira que deve prevalecer, por exemplo, no caso que um enunciado da classe especial possa ser afirmado pela segunda razão, mas não possa ser justificado pela primeira, deveremos rejeitá-lo. Uma teoria holista deste tipo poderia justificar uma mudança dos nossos esquemas conceituais quando a partir de enunciados que estejam situados na parte mais profunda da rede conceitual deduzimos enunciados claramente falsos. Mas, esta versão débil do holismo não poderia justificar uma crítica da matemática clássica, pois para que esta crítica fosse possível ou deveriamos poder inferir na matemática clássica um enunciado computacional falso (o que é impossível), ou embutindo a matemática clássica em uma teoria da física deveríamos poder inferir um enunciado observacional falso, mas neste último caso o erro poderia ser causado pelas hipóteses adicionais de natureza física, e não pela matemática clássica.

Pelo que vimos até agora poderíamos admitir a proposição (i) acima, proposição que afirma que todo enunciado da matemática tem significado por si mesmo, e não pela sua relação com os enunciados restantes da matemática. Podemos generalizar isto a teorias e linguagens quaisquer. Logo, dado que o significado de um enunciado não dependeria de sua relação com os enunciados restantes da linguagem (ou da teoria considerada), então do que dependeria? Dependerá do significado dos constituintes do enunciado, e da forma como esteja composto a partir deles. Para Dummett existem dois aspectos do uso dos enunciados que devem ser considerados: o primeiro aspecto consiste das condições sob as que um enunciado pode ser afirmado; o segundo aspecto consiste das consequências que decorrem desta afirmação. No caso dos enunciados da matemática, a distinção entre os dois aspectos seria a distinção que existe entre as razões para afirmar um enunciado e as consequências inferenciais desta afirmação. Pedimos que exista uma harmonia entre estes dois aspectos de um enunciado. Esta harmonia expressa-se assim: dada uma linguagem L e uma classe de enunciados G pediremos que L+G seja uma extensão conservativa de L no sentido de que não seja possível, através de enunciados de G, deduzir enunciados de L que não possam ser deduzidos através apenas de enunciados de L (Dummett [1978], pág. 221). Assim, (i) permite-nos justificar a crítica intuicionista da matemática clássica, pelo fato de que ela não é uma extensão conservativa da matemática intuicionista. No caso no qual apresentamos uma lógica através de um sistema de dedução natural, exigiremos que exista uma harmonia entre as regras de introdução de constantes lógicas e as regras de eliminação, harmonia esta que consiste no fato de que todo enunciado que possa ser provado, indiretamente, através de regras de eliminação de constantes lógicas, possa ser provado, diretamente, somente através de regras de introducao de constantes lógicas. Observemos que em uma prova que use apenas regras de introdução, os enunciados que ocorrem na prova são de uma complexidade menor que a conclusão. Logo, "we require that the derivation of a statement by inferences involving statements of greater logical complexity shall be possible only when its derivation by the more direct means in some sense already possible" (Dummett [1978], pág. 222).

A afirmação (ii) acima, de que o significado de um enunciado matemático, e generalizando, de qualquer enunciado, deve ser explicado em termos de condições de asserção, e não em termos de condição de verdade, é uma tese já defendida por Dummett no seu artigo "Truth" [1959]. Os argumentos para justificar esta afirmação são muito gerais e pertencem ao âmbito da filosofia da linguagem. Para Dummett (ii) afirma acerca dos enunciados de uma linguagem qualquer aquilo que os intuicionistas afirmam sobre os significados dos enunciados da matemática, quando procuram caracterizar o significado destes enunciados em termos de condições de prova[14]. Mas Dummett também sustenta que (ii) é uma aplicação ao caso particular da linguagem da matemática da sua teoria geral do significado lingüístico expressada na afirmação (iii) acima de que o significado de um enunciado dêve manifestar-se no uso do mesmo. O argumento que justifica o trânsito de (iii) a (ii) é muito complexo e consiste no seguinte: não podemos dar o significado de um enunciado *p* da matemática em termos de um conhecimento das condições de verdade quando não podemos determinar se efetivamente estas condições ocorrem. Isto acontece, por exemplo, quando tentamos determinar o significado da proposição "alguns números ímpares são perfeitos" dando as condições para que esta proposição seja verdadeira, sem poder saber se a condição ocorre ou não. O conhecimento das condições de verdade não sería refletido no uso que fazemos de *p*. Além disto, em que poderia consistir o conhecimento das condições de verdade no caso dos enunciados indecidíveis? É evidente - afirma Prawitz - de que o partidário da teoria de que o significado deve ser expressado em termos de condições de verdade (teoria platônica do significado na terminologia de Dummett) está frente a um dilema: "either he concedes that his principle does not yield any consequences beyond the ones obtained by equating meaning with knowing how to use sentences in proofs, in which case his formulation must be said to be misleading and to introduce an unnecessary detour, or he himself insists that knowledge of truth-conditions trascends any knowledge about proofs, in which case he may have to admit that this trascendence has no empirical consequences, and if so, his principle again fails to add anything to the elucidation of what it is to know the meaning of a sentence and is now also guilty of introducing assumptions without empirical import" (Prawitz [1977], pág. 15).

Podemos formular as seguintes objeções a interpretação da matemática intuicionista expressada na chamada tese semântica. Em primeiro lugar, os argumentos desta tese não consideram em momento nenhum o caráter especificamente matemático dos enunciados cujo significado procura-se analisar. Estamos aqui frnte a uma extrapolação de conclusões obtidas no campo da filosofia da linguagem ordinária a outro âmbito. A proposição (iii) acima também é discutível: alguém poderia aprender a derivar através de tabelas, e/ou poderia aprender a usar enunciados onde ocorram operações de derivação, sem saber o signifcado destes enunciados por ignorar o conceito do limite do quociente incremental. Haack [1977] (pág. 106) formula esta objeção: para que a distinção entre condições assercao e condições de verdade tenha sentido, deveria suceder que ou (a) um enunciado *p* possa ser verdadeiro e não asserssível ou que (b) um enunciado *p* possa ser asserssível e não verdadeiro. Caso contrário todo enunciado seria verdadeiro se e somente se pudesse ser asserssível, e não veríamos a vantagem de substituir uma semântica em termos de condições de verdade por uma semântica em termos de condições de asserssibilidade. Mas (a), para Dummett, é impossível, pois justamente o ataque de Dummett a teoria platônica do significado em termos de condições de verdade consiste em afirmar que uma pessoa que sustente que *p* é verdadeiro e não asserssível deve entender a *p* em "an idiosyncratic sense". Também (b) não é possível. No âmbito da matemática afirmar (b) é afirmar que o falso pode ser demonstrado[15]. Poderíamos contra-argumentar que a distinção entre verdadeiro e asserssível é intencional, mas isto pressupõe a aceitação de uma semântica intencional, justamente aquilo que Dummett, através da desta distinção, procura fornecer (petitio principii).

Além disto se lembramos as considerações de Brouwer sobre a relação entre matemática e linguagem, parece artificial uma fundamentação da matemática intuicionista a partir de considerações extraídas do âmbito da filosofia da linguagem. A linguagem, para Brouwer, serve para comunicar construções matemáticas, mas é a posteriori com relação as construções que comunica. Em adição, a linguagem não está livre de erros, não existe nenhuma linguagem segura para a matemática pura[16]. A concepção wittgensteiniana de que o significado consiste no uso é totalmente alheia ao pensamento de Brouwer, para quem a função da linguagem é a de comunicar idéias e conhecimentos, mas esta função por si mesma não constitui conhecimento. Brouwer poderia ter coincidido com a afirmação aritotélica de que "os sons emitidos pela voz seriam símbolos de estados da alma"[17] e no caso particular da matemática, símbolos para construções mentais. Se admitimos que o intuicionismo matemático deve ser pensado a partir de considerações obtidas da filosofia da linguagem, é incompreensível a crítica de Brouwer ao formalismo de Hilbert. Justamente, esta crítica repousa na desconfiança sobre a capacidade da linguagem de refletir exatamente nosso universo mental que é assumido plenamente como uma entidade extra-lingüística[18].

Em resumo, nenhuma das duas interpretações da matemática intuicionista vistas até agora são satisfatórias. Na verdade, o intuicionismo matemático deveria ser entendido como a realização na filosofia da matemática de um programa inspirado na tese kantiana de que os conceitos sem intuições são vazios, e as intuições sem os conceitos são cegas, e na rejeição cartesiana em conceber um sistema da razão. O intuicionismo matemático não deve ser concebido ou como uma ilustração de algumas teses da filosofia atual ("linguistic turn") ou como uma ilustração de algumas teses da matafísica clássica sobre a existência de entidades ideais[19]

Falta analisar uma terceira interpretação da matemática intuicionista, que foi formulada por Tait [1983]. Esta interpretação conduz a uma banalização da matemática intuicionista. Tait afirma que a matemática intuicionista é um sub-sistema da matemática clássica. Se isto fosse verdade, que sentido teria o cultivo da matemática intuicionista, considerando que seus métodos de prova são mais difíceis que os da matemática clássica? Se não aceitamos a crítica intuicionista à matemática clássica, e pensamos que a matemática intuicionista é somente um sub-sistema da clássica, então a procura de uma prova intuicionista no lugar de uma prova clássica resultará ser um exercício de engenho sem uma genuína significação teórica.

A tese de Tait foi rejeitada através da afirmação de que a análise intuicionista é divergente da análise clássica, e para isto, usa-se o conhecido teorema que diz que toda função definida sobre um intervalo [0,1] é uniformemente contínua. Tait rejeita esta objeção afirmando que aquilo que os intuicionistas entendem pelo termo função é distinto do significado do mesmo termo na matemática clássica. Este tipo de questão é muito difícil de decidir. Sempre que aparentemente existe uma divergência entre duas teorias T e T', surge a tentativa de explicar esta divergência afirmando que as duas teorias falam de coisas distintas. A única divergência inquestionável, entre a matemática clássica e a intuicionista, daria-se quando os principios intuicionistas aplicados a matemátia finitária conduzem a um resultado distinto daquele produzido pelos princípios clássicos aplicados sobre o mesmo domínio. Não conhecemos nenhum resultado deste tipo.

CAPÍTULO I

Características de uma Semântica Apropriada para a Lógica Intuicionista.

A semântica para a lógica clássica procura caracterizar o conceito de verdade pela forma gramatical, ou verdade lógica. Embora o nome "semântica" refere-se ao estudo do significado em geral, e dos significados particulares, podemos dizer que a semântica da lógica clássica ocupa-se em caracterizar aquelas formas gramaticais que por qualquer substituição, gramaticalmente correta, tornam-se enunciados verdadeiros. Isto se deve ao fato de que a lógica clássica ocupa-se do estudo daquelas características do significado lingüístico que são relevantes para determinação da validade de um enunciado, fazendo abstração das características restantes.

Uma semântica para a lógica intuicionista deverá determinar aquelas formas de enunciado, que por substituições categorialmente corretas, dão origem a enunciados demonstráveis. Aqui entendemos por demonstração as demonstrações da matemática não-formalizada. Além disso, uma semântica para a lógica intuicionista deveria mostrar como a demonstrabilidade de um enunciado composto depende da demonstrabilidade dos enunciados componentes, da mesma forma como a semântica clássica mostra como a verdade de um enunciado depende da verdade de seus componentes. A semântica para a lógica clássica não está interessada na forma pela qual chegamos a verdade, por outro lado uma teoria semântica para a lógica intuicionista deveria mostrar a contribuição dos conectivos e quantificadores intuicionistas para a determinação de uma estrutura possível de uma demonstração de um enunciado matemático onde ocorrem estes símbolos lógicos. Isto é, como a forma lógica de um enunciado determina a forma possível de uma demonstração do mesmo.

Estamos, neste tese, interessados pelos objetivos que uma semântica intuicionista para a lógica intuicionista deve atingir, e pelos seus métodos. A semântica para a lógica clássica fornece uma caracterização precisa das condições que uma forma de enunciado deve satisfazer para ser considerada uma forma válida. Esta semântica nos fornece as condições necessárias e suficientes que uma forma de enunciados da lógica de primeira ordem deve satisfazer para ser uma forma válida. Dado que na lógica intuicionista estamos interessados na demonstrabilidade de um enunciado, uma forma de enunciado deveria ser considerada "válida", no sentido intuicionista, quando tendo sido efetuadas as substituições correspondentes (de letras de predicado por predicados específicos, de constantes por elementos de um domínio determinado) resulta uma proposição demonstrável em uma teoria matemática intuicionista determinada. Dado que queremos uma caracterização precisa da noção de validade, a semântica para a lógica intuicionista deveria fornecer, em princípio, sendo dada uma forma de enunciado da lógica intuicionista de primeira ordem, uma caracterização precisa das condições necessárias que uma construção matemática deve satisfazer para poder ser considerada uma demonstração de um caso substitutivo[20] determinado dessa forma (este caso pertencerá a uma teoria matemática determinada T). Também queremos, estando na presença de uma construção determinada, saber se esta construção é uma demonstração de um caso substitutivo de uma forma de enunciado determinada, isto é, queremos também estar com a posse das condições suficientes cuja satisfação por uma construção matemática justifica que esta construção seja considerada uma demonstração de um caso substitutivo de uma forma de enunciado.

Perguntamo-nos agora quais os enunciados que uma semântica intuicionista de primeira ordem deve conter, e quais são os argumentos que devem ser usados nesta semântica. Uma teoria semântica deve ser analítica, ou seja, ela deve fornecer uma explicação de noções cujo significado conhecemos confusamente, isto é, de modo intuitivo. Assim como a semântica para a lógica clássica explicita a contribuição dos conectivos e quantificadores clássicos à verdade dos enunciados onde eles ocorrem, do mesmo modo, uma semântica para a lógica intuicionista deveria tornar explícita a contribuição das constantes lógica intuicionistas à demonstrabilidade dos enunciados (da matemática intuicionista) onde eles ocorrem. Nos dois casos procura-se dar uma caracterização discursiva que sirva como explicação do significado de expressões entendidas intuitivamente. Uma análise é uma decomposição de um acoisa dada, e o resultado da análise não deveria conter outros elementos que aqueles que formam a totalidade previamente dada. Logo, os conceitos de uma semântica para a lógica intuicionista deveriam ter um significado admissível desde um ponto de vista intuicionista intuitivo.

Entre os conceitos de uma teoria semântica distinguiremos aqueles conceitos que denotam estruturas matemáticas interpretativas e aqueles que chamaremos conceitos semânticos propriamente ditos, que denotam relações entre fórmulas da lógica intuicionista de primeira ordem e elementos pertencentes as estruturas matemáticas interpretativas. Parece razoável exigir que a definição das estruturas matemáticas consideradas, e também a definição dos conceitos semânticos propriamente ditos, sejam dadas de modo intuicionisticamente aceitável.

Em Tarski[21] a análise dos conceitos semânticos distingue entre a linguagem dentro da qual falamos e a linguagem sobre a qual falamos, entre metalinguagem e linguagem objeto. Sobre as formas de argumentação admissíveis em uma semântica adequada para a lógica intuicionista podemos dizer o seguinte: nossa linguagem objeto é a linguagem da lógica intuicionista de primeira ordem; e a semântica para esta lógica pertence a metalinguagem. Subjacente ao intuicionismo como filosofia da matemática está uma teoria das ciências dedutivas que nos impede de ser totalmente generosos em relação a metalinguagem de uma teoria. O intuicionismo afirma que o saber deve ser compreendido no seu todo a semelhança de uma árvore, com uma relação de ordem anti-simétrica entre os conhecimentos, esta relação é a relação de fundamentação. A raíz desta árvore é a aritmética intuicionista, cujos princípios são aprendidos intuitivamente junto a noção de número natural. Esta concepção das ciências dedutivas como uma estrutura em forma de árvore é incompatível com uma total liberdade de nossas ferramentas lingüísticas, liberdade que poderia transformar a relação de fundamentação em uma relação simétrica. Se não limitamos nossos intrumentos de prova então a dedução não dá origem a uma relação anti-simétrica entre conhecimentos. Por exemplo, podemos perguntar: é a teoria dos conjuntos o fundamento da aritmética ou é a aritmética o fundamento da teoria dos conjuntos? Se não impomos restrições aos nossos instrumentos de prova que serão em um dos casos restrições na metalinguagem da teoria dos conjuntos, e noutro restrições a metalinguagem da aritmética, podemos afirmar os dois membros da questão acima apresentada[22].

Não podemos ter total liberdade na escolha dos argumentos pertencentes a uma possível semântica para a lógica intuicionista, se queremos construir uma teoria que seja analítica no sentido exposto anteriormente, e que justifique as formas de argumentação e os princípios da matemática intuicionista. Embora matematicamente possamos edificar uma teoria que forneça modelos completos, sempre devemos ter presente o problema da justificação filosófica desta teoria. Aqui nos interessa poder determinar se devemos aceitar na nossa teoria semântica para a lógica intuicionista argumentos que sejam justificados desde o ponto de vista da lógica clássica, mas não desde o ponto de vista da lógica intuicionista. Acerca deste tema podemos dizer os seguinte: a lógica intuicionista de primeira ordem é um sub-sistema da lógica clássica "per accidens". Se consideramos toda a lógica intuicionista, incluindo a lógica de segunda ordem, nos vemos frente a frente com uma lógica divergente da lógica clássica. Isto não é surpreendente levando em conta que existe uma diferença na caracterização das constantes lógicas em ambas as lógicas, divergência esta que se reflete com plenitude na lógica de segunda ordem[23]. Além disto, o intuicionismo apresentou-se como uma filosofia da matemática. A formalização dos modos de raciocínios aceitáveis na matemática intuicionista sucedeu posteriormente. Como filosofia da matemática, o intuicionismo procurou realizar o ideal tradicional de fundamentar a matemática. A noção de fundamento não foi claramente definida na história da filosofia, entretanto uma concepção parece básica: o fundamento tem prioridade sobre o fundado. Contudo, a determina,cão da natureza desta prioridade é problemática. Para Aristóteles esta prioridade pode ser entendida como prioridade por natureza ou como prioridade em relação a nós[24]. Dado que o intuicionismo rejeita qualquer filosofia realista da matemática, não aceita portanto a prioridade por natureza, aceita somente a prioridade referente a nós, entendendo consequentemente que o fundamento deve ser gnosiologicamente primeiro com relação ao fundado. Ainda assim não está determinada totalmente a prioridade do fundamento. Se nós não limitamos as nossas ferramentas dedutivas, esta prioridade não pode ser considerada uma prioridade por dedução, no sentido que do fundamento infere-se o fundado não sendo verdadeira a recíproca. Em qualquer caso, para o intuicionismo, o fundamento de toda teoria dedutiva encontra-se na aritmética elementar intuitiva dos números naturais, e qualquer extensão dos conhecimentos matemáticos deverá ser feita através de uma linguagem que refira-se, em ultima instância, à aritmética elementar.

O intuicionismo mostra-se assim solidário com uma concepção não holista do significado lingüístico. Qualquer aprendizagem do uso das expressões de uma linguagem deverá ser feita a partir do domínio do significado de um fragmento da mesma linguagem, podendo serem introduzidos novos instrumentos lingüísticos somente se estes podem ser referidos a este fragmento. Isto é programático, e na verdade, vago. De tudo que foi aqui exposto, podemos extrair a seguinte máxima: não devemos ser totalmente generosos na escolha dos instrumentos de prova de uma semântica para a lógica intuicionista. É claro que não exigiremos que uma semântica para a lógica intuicionista de primeira ordem use apenas argumentos representáveis em uma versão formalizada da mesma lógica intuicionista ou representáveis na aritmética formal de Heyting (HA). Mas podemos, pelas considerações anteriormente expostas, exigir que estes argumentos sejam aceitáveis na aritmética intuicionista elementar não formalizada.

De fato, vimos que existem diferentes semânticas para a lógica intuicionista de primeira ordem. De agora em diante , até o final deste capítulo, nos referiremos àquelas teorias que apresentam modelos com estruturas de árvores (árvores de Beth e de Kripke), e àquelas que apresentam como modelos espaços topológicos. Os modelos do primeiro tipo podem ser pensados como uma estrutura em processo de geração, e os modelos do segundo tipo como uma totalidade infinita dada. Por aquilo que foi exposto anteriormente deveríamos exigir destes modelos tres coisas: primeiro, que formem parte de uma semântica que possa ser exposta matematicamente, de modo intuicionisticamente aceitável; segundo, que concordem com a caracterização intuitiva das constantes lógicas intuicionistas em termos de "ter uma prova de ..."; terceiro, que a semântica que usa estes modelos possa fornecer uma explicação dos significados usados e aprendidos intuitivamente e possa dar uma justificação do uso destes significados. A terceira exigência indica que nossa teoria deve representar um ganho teórico sobre a compreensão intuitiva. A teoria deve consistir de um corpo dedutivo que faça explicitos os significados das expressões.

Nessas semânticas baseada sobre árvores de Beth, de Kripke, ou modelos topológicos, pela primeira exigência exposta no parágrafo antecedente, a caracterização do conceito "enunciado válido" deverá ser feita através de uma linguagem que seja intuicionisticamente aceitável. Este "desideratum" é atingido quando estas semânticas são semânticas para a lógica proposicional intuicionista. Mas não pode ser atingido na lógica de predicados intuicionista, porque as provas de completude desta lógica sobre os modelos de Beth, de Kripke e topológicos não são intuicionisticamente aceitáveis. Qualquer prova de completude da lógica de predicados intuicionista sobre estes modelos implicará o princípio de Markov, princípio que não é intuicionisticamente admissível pelo significado intuitivo das constantes lógicas intuicionistas (ver capítulo IV desta tese).

Vimos que existe uma caracterização intuitiva da contribuição significativa das constantes lógicas intuicionistas, caracterização esta feita em termos da expressão "ter uma prova de ...". Dada esta caracterização a pergunta "temos agora uma prova de A" deveria poder ser respondida afirmativa ou negativamente. Contudo, as árvores de Beth e de Kripke não permitem que a questão seja decidida porque se identificamos o instante atual com um nódulo Γ da árvore então o fato de que A seja ou não verdaeira em Γ não depende, apenas, do comportamento das componentes atômicas de A nos nódulos antecessores de Γ, mas também do comportamento dessas componentes nos nódulos seguintes a Γ. No caso de estarmos considerando uma árvore infinita, a questão da decisão da verdade de A no nódulo Γ implicaria ou ter uma representação daquilo que acontece em todos os nódulos, ou supor dado para cada nódulo Γ o conjunto de fórmulas atômicas verdadeiras em Γ, ambos alternativas não são intuicionisticamente aceitáveis. Mas a isto pode ser respondido o seguinte: do mesmo modo que não podemos ter uma representação do que acontece em todos os nódulos de uma árvore de Beth, assim também não podemos ter uma representação de todas as possíveis provas de uma proposição P e consequentemente não poderíamos saber quando temos uma prova de P→Q, ficando então ambigüa a caracterização intuitiva do conectivo "→" em termos de "ter uma prova de ...". Mas podemos contra-argumentar que temos um teorema de normalização na lógica de predicados intuicionista (ver o capítulo V desta tese) que permite reduzir toda prova de P a uma prova canônica. Contudo, este resultado não pode ser extendido à aritmética elementar.

Discutamos agora a terceira exigência exposta anteriormente, isto é procuremos determinar se a teoria das árvores de Beth e de Kripke é uma teoria semântica no sentido de ser uma explicação e uma justificação do uso das constantes lógicas. Um modelo na lógica clássica consiste de um conjunto D chamado o domínio de interpretação, e uma assinalação para cada letra de predicado $A(x_1,x_2,...,x_n)$ de uma relação $A(d_1,d_2,...,d_n)$ sobre D, e uma assinalação para cada constante individual de um elemento a em D. Temos assim para cada fórmula A uma assinalação daquelas características do significado que são relevantes para a determinação da verdade ou falsidade de uma proposição determinada cuja forma lógica seja A (embora possamos pensar que não temos aqui uma assinalação de um significado global). No caso da lógica intuicionista, seria desejável, da maneira mais determinada possível, ter para cada fórmula uma assinalação de um significado. Mas isto não acontece nas árvores de Beth e de Kripke, pois nestes modelos não associamos significados a fórmulas. Neste modelos a cada nódulo associamos um conjunto de fórmulas atômicas relevantes para a demonstração de uma proposição qualquer cuja forma lógica seja A. Isto é, associamos a cada fórmula um possível esquema demonstrativo de uma proposição (indeterminada) cuja forma lógica seja *A*. Poderíamos dizer que as árvores de Beth e de Kripke são modelos do processo de demonstração de uma proposição genérica com forma *A*, e não são modelos da mesma fórmula *A*. Estes modelos não fornecem instâncias de *A* mas fornecem instâncias das demonstrações de uma proposição genérica com forma *A*. Mas, pela caracterização intuitiva em termos de "ter uma prova de ..." da contribuição para o significado global das constantes lógicas intuicionistas, cada instância demonstrativa deveria indicar univocamente uma instância da formal lógica *A*, entretanto isto não acontece. Estudaremos esta questão no capítulo V parte 2.

---

1. "A logical construction of mathematics, independent of the mathematical intuition, is impossible - for by this method no more is obtained than a linguistic structure, which irrevocably remains separated from mathematics - and moreover it is a *contradictio in terminis* - because a logical sistem needs the basic intuition of mathematics as much as mathematics itself needs it" (Brouwer [1975], pág 67).

2. Com o termo "teoria dedutiva" não fazemos referência a uma teoria formalizada, mas estamos no âmbito de uma axiomática intuitiva, onde a partir de termos primitivos, definições e axiomas derivamos as proposições restantes.

3. Freqüentemente diz-se que a matemática intuicionista se refere a objetos construtíveis, ou, também, diz-se que a matemática intuicionista usa métodos construtivos, diferenciando-a, assim, da matemática clássica. Não devem ser identificados os procedimentos construtivos com os procedimentos finitos, nem com os procedimentos recursivos. Por exemplo, na teoria das seqüências de escolha (choice sequences), quando introduzimos as seqüências dadas por uma lei (lawlike sequences), temos argumentos contra a identificação: "dada por uma lei = recursiva". Uma seqüência dada por uma lei é um caso especial de uma função dada por uma lei (lawlike function), e deste modo a identificação acima seria: "toda função dada por uma lei é recursiva"; e esta seria a forma intuicionista da Tese de Church. Troelstra argumenta contra esta identificação nos seguintes termos: "... the (known) informal justifications of Church's Thesis all go back to Turing's conceptual analysis (or proceed along similar lines). Turing's analysis strikes me as providing very convincing arguments for identifying "mechanically computable" with "recursive", but as to the identification of "humanly computable" with "recursive", extra assumptions are necessary which are certainly not obviously implicit in the intuitionistic (languageless) approach as adopted here ..." (Troelstra [1977], págs. 4 e 5).

Os procedimentos construtivos servem para introduzir entidades e para provar proposições. Kleene procurou precisar a noção de "construtível" via o conceito formal de realizabilidade recursiva (Kleene [1945]). Na verdade, a tentativa de Kleene propunha-se a representar no sistema formal da aritmética de Heyting HA o conceito "enunciado aritmético intuicionisticamente verdadeiro". Dado que intuicionisticamente um enunciado é verdadeiro se e somente se temos uma prova deste enunciado, e dado que as provas são consideradas construções, a idéia de Kleene tomou a seguinte forma: representar construções através de números naturais e definir a relação "n realiza A" (em símbolos nrA) que vincula uma construção numerada por n com um enunciado A da aritmética de Heyting, no caso em que esta construção seja uma prova de A. A noção de realizabilidade fornece uma interpretação da matemática intuicionista em termos de funções recursivas. Define-se indutivamente a relação nrA, onde A é uma fórmula fechada da aritmética de Heyting, deste modo:

(i) Se A é atômica, então nrA se e somente se A é verdadeira;

(ii) $nr(A\wedge B)$ se e somente se $n=2^a.3^b$, para algum (a,b) tal que arA e brB;

(iii) $nr(A\vee B)$ se e somente se ou $n=3^a$ para algum a tal que arA, ou $n=2.3^b$ para algum b tal que brB;

(iv) $nr(A\rightarrow B)$ se e somente se para todo m tal que mrA, $\{n\}(m)$ está definida, e $\{n\}(m)rB$ onde denotamos com $\{n\}$ a função parcial com índice n;

(v) $nr(\neg A)$ se e somente se $nr(A\rightarrow 0=1)$;

(vi) $nr\forall xA(x)$ se e somente se para todo m, $\{n\}(m)$ está definida e $\{n\}(m)rA(m)$;

(vii) $nr\exists xA(x)$ se e somente se $n=2^m.3^a$ para algum (m,a) tal que $arA(m)$.

Seja A uma fórmula qualquer, afirmamos que nrA se e somente se n realiza o fechamento universal de A. Uma fórmula A da aritmética de Heyting chama-se realizável se para algum n, nrA. No ano de 1952 Kleene demonstrou que se $\vdash_{HA} A$ então nrA (ver Kleene [1974]). Mas o alvo que devia ser atingido pela introdução do conceito de ralizabilidade era o de provar que se uma fórmula A fechada é intuicionisticamente veradeira, então A é realizável, e reciprocamente. No caso em que esta proposição pudesse ser provada teríamos uma caracterização em termos de uma propriedade formal do conceito "verdadeiro intuicionisticamente" pelo menos para enunciados da aritmética intuicionista. Mas, em 1953, G.F. Rose frustrou este objetivo quando provou que existe uma forma proposicional intuicionisticamente inválida tal que qualquer instância substitutiva da mesma na aritmética de Heyting (fechada ou aberta) é realizável. Além desta, temos mais duas dificuldades para identificar realizável com intuicionisticamente verdadeiro. Primeira, se aceitamos a lógica clássica na metateoria (como o fez Kleene) então a fórmula $A\vee\neg A$ é realizável, pois aceitando o princípio do terceiro excluído podemos admitir que uma fórmula A ou é realizável ou não é realizável. Na primeira destas duas alternativas temos que $3^n r(A\vee\neg A)$, onde nrA. Na segunda alternativa, dado que para todo m tal que mrA temos que $\{0\}(m)r0=1$, então $0r(\neg A)$ e consequentemente $2r(A\vee\neg A)$. Segunda, a definição de realizabilidade, no caso da disjunção, deveria ter a forma $nr(A \vee B)$ se e somente se *ou* nrA ou nrB, para concordar com o fato de que dada uma construção podemos determinar se ela é ou não é uma prova de um enunciado dado, e com a explicação em termos de "ter uma prova de ..." do significado de $A \vee B$. Também não podemos decidir se n é o número de Gödel de uma função parcial recursiva, e consequentemente não pode decidir a fortiori se $nr\forall xA(x)$ ou não.

Logo a tentativa de definir "construtívo" como "estritamente finitista" ou "recursivo", como também a tentativa de caracterizar o conceito de "prova construtiva de um enunciado A" em termos de realizabilidade fracassaram. Haack ([1977], pág. 103) resume a situção assim: "... The intuitionist criticism of classical logics depends upon a notion of 'possible construction' which is susceptible of a wide variety of interpretations. If it is interpreted very narrowly, the parts of classical mathematics which would be ruled acceptable are very restricted indeed, too restricted to be acceptable to most intuitionists. If it is interpreted more broadly, the intuitionist become vulnerable to criticisms from the strict finitist analogous to his own criticisms of the classical mathematics".

Talvez a situação devesse ser entendida assim: os intuicionistas aceitariam procedimentos de prova, e entidades, que repousem em uma extensão contínua de nossas faculdades mentais. Por exemplo, eles admitem o número 3.100.890.856.000.000.000, pois embora não possamos, no percurso de nossa vida, contar esta cifra, podemos pensar que o homem possa um dia chegar a viver um número suficiente de anos para contar esta cifra. Além disto, temos máquinas que podem efetuar esta operação. Podemos consequentemente admitir qualquer ordinal numerável, enquanto que cardinais como $\aleph_1$ não podem ser aceitos desde um ponto de vista intuicionista, por não ser enumerável; a concepção deste número requer um salto sobre nossas faculdades. Contar é uma operação efetuada de modo sucessivo, e que consequentemente está sujeita ao tempo. O tempo é uma das condições com as quais as nossas faculdades tem que concordar. Apreender um todo infinito não de modo sucessivo mas instantaneamente está além das nossas capacidades e de qualquer extensão contínua delas, dado que esta apreensão não pode ser efetuada sucessivamente, isto é, temporalmente.

4. Ver Kolmogoroff [1932]; Dummett [1978],[1979]; Prawitz [1977], [1978]; Heyting [1931], [1956]. Uma discussão deste tipo de interpretação, assim como interessantes referências históricas sobre ela, pode encontrar-se em Sundholm [1983].

5. Nos artigos "Truth" do ano 1959 e "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" do ano 1953. Os dois artigos encontram-se em Dummett [1978]. No primeiro dos artigos nomeados acima, Dummett afirma: "We no longer explain the sense of statement by stipulating its truth-value in terms of the truth-values of its constituents, but by stipulating when it may be asserted in terms of the conditions under which its constituents may be asserted" (Dummett [1978], pág. 17 e 18).

6. Isto é, se podemos ou afirmar ou negar que temos uma demonstração de *p*.

7. Ver Troelstra [1977] cap. 7 e De Swart [1977].

8. Ver Dummett [1979] cap. 7 parte 2 e Prawitz [1977].

9. Para este resultado ver Van Dalen [1973] cap. 1, "Incompleteness of Intutionistic Logic".

10. Idem (9). Também ver Dummett [1979] cap. 5 parte 6.

11. Para uma exposição da evolução do pensamento de Heyting sobre este tema ver Sundholm [1983].

12. Na verdade, quando Beth analisa o intuicionismo matemático na sua obra "The Foundations of Mathematics" o faz na parte V da mesma cujo título é "The Existence of Mathematical Entities", mas no desenvolvimento não distingue claramente entre a interpretação ontológica e a interpretação semântica da matemática intuicionista. Contrariamente, Lorenz (ver Lorenz [1971], introdução) caracteriza claramente o intuicionismo matemático como uma forma de construtivismo.

13. Ver nota (3).

14. "What I have done here is to transfer to ordinary statements what the intuitionists say about mathematical statements" (Dummett [1978], pág. 17). "We no longer explain the sense of a statement by stipulating its truth-value in terms of the truth-values of its constituents, but by stipulating when it may be asserted in terms of the conditions under which its constituents may be asserted" (Dummett [1978], pág 17 e 18).

15. Pois condições de asserção (no caso da matemática) pressupoem condições de demonstração. Se podemos asserir um enunciado, podemos demonstrá-lo.

16. Es gibt also für die reine Mathematik keine sichere Sprache, d.h., keine Sprache, welche in der Unterhaltung Missverständnisse ausschliest und bei der Gedächtnisunterstützung von Fehlern (d.h. vor Verwechslungen verschiedener mathematischer Entitäten) schützt. (Mathematik, Wissenschaft und Sprache, Brouwer [1975], pág 157).

17. Aristóteles, De Interpretatione, 16 a

18. Brouwer, como já o fizeram Aristtóteles e Locke, presupõe que a linguagem é símbolo de entidades mentais (estados da alma, idéias) as que constituem o significado das expressões. Entretanto, para Wittgenstein, o uso constitui o significado não pressupondo assim tais entidades. A crítica de Brouwer ao formalismo matemático repousa na tese de que a linguagem não é confiável como reflexo desta realidae mental. A não-

contraditoriedade das formas lingüísticas não assegura que a referência destas formas não seja vazia.

19. Um exemplo desta identificação pode ser visto em Quine [1953], no artigo On What There Is. Concordando com Kant, Brouwer afirma que temos conhecimento no caso em que aos conceitos correspondem objetos construídos na intuição. Os conceitos matemáticos seriam legitimos quando o seu objeto pode ser construído a partir da intuição fundamental do tempo. "... Intuitionist mathematics is an essentally languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics" (Brouwer [1975], pág 510).

Mas existe uma razão que impede uma identificação imediata das teses intuicionistas (tais como foram formuladas por Brouwer) com a filosofia kantiana. Kant deu a priori, independentemente de sua aplicação a qualquer matéria particular, um inventário dos elementos do entendimento (categorias) e das formas de inferência. Contrariamente para o intuicionismo não é possível dar um inventário das formas válidas de raciocínio matemático independentemente de sua aplicação a uma determinada matéria matemática, isto se deve ao caráter aposteriori da lógica em relação a matemática.

20. Suponhamos para fixar idéias que a forma de enunciado é $\forall x(Fx \vee \neg Fx) \wedge \neg\neg\exists xFx \rightarrow \exists xFx$. Podemos dar a F a interpretação "ser número ímpar que equivale a soma dos seus divisores proprios". Obtemos assim como caso substitutivo da forma exposta acima a proposição da matemática intuicionista " se para todo número natural ou ele é impar e euivale a soma dos seus divisores próprios, ou ele não é ímpar ou ele não equivale a a soma dos seus divisores próprios, e além disto é absurdo supor que não exista um número ímpar que equivale a soma dos seus divisores próprios, então existe um número ímpar que equivale a soma dos seus divisores próprios.

21. "For this reason, when we investigate the language of a formalized deductive science, we must always distinguish clearly between the language about which we speak and the language in which we speak, as well as between the science which is the object of our investigation and the science in which the investigation is carried out. The names of the expressions of the first language, and of the relations between them, belong to the second language, called the meta-language (which may contain the first as a part). The descriptions of this expressions, the definition of the complicated concepts, especially of those connected with the construction of a deductive theory (like the concept of consequence, of provable sentence, possibly of true sentence), the determination of the properties of these concepts,

is the task of the second theory which we shall call the meta-theory." (Tarski [1956], pág. 167).

22. Em um caso poderemos derivar, a partir da teoria dos conjuntos, as leis da aritmética. Noutro caso, usaremos as leis da aritmética para obter os resultados da teoria dos conjuntos, por exemplo, usaremos o princípio da indução. Em geral, o que num contexto argumentativo ocorre como conclusão de um conhecimento A, em outro, pode ocorrer como um princípio para a dedução de A. Esta situação é alheia ao espírito da teoria aristotétlica da ciência dedutiva, onde a relação de dedução entre dois conhecimentos é absoluta e não depende do contexto argumentativo

23. "Whereas first order intuitionistic logic and its prominent theories, such as arithmetic, are just subtheories of the corresponding classical ones, the notions of second order logic seem to dictate their own laws in the light of intuitionistic conceptions" (Van Dalen [1986], pág. 308).

24. Aristóteles, Segundos Analíticos, 72 a 1-5.

CAPITULO 2

MODELOS PARA LOGICA PROPOSICIONAL INTUICIONISTA L.P.I.

1. Modelos de Kripke

Chamamos modelo ou árvore de Kripke a uma terna $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ onde $\mathcal{G}$ é um conjunto distinto do conjunto vácuo, $\mathbb{R}$ é uma relação transitiva, reflexiva e antissimétrica sobre $\mathcal{G}$, e $\models$ é uma relação entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas proposicionais que satisfaz às seguintes condições:

Para um $\Gamma \in \mathcal{G}$ qualquer

i) Se $\Gamma \models p$ e $\Gamma \mathbb{R} \Delta$ então $\Delta \models p$ (p é uma fórmula atômica)

ii) $\Gamma \models A \wedge B$ se e somente se $\Gamma \models A$ e $\Gamma \models B$

iii) $\Gamma \models A \vee B$ se e somente se $\Gamma \models A$ ou $\Gamma \models B$

iv) $\Gamma \models \neg A$ se e somente se para todo $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma \mathbb{R} \Delta$, $\Delta \not\models A$

v) $\Gamma \models A \supset B$ se e somente se para todo $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma \mathbb{R} \Delta$, se $\Delta \models A$ então $\Delta \models B$

Além disto, pediremos que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R} \rangle$ seja uma árvore, isto é, pediremos que exista Γ tal que para todo $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma \mathbb{R} \Delta$.

Nota Γ^{*} é qualquer Δ tal que $\Gamma \mathbb{R} \Delta$

Uma fórmula A chama-se válida no modelo $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ se para todo $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\Gamma \models A$. Uma fórmula A chama-se válida se ela é válida em todos os modelos de Kripke. Podemos associar a cada $\Gamma \in \mathcal{G}$ um conjunto de proposições que expressam uma determinada informação. Assim, $\Gamma \mathbb{R} \Delta$ indica o fato de que a informação dada por Δ é uma extensão conservativa da informação dada por Γ. Como esta interpretação intuitiva o sugere, é verdadeira a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1

Se $\Gamma \models A$ e $\Gamma \mathbb{R} \Delta$, então $\Delta \models A$.

A prova é por indução sobre o número de conectivas de A. Se A fosse atômica, a proposição seria verdadeira por i). Suponhamos agora que $\Gamma \models \neg A$ e $\Gamma \mathbb{R} \Delta$. Seja Θ tal que $\Delta \mathbb{R} \Theta$. Dado que $\mathbb{R}$ é uma relação transitiva, $\Gamma \mathbb{R} \Theta$, e então temos que $\Theta \not\models A$. O mesmo argumento repete-se para qualquer Θ tal que $\Delta \mathbb{R} \Theta$. Logo $\Delta \models \neg A$. Suponhamos agora que $\Gamma \models A \supset B$. Seja Θ tal que $\Delta \mathbb{R} \Theta$. Logo se $\Theta \models A$ então $\Theta \models B$, a partir do fato de que $\Gamma \mathbb{R} \Theta$. Então, $\Delta \models A \supset B$. Os restantes casos são fáceis.

Proposição 2.1.2

Sejam $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ e $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models' \rangle$ dois modelos de Kripke tais que, para qualquer fórmula atômica p e qualquer $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\Gamma \models p$ se e somente se $\Gamma \models' p$. Então $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ e $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models' \rangle$ são idênticos no sentido de que, para qualquer fórmula A, $\Gamma \models A$ se e somente se $\Gamma \models' A$. A prova é por indução no número de conectivas de A.

Proposição 2.1.3 Seja $\mathcal{G}$ um conjunto distinto do conjunto vácuo, e seja $\mathbb{R}$ uma relação transitiva e reflexiva sobre o conjunto $\mathcal{G}$, tal que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R} \rangle$ tenha uma estrutura de árvore. Suponhamos que $\models$ seja uma relação entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas atômicas tal que se $\Gamma \models P$, então $\Gamma^* \models P$. Então $\models$ pode estender-se a uma relação $\models'$ de tal modo que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models' \rangle$ seja um modelo de Kripke.

Demonstração: Definimos $\models'$ indutivamente assim:

i) $\Gamma \models' A \wedge B$ se e somente se $\Gamma \models' A$ e $\Gamma \models' B$

ii) $\Gamma \models' A \vee B$ se e somente se $\Gamma \models' A$ ou $\Gamma \models' B$

iii) $\Gamma \models' \sim A$ se para todo Γ^*, $\Gamma^* \not\models' A$

iv) $\Gamma \models' A \supset B$ se para todo Γ^*, se $\Gamma^* \models' A$ então $\Gamma^* \models' B$ □

Corolário 2.1.4. Seja $\mathcal{G}$ um conjunto distinto do conjunto vácuo, e seja $\mathbb{R}$ uma relação transitiva, reflexiva e antissimétrica sobre $\mathcal{G}$ de tal modo que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R} \rangle$ tenha uma estrutura de árvore. Suponhamos que $\models$ é uma relação entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas atômicas tal que se $\Gamma \models P$ então $\Gamma^* \models P$. Então existe uma única extensão possível a uma relação $\models'$ entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas da lógica proposicional tal que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models' \rangle$ seja um modelo de Kripke. A existência da extensão segue-se de 2.1.3 e a unicidade de 2.1.2. □

2. Tabelas de Beth

Chamaremos fórmulas signadas as figuras da forma TA ou FA onde A é uma fórmula proposicional. Se S é um conjunto de fórmulas signadas e C é uma fórmula signada, escreveremos {S,C} para denotar $S \cup \{C\}$ e, às vezes, usaremos para o mesmo fim S,C.

Agora vamos expor as regras de redução R, onde S é qualquer conjunto (possivelmente vácuo) de fórmulas signadas, e A e B são fórmulas quaisquer.

$$T\wedge \quad \frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} \qquad\qquad F\wedge \quad \frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA \mid S, FB}$$

$$T\vee \quad \frac{S, T(A \vee B)}{S, TA \mid S, TB} \qquad\qquad F\vee \quad \frac{S, F(A \vee B)}{S, FA, FB}$$

$$T\sim \quad \frac{S, T(\sim A)}{S, FA} \qquad\qquad F\sim \quad \frac{S, F(\sim A)}{S_T, TA}$$

$$T\supset \quad \frac{S, T(A \supset B)}{S\ FA \mid S, TB} \qquad\qquad F\supset \quad \frac{S, F(A \supset B)}{S_T, TA, FB}$$

Nas regras $F\sim$, $F\supset$, acima, $S_T = \{TA / TA \in S\}$

Por uma aplicação de uma regra R a um conjunto U de fórmulas, entendemos a substituição de U por U_1 (ou por U_1 e U_2 no caso que R seja $F\wedge$, $T\vee$, $T\supset$), onde U é o conjunto de fórmulas acima da linha, e U_1 (U_1, U_2) o conjunto de fórmulas abaixo da linha. Supõe-se que, para uma escolha adequada de S,A,B, a coleção de fórmulas signadas acima da linha na regra R é U. No caso contrário, a aplicação de R a U é novamente U. Por exemplo, a aplicação de $T\vee$ a {TA,FB,T (C $\vee$ D)} fornece os conjuntos {TA,FB,TC} e {TA,FB,TD}, e a aplicação de $F\supset$ ao conjunto {TA,FB,F (C $\supset$ D)} é {TA,TC,FD}.

Definição 2.2.1 Uma configuração é uma coleção finita $\{S_1, S_2 \ldots S_n$ $S_{n+1}.S_{n+2}\ldots S_m\}$ de conjuntos finitos de fórmulas signadas. Por uma aplicação de uma regra R a uma configuração $\{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ entendemos a substituição desta configuração por uma nova, que é como a primeira, com exceção que no lugar de algum S_i contém o resultado (ou os resultados) de aplicar R a S_i .

Definição 2.2.2 Por uma tabela de Beth entendemos uma sucessão finita de configurações $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_n$ onde cada configuração $\mathcal{C}_i$ distinta da primeira é o resultado de aplicar uma das regras acima expostas à configuração precedente.

Um conjunto S de fórmulas signadas é fechado se contém TA e FA para alguma fórmula A. Uma configuração $\{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ é fechada se cada S_i é fechado. Uma tabela $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_n$ é fechada se alguma $\mathcal{C}_i$ é fechada.

Definição 2.2.3 Uma tabela para um conjunto S de fórmulas signadas é uma tabela $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_n$ onde $\mathcal{C}_1$ é {S}.

Definição 2.2.4 Um conjunto finito de fórmulas signadas S é inconsistente no caso em que pode-se construir uma tabela fechada para S. No caso contrário, diremos que S é consistente. Uma fórmula A é um teorema se {FA} é inconsistente. Uma tabela fechada para {FA} chama-se uma prova de A. Se A é um teorema, escreveremos $\vdash_{LPI} A$

Intuitivamente, podemos interpretar as regras de redução do seguinte modo. TA tem o significado " A já foi provada", FA tem o significado " A ainda não foi provada ". As regras devem entender-se assim: dada a situação expressa pelas fórmulas acima da linha, então a situação abaixo da linha é compatível com ela. Por exemplo, consideremos a regra $F\supset$, $\dfrac{S, F\,(A \supset B)}{S_T\ , TA, FB}$. Se ainda não possuímos uma prova de $A \supset B$, podemos ter uma prova de A sem ter uma prova de B.

Definição 2.2.5 Dizemos que um conjunto de fórmulas signadas $\{TA_1, TA_2, \ldots TA_n, FB_1, \ldots FB_m\}$ é realizável, se podemos construir um modelo de Kripke $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash \rangle$, e encontrar neste modelo um $\Gamma \in \mathcal{G}$ tal que $\Gamma \Vdash A_1, \Gamma \Vdash A_2, \ldots \Gamma \Vdash A_n$, $\Gamma \nVdash B_1, \Gamma \nVdash B_2, \ldots \Gamma \nVdash B_m$. Neste caso, dizemos que Γ realiza o conjunto. Se $\{S_1, S_2, \ldots S_m\}$ é uma configuração, diz-se que ela é realizável se algum S_i é realizável.

*Lema 2.2.6. Seja $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_n\}$ uma tabela de Beth. Se $\mathcal{C}_i$ é realizável, então $\mathcal{C}_{i+1}$ é realizável.

Demonstração: Nós temos oito casos conforme qual seja a regra que permite o trânsito de $\mathcal{C}_i$ a $\mathcal{C}_{i+1}$

Caso 1 $\mathcal{C}_i$ é $\{\ldots \{S, T(A \vee B)\} \ldots\}$ e $\mathcal{C}_{i+1}$ é $\{\ldots \{S, TA\}, \{S, TB\} \ldots\}$ Do fato que $\mathcal{C}_i$ é realizável, algum elemento de $\mathcal{C}_i$ é realizável. Se este elemento não é { S, T (A ∨ B)} então, ele mesmo, pensado como elemento de $\mathcal{C}_{i+1}$, também é realizável. Se o elemento realizável de $\mathcal{C}_i$ é $\{S, T(A \vee B)\}$ podemos encontrar um modelo de Kripke $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \Vdash \rangle$ e algum elemento $\Gamma \in \mathcal{G}$ neste modelo tal que Γ realiza S e $\Gamma \Vdash A \vee B$. Logo $\Gamma \Vdash A$, $\Gamma \Vdash B$. Logo ou Γ realiza {S, TA} ou Γ realiza {S, TB}. Qualquer que seja o caso que vale, $\mathcal{C}_{i+1}$ é realizável.

Caso 2 G_i é $\{\cdots\{S, F(\neg A)\}\cdots\}$ e G_{i+1} é $\{\{S_T, TA\}\cdots\}$ Nos limitaremos ao caso onde o elemento realizável de G_i é {S,F ($\neg$ A)}. Então podemos encontrar um modelo de Kripke $\langle g, R, \models\rangle$ e um $\Gamma \in g$ neste modelo tal que Γ realiza S e $\Gamma \not\models \neg A$. Logo existe $\Gamma^* \in g$, tal que $\Gamma^* \models A$, e além disto, dado que Γ realiza S_T então Γ^* realiza S_T. Logo Γ realiza {S_T, TA}.

Caso 3 G_i é $\{\cdots\{S, T(\neg A)\}\cdots\}$ e G_{i+1} é $\{\cdots\{S, FA\}\cdots\}$ Suponhamos que {S,T ($\neg$ A)} seja realizável. Então, existe um modelo $\langle g, R, \models\rangle$ e um $\Gamma \in g$ tal que Γ realiza S e $\Gamma \models \neg A$. Logo Γ realiza {S,FA}.

Caso4 G_i é $\{\cdots\{S, T(A\wedge B)\}\cdots\}$ e G_{i+1} é $\{\cdots\{S, TA, TB\}\cdots\}$ O mesmo Γ que realiza S,T(A $\wedge$ B) realiza {S,TA,TB}.

Caso 5 G_i é $\{\cdots\{S, F(A\wedge B)\}\cdots\}$, e G_{i+1} é $\{\cdots\{S, FA\}\{S, FB\}\cdots\}$ Se Γ realiza {S,F (A $\wedge$ B)}, então ou Γ realiza {S,FA} ou Γ realiza {S,FB}.

Caso 6 G_i é $\{\cdots\{S, F(A\vee B)\}\cdots\}$ e G_{i+1} é $\{\cdots\{S,FA,FB\}\cdots\}$ Se Γ realiza {S,F (A $\vee$ B)} então Γ realiza {S,FA,FB}.

Caso 7 G_i é $\{\cdots\{S, T(A\supset B)\}\cdots\}$, G_{i+1} é $\{\cdots\{S,FA\},\{S,TB\}\cdots\}$ Suponhamos que {S, T (A$\supset$ B)} é realizável. Logo existe um modelo $\langle g, R, \models\rangle$ e um $\Gamma \in g$ tal que $\Gamma \models$ A$\supset$ B e Γ realiza S.
Deve acontecer que ou Γ realiza {S,FA} ou Γ realiza { S,TB}, pois, se isto não acontecesse, teríamos que $\Gamma \models$ A e $\Gamma \not\models$ B; isto é, $\Gamma \not\models$ A $\supset$ B.

Caso 8 G_i é $\{\cdots\{S, F(A\supset B)\}\cdots\}$ e G_{i+1} é $\{\cdots\{S_T, TA, FB\}\cdots\}$ Suponhamos que {S, F (A $\supset$ B)} seja realizável. Então, existe um modelo de Kripke $\langle g, R, \models\rangle$ e um Γ tal que $\Gamma \not\models$ A $\supset$ B, Γ realiza S_T. Logo, existe Γ^* tal que $\Gamma^* \models$ A, $\Gamma^* \not\models$ B. Então Γ^* realiza { S_T, TA, FB }. □

Observação: O leitor que esteja interessado na obtenção de uma metateoria para a lógica proposicional intuicionista que seja ela mesma intuicionisticamente aceitável pode rejeitar a demonstração dos casos 2, 5, 7 e 8. Nos casos 2 e 8 a existência de Γ^* surge a partir da regra de inferência $\frac{\neg\forall x \neg Fx}{\exists x Fx}$, a qual não é intuicionisticamente aceitável; no caso 2, além desta regra, usamos eliminação da doble negação (do fato que não é verdade que, para todo Γ, $\Gamma \not\models$ A, inferimos que existe um Γ tal que $\Gamma \models$ A). No caso 5 usamos a regra $\frac{\neg(p\wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$. No caso 7, supomos decidível que $\Gamma \models$ A. Para afastarmos estas dificuldades, podemos tentar percorrer os seguintes caminhos: ou podemos raciocinar sobre os modelos $\langle g, R, \models\rangle$ finitos sem danar a teoria geral porque demonstra-se que se uma fórmula A é válidasobre modelos finitos então $\vdash_{LPI}$ A, ou podemos exigir unicamente que para toda fórmula A e todo Γ seja verdadeira a proposição "ou $\Gamma \models A$ ou $\Gamma \not\models A$ ". Nesta última alternativa, além disto precisaremos o princípio de Markov $\forall$x (F(x) $\vee \neg$ F(x)) $\wedge\ \neg\ \forall$x $\neg$ F(x) $\longrightarrow \exists$ x Fx que não é intuicionisticamente aceitável. A dificuldade surge do fato de que a existência ou não existência da relação $\models$ entre um elemento Γ de g e fórmulas A$\supset$B, $\neg$ A, depende daquilo que aconteça em todos os elementos Δ tais que $\Gamma R \Delta$. Afortunadamente, no caso da lógica proposicional intuicionista podemos ter uma teoria semântica intuicionisticamente aceitável raciocinando sobre $\mathcal{G}$ finito, fato este devido à propriedade de modelo finito que veremos adiante. □

Diremos que A é verdadeira ou que A tem sido provada no nodo Γ do modelo $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ se e somente se $\Gamma \models A$.

Teorema 2.2.7 "Soundness" Se $\vdash_{L_{PI}} A$ então A é válida.

Seja $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ um modelo e seja $\Gamma \in \mathcal{G}$. Suponhamos que $\Gamma \not\models A$. Logo {FA} é realizável. Uma prova de A será uma tabela $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_n$ fechada onde $\mathcal{C}_1$ é {FA}. Mas, se $\mathcal{C}_1$ é realizável, os restantes $\mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq n$ também são realizáveis pelo Lema antecedente. Logo existirá uma configuração fechada e realizável. Absurdo. Então $\Gamma \models A$. Logo A é válida. □

Observação: Esta prova faz uso do princípio "reductio ad absurdum", pois, do fato de que $\Gamma \not\models A$ leva a um absurdum, deduz-se que $\Gamma \models A$. Mas, se raciocinamos sobre modelos Kripke finitos, a prova é intuicionisticamente aceitável.

Definição 2.2.8 Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de conjuntos consistentes de fórmulas signadas. $\mathcal{G}$ chama-se uma coleção de Hintikka se, para todo $\Gamma \in \mathcal{G}$, vale:

$T(A \wedge B) \in \Gamma \Longrightarrow TA \in \Gamma$ e $TB \in \Gamma$
$F(A \vee B) \in \Gamma \Longrightarrow FA \in \Gamma$ e $FB \in \Gamma$
$T(A \vee B) \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $TA \in \Gamma$ ou $TB \in \Gamma$
$F(A \wedge B) \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $FA \in \Gamma$ ou $FB \in \Gamma$
$T(\sim A) \in \Gamma \Longleftrightarrow FA \in \Gamma$
$T(A \supset B) \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $FA \in \Gamma$ ou $TB \in \Gamma$
$F(\sim A) \in \Gamma \Longrightarrow$ podemos encontrar $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma_T \subseteq \Delta$, $TA \in \Delta$
$F(A \supset B) \in \Gamma \Longrightarrow$ podemos encontrar $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma_T \subseteq \Delta$, $TA \in \Delta$, $FB \in \Delta$

Definição 2.2.9. Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de Hintikka. Dizemos que $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ é um modelo para $\mathcal{G}$ se

(1) $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ é um modelo de Kripke
(2) $\Gamma_T \subseteq \Delta \Longrightarrow \Gamma \mathbb{R} \Delta$
(3) $TA \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \models A$
$FA \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \not\models A$

*Teorema 2.2.9 Existe um modelo de Kripke para qualquer coleção de Hintikka.

Demonstração: Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de Hintikka. Definimos R assim: diremos que $\Gamma \mathbb{R} \Delta$ se $\Gamma_T \subseteq \Delta$. Definiremos agora uma relação $\models$ entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas atômicas. Afirmamos que $\Gamma \models P$ se e somente se $Tp \in \Gamma$, onde p é uma fórmula atômica, isto é, uma variável proposicional. Para um Γ^* qualquer, temos que $\Gamma_T \subseteq \Gamma^*$, logo se $Tp \in \Gamma$ então $Tp \in \Gamma^*$, e por isto, se $\Gamma \models P$ então $\Gamma^* \models P$

Pela proposição 2.1.3 podemos estender $\models$ para obter um modelo de Kripke $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$. Resta-nos a demonstração da propriedade (3). Fazemos a demonstração por indução no grau da fórmula.

Primeiro caso: $A \equiv \sim B$ e supomos que (3) é verdadeira para B.

$$T \sim B \in \Gamma \Longrightarrow (\forall \Delta \in \mathcal{G})\ (\Gamma_T \subseteq \Delta \Longrightarrow T{\sim}B \in \Delta)$$
$$\Longrightarrow (\forall \Delta \in \mathcal{G})\ (\Gamma \mathbb{R} \Delta \Longrightarrow FB \in \Delta)$$
$$\Longrightarrow (\forall \Delta \in \mathcal{G})\ (\Gamma \mathbb{R} \Delta \Longrightarrow \Delta \not\models B) \Longrightarrow \Gamma \models \sim B$$

$F \sim B \in \Gamma \Longrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{g})\ (\Gamma_T \subseteq \Delta$ e $TB \in \Delta)$
$\Longrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{g})\ (\Gamma R \Delta$ e $\Delta \models B) \Longrightarrow \Gamma \not\models \sim B$

Segundo Caso: $A \equiv B \wedge C$
$T(B \wedge C) \in \Gamma \Longrightarrow TB \in \Gamma, TC \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \models B$ e $\Gamma \models C \Longrightarrow \Gamma \models B \wedge C$
$F(B \wedge C) \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $FB \in \Gamma$, ou $FC \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $\Gamma \not\models B$ ou $\Gamma \not\models C \Longrightarrow \Gamma \not\models B \wedge C$

Terceiro Caso: $A \equiv B \vee C$
$T(B \vee C) \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $TB \in \Gamma$ ou $TC \in \Gamma \Longrightarrow$ ou $\Gamma \models B$, ou $\Gamma \models C \Longrightarrow \Gamma \models B \vee C$
$F(B \vee C) \in \Gamma \Longrightarrow FB \in \Gamma$ e $FC \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \not\models B$ e $\Gamma \not\models C \Longrightarrow \Gamma \not\models B \vee C$

Quarto Caso: $A \equiv B \supset C$
$T(B \supset C) \in \Gamma \Longrightarrow \forall \Delta, \Gamma R \Delta, T(B \supset C) \in \Delta \Longrightarrow \forall \Delta, \Gamma R \Delta$, ou $FB \in \Delta$ ou $TC \in \Delta \Longrightarrow \forall \Delta, \Gamma R \Delta$, ou $\Delta \not\models B$ ou $\Delta \models C \Longrightarrow \forall \Delta \in \mathcal{g}, \Gamma R \Delta, \Delta \models B \Longrightarrow \Delta \models C \Longrightarrow \Gamma \models B \supset C$.
$F(B \supset C) \in \Gamma \Longrightarrow \exists \Delta \in \mathcal{g}, \Gamma R \Delta, TB \in \Delta, FC \in \Delta \Longrightarrow \exists \Delta \in \mathcal{g}, \Gamma R \Delta, \Delta \models B$ e $\Delta \not\models C \Longrightarrow \Gamma \not\models B \supset C$ $\square$

Em todas as demonstrações acima, supusemos que ou $\Gamma \models B$ ou $\Gamma \not\models B$, isto é, a decidibilidade da relação $\models$. Para mostrar a completude das Tabelas de Beth sobre os modelos de Kripke, precisamos demonstrar somente que, se $\vdash_{LPI} X$, então existe uma coleção de Hintikka $\mathcal{g}$ tal que para algum $\Gamma \in \mathcal{g}$, $FX \in \Gamma$. Pois, nesse caso, existirá um modelo $\langle \mathcal{g}, R, \models \rangle$ para $\mathcal{g}$ com a propriedade que se $FX \in \Gamma$ então $\Gamma \not\models X$. Logo X não seria válida.

Seja S um conjunto de fórmulas signadas. Com $\mathcal{f}(S)$ denotamos a coleção de todas as subfórmulas signadas de fórmulas em S. E claro que, se S é finito, então $\mathcal{f}(S)$ é finito. Seja S um conjunto de fórmulas consistentes. Definimos um conjunto reduzido para S assim:
$S_0 = S$. Tendo sido já definido S_n, um conjunto finito de fórmulas consistentes, suponhamos que as seguintes regras de redução possam ser aplicadas a S_n: $F\wedge$, $T\wedge$, $T\vee$, $F\vee$, $T\sim$, $T\supset$.
i) Seja R $F\wedge$. Então S_n é $\{U, F(A \wedge B)\}$, S_n é consistente. Por isto, ou $\{U, F(A \wedge B), FA\}$ é consistente ou $\{U, F(A \wedge B), FB\}$ é consistente. Seja $S_{n+1} = \{U, F(A \wedge B), FA\}$ se ele é consistente; no caso contrário, S_{n+1} será $\{U, F(A \wedge B), FB\}$.
ii) Seja R $T\wedge$. Então S_n é $\{U, T(A \wedge B)\}$, logo sendo S_n consistente, $\{U, T(A \wedge B), TA, TB\}$ será consistente. Logo definimos S_{n+1} como $\{U, T(A \wedge B), TA, TB\}$.
iii) Seja R $T\vee$ Logo S_n é $\{U, T(A \vee B)\}$. Então, ou $\{U, T(A \vee B), TA\}$ ou $\{U, T(A \vee B), TB\}$ são consistentes. Escolhemos como S_{n+1}, entre aqueles dois, o que for consistente.
iv) Seja R $F\vee$. Logo $S_n = \{U, F(A \vee B)\}$. Então, $\{U, F(A \vee B), FA, FB\}$ é consistente.
v) R é $T\sim$. Logo $S_n = \{U, T(\sim A)\}$. Temos que $\{U, T(\sim A), FA\}$ é consistente porque S_n é consistente.
vi) Ultimo caso, R é $T\supset$. Logo $S_n = \{U, T(A \supset B)\}$. Então, ou $\{U, T(A \supset B), FA\}$ ou $\{U, T(A \supset B), FA\}$ ou $\{U, T(A \supset B), TB\}$ são consistentes e escolhemos como S_{n+1} aquele dos tres que seja consistente. Assim, temos definida uma sequência $\{S_n\}, n \in N$ tal que $S_n \subseteq S_{n+1}$, cada S_n é finito e consistente. Dado que cada $S_n \subseteq \mathcal{f}(S)$ e $\mathcal{f}(S)$ é finito, apenas existe um número finito de S_n diferentes. Logo existe um S_n tal que, se lhe aplicamos quaisquer das regras de redução (exceto $F\sim$ ou $F\supset$), obtemos

novamente S_n. Chamamos a este conjunto S_n o conjunto reduzido de S, e denotamo-lo por S'. No caso em que, chegando a S_n, não possamos aplicar nenhuma das 6 regras antecedentes, fazemos $S_{n+1} = S_n = S'$. E claro que qualquer conjunto finito consistente de fórmulas signadas tem conjunto reduzido S'. Além disto, se S' é um conjunto reduzido, S' tem as propriedades seguintes:

$T(A \wedge B) \in S' \Longrightarrow TA \in S'$ e $TB \in S'$

$F(A \vee B) \in S' \Longrightarrow FA \in S'$ e $FB \in S'$

$T(A \vee B) \in S' \Longrightarrow$ ou $TA \in S'$ ou $TB \in S'$

$F(A \wedge B) \in S' \Longrightarrow$ ou $FA \in S'$ ou $FB \in S'$

$T \neg A \in S' \Longrightarrow FA \in S'$

$T(A \supset B) \in S' \Longrightarrow$ ou $FA \in S'$ ou $TB \in S'$

Claramente S' é consistente. Seja S um conjunto finito consistente de fórmulas signadas. Construimos a coleção dos conjuntos associados da seguinte forma:

Se $F \neg A \in S$ $\{S_T\ TA\}$ é um conjunto associado

Se $F(A \supset B) \in S$ $\{S_T, TA, FB\}$é um conjunto associado

Nos casos distintos destes dois, S será seu próprio associado. Seja A (S) a coleção de conjuntos associados.A (S) $\subseteq \mathbb{P}(\mathcal{S}(S))$, pois se $U \in A(S)$ então $U \subseteq \mathcal{S}(S)$, e além disto $\mathcal{S}(S)$ é finito. Logo, deduz-se destes dois fatos que $U \in \mathbb{P}(\mathcal{S}(S))$.

Teorema 2.2.10 (Fitting) As tabelas de Beth são completas sobre os modelos de Kripke.

Pelo teorema 2.2.9 é suficiente construir uma coleção de Hintikka $\mathcal{G}$ tal que para algum $\Gamma \in \mathcal{G}$, $FA \in \Gamma$.

Suponhamos que $\nvdash_{LPI} A$. Logo { FA } seria consistente. Estendemos FA a seu conjunto reduzido S_0 . Construimos A (S_0) a coleção de conjuntos associados a S_0 .

A (S_0) terá a forma { $U_1, U_2, \ldots\ldots U_n$ }

Seja S_1 o conjunto reduzido de U_1

Seja S_2 o conjunto reduzido de U_2

.
.
.
.
.
.

Seja S_n o conjunto reduzido de U_n

Assim, temos uma sequência $S_0, S_1, S_2, \ldots\ldots S_n$

Depois construimos A(S_1) a coleção de conjuntos associados a S_1

A (S_1) = { $U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots\ldots U_m$ }

Seja S_{n+1} o conjunto reduzido de U_{n+1}

Seja S_{n+2} o conjunto reduzido de U_{n+2}

.
.
.
.
.

Seja S_m o conjunto reduzido de U_m

Assim, temos agora uma sequência $S_0, S_1, \ldots S_n, S_{n+1}, \ldots S_m$. Repetimos o processo com S_2, e assim sucessivamente. Construimos assim uma sequência $S_0, S_1, S_2, \ldots\ldots\ldots$Dado que cada $S_i \leq \mathcal{S}(S_0)$, existe somente um número finito de S_i distintos

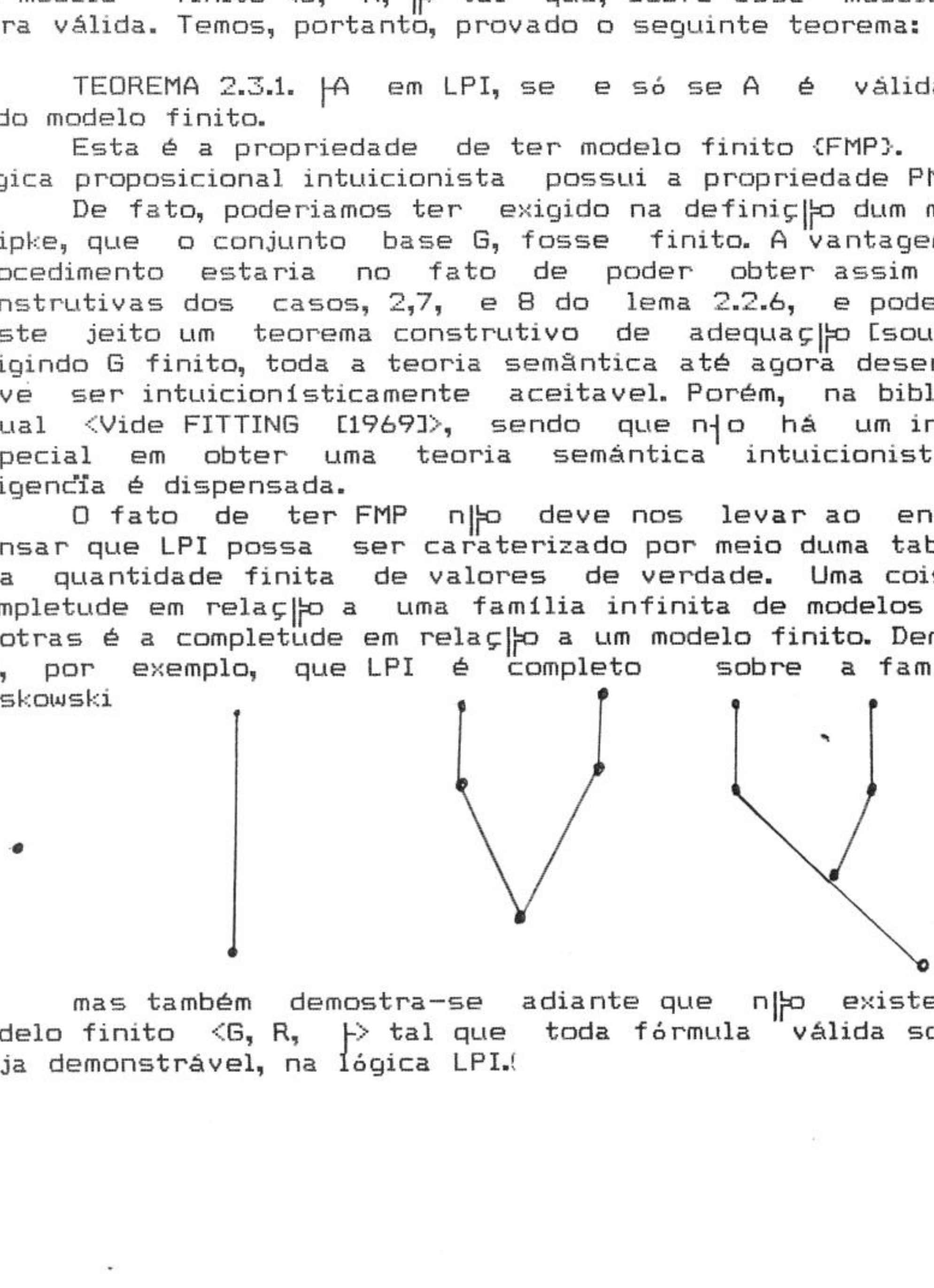
entre si. Chegaremos a um elemento S_k da sequência tal que qualquer continuação da sequência S_0 , S_1 ,.......S_k repete um elemento antecedente. Seja $\mathcal{G} = \{ S_0 , S_1 ,..........S_k \}$.
$FA \in S_0 \in \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ é uma coleção de Hintikka. Pois:
$T(A \wedge B) \in S_i \Longrightarrow TA \in S_i$ e $TB \in S_i$, S_i é reduzido
$F(A \vee B) \in S_i \Longrightarrow FA \in S_i$ e $FB \in S_i$, S_i é reduzido
$T(A \vee B) \in S_i \Longrightarrow$ ou $TA \in S_i$ ou $TB \in S_i$, S_i é reduzido
$F(A \wedge B) \in S_i \Longrightarrow$ ou $FA \in S_i$ ou $FB \in S_i$, S_i é reduzido.
$T(\sim A) \in S_i \Longrightarrow FA \in S_i$, S_i é reduzido.
$T(A \supset B) \in S_i \Longrightarrow$ ou $FA \in S_i$ ou $TB \in S_i$, S_i é reduzido.
Se $F(\sim A) \in S_i$, então existe $U \in A (S_i)$ tal que $S_{iT} \subseteq U$, $TA \in U$. Seja Δ o conjunto reduzido de U, $\Delta \in \mathcal{G}$ e temos que $S_{iT} \subseteq \Delta$, $TA \in \Delta$.
Se $F(A \supset B) \in S_i$ então para algum $U \in A (S_i)$, $S_{iT} \subseteq U$, $TA \in U$, $FB \in U$. Seja Δ o conjunto reduzido de U,
$\Delta \in \mathcal{G}$, $S_{iT} \subseteq \Delta$, $TA \in \Delta$, $FB \in \Delta$.

3. Propriedade de modelo finito. Arvores de Beth.

Na prova de completude das tabelas de Beth sobre os modelos de Kripke, foi construída una coleção de Hintikka finita $G = \{S0, S1, \ldots, Sk\}$ tal que $FA \in S0 \in G$. Pelo teorema 2.2.9, podemos construir um modelo $\langle G,R,\Vdash\rangle$ a partir de G, tal que S0 não $\Vdash A$.
$\langle G, R, \Vdash\rangle$ é um modelo finito.

Assim, temos provado que, se A não é um teorema em LPI, então existe um modelo finito $\langle G, R, \Vdash\rangle$ onde A não é válida. Obtemos assim o seguinte: se A é válida em todo modelo finito, então é teorema em LPI. Pois, caso isso não aconteça, existira um modelo finito $\langle G, R, \Vdash\rangle$ tal que, sobre esse modelo, A não sera válida. Temos, portanto, provado o seguinte teorema:

TEOREMA 2.3.1. $\vdash A$ em LPI, se e só se A é válida sobre todo modelo finito.
Esta é a propriedade de ter modelo finito (FMP). Assim, a lógica proposicional intuicionista possui a propriedade PMP.
De fato, poderiamos ter exigido na definição dum modelode Kripke, que o conjunto base G, fosse finito. A vantagem deste procedimento estaria no fato de poder obter assim provas construtivas dos casos, 2,7, e 8 do lema 2.2.6, e poder obter deste jeito um teorema construtivo de adequação [soundness]. Exigindo G finito, toda a teoria semântica até agora desenvolvida deve ser intuicionísticamente aceitavel. Porém, na bibliografia usual (Vide FITTING [1969]), sendo que não há um interesse especial em obter uma teoria semántica intuicionista, esta exigencia é dispensada.
O fato de ter FMP não deve nos levar ao engano de pensar que LPI possa ser caraterizado por meio duma tabela com uma quantidade finita de valores de verdade. Uma coisa é a completude em relação a uma família infinita de modelos finitos, e otras é a completude em relação a um modelo finito. Demonstra-se, por exemplo, que LPI é completo sobre a família de Jaskowski



mas também demostra-se adiante que não existe nenhum modelo finito $\langle G, R, \vdash\rangle$ tal que toda fórmula válida sobre ele seja demonstrável, na lógica LPI.

O cálculo proposicional clássico pode se caraterizar através duma tabela de verdade cujos valores são $M = \{\bot, \top\}$, no sentido de que, se para toda atribuição de valores de M para as letras proposicionais, a fórmula A recebe o valor $\top$, então A é um teorema de CPC Mais na frente, vamos ver que isto deixa de acontecer na LPI, fato que indica que LPI não é uma lógica polivalente finita. Suponhamos ter uma atribuição $\emptyset$ que associe a cada variável proposiciona P, um elemento $\emptyset(P)$ de M, de tal jeito que $\emptyset$ origina uma atribuição de elementos de M a uma fórmula qualquer A.

Além disto, suponhamos que, se A é teorema em LPI, então, $V\langle\phi\rangle$ pertence a D [onde $V\langle\emptyset\rangle$ é a atribuição induzida por $\emptyset$].

Seja agora uma fórmula A tal que, para qualquer atribuição de elementos de M a variáveis proposicionaios, tem a propriedade de que $V\langle\emptyset\rangle(A)$ está em D.

Infere-se destes fatos que A é um teorema da LPI?

A resposta é negativa e deve-se a Gödel, que demosntrou que não existe nenhum sistema valorativo finito e adequado, que seja completo em relação a LPI (veja teorema 2.4.1, no seguinte). Mas, também mais adiante, se demonstra que todo modelo finito de Kripke pode gerar umn sistema valorativo finito (Teorema 2.5.6.). Desses fatos, deduz-se que nenhum modelo de Kripke finito $\langle G, R, \Vdash\rangle$ é tal que se uma fórmula qualquer A é válida sobre esse modelo, então A é demonstrável na lógica LPI. O resultado de Gödel referido por nós, sera apresentado na seção seguinte, e o trânsito desde um modelo de Kripke a um sistema valorativo seré feito na seção 5 deste capítulo.

Para concluir esta seção, vamos ap[resentar uma nova classe de modelos $\langle G, R, \Vdash\rangle$, com estrutura de árvores, os chamados "modelos de Beth". Falamos que um conjunto de nodos S é uma barreira de um nodo Γ em G, no caso de qualquer caminho através de Γ contenha um elemento de S. Agora, vamos definir uma relação $\Vdash$ entre elementos de G e fórmulas.

i*) Se $\Gamma \Vdash p$ e $\Gamma R \Pi$, então $\Pi \Vdash p$, para o caso em que p seja atómica.

ii*) $\Gamma \Vdash (A \,\&\, B)$ se e somente se $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash B$

iii*) $\Gamma \Vdash (A \vee B)$ se e somente se pode-se encontrar uma barreira S de Γ talque para Π em S, então $\Pi \Vdash A$ ou $\Pi \Vdash B$.

iv*) $\Gamma \Vdash (\neg A)$ se e somente se e se, para todo Π em G, tal que $\Gamma R \Pi$, Π não $\Vdash A$.

v*) $\Gamma \Vdash (A \supset B)$ se e somente se, para todo Δ em G, tal que $\Gamma R \Delta$. se $\Delta \Vdash A$, então $\Delta \Vdash B$.

TEOREMA 2.3.2 Se A é uma fórmula válida sobre todo modelo de Beth, então A é válida sobre todo modelo de Kripke.

A demonstração apoia-se no fato de que, a partir dum modelo de Kripke $\langle G, R, \Vdash\rangle$ pode ser construido efètivamente um modelo de Beth $\langle G^\sim, R^\sim, \Vdash^\sim\rangle$ tal que, no vértice $\Gamma^\sim$ da estrutura $\langle G^\sim, R^\sim, \Vdash^\sim\rangle$, ocorre que $\Gamma^\sim \Vdash A$ se e somente se acontece que $\Gamma \Vdash A$, onde Γ é o vértice de $\langle G, R, \Vdash\rangle$. Então, suponhamos que existe um modelo de Kripke $\langle G, R, \Vdash\rangle$, tal que A não seja válida sobre esse modelo. Logo se Γ é o vértice de $\langle G, R, \Vdash\rangle$, então Γ não $\Vdash$ A Consideremos agora $\langle G^\sim, R^\sim, \Vdash^\sim\rangle$o modelo de Beth associado, e seja $\Gamma^\sim$ seu vertice.Logo $\Gamma^\sim$ não $\Vdash^\sim$ A, consequentemente A não é válida sobre $\langle G^\sim, R^\sim, \Vdash^\sim\rangle$. Portanto, é falso que A seja válido sobre toda árvore de Beth.

Seja então $\langle G, R, \Vdash\rangle$ uma ãrvore de Kripke. Escolhemos como elementos de $G^\sim$ todasa as seqüencias finitas $\Gamma^\sim = \langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\rangle$ de elementos de G tais que Γ_1 é o vértice de $\langle G, R, \Vdash\rangle$ e para cada $0 < i < k$, Γ_i não é um nodo terminal e $\Gamma_i \; R \; \Gamma_{i+1}$.

Definimos em $G^\sim$ uma relação $R^\sim$ do jeito seguinte: $\Gamma^\sim \; R^\sim \; \mu^\sim$ se $\mu^\sim$ é uma extensão de $\Gamma^\sim$. Isto é, $\mu^\sim$ terá a forma $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1} \ldots \Gamma_j\rangle$se $\Gamma^\sim$ tem a forma $\langle \Gamma_1 \ldots \Gamma_k\rangle$.

Definimos agora uma relação $\Vdash^\sim$ entre nodos $G^\sim$ e fórmulas, da seguinte maneira:

$\Gamma^\sim \Vdash^\sim$ A se e somente se $\Gamma_k \Vdash$ A, no caso que $\Gamma^\sim$ seja $\langle \Gamma_1 \ldots \Gamma_k\rangle$. Afirmamos que $\langle G^\sim, R^\sim, \Vdash^\sim\rangle$ é um modelo de Beth. Vejamos que valen as condições (i*) a (v*):

(i*) Seja μ tal que $\Gamma^\sim R^\sim \mu^\sim$. Se $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$ p então $\Gamma_k \Vdash$ p no caso que $\Gamma^\sim$, seja $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\rangle$. A classe $\mu^\sim$ terá a forma $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, \ldots, \Gamma_m\rangle$, sendo que $\Gamma_k \; R \; \Gamma_m$. Portanto, $\Gamma_1 \Vdash$ p, conseqüentemente $\mu^\sim \Vdash^\sim$ p (p atómica).

(ii*) Se $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$(A & B), então, $\Gamma_k \Vdash$ A, $\Gamma_k \Vdash$ B

Logo, $\Gamma^\sim \Vdash$ A e $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$B . A recíproca é fácil.

(iii*) Se $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$ (A V B) então $\Gamma_k \Vdash$ A ou $\Gamma_k \Vdash$ B. Logo, $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$ A, ou $\Gamma^\sim \Vdash^\sim$B e $\Gamma^\sim$ é uma barreira de si mesmo. Recíprocamente, suponhamos ter uma barreira S de $\Gamma^\sim$ tal que para todo $\mu^\sim$ pertencendo a S, ou $\mu^\sim \Vdash^\sim$ A, ou $\mu^\sim \Vdash^\sim$ B.Se $\Gamma^\sim$ tem a forma $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\rangle$, algum $\mu^\sim$ em S terá a forma $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_k \ldots \Gamma_k\rangle$, com Γ_k n vezes repetido, (n sera 1, no caso em que Γ_k seja terminal) e, consequentemente, teremos que ou $\Gamma_k \Vdash$ A ou $\Gamma_k \Vdash$ B. Logo, $\Gamma_k \Vdash$ (A V B), e, portanto, $\Gamma^\sim \Vdash$ (A V B).

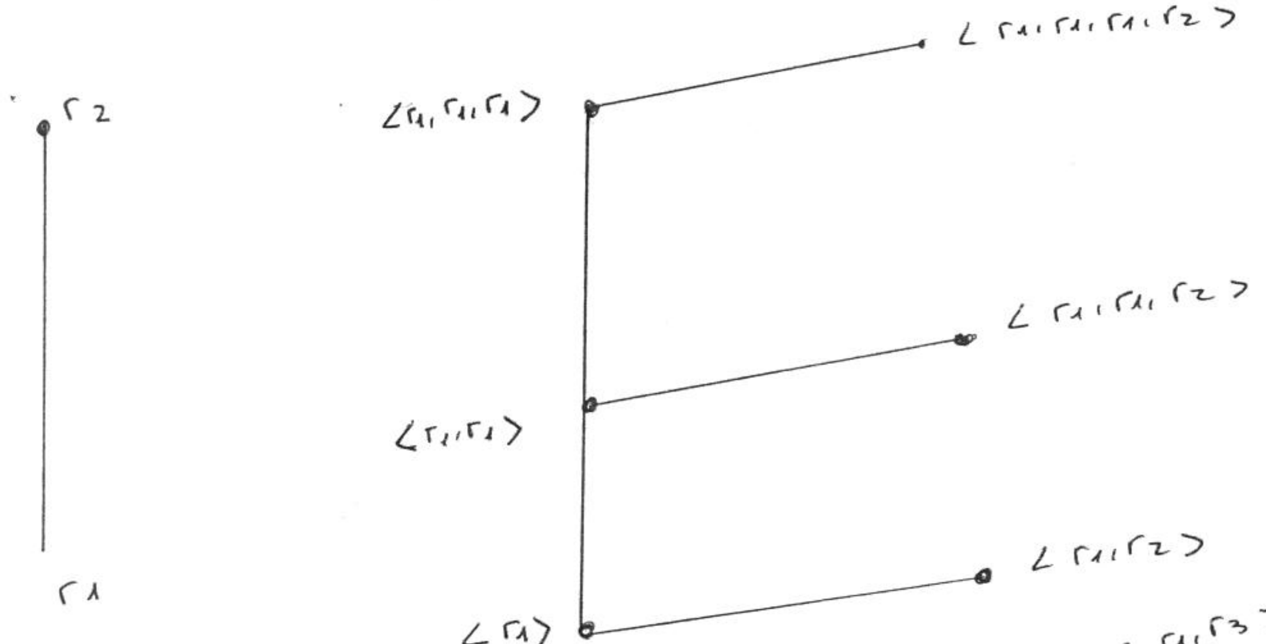
.(iv*) Se $\Gamma^\sim \Vdash^\sim (\neg A)$, então, $\Gamma_k \Vdash \neg A$. Portanto, para todo Γ_s, tal que $\Gamma_k \; R \; \Gamma_s$, ocorre que Γ_s não $\Vdash$ A. Conseqüentemente, para todo $\mu^\sim$ tal que $\Gamma^\sim R \; \mu^\sim$, ocorre que $\mu^\sim$ não $\Vdash$ A. A recíproca é fácil.

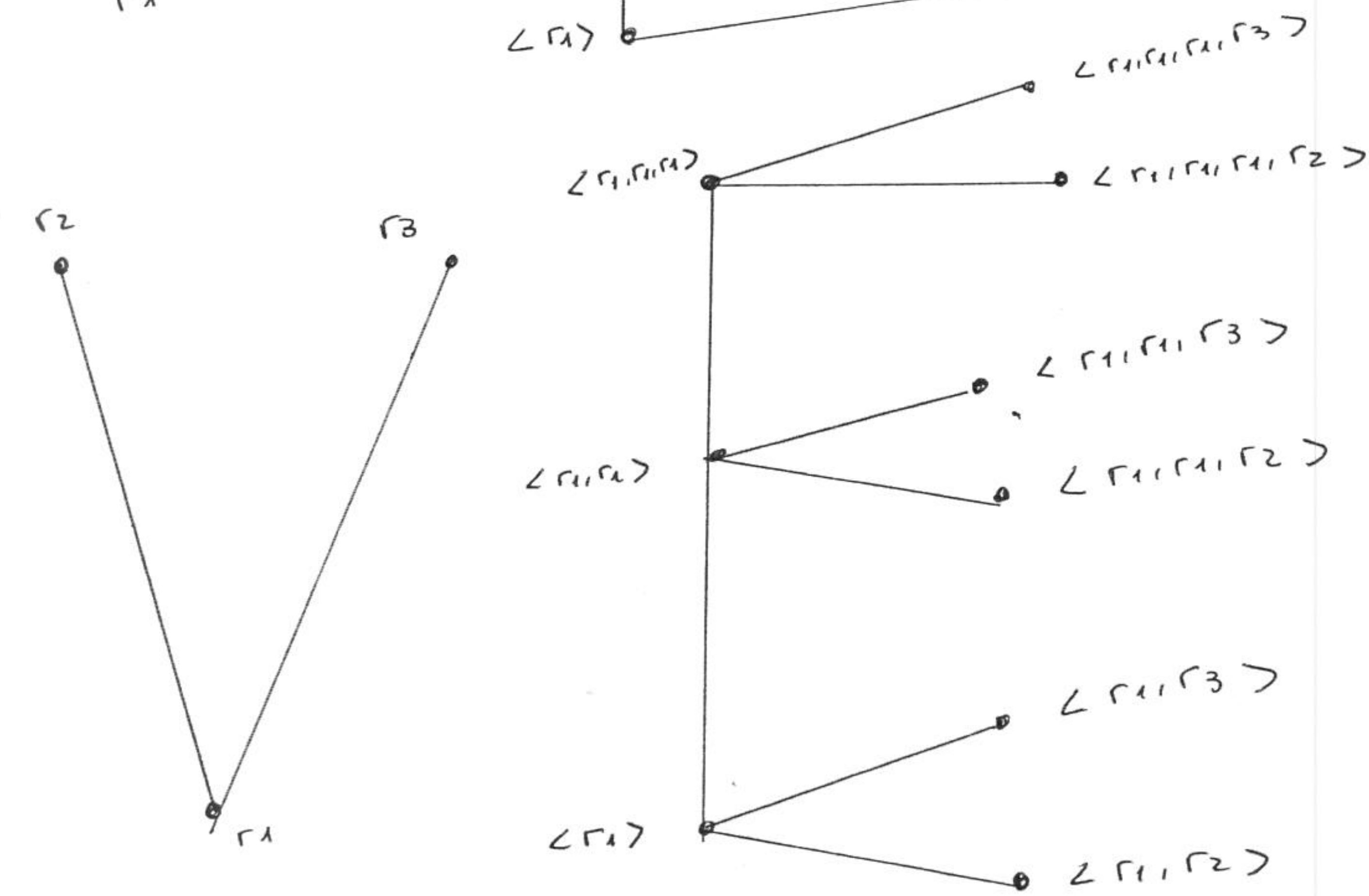
v*) Suponhamos que para todo $\mu^\sim$, tal que $\Gamma^\sim \; R \; \mu^\sim$, se $\mu^\sim \Vdash^\sim$ A, então $\mu^\sim \Vdash^\sim$ B. Logo, para todo Γ_s, tal que $\Gamma_k \; R \; \Gamma_s$, se $\Gamma_s \Vdash$ A, então, $\Gamma_s \Vdash$ B, pois $\langle \Gamma_1 \ldots \Gamma_k\rangle \; R^\sim \; \langle \Gamma_1 \ldots \Gamma_k, \Gamma_s\rangle$.

Logo, $\Gamma k \Vdash (A \supset B)$. Consequentemente, $\Gamma^{\sim} \Vdash^{\sim} (A \supset B)$

Infere-se, então, que $\langle G^{\sim}, R^{\sim}, \Vdash^{\sim} \rangle$ é um modelo de Beth, — propriedade de que para toda fórmula A, $\langle \Gamma 1 \ldots \Gamma^{\sim} \rangle \Vdash^{\sim} A$, se e somente se $\Gamma k \Vdash A$. Especialmente, $\Gamma^{\sim} = \langle \Gamma 1 \rangle$ é tal que $\Gamma^{\sim} \Vdash^{\sim} A$ se e somente se o véertice $\Gamma 1$ de G é tal que $\Gamma 1 \Vdash A$.

Apresentamos, no seguinte, dois exemplos de construção de um modelo de Beth a partir de um modelo de Kripke.





Vejamos agora a demonstração da proposição recíproca: se A é válida, sobre todo modelo de Kripke, então A é válida sobre todo modelo de Beth. Esta prova tera o seguinte percurso: provaremos (2) que é o teorema de adequação sobre modelos de Beth, na sec. 5 deste capítulo. Os enunciados (1) e (2),conjuntamente fornecem a prova desejada.

(1) Se A é válida sobre todo modelo de Kripke, então A é demonstravel em LPI.

(2) Se A é demonstrável em LPI, então é válida sobre todo modelo de Beth.

o

4. Sistemas valorativos. Modelos algébricos

Nesta seção e na seguinte consideraremos uma nova classe de modelos cuja estrutura geral é da forma $\langle M, D, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ onde M e D são conjuntos, D um subconjunto de M, $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$ operações binárias sobre elementos de M, e $-$ uma operação unária sobre elementos de M. Demonstraremos que LPI é uma lógica completa em relação a estes modelos, e também teremos em relação a estes modelos um teorema de "soundness". A pergunta que surge naturalmente é: Qual é a diferença entre estes novos modelos e as árvores de Beth e de Kripke?. Demonstraremos adiante que se A é válida sobre todas as árvores de Kripke ou equivalentemente válida sobre todas as árvores de Beth, então A será válida sobre todos estes novos modelos e reciprocamente. Isto é, o conjunto de fórmulas válidas será o mesmo conjunto em todos os casos. Mas aqui também nos perguntamos pelo modo de recolher o significado das conectivas intuicionistas. Uma situação semelhante foi enfrentada por nós, no caso dos modelos de Kripke e de Beth. O conjunto de fórmulas válidas sobre todo modelo de Beth é o mesmo conjunto que o conjunto de fórmulas válidas sobre todo modelo de Kripke. Mas existe uma diferença no modo de caracterizar a disjunção. Em um modelo de Kripke a disjunção é "local" no sentido que $\Gamma \models A \vee B$ se e somente se ou $\Gamma \models A$ ou $\Gamma \models B$. Em um modelo de Beth pode acontecer que $\Gamma \models A \vee B$, $\Gamma \not\models A$, $\Gamma \not\models B$, no caso que exista uma barreira S de Γ tal que para todo $\Delta \in S$, $\Delta \models A$ ou $\Delta \models B$. Epistemicamente a interpretação seria assim: um corpo de conhecimentos Γ correspondente a um nodo de uma árvore de Kripke permite deduzir $A \vee B$ se e somente se ou Γ nos permite deduzir A ou Γ nos permite deduzir B ; um corpo de conhecimentos Γ correspondente a um nodo de uma árvore de Beth permite-nos deduzir $A \vee B$, se e somente se qualquer que seja o modo de progredir de nossos conhecimentos, poderemos chegar a uma extensão Δ de Γ tal que ou de Δ deduz-se A ou de Δ deduz-se B. Esta caracterização da disjunção está na base do fato de que tenhamos nos modelos de Kripke FMP, e nos modelos de Beth não tenhamos FMP.

Uma situação semelhante enfrentamos agora comparando sistemas valorativos $\langle M, D, \cap, \cup, \Rightarrow - \rangle$ e modelos com estrutura de árvores $\langle \mathcal{G}, R, \models \rangle$. Em um sistema valorativo M é alguma coisa dada, enquanto em uma árvore nós podemos pensar que $\mathcal{G}$ é uma estrutura aberta em permanente expansão. O primeiro modelo é atemporal. Podemos vincular uma variável proposicional p a um elemento Γ de M se Γ pertence a um elemento $\phi(p)$ de M. Enquanto em um modelo com estrutura de árvore o vínculo dependerá daqueles nodos que estejam "depois" de Γ.

Um sistema valorativo $\mathcal{M} = \langle M, D, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ é uma estrutura formada por um conjunto M, um subconjunto D de M, operações binárias $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$ sobre M e uma operação unária sobre M. Além disto, temos que, se a $\in$ D então a $\cup$ b $\in$ D para todo b $\in$ M. Uma assignação é uma função ϕ de variáveis proposicionais a elementos de M. ϕ induze uma valuação v_ϕ que associa a cada fórmula um elemento de M assim:

$$v_\phi(A \wedge B) = v_\phi(A) \cap v_\phi(B)$$
$$v_\phi(A \vee B) = v_\phi(A) \cup v_\phi(B)$$
$$v_\phi(A \supset B) = v_\phi(A) \Rightarrow v_\phi(B)$$
$$v_\phi(\sim A) = - v_\phi(A)$$

Diremos que A é válida sobre $\mathcal{M}$ e denotamos este fato assim $\models_{\mathcal{M}} A$ se e somente se para toda assignação ϕ $v_\phi(A) \in D$.

Teorema 2.4.1 (Godel) Seja $\mathcal{M} = \langle M, D, \cup, \cap, \Rightarrow, - \rangle$ um sistema valorativo finito (isto é, M é um conjunto finito) com n elementos tal que, se $\vdash_{LPI} A$ então $\models_{\mathcal{M}} A$. $\mathcal{M}$ não é completo para L.P.I., isto é, existem fórmulas válidas sobre $\mathcal{M}$ que não são demonstráveis na lógica LPI.

Seja A a fórmula $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} p_i \longleftrightarrow p_j$. É claro que $\nvdash_{LPI} A$. Seja ϕ uma assignação de elementos de M a variáveis proposicionais. Do fato que A contém n+1 variáveis proposicionais deduz-se que, para algum par i, j, $1 \leq i < j \leq n+1$. $\phi(p_i) = \phi(p_j)$. Dado que $\vdash_{LPI} p \longleftrightarrow p$ então $\models_{\mathcal{M}} p \longleftrightarrow p$, consequentemente $v_\phi(p \longleftrightarrow p) \in D$, logo $\phi(p) \Longleftrightarrow \phi(p) \in D$. Então $\phi(p_i) \Longleftrightarrow \phi(p_j) \in D$ e consequentemente $v_\phi(p_i \longleftrightarrow p_j) \in D$. Logo $v_\phi(A) \in D$. $\square$

A seguir consideraremos uma classe especial de sistemas valorativos que chamaremos álgebras de Heyting. Uma álgebra de Heyting $\langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ é uma estrutura na qual i) $\langle M, \cap, \cup \rangle$ é um reticulado; ii) existe um elemento mínimo chamado o zero do reticulado e denotado por O. Teremos que a $\cup$ O = a , a $\cap$ O = O ; iii) existe uma operação binária $\Rightarrow$ tal que para todo a, b, c $\in M$, $c \leq a \Rightarrow b$ se $a \cap c \leq b$.

Observação: Em um álgebra de Heyting $\langle M, 1, \cap, \cup, \Rightarrow - \rangle$ para cada elemento a $\in$ M podemos definir $-a = a \Rightarrow O$, e $1 = -O$ será a unidade do reticulado. Teremos que a $\leq$ 1, a $\cup$ 1 = 1, a $\cap$ 1 = a, $\forall$ a $\in$ M.

A seguir provaremos que, se A é válida sobre a família das álgebras de Heyting (isto é, se para toda álgebra de Heyting $\mathcal{M}$, $\models_{\mathcal{M}} A$) então $\vdash_{LPI} A$. Para fazer a prova introduziremos a álgebra de Lindenbaum. Definimos uma relação de equivalência sobre o conjunto de fórmulas bem formadas da lógica proposicional intuicionista assim: A $\sim$ B se e somente se $\vdash_{LPI} A \longleftrightarrow B$. Sobre o conjunto quociente definimos operações $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$ da seguinte forma:

$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{A \wedge B}$
$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{A \vee B}$
$\widetilde{A} \Longrightarrow \widetilde{B} = \widetilde{A \Longrightarrow B}$
$- \widetilde{A} = \widetilde{\sim A}$

Se chamamos M ao conjunto quociente, temos que $\langle M, \cap, \cup \rangle$ é um reticulado, $\widetilde{p \wedge \sim p}$ é o zero do reticulado, e $\langle M, 1, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ é um álgebra de Heyting. Agora, demonstramos o seguinte Teorema.

Teorema 2.4.2. Seja A uma fórmula válida sobre a família das álgebras de Heyting. Então $\vdash_{LPI} A$.

Demonstração: Suponhamos que $\not\vdash_{LPI}$ A. Consideremos a álgebra de Lindenbaum $\mathcal{M} = \langle M, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$. Seja ϕ tal que $\phi(P) = \widetilde{P}$. Logo $V_\phi(A) \neq 1$ e consequentemente A não é válida sobre $\mathcal{M}$. Pois se fosse $V_\phi(A) = 1$ então $\vdash_{LPI} A \longleftrightarrow \sim(p \wedge \sim p)$ e dado que $\vdash_{LPI} \sim(p \wedge \sim p)$ teríamos que $\vdash_{LPI} A$. □

5. Modelos topológicos

Consideremos um espaço topológico $\langle X, \Theta \rangle$ onde Θ é a família de abertos de X. É fácil provar que $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ é uma álgebra de Heyting, chamada o modelo topológico de Heyting, onde $\cap$ é a interseção de conjuntos, $\cup$ é a união de conjuntos, A $\Longrightarrow$ B está definida por A $\Longrightarrow$ B = $\{ x \mid \text{se } x \in A \text{ então } x \in B \}^{\circ}$, e o conjunto vácuo é o zero da álgebra.

Diremos que uma fórmula A é válida em um modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ se para qualquer assignação ϕ de abertos de X a variáveis proposicionais $V_\phi(A) = X$.

A seguir demonstraremos para as álgebras de Heyting finitas um teorema de representação análogo ao teorema de representação de Stone para as álgebras de Boole.

Definição 2.5.1

Seja $\langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ uma álgebra de Heyting. Um elemento $a \in M$, $a \neq 0$ chama-se irredutível no caso em que se $a = b \cup c$ então ou $a = b$ ou $a = c$.

Lema 2.5.2. Toda álgebra de Heyting é um reticulado distributivo.

Demonstração: Em qualquer reticulado $b \leq b \cup c$ e $c \leq b \cup c$. Temos assim que

$$a \cap b \leq a \cap (b \cup c)$$
$$a \cap c \leq a \cap (b \cup c)$$

e então $(a \cap b) \cup (a \cap c) \leq a \cap (b \cup c)$ (1)

Além disto, temos que $(a \cap b) \leq (a \cap b) \cup (a \cap c)$ e consequentemente em uma álgebra de Heyting temos que $b \leq a \Longrightarrow [(a \cap b) \cup (a \cap c)]$

Analogamente demonstra-se que $c \leq a \Longrightarrow [(a \cap b) \cup (a \cap c)]$ e assim temos que $b \cup c \leq a \Longrightarrow [(a \cap b) \cup (a \cap c)]$
Consequentemente, $a \cap (b \cup c) \leq (a \cap b) \cup (a \cap c)$ (2)
A partir de (1) e (2) deduzimos que $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

.

Lema 2.5.3 Seja $\langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ uma álgebra de Heyting. Se a é um elemento irredutível e $a \leq b \cup c$ então ou $a \leq b$ ou $a \leq c$.
Demonstração: Suponhamos que $a \leq b \cup c$, então $a = (b \cup c) \cap a = (b \cap a) \cup (c \cap a)$. Consequentemente, ou $a = b \cap a$ ou $a = c \cap a$ pois a é irredutível. Logo ou $a \leq b$ ou $a \leq c$.

Lema 2.5.4.

Seja $\langle J, \circ \rangle$ uma estrutura onde J é um conjunto e $\circ$ é uma aplicação de subconjuntos de J sobre subconjuntos de J que satisfaz às seguintes condições para todo par de subconjuntos $A \subseteq J$, $B \subseteq J$:

i) $A^\circ \subseteq A$, ii) $(A^\circ)^\circ = A$, iii) $J^\circ = J$, iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

Nestas condições fica definido um espaço topológico sobre J onde os conjuntos abertos são aqueles conjuntos tais que $A^\circ = A$.

*Teorema 2.5.5. : Representação de álgebras finitas de Heyting

Seja $\mathcal{M} = \langle M, 1, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ uma álgebra finita de Heyting. Seja J o conjunto de elementos irredutíveis de M. A ordem $\leq$ de M restrito a J induz sobre J uma relação de ordem. Definimos sobre J uma topologia assim: o interior A° de um subconjunto A de J será $A^\circ = \{a \in A /$ $b \in A$ para todo $b \leq a\}$.
Valem as condições i)-iv) do Lema antecedente. Um conjunto A será um conjunto aberto se $A^\circ = A$. Seja Θ a coleção de conjuntos abertos dessa topologia sobre J. Claramente $\langle \Theta, \{J\}, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ é uma álgebra de Heyting. Demonstraremos que existe um isomorfismo ψ de álgebras de Heyting entre $\mathcal{M} = \langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ e $\langle \Theta, J, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$

Demonstração:

Para cada $a \in M$ definimos $\psi(a) = \{d \in J / d \leq a\}$. Observamos que $\psi(a) \leq (\psi(a))^\circ$ pois se $c \in \psi(a)$, e $b \in J$ é tal que $b \leq c$, então $b \leq a$, e consequentemente $b \in \psi(a)$. Logo $c \in (\psi(a))^\circ$. Consequentemente $\psi(a)$ é um conjunto aberto.
ψ é um morfismo de álgebras. Pois:

i) $\psi(a \cup b) = \psi(a) \cup \psi(b)$

Se $d \in \psi(a \cup b)$ então $d \leq a \cup b$, e dado que d é irredutível, então ou $d \leq a$ ou $d \leq b$. Logo $d \in \psi(a) \cup \psi(b)$.
Se $d \in \psi(a) \cup \psi(b)$, temos que ou $d \leq a$, ou $d \leq b$, em qualquer caso $d \leq a \cup b$ e consequentemente $d \in \psi(a \cup b)$.

ii) $\Psi(a \cap b) = \Psi(a) \cap \Psi(b)$.
Se $d \in \Psi(a \cap b)$ temos que $d \leq a \cap b$, logo $d \leq a$ e $d \leq b$, então $d \in \Psi(a) \cap \Psi(b)$.
iii) $\Psi(a \Rightarrow b) = \Psi(a) \Rightarrow \Psi(b)$.

Se $d \in \Psi(a \Rightarrow b)$ então $d \leq a \Rightarrow b$ e consequentemente $d \cap a \leq b$.
Seja $z \leq d$. Se $z \leq a$ então $z \leq a \cap d$, e consequentemente $z \leq b$.
Logo $z \in \{x \mid$ se $x \leq a$, então $x \leq b\}$. Logo $d \in (\{x \mid x \leq a$ então $x \leq b\})^{\circ}$ e consequentemente $d \in \Psi(a) \Rightarrow \Psi(b)$.
Seja agora d, $d \in J$, $d \in (\Psi(a) \Rightarrow \Psi(b))$. Logo $d \in \{x \in J \mid x \in \Psi(a)$ então $x \in \Psi(b)\}^{\circ}$. Isto significa que, dado $z \in J$, $z \leq d$, se $z \leq a$ então $z \leq b$. Mas, $d \cap a \leq d$ e. alèm disto, $d \cap a \in J$, e $d \cap a \leq a$. Logo, $d \cap a \leq b$ e consequentemente $d \leq a \Rightarrow b$.
Ψ é sobrejectiva. Pois:

Seja $D \in \Theta$ um conjunto aberto. Dado que J é finito $D = \{d_1, d_2, \ldots d_n\}$
Seja $d = d_1 \cup d_2 \ldots\ldots \cup d_n$. Provaremos que $\Psi(d) = D$. Cada $d_i \leq d$, além disto cada d_i é irredutível, então $d_i \in \Psi(d)$. Logo $D \leq \Psi(d)$. Reciprocamente, se $c \in \Psi(d)$, c é irredutível e $c \leq d_1 \cup d_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cup d_n$. Consequentemente $c \leq d_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. D é aberto, logo $c \in D$, e então $\Psi(d) \leq D$.
Ψ é um monomorfismo. Mostraremos que, se $\Psi(a) = \Psi(b)$ então $a = b$. Para atingir este objetivo mostraremos que, para todo $a \in M$, $a = \cup\Psi(a)$ onde $\cup\Psi(a)$ é o supremo de todos os elementos de $\Psi(a)$ e $\cup\emptyset = 0$. Definimos o nível de a em $\mathcal{M} = \langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ que denotaremos com $l(a)$ como o número de elementos do caminho mais curto (aquele que contenha o menor número de elementos) que vá de a à 0. Se $l(a) = 0$ então $a = 0$ e $\Psi(a) = \emptyset$ de tal modo que $0 = a = \cup\Psi(a)$. Suponhamos agora que $l(a) \geq 1$, a hipótese indutiva é que se $l(b) < l(a)$ então $b = \cup\Psi(b)$. Se $a \notin J$ então $a = b \cup c$ para algum par b, c tal que $b < a$ e $c < a$. Então $l(b) < l(a)$ e $l(c) < l(a)$ e consequentemente $b = \cup\Psi(b)$ e $c = \cup\Psi(c)$. Logo $\cup\Psi(a) = \cup\Psi(b \cup c) = \cup(\Psi(b) \cup \Psi(c)) = \cup\Psi(b) \cup\cup\Psi(c) = b \cup c = a$. Se $a \in J$, então $a \in \Psi(a) = \cup\Psi(a)$.

<u>Teorema 2.5.5</u> (Soundness para álgebras finitas de Heyting) Seja A uma fórmula tal que $\vdash_{LPI} A$. Então A é válida sobre toda álgebra de Heyting finita $\mathcal{M} = \langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$.

Demonstração: Dado que $\mathcal{M} = \langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ é uma álgebra de Heyting finita, então, pelo teorema antecedente $\mathcal{M} \cong \langle \Theta, J, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ onde J é o conjunto dos elementos irredutíveis de M e Θ a família de abertos de J definidos através da topologia exposta no teorema antecedente. A prova consiste na demonstração da existência de um modelo de Kripke $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ sobre o qual A não seja válido, a partir da suposição de que A não é válida sobre $\mathcal{M}$.

Logo, pelo teorema 2.2.7. teremos que $\nvdash_{LPI} A$. Suponhamos então que A não seja válida sobre $\mathcal{M} = \langle M, \{1\}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ com M finito. Então existe uma assignação ϕ tal que $V_\phi(A) \neq 1$. Definimos uma assignação $\sigma = \psi \circ \phi$ onde ψ é o isomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\langle \Theta, J, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$. Teremos que $V_\sigma(A) = \psi V_\phi(A) = \psi(b)$ com $b \leq 1$. Além disto, $\psi(1) = J$, então $\psi(b) \neq J$ e consequentemente $V_\sigma(A) \neq J$. Temos então uma valuação V_σ sobre $\langle \Theta, J, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ tal que $V_\sigma(A) \neq J$. Definimos agora um modelo de Kripke $\langle J, R, \models \rangle$ sobre J assim. Dados dois elementos Γ e Δ de J dizemos que $\Gamma R \Delta$ se $\Delta \leq \Gamma$. Agora definimos uma relação $\models$ entre variáveis proposicionais p e elementos de J. Dizemos que $\Gamma \models p$ se e somente se $\Gamma \in V_\sigma(p)$. Suponhamos $\Gamma R \Delta$ e $\Gamma \models p$. Então $\Delta \leq \Gamma$ e $\Gamma \in V_\sigma(p)$ um aberto; teremos que $\Delta \in V_\sigma(p)$ e consequentemente $\Delta \models p$. Logo se $\Gamma \models p$ então $\Gamma^* \models p$. Pela proposição 1.1.3. podemos definir um modelo de Kripke $\langle J, R, \models \rangle$. Vejamos que $\Gamma \models A$ se e somente se $\Gamma \in V_\sigma(A)$ para toda fórmula A. Pois:

i) $\Gamma \models B \cap C \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B \cap C) \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B) \cap V_\sigma(C) \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B)$ e $\Gamma \in V_\sigma(C) \Leftrightarrow \Gamma \models B, \Gamma \models C$

ii) $\Gamma \models B \vee C \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B \vee C) \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B) \cup V_\sigma(C) \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(B) \cup \Gamma \in V_\sigma(C) \Leftrightarrow \Gamma \models B$ ou $\Gamma \models C$

iii) $\Gamma \models \neg A$ então para todo Γ^*, $\Gamma^* \not\models A$ se e somente se $\forall \Delta \leq \Gamma$, $\Delta \notin V_\sigma(A) \Leftrightarrow \Gamma \in ((V_\sigma(A))^c)^o \Leftrightarrow \Gamma \in -V_\sigma(A) \Leftrightarrow \Gamma \in V_\sigma(\neg A)$

iv) $\Gamma \models B \supset C$ se e somente se para todo Δ tal que $\Delta \leq \Gamma$ se $\Delta \models B$ então $\Delta \models C$. Logo $\Gamma \models B \supset C$, se e somente se $\forall \Delta, \Delta \leq \Gamma$ se $\Delta \in V_\phi(B)$ então $\Delta \in V_\phi(C)$ see $\Gamma \in \{\Delta / \Delta \in V_\phi(B)$ então $\Delta \in V_\phi(C)\}$, see $\Gamma \in V_\phi(B) \Rightarrow V_\phi(C)$, $\Gamma \in V_\phi(B) \Rightarrow V_\phi(C)$, see $\Gamma \in V_\phi(B \supset C)$.

Logo, dado que $V_\sigma(A) \neq J$, existe Δ tal que $\Delta \notin V_\sigma(A)$, isto é existe Δ tal que $\Delta \not\models A$. Temos encontrado assim uma árvore de Kripke $\langle J, R, \models \rangle$ tal que A não é válida sobre este modelo. Logo $\nvdash_{LPI} A$.

<u>Teorema 2.5.6.</u> Completude para álgebras finitas de Heyting. Suponhamos que A seja válida sobre toda álgebra finita de Heyting, então $\vdash_{LPI} A$.

Suponhamos que $\nvdash_{LPI} A$. Então existe uma árvore de Kripke finita $\langle \mathcal{G}, R, \models \rangle$ tal que A não é válida sobre esta árvore. Sobre $\mathcal{G}$ definimos uma topologia cuja base de abertos está formada pelos conjuntos $U_\Gamma = \{\Delta / \Gamma R \Delta\}, \Gamma \in \mathcal{G}$. Definimos uma assignação de abertos de $\mathcal{G}$ a variáveis proposicionais $\psi(p) = \{\Gamma / \Gamma \models p\}$. Provaremos que $V_\psi(B) = \{\Gamma / \Gamma \models B\}$ para qualquer fórmula B. (Fazemos indução sobre o grau de B).

i) $v_\phi(C \wedge D) = v_\phi(C) \cap v_\phi(D) = \{\Gamma / \Gamma \models C\} \cap \{\Gamma / \Gamma \models D\} = \{\Gamma / \Gamma \models C \text{ e } \Gamma \models D\} = \{\Gamma / \Gamma \models C \wedge D\}$

ii) $v_\phi(C \vee D) = v_\phi(C) \cup v_\phi(D) = \{\Gamma / \Gamma \models C\} \cup \{\Gamma / \Gamma \models D\} = \{\Gamma / \Gamma \models C \text{ ou } \Gamma \models D\} = \{\Gamma / \Gamma \models C \vee D\}$.

iii) $v_\phi(C \supset D) = \{\Gamma / \Gamma \models C \supset D\}$. Pois se $\Gamma \in v_\phi(C \supset D)$ então $\Gamma \in (v_\phi(C) \Rightarrow v_\phi(D))$, logo $\Gamma \in \{\sigma /$ se $\sigma \models C$ então $\sigma \models D\}^\circ$ e consequentemente $\Gamma \in U_\Delta \subset \{\sigma /$ se $\sigma \models C$ então $\sigma \models D\}$ para algum Δ. Mas se $\Gamma \in U_\Delta$ então $U_\Gamma \subseteq U_\Delta$ e consequentemente $U_\Gamma \subseteq \{\sigma$ se $\sigma \models C$ então $\sigma \models D\}$. Consequentemente se Δ é tal que $\Gamma R \Delta$, $\Delta \models C$ então $\Delta \models D$. Logo $\Gamma \models C \supset D$. Reciprocamente se $\Gamma \models C \supset D$ então $U_\Gamma \subseteq \{\sigma /$ se $\sigma \models C$ então $\sigma \models D\}$ e consequentemente $\Gamma \in \{\sigma /$se $\sigma \models C$ então $\Gamma \models D\}^\circ$; logo $\Gamma \in (v_\phi(C) \Rightarrow v_\phi(D))$ e então $\Gamma \in v_\phi(C \supset D)$.

iv) $\psi(\sim C) = \{\Gamma / \Gamma \models \sim C\}$. Pois observamos que $\psi(\sim C) = -\psi(C) = ((\psi(C))^c)^\circ$. Logo $\Gamma \in \psi(\sim C)$ se e somente se $\Gamma \in U_\Delta \subset (\psi(C))^c$ para algum Δ, see $U_\Gamma \subset (\psi(C))^c$, see para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$, $\Delta \not\models C$, see $\Gamma \models \sim C$.

Então temos que $\psi(A) \neq \mathcal{G}$, pois no caso contrário $\mathcal{G} = \{\Gamma / \Gamma \models A\}$ e A seria válida sobre $\langle \mathcal{G}, R, \models \rangle$. Temos encontrado assim uma álgebra finita de Heyting $\langle \Theta, \mathcal{G}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$, onde Θ é a coleção de conjuntos abertos de $\mathcal{G}$, e sobre esta álgebra A não é válida.

Consideraremos agora um sistema axiomático para LPI. Os axiomas são:

(1) $A \supset (B \supset A)$

(2) $A \supset (B \supset A \wedge B)$

(3) $A \wedge B \supset A$

(4) $A \wedge B \supset B$

(5) $A \supset A \vee B$

(6) $B \supset A \vee B$

(7) $A \vee B \supset ((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset C))$

(8) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

(9) $(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$

(10) $A \supset (\sim A \supset B)$

Consideraremos como única regra de dedução a regra de Modus Ponens. Estes dez axiomas com a regra de Modus Ponens formam o chamado cálculo proposicional de Heyting , o cálculo proposicional intuicionista CPI.

Lema 2.5.7

$$\text{Se} \quad \vdash_{LPI} A \quad \text{então} \quad \vdash_{CPI} A$$

Demonstração: Para fazer a prova introduziremos o cálculo de sequentes L' que tem regras de introdução de conectivas a esquerda e direita. São elas :

	Direita.	Esquerda
Atenuação	$\dfrac{\Gamma : \Delta}{\Gamma : A, \Delta}$	$\dfrac{\Gamma : \Delta}{\Gamma, A : \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma : A, \Delta \qquad \Gamma' : B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' : A \wedge B, \Delta, \Delta'}$	$\dfrac{\Gamma, A, B : \Delta}{\Gamma, A \wedge B : \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma : A \vee B, \Delta}{\Gamma : A \vee B, \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A : \Delta \qquad \Gamma', B : \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B : \Delta, \Delta'}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A : B}{\Gamma : A \rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma, B : \Delta \qquad \Gamma' : A, \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B : \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A :}{\Gamma : \neg A}$	$\dfrac{\Gamma : A, \Delta}{\Gamma, \neg A : \Delta}$

Um sequente básico será o que tenha a forma $\Gamma, A : \Delta, A$. Diremos que um sequente $\Gamma : \Delta$ deriva-se em L' ou é provado em L' e denotaremos este fato por $\Gamma \vdash_{L'} \Delta$ se existe uma árvore finita cuja raiz esteja associada ao sequente $\Gamma : \Delta$, e cujos nodos terminais estejam associados a sequentes básicos, valendo a propriedade de que todo sequente associado com um nodo α que esteja debaixo de algum ou de alguns outros nodos, é uma consequência direta de alguma das regras de dedução de L' do sequente ou dos sequentes associados com aqueles nodos, ou uma repetição de um sequente associado com um nodo , imediatamente precedente acima de α Procuraremos agora relacionar este cálculo L' com o sistema de Tabelas de Beth. Associaremos a cada conjunto finito de fórmulas signadas um sequente assim: as fórmulas signadas com T serão postas à esquerda do signo " : ", isto é, no antecedente do sequente, e as fórmulas signadas com F serão postas à direita de " : " no sucedente do sequente. Um conjunto de fórmulas fechado estará associado a um sequente básico. Diremos que dois nodos de uma árvore de prova têm o mesmo nível se o número dos nodos intermediários entre cada um destes nodos e o vértice é o mesmo. Façamos corresponder aos sequentes associados a todos os nodos do mesmo nível de uma árvore de prova uma configuração de fórmulas signadas $\mathfrak{S}$. Conjeturamos então que uma tabela fechada para { FA } corresponde a uma árvore de que uma tabela fechada para { FA } corresponde a uma árvore de prova para : A. Demonstraremos agora a conjetura exposta. Isto é, demonstraremos que se $\vdash_{LPI} A$ então $\vdash_{L'} A$. Suponhamos então que $\vdash_{LPI} A$. Sabemos que existe uma tabela $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathcal{C}_m$ com $\mathcal{C}_m$ fechada e $\mathcal{C}_1$ = {FA}. Construiremos agora uma árvore de prova para : A fazendo corresponder biunivocamente a cada configuração $\mathcal{C}_n = \{ S_1, S_2, \ldots S_p \}$ p nodos do seguinte modo : a $\mathcal{C}_1$ = {FA} faremos corresponder-lhe o nodo raiz da árvore que será construída e o sequente : A. Suponhamos ter feito a correspondência até a configuração $\mathcal{C}_{n-1} = \{ S_1, S_2, \ldots S_k, S_p \}$. Então $\mathcal{C}_n$ é quase como $\mathcal{C}_{n-1}$, exceto que substituiremos algum S_k por um novo conjunto $S_{k'}$ ou por dois novos conjuntos $S_{k'}$, $S_{k''}$, dependendo isto da regra de LPI usada por nós. Fazemos corresponder a cada S_i, $i \neq k$ um nodo e um sequente como fizemos precedentemente, isto é, repetimos os nodos e os sequentes para $i \neq k$. Distinguimos agora os oito casos seguintes, cada um deles correspondente à uma regra de LPI.

i) $S_{k'}$ obtém-se de S_k através de $T\wedge$. Então S_k será da forma { S , T (B $\wedge$ C)} e $\Gamma_k : \Delta_k$ será da forma $\Gamma, B \wedge C : \Delta$. $S_{k'}$ terá a forma { S, TB, TC }. Colocamos acima do nodo associado a S_k um novo nodo que associaremos ao sequente correspondente a $S_{k'}$ que será da forma Γ, B, C : Δ.

ii) $S_{k'}$ e $S_{k''}$ obtém-se de S_k através da regra $F\wedge$. Logo S_k = { S, F (C $\wedge$ D)} , $S_{k'}$ = { S, FC }, $S_{k''}$ = { S, FD } e $\Gamma_k : \Delta_k$ é da forma Γ : C $\wedge$ D, Δ. Então colocamos acima do nodo associado a S_k dos nodos novos aos que associamos os sequentes correspondentes a $S_{k'}$ e $S_{k''}$ que são Γ : C , Δ e Γ : D , Δ respectivamente.

iii) $S_{k'}$ e $S_{k''}$ obtém-se a partir de S_k através da regra $T\vee$. Logo S_k será da forma { S, T (C $\vee$ D)}, $S_{k'}$ é {S, TC} e $S_{k''}$ é da forma { S, TD }. Pomos os nodos novos. $\Gamma_k : \Delta_k$ é da forma Γ, C $\vee$ D : Δ e os sequentes associados aos novos nodos serão Γ, C : Δ e Γ, D : Δ

iv) $S_{k'}$ obtém-se de S_k através da regra $F\vee$. S_k é da forma { S, F (C $\vee$ D)} e $\Gamma_k : \Delta_k$ é da forma Γ : C $\vee$ D, Δ. $S_{k'}$ será da forma { S, FC, FD }. Pomos um nodo novo ao qual associamos o sequente Γ : C, D Δ

v) $S_{k'}$ obtém-se de S_k através da regra $T\neg$. S_k é { S , T ($\neg$ C) e $\Gamma_k : \Delta_k$ é Γ, $\neg$ C : Δ. $S_{k'}$ será {S, FC}. Pomos um nodo novo ao qual associamos o sequente Γ : C , Δ

vi) S_k é { S , F ($\neg$ C) } e $\Gamma_k : \Delta_k$ é Γ : $\neg$ C, Δ. Então $S_{k'}$ será { S_T , TC }. Pomos um nodo novo ao que fazemos corresponder o sequente associado a S_T , TC que terá a forma Γ , C :

vii) $S_{k'}$ e $S_{k''}$ obtém-se a partir de S_k a partir de $T\supset$. Logo S_k é da forma S , T (C $\supset$ D), $S_{k'}$ é { S , FC } e $S_{k''}$ é { S , TD }. $\Gamma_k : \Delta_k$ será da forma Γ, C $\supset$ D : Δ

Logo pomos dos novos nodos aos que associamos os sequentes correspondentes a { S , FC } e { S, TD } que serão Γ : C , Δ e Γ, D : Δ respectivamente.

viii) $S_{\Gamma'}$ obtém-se a partir de S_Γ através da regra F $\supset$. Logo S_Γ é da forma { S , F (C $\supset$ D) } e Γ_Γ : Δ_Γ é da forma Γ : C $\supset$ D, Δ . Logo $S_{\Gamma'}$ será { S_T, TC , FD }. Pomos um novo nodo ao que associamos o sequente correspondente a { S_T , TC , FD } que será Γ C : D .

Logo temos que se $\vdash_{LPI} A$ então $\vdash_{L'} A$. No capítulo 3 demonstraremos que se $\vdash_{L'} A$ então $\vdash_{PI} A$. Destes dois fatos deduz-se o Lema 2.5.7.

Lema 2.5.8. Se $\vdash_{LPI} A$ então A é válida sobre todo modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$

Pelo Lema antecedente, temos que $\vdash_{CPI} A$. Resta ver que, para qualquer assignação ϕ, $V\phi$ aplicado a um axioma é igual a X, isto é $V\phi$ (Axioma) = X , e também resta ver que, se as premissas A e A $\supset$ B são de tal modo que $V\phi$ (A) = X e $V\phi$ (A $\supset$ B) = X , então $V\phi$ (B) = X. O primeiro é fácil de demonstrar. Em relação ao segundo, escolhemos um elemento $x \in X$, dado que $V\phi(A) = X$ temos que $x \in V\phi(A)$ e dado que $V\phi(A \supset B) = X$ temos que $\{ z / z \in V\phi(A) \Longrightarrow z \in V\phi(B) \} = X$. Logo $x \in V\phi(B)$

Teorema 2.5.8: Se A é válida sobre toda árvore de Kripke finita então A é válida sobre toda árvore de Beth.

Demonstração : Suponhamos que exista uma árvore de Beth $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ tal que A não seja válida sobre esta árvore. Vamos formar um modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ onde A não seja válida. Logo pelo Lema 2.5.8. teremos que $\not\vdash_{LPI} A$. Consequentemente pelo teorema 2.2.10 teremos que existe um modelo de Kripke finito $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ tal que A não é válida sobre ele.

Os elementos de X serão os caminhos P da árvore $\mathcal{G}$. Definimos sobre X uma topologia cuja base de abertos está dada pelos conjuntos $U_\Gamma = \{ P / \exists \Delta \geq \Gamma , P \text{ atravessa } \Delta \}$ com Γ pertencente a $\mathcal{G}$. Os conjuntos abertos serão união de U_Γ . A família $\{U_\Gamma\}_{\Gamma \in \mathcal{G}}$ forma uma base de abertos pois:

i) Seja $P \in U_\Gamma \cap U_\Delta$, logo existem $\Theta \geq \Gamma$ e $\Omega \geq \Delta$ tais que P atravessa Θ e Ω , isto é $\Theta \in P$, $\Omega \in P$. Suponhamos $\Theta \geq \Omega$, então $P \in U_\Theta \subseteq U_\Gamma \cap U_\Delta$

ii) Para todo P e $\Gamma \in P$ temos que $P \in U_\Gamma$

Definimos sobre as variáveis proposicionais uma assignação ψ do seguinte modo : $\psi(p) = \cup \{ U_\Gamma / \Gamma \models p \}$. Suponhamos que para qualquer fórmula B seja $\psi(B) = \cup \{ U_\Gamma / \Gamma \models B \}$ Dado que A não é válida sobre $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models \rangle$ existirá Γ tal que $\Gamma \not\models A$ e consequentemente $U_\Gamma \not\subset \psi(A)$, logo $\psi(A) \neq X$. Resta ver então que $\psi(B) = \cup \{ U_\Gamma / \Gamma \models B \}$.Sabemos que esta afirmação vale para variáveis proposicionais. Fazemos indução sobre o grau da fórmula. Para a conjunção e para

a disjunção a prova é fácil. Para $\supset$ devemos mostrar que $U_\Gamma \subseteq \psi(B \supset C) \Longleftrightarrow \Gamma \models B \supset C$. Mas $U \subseteq \psi(B \supset C) \Longleftrightarrow U_\Gamma \subseteq (\psi(B)^c \cup \psi(C))^\circ \Longleftrightarrow U_\Gamma \cap \psi(B) \subseteq \psi(C)$. Logo temos que provar que $U_\Gamma \cap \psi(B) \subseteq \psi^\Gamma(C) \Longleftrightarrow \Gamma \models B \supset C$. De esquerda à direita. Seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$. Suponhamos que $\Delta \models B$. Pela hipótese indutiva $U_\Delta \leq \psi(B)$ e dado que $\Gamma R \Delta$, $U_\Delta \leq U_\Gamma$. Então $U_\Delta \cap \psi(B) = U_\Delta \leq \psi(C)$ e consequentemente (usando novamente a hipótese indutiva) $\Delta \models C$. Então $\Gamma \models B \supset C$
De direita à esquerda. Seja $P \in U_\Gamma \cap \psi(B)$. Dado que $P \in U_\Gamma$ existe $\Delta \geqslant \Gamma$ tal que $\Delta \in P$ e $U_\Delta \leq U_\Gamma \cap \psi(B)$.
Logo $U_\Delta \subseteq \psi(B)$, então $\Delta \models B$ e consequentemente $\Delta \models C$.
Logo $P \in \psi(C)$. Resta mostrar que $\psi(\bigcup A) = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models \bigcup A\}$. Seja $\Gamma \in \mathcal{G}$ tal que $U_\Gamma \subseteq \psi(\bigcup A)$. Consideraremos um nodo Δ qualquer tal que $\Gamma R \Delta$. Então $U_\Delta \subseteq U_\Gamma$. Suponhamos que $\Delta \models A$. Temos que se $Q \in U_{\bar\Delta}$ então $Q \in \psi(A)$, e $Q \in U_\Delta \leq U_\Gamma$ implica $Q \in \psi(\bigcup A)$. Absurdo. Logo $\Delta \not\models A$ e consequentemente $\Gamma \models \bigcup A$

Corolario 2.5.9. A é válida sobre todo modelo de Kripke se e somente se A é válida sobre todo modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ com X um conjunto finito.
Se A é válida sobre todo modelo de Kripke, então, pelo Teorema 2.2.10 $\vdash_{LPI} A$ e pelo Teorema 2.5.5., A é válida sobre toda álgebra de Heyting finita. Logo A é válida sobre todo modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ com X finito.
Reciprocamente, se A é válida sobre todo modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ com X um conjunto finito, então A é válida sobre toda álgebra de Heyting finita, caso contrário, pelo Teorema 2.5.5. de representação, existirá um modelo topológico finito tal que sobre este modelo A não seria válida. Logo, pelo Teorema 2.5.6., teremos $\vdash_{LPI} A$
Consequentemente, pelo Teorema 2.2.7., A será válida sobre todo modelo de Kripke.

Corolario 2.5.2. : Uma fórmula da lógica proposicional intuicionista A é válida sobre todo modelo de Kripke finito se e somente se A é válida sobre toda árvore de Beth, se e somente se A é válida sobre todo modelo topológico $\langle \Theta, X, \cap, \cup, \Longrightarrow, - \rangle$ com X finito.

Capítulo 3

MODELOS PARA A LOGICA DE PREDICADOS INTUICIONISTA LQI

A linguagem desta lógica está formada por:

(1) Um conjunto enumerável de variáveis individuais, x ,y, z, ...

(2) Um conjunto enumerável de constantes individuais, a, b, c,...

(3) Para cada número natural n, uma lista enumerável de predicados n-arios: An, Bn, Cn, Dn,...

(4) Conetivas, quantificadores e parenteses.

O conceito de fórmula é definido como de hábito por indução.

1. Modelos de Kripke.

Como foi feito anteriormente, vamos considerar um conjunto G e uma relação R, reflexiva, antisimétrica e transitiva definida sobre ele. Ademais, vamos considerar uma relação $\Vdash$ definida entre elementos de G e fórmulas. O que temos de novo é o fato de aparecer aqui uma aplicação P do conjunto G sobre o conjunto das constantes. Por $P^{\wedge}[\Gamma]$ denotaremos o conjunto de fórmulas que contém so constantes de $P[\Gamma]$. Então, um modelo de Kripke sera a quădrupla <G, R, $\Vdash$, P>, onde G, R e P, satisfazem, para qualquer Γ em G as seguintes condições:

Q.0 $\quad P[\Gamma] \subseteq P[\Gamma^*]$

Q.1 $\quad \Gamma \Vdash A$ implica A esta em $P^{\wedge}[\Gamma]$

Q.2 $\Gamma \Vdash A$ implica $\Gamma^* \Vdash A$ (para A atomica em Q.1 e Q.2)

Q.3 $\Gamma \Vdash (X \wedge Y)$ sss $\Gamma \Vdash X$ e $\Gamma \Vdash Y$.

Q.4 $\Gamma \Vdash \neg X$ sss...$(\neg X)$ esta em $P^{\wedge}[\Gamma]$, e para todo Γ^*, ocorre que Γ^* não $\Vdash X$.

Q.5 $\Gamma \Vdash (X \vee Y)$ sss... $(X \vee Y)$ esta em $P^{\wedge}[\Gamma]$ e $\Gamma \Vdash X$ ou $\Gamma \Vdash Y$.

Q.6 $\Gamma \Vdash (X \supset Y)$ sss...(X..Y) esta em $P^{\wedge}[\Gamma]$, e para todo Γ^*, se $\Gamma^* \Vdash X$, então $\Gamma^* \Vdash Y$.

Q.7 $\Gamma \Vdash (Ex)X(x)$ sss é possível encontrar a em $P[\Gamma]$, tal que $\Gamma \Vdash X(a)$.

Q.8 $\Gamma \Vdash \forall(x)X(x)$ sss, para todo Γ^* e todo a em $P[\Gamma^*]$, ocorre que $\Gamma^* \Vdash X(a)$

Diz-se que uma fórmula X é válida sobre o modelo <G, R, $\Vdash$, P > se, para todo Γ em G tal que X esta em P^[Γ], ocorre que $\Gamma \Vdash$ X. Diz-se que X é uma fórmula vãalida se ela é válida sobre todo modelo < G, R, $\Vdash$, P>.

OBSERVAÇAO. Intuitivamente, podemos pensar que cada Γ em G representa um estágio no conhecimento da matemática. Seria razoável exigir que para Γ em G, ocorra que P[Γ] = N, onde N é o conjunto dos números naturais?. E, mais geralmente, seria necessário exigir que para todo Γ em G, o valor P[Γ] fosse constante?.

Consideremos a fórmula $\forall$(..x)(p V Fx) $\supset$(p V ($\forall$.x)Fx), onde p é uma fórmula atómica que só contém constantes.Dada a interpretação das constantes lógicas intuicionistasa, esta fórmula NãO é intuicionisticamente aceitável, e, portanto, não é um teorema de LQI. Seja Γ em G um elemento qualquer de um modelo de Kripke, <G, R, $\Vdash$, P>, onde, para todo ¶ em G, ocorre que P[¶] = N. Suponhamos que $\Gamma \Vdash$ ($\forall$.x)(p V Fx). Se não $\Vdash$ p, dado que $\Gamma \Vdash$ (p V Fa), para cada a em N, então $\Gamma \Vdash$ F(a) para cada a em N. Logo, Γ* $\Vdash$ F(a), para cada a em N, e dado que P[Γ] = P[Γ*], então temos que $\Gamma \Vdash$ ($\forall$x)F(x), e, consequentemente, $\Gamma \Vdash$ (p V ($\forall$.x)F(x)). Se $\Gamma \Vdash$ p, então $\Gamma \Vdash$ p V (($\forall$.x)F(x)).

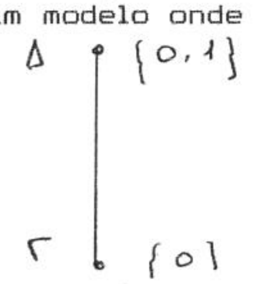
Em ambos os casos temos que, se $\Gamma \Vdash$ (.$\forall$x)(p V F(x)), então, obtemos $\Gamma \Vdash$ (p V ($\forall$x) F(x)). Portanto, para todo Γ em G, ocorre que $\Gamma \Vdash$ (($\forall$x)(p V F(x)) $\supset$. (p V ($\forall$x)F(x)))

Se exigimosque, para todo modelo, aconteça que P[Γ] = N = P[Γ*], para cada Γ emG,então{($\forall$x)(pVFx)$\supset$(pV($\forall$x)F(x))} seria vãlida sobre todo modelo de Kripke, o que não é aceitável do ponto de vista intuicionista dado que a fórmula

{ (.$\forall$x)(p V Fx)..$\supset$.(p V ($\forall$x)Fx)}

não é aceita pelo intuicionismo, devido ao significado intuitivo das constantes lógicas intuicionistas. Esta situação força-nos a exigir que P satisfaça apenas P[Γ] $\leq$ P[Γ*]. Ora, podemos assim construir um modelo no qual a fórmula { [(.$\forall$x)(p V Fx)] ..$\supset$[p V ($\forall$x)Fx] } não seja válida.

Suponhamos ter um modelo onde G = {Γ, ¶ }, Γ R ¶ , P[Γ] = {O} e P[¶] = {O, 1}.



suponhamos ¶ $\Vdash$ p

e Γ não $\Vdash$p

$\Gamma \Vdash$ F(0)

¶ $\Vdash$/F(1)

Vemos que $\Gamma \Vdash$ (p V F(O)) e ¶ $\Vdash$ (p V F(1)),

¶ $\Vdash$ (p V F(2)). Logo, $\Gamma \Vdash$ (.$\forall$x)(p V F(x)). Mas ¶ não $\Vdash$ F(1), o que implica que Γ não $\Vdash$ (.$\forall$x)F(x), e, portanto $\Gamma \nVdash$ p v ($\forall$x) F(x).

PROPOSIÇAO 3.1.1. Em todo modelo, para todo Γ em G, se $\Gamma \Vdash$ X, então X esta em $P^*[\Gamma]$. Prova por indução no grau de X.

PROPOSIÇAO 3.1.2. Em todo modelo, para toda fórmula X, se $\Gamma \Vdash$ X, então $\Gamma^* \Vdash$ X. Induçao no grau de X.

PROPOSIÇAO 3.1.3. Seja G um conjunto não vazio, R uma relação transitiva, reflexiva e antisimétrica sobre G, e P uma aplicação de G sobre um conjunto não vazio de constantes, tal que $P[\Gamma] \subseteq P[\Gamma^*]$, para toda Γ em G. Suponhamos que $\Vdash$ seja uma relação entre elementos de G e fórmulas atómicas, tal que:

(i) Se $\Gamma \Vdash A$ então $\Gamma^* \Vdash A$,

(ii) Se $\Gamma \Vdash A$ então A esta em $P^*[\Gamma]$.

Nessas condiçoes, $\Vdash$ pode extender-se em forma única a uma relação $\Vdash^{\sim}$ entre G e fórmulas, tal que a estrutura obtida seja um modelo de Kripke. Ver proposição 2.13 e corolario 2.1.4.

DEFINIÇAO 3.1.4. Seja $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ um modelo de Kripke e suponhamos que a seja uma constante tal que, para Γ em G, a não esta em $\bigcup_{\Gamma \in G} P[\Gamma]$. Pela seguinte notação:

$\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ (b..a), entendemos o modelo $\langle G, R, \Vdash, P'\rangle$, onde $P'(\Gamma)$ é o mesmo conjunto que $P(\Gamma)$ exceto pelo fato de ter a no lugar de b, caso que $P(\Gamma)$ contenha b. Para A atomica

$\Gamma \Vdash A$ se e so se $\Gamma \Vdash' A\,(b..a)$

E $\Vdash'$ pode extender-se a todas as fórmulas.

PROPOSIÇAO 3.1.5 Seja $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ um modelo e a um elemento que não está em $\bigcup_{\Gamma \in G} P[\Gamma]$, para Γ em G. Seja agora $\langle G, R, \Vdash', P'\rangle = \langle G, R, \Vdash, P)\,(b..a)$

Para toda fórmula X que não contenha b, temos que $\Gamma \Vdash X$ se e somente se $\Gamma \Vdash X\,(b..a)$. Prova por indução no grau de X.

DEFINIÇAO 3.1.6. Seja $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ um modelo e suponhamos que a seja uma constante tal que a não esta em $\bigcup P[\Gamma]$, para Γ em G. Por $\langle G, R, \Vdash, P\rangle b{=}a$, entendemos o modelo $\langle G, R, \Vdash, P'\rangle$, definido assim: $P'[\Gamma]$ é o mesmo que $P[\Gamma]$ exceto por ter a ou b onde $P[\Gamma]$ contenha b. Para A atómica $\Gamma \Vdash A$ implica que $\Gamma \Vdash 'A'$, onde A' é como A exceto por ter a em zero ou mais lugares onde A contém b, e $\Vdash'$ extende-se a todas as fórmulas.

PROPOSIÇAO 3.1.7. Seja $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ um modelo e a um elemento fora de $\bigcup P[\Gamma]$ e seja $\langle G, R, \Vdash P'\rangle$ o modelo $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ b=a. Se X é qualquer fórmula que não contenha b e X' é como X exceto por ter a em zero ou mais lugares onde X contiver b, então $\Gamma \Vdash X$ se e so se $\Gamma \Vdash' X'$. Prova por indução no grau de X.

■

TABELAS DE BETH PARA A LOGICA
DE PREDICADOS INTUICIONISTA

Consideramos uma extensão do sistema exposto para a lógica proposicional. Adjuntamos 04 novas regras de dedução:

T E

$$\frac{S, T\ (Ex)X(x)}{S,\ TX(a)}$$

a não aparece em S nem em X(t)

F E

$$\frac{S,\ F\ (E.x)X(x)}{S,\ FX(a)}$$

T (.∀.)

$$\frac{S,\ T\ (.\forall x)X(x)}{S,\ TX(a)}$$

F (.∀.)

$$\frac{S,\ F\ (.\forall x)X(x)}{ST,\ FX(a)}$$

a não aparece em S nem em X(t).

Demostração. Suponhamos que, no modelo <G, R, $\Vdash$,P>, Γ realiza S,F{($\forall$x)X(x)}. Então, existe Γ^* e um b em P[Γ^*] tal que Γ^* não $\Vdash$X(b). Claramente, Γ^* realiza ST. Logo, Γ^* realiza ST, FX(b). Se a=b, pronto. Se a/=b, usamos o lema 3.1.9

OBSERVAÇAO: A prova do lema antecedente não é intuicionisticamente aceitável. Não pode se justificar o trânsito de Γ não $\models$ $\forall$X(x) a "existe um Γ^* e um b em P[Γ^*] tal que Γ^* não $\models$ X(b)".Consequentemente a diferença do caso da lógica proposicional, teremos um teorema de adequação que não sera intuicionisticamente aceitável. A diferença está em que no caso da lógica proposicional podemos raciocinar sobre modelos de Kripke finitos, dado que temos um teorema de completude das tabelas de Beth em relação aos modelos finitos de Kripke.

TEOREMA 3.1.14. Sejam C_1,...C_n elementos de uma tabela. Se Ci é realizável, também C(i+1) é realizável.

Prova: Passamos de Ci a C(i+1) pela aplicação das regras de redução. O caso das regras proposicionais já foi estudado (lema 2.2.6). Para as quatro regras novas de redução usam-se os lemas 3.1.10 a 3.1.13▓

COROLARIO. Se LQI $\vdash$ X, então X é válida sobre todo modelo de Kripke. Prova idêntica a do teorema 2.2.7.

2. Completude de LQI em relação aos modelos de Kripke.

Provaremos agora a completude de LQI sobre os modelos de Kripke. A prova consiste na demonstração da existência de um modelo de Kripke <G, R, $\Vdash$, P> e um nodo Γ em G, tal que Γ não $\Vdash$ X, a partir do fato de que LQI não $\vdash$ X. Pode-se obter um contramodelo "universal" no sentido que seja um contramodelo para toda fórmula X, tal que LQI não $\vdash$X <ver FITTING [1969], p. 60>. Apresentaremos um contramodelo que dependa da fórmula X escolhida.

Seja G uma coleção de conjuntos de fórmulas signadas. Se Γ esta em G, entendemos por P[Γ] o conjunto de todas as constantes que apareçam nas fórmulas de Γ. Se Γ,Π estão em G, falamos que Γ está vinculado pela relação R com Π, e denotamos este fato por Γ R Π, se P[Γ]$\subseteq$P[Π], e $\Gamma_T \subseteq \Pi$.

DEFINIÇAO,3.2.1.: Dizemos que G é uma coleção de Hintikka de primeira ordem se, para todo Γ em G, ocorre que Γ é consistente e

T(X$\wedge$Y) esta em Γ implica TX esta em Γ e TY esta em Γ
F(X$\vee$Y) esta em Γ implica FX esta em Γ e FY esta em Γ
T(X$\vee$Y) esta em Γ implica TX esta em Γ ou TY esta em Γ
F(X$\wedge$Y) esta em Γ implica FX esta em Γ ou FY esta em Γ
T($\neg$X) esta em Γ implica FX esta em Γ
T(X $\supset$ Y) esta em Γ implica FX esta em Γ ou TY esta em Γ

DEFINIÇAO 3.1.8. Seja S={ TX1, TX2, ...TXn,FY1,...FYm} um conjunto finito de fórmulas signadas, e seja $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ um modelo tal que Γ pertence a G. Diz-se que Γ realiza S se Xi esta em P[Γ], Yj esta em P^[Γ] e, ademais, ocorre que $\Gamma \Vdash$ Xi e Γ não $\Vdash$ Yj.

Um conjunto S chama-se realizável se algum Γ que perteça a um modelo de Kripke $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ realiza S. Uma configuração $\mathcal{C}$ é realizável se algum de seus elementos o é.

Provaremos agora adequação para as tabelas de Beth. Isto é, provaremos que se LQI $\vdash$ X, então X é válida sobre todo modelo de Kripke.

LEMA 3.1.9. Seja "Q" para T ou F. Se S, QX(b) é realizável e a é uma constante que não aparece nem em S nem X [portanto,a/=b] então S, QX(a) é realizável.

Demonstração} Consideremos um modelo $\langle G,R,\Vdash,P\rangle$ e suponhamos que Γ realize S, T{(Ex)X(x)}. Então, $\Gamma \Vdash$ X(x). Logo, para algum b em P(Γ), $\Gamma \Vdash$ X(b). Logo Γ realiza S,TX(b).∎

LEMA 3.1.11.Se S, F{(Ex)X(x)} é realizável e a é uma constante qualquer, então S, F{X(a)} é realizável.

Demostração} Suponhamos que no modelo $\langle G, R, F, P\rangle$, Γ realize S,F{(Ex)X(x)}. Logo Γ não $\Vdash$ (Ex)X(x). Então, se a esta P[Γ], Γ não $\Vdash$ X(a) e pronto. Se a não esta em P[Γ], dado que P[Γ] =/ $\emptyset$, podemos escolher b esta em P[Γ], b$\neq$a, tal que Γ não $\Vdash$ X(b). Então Γ realiza S,FX(b).

Pela definição de realizabilidade,se a aparecesse em S ou em X, a estaria em P[Γ] e isto contradiz nossa hipótese. Logo estamos nas condiçoes do lema 3.1.9 e consequentemente S,FX(a) é realizável.

OBSERVAÇAO. Dado que o nosso alvo é ter um teorema de adequação que seja intuicionisticamente aceitável, podemos acrescentar nossa deinição do modelo de Kripke com a exigencia que P[Γ] seja um conjunto decidível, isto é para qualquer constante a podamos determinar se a está em P[Γ] ou a não pertence a P[Γ]. Esta exigencia faz a PROVA DO LEMA antecedente intuicionisticamente aceitável.

LEMA 3.1.12. Se S, T{($\forall$x)X(x)} é realizável e a é uma constante qualquer, ST{X(a)} é realizável. Seja Γ um elemento do modelo $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ tal que Γ realiza S, T{($\forall$x)X(x)}. Se a não pertence a P[Γ], escolhemos um elemento b em P[Γ], b =\a. Ora, Γ realiza S,TX(b) e dado que a não aparece nem S nem X(b) aplicamos o Lema 3.1.9 e inferimos que S,TX(a) é realizável. ⫫

LEMA 3.1.13. Se S,F{($\forall$x)X(x)} é realizável e a é uma constante que não aparece nem S nem X(x), então S , FX(a) é realizável.i

F(¬X) esta em Γ implica que podemos encontrar um Π em G, tal que Γ R Π, e TX esta em Π.

F(X⊃Y) esta em Γ implica que podemos encontrar um Π, tal que Γ R Π, e TX esta em Π, FY esta em Π.

T{($\forall$x)X(x)} esta em Γ implica que TX(a) esta em G, para todo a esta em P[Γ].

F{(Ex)X(x)} esta em Γ implica FX(a) esta em Γ, para todo a em P[Γ].

T{(Ex)X(x)} esta em Γ implica que podemos encontrar um a em P[Γ], tal que TX(a) esta em Γ.

F{($\forall$x)X(x)} esta em Γ, implica que podemos encontrar Π em G, a em P[Π] tal que ΓRΠ e FX(a) esta em Π.

DEFINIÇAO 3.2.3. Seja G uma coleção de Hintikka. Dizemos que $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ é um modelo para G, se:

(1) $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ é um modelo de Kripke.

(2) Para todo Γ em G, se TX em Γ, então $\Gamma \Vdash X$, e se FX esta em Γ, então Γ não $\Vdash$ X.

TEOREMA 3.2.3. Para cada coleção de Hintikka, existe um modelo.

Prova: Suponhamos que G é uma coleção de Hintikka G.

Lembremos que, para todo par Γ, Π, de elementos de G, Γ R Π, se P[Γ] $\subset$ P[Π] e ΓT$\subset\Pi$.

Seja A uma fórmula atómica. Dizemos que $\Gamma \Vdash$ A sss TA esta em Γ e procuramos estender $\Vdash$ a todas as fórmulas. Vemos: (i) se A é atômica e $\Gamma \Vdash$ A, então TA esta em ΓT, TA esta em Γ^*. Logo, $\Gamma^* \Vdash$ A.

(ii) Se $\Gamma \Vdash$ A, então TA esta em Γ, logo P(TA)$\subset$P[Γ]. Assim, todas as constantes que aparecem na fórmula A pertencem a P[Γ] e, conseqüentemente A esta em P^[Γ]. Logo, pela proposição 3.1.3 $\langle G, R, \Vdash, P\rangle$ é um modelo de Kripke. Resta ver que vale a condição (2) . Faremos a prova por indução no grau de X. Os casos pertencentes a logica proposicional já foram feitos no teorema 2.2.9. Restam os quatro casos pertencentes a logica quantificacional. Suponhamos provados os resultados para as subfórmulas correspondentes. Então:

1] Se T{ (Ex)X(x)} esta em Γ então, podemos encontrar a em P[Γ] tal que TX(a) esta em Γ, isto é podemos encontrar a em P[Γ] tal que $\Gamma \Vdash$X(a). Logo, $\Gamma \Vdash$ (Ex)X(x).

2] Suponhamos F{(Ex)X(x)} esta em G. Se $\Gamma \Vdash$ (Ex)X(x) para algum a em P[Γ], $\Gamma \Vdash$ X(a). Logo, FX(a) não esta em Γ, pois no caso contrario teríamos que Γ não $\Vdash$ X(a). Mas, se FX(a) não esta em Γ, temos que F{(Ex)X(x)} não esta em Γ. Contradição. Então, Γ não $\Vdash$ (Ex)X(x).

3] Se T{(..x)X(x)} esta em Γ , então, para qualquer Γ^*, T{(..x)X(x)} esta em Γ^*, e conseqüentemente, T{X(a)} esta em Γ^*, para todo a de P[Γ^*]. Logo, para qualquer Γ^* e todo a em P[Γ^*], ocorre que $\Gamma^* \Vdash$ X(a). Então, $\Gamma \Vdash$ {($\forall$x)X(x)}.

4) Suponhamos agora que F{($\forall$x)X(x)} esta em Γ. Se $\Gamma \Vdash$ ($\forall$x)X(x), então, para todo Π em G, Γ R Π, e todo a em P[Π], $\Gamma \Vdash$

X(a). Alem disto, dado que temos suposto que F{($\forall$x)X(x)} esta em Γ, então, podemos encontrar ¶ em G, tal que Γ R ¶ e a esta em P[¶] tal que FX(a) esta em ¶. Logo, temos que existe ¶ em G tal que Γ R ¶ e existe a em P[¶] tal que Γ não satisfaz X(a). Contradição. Logo, Γ não $\Vdash$ ($\forall$x)X(x). ▒

DEFINIÇAO 3.2.4. Seja Γ um conjunto de fórmulas signadas e P um conjunto de constantes. Dizemos que Γ é um elemento de Hintikka, em relação a P, se Γ é consistente e se

T(X∧Y) esta em Γ implica TX esta em Γ e TY esta em Γ
F(YVY) esta em Γ implica FX esta em Γ e TY esta em Γ
T(XVY) esta em Γ implica TX esta em Γ e TY esta em Γ
F(X∧Y) esta em Γ implica FX esta em Γ e FY esta em Γ
T(¬X) esta em Γ implica FX esta em Γ
T(X⊃Y) esta em Γ, implica FX esta em Γ ou TY esta em Γ.
T{($\forall$x)X(x)} esta em Γ implica TX(a) esta em Γ, para cada a em P.
F{(Ex)X(x)} esta em Γ implica FX(a) esta em Γ, para cada a em P.
T{(Ex)X(x)} esta em Γ, implica que podemos encontrar uma constante a em P, tal que TX(a) esta em Γ.

TEOREMA 3.2.5. Seja Γ um conjunto consistente numerável de fórmulas signadas. Seja S o conjunto de constantes que aparecem nas fórmulas de Γ. Seja a1,a2,...,uma lista enumerável de constantes que não estejam no conjunto S. Seja P = S U {a1, a2,....}. Então Γ pode estender-se a um elemento de Hintikka ¶ em relação a P.

Demostração. Numeramos os conjuntos de sub-fórmulas das fórmulas de Γ que somente contem constantes de P. Definimos una seqüência dupla de conjuntos consistentes de fórmulas signadas. Seja Γ = Γ0, Suponhamos ter definido Γn que é uma extensão de Γ0 usando só um número finito das constantes a1, a2, ... a(n+1)... Seja Γn = ¶1,n. Definimos ¶2,n....¶(n+1,n) e colocamos Γ(n+1) = ¶(n+1,n).

Fazemos estas definições assim: suponhamos ter definido ¶n para algum k, $1 \leqslant k < n$. Consideremos a fórmula Xk. Só uma das fórmulas TXk, FXk, pode estar no conjunto ¶k,n pois este conjunto é consistente. Se nenhuma das duas fórmulas estivesse no conjunto ¶k,n, pomos ¶k+1,n = ¶k,n. Se alguma desta fórmulas estivesse no conjunto ¶k,n temos os casos seguintes:

(1a.) Xk é (Y V Z) e TXk esta ¶k,n. Então ¶k,n TY ou ¶k,n TZ são consistentes. Logo ¶(k+1,n) sera ¶k,n , TZ conforme qual seja o conjunto consistente.

(1b.) Xk é (X V Y) e FXk esta em ¶k,n. Então ¶k,n FY,FZ é consistente. Logo ¶(k+1,n) = ¶(k,n) FY, FZ é consistente.

Os casos (2a) T(X∧Y), (2b) F(X∧Y), (3) T(¬X), (4) T(X⊃Y) são semelhantes aos dois precedentes 1b e 1a.

Caso 5a. Xk é (Ex)X(x) e TXk esta em ¶k,n. Dado que no conjunto ¶k,n aparece somente um número finito de elementos do conjunto a1, a2,a3,...podemos considerar ai, o primeiro elemento ainda não usado.

Caso 5b. X_k é $(\exists x)\ X(x)$ e $FX_k \in \Delta_n^k$. Seja Δ_n^{k+1} o conjunto $\left\{\Delta_n^k, FX(\alpha)\right\}$ para cada $\alpha \in S$ y cada $\alpha = a_i$ já usado. Então Δ_n^{k+1} é consistente , pois no caso contrario $TX(\alpha)$ devería pertencer a Δ_n^k para algúm $\alpha \in S$ ou $\alpha = a_i$. Logo $\Delta_n^k, TX(\alpha)$ sería consistente. Absurdo.

Caso6 X_k é $(\forall x)\ X(x)$ e supomos que $TX_k \in \Delta_n^k$. Seja Δ_n^{k+1} o conjunto $\left\{\Delta_n^k, TX(\alpha)\right\}$ para $\alpha \in S$ e cada $\alpha = a_i$ já usado. Δ_n^{k+1} é consistente, pois no caso contrario para algúm $\alpha \in S$ ou $\alpha = a_i$, $FX(\alpha) \in \Delta_n^k$. Logo $\Delta_n^k, FX(\alpha)$ sería consistente.Absurdo.

Caso 7. Se a fórmula X_k não estivesse em nenhumo dos casos antecedentes, fazemos $\Delta_n^{k+1} = \Delta_n^k$.

Temos agora definida uma sequência $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots$. Seja $\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$, Π extiénde-se a um elemento de Hintikka Δ em relação ao conjunto P. Pois vemos que:

i) Π é consistente dado que cada Γ_n é consistente.

ii) Se $T(X \vee Y) \in \Pi$ então $T(X \vee Y) \in \Gamma_n$ para algúm $n \in N$. Logo dado que $\Delta_n^1 = \Gamma_n$ temos que $TX \in \Delta_n^2$ ou $TY \in \Delta_n^2$ .Mas $\Delta_n^2 \subset \Delta_n^{n+1} = \Gamma_{n+1}$.

iii) Se $F(X \vee Y) \in \Pi$ então $F(X \vee Y) \in \Gamma_n$ para algúm $n \in N$. Logo $FX, FY \in \Delta_n^2 \subset \Gamma_{n+1}$

iv) Se $T(\exists x)\ X(x) \in \Pi$ então $T(\exists x)\ X(x) \in \Gamma_n$ para algúm $n \in N$. Logo para algúm $a_i \in \left\{a_1, a_2, \ldots\ldots\right\}$ $TX(a_i) \in \Delta_n^2 \subset \Gamma_{n+1}$.

v) Se $T(\forall x)\ X(x) \in \Pi$ então $\forall x X(x)$ é X_k para algúm k, e consequentemente $X(a)$ é $X(m)$ para $a \in P$, e pelo processo de construção $TX(a) \in \Pi$ ou $FX(a) \in \Pi$, e pela consistencia de Π, deve acontecer a primeira possibilidade.

vi) Se $F(\exists x)\, Y(x) \in \Pi$ então $Y(a)$ é X_k para cada $a \in P$, e consequentemente $FY(a) \in \Pi$ ou $TY(a) \in \Pi$ e pela consistência de Π, deve ser $FY(a) \in \Pi$. $\square$

Observação 3.2.5. Vemos que no caso que Δ_n^k seja infinito, não existe um processo efetivo para determinar qual das tres alternativas seguintes vale: $TX_k \in \Delta_n^k$, $FX_k \in \Delta_n^k$, ou $TX_k \notin \Delta_n^k$ e $FX_k \notin \Delta_n^k$. Esto faz inaceitável intuicionisticamente a prova do Teorema precedente, e também a prova do seguinte Teorema de completude que depende do Teorema precedente.

Teorema 3.2.6 de completude (Fitting). LQI é uma logica completa sobre os modelos de Kripke.

Suponhamos que $\not\vdash_{LQI} X$. Construiremos uma coleção de Hintikka $\mathcal{G}$ tal que $FX \in \Gamma \in \mathcal{G}$. Pelo Teorema 2.2.3 existe um modelo $\langle \mathcal{G}, R, \models, P \rangle$ para a coleção $\mathcal{G}$. Logo dado que $FX \in \Gamma$, temos que $\Gamma \not\models X$. Assim $\langle \mathcal{G}, R, \models, P \rangle$ é um modelo sobre o qual X não é válida.

Resta, então, construir a coleção de Hintikka $\mathcal{G}$ tal que $FX \in \Gamma \in \mathcal{G}$. Ordenamos as constantes do jeito seguinte:

S_1: $a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots\ldots\ldots$

S_2: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots\ldots\ldots$

S_3: $a_1^3, a_2^3, a_3^3, \ldots\ldots$

onde todas as constantes de X estão no conjunto S_1. Seja $P_n = S_1 \cup S_2 \ldots\ldots \cup S_n$. Por una F-fórmula entendemos uma fórmula signada do tipo $F\neg X$, $F(X \supset Y)$, $F(\forall x)\, X(x)$. Supomos que todas as fórmulas de LQI estão ordenadas.

Passo 0. $\not\vdash_{LQI} X$. Logo $\{FX\}$ é consistente. Extendemos $\{FX\}$ a um elemento de Hintikka em relação ao conjunto P_1, e chamámamos Γ_1 a esta extensão.

Passo 1. Escolhemos a primeira F-fórmula de Γ_1 (no caso que esta não existiesse, Γ_1 sería uma coleção de Hintikka e pronto). Se a fórmula é $F\neg X$ consideramos Γ_{1T}, TX, que é um conjunto consistente

Extendemos este conjunto a um elemento de Hintikka em relação a P_2 e o chamámos Γ_2. Se a primeira F-fórmula é $F(X \supset Y)$ extendemos Γ_{1T}, TX, FY a um elemento de Hintikka em relação a P_2. Se a primeira F-fórmula é $F(\forall x)\,X(x)$, extendemos $\Gamma_{1T}, FX(a_1^2)$, a um elemento de Hintikka Γ_2 em relação a P_2. Em todos os casos Γ_2 é um elemento de Hintikka em relação a P_2. Diremos que a primeira F-fórmula de Γ_1 já foi usada. O resultado do Passo 1 é $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Suponhamos que no final do Passo n tenhamos uma sequência $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots\ldots \Gamma_{2^n}\}$ onde cada Γ_i é um elemento de Hintikka em relação a P_i. Passo n+1. Escolhemos a primeira F fórmula não usada de Γ_1 e fazemos o mesmo processo que fizemos no Passo 1, dependendo o processo de cual seja a F-fórmula escolhida, ou $F(\sim X)$, ou $F(X \supset Y)$, ou $F(\forall x)\,X(x)$. Construimos a partir de Γ_{1T}, TX, ou Γ_{1T}, TX, FY, ou $\Gamma_{1T}, FX(a_1^{2^n+1})$, um elemento de Hintikka em relação a P_{2^n+1} e o chamámos Γ_{2^n+1}. Dizemos que a fórmula escolhida já foi usada. Escolhamos agora a primeira F-fórmula não usada de Γ_2. Repetimos o processo e construimos um elemento de Hintikka em relação a P_2, e o chamámos Γ_{2^n+2} e assim sucessivamente. O resultado do Passo n+1 é $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots \Gamma_{2^{n+1}}\}$. Seja $\mathcal{G}$ a coleção de todos os Γ_i generados por o processo exposto acima. Afirmamos que $\mathcal{G}$ é uma coleção de Hintikka. Cada Γ_n é um elemento de Hintikka em relação a $P(\Gamma_n)$, o conjunto de constantes que aparecem nas fórmulas de Γ_n. Pois se $T(\forall x)\,X(x) \in \Gamma_n$ então $TX(a) \in \Gamma_n$ para cada $a \in P_n$, particularmente para cada $a \in P(\Gamma_n)$ ($P(\Gamma_n) = P_n$ por construção). A situação é a mesma para $F(\exists x)\,X(x)$. Se $T(\exists x)\,X(x) \in \Gamma_n$ então $TX(a) \in \Gamma_n$ para algúm $a \in P_n$. Mas dado que $TX(a) \in \Gamma_n$, $a \in P(\Gamma_n)$. De jeito tal que Γ_n é um elemento de Hintikka em relação a $P(\Gamma_n)$. Para mostrar que $\mathcal{G}$ é uma coleção de Hintikka devemos demostrar as propiedades correspondentes as F-fórmulas. Suponhamos que para algúm $\Gamma_n \in \mathcal{G}$, $F(\forall x)\,X(x) \in \Gamma_n$. Pela construção exposta acima, deve existir um $\Gamma_k \in \mathcal{G}$ tal que $\Gamma_{nT} \subseteq \Gamma_k$, $P(\Gamma_n) \subseteq P(\Gamma_k)$ e $FX(a) \in \Gamma_k$ para algúm a particular. Então $\exists\, \Gamma_k \in \mathcal{G}$, $\Gamma_n \, R \, \Gamma_k$ e $FX(a) \in \Gamma_k$ para algúm $a \in P(\Gamma_k)$. Suponhamos que para algúm $n \in N$, $F(X \supset Y) \in \Gamma_n$, $\Gamma_n \in \mathcal{G}$. Em algúm Passo da construção do conjunto $\mathcal{G}$, $F(X \supset Y)$ será usado, e consequentemente exitirá k tal que $TX \in \Gamma_k$ e $FY \in \Gamma_k$ e $P(\Gamma_n) \subseteq P(\Gamma_k)$, $\Gamma_{nT} \subseteq \Gamma_k$. A demostração no caso que suponhamos que para algúm Γ_n, $F \sim X \in \Gamma_n$ é semelhante. $\square$

3. Modelos de Beth

Por um modelo de Beth entendemos uma estructura $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models, P \rangle$ onde $\mathcal{G}$ é um conjunto não vácuo, $\mathcal{R}$ é uma relação reflexiva e transitiva. Supomos que o conjunto $\mathcal{G}$ com a relação $\mathcal{R}$ ten uma estructura de árvore. P é uma aplicação do conjunto $\mathcal{G}$ sobre o conjunto das constantes. Exigemos que para todo $\Gamma \in \mathcal{G}$ $P(\Gamma) = D$ seja um conjunto fixo. A relação $\models$ entre elementos de $\mathcal{G}$ e fórmulas define-se assim:

1) Se $\Gamma \models A$ para A atômica, então $A \in \hat{D}$ (isto é, as constantes que aparecem na fórmula A estão no conjunto D)

2) Se $\Gamma \models A$ então $\Gamma^* \models A$ para A atômica.

3) $\Gamma \models X \wedge Y$ see $\Gamma \models X$ e $\Gamma \models Y$

4) $\Gamma \models X \vee Y$ see $(X \vee Y) \in \hat{D}$, e existe uma barreira S de Γ tal que para todo $\Delta \in S$, ou $\Delta \models X$, ou $\Delta \models Y$

5) $\Gamma \models \sim X$ see $\sim X \in \hat{D}$ e para todo Γ^*, $\Gamma^* \not\models X$

6) $\Gamma \models X \supset Y$ see $X \supset Y \in \hat{D}$, e para todo Γ^* se $\Gamma^* \models X$ então $\Gamma^* \models Y$.

7) $\Gamma \models \exists x\, X(x)$ see existe uma barreira S de Γ tal que para todo $\Delta \in S$, existe $b \in D$ tal que $\Delta \models X(b)$.

8) $\Gamma \models (\forall x)\, X(x)$ see para todo Γ^* e todo $a \in D$, $\Gamma^* \models X(a)$. Equivalentemente $\Gamma \models (\forall x)\, X(x)$ see $\forall\, a \in D$, $\Gamma \models X(a)$.

Dizemos que uma fórmula X é válida sobre um modelo ou árvore de Beth $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models, P \rangle$ se para todo $\Gamma \in \mathcal{G}$ tal que $X \in \hat{P}(\Gamma) = D$, $\Gamma \models X$. X cháma-se válida se ela é válida sobre todo modelo de Beth.

<u>Teorema 3.3.1</u> Completude de LQI sobre os modelos de Beth.

Se X é válida sobre todo modelo de Beth então $\vdash_{LQI} X$.

A prova usa o seguinte Lema:

<u>Lema 3.3.2</u> Seja $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models, P \rangle$ um modelo de Kripke com estructura de árvore. Seja X uma fórmula que não seja válida sobre $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models, P \rangle$

X não seja válida sobre êsta árvore de Beth. Temos que usar a mesma idea que no Teorema 2.3.2. Ver Kripke[1963], pág 112 e seguintes. Suponhamos ter agora uma fórmula X válida sobre todo modelo de Beth tal que $\nvdash_{LQI} X$ .Pela completude dos modelos de Kripke (aquí está a parte não intuicionisticamente aceitável da prova, pois o Teorema de completude sobre árvores de Kripke não é intuicionisticamente aceitável), existe um modelo de Kripke $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models, P, \rangle$ tal que X não é válida sobre êste modelo . Construimos o modelo de Beth associado $\langle \check{\mathcal{G}}, \check{\mathcal{R}}, \check{\models}, \check{P}, \rangle$ e pelo Lema antecedente X não é válida sobre êste modelo de Beth associado. Contradição. □

4. Sistemas valorativos para LQI-Modelos topológicos

Consideraremos agora uma estructura $\mathcal{M} = \langle M, D, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \bigwedge, \bigvee, \rangle$ onde M é um conjunto, D é um subconjunto de M, $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, são operações binarias sobre M e $\bigwedge$, $\bigvee$, são operações infintarias sobre M.

Queremos definir uma valuação de toda fórmula de LQI sobre $\mathcal{M}$. Suponhamos ter dada uma assingnação ϕ de fórmulas atômicas a elementos de M. Podemos definir uma valuação V_ϕ de toda fórmula sobre M assim:

$V_\phi (X \wedge Y) = V_\phi (X) \cap V_\phi (Y)$

$V_\phi (X \vee Y) = V_\phi (X) \cup V_\phi (Y)$

$V_\phi (\sim X) = -V_\phi (X)$

$V_\phi (X \supset Y) = V_\phi (X) \Rightarrow V_\phi (Y)$

$V_\phi (\exists x\, X(x)) = \bigvee \{ V_\phi (X(r)) / r \in R \}$

$V_\phi (\forall x\, X(x)) = \bigwedge \{ V_\phi (X(r)) / r \in R \}$.

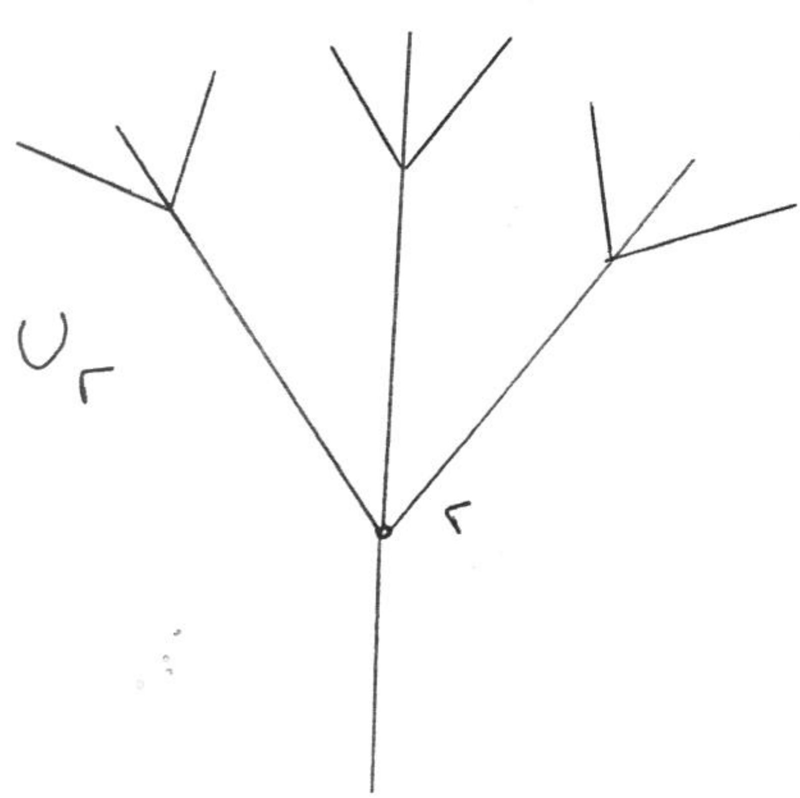
Suponhamos agora ter um espaço topologico S onde Θ é a familia de abertos de S. Consideraremos agora a estructura $\mathcal{M} = \langle \Theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \bigwedge, \bigvee, \rangle$ onde R é um subconjunto do conjunto N dos números naturais, $\cap$, $\cup$ são a interseção e a união finita de conjuntos abertos respectivamente, $-$ está definida por $- U = (U^c)^\circ$ onde U é um conjunto aberto (isto é $-U$ é o interior do complemento de U) , $\Rightarrow$ está definida por $U \Rightarrow V = \{ x / \text{ se } \in U \text{ então } x \in V \}^\circ$. $\bigvee$ é a união infinitaria de conjuntos abertos, e $\bigwedge$ é o interior de uma interseção infinitaria de conjuntos abertos, isto é, $\bigwedge B = (\bigcap_{U \in B} U)^{\circ}$ onde B é uma familia infinita de abertos. Chámamos a estructura $\mathcal{M} = \langle \Theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \bigwedge, \bigvee \rangle$ modelo topológico.

Dizemos que uma fórmula X é válida sobre $\mathcal{M}$ se para toda valuação v_ϕ de fórmulas de LQI sobre abertos de S acontece que $v_\phi(\text{cl } X) = S$ onde clX denota a clausura universal de X. Diremos que X é válida, se X é válida sobre todo modelo topologico.

<u>Teorema 3.4.1</u> Seja Y uma fórmula fechada. Se Y é válida sobre todo modelo topologico, então $\vdash_{LQI} Y$

Demostração: Suponhamos que $\nvdash_{LQI} Y$. Então pelo Teorema 3.3.1, existe um modelo de Beth $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \vDash, P \rangle$ tal que Y não é válida sobre êste modelo. Construiremos a partir de $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \vDash, P, \rangle$ um modelo topologico tal que Y não seja válida sobre esse modelo. Seja R = P (Γ) para todo $\Gamma \in \mathcal{G}$, R é o dominio constante do modelo de Beth. Consideraremos a estructura $\langle \Theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, \bigwedge, \bigvee \rangle$ definida assim: os elementos de S são os caminhos P cujos nodos são elementos de $\mathcal{G}$. Sobre S definimos uma topologia determinada por uma base de abertos cujos elementos são os conjuntos $U_\Gamma = \{ P \in S \text{ tal que } \exists \Delta, \Gamma \mathcal{R} \Delta \text{ e P atravessa } \Delta \}$. Prova-se que S com a base assim definida é um espaço topologico (ver Teorema 2.5.8).

Denotamos com Θ a coleção de abertos de S.



Consideraremos agora a seguinte assignação ϕ de elementos de ... a fórmulas atômicas: $V_\phi(A) = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models A\}$. Suponhamos ter já provado que para toda fórmula X, $V_\phi(X) = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X\}$. Dado que Y não é válida sobre $\langle \mathcal{G}, \mathbb{R}, \models, P \rangle$ o vértice da árvore Γ é tal que $\Gamma \not\models Y$. Logo $U_\Gamma \not\subset V_\phi(Y)$ e consequentemente $V_\phi(Y) \neq S$. Logo Y não é válida sobre o modelo $\mathfrak{M} = \langle \theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \wedge, \vee \rangle$

Resta ver então que para toda fórmula X de LQI, $V_\phi(X) = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X\}$.

Para as conectivas proposicionais $\wedge, \vee, \supset, \sim$, a prova deste Lema já foi feita (ver final do Teorema 2.5.8.). Vejamos o qué acontece com os cuantificadores:

$$V_\phi(\forall x\, X(x)) = \Big(\bigcap_{r\in R} V_\phi(X(r))\Big)^\circ = \Big(\bigcap_{r\in R} \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ$$

Mas $\Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ \subset \bigcup\{U_\Gamma / \forall r \in R, \Gamma \models X(r)\}$. Pois seja $P \in \Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ$. Logo existe U_Δ, $P \in U_\Delta$, $U_\Delta \subset \Big(\bigcap_{r\in R} \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ \subset \Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)$. Suponhamos que exista $s \in R$ tal que $\Delta \not\models X(s)$. Dado que $P \in \Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)$, para cada $r \in R$ podemos encontrar U_{Γ_r} onde $\Gamma_r \models X(r)$ e $P \in U_{\Gamma_r}$. Logo $P \in \bigcap_{r\in R} U_{\Gamma_r}$. Além disto, dado que $\Delta \not\models X(s)$ então $\Gamma_s \not R \Delta$. Logo $\Delta R \Gamma_s$ (Γ_s e Δ estão no mesmo caminho) e $U_\Delta \neq U_{\Gamma_s}$. Então $U_{\Gamma_s} \subset U_\Delta \subset \{\bigcap_{r\in R} U_{\Gamma_r}\} \subset U_{\Gamma_s}$. Absurdo. Mas $\bigcup\{U_\Gamma / \forall r \in R\, \Gamma \models X(r)\} \subset \Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ$ Pois seja $P \in U_\Gamma\ \forall r\ \Gamma \models X(r)$ então $P \in \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}_{r\in R}$ Então $P \in \bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}$.

Resumendo $\Big(\bigcap_{r\in R}\bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models X(r)\}\Big)^\circ = \bigcup\{U_\Gamma / \forall r \in R, \Gamma \models X(r)\} = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models \forall x\, X(x)\}$.

Vejamos o qué acontece com o cuantificador existencial.

$$V_\phi(\exists x\, X(x)) = \bigcup\{V_\phi(X(r)),\ r \in R\} = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models_{r\in R} X(r)\} = \bigcup\{U_\Gamma / \Gamma \models \exists x\, X(x)\}. \square$$

5. Resultados adicionais

Restá-nos demostrar "soundness" para as árvores de Beth e os modelos topologicos. Na verdade é suficiente ter demostrada ésta propiedade para modelos topologicos. Pois, suponhamos "soundness" de LQI para os modelos topologicos. Seja X tal que $\vdash_{LQI} X$. Suponhamos que X não fosse válida sobre todo modelo de Beth. Logo existiría um modelo de Beth tal que X não sería válida sobre este modelo. Então usando o mesmo procedimento que aquel usado no Teorema 3.4.1, podemos encontrar um modelo topologico $\langle \theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \wedge, \vee, \rangle$ tal que X não seja válida sobre ele. Logo supondo "soundness" para modelos topologicos teríamos $\not\vdash_{LQI} X$. Contradição.

Consideraremos agora o seguinte sistema axiomático para LQI

(1) $X \supset (Y \supset X)$

(2) $X \supset (Y \supset X \wedge Y)$

(3) $X \wedge Y \supset X$

(4) $X \wedge Y \supset Y$

(5) $X \supset X \vee Y$

(6) $Y \supset X \vee Y$

(7) $(X \vee Y) \supset ((X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset Z))$.

(8) $(X \supset Y) \supset ((X \supset (Y \supset Z)) \supset (X \supset Z))$

(9) $(X \supset Y) \supset ((X \supset \sim Y) \supset \sim X)$

(10) $X \supset (\sim X \supset Y)$

(11) $\forall x\, X(x) \supset X(a)$ a é uma constante.

(12) $X(a) \supset \exists x\, X(x)$

As regras de inferência são:

a. $\dfrac{X, \quad X \supset Y}{Y}$

b. $\dfrac{Y \supset X(a)}{Y \supset \forall x\, X(x)}$

c. $\dfrac{X(a) \supset Y}{\exists x\, X(x) \supset Y}$

Nas regras b.e c. a constante "a" não aparece na fórmula Y. Numa dedução a partir de premisas, a constante "a" não deve aparecer nas premisas. Neste cálculo vale o Teorema da Dedução (cf.Dummett,[1979], pág 127). Dizemos que X deríva-se a partir de Γ neste cálculo, e denotamos este fato por $\Gamma \vdash_{CQI} X$, se existe uma sequência de fórmulas tal que cada uma é um elemento de Γ , ou uma instancia de algúm dos axiomas (1)=(12) ou derívase a través das regras (a)-(c) de alguma fórmula ou par de fórmulas que aparecem precedentemente, e o último elemento da sequência é X.

Lema 3.5.1.

Se $\vdash_{LQI} X$ entaõ $\vdash_{CQI} X$.

A prova deste Lema e semelhante a demostraçaõ do Lema 2.5.7.

Agora consideraremos o cálculo de sequentes L' ampliado com as regras de introduçaõ de quantificadores a esquerda e direita. Estas saõ:

Direita — Esquerda

$$\frac{\Gamma : A(y)}{\Gamma : \forall x A(x)} \qquad \frac{\Gamma, A(t) : \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) : \Delta}$$

$$\frac{\Gamma : A(t), \Delta}{\Gamma : \exists x A(x), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A(y) : \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) : \Delta}$$

Demostraremos que se $\vdash_{LQI} X$ entaõ $\vdash_{L'} X$. No próximo capítulo veremos que se $\vdash_{L'} X$ entaõ $\vdash_{CQI} X$, e consequentemente a prova deste Lema va ficar completada.

Suponhamos entaõ que $\vdash_{LQI} X$. Sabemos que existe uma tabla $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots\ldots\ldots \mathcal{C}_m$ com $\mathcal{C}_m$ fechada e $\mathcal{C}_1 = \{FX\}$. Construiremos,como o fizimos antecedentemente , uma árvore de prova para : X fazendo corresponder a cada configuraçaõ $\mathcal{C}_n = \{S_1, S_2 \ldots\ldots S_p\}$ p nodos, e associados a estos nodos sequentes $\Gamma_p : \Delta_p$ do modo seguinte: fazemos corresponder a $\mathcal{C}_1 = \{FX\}$ o nodo raiz da árvore que será construida e o sequente : X. Suponhamos ter feito a correspondença até a configuraçaõ $\mathcal{C}_{n-1} = \{S_1, S_2 \ldots S_k, \ldots S_p\}$. Entaõ $\mathcal{C}_n$ é como $\mathcal{C}_{n-1}$ excepto que substituimos algúm S_k por um conjunto novo $S_{k'}$ o por dos novos conjuntos $S_{k'}$, $S_{k''}$, conforme qual seja a regra de LQI aplicada. Para os índices i tais que $i \neq k$ repetimos os nodos e os sequentes correspondentes associados a cada S_i. Para i=k distinguimos 12 casos dependendendo cada um deles da regra de LQI usada. Sòmente consideraremos as regras $T\exists$, $F\exists$, $T\forall$, $F\forall$, desde que as outras já foram consideradas na demostraçaõ do Lema 2.5.7.

i) $S_{k'}$, provem de S_k a través de $T\exists$. Entaõ S_k terá a forma $S, T(\exists x) X(x)$ e $S_{k'}$ será da forma $S, TX(a)$, onde a naõ aparece em S, também naõ em $X(x)$. $\Gamma_k : \Delta_k$ será da forma $\Gamma, (\exists x)\, X(x) : \Delta$. Logo, pomos acima do nodo associado a S_k um novo nodo ao que associamos o sequente correspondente a $S_{k'}$ que será da forma $\Gamma, X(a) : \Delta$.

ii) $S_{k'}$ provem de S_k a través de $F\exists$. Logo S_k será da forma $S, F(\exists x)X(x)$

e $\Gamma_k : \Delta_k$ será $\Gamma : (\exists x)\, X(x), \Delta$. $S_{k'}$ será $FX(a)$. Pomos um novo nodo acima do nodo associado a S_k, e associamos a êste novo nodo o sequente $\Gamma : X(a), \Delta$.

iii) $S_{k'}$ provem de S_k a través de $T\forall$. Logo S_k será da forma $S, T(\forall x)\, X(x)$ e $\Gamma_k : \Delta_k$ será da forma $\Gamma, \forall x\ X(x) : \Delta$. Logo $S_{k'}$ será $S, TX(a)$. Pomos um novo nodo acima do nodo associado a S_k e lhe faremos corresponder o sequente $\Gamma, X(a) : \Delta$

iv) $S_{k'}$ provem de S_k a través da regra $F\forall$. Logo S_k será da forma $S, F(\forall x)\, X(x)$ e $S_{k'}$ será da forma $S_T, FX(a)$ onde a não aparece na fórmula S, também não na fórmula $X(x)$. $\Gamma_k : \Delta_k$ será $\Gamma : \forall x\ X(x), \Delta$. Pomos um novo nodo acima do nodo associado a S_k e lhe fazemos corresponder o sequente $\Gamma : X(a)$.

<u>Teorema 3.5.2.</u> Seja Y uma fórmula qualquer, e suponhamos que Y seja válida sobre todo modelo topologico. Então $\vdash_{CQI} Y$.

Demostração: Para todo modelo topologico $\mathfrak{M} = \langle \Theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \wedge, \vee, \rangle$ e toda valuação V_ϕ vale que $V_\phi(\, cl\ Y\,) = S$. Consequentemente $cl(\, Y\,)$ é válida sobre todo modelo topologico, e pelo Teorema 3.4.1 temos que $\vdash_{LQI} cl\,(\, Y\,)$. Mas pelo Lema 3.5.1 temos que $\vdash_{CQI} cl(\, Y)$. Mas usando o axioma 11 temos que $\vdash_{CQI} Y$.

<u>Teorema 3.5.3</u> Se $\vdash_{LQI} X$ então X é válida sobre todo modelo topológico.

Demostração: Suponhamos que $\vdash_{LQI} X$. Então pelo Lema 3.5.1 temos que $\vdash_{CQI} X$. Consideremos agora um modelo topologico $\mathfrak{M} = \langle \Theta, S, R, \cap, \cup, \Rightarrow, -, \wedge, \vee, \rangle$. Todo axioma é válido sobre $\mathfrak{M}$. Pois próva-se que para uma assignação qualquera ϕ de elementos de Θ a fórmulas atômicas temos que $V_\phi(\, cl(\, Ax)\,) = S$. Demostraremos ésta propiedade para os axiomas 10,11 e 12.

Axioma 10. $V_\phi(X \supset (\sim X \supset Y\,)\,) = V_\phi(\, X\,) \Rightarrow V_\phi(\sim X \supset Y\,) = (\,(\, V_\phi(\, X)\,)^c \cup V_\phi(\sim X \supset Y\,)\,)^\circ = (\,(V_\phi\,(X))^c \cup (\,(\,V_\phi(\sim X\,)\ \,)^c \cup V_\phi(\,Y\,))^\circ\,)^\circ = (\,(V_\phi(X))^c \cup (\,(\,(\,V_\phi\,(X)\,)^c\,)^\circ\,)^c \cup V_\phi\,(Y)\,)^\circ\,)^\circ \supseteq (V_\phi\,(X)^c \cup V_\phi(X) \cup V_\phi(Y)\,)^\circ = S$

Axioma 11 $\forall x\ X(x) \supset X(t)$ onde t é uma constante. Logo $V_\phi\,(\forall x\ X(x) \supset X(t)\,) = [V_\phi(\,\forall x\ X(x))^c \cup V_\phi\,(X(t)\,)]^\circ = [(\,(\,\bigcap_{r \in R} V_\phi(X(r)\,)\ \,)^\circ)^c \cup V_\phi(X(t)\,)\,]^\circ \supseteq [\,V_\phi\,(X(t)\,)^c \cup V_\phi\,(X(t)\ \,)]^\circ = S$. Consideraremos agora o axioma 11 mas pensemos que agora t é uma variável y. A clausura universal de $\forall x\ X(x) \supset X(y)$ será $\forall y(\,\forall x\ X(x) \supset X(y)\,)$. Temos que $V_\phi\,(\forall y\ (\forall x\ X(x) \supset X(y)\ \,)\ \,) = (\,\bigcap_{r \in R}\,(V_\phi\,(\forall x\ X(x) \supset X(r)\,)\,)\,)^\circ = [\,\bigcap_{r \in R}(V_\phi($

$(\forall x\ X(x)))^c \cup V_\phi\,(\,X(r)\,)\ \,)^\circ]^\circ = [\,\bigcap$

$V_{\phi}\ (X(r)\ )^{\circ}\ ]^{\circ} \supseteq [\bigcap_{r \in R}(\ V_{\phi}(X(r)))^{c} \cup V_{\phi}\ X(r)\ )^{\circ}]^{\circ} = [\bigcap_{r \in R} S] = S.$

Consideremos agora o axioma 12. $X(t) \supset \exists x\ X(x)$. Pensemos que t é uma constante r, então $V_{\phi}(\ X(r) \supset \exists\ x\ X(x)\ ) = (\ (V_{\phi} X(r)\ )^{c} \cup V_{\phi}(\ (\exists x\ )\ X(x)) = (\ (V_{\phi} X(r)\ )^{c} \cup \bigcup_{s \in R} V_{\phi}(X(s))\ )\ = S.$

Pensemos agora que t seja uma variável y, vejamos o qué acontece com a valuação da clausura universal da fórmula antecedente. $V_{\phi}\ (\forall y)\ (\ X(y) \supset \exists x X(x)\ ) = (\bigcap_{s \in R} V_{\phi}(X(s) \supset \exists\ x\ X(x)\ )\ )^{\circ} = (\bigcap_{s \in R}\ (V_{\phi}\ X(s)\ )^{c} \cup (V_{\phi}(\ (\exists x\ )\ X(x)\ )\ )^{\circ}\ )^{\circ} = [\bigcap_{s \in R}(\ \ (\ V_{\phi}\ \ (\ X(s)\ \ )^{c} \cup (\ \bigcup_{1 \in R} V_{\phi} X(1)\ \ )\ \ )]^{\circ} = \bigcap_{s \in R}(\ S) = S.$

Agora resta ver que se X e Y são dos fórmulas tais que são premissas de uma aplicação de uma das regras a., b., c., e Z é a conclusão desta aplicação então $V_{\phi}(\ cl(X)\ ) = S$ e $V_{\phi}(\ cl(Y)\ ) = S$ implica $V_{\phi}(\ cl(Z)\ ) = S.$

Consideremos a regra b. Suponhamos que $V_{\phi}(\forall y\ (\ Z \supset X(y)\ )\ ) = S.$ Então $(\bigcap_{r \in R} V_{\phi}(\ Z \supset X(r)\ )\ )^{\circ} = (\bigcap_{r \in R}\ (V_{\phi}(Z)^{c} \cup V_{\phi}\ X(r)\ )^{\circ}\ \ )^{\circ} = (\ (V_{\phi}(Z)^{c})^{\circ} \cup (\ \bigcap_{r \in R} (V_{\phi} X(r)\ )^{\circ})^{\circ}.$ Mas $V_{\phi}(\ Z \supset \forall x\ X(x)\ ) = (\ V_{\phi}\ (Z)^{c} \cup V_{\phi} \forall x X(x)\ )^{\circ} = (V_{\phi}(Z)^{c} \cup (\ \bigcap_{r \in R} V_{\phi} X(r)\ \ )^{\circ}\ \ )^{\circ}.$

Por último consideraremos a regra c. e suponhamos que $V_{\phi}(\ (\forall y\ )\ (\ X(y) \supset c\ )\ ) = S.$ Logo $S = (\bigcap_{r \in R}(V_{\phi}(\ X(r) \supset c\ )\ )\ )^{\circ} = (\bigcap_{r \in R}((V_{\phi} X(r)\ )^{c} \cup V_{\phi}(\ c)\ \ )^{\circ}\ \ )^{\circ}.$ Mas além disto temos que $V_{\phi}\ (\exists x\ X(x) \supset c) = [\ (V_{\phi}(\exists x\ X(x)\ )^{c} \cup V_{\phi}(c)]^{\circ} = [(\ \bigcup_{r \in R} V_{\phi} X(r)\ \ )^{c} \cup V_{\phi}\ (c)]^{\circ} = [\bigcap_{r \in R} V_{\phi} X(r)^{c} \cup V_{\phi}\ (c)\ ]^{\circ} = [\bigcap_{r \in R}(\ V_{\phi}\ X(r)\ \ )^{c} \cup V_{\phi}\ (c)\ \ )]^{\circ} \supseteq [\ \bigcap_{r \in R}(V_{\phi} X(r)^{c} \cup V_{\phi}\ (c)\ )^{\circ}]^{\circ} = S.$

CAPÍTULO IV

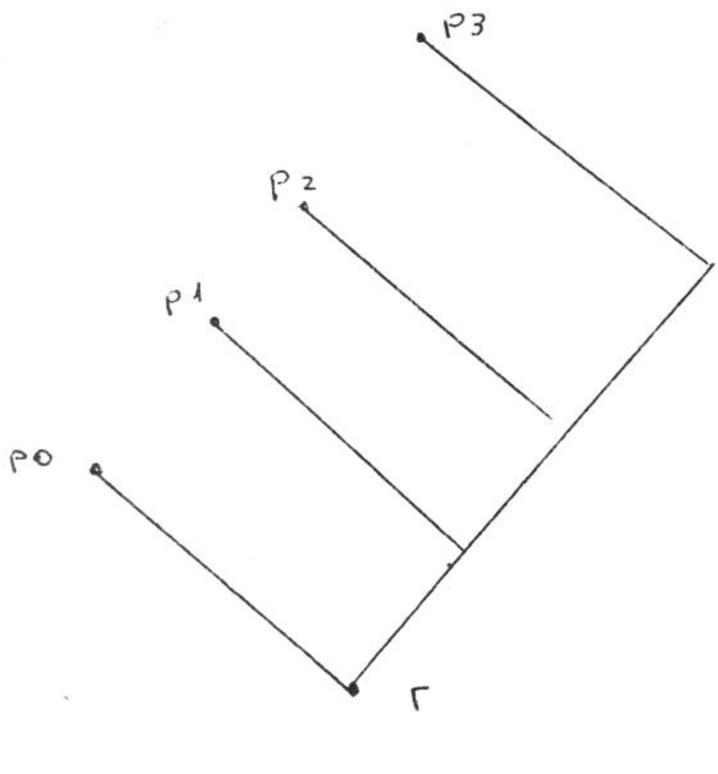
MODELOS INTERNOS

1- Introdução

No capítulo anterior apresentamos uma prova da completude de LQI sobre os modelos de Kripke usando argumentos não aceitáveis do ponto de vista intuicionista. Através desta prova, obtivemos uma prova da completude de LQI sobre os modelos ou árvores de Beth. Nosso interesse é saber se é possível encontrar uma prova intuicionisticamente aceitável da completude de LQI sobre os modelos de Beth. Neste capítulo veremos que qualquer prova da completude de LQI sobre as árvores de Beth permite afirmar o princípio de Markov $\forall n\,(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge \neg\neg\exists n P(n) \supset \exists n P(n)$ onde P(x) é um predicado recursivo. A partir da completude de LQI infere-se (usando argumentos intuicionistas) que para todo predicado recursivo P, $\forall \xi\, \neg\neg \exists x\, P(\xi, x) \longrightarrow \forall \xi\, \exists x\, P(\xi, x)$

onde ξ representa uma sequência de escolha. Se tivessemos uma prova intuicionista da completude de LQI sobre as árvores de Beth, também teríamos uma prova intuicionista de $\forall \xi \neg\neg \exists x P(\xi, x) \rightarrow \forall \xi \exists x P(\xi, x)$ e esta expressão é um caso particular do princípio de Markov, que por sua vez não é intuicionisticamente aceitável.

Adiante veremos que temos boas razões para rejeitar o princípio de Markov como um princípio válido na aritmética intuicionista intuitiva, ou seja não formalizada. Agora notemos somente que $\forall x\ (Px \vee \neg Px) \wedge \neg\neg \exists x Px \supset \exists x Px$ não é um princípio da lógica intuicionista de primeira ordem. Chamamemos X a fórmula que exprime nesta lógica o princípio de Markov. Vejamos que $\nvdash_{LQI} X$. Suponhamos que $\vdash_{LQI} X$. Pelo teorema 3.5.3 e a observação do início da seção 3.5 temos que X deve ser válida sobre toda árvore de Beth $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \models_{\mathbb{P}} \rangle$. Consideremos a árvore da figura abaixo cujo domínio fixo é D, o conjunto de números naturais, e cujo vértice é Γ.



O caminho da direita é infinito, e cada nódulo neste caminho tem acima de si exatamente dois nódulos, um dos quais, o esquerdo, é terminal. Se Δ é um nodo terminal de nível n+1 (onde entendemos pelo nível de um nódulo Δ o número de nódulos antecedentes a Δ pela relação *R*) temos que $\Delta \models P(\bar{n})$, e somente em um nódulo com estas características é verdade que $\Delta \models P(\bar{n})$. Para cada número natural *n*, o conjunto *S* formados pelos nódulos terminais de nível $\leq$ n+1 e o nódulo no caminho direito de n+1, forma uma barreira do vértice Γ. Somente no nódulo terminal Θ de nível n+1 é verdadeiro que $\Theta \models P(\bar{n})$, e nos nódulos restantes Δ de *S* temos que $\Delta \not\models P(\bar{n})$. Logo para todo *n*, $\Gamma \models P(\bar{n}) \vee \sim P(\bar{n})$ e consequentemente $\Gamma \models \forall x (Px \vee \sim Px)$. Além disso para todo nódulo terminal Θ temos que $\Theta \models \exists x Px$ e todo nódulo no caminho da direita tem umnódulo terminal acima de si mesmo; logo, para nenhum Δ na árvore temos que $\Delta \models \sim \exists x Px$ e consequentemente $\Gamma \models \sim\sim \exists x Px$. Mas qualquer barreira do vértice Γ deve conter um nódulo pertencente ao caminho da direita. Dado que para todo número natural *n* nenhum nódulo Δ do caminho da direita é tal que $\Delta \models P(\bar{n})$, teremos que $\Gamma \not\models \exists x Px$ e consequentemente $\Gamma \not\models \forall x (Px \vee \sim Px) \wedge \sim\sim \exists x P(x) \supset \exists x Px$

Provamos que $\forall x (Px \vee \sim Px) \wedge \sim\sim \exists x Px . \supset \exists x Px$ não é um princípio derivável na lógica LQI. Supondo que LQI é uma representação fiel da lógica intuicionista de predicados, isto é, que todo esquema argumentativo intuicionista válido seja derivável na lógica LQI, e reciprocamente, provamos que o princípo de Markov não é admissível como esquema argumentativo da lógica intuicionista. Mas esta suposição pode ser questionada, pois nas palavras de Heyting "it must be remembered that no formal system can be proved to represent adequately an intuitionistic theory. There always remains a residue of ambiguity in the interpretation of the signs, and it can never be proved with mathematical rigour that the system of axioms really embraces every valid method of proof" (Heyting [1956], pág. 102). Isso força-nos a considerar outros argumentos para rejeitar o princípio de Markov, além da sua inderivabilidade na lógica LQI.

Nas seções seguintes analisaremos o conceito de validade interna. Demonstaremos com argumentos aceitáveis desde um ponto de vista intuicionista que toda fórmula internamente válida será também válida na semântica dada pelas árvores de Beth. Disso inferimos que uma prova de completude para as fórmulas válidas sobre as árvores de Beth que seja intuicionisticamente aceitável, dará origem a uma prova de completude para as fórmulas internamente válidas intuicionisticamente aceitável. Em efeito, seja X uma fórmula internamente válida, logo X será válida sobre toda árvore de Beth e consequentemente $\vdash_{LQI} X$. Mas demonstra-se que se LQI é internamente completa, isto é, se toda fórmula internamente válida é demosntrável na lógica LQI, então pode ser provado com argumentos intuicionisticamente aceitáveis o esquema $\forall\xi \neg\neg \exists x P(x,\xi) \longrightarrow \forall\xi \exists x P(\xi,x)$ como proposição da aritmética intuicionista não formalizada. Então uma prova da completude de LQI sobre a semântica dada pelas árvores de Beth dá origem a uma demonstração intuicionista do princípio de Markov.

2- O conceito de validade interna

A noção de validade interna parece assemelhar-se ao conceito de validade "a la Tarski", embora uma análise mais profunda mostre que se assemelha, na verdade, ao conceito de validade por substituição que é próprio de uma semântica intuitiva, pois neste conceito de validade interna não temos uma caracterização recursiva da validade. Consideremos, para fixar nossas idéias, uma fórmula $A(P_1 \ldots P_n)$ fechada pertencente a linguagem de LQI, cuja letras de predicado estão na lista $P_1 \ldots P_n$. Seja *D* uma variável cujo percurso seja todos os domínios admissíveis desde um ponto de vista intuicionista, e seja P_i^* variáveis para indicar relações sobre *D* onde P_i e P_i^* tem o mesmo número de argumentos. A^D provém de *A* relativizando os quantificadores a *D* e substituindo P_i por P_i^*. Dizemos que *A* é internamente válida e denotamos este fato por *Val(A)* no caso que $\forall D \forall P_1^* \ldots P_n^* \overset{D}{A}(P_1^* \ldots P_n^*)$ é uma proposição verdadeira. Definimos validade construtiva e a denotamos por $Val_c(A)$ como validade interna, mas restringindo o percurso de *D* e dos P_i^* a domínios e relações que não dependam de parâmetros para objetos que não estejam definidos através de leis (por exemplo, sequências de escolha livres).

Definimos Completude (Comp) e Completude débil (Comp') de uma fórmula *A* por:

$$\text{Comp}(A) \equiv \text{Val}(A) \Longrightarrow \exists x\, \text{Proof}(x, \ulcorner A \urcorner)$$

$$\mathrm{Comp}'(A) \equiv \mathrm{Val}(A) \longrightarrow \urcorner\urcorner \exists x\, \mathrm{Proof}_{LQI}(x, \ulcorner A \urcorner)$$

onde Proof é o predicado de prova formalizado. O conceito de validade interna pode ser considerado difuso. Para uma discussão desta noção ver Troelstra [1977] (pág. 102 - 104). Troelstra compara a noção de validade interna com a noção de validade para a lógica clássica. Para a lógica de predicados clássica LQC, a situação pode ser analisada nos seguintes três itens:

(I) $\exists x\, \mathrm{Proof}_{LQC}(x, \ulcorner A \urcorner) \Longrightarrow$ Val(A), aqui *Val(A)* defini-se agora para domínios e relações clássicas. As estruturas referidas por *Val(A)* não são necessariamente conjuntistas. Aqui "conjuntista" significa: representada pelos elementos do modelo pretendido (intended model) de ZF. Isto é, *D* não é necessariamente um conjunto.

(II) Val(A) $\Longrightarrow$ A é válida sobre todas as estruturas conjuntistas, mas a recíproca "A é válida sobre todas as estruturas conjuntistas $\Longrightarrow$ Val(A)" em princípo não deveria ser verdadeira, dado que existem estruturas que não são conjuntistas: por exemplo, as fórmulas de LQC com um único símbolo de relação binária E, admitem uma interpretação onde o domínio é a classe de todos os conjuntos (e consequentemente não é um conjunto) e E é a relação de pertença. Mas pela prova de Gödel de completude de LQC temos que se A é válida sobre todas as estruturas conjuntistas então $\vdash_{LQC} A$, e pela "soudness" de LQC, Val(A).

(III) Em relação a recíproca de (I), isto é, completude no sentido de Comp ou Comp' (que são noções equivalentes de um ponto de vista clássico) podemos dizer o seguinte: a prova de completude para LQC mostra que podemos restringir-nos a considerar estruturas Δ^0_2 definíveis (e consequentemente a considerar estruturas aritméticas ou conjuntistas). Consequentemente, a extensão exata do conceito de estrutura é irrelevante, dado que é suficiente considerar uma classe limitada de estruturas. Suponhamos que a recíproca de (I) fosse falsa, então uma prova deste fato tomaria a seguinte forma: sob determinadas suposições específicas, referente à classe de estruturas, é verdadeira a incompletude; em outros termos, para todas as classes de estruturas que satisfazem tais suposições teremos a incompletude.

Para LQI, a situação é semelhante. É calro que a classe deenunciados válidos depende de suposições matemáticas sobre as estruturas que serão consideradas na definição. Classicamente Val estaria determinada (em princípio) pela extensão da classe de domínios e relações; intuicionisticamente Val depende desta extensão, mas também da classe de provas de enunciados moleculares referidos a estruturas intuicionisticas. Essa dependência da classe de provas está implícita nos axiomas postulados para determinados objetos matemáticos; por exemplo, onde estejam incluidas relações com um parâmetro para as sequências de escolha livres no escopo dos quantificadores $\forall P_1^*$, ... $\forall P_m^*$, a extensão de Val está determinada pelos axiomas para as sequências de escolha livres e pelos axiomas que expressam como devem ser as provas possíveis para enunciados com uma forma determinada. Consequentemente, a dependência de Val das suposições matemáticas é mais essencial no caso intuicionista. Por exemplo, supondo a tese de Church LQI é incompleta (ver seção 6 deste capítulo).

A prova de completude de Gödel para LQC mostra que podemos nos restringir a considerar a classe dos domínios como se estivesse formada por apenas um conjunto que é o conjunto D dos números naturais, e a considerar predicados $P_1^*, \ldots, P_k^*$ de $\Sigma_2 \cap \Pi_2$, isto é, exprimíveis na forma $(\exists x)(y) R_j(x_1, \ldots x_{n_j}, x\, y)$; $(x)(\exists y) S_j(x_1, \ldots x_{n_j}, x, y)$ onde R_j e S_j são predicados recursivos primitivos.

Para a lógica de predicados clássica LQC temos duas definições de fórmula válida. As duas caracterizam a mesma classe de fórmulas. A primeira definição (DI) diz que uma fórmula é válida sobre um domínio de indivíduos no caso que ao substituir nesta fórmula variáveis proposicionais por proposições determinadas, variáveis de predicado n-ádicas por predicados n-ádicos determinados, definidos sobre o domínio de indivíduos, e variáveis livres por objetos do domínio, de forma tal que cada variável seja substituida do mesmo modo em todas as posições que ocupe, o resultado seja uma proposição verdadeira, e isto aconteça para todas as substituições desse tipo (Hilbert-Ackerman [1975], pág 89). A segunda definição (DII) provém de Tarski [1976] e é a seguinte: suponhamos dado um domínio D e uma assinalação de subconjuntos de D aos símbolos de predicado $P_j(x_1, \ldots x_n)$ e uma assinalação de elementos de D as variáveis livres. Define-se agora a relação de satisfação entre as sequências $\sum$ de elementos de D e fórmulas atômicas $A_j(x_1, \ldots x_n)$

de LQC. Dizemos que $\Sigma = (b_1, b_2 \ldots b_n)$ satisfaz uma fórmula atômica $A_j(x_1, \ldots x_m)$ se $(b_1, b_2 \ldots b_n) \in (A_j)^n$ onde $(A_j)^n$ é o subconjunto de D^m associado ao símbolo de predicado $A_j(x_1, x_2 \ldots x_m)$. Logo, por recursão (ver Mendelson [1979], cap. II) define-se a relação de satisfação entre uma sequência Σ de D e uma fórmula qualquer. O domínio D com a assinalação de subconjuntos de D^n às letras de predicado de n argumentos se chama um modelo $\mathcal{M}$. Uma fórmula de LQC é verdadeira em um modelo $\mathcal{M} = \langle D, (A_j)^n, j = 1,2 \ldots; n = 1,2 \ldots \rangle$ se toda a sequência Σ de elementos de D satisfaz esta fórmula. Uma fórmula válida ou logicamente válida será uma fórmula válida sobre todo modelo.

Observemos as diferenças entre as definições (DI) e (DII). (DI) em contraposição a (DII) não depende explicitamente da forma gramatical das fórmulas consideradas, embora dependa implicitamente. Mas a diferença principal entre (DI) e (DII) é esta: na definição (DI) assinalamos predicados específicos as letras de predicado, ao passo que em (DII) assinalamos subconjuntos de D^n. No caso em que D seja um domínio não enumerável, há mais subconjuntos de D^n que predicados específicos sobre D^n. Os primeiros não são enumeráveis, mas os segundos são enumeráveis. Mas toda fórmula válida no sentido (DI) é válida no sentido (DII). Em efeito, toda fórmula é válida no sentido (DI) se e somente se é válida no sentido (DI) sobre os números naturais (Hilbert-Ackerman [1975], pág. 121), e analogamente, toda fórmula é válida no sentido (DII) se e somente se é válida no sentido (DII) sobre o domínio dos números naturais (ver Kleene

[1974] corolário 1 do teorema 34, pág 325). Mas acontece que sobre o domínio dos números naturais temos tantas assinalações de predicados específicos P_j^* a um símbolo de predicado $P_j(x_1, \dots x_n)$ como assinalações de subconjuntos $(P_j)^n \subseteq N^n$ ao mesmo símbolo de predicados.

Para a lógica de predicados intuicionista LQI a situação é a seguinte: todo domínio D intuicionisticamente admissível é enumerável. Chamaremos espécies a esses domínios. É o mesmo associar uma sub-espécie de D^n a cada símbolo de predicado $P_j(x_1, \dots x_m)$, ou associa-lhe um predicado específico $P_j^*(x_1, \dots x_m)$ dado que intuicionisticamente cada predicado determina uma espécie e reciprocamente.

Definiremos agora os conceitos de completude por substituição ($Comp_S(A)$) e completude débil por substituição ($Comp'_S(A)$). Diremos que uma fórmula $A(P_1, \dots P_n)$ fechada cujos símbolos de predicado são $P_1, P_2, \dots P_n$, é fortemente completa por substituição, se esistem predicados que dependam de A, $P_1^*(A), \dots P_m^*(A)$ definidos sobre os números naturais tais que se $A(P_1^*(A), \dots P_m^*(A))$ é verdadeira então $\vdash_{LQI} A(P_1, \dots P_m)$. Analogamente definimos completude débil por substituição deste modo: diremos que uma fórmula $A(P_1, \dots P_m)$ fechada cujos símbolos de predicados são $P_1 \dots P_m$ é debilmente completa por substituição se existem predicados $P_1^*(A), \dots P_m^*(A)$ tais que se $\nvdash_{LQI} A(P_1, \dots P_n)$ então é absurdo que $A(P_1^*(A), \dots P_m^*(A))$ seja verdadeira.

Temos então os seguintes conceitos: completude (Comp), completude débil (Comp'), completude por substituição ($Comp_S$) e completude débil por substituição (Comp'). Estudaremos a relação entre esses conceitos e sua aplicação à lógica de predicados intuicionista LQI. Para a lógica de predicados clássica (LQC) temos Comp $\Leftrightarrow$ Comp', devido ao cancelamento da dupla negação. LQC é completa, mas além disso, a prova de completude de Gödel mostra que é completa por substituição. Para LQI a situação é diferente pois:

1. Da completude débil não poder ser inferida a completude forte. Isto pela impossibilidade de cancelar a dupla negação. Além disso, podemos pensar que existe uma fórmula A de LQI com as propriedades seguintes: (i) A é válida; (ii) falando classicamente A não é provável em LQI, isto é, classicamente $(x)\neg \mathrm{Proof}_{LQI}(x, \ulcorner A \urcorner)$; (iii) falando intuicionisticamente, o enunciado "A não é provável intuicionisticamente" é absurdo, isto é, intuicionisticamente $\neg(x)\neg \mathrm{Proof}_{LQI}(x, \ulcorner A \urcorner)$. A fórmula A é debilmente completa, mas não é fortemente completa. Se A fosse fortemente completa, então intuicionisticamente teríamos $(\exists x)$ $\mathrm{Proof}_{LQI}(x, \ulcorner A \urcorner)$, e a fortiori classicamente $(\exists x)\ \mathrm{Proof}_{LQI}(x, \ulcorner A \urcorner)$ em contraposição a (ii). Além disso, se admitimos intuicionisticamente que $(x)\neg \mathrm{Proof}_{LQI}(x \ulcorner A \urcorner)$ então por (iii) teremos que $\neg A(P_1^*, \ldots P_m^*)$ para um n-upla de predicados $P_1^*, P_2^*, \ldots P_n^*$, o que prova que A é debilmente completa. Podemos encontrar uma condição suficiente para que um sistema formal S com um predicado "Proof" recursivo seja tal que a completude débil dele mesmo implique a sua completude forte. Esta condição é que para cada predicado primitivo recursivo A(x), $\neg(x)A(x) \longrightarrow \exists x \neg A(x)$. Isso é fácil de ver, pois se S é debilmente

completa e B é uma fórmula de S $\neg\neg Val(B) \longrightarrow \neg(X)\neg Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ (*). E consequentemente $\neg\neg Val(B) \longrightarrow \neg(X)\neg Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ e dado que $Val(B) \longrightarrow \neg\neg Val(B)$ (**), temos que $Val(B) \longrightarrow (\exists x)\neg\neg Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ e dado que para todo predicado recursivo A(x), $\neg\neg A(X) \longleftrightarrow A(x)$, teremos que $Val(B) \longrightarrow \exists x\, Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ Analogamente, se S é um sistema intuicionisticamente decidível, então "S é debilmente completo" $\longrightarrow$ "S é fortemente completo". Em efeito, a decidibilidade intuicionista significa que para cada fórmula B $(X)\ \neg Proof(X, \ulcorner B \urcorner) \vee (\exists x) Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ ou equvalentemente $\neg(X)\neg Proof(X, B) \longrightarrow (\exists x) Proof(X, \ulcorner B \urcorner)$ (***). E o resultado infere-se de (*), (**), (***).

2. A completude forte de LQI não é provável na matemática intuicionista (ver seção 5 deste cap.).

3. A completude débil por substituição de LQI não pode ser provada na aritmética intuicionista não formalizada. Isto é consequência de um resultado de Kreisel [1958] (pág. 324). Ele provou que não é possível fornecer uma prova na aritmética intuicionista de que o fragmento de LQI formado pela negação da fórmulas prenexas seja debilmente completo por substituição.

4. Consequentemente não é possível encontrar uma prova na aritmética de Heyting de que LQI seja completa (fortemente) por substituição. Em efeito, no caso contrário èxistiria uma prova de que LQI é debilmente completo por substituição. Em outras palavras, se existisse uma prova intuicionista de que LQI é fortemente completo por substituição também existiria uma prova intuicionista de que LQI é completo. Absurdo.

5. Se admitimos a tese de Church, LQI nãoé construtivamente completa. Em efeito, usando argumentos

pertencentes à matemática clássica, prova-se que o conjunto de fórmulas construtivamente válidas não é recursivamente enumerável (ver seção 6 deste cap.). Mas este fato não é uma prova (clássica) de que LQI seja internamente incompleta, dado que poderiam existir fórmulas que fossem construtivamente válidas e não fossem internamente válidas.

Interessa-nos agora determinar a relação entre validade interna e validade sobre árvores de Beth. Veremos em primeiro lugar, que se uma fórmula X é internamente válida, então X é válida sobre todas as árvores de Beth. Perguntamo-nos pela proposição recíproca, isto é, se X é válida sobre todas as árvores de Beth, será X internamente válida? Observemos que se X é válida sobre toda árvore de Beth então $\vdash_{LQI}$ X. Tendo fixado um domínio D, parece natural supor que tendo feito as substituições correspondentes a cada categoria lógica, teremos uma proposição verdadeira, e assim poderíamos afirmar que X é internamente válida. Mas em nosso arrazoado usamos a completude de LQI sobre a semântica dada pelas árvores de Beth, e esse é um resultado obtido usando argumentos não intuicionistas. A situação é a seguinte: classicamente pode demonstra-se que toda fórmula internamente válida é válida sobre toda árvore de Beth e reciprocamente. Intucicionisticamente não podemos demonstrar a falsidade da proposição "toda fórmula válida sobre árvore de Beth é internamente válida", pois, nesse caso, teríamos uma prova clássica da falsidade desta proposição. Mas também não conhecemos uma prova intuicionista da verdade da proposição destacada acima. Até agora esta é uma proposição indecidida.

A seguir introduziremos o conceito de sequência de escolha. Uma sequência de escolha é uma sequência de números naturais. Pode ser uma sequência cujos termos estejam dados por uma regra de cálculo, mas também pode ser uma sequência cujos termos sejam escolhidos arbitrariamente. Mas, em contraposição à matemática clássica, não as pensaremos como totalidades infinitas dadas, mas como entidades em processo de formação. Aquelas sequências cujos termos não estejam dados por uma lei serão chamadas sequências livres. Denotaremos qualquer sequência de escolha por uma letra grega α, β, γ . Com $\bar{\alpha}(n)$ denotamos $\langle \alpha(0), \ldots \alpha(n-1) \rangle$, isto é, a sequência formada pelos primeiros n-termos de α . $\bar{\alpha}(0)$ será sequência vazia $\langle\ \rangle$. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ serão variáveis para sequências finitas de números naturais. Definimos o comprimento de uma sequência finita $\vec{u}$ por lh(u)=k sse $\vec{u}=\langle u_0, \ldots u_{k-1} \rangle$. Dizemos que $\beta \in \vec{u}$ se $\exists$ n tal que $\bar{\beta}(n)=\vec{u}$.

Uma expansão (spread) é essencialmente uma árvore onde cada caminho (path) é infinito, tal que podemos construir efetivamente uma sub-árvore consistente nos segmentos iniciais de um número finito de caminhos. Os caminhos da árvore identificam-se com sequências de escolha, e cada nódulo da árvore com uma sequência finita de números naturais, o segmento inicial comum a todas as sequências de escolha correpondentes aos caminhos que atravessam este nódulo. A lei da expansão é uma função s que aplicada a uma sequência finita $\vec{u}$ indica se tal sequência é um segmento inicial possível de uma sequência de escolha pertencente a essa expansão. No caso afirmativo, $s(\vec{u})=0$, no caso negativo

$s(\vec{u})=1$. A lei da expansão deve ser efetivamente cálculável. Uma sequência finita $\vec{u}$ chama-se admissível em s se $s(\vec{u})=0$. Uma sequência de escolha α é um elemento de uma expansão dada por uma lei s se $\forall n\ s(\bar{\alpha}(n))=0$. Nesse caso escrevemos $\alpha \in s$ e dizemos que α pertence à expansão s.

Até agora falamos de sequências de números naturais. Podemos considerar também sequências de outras entidades matemáticas. Em efeito, dada a lei s de expansão, suponhamos que podemos construir uma correlação efetiva c que associa elementos pertencentes a uma espécie A com sequências admissíveis finitas de s. Assim se $s(\vec{u})=0$ então $c(\vec{u})$ pertence a A. Se $\alpha \in s$, a sequência de escolha de elementos de A correspondente é $c(\alpha) = \langle c(\bar{\alpha}(0)), c(\bar{\alpha}(1)), \ldots \rangle$. Denotamos esta expansão generalizada por $\langle s, c \rangle$.

Uma árvore chama-se finitária se cada nódulo tem um número finito de nódulos imediatamente acima de si mesmo. Uma expansão finitária chama-se um leque (fan). O teorema geral do leque (generalized fan's theorem), diz que se todo caminho de um leque é finito, então existe uma cota superior do comprimento de cada caminho.

A seguir demonstaremos que toda fórmula internamente válida é válida sobre toda árvore de Beth. Por simplicidade consideraremos fórmulas de LQI fechadas, e vamos supor que para todo número narural n tais fórmulas contém o númeral $\bar{n}$ como constante de indivíduo, e as únicas constantes de indivíduos serão precisamente essas.

Seja T uma árvore sobre a qual X é válida.

Transformaremos T numa árvore T′ na qual todo caminho é infinito, substituindo cada nódulo terminal (se tivéssemos tais nódulos) por uma cadei infinita de nódulos $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_i$ tal que cada Γ_i é tal que $\Gamma_i \models A$ (A atômica) se e somente se $\Delta \models A$ onde Δ é o nódulo terminal correspondente da árvore T. Se na árvore T não existissem nódulos terminais, faríamos T=T′. Representamos T′ por uma expansão s de modo tal que cada nódulo de T′ corresponda a uma sequência finita admissível em s e reciprocamente. Para qualquer fórmula X e qualquer sequência finita $\vec{u}$ admissível em s, escrevemos $T_f(A,\vec{u})$ para significar que $\Gamma \models A$ onde Γ é o nódulo de T′ correspondente a $\vec{u}$.

Seja agora α uma sequência livre admissível em s. Uma sequência livre de s é uma sequência arbitrária onde nenhuma restrição é imposta em qualquer estado da escolha de seus elementos, exceto a exigência de ser uma sequência de s. Distingue-se pelo fato de que qualquer enunciado B(α) pode ser reconhecido como verdadeiro somente através de um segmento inicial de α , sua pertença a s e o fato de que é livre. Consequentemente B(α) implica que $\exists n \forall \beta_{\beta \in s, \beta \in \bar{\alpha}(n)} B(\beta)$ β onde percorre somente as sequência livres (ver a nota 1 deste cap.). Supomos que para toda sequência finita $\vec{u}$ admissível, existe uma sequência livre da qual $\vec{u}$ é um segmento inicial.

Definimos agora uma interpretação interna que transforma toda fórmula X em um enunciado X′(α) sobre uma sequência de escolha livre $\alpha \in s$. O domínio das variáveis (isto é, o conjunto D de nossa definição de validade interna) é o conjunto dos números naturais N. Interpretamos cada numeral $\overline{n}$

como n. Se A é uma fórmula atômica, interpretamos $A'(\alpha)$ como a proposição $\exists n\ Tn\ (A, \bar{\alpha}(n))$. Assim, temos definida uma interpretação das letras de predicado que aparecem em qualquer fórmula X e consequentemente $X'(\alpha)$ está bem deefinida.

Suponhamos verdadeiro o seguinte lema:

Lema 4.2.1 (Dummett [1977], pág. 223 - 225) - $X'(\alpha)$ é verdadeira sse $\exists n\ Tn\ (X, \bar{\alpha}(n))$

Agora podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.2.2 - Toda fórmula internamente válida de LQI é válid sobre toda árvore de Beth.

Demonstração: Seja T uma árvore qualquer. Formamos T' conforme o indicado antecedentemente. Seja X uma fórmula internamente válida e consideremos a interpretação $X'(\alpha)$ definida anteriormente. Dado que X é internamente válida, temos que $\forall_{\alpha \in S,\ \alpha\ \text{livre}}\ X'(\alpha)$ é verdadeira. Pelo lema 4.2.1 temos que $\forall\alpha\ \exists n\ Tn\ (X, \bar{\alpha}(n))$. Logo existe uma barreira S do vértice tal que para todo $\Delta \in S$, $\Delta \models X$. Logo se Γ é o vértice de T' temos que $\Gamma' \models X$ e consequentemente no vértice Γ de T temos que $\Gamma \models X$. Logo X é válida sobre T.

Resta-nos provar o lema 4.2.1. Faremos a demonstração por indução sobre o grau de X:

(i) Se X e atômica, o lema é imediato pelo significado de $X'(\alpha)$;

(ii) Suponhamos agora que $X \equiv Y \wedge Z$. Logo pela hipótese indutiva temos que $X'(\alpha)$ é equivalente a $\exists n\ Tn\ (Y, \bar{\alpha}(n)) \wedge \exists m\ Tn\ (Z, \bar{\alpha}(m))$. Escolhemos máx(m,n) e teremos que $\exists n\ Tn\ (X, \bar{\alpha}(n))$

(iii) Suponhamos que $X \equiv Y \vee Z$. Logo $X'(\alpha)$ é equivalente, pela hipótese indutiva, a $\exists n\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n)) \vee \exists m\, Tn(Z, \bar{\alpha}(m))$. Isto implica que $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$.

Reciprocamente, suponhamos que $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$. Isto é equivalente a $\exists n \forall_{\beta \in S,\, \beta \in \bar{\alpha}(n)} \beta\, \exists m\, Tn(Y, \bar{\beta}(m)) \vee Tn(Z, \bar{\beta}(n))$ pela definição da relação $\models$ entre um nódulo e uma fórmula disjuntiva. Particularmente, considerando α temos que $\exists m\, Tn(Y, \bar{\alpha}(m)) \vee \exists m\, Tn(Z, \bar{\alpha}(m))$ que implica que $\exists n\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n)) \vee \exists n\, Tn(Z, \bar{\alpha}(n))$

(iv) Suponhamos que $X \equiv Y \supset Z$. $X'(\alpha)$ é equivalente a $\exists n\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n)) \longrightarrow \exists m\, Tn(Z, \bar{\alpha}(m))$. Mas $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$ é equivalente a $\exists n \forall_{\beta \in S,\, \beta \in \bar{\alpha}(n)} \beta\, \forall m\, Tn(Y, \bar{\beta}(m)) \longrightarrow Tn(Z, \bar{\beta}(m))$, pela definição da relação $\models$ entre um nódulo e $Y \supset Z$. Escolhendo α na fórmula antecedente temos $\exists n\, \forall m\, (Tn(Y, \bar{\alpha}(m)) \longrightarrow Tn(Z, \bar{\alpha}(m)))$, que implica $\exists n\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n)) \longrightarrow \exists m\, Tn(Z, \bar{\alpha}(m))$ que é equivalente a $X'(\alpha)$. Reciprocamente, suponhamos $X'(\alpha)$, isto é, $\exists n\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n)) \longrightarrow \exists m\, Tn(Z, \bar{\alpha}(m))$ Dado que α é uma sequência livre de s podemos conhecer a verdade da proposição $X'(\alpha)$ a partir da informação obtida de um segmento inicial $\bar{\alpha}(k)$ de α. Temos então $\forall_{\beta \in S,\, \beta \in \bar{\alpha}(k)} \beta\, (\exists m\, Tn(Y, \bar{\beta}(m)) \longrightarrow \exists n\, Tn(Z, \bar{\beta}(n))$. Temos usado aqui que α é uma sequência de escolha livre. Suponhamos $\beta \in S$, $\beta \in \bar{\alpha}(k)$, $m \geqslant k$, $Tn(Y, \bar{\beta}(m))$. Então $\forall_{\gamma \in S,\, \gamma \in \bar{\beta}(m)} \gamma\, \exists n\, Tn(Z, \bar{\gamma}(n))$ pelo fato de ser α livre. Mas então o nódulo Γ de T' correspondente a $\bar{\beta}(m)$ tem uma barreira de nódulos S tal que para cada $\Delta \in S$, $\Delta \models Z$. Logo $\Gamma \models Z$, isto é, temos que $Tn(Z, \bar{\beta}(m))$. Temos mostardo que $\forall_{\beta \in S,\, \beta \in \bar{\alpha}(k)} \beta\, \forall m\, (Tn(Y, \bar{\beta}(m)) \longrightarrow Tn(Z, \bar{\beta}(m)))$ que por sua vez implica a proposição * que é equivalente a $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$

(v) X é $\wedge$ Y. Pela hipótese indutiva $X'(\alpha)$ é equivalente a $\neg\exists m\, Tn(Y, \bar{\alpha}(n))$. Dado que α é uma sequência de escolha livre de s, a proposição antecedente é equivalente a $\exists n \forall_{\beta\in S, \beta\in\bar{\alpha}(n)} \beta \neg\exists m\, Tn(Y, \bar{\beta}(n))$. Isto significa que para algum n, e para todo nódulo Δ tal que Δ NR Γ, onde Γ é o nódulo correspondente a $\bar{\alpha}(n)$, temos que $\Delta \nvDash Y$.

Consequentemente temos que $\Gamma \models \neg Y$. E então $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$ sse $X'(\alpha)$.

(vi) X é $\equiv \forall x Y(x)$. Logo $X'(\alpha)$ é equivalente a $\forall m\, Y'(m)(\alpha)$ que porsua vez é equivalente a $\forall m \exists n Tn(Y(\bar{m})\alpha(n))$

Dado que α é uma sequência de escolha livre temos que para algum k $\forall_{\beta\in S, \beta\in\bar{\alpha}(k)} \beta \forall m \exists n\, Tn(Y(\bar{m}), \bar{\beta}(n))$ Para cada m, consequentemente, o nódulo Θ correspondente a $\bar{\alpha}(k)$ tem uma barreira S, e para todo nódulo $\Delta \in S$, temos que $\Delta \models Y(\bar{m})$.

Consequentemente $\Theta \models Y(\bar{m})$ para cada m. Logo $\Theta \models \forall x Y(x)$ se Θ é o nódulo correspondente a $\bar{\alpha}(k)$ e temos que $Tn(X, \bar{\alpha}(k))$

(vii) Suponhamos que $X \equiv \exists x Y(x)$. $X'(\alpha)$ é equivalente a $\exists m\, Y'(m)(\alpha)$ que pela hipótese indutiva é $\exists m \exists n Tn(Y(\bar{m}), \alpha(n))$. Vemos também que $\exists n\, Tn(X, \bar{\alpha}(n))$ é equivalente a $\exists n \forall_{\beta\in S, \beta\in\bar{\alpha}(n)} \beta \exists m \exists k Tn(Y(\bar{m}), \beta(k))$. Escolhendo na fórmula antecedente α temos que $\exists m \exists n Tn(Y(\bar{m}), \bar{\alpha}(n))$. Mas também temos que $\exists m \exists n Tn(Y(\bar{m}), \bar{\alpha}(n))$ implica $\exists n \forall_{\beta\in S, \beta\in\bar{\alpha}(k)} \beta \exists m \exists k\, Tn(Y(\bar{m}), \beta(k))$ por ser α uma sequência de escolha livre.

3. O princípio de Markov implica a completude interna.

Como fizemos anteriormente, consideraremos fórmulas de primeira ordem contendo numerais, mas não variáveis livres. Consequentemente todas as fórmulas serão fechadas. Consideraremos uma versão do cálculo de sequentes onde o antecedente, mas também o consequente, podem conter um número finito de fórmulas, positivo ou zero. Chamaremos este cálculo L''. As regras são:

$$\wedge: \quad \frac{\Gamma, A, B : \Delta}{\Gamma, A \wedge B : \Delta} \qquad\qquad :\wedge \quad \frac{\Gamma : A, \Delta \qquad \Gamma : B, \Delta}{\Gamma : A \wedge B, \Delta}$$

$$\vee: \quad \frac{\Gamma, A : \Delta \qquad \Gamma, B : \Delta}{\Gamma, A \vee B : \Delta} \qquad :\vee \quad \frac{\Gamma : A, B, \Delta}{\Gamma : A \vee B, \Delta}$$

$$\rightarrow: \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B : A, \Delta \qquad \Gamma, B : \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B : \Delta} \qquad :\rightarrow \quad \frac{\Gamma, A : B}{\Gamma : A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\sim: \quad \frac{\Gamma, \sim A : A, \Delta}{\Gamma, \sim A : \Delta} \qquad\qquad :\sim \quad \frac{\Gamma, A :}{\Gamma : \sim A, \Delta}$$

$$\forall: \quad \frac{\Gamma, \forall x A(x), A(\bar{n}_1), \ldots\ldots A(\bar{n}_r) : \Delta}{\Gamma, \forall x\, A(x) : \Delta} \qquad :\forall \quad \frac{\Gamma : A(\bar{n})}{\Gamma : \forall x\, A(x), \Delta}$$

$$\exists: \quad \frac{\Gamma, A(\bar{n}) : \Delta}{\Gamma, \exists x\, A(x) : \Delta} \qquad\qquad :\exists \quad \frac{\Gamma : A(\bar{n}_1) \ldots A(\bar{n}_r), \exists x A(x), \Delta}{\Gamma : \exists x\, A(x), \Delta}$$

Definição 4.3.1: Chamaremos sequente básico, aquel sequente que tenha a forma Γ A:A, Δ

Definição 4.3.2: Dizer que um sequente $\Gamma:\Delta$ se satisfaz num nodo Σ de uma árvore de Beth, é dizer que se para toda fórmula X de Γ temos que $\Sigma \models X$, então para ao menos uma fórmula Y pertencente a Δ, temos que $\Sigma \not\models Y$.

Definição 4.3.3 : Uma árvore de prova truncada para um sequente $\Gamma:\Delta$ é uma árvore finita cujos nodos estão relacionados com sequentes, de jeito tal que todo sequente associado com um nodo que tenha acima de se mesmo dois nodos, é uma consequência direta por uma das regras de inferência de L'' dos sequentes associados com essos dois nodos, e o sequente associado com o vértice é $\Gamma:\Delta$. Dizemos que um sequente está associado com um nodo, se ele se satisfaz nesse nodo.

Definição 4.3.4: Uma árvore de prova o prova de $\Gamma:\Delta$ é uma árvore de prova truncada para $\Gamma:\Delta$ na qual os nodos terminais estão associados com sequentes básicos.

Definição 4.3.5: Diremos que Δ é derivable a partir de Γ em L'' e escrivemos $\Gamma \vdash_{L''} \Delta$ se existe uma árvore de prova para $\Gamma:\Delta$.

A seguir provaremos que se $\vdash_{L''} X$ então $\vdash_{LQI} X$. Para iste alvo provaremos, no primeiro lugar que se $\vdash_{L''} X$ então $\vdash_{L'} X$, onde L' é o cálculo exposto no Capítulo 3 ponto 5. Introduziremos um novo cálculo L. Resultará que se $\vdash_{L'} X$ então $\vdash_{L} X$ e que se $\vdash_{L} X$ então $\vdash_{CQI} X$ (A seguir justificaremos istas duas afirmações). Teremos então que se $\vdash_{L''} X$ então $\vdash_{CQI} X$ (*). Suponhamos além disto que poda demostrarse que se $\vdash_{CQI} X$ então $\vdash_{LQI} X$ (**). A partir de (*) e (**) teremos o resultado querido. O esquema geral da demostração será:

$$\vdash_{L''} X \Rightarrow \vdash_{L'} X \Rightarrow \vdash_{L} X \Rightarrow \vdash_{N} X \Leftrightarrow \vdash_{CQI} X \Rightarrow \vdash_{LQI} X \quad .$$

<u>Lema 4.3.7:</u> Se $\vdash_{L''} X$ então $\vdash_{L'} X$

Em geral provaremos que se $\Gamma \vdash_{L''} \Delta$ então $\Gamma \vdash_{L'} \Delta$. Suponhamos que exista uma árvore de prova T en L'' para $\Gamma : \Delta$. Dado que cada nodo de T está associado com um sequente que tem a propiedade de derivar-se a partir do o dos sequentes associados com o ou os nodos acima dele, será suficiente para ter uma árvore de prova S en L' para $\Gamma : \Delta$, transformar toda derivação em L'' numa derivação em L'. Se obtivemos $\Gamma : \Delta$ a partir de $\wedge :$, $: \wedge$, $\vee :$, $: \vee$, $: \to$, a transformação é imediata. Se obtivemos $\Gamma : \Delta$ a partir de $\to :$ a situação é a exposta a esquerda , cuja transformação expomos a direita.

$$\frac{\Sigma, A \to B : A, \Theta \qquad \Sigma, B : \Theta}{\Sigma, A \to B : \Theta} \qquad\qquad \to : \frac{\Sigma, A \to B : A, \Theta \qquad \text{Atenuação}\ \dfrac{\Sigma, B : \Theta}{\Sigma, A \to B, B : \Theta}}{\Sigma, A \to B : \Theta}$$

Se obtivemos $\Gamma : \Delta$ a partir de $: \neg$, a situação é a exposta a esquerda cuja transformação expomos a direita.

$$\frac{\Gamma, A :}{\Sigma : \neg A, \Theta} \qquad\qquad \text{Atenuação}\ \frac{: \neg\ \dfrac{\Sigma, A :}{\Sigma : \neg A}}{\Sigma : \neg A, \Theta}$$

No caso que $\Gamma : \Delta$ tenha sido obtido a través de $\neg :$, a transformação é imediata. Também no caso que $\Gamma : \Delta$ tenha sido obtido a través de $: \forall$, a transformação é imediata.. No caso que $\Gamma : \Delta$ tenha sido obtido a través de $\forall :$, a situação é a seguinte

$$\frac{\Sigma, \forall x\, A(x), A(\bar{n}_1) \ldots\ldots\ldots A(\bar{n}_r) : \Theta}{\Sigma \quad , \forall x A(x) \quad : \Theta}$$

que se transforma em

$$\begin{array}{ll} \forall : & \dfrac{\Sigma, \forall x\, A(x), A(\bar{n}_1) \ldots\ldots A(\bar{n}_r) : \Theta}{\Sigma, \forall x\, A(x), A(\bar{n}_2) \ldots\ldots A(\bar{n}_r) : \Theta} \\ \forall : & \dfrac{}{\Sigma, \forall x\, A(x), A(\bar{n}_3) \ldots\ldots A(\bar{n}_r) :} \\ & \quad \vdots \\ \forall : & \dfrac{\quad\vdots\quad}{\Sigma, \forall x A(x) \quad : \Theta} \end{array}$$

No caso que $\Gamma : \Delta$ tenha sido obtido por $\exists :$ a transformação é imediata. No final, no caso que $\Gamma : \Delta$ tenha sido obtido a través da regra $: \exists$ a situação é a seguinte

$$\frac{\Sigma : A(\bar{n}_1) \ldots\ldots\ldots\ldots A(\bar{n}_r), \exists x\, A(x), \Theta}{\Sigma : \exists x\, A(x), \Theta}$$

que se transforma em

$$\begin{array}{ll} & \Sigma : A(\bar{n}_1) \ldots\ldots\ldots\ldots A(\bar{n}_r), \exists x A(x), \Theta \\ : \exists & \overline{\Sigma : A(\bar{n}_2) \ldots\ldots\ldots\ldots A(\bar{n}_r), \exists x A(x), \Theta} \\ & \quad \vdots \\ : \exists & \dfrac{\quad\vdots\quad}{\Sigma : \exists x A(x), \Theta} \end{array}$$

Consideraremos agora o cálculo L que usa uma noção ampliada de sequente. Um sequente $\Gamma : C$ será um par ordenado $\langle \Gamma , C \rangle$ tal que Γ é um conjunto finito de fórmulas, e C é ou uma fórmula, ou o conjunto vácuo. As regras de L são as seguintes (temos aquí regras de introdução de constantes logicas a direita e a esquerda)

	Direita	Esquerda
Atenuação	$\dfrac{\Gamma :}{\Gamma : A}$	$\dfrac{\Gamma : C}{\Gamma , A : C}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : B}{\Gamma , \Delta : A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma , A , B : C}{\Gamma , A \wedge B : C}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma : A}{\Gamma : A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma : B}{\Gamma : A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma , A : C \qquad \Delta , B : C}{\Gamma , \Delta , A \vee B : C}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma , A : B}{\Gamma : A \rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma , B : C \qquad \Delta : A}{\Gamma , \Delta , A \rightarrow B : C}$
$\sim$	$\dfrac{\Gamma , A :}{\Gamma : \sim A}$	$\dfrac{\Gamma : A}{\Gamma , \sim A :}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma : A(y)}{\Gamma : \forall x \, A(x)}$	$\dfrac{\Gamma , A(t) : C}{\Gamma , \forall x \, A(x) : C}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma : A(t)}{\Gamma : \exists x \, A(x)}$	$\dfrac{\Gamma , A(y) : C}{\Gamma , \exists x \, A(x) : C}$

E imediato que se $\Gamma \vdash_{L'} X$ então $\Gamma \vdash_{L} X$. Fica por ver que se $\vdash_{L} X$ então $\vdash_{CQI} X$. Para isto deveremos introduzir um novo cálculo intermedio N, o cálculo de dedução natural, o qual é equivalente a CQI, e provar que se $\vdash_{L} X$ então $\vdash_{N} X$.

As regras de inferência do sistema N de dedução natural divídem-se em regras estructurais e regras lógicas. Existe sòmente uma regra estructural, a regra de atenuação:

$$\frac{\Gamma : B}{\Gamma , A : B}$$

As regras logicas divídem-se em regras de introdução e regras de eliminação. Denotamos uma regra de introdução para a conectiva $\vee$ por $\vee^{+}$ e uma regra de eliminação para a mesma conectiva por $\vee^{-}$. E do mesmo modo para as outras conectivas. As regras são as seguintes:

	+	−
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : B}{\Gamma , \Delta : A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma : A \wedge B}{\Gamma : A}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma : A \wedge B}{\Gamma : B}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma : A}{\Gamma : A \vee B}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma : B}{\Gamma : A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad \Delta , A : C \qquad \Theta , B : C}{\Gamma , \Delta , \Theta : C}$
$\to$	$\dfrac{\Gamma , A : B}{\Gamma : A \to B}$	$\dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : A \to B}{\Gamma , \Delta : B}$
$\sim$	$\dfrac{\Gamma , A : B \qquad \Delta , A : \sim B}{\Gamma , \Delta : \sim A}$	$\dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : \sim A}{\Gamma , \Delta : B}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma : A(y)}{\Gamma : \forall x\, A(x)}$	$\dfrac{\Gamma : \forall x\, A(x)}{\Gamma : A(t)}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma : A(t)}{\Gamma : \exists x A(x)}$	$\dfrac{\Gamma : \exists x\, A(x) \qquad \Delta , A(y) : C}{\Gamma , \Delta : C}$

As regras para $\forall$ e $\exists$ valem sòmente sob as seguintes condições:

(a) y é uma variável, e t é um termo, os dois são livres para x em

A(x).

(b) A(y) e A(t) resultam de A(x) substituiendo toda ocorrência livre de x por y e t respetivamente.

(c) Em $\forall^+$, y não ocorre livre em $\Gamma : \forall x A(x)$, e em $\exists^-$, y não ocorre livre em $\Gamma, \Delta : C$ também não em $\exists x\, A(x)$.

Démostra-se que $\Gamma \vdash_{CQI} X$ se e sòmente se $\Gamma \vdash_{N} X$. Para a demostração deste Lema ver Dummett,[1979], págs 128-130. Résta- nos por provar que se $\Gamma \vdash_{L} X$ então $\Gamma \vdash_{N} X$. A prova consiste na verificação que as regras de introdução a esquerda e a regra de atenuação a direita são regras derivadas de N. Quando C=$\emptyset$ é o sucedente de um sequente o substituimos por o signo $\bot$, ou por uma contadição fixa $D \wedge \sim D$. O signo $\bot$ está sujeito as seguintes regras:

$$\bot^- \quad \frac{\Gamma : \bot}{\Gamma :} \qquad\qquad \bot^+ \quad \frac{\Gamma : X \qquad \Delta : \sim X}{\Gamma, \Delta : \bot}$$

$\bot^+$ deríva-se facilmente a partir de $\sim^-$.

A seguir fazemos a derivação em N das regras propias de L

$$\wedge : \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\, A, B : C}{\Gamma, B : A \to C}\to^+ \qquad \dfrac{A \wedge B : A \wedge B}{A \wedge B : A}\wedge^-}{\dfrac{\Gamma, B, A \wedge B : C}{\Gamma, A \wedge B : B \to C}\to^+}\to^- \qquad \dfrac{A \wedge B : A \wedge B}{A \wedge B : B}\wedge^-}{\Gamma, A \wedge B : C}\to^-$$

$$\vee : \quad \dfrac{A \vee B : A \vee B \qquad \Gamma, A : C \qquad \Delta, B : C}{\Gamma, \Delta, A \vee B : C}\vee^-$$

$$\sim : \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma : A \qquad \sim A : \sim A}{\Gamma, \sim A : A \wedge \sim A}\wedge^+}{\Gamma, \sim A : \bot}\bot^+}{\Gamma, \sim A :}\bot^-$$

$\rightarrow$:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, B : C}{\Gamma : B \rightarrow C}\,{\rightarrow^{+}} \qquad \cfrac{\Delta : A \qquad A \rightarrow B : A \rightarrow B}{\Delta, A \rightarrow B : B}\,{\rightarrow^{-}}}{\Gamma, \Delta, A \rightarrow B : C}\,{\rightarrow^{-}}$$

$\forall$:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A(t) : C}{\Gamma : A(t) \rightarrow C}\,{\rightarrow^{+}} \qquad \cfrac{\forall x\, A(x) : \forall x\, A(x)}{\forall x\, A(x) : A(t)}\,{\forall^{-}}}{\Gamma, \forall x\, A(x) : C}\,{\rightarrow^{-}}$$

$\exists$:

$$\cfrac{\exists x\, A(x) : \exists x\, A(x) \qquad \Gamma, A(y) : C}{\Gamma, \exists x A(x) : C}\,{\exists^{-}}$$

Lema 4.3.8

Se $\vdash_{CQI} X$ então $\vdash_{LQI} X$

Demostraremos que dado um axioma Ax de CQI existe uma tabla de Beth fechada para $\{F\ Ax\}$, e que se temos uma tabla fechada para F (as premisas das regras de infêrencia b.e c. de CQI) então existe uma tabla fechada para F (a conclusão).

Axioma 1

$$\cfrac{\cfrac{F\,(X \supset (Y \supset X))}{TX, F(Y \supset X)}\,F\supset}{TX, TY, FX}\,F\supset$$

Axioma 2

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F(X \supset (Y \supset X \wedge Y))}{TX, F(Y \supset X \wedge Y)}\,F\supset}{TX, TY, F(X \wedge Y)}\,F\supset}{\{TX, TY, FX\} \qquad \{TX, TY, FY\}}\,F\wedge$$

Axioma 3

$$\cfrac{\cfrac{F(X \wedge Y \supset X)}{T(X \wedge Y), FX}\,F\supset}{TX, TY, FX}\,T\wedge$$

Axioma 4 (Idem Axioma 3)

Axioma 5

F ⊃ F(X ⊃ X ∨ Y)

F ∨ TX, F(X ∨ Y)

TX, FX, FY

Axioma 6 (Idem Axioma 5)

Axioma 7

F⊃ F((X∨Y) ⊃ ((X ⊃ Z) ⊃ ((Y ⊃ Z) ⊃ Z)))

T∨ T(X ∨ Y), F((X ⊃ Z) ⊃ ((Y ⊃ Z) ⊃ Z))

F⊃ { TX, F((X ⊃ Z) ⊃ ((Y ⊃ Z) ⊃ Z)) } { TY, F((X ⊃ Z) ⊃ ((Y ⊃ Z) ⊃ Z)) } F⊃

T⊃ { TX, T(X ⊃ Z), F((Y ⊃ Z) ⊃ Z } { TY, T(X ⊃ Z), F((Y ⊃ Z) ⊃ Z) T⊃

{ TX, FX, F((Y ⊃ Z) ⊃ Z) } { TX, TZ, F((Y ⊃ Z) ⊃ Z) } F⊃ { TY, FX, F((Y ⊃ Z) ⊃ Z) } F⊃ { TY, TZ, F((Y ⊃ Z) ⊃ Z

{ TX, TZ T(Y ⊃ Z). FZ } { TY, T(Y ⊃ Z), FZ } T⊃ { TY, TZ, T(Y ⊃ Z), FZ }

{ TY, FY, FZ } { TY, TZ, FZ }

Axioma 8

F(X ⊃ Y) ⊃ ((X ⊃ (Y ⊃ Z)) ⊃ (X ⊃ Z)) F ⊃

T(X ⊃ Y), F((X ⊃ (Y ⊃ Z)) ⊃ (X ⊃ Z)) F ⊃

T(X ⊃ Y), T(X ⊃ (Y ⊃ Z)), F(X ⊃ Z) F ⊃

T(X ⊃ Y), T(X ⊃ (Y ⊃ Z)) TX, FZ T ⊃

{ FX, T(X ⊃ (Y ⊃ Z). TX, FZ } { TY, T(X ⊃ (Y ⊃ Z), TX FZ } T ⊃

{ TY, FX, TX, FZ } { TY, T(Y ⊃ Z). TX. FZ } T ⊃

{ TY, FY, TX, FZ } { TY, TZ, TX, FZ }

Axioma 9

$$\frac{F\ ((X \supset Y) \supset ((X \supset \sim Y) \supset \sim X))}{T\ (X \supset Y),\ F((X \supset \sim Y) \supset \sim X)}\ F \supset$$

$$\frac{T\ (X \supset Y),\ F((X \supset \sim Y) \supset \sim X)}{T(X \supset Y),\ T(X \supset \sim Y),\ F \sim X}\ F \supset$$

$$\frac{T(X \supset Y),\ T(X \supset \sim Y),\ F \sim X}{T(X \supset Y),\ T(X \supset \sim Y),\ TX}\ F \sim$$

$$\frac{T(X \supset Y),\ T(X \supset \sim Y),\ TX}{\{FX, T(X \supset \sim Y), TX\} \quad \{TY, T(X \supset \sim Y), TX\}}\ T \supset$$

$$\frac{\{TY, T(X \supset \sim Y), TX\}}{\{TY, FX, TX\} \quad \{TY, T\sim Y, TX\}}\ T \supset$$

$$\frac{\{TY, T\sim Y, TX\}}{\{TY, FY, TX\}}\ T \sim$$

Axioma 10

$$\frac{F(X \supset (\sim X \supset Y))}{TX, F(\sim X \supset Y)}\ F \supset$$

$$\frac{TX, F(\sim X \supset Y)}{\{TX,\ T\sim X,\ FY\}}\ F \supset$$

$$\frac{\{TX,\ T\sim X,\ FY\}}{\{TX, FX, FY\}}\ T \sim$$

Axioma 11

$$\frac{F(\forall x\ X(x) \supset X(a))}{\{T\forall x\ X(x),\ FX(a)\}}\ F \supset$$

$$\frac{\{T\forall x\ X(x),\ FX(a)\}}{\{TX(a),\ FX(a)\}}\ T \forall$$

Axioma 12

$$\frac{F\ X(a) \supset \exists x\ X(x)}{\{TX(a),\ F\exists x\ X(x)\}}\ F \supset$$

$$\frac{\{TX(a),\ F\exists x\ X(x)\}}{\{TX(a) \quad FX(a)\}}\ F \exists$$

Regra [illegible] Suponhamos que exista uma tabla fechada para $F(\ Y \supset X(a)\ )$. Logo temos uma tabla fechada para $TY, FX(a)$. Consideremos a seguinte tabla

$$\begin{array}{c} F(\ Y \supset \forall x\ X(x)\ )\quad F\supset \\ \hline TY,\ F\forall x\ X(x)\quad F\forall \\ \hline TY,\ FX(a) \end{array}$$

Logo temos uma tabla fechada para $F(\ Y \supset \forall x\ X(x)\ )$

Regra $\bar{c}$ Suponhamos que exista uma tabla fechada para $F(\ X(a) \supset Y)$. Logo temos uma tabla fechada para $\{TX(a), FY\}$. Consideremos a seguinte tabla:

$$\begin{array}{c} F\ ((\exists x)\ X(x) \supset Y\ )\quad F\supset \\ \hline T(\exists x)\ X(x),\ FY\quad T\exists \\ \hline TX(a), FY \end{array}$$

Dado que temos uma tabla fechada para $\{TX(a), FY\}$ então teremos uma tabla fechada para $F(\exists x\ X(x) \supset Y\ )$.

O processo de encontrar uma prova ou árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ em L'' resultará ser o processo dual do processo de construir <u>uma árvore refutativa</u> para $\Gamma : \Delta$. Demostraremos adiante que da existência de uma árvore refutativa para $\Gamma : \Delta$ podemos inferir a existência de uma árvore de Beth com vértice Σ tal que $\Gamma : \Delta$ não se satisfaz no Σ. Demostraremos também que se não podemos construir uma árvore refutativa para $\Gamma : \Delta$ então existe uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$, e consequentemente tendremos $\vdash_{LOI} X$ no caso que $\Gamma = \emptyset$ e $\Delta = \{X\}$. Iste rèsultado fornece uma prova da completude interna de LOI. Pois seja X uma fórmula internamente válida. Logo pelo Teorema 4.2.2. X será válida sobre toda árvore de Beth. Não podemos construir uma árvore refutativa para :X, pois se fosse possível, teríamos uma árvore de Beth tal que no seu vértice o sequente :X não se satisfaz, isto é, uma árvore de Beth tal que X não é válida sobre ele, pois no vértice Σ desta árvore teríamos $\Sigma \nvDash X$. Logo $\vdash_{LOI} X$. Iste é o esquema geral da prova da completude interna. Mas em seu desenvolvimento teremos usado- como veremos- o principio de Markov.

Agora veremos que é a dualidade de uma árvore refutativa para $\Gamma:\Delta$ em L'' em relação a uma árvore de prova para $\Gamma:\Delta$. A dualidadade consiste no fato de que cada vez que no curso da construção de uma prova para $\Gamma:\Delta$ pomos dois sequentes como premissas de uma regla de inferência acima de um sequente dado, escolhemos um ou outro dos dois sequentes na construção de uma árvore refutativa (pois se é necessário que as dois premissas sejam demóstraveis para que o sequente dado seja demostrável, então é suficiente para que não seja demostrável que uma das premissas não seja demostrável) e cada vez que devemos escolher um sequente entre outros para pôr acima de um sequente dado, na construção de uma árvore refutativa os pomos todos juntos acima do sequente dado (pois se para que um sequente dado seja demostrável em L'' é suficiente que um entre outros sequentes seja demostrável, então é necessario para que não seja demostrável que todos os sequentes do grupo sejam indemostráveis A dualidade se refletira no fato - que demostraremos adiante- de que se num estadio k o intento de construir uma árvore refutativa para $\Gamma:\Delta$ fracassa, então nesse mesmo estadio k tem sucesso o processo de construir uma prova para $\Gamma:\Delta$.

<u>Definição 4.3.6.</u> Uma árvore de prova truncada de nivel k para $\Gamma:\Delta$, é uma árvore finita onde a cada nodo Σ lhe associamos um sequente $\Gamma_\Sigma:\Delta_\Sigma$ tal que :

i) O sequente associado com o vértice da árvore é $\Gamma:\Delta$.

ii) Para cada nodo não terminal Σ, os sequentes associados com os nodos imediatamente acima de Σ são premissas de $\Gamma_\Sigma:\Delta_\Sigma$ sob alguma das regras de infêrencia de L''.

iii) Cada caminho da árvore é de comprimento $\leq$ k (onde o comprimento do caminho está dado pelo numero de nodos diferentes do vértice que contem), e é justamente de comprimento k exceção dos caminhos cujo nodo terminal esteja associado com um sequente básico.

<u>Definição 4.3.7.</u> Uma árvore de prova de nivel k para $\Gamma:\Delta$ é uma árvore de prova truncada de nivel k para $\Gamma:\Delta$ que satisfaz a condição de que para cada nodo terminal Σ, $\Gamma_\Sigma:\Delta_\Sigma$ é um sequente básico.

Construção da árvore refutativa para um sequente $\Gamma : \Delta$.

Construiremos uma sequência infinita de árvores duais truncadas para $\Gamma : \Delta$. A essa sequência infinita a chamarémos sequência dual para $\Gamma : \Delta$ e a partir dela obteremos uma árvore dual para $\Gamma : \Delta$. Iste é o processo geral. No caso que os elementos da sequência dual para $\Gamma : \Delta$ sejam árvores refutativas truncadas obteremos uma sequência refutativa e a partir dela uma árvore refutativa para $\Gamma : \Delta$.

Para construir uma sequência infinita de árvores duais truncadas para $\Gamma : \Delta$ precissaremos mais duas definições.

Definição 4.3.8: Seja T uma árvore qualquera, tal que a cada nodo Σ lhe estejam associados dois conjuntos de fórmulas Γ_Σ, Δ_Σ. Dizemos que uma fórmula X se satisfaz num nodo Σ em relação a um numero m nos casos seguintes:

i) Se X é $Y \wedge Z$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então $Y \in \Gamma_\Sigma$ e $Z \in \Gamma_\Sigma$.
ii) Se X é $Y \wedge Z$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então ou $Y \in \Delta_\Sigma$ ou $Z \in \Delta_\Sigma$.
iii) Se X é $Y \vee Z$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então $Y \in \Gamma_\Sigma$ ou $Z \in \Gamma_\Sigma$.
iv) Se X é $Y \vee Z$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então $Y \in \Delta_\Sigma$ e $Z \in \Delta_\Sigma$.
v) Se X é $Y \rightarrow Z$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então ou $Y \in \Delta_\Sigma$ ou $Z \in \Gamma_\Sigma$.
vi) Se X é $Y \rightarrow Z$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então para algúm nodo Θ tal que Σ esteja debaixo de Θ teremos $Y \in \Gamma_\Theta$ e $Z \in \Delta_\Theta$.
vii) Se X é $\sim Y$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então $Y \in \Delta_\Sigma$.
viii) Se X é $\sim Y$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então para algúm Θ que esteja acima de Σ, $Y \in \Gamma_\Theta$.
ix) Se X é $\forall x\, Y(x)$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então $Y(\bar{m}) \in \Gamma_\Sigma$.
x) Se X é $\forall x\, Y(x)$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então para algúm número n e para algúm Θ acima de Σ, $Y(\bar{n}) \in \Delta_\Theta$.
x) Se X é $\exists x\, Y(x)$ e $X \in \Gamma_\Sigma$ então para algúm numero n, $Y(\bar{n}) \in \Gamma_\Sigma$.
xii) Se X é $\exists x\, Y(x)$ e $X \in \Delta_\Sigma$ então $Y(\bar{m}) \in \Delta_\Sigma$.

Definição 4.3.9.

Definimos uma função ψ dependente de um sequente $\Gamma : \Delta$.

Pomos

$$\phi\,(r,d,n) = \begin{cases} r.(\,2^{d+1} - 1) & \text{se } n = 0 \\[2ex] \dfrac{r.(\,(n+1)^{d+1} - 1\,)}{n} & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

d é o grau máximo de qualquer fórmula em $\Gamma:\Delta$. O grau de uma fórmula atômica é 0, o grau de $\neg Y$ é d+1 se o grau de Y é d, o grau de $Y\wedge Z$, $Y\vee Z$, e $Y\supset Z$ é máx (d,e) +1 onde d e e são os graus de Y e Z; o grau de $\forall x\, Y(x)$ e de $\exists x\, Y(x)$ é d+1 onde d é o grau de Y(0); r é o número de fórmulas em $\Gamma:\Delta$.

Agora definimos

$$\psi(m) = \sum_{i=0}^{m} \phi(r,d,i)$$

Definiremos uma sequência infinita $T_0, T_1, T_2, \ldots\ldots$ de árvores duais truncadas para $\Gamma:\Delta$. Suponhamos dada uma numeração de todas as fórmulas de LQI. Cada elemento T_k da sequência será uma árvore finita tal que a cada nodo Σ da árvore lhe estará associado um sequente $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$. T_0 é a árvore consistente de um unico nodo associado ao sequente $\Gamma:\Delta$. Suponhamos ter definido T_k, definimos então T_{k+1}. Consideremos a função parcial $\lambda\Sigma.\, X_{\Sigma k}$, ista é uma função que faz corresponder cada nodo Σ de T_k com uma fórmula $X_{\Sigma k}$; no caso que exista ista fórmula, $X_{\Sigma k}$ é uma fórmula que ocurre no sequente $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$. Determinaremos $X_{\Sigma k}$ por indução no nivel do nodo Σ. Seja m o menor natural tal que $k \leq \psi(m)$. Se $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$ é um sequente básico, então $X_{\Sigma k}$ não está definida. Se $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$ não é um sequente básico e para todo Θ debaixo de Θ $X_{\Theta k}$ não está definida ou $X_{\Theta k} \in \Delta_{\Theta k}$, escolhemos $X_{\Sigma k}$ como a primeira fórmula (se ela existe) tal que não seja verdadeiro que ela se satisfaz em T_k no nodo Σ em relação a todo número $n \leq m$, se não existiesse tal fórmula $X_{\Sigma k}$ ficará novamente indefinida. Finalmente se $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$ não é básico, e existe um nodo Θ debaixo de Σ tal que $X_{\Theta k}$ esteja definida, $X_{\Theta k} \in \Gamma_{\Theta k}$, e para todo nodo Ω debaixo de Θ , $X_{\Omega k}$ não esteja definida ou $X_{\Omega k} \in \Delta_{\Omega k}$, pomos $X_{\Sigma k} \equiv X_{\Theta k}$. Nos restantes casos $X_{\Sigma k}$ não está definida.

Para formar T_{k+1} a partir de T_k , consideraremos cada nodo Σ de T_k e substiuiremos $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$ por um sequente $\Gamma_{\Sigma k+1}:\Delta_{\Sigma k+1}$, ou faremos $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k} \equiv \Gamma_{\Sigma k+1}\,\Delta_{\Sigma k+1}$ e acrescentaremos a árvore T_k com um novo nodo Θ , e associaremos com iste novo nodo um sequente $\Gamma_{\Theta,k+1}:\Delta_{\Theta,k+1}$

Toudo isto conforme as seguintes regras:

i) Se $X_{\Sigma k}$ não está definido tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1}:\Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}:\Delta_{\Sigma k}$.

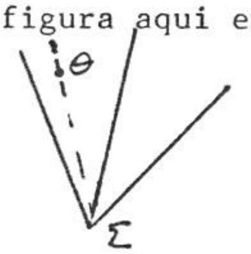
ii) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y\wedge Z$ e $X_{\Sigma k} \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1}:\Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y, Z : \Delta_{\Sigma k}$

iii) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y \wedge Z$ e $X \in \Delta_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : Y, \Delta_{\Sigma k}$ ou como $\Gamma_{\Sigma k} : Z, \Delta_{\Sigma k}$.

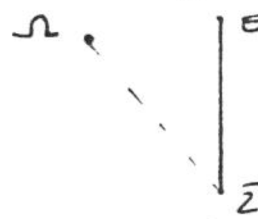
iv) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y \vee Z$ e $X \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y : \Delta_{\Sigma k}$ ou como $\Gamma_{\Sigma k}, Z : \Delta_{\Sigma k}$.

v) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y \vee Z$ e $X_{\Sigma k} \in \Delta_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : Y, Z, \Delta_{\Sigma k}$.

vi) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y \supset Z$ e $X_{\Sigma k} \in \Delta_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ e acrescentamos T_k com um novo nodo θ imediatamente acima de Σ (num caminho novo diferente de qualquer outro caminho já existente que atravesse Σ, ver figura aqui embaixo) , tomamos $\Gamma_{\theta k+1} : \Delta_{\theta k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y : Z$



Além disto se não existiesse um nodo Ω, Ω acima de Σ, isto é se Σ fosse terminal em T_k, pomos também outro novo nodo Ω distinto de θ, imediatamente acima de Σ e tomamos $\Gamma_{\Omega k+1} : \Delta_{\Omega k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$.



vii) Se $X_{\Sigma k}$ é $Y \supset Z$ e $X \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : Y, \Delta_{\Sigma k}$ ou como $\Gamma_{\Sigma k}, Z : \Delta_{\Sigma k}$.

viii) Se $X_{\Sigma k}$ é $\cap Y$ e $X \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : Y, \Delta_{\Sigma k}$.

ix) Se $X_{\Sigma k}$ é $\cap Y$ e $X \in \Delta_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ e pomos um novo nodo θ imediatamente acima de Σ (num caminho diferente de qualquer caminho já existente que atravesse Σ) e tomamos $\Gamma_{\theta k+1} : \Delta_{\theta k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y :$. Além disto, se não existiesse nenhum nodo Ω acima de Σ em T_k, pomos outro novo nodo Ω distinto de θ imediatamente acima de Σ e tomamos $\Gamma_{\Omega k+1} : \Delta_{\Omega k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$.

x) Se $X_{\Sigma k}$ é $\forall x\, Y(x)$ e $X \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y(\bar{0}), \ldots\ldots Y(\bar{m}) : \Delta_{\Sigma k}$

xi) Se $X_{\Sigma k}$ é $\forall x Y(x)$ e $X \in \Delta_{\Sigma k}$ deixamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ e pomos um novo nodo θ imediatamente acima de Σ (num caminho diferente de todo caminho já existente que atravesse Σ) e tomamos $\Gamma_{\theta k+1} : \Delta_{\theta k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : Y(\bar{n})$, onde n é o menor numero que não ocurre em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$, além disto se não existiesse um nodo Ω acima de Σ em T_k acrescentamos T_k com um novo nodo Ω $\Omega \neq \theta$ imediatamente acima de Σ e tomamos $\Gamma_{\Omega k+1} : \Delta_{\Omega k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$.

xii) Se $X_{\Sigma k}$ é $\exists xY(x)$ e $X \in \Gamma_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}, Y(\bar{n}) : \Delta_{\Sigma k}$ onde n é o menor numero que não ocurre em $\Gamma_{\Theta k} : \Delta_{\Theta k}$ para todo Θ em T_k que esteja num caminho que atravesse Σ .

xiii) Se $X_{\Sigma k}$ é $\exists xY(x)$ e $X \in \Delta_{\Sigma k}$ tomamos $\Gamma_{\Sigma k+1} : \Delta_{\Sigma k+1}$ como $\Gamma_{\Sigma k}: Y(\bar{0}),\ldots Y(\bar{m}), \Delta_{\Sigma k}$

A árvore dual truncada T_{k+1} é a árvore originada ao aplicar as operações precedentes a T_k. Nos tres casos onde um novo nodo foi introduzido, o nodo Λ, se ele deve ser introduzido, se põe no caminho o mais esquerdo em T_{k+1}, e em qualquer caso o nodo Θ deve estar no caminho o mais esquerdo. Também nos tres casos onde temos que escolher um de dois sequentes, notamos a primeira escolha com $\Gamma'_{\Sigma k+1} : \Delta'_{\Sigma k+1}$ e a segunda com $\Gamma''_{\Sigma k+1} : \Delta''_{\Sigma k+1}$.

Uma sequência infinita de árvores duais truncadas para $\Gamma : \Delta$ se chama uma <u>sequência dual</u> para $\Gamma : \Delta$. Seja $T_0, T_1, T_2 \ldots$ uma sequência dual. Observamos que se um nodo $\Sigma \in T_K$, então $\Sigma \in T_m$ para todo $m > k$. Se $\Sigma \in T_k$ e $\Sigma \notin T_j$ para todo $j < k$, dizemos que Σ foi introduzida no estadio k. Notamos que : a) se $\Sigma \in T_j$ e $j < k$ então $\Gamma_{\Sigma j} \subseteq \Gamma_{\Sigma k}$ e $\Delta_{\Sigma j} \subseteq \Delta_{\Sigma k}$; b) se Σ e Θ pertencem a T_k e Σ está acima de Θ então $\Gamma_{\Theta k} \subseteq \Gamma_{\Sigma k}$, e consequentemente cuando $X_{\Sigma k}$ esteja definido, $X_{\Sigma k}$ pertencera sempre a $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$; c) se Σ está acima de Θ e Σ está no camino o mais a esquerda que atravessa Θ então $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ é idêntico a $\Gamma_{\Theta k} : \Delta_{\Theta k}$

Seja $T_0, T_1, \ldots . . T_n . .$ uma sequência dual para $\Gamma : \Delta$. Seja T a árvore definida pela expressão $T = \sum_{m=1}^{\infty} T_m$. Associamos a cada nodo Σ de T um sequente $\Gamma_{\Sigma} : \Delta_{\Sigma}$ assim: se Σ foi introduzido no estadio k, então $\Gamma_{\Sigma} = \sum_{i=k}^{\infty} \Gamma_{\Sigma i}$, $\Delta_{\Sigma} = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta_{\Sigma i}$. Chamámos a T uma árvore dual para $\Gamma : \Delta$. Se para cada T_k da sequência dual $T_0, T_1, T_2 \ldots .$ e todo $\Sigma \in T_k$ é verdadeiro que $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ não é um sequente básico, dizemos nesse caso que a sequência dual é uma sequência refutativa e chamamos seus elementos <u>árvores refutativas truncadas</u> . A árvore dual T associado a uma sequência refutativa $T_0, T_1, \ldots . . T_n . .$ se chama árvore refutativa.

Demostraremos agora que se não é possível construir nenhuma sequênccia dual $T_0, T_1, T_2 \ldots \ldots .$ para $\Gamma : \Delta$ tal que T_k seja uma árvore refutativa truncada, então existe uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ de nivel $\leq$ k .

* <u>Teorema 4.3.10.</u>: Se não existe uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ de nivel $\leq$ k, então existe uma sequência dual $T_0, T_1, \ldots$ para $\Gamma : \Delta$ tal que T_k é uma árvore refutativa truncada. Contraponendo iste enunciado e observando que " T é uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ de nivel k " é uma proposição decidível, obtemos o resultado afirmado com anterioridade.

Demostração: Suponhamos que não exista uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ de nivel k .Determinaremos uma sequência dual $T_0, T_1, T_2 \ldots$ para $\Gamma : \Delta$ e provaremos que para cada i, $0 \leq i \leq k$, e cada nodo Σ pertencente a T_i, não existe uma árvore de prova para $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ de nivel $\leq$ k-i . Fazendo i=k teremos que para cada nodo Σ pertencente a T_k não existe uma árvore de prova para $\Gamma_{\Delta k} : \Delta_{\Sigma k}$ de nivel 0, isto é $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ não é um sequente básico.

Para determinar a sequência dual é necessario sòmente determinar cómo é o trânsito de T_i a T_{i+1} nos casos que para um nodo Σ , tenhamos uma escolha entre $\Gamma'_{\Sigma,i+1} : \Delta'_{\Sigma,i+1}$ e $\Gamma''_{\Sigma,i+1} : \Delta''_{\Sigma,i+1}$. A regra que usaremos é a seguinte: se não existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i-1 para $\Gamma'_{\Sigma i+1} : \Delta'_{\Sigma i+1}$ escolhemos $\Gamma'_{\Sigma i+1} : \Delta'_{\Sigma i+1}$, no caso contrarrio escolhemos $\Gamma''_{\Sigma i+1} : \Delta''_{\Sigma i+1}$. Iste é um metodo efetivo de decisão pois para um sequente dado temos um numero finito de árvores de prova de nivel $\leq$ l, l um número natural.

Faremos a prova por indução. Se i=0 $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ é $\Gamma : \Delta$, e pela hipotese não existe uma árvore de prova para $\Gamma : \Delta$ de nivel $\leq$ k. Suponhamos verdadeiro o enunciado para i-1 e demostraremos que vale para i . Teremos tres casos:

a) Σ foi introduzido exatamente no estadio i. Então Σ está imediatamente acima de um nodo Θ tal que $\Gamma_{\Theta,i-1} : \Delta_{\Theta,i-1}$ ou é idêntico com $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ ou pode derivarse a partir de $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ a través das regras $:\rightarrow$, $:\wedge$, ou $:\forall$. Pela hipotese indutiva não existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i+1 para $\Gamma_{\Theta,i-1} : \Delta_{\Theta,i-1}$, então não existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i para $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$.

b) Σ foi introduzido num estadio menor que i, e não tivemos escolha na formação de $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ a partir de $\Gamma_{\Sigma,i-1} : \Delta_{\Sigma,i-1}$. Então $\Gamma_{\Sigma,i-1} : \Delta_{\Sigma,i-1}$ é idêntico com $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ ou pode derivarse deste último sequente a través de uma regra que contenha sòmente uma premissa. Nos dois casos , infiére se pela hipotese indutiva que não pode existir uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i para $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}$.

c) Σ foi introduzido num estadio anterior a i, mas as regras para construir uma sequência dual fornecem uma escolha entre $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}\equiv\Gamma'_{\Sigma i}:\Delta'_{\Sigma i}$ ou $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}\equiv\Gamma''_{\Sigma i}:\Delta''_{\Sigma i}$ para formar $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}$. Se fazemos a primeira escolha, conforme a nossa regra já enunciada, teremos que não existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i para $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}$. Se fazemos a segunda escolha teremos que não existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i para $\Gamma'_{\Sigma i}:\Delta'_{\Sigma i}$. Suponhamos que existe uma árvore de prova de nivel $\leq$ k-i para $\Gamma''_{\Sigma i}:\Delta''_{\Sigma i}$. Dado que $\Gamma_{\Sigma i-1}:\Delta_{\Sigma i-1}$ pode derivarse a partir de $\Gamma'_{\Sigma i}:\Delta'_{\Sigma i}$ e $\Gamma''_{\Sigma i}:\Delta''_{\Sigma i}$ a través de uma regra com dois premissas, então infiérese que existe uma prova de nivel $\leq$ k-i+1 para $\Gamma_{\Sigma i-1}:\Delta_{\Sigma i-1}$ contradizendo a hipotese indutiva. Consequentemente não existe uma árvore de prova para $\Gamma''_{\Sigma i}:\Delta''_{\Sigma i}$, isto é para $\Gamma_{\Sigma i}:\Delta_{\Sigma i}$ de nivel $\leq$ k-i.

Teorema 4.3.11: (Dummett, [1978], pág 238). Se todo intento de construir uma árvore refutativa para $\Gamma:\Delta$ não tem sucesso, então existe uma árvore de prova para $\Gamma:\Delta$.

Construiremos um leque geralizado $\langle s, h\rangle$ onde s é um leque e h uma aplicação que associa sequências finitas admisíveis de s com árvores duais truncadas de uma possível sequência dual para $\Gamma:\Delta$. Definimos s e h assim: $h(\langle\ \rangle)$ é a árvore dual truncada que ocurre como T_0 em toda sequência dual para $\Gamma:\Delta$, onde $\langle\ \rangle$ é a sequência vácua (que sempre supomos admisível em qualquer leque s Suponhamos u admisível em s e $h(\vec{u}) = T_k$. Sejam $T^{(0)}_{k+1},\ldots. T^{(r)}_{k+1}$ todas as árvores duais truncadas que podem ocorrer numa sequência dual para $\Gamma:\Delta$ como sucessores de T_k. Consideraremos $\vec{u}\hat{\ }i$ admisível se $i\leq r$ e nesse caso pomos $h(\vec{u}\hat{\ }i) = T^{(i)}_{k+1}$ onde $\vec{u}\hat{\ }i=\langle u_0,\ldots\ldots u_{k-1},i\rangle$ se $\vec{u}=\langle u_0,\ldots. u_{k-1}\rangle$. Observemos que h aplica os nodos do leque s (que estão associados a sequências finitas) nos nodos de uma árvore T, que tem a propiedade de que seus nodos estão associados a árvores duais truncados. Cada caminho de T é uma possível sequência dual para $\Gamma:\Delta$, e recíprocamente toda possível sequência dual para $\Gamma:\Delta$ é um caminho de T.

Interpretamos a asseveração de que todo intento de construção de uma árvore refutativa para $\Gamma:\Delta$ não tem sucesso como a aseveração de que para toda $\alpha\in s$, existe um m tal que $h(\bar{\alpha}(m))$ contém um sequênte básico onde dentoamos com $\bar{\alpha}(m)$ a sequência $\alpha(\bar{0}),\alpha(\overline{m-1})$

. Pelo Teorema do leque (Ver Nota 2) existe uma cota k tal que para toda sequência dual T_0, T_1,......T_n..para $\Gamma:\Delta$ existe um $m \leq k$ e um nodo Σ em T_m tal que $\Gamma_{\Sigma m} : \Delta_{\Sigma m}$ é um sequênte básico e, consequêntemente $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ também é um sequênte básico, e então T_k não é uma árvore refutativa truncada. Logo pelo Teorema 4.3.10 é absurdo supôr que não existe uma árvore de prova para $\Gamma:\Delta$ de nivel $\leq k$, e como é decidével se existe ou não existe uma árvore de prova para $\Gamma:\Delta$ de nivel $\leq k$, então existe uma.

Se pudessemos provar que dada uma fórmula X válida sobre todas as árvores de Beth então todo intento de construção de uma árvore refutativa para o sequente : X não tem suceso, então pelo Teorema imediatamente antecedente teremos que existe uma árvore de prova para : X e consequentemente $\vdash_{LQI} X$. Isto é, obteríamos assim um Teorema de completude em relação a semântica dada pelas árvores de Beth.

Para atingir o alvo exposto no parágrafo antecedente, temos que considerar as árvores duais como árvores de Beth. Temos que formular uma relação $\models$ entre os nodos de uma árvore dual T e as fórmulas de LQI, e uma aplicação P dos nodos de T sobre um conjunto de constantes, de jeito tal que $\langle \mathcal{G}, \leq, \models, P \rangle$ seja uma árvore de Beth, onde $\mathcal{G}$ é o conjunto de nodos de T. Fazemos P (Σ) = N para todo nodo Σ, e dizemos que para um nodo Σ e uma fórmula atômica A temos que $\Sigma \models A$ se existe uma barreira S de Σ tal que $A \in \Gamma_\Theta$ para todo $\Theta \in S$. Dizemos que dois nodos Σ e Σ' são tais que $\Sigma \leq \Sigma'$ se Σ está acima de Σ' ou é Σ' mesmo. Consideremos um nodo Σ' tal que $\Sigma \leq \Sigma'$. Se existe $\Theta \in S$ tal que $\Sigma' \leq \Theta$, então S é uma barreira de Σ' e consequentemente $\Sigma' \models A$. Se não existiesse um nodo Θ nas condições expostas acima, então existe $\Theta \in S$ tal que $\Sigma < \Theta \leq \Sigma'$ e dado que $A \in \Gamma_\Theta$ então $A \in \Gamma_{\Sigma'}$ e Σ' é barreira de Σ'. Logo $\Sigma' \models A$. $\langle \mathcal{G}, \leq, \models, P \rangle$ é um modelo de Beth com a relação $\models$ definida como no paragrafo antecedente e a aplicação P definida por P (Σ)= N para todo nodo Σ em T.

Admitamos o seguinte Lema que demostraremos adiante:

* <u>Lema 4.3.12</u> : Se T é uma árvore refutativa para um sequente $\Gamma:\Delta$

então toda fórmula se satisfaz em todo nodo em relação a todo número. Consideremos agora o seguinte Teorema:

*Teorema 4.3.13 : Seja T uma árvore refutativa para um sequênte $\Gamma : \Delta$ e Σ um nodo de T, então toda fórmula X em Γ_Σ é tal que $\Sigma \models X$ e nenhuma fórmula Y em Δ_Σ é tal que $\Sigma \models Y$. Logo nas palavras da terminologia da definição 4.3.2 diremos que $\Gamma_\Sigma : \Delta_\Sigma$ não se satisfaz em Σ .

Iste Teorema nos da uma nova prova de completude de LQI sobre os modelos de Beth. Pois suponhamos que X seja uma fórmula válida sobre todo modelo de Beth. Para todo Θ que seja o vértice de uma árvore de Beth temos que $\Theta \models X$. Em particular no vértice Θ de qualquera árvore refutativa T para : X teremos que $\Theta \models X$. Mas se T fosse uma árvore refutativa para : X, pelo Teorema 4.3.13 teremos que $\Theta \not\models X$. Contradição. Logo não pode existir uma árvore refutativa para : X. Então todo intento de construção de uma árvore refutativa para : X não tem sucesso, e pelo Teorema 4.3.11 existe uma prova de : X. Então $\vdash_{LQI} X$.

Veremos adiante que no trânsito de " não pode existir uma árvore refutativa para : X " a " todo intento de construção de uma árvore refutativa para : X não tem sucesso ", faremos implícitamente uso do principio de Markov. Podemos inferir mais consequências . Admitamos o principio de Markov. Seja X internamente válida. Então pelo Teorema 4.2.2. X é válida sobre toda árvore de Beth e então (usando Markov e seguindo as linhas argumentativas da prova exposta no parágrafo imediatamente antecedente) teremos $\vdash_{LQI} X$. Logo o principio de Markov implica a completude interna de LQI.

Demostração do Teorema 4.3.13 : Seja T uma árvore refutativa para $\Gamma : \Delta$ formada por uma sequência refutativa $T_0, T_1, T_2 \ldots\ldots\ldots$ Seja Σ um nodo de T e X uma fórmula em $\Gamma_\Sigma : \Delta_\Sigma$. Faremos a prova por indução no grau de X.

a) Caso base. Seja X atômica. Se $X \in \Gamma_\Sigma$ temos que $\Sigma \models X$ pois Σ é barreira de Σ e $X \in \Gamma_\Sigma$. Se $X \in \Delta_\Sigma$ consideremos um nodo Θ qualquer no caminho que atravessa Σ que está mais a esquerda. Logo $\Gamma_\sigma : \Delta_\sigma$ é idêntico com $\Gamma_\Sigma : \Delta_\Sigma$ e então $X \notin \Gamma_\Theta$ pois se esso não aconteciera $X \in \Gamma_\Sigma \cap \Delta_\Sigma$ e consequentemente $X \in \Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ para algúm k , o que implicaria que $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ é um sequente básico e consequentemente T não sería uma árvore refutativa. Logo a especie S dos nodos Θ tal que $X \in \Gamma_\Theta$ não é uma barreira de Σ, e consequentemente $\Sigma \not\models X$.

b) Passo indutivo. Consideramos doze casos

i) $X \equiv Y \wedge Z$, $X \in \Gamma_\Sigma$. Pelo Lema 4.3.12 $Y \in \Gamma_\Sigma$, $Z \in \Gamma_\Sigma$. Por hipótese indutiva $\Sigma \models Y$, $\Sigma \models Z$. Logo $\Sigma \models X$.

ii) $X \equiv Y \wedge Z$, $X \in \Delta_\Sigma$. Pelo Lema 4.3.12 ou $Y \in \Delta_\Sigma$, ou $Z \in \Delta_\Sigma$. Então por hipótese indutiva $\Sigma \not\models Y$ ou $\Sigma \not\models Z$. Consequentemente $\Sigma \not\models X$.

iii) $X \equiv Y \vee Z$, $X \in \Gamma_\Sigma$. Logo pelo Lema 4.3.12 ou $Y \in \Gamma_\Sigma$ ou $Z \in \Gamma_\Sigma$. Então $\Sigma \models Y$ ou $\Sigma \models Z$ e consequentemente $\Sigma \models X$.

iv) $X \equiv Y \vee Z$, $X \in \Delta_\Sigma$. Então $Y \in \Delta_\Sigma$ e $Z \in \Delta_\Sigma$. Logo para todo $\Theta, \Theta \geq \Sigma$ no caminho que atravessa Σ mais esquerdo, temos $Y \in \Delta_\Theta$, $Z \in \Delta_\Theta$. Então pela hipótese indutiva $\Theta \not\models Y$ e $\Theta \not\models Z$. Dado que qualquer barreira de Σ contem um $\Theta \geq \Sigma$, Θ no caminho que atravessa Σ mais esquerdo, temos que não existe nenhuma barreira S tal que para todo $\Omega \in S$, $\Omega \models Y$ ou $\Omega \models Z$.

v) $X \equiv Y \supset Z$ e $X \in \Gamma_\Sigma$. Logo para todo $\Theta \geq \Sigma$, $X \in \Gamma_\Theta$. Então pelo Lema 4.3.12 ou $Y \in \Delta_\Theta$ ou $Z \in \Gamma_\Theta$ e pela hipótese indutiva teremos que $\Theta \not\models Y$ ou $\Theta \models Z$. Logo se $\Theta \models Y$ teremos que $\Theta \models Z$. Então para todo $\Theta \geq \Sigma$, se $\Theta \models Y$, então $\Theta \models Z$. Logo $\Sigma \models X$.

vi) $X \equiv Y \supset Z$ e $X \in \Delta_\Sigma$. Então pelo Lema 4.3.12 para algúm nodo $\Theta \geq \Sigma$, $Y \in \Gamma_\Theta$, $Z \in \Delta_\Theta$. Logo pela hipótese indutiva teremos que $\Theta \models Y$, $\Theta \not\models Z$, para algúm nodo $\Theta \geq \Sigma$. Então $\Sigma \not\models Y \supset Z$.

vii) $X \equiv \sim Y$ e $X \in \Gamma_\Sigma$. Então para todo $\Theta \geq \Sigma$, teremos que $X \in \Gamma_\Theta$ e pelo Lema 4.3.12 $Y \in \Delta_\Theta$ Pela hipótese indutiva $\Theta \not\models Y$. Então para todo $\Theta \geq \Sigma$, $\Theta \not\models Y$. Então $\Sigma \models X$.

viii) $X \equiv \sim Y$, $X \in \Delta_\Sigma$. Então pelo Lema 4.3.12 para algúm $\Theta \geq \Sigma$, $Y \in \Gamma_\Theta$. Logo pela hipótese indutiva para algúm $\Theta \geq \Sigma$, $\Theta \models Y$. Então $\Sigma \not\models X$.

ix) $X \equiv \forall x\, Y(x)$ e $X \in \Gamma_\Sigma$. Então pelo Lema 4.3.12 $Y(\bar{m}) \in \Gamma_\Sigma$ para todo $m \in N$. Logo pela hipótese indutiva $Y(\bar{m})$ é tal que $\Sigma \models Y(\bar{m})$ para todo $m \in N$. Então $\Sigma \models X$.

x) $X \equiv \forall x\, Y(x)$ e $X \in \Delta_\Sigma$. Então pelo Lema 4.3.12, para algúm $\Theta \geq \Sigma$ e algúm $n \in N$, $Y(n) \in \Delta_\Theta$. Então para algúm $\Theta \geq \Sigma$ e algúm $n \in N$, $\Theta \not\models Y(n)$, $\Theta \geq \Sigma$. Logo $\Sigma \not\models X$.

xi) $X \equiv \exists x Y(x)$ e $X \in \Gamma_\Theta$. Logo pelo Lema 4.3.12 para algúm $n \in N$, $Y(n) \in \Gamma_\Sigma$. Entao pela hipótese indutiva para algúm $n \in N$, $\Sigma \models Y(n)$ e Σ é barreira de Σ . Logo $\Sigma \models \exists x\ Y(x)$.

xii) $X \equiv \exists x\, Y(x)$ e $X \in \Delta_{\Sigma}$. Consideremos um nodo Θ qualquer no caminho mais a esquerda que atravessa Σ, $\Theta \geq \Sigma$. Logo $X \in \Delta_{\Theta}$ e pelo Lema 4.3.12. $Y(m) \in \Delta_{\Theta}$ para todo m. Pela hipótese indutiva $\Theta \not\models Y(m)$ para todo $m \in N$. Dado que toda barreira S de Σ corta ao caminho mais a esquerda que atravessa Σ num nodo $\Theta \geq \Sigma$, temos que não existe nenhuma barreira S de Σ tal que para todo $\Lambda \in S$, exista $n \in N$ com a propiedade de que $\Lambda \models Y(n)$. Então $\Sigma \not\models (\exists x)\, Y(x)$.

Demostração do Lema 4.3.12.

Seja T uma árvore refutativa para $\Gamma : \Delta$ formada por uma sequência refutativa $T_0, T_1, \ldots\ldots$ para $\Gamma : \Delta$. Seja r o número de fórmulas em $\Gamma : \Delta$, e seja d o grau máximo de qualquer fórmula em $\Gamma : \Delta$.

Seja Σ um nodo fixo e m um natural. Suponhamos que $Y \in \Gamma_{\Sigma} : \Delta_{\Sigma}$; demostraremos que Y se satisfaz em T em Σ em relação a m. Tomaremos um número $n \geq m$ assim: se escolhemos n=0 pediremos que $Y \in \Gamma_{\Sigma 1} : \Delta_{\Sigma 1}$, caso contrario, escolheremos um $n \geq m$, $n > 0$, mas neste ultimo caso pediremos que $Y \in \Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ com $k = \psi(n-1) + 1$. Suponhamos ter já escolhido um numero n com istas propiedades. Demostrsremos que a suposição de que Y não se satisfaz em $T_{\psi(n)+1}$ em Σ em relação a m leva a uma contradição. E dado que é decidível se Y se satisfaz em $T_{\psi(n)+1}$ em Σ em relação a m ou não, inferiremos que Y se satisfaz em $T_{\psi(n)+1}$ e a fortiori em T, em Σ, em relação a m.

Suponhamos que Y não se satisfaça em $T_{\psi(n)+1}$ em Σ em relação a m, então Y não se satisfaz em T_i em Σ em relação a m para qualquer $k \leq i \leq \psi(n)$, pois se uma fórmula não se satisfaz em T_k em Σ em relação a m, então não se satisfaz em nenhum T_{ℓ}, $\ell < k$, que contenha Σ, em Σ em relação a m. Logo a função parcial $X_{\Sigma i}$ deve estar definida para $k \leq i \leq \psi(n)$, pois para todo $k \leq i \leq \psi(n)$, $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$ não é um sequente básico (T é uma árvore refutativa truncada) e dado que existe uma fórmula (a mesma Y) que não se satisfaz em T_i em Σ em relação a m, $m \leq n$, existe uma primeira fórmula que não se satisfaz em T_i em Σ em relação a algúm número $\leq n$. Provaremos agora que para $k \leq i < j \leq \psi(n)$, $X_{\Sigma i}$ e $X_{\Sigma j}$ são diferentes. Pela construção $X_{\Sigma i}$ se satisfaz em Σ em T_j em relação a todo número $\leq n$, entanto $X_{\Sigma j}$ não se satisfaz em Σ em T_j em relação a algum número $\leq n$. Agora provaremos que para algúm i, $k \leq i \leq \psi(n)$, Y deve ser $X_{\Sigma i}$, e consequentemente Y se satisfará em T_j em Σ, com $i < j \leq \psi(n)$ em relação a i do número $\leq n$, particularmente em relação a m. Logo Y se satisfará em $T_{\psi(n)+1}$ em Σ em relação a m contradizendo a suposição que temos feito. Pois $X_{\Sigma i} \in \Gamma_{\Sigma i} \cup \Delta_{\Sigma i} \subseteq \bigcup_{s=k}^{\psi(n)} (\Gamma_{\Sigma s} : \Delta_{\Sigma s}) = \Theta_{\Sigma n}$. Admitamos que $\Theta_{\Sigma n}$ tenha um número de elementos que seja $\leq \phi(r,d,n)$, r número de fórmulas em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$. Dado que pela definição $\psi(n) = \sum_{i=0}^{n} \phi(r,d,i)$ e dado que $k = \psi(n-1) + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(r,d,n-1) + 1$, existem justamente $\phi(r,d,n)$ números i tais que $k \leq i \leq \psi(n)$. $\Theta_{\Sigma n}$ tem não mais que $\phi(r,d,n)$ elementos, e dado que existem justamente $\phi(r,d,n)$ números i tais que $k \leq i \leq \psi(n)$, $\Theta_{\Sigma n}$ deve coincidir com $\{X_{\Sigma i}\}$ $k \leq i \leq \psi(n)$. Logo Y é algúm $X_{\Sigma i}$.

Resta provar que $\Theta_{\Sigma n}$ tem um número de elementos que não supere $\phi(r,d,n)$. Consideremos alguma fórmula X que ocurra em $\Gamma_{\Sigma i} : \Delta_{\Sigma i}$, $i \leq \psi(n)$. X deve ser gerada por alguma fórmula Z em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ no seguinte sentido: no tránsito de T_j a T_{j+1} para $j < i \leq \psi(n)$, cada $X_{\Sigma j}$ (Σ um nodo em T_j) dará origem a não mais de n+1 fórmulas (ou 2 se n=0) que não ocurrem em $\Gamma_{\Sigma j} : \Delta_{\Sigma j}$, em $\Gamma_{\Sigma\, j+1} : \Delta_{\Sigma\, j+1}$ ou $\Gamma_{\Sigma'\, j+1} : \Delta_{\Sigma'\, j+1}$ para um novo nodo Σ'. Dizemos que $X_{\Sigma j}$ gera <u>imediatamente</u> istas novas fórmulas. Diremos que uma fórmula Z gera uma fórmula X se e sòmente se Z é idêntica com X ou Z gera imediatamente uma fórmula que gera X. Suponhamos que Σ foi introduzida em T no estadio k. Seja $n' = \text{máx}(n,1)$. Qualquer fórmula de grau $e \leq d$ em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ introduze em $\Theta_{\Sigma n} = \bigcup_{s=k}^{\psi(n)} (\Gamma_{\Sigma s} : \Delta_{\Sigma s})$ não mais de $1 + (n'+1) + \ldots\ldots.(n'+1)^e$ fórmulas. Lembremos a identidade $1 + x + \ldots\ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$. Logo substituiendo nesta identidade x por $(n'+1)$ obtemos que $1 + (n'+1) + \ldots\ldots.+.(n'+1)^e = \frac{1}{n'}((n'+1)^{e+1} - 1)$. Pois, em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$ gera uma fórmula (ela mesma). Em $\Gamma_{\Sigma\, k+1} : \Delta_{\Sigma\, k+1}$ gera imediatamente não mais de $(n'+1)$ fórmulas, em $\Gamma_{\Sigma\, k+2} : \Delta_{\Sigma\, k+2}$ gera não mais de $(n'+1)^2$ fórmulas e assim até chegar ao grau e da fórmula, $e \leq d$, $d \leq \psi(n)$. Dado que cada fórmula em $\Theta_{\Sigma n}$ é gerada por alguma fórmula em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$, e dado que temos não mais de r fórmulas em $\Gamma_{\Sigma k} : \Delta_{\Sigma k}$, infiérese que o número de fórmulas em $\Theta_{\Sigma n}$ não supera $\frac{r}{n'}((n'+1) - 1) = \phi(r, d, n)$.

A seguir veremos que no tránsito de " não pode existir uma árvore refutativa para : X " a " todo intento de construção de uma árvore refutativa para : X não tem sucesso " temos usado o Principio de Markov. Pelo Teorema de 4.3.13 a proposição

(1) X é válida

implica

(3) Não existe uma árvore refutativa para : X.

(3) é sinónima de (3a)

(3a) Não existe nenhuma sequência dual para : X tal que todos seus elementos sejam árvores refutativas truncadas.

Consideremos agora o leque geralizado $\langle s,h \rangle$ do Teorema 4.3.13 cujos caminhos representam todas as sequências duais possíveis para : X. Seja R a especie decidível $\{\vec{u}$ tal que $h(\vec{u})$ seja umá árvore refutativa truncada$\}$. Do Teorema 4.3.13 infiérese que se $\alpha \in s$ e h correlaciona α com una sequência refutativa $T_0, T_1, \ldots\ldots T_j \ldots$ para : X, e Té a árvore refutativa para : X correspondente a ista sequência, então para o vértice Σ de T temos que $\Sigma \not\models X$. Dizer que h correlaciona α com uma sequência refutativa é dizer que :

(4) $\alpha \in s \wedge \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R$.

Seja $T_\alpha(X)$ a proposição "$\Sigma \not\models X$", onde Σ é o vértice da árvore dual correspondente a sequência dual que h correlaciona com α. Pelo Teorema 4.3.13 temos que (4) implica (5) onde (5) é a proposição "$\neg T_\alpha(X)$". Temos então que $\alpha \in s \wedge \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R \Longrightarrow \neg T_\alpha(X)$. Contraponendo temos que $\neg\neg T_\alpha(X) \Longrightarrow \neg \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R$. Logo temos que $T_\alpha(X) \Longrightarrow \neg \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R$ e quantificando $\underbrace{\forall \alpha\, T_\alpha(X)}_{(6)} \Longrightarrow \underbrace{\forall_{\alpha \in s} \alpha \neg \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R}_{(3.b)}$

(3.b) é equivalente a (3.c) que é a formalização de (3.a).

(3.c) $\neg \exists_{\alpha \in s} \alpha \forall n\, \bar{\alpha}(n) \in R$.

Supondo que X seja válida, então para um nodo Θ vértice de uma árvore de Beth temos $\Theta \models X$. Consequentemente teremos (1) $\Longrightarrow$ (6) Logo (1) $\Longrightarrow$ (3.b).

O Teorema 4.3.11 asevera que :

(7) Todo intento de construir uma árvore refutativa para :X não tem sucesso

implica

(2) $\vdash_{LQI} X$.

No Teorema 4.3.11. interpretamos (7) como (7 a) .

(7 a) "Em toda sequência dual para : X podemos encontrar um elemento que não é uma árvore refutativa truncada". A formalização de (7 a)

é (7b)

(7b) $\forall_{\alpha\in S}\exists n\,\bar{\alpha}(n)\notin R$.

Para provar a completude de LQI sobre a semântica dada pelas árvores de Beth, devemos probar que (3a) $\Longrightarrow$ (7a) ou equivalentemente (3b) $\Longrightarrow$ (7b). Isto é devemos probar que $\forall_{\alpha\in S}\neg\forall n\,\bar{\alpha}(n)\in R \Longrightarrow \forall_{\alpha\in S}\exists n\,\bar{\alpha}(n)\notin R$. Mas $\forall_{\alpha\in S}\neg\forall n\,\bar{\alpha}(n)\in R \Longleftrightarrow \underbrace{\forall_{\alpha\in S}\neg\neg\exists n\,\bar{\alpha}(n)\notin R}_{(3.d)}$

pois R é decidível. Logo para provar completude devemos provar:

(8) $\forall_{\alpha\in S}\neg\neg\exists n\,\bar{\alpha}(n)\notin R \Longrightarrow \forall_{\alpha\in S}\exists n\,\bar{\alpha}(n)\notin R$.

Interpretamos $A(\vec{u})$ como $\vec{u}\notin R$. Logo podemos escriver (8) como um caso particular do esquema

(9) $\forall\vec{u}\,(A(\vec{u})\vee\neg A(\vec{u}))\wedge\forall_{\alpha\in S}\neg\neg\exists n\,A(\bar{\alpha}(n)) \Longrightarrow \forall_{\alpha\in S}\exists n\,A(\bar{\alpha}(n))$.

Provaremos que o esquema (9) é equivalente ao esquema

(10) $\forall n\,(P(n)\vee\neg P(n))\wedge\neg\neg\exists n P(n)\Longrightarrow\exists n\,P(n)$. Pois (9) $\Longrightarrow$ (10). Admitamos $\forall n\,(P(n)\vee\neg P(n))\wedge\neg\neg\exists n\,P(n)$. Pensemos $P(n)$ como $P(lh(u)) = A(\vec{u})$, $\vec{u}$ de comprimento n. Logo temos que $\forall n\,(P(n)\vee\neg P(n))\wedge\neg\neg\exists nP(n) \Longleftrightarrow \forall\vec{u}\,(A(\vec{u})\vee\neg A(\vec{u}))\wedge\forall\alpha\neg\neg\exists n A(\bar{\alpha}(n))$. Logo por (9) temos que $\forall n\,(P(n)\vee\neg P(n))\wedge\neg\neg\exists n\,P(n)\Longrightarrow\forall_{\alpha\in S}\exists n A(\alpha(\bar{n}))\Longleftrightarrow\exists n\,P(n)$. Agora vejamos que (10) $\Longrightarrow$ (9). Admitamos $\forall u\,(A(\vec{u})\vee\neg A(\vec{u}))\wedge\forall\alpha\neg\neg\exists n\,A(\bar{\alpha}(n))$. Consideremos $A(\bar{\alpha}(n)) = P(n)$ para todo α. Logo $\forall\vec{u}(A(\vec{u})\vee\neg A(\vec{u}))\wedge\forall\alpha\neg\neg\exists nA(\bar{\alpha}(n)) \Longleftrightarrow \forall n(P(n)\vee\neg P(n))\wedge\neg\neg\exists nP(n)$. Mas pela proposição (10) temos que $\forall\vec{u}\,(A(\vec{u})\vee\neg A(\vec{u}))\wedge\forall\alpha\neg\neg\exists nA(\bar{\alpha}(n)) \Longrightarrow \exists n\,P(n) \Longleftrightarrow \forall\alpha\exists n\,A(\bar{\alpha}(n))$.

Temos provado então o seguinte Teorema:

<u>Teorema 4.3.14</u> Se admitimos o esquema (10) chamado Principio de Markov, LQI é completo sobre a semântica dada pelas árvores de Beth.

<u>Corolario 4.3.15</u> Se supomos o principio de Markov então LQI é internamente completo.

Demostração: Seja X internamente válida. Então pelo Teorema 4.2.2. X é válida sobre toda árvore de Beth. Logo pelo Teorema 3.3.14 temos que $\vdash_{LQI} X$.

4. <u>O princípio de Markov não é intuicionisticamente admissível. Completude débil</u>.

Consideremos o esquema $\forall n\,(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge \neg\neg \exists nP(n) \rightarrow \exists nP(n)$, onde P é um símbolo de predicado. Temos que:

i) Admitamos $\forall n(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge \neg\neg \exists nP(n) \longrightarrow \exists nP(n)$. Consideremos a fórmula de LQI correspondente a este esquema. Já temos visto que $\nvdash_{LQI} \forall x(F(x) \vee \sim F(x)) \wedge \sim\sim \exists x F(x) \supset \exists x F(x)$ onde F é um símbulo de predicado. Assim LQI não seria completo em relação a semântica intuicionista intuitiva do cálculo de predicados intuicionista, isto é, em relação a semântica dada pelo significado intuitivo das conectivas e quantificadores intuicionistas. Ou equivalentemente LQI não seria completo em relação ao modelo interno cujo domínio D é o conjunto N dos números naturais. Pois teríamos fórmas de inferência intuicionistas não deriváveis em LQI.

ii) Agora pensemos que $\forall x(F(x) \vee \sim F(x)) \wedge \sim\sim \exists x F(x) \supset \exists x (F(x)$ é um esquema da aritmética de Heyting HA. Este esquema não é demonstrável em HA. Pois se P(x) é um predicado recursivo tal que uma fórmula Fx que exprima Px em HA seja tal que $\nvdash_{HA} \exists x\, Fx$, então $\nvdash_{HA} \neg\neg\exists x\, Fx \longrightarrow \exists xFx$ (Vèr Van Dalém\n, [1986], pg 29). Claramente isto não oferece uma objeção decisiva contra o princípio de Markov, dado que HA não é completa.

iii) Na verdade a objeção mais forte contra o Princípio de Markov desde um ponto de vista intuicionista, é que $\forall n\,(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge \neg\neg \exists nP(n) \longrightarrow \exists nP(n)$ não é intuicionisticamente admissível dado o significado intuitivo das conectivas intuicionistas. Intuicionisticamente $\forall n\,(P(n) \vee \neg P(n)) \wedge$

$\wedge \neg\neg \exists nP(n)$ exprime que não podemos provar $\forall n \neg P(n)$, isto é, que para qualquer m escolhido tal que $\forall_{r \leq m} r \neg P(r)$ fica aberta a possibilidade de que para um número $n > m$, $P(n)$; e desta última afirmação não se infere que $\exists n P(n)$, isto é, não podemos mostrar um K tal qual P(k).

Definição 4.4.1 - dizemos que um fragmento da LQI é debilmente completo em relação a uma semântica determinada, se para toda fórmula X desse fragmento válida, é absurdo supor que X não seja provável ($\neg\neg \vdash X$). Ou equivalentemente: se X é improvável então X é inválida.

Consideremos agora o esquema:

(11) $\forall \vec{u} (A(\vec{u}) \vee \neg A(\vec{u})) \wedge \forall\alpha \neg\neg \exists n A(\bar{\alpha}(n)) \longrightarrow \neg\neg \forall\alpha \exists n A(\bar{\alpha}(n))$. Um caso particular desse esquema é:

(12) $\forall_{\alpha \in S} \alpha \neg\neg \exists n \bar{\alpha}(n) \notin R \longrightarrow \neg\neg \forall_{\alpha \in S} \alpha \exists n \bar{\alpha}(n) \notin R$.

Pelo teorema 4.3.11 temos uma implicação de

(7.b) $\forall_{\alpha \in S} \alpha \exists n \bar{\alpha}(n) \notin R$.

a

(2) $\vdash_{LQI} X$

Temos então uma implicação de

(13) $\neg\neg \forall_{\alpha \in S} \alpha \exists n \bar{\alpha}(n) \notin R$.

a

(14) $\neg\neg \vdash X$.

Admitamos (12), então temos uma implicação de

(3d) $\forall\alpha \neg\neg \exists n \bar{\alpha}(n) \notin R$.

a

(14) $\neg\neg \vdash_{LQI} X$

(1) implica (3d), dado que "X é válida" implica $\forall\alpha T_{\alpha}(X)$, e $\forall_{\alpha} T_{\alpha}(X)$ implica $\forall_{\alpha \in S} \alpha \neg \forall n \alpha(\bar{n}) \in R$, consequentemente temos que (1) implica (14).

Isto é, se X é válida então $\neg\neg \vdash_{LQI} X$. Podemos então formular o seguinte

Teorema 4.4.2: se admitimos o esquema (12) LQI é debilmente completo sobre a semântica dada pelas árvores de Beth.

Corolario 4.4.2: Se admitimos (12) então LQI é internamente debilmente completa.

Não temos razões para supor que (12) seja intuicionisticamente válido. Pode demonstrar-se que não é derivável nos sistemas usuais da análisis intuicionista, embora não estejamos no caso do esquema (10) para o qual temos razões categóricas para sua rejeição.

5. A completude interna implica o princípio de Markov restringido.

Nesta seção demonstraremos que se LQI fosse inteiramente completo então deveríamos admitir o esquema (9') $\forall_{\alpha \in b} \alpha\ \neg\neg \exists n\ A(\alpha, n) \longrightarrow \forall_{\alpha \in b} \alpha\ \exists n\ A(\alpha, n)$ onde $A(\alpha, n)$ exprime uma relação primitiva recursiva, e b é a expansão binária, isto é, $\alpha \in b$ se $\forall n \alpha(n) \leq 1$. Análogamente demonstraremos aqui que se LQI fosse internamente debilmente completo então deveríamos admitir o esquema (11') $\forall_{\alpha \in b} \alpha\ \neg\neg \exists n\ A(\alpha, n) \longrightarrow \neg\neg \forall_{\alpha \in b} \alpha\ \exists n\ A(\alpha, n)$. As provas de (9') e (11') a partir da completude interna forte e completude interna débil respectivamente são - como o veremos - intuicionisticamente admissíveis. (9') é um caso particular de (9) que é - como já o temos visto - equivalente ao princípio de Markov. (11') é um caso particular de (11).

Como corolario obteremos que se LQI fosse completo sobre a semântica dada pelas árvores de Beth, então deveríamos admitir (9') pois nesse caso LQI seria internamente completo. Pois dada X válida internamente, pelo teorema 4.4.2. X será válida sobre as árvores de Beth, e se LQI fosse completo sobre a semântica dada pelas árvores de Beth, então $\vdash_{LQI} X$. Logo X seria internamente completa, e dado que para toda X podemos repetir o mesmo raciocinio, teríamos que LQI seria internamente completa, e consequentemente deveríamos admitir (9').

Suponhamos ter uma prova intuicionisticamente admissível da completude de LQI sobre a semântica dada pelas árvores de Beth. Adjuntemos a essa prova, uma prova da proposição " se LQI fosse completo sobre as árvores de Beth então deveríamos admitir (9'). Esta prova de (9') já foi indicada no parágrafo precedente e é intuicionisticamente admissível, dado que a prova de que a completude interna de LQI implica (9') é - como veremos adiante - intuicionisticamente aceitável. Unindo as duas provas obteríamos uma prova intuicionisticamente aceitável de (9'), e consequentemente (9') seria intuicionisticamente aceitável, mas isto é impossível - como já foi visto na seção 4.

Vemos que (9') e (11') são a restrição de (9) e (11) a predicados recursivos primitivos. Pois $A(\alpha, n)$ exprime uma relação primitiva recursiva. Pelo esquema de dados abertos (Ver nota 1 deste capítulo) existe um predicado primitivo recursivo de sequenciais finitas $\vec{u}$, $B(\vec{u}, n)$ tal que $A(\alpha, n) \Longleftrightarrow \exists m\, B(\bar{\alpha}(m), n)$. Seja C um predicado de sequenciais finitas $\vec{u}$ tal que $C(\bar{\alpha}(K)) \Longleftrightarrow K = 2^m . 3^n$ onde m e n são tais que $B(\bar{\alpha}(m), n)$. $C(\vec{u})$ é primitivo recursivo e temos que $\exists n A(\alpha, n) \Longleftrightarrow \exists n \exists m\, B(\bar{\alpha}(m), n) \Longleftrightarrow C(\bar{\alpha}(K))$ com $K = 2^m . 3^n \Longleftrightarrow \exists n\, C(\bar{\alpha}(n))$. Logo $\forall_{\alpha \in b} \alpha \neg\neg \exists n A(\alpha, n) \Longrightarrow \forall_{\alpha \in b} \alpha \exists n A(\alpha, n)$ é equivalente a $\forall_{\alpha \in b} \alpha \neg\neg \exists n\, C(\bar{\alpha}(n)) \Longrightarrow \forall_{\alpha \in b} \alpha \exists n\, C(\bar{\alpha}(n))$, e dado que para todo $\vec{u}$ temos que $C(\vec{u}) \vee \neg C(\vec{u})$, temos o esquema $\forall \vec{u}\ (C(\vec{u}) \vee \neg\ C(\vec{u})) \wedge \forall_{\alpha \in b} \alpha\ \neg\neg \exists n\, C(\bar{\alpha}(n))$

$\Longrightarrow \forall_{\alpha \in b} \alpha \exists n\, C(\bar{\alpha}(n))$, que é uma restrição de (9) a predicados recursivos primitivos. Demonstraremos agora o seguinte.

** Teorema 4.5.** Se LQI é internamente completo, então vale o esquema (9′) e se LQI é internamente debilmente completo, então vale o esquema (ii′)

A prova que aqui apresentaremos, é basicamente devida a Kreisel, embora temos introduzido modificações nas provas dos Lemas que a fazem possível. A prova consiste na construção para cada relação recursiva primitiva A (α, n) de uma fórmula B fechada tal que se LQI fosse internamente completa para B (isto é, se B internamente válida implicasse $\vdash_{LQI}$ B) então sería válido o esquema (9′) para A (α,n), e se LQI fosse internamente debilmente completa para B então sería válido o esquema (ii′) para A (α,n). Mostraremos que se para toda a sequência α na expansão binária vale $\neg\neg\exists$ n A (α,n) então B é internamente válida (Lema 4.5.2) e que se $\vdash_{LQI}$ B então para toda α na expansão binária $\exists$ n A (α,n) (Lema 4.5.3). Então teremos:

i) Se $\forall_{\alpha \in b} \alpha\ \neg\neg \exists$ n A (α,n) então B é internamente válida.

ii) Se B é internamente válida então $\vdash_{LQI}$ B.

iii) Se $\vdash_{LQI}$ B então $\forall_{\alpha \in b} \alpha \exists$ n A (α,n).

Logo i), ii) e iii) implicam $\forall_{\alpha \in b} \alpha\ \neg\neg \exists$ n A (α,n) $\longrightarrow \forall_{\alpha \in b} \alpha \exists$n A($\alpha$,n) (9′). Consequentemente se adjuntamos a uma prova de ii), provas de i) e iii) respectivamente, teremos uma prova de (9′). Dado que pelos Lemas 4.5.2 e 4.5.3 temos essas duas últimas provas, então teremos que de ii) infere-se (9′), o que é aquilo que queríamos provar. Analogamente prova-se que "se B é internamente válida, então $\neg\neg \vdash_{LQI}$ B" implica (ii′).

A seguir construiremos a fórmula B. No início, construiremos uma fórmula fechada F que contém uma letra de predicado monádica Z (onde Zx na interpretação que chamamos intuitiva, significa x=0), uma letra de predicado S (onde Sxy na interpretação intuitiva significa "y é o sucessor de x") e um símbolo = que representa a relação de igualdade. F é a cláusura universal das fórmulas.

$x=x$

$x=y \wedge x=z \supset y=z$

$x=y \wedge Zx \supset Zy$

$x=y \wedge Sxz \supset Syz$

$x=y \wedge Szx \supset Szy$

$Zx \wedge Zy \supset x=y$

$Sxy \wedge Sxz \supset y=z$

$Sxz \wedge Syz \supset x=y$

$Sxy \rightarrow \neg Zy$

F axiomatiza a teoria da relação sucessor. Seja G a fórmula $\exists x\, Zx \wedge \forall x \exists y\, Sxy$, e seja H a fórmula $F \wedge G$. Seja A (α, n) um predicado diádico dado que exprime uma relação recursiva primitiva entre sequências de escolha α na expansão binária b e números naturais, e seja ϕ (α, n) a função característica associada, isto é

$$\phi(\alpha, n) = \begin{cases} 0 \text{ se } A(\alpha, n) \\ 1 \text{ se } \neg A(\alpha, n) \end{cases}$$

Então existe um conjunto E de equações que contém símbolos de funções $f_0, f_1, \ldots\ldots, f_k$ tal que para cada n e cada $\alpha \in b$, se adjuntamos a E um número suficiente de equações da forma $f_0(m) = i$

onde α (m) =i, podemos derivar a equação $f_k(n)=j$ onde $j = \phi(\alpha, n)$. Além disto, para cada i, $1 \leq i \leq k$, $\underline{E}$ terá uma equação ou par de equações de uma das seguintes formas:

(i) $f_i(n) = 0$.

(ii) $f_i(n) = n'$

(iii) $f_i(n_1 \ldots\ldots n_r) = n_j$ para algum j, $1 \leq j \leq r$.

(iv) $f_i(n_1 \ldots\ldots n_r) = f_{s_0}(f_{s_1}(n_1 \ldots\ldots\ldots n_r), \ldots\ldots f_{s_q}(n_1 \ldots\ldots n_r))$

$0 \leq s_j < i$

$0 \leq j \leq q$

(v) $f_i(0,m) = f(m)$

$f_i(n',m) = f_s(n,m\ f_i(n,m))$ para algum r e algum s, $0 \leq r < i$

$0 \leq s < i$

Construiremos agora a fórmula E que formaliza em primeira ordem ao conjunto $\underline{E}$ de equações. E contém além de Z,S,=, uma letra de predicado monádico Q (onde Q(x) na interpretação intuitiva significa $\alpha(x) = 0$), e para cada i, $0 \leq i \leq K$, uma letra de predicado r+1 ario F_i onde $F_i\ x_1 \ldots\ldots X_r\ x$ significa na interpretação intuitiva $f_i(x_1 \ldots\ldots x_r) = x$. E é a conjunção da clausura universal de todas as fórmulas do seguinte tipo:

i) $x=y \wedge Qx \supset Qy$

ii) $y=z \wedge F_i\ x_1 \ldots\ldots x_{j-1}\ Y\ x_{j+1} \ldots\ldots X_r\ x_{r+1} \supset F_i\ x_1 \ldots x_{j-1}\ z\ x_{j+1} \ldots\ldots\ldots x_r, x_{r+1}$, para cada i, $0 \leq i \leq k$ e cada j, $1 \leq j \leq r+1$.

iii) $F_i\ x_1 \ldots\ldots x_r\ y \wedge F_i\ x_1 \ldots\ldots x_r\ z \supset y=z$ para cada i, $0 \leq i \leq K$.

iv) $Qx \wedge Zy \supset F_0xy$

v) $\neg Qx \wedge Zy \wedge Syz \supset F_0xz$

vi) $Zy \supset F_1xy$ para cada i tal que $\underline{E}$ contém uma equação da forma (i) governando f_i

vii) $Sxy \supset F_i\, xy$ para cada i tal que E contém uma equação da forma (ii) governando f_i

viii) $F_i x_1 \ldots\ldots x_r, x_j$ para cada i tal que E contém uma equação da forma (iii) governando f_i

ix) $F_{s}\ x_1 \ldots\ldots\ldots\ x_r\ y_1 \ldots\ldots\ \wedge\ F_{s_q}\ x_1 \ldots\ldots\ldots\ x_r y_q\ \wedge$

$F_{s_0}\ y_1 \ldots\ldots\ y_q\ z \supset F_i x_1 \ldots\ldots\ldots\ x_r\ z$ para cada i tal que E contém uma equação da forma (iv) governando f_i

x) $Zx\ \wedge\ F_r yz\ \supset\ F_i xyz$

$F_i xyz\ \wedge\ F_s xyzu\ \wedge\ Sxv\ \supset\ F_i vyu$ para cada i tal que E contém um par de equações da forma (v) governando f_i.

Formamos as fórmulas $C \equiv H \wedge E \wedge \forall x\, (Qx \vee \neg Qx)$, $D \equiv \exists x\ \exists y\ (Zy \wedge F_k xy)$ e finalmente $B \equiv \neg\ (C\ \wedge \neg\ D)$.

Provaremos agora o seguinte lema

* Lema 4.5.2. Se $\forall_{\alpha \in b}\ \alpha\ \neg\ \neg\ \exists\ n\ A\,(\alpha\ ,\ n)$ então B é internamete válida.

Demonstração: admitamos que $\forall_{\alpha \in b}\ \alpha\ \neg\ \neg\ \exists\ n\ A\,(\alpha\ ,\ n)$. Quereos mostrar que B é verdadeira sob qualquer interpretação interna. Cada interpretação interna de B é uma estrutura M, Z', S', I', Q', F'_0, F'_1 .... F'_k onde M é uma espécie distinta da espécie vácua, considerada como o domínio das variáveis, e os restantes símbolos denotam subespécies de M^n, para valores distintos de n, consideradas como interpretando os diferentes símbolos de predicado de B (I' tem forçosamente como interpretação a igualdade = entre elementos do domínio M). Consideremos agora uma interpretação qualquer e suponhamos que sob esta interpretação $C\ \wedge\ \neg\ D$ seja verdadeiro. Demonstremos que esta suposição leva a um absurdo, e consequentemente teremos que para toda a interpretação vale

$\neg$ (C $\wedge$ $\neg$ D). Logo, para toda a interpretação B será válida, e consequentemente B será internamente válida.

Se C $\wedge$ $\neg$ D fosse verdadeira, então dado que C $\equiv$ H $\wedge$ E $\wedge$ $\forall$ x (Qx $\vee$ $\neg$ Qx), H seria verdadeira, e sendo que H $\equiv$ F $\wedge$ G, G seria verdadeira, onde G é a fórmula $\exists$ x Zx $\wedge$ $\forall$ x $\exists$ y Sxy. Logo para todo o elemento d $\in$ M, existiria um elelmento d* $\in$ M tal que S' (d, d*) seria verdadeiro. Mas pelo Axioma de escolha (Ver observação ao final do Lema) existiria uma função g definida sobre M tal que S' (d, g(d)) seria verdadeiro para toddo d $\in$ M. Além disto sabemos que existe um elemento d $\in$ M tal que Z' (d), pois da suposição feita, se infere que G é verdadeira. Definimos então uma aplicação $\bar{h}$ dos números naturais sobre M denotando $\bar{h}(n)$ por n' (isto é $\bar{h}(n)=n'$, n' $\in$ M) assim: $\bar{h}(0)$ = 0' é qualquer elemento 0' que satisfaz Z' (0'), e $\bar{h}(n+1) = (n+1)' = g(n') = g(\bar{h}(n))$ para todo n $\in$ N. Dado que sob a interpretação considerada sobre M, H é verdadeira, também é verdadeira restringida a $\bar{h}(N)$. Logo $\bar{h}(N)$ é isomorfo a espécie dos números naturais e o isomorfismo preserva relação sucessor. Mas dado que sob nossa suposição de que a interpretação que estamos considerando faz C $\wedge$ $\neg$ D verdadeiro, se infere que C é verdadeiro também sob a mesma interpretação, temos que Q' (d) $\vee$ $\neg$ Q' (d) é verdadeiro para todo d $\in$ M. Consequentemente, novamente, pelo Axioma de escolha, existe uma função α' definida sobre M que satisfaz

$$\alpha'(d) = \begin{cases} 0 \text{ se } Q'(d) \\ \\ 1, \text{ se } \neg Q'(d) \end{cases}$$

Seja α um elemento da expansão binária b tal que para cada n $\alpha(n) = 0 \iff \alpha'(n') = 0'$ e $\alpha(n) = 1 \iff \alpha'(n') = 1'$. Então $\alpha(n) = 0 \iff \alpha'(n') = 0' \iff Q'(n')$. Além disto dado que $[(\neg Q'(n') \wedge Z'(0')) \Longrightarrow F'_0(n', 0')]$ e $Q'(n')$ e $Z'(0')$.

Logo $\alpha'(n') = 0' \Longrightarrow F'_0(n', 0')$

Para cada $0 \leq i \leq k$, seja $h_i : N \longrightarrow N$ a função tal que para cada par (n,m), $h_i(n) = m$ se e sòmente se $f_i(n)=m$ é derivável a partir de E adjuntando um número suficiente de equações da forma $f_0(r)=j$ onde $\alpha(r)=j$. Provaremos agora por indução sobre o índice i que para cada $n_1 \ldots\ldots\ldots n_r$ e m, $h_i(n_1, \ldots\ldots n_r)=m \iff F'_i(n'_1 \ldots\ldots n'_r, m')$ *.

Caso i=0. Suponhamos $h_0(n)=0$. Então $f_0(n) = 0$, logo $\alpha(n) = 0$ e consequentemente $\alpha'(n') = 0'$, e consequentemente $F'_0(n', 0')$. Suponhamos agora que $h_0(n)=1$, então $f_0(n)=1$, logo $\alpha(n)=1$, e consequentemente $\alpha'(n')=1'$. Logo $\neg Q'(n')$. Mas $(\neg Q'(n') \wedge Z'(0') \wedge S'(0', 1')) \supset F'_0(n', 1')$. Consequentemente $F'_0(n', 1')$. Reciprocamente, suponhamos que $F'_0(n', 0')$ e admitamos que $h_0(n)=1$. Logo teríamos $f_0(n)=1$ e consequentemente $F'_0(n', 1')$. Então $0'=1'$. Absurdo. Do mesmo modo, suponhamos que $F'_0(n', 1')$ e admitamos que $h_0(n)=0$. Logo $f_0(n)=0$ e consequentemente $F'_0(n', 0')$. Logo $1'=0'$. Absurdo.

Agora demostraremos a proposição * para um i qualquer. Isto é demostraremos que $h_i(n_1 \ldots\ldots n_r)=m \Longleftrightarrow F'_i(n'_1 \ldots\ldots n'_r, m')$. Suponhamos que $h_i(n_1, \ldots n_r)=m$. Logo $f_i(n_1 \ldots n_r)=m$. Consideremos as possíveis formas de f_i. Seja $f_i(n_1, \ldots\ldots n_r)=n_j$ com $1 \leq j \leq r$. Dado que E tem que satisfazer-se sob a interpretação considerada deve ser verdadeira $F'_i(n'_1, \ldots n'_r, n'_j)$. Seja agora $f_i(n_1 \ldots n_r)=f_{s_0}(f_{s_1}(n_1 \ldots n_r), \ldots\ldots f_{s_q}(n_1 \ldots\ldots n_r))$. Pela hipótese indutiva os enunciados $F'_{s_1}(n'_1, \ldots\ldots n'_r, y'_1), \ldots\ldots F'_{s_q}(n'_1, \ldots\ldots n'_r, y'_q)$ e $F'_{s_0}(y'_1 \ldots\ldots y'_q, m')$ devem ser verdadeiros. E dado que E tem que satisfazer-se sob a interpretação que estamos considerando, o enunciado seguinte $F'_{s_1}(n'_1, \ldots n'_r, y'_1) \ldots \wedge F'_{s_q}(n'_1, \ldots\ldots n'_r, y'_q) \wedge F'_{s_0}(y'_1, \ldots y'_q, m') \supset F'_i(n'_1, \ldots\ldots n'_r, m')$ tem que ser verdadeiro. Logo podemos afirmar $F'_i(n'_1, \ldots\ldots n'_r, m')$. Finalmente , consideremos o caso que f_i esteja dada pelas equações:

$$f_i(0,p) = f_r(p)$$
$$f_i(n+1,p)=f_s(n,p,f_i(n,p)).$$

Pela hipótese indutiva temos que $F'_r(p',m')$ é verdadeiro. E dado que E tem que ser verdadeiro temos que o enunciado seguinte também é verdadeiro $Z'(0') \wedge F'_r(p',m') \supset F'_i(0',p',m')$. Logo podemos afirmar $F'_i(0',p',m')$. Suponhamos agora que para todo entero $u \leq n$ podamos afirmar que se $f_i(u,p)=q$ então $F'_i(u',p',q')$. Provaremos agora que : $f_i(n+1,p)=m$ se e sòmente se $F'_i((n+1)',p',m')$. Pela hipótese indutiva temos que $F'_i(n',p',q')$ e $F'_s(n',p',q',m')$. E dado que E se satisfaz sobre M tem que ser verdadeira a proposição seguinte: $F'_i(n',p',q') \wedge F'_s(n',p',q',m') \wedge S'(n',(n+1)') \supset F'_i((n+1)',p',m')$. Logo $F'_i((n+1)',p',m')$. Recíprocamente, seja $F'_i(n'_1 \ldots n'_r, m')$. Suponhamos $f_i(n_1, \ldots\ldots n_r) \neq m$. Logo $f_i(n_1, \ldots\ldots n_r) = q$, $q \neq m$. Então $F'_i(n'_1, \ldots\ldots n'_r, q')$ e então $m'=q'$. Absurdo.

Terminamos a prova do Lema. Temos que $h_k(n)=0 \Longleftrightarrow f_k(n)=0 \Longleftrightarrow \phi(\alpha, n) = 0$. Dado que $\neg D$ é verdadeira sob a interpretação considerada, e $D \equiv \exists x \exists y\ (Zy \wedge F_k xy)$, temos que para todo par (d,d') em M $\neg\ (Z'(d') \wedge F'_k(d,d'))$, e particularmente para todo n, $\neg\,(Z'(0') \wedge$

$F'_k(n',0'))$ e consequentemente para todo n $\neg F'_k(n',0')$. Logo $f_k(n)=1$ para todo n, pela verdade da proposição *, e então $\phi(\alpha, n) = 1$, e consequentemente $\neg\exists n\, A(\alpha, n)$. Isto contradiz nossa suposição de que $\neg\neg\exists n\, A(\alpha, n)$ para todo α na expansão binaria. Consequentemente $C \wedge \neg D$ não satisfaz a interpretação que estamos considerando.

Observação 1 : Na prova do Lema temos usado o Axioma de Escolha. Consideremos a seguinte versão do Axioma onde h é uma função de $N \rightarrow N$: $AC_{n,h}$: $\forall n \exists m\ A(n,m) \rightarrow \exists h \forall n\ A(n,h(n))$. Se adoptamos uma interpretação platonista da quantificação sobre os números naturais, mas exigimos que toda função seja efetivamente calculável, então não é verdadeiro $AC_{n,h}$ no sentido intuicionista; pois de $\exists m\ A(n,m)$ não podemos encontrar o valor de h(n). Mas numa interpretação absolutamente platonista dos quantificadores $AC_{n,h}$ é verdadeiro, pois podemos definir h a través do principio do menor número. Assim:

$h(n) = \text{mín} \{ m \text{ tal que } A(n,m) \}$.

Quando interpretamos os quantificadores intuicionisticamente não podemos usar a mesma justificação, dado que o principio do menor número não vale geralmente. Mas $\forall n \exists m\ A(n,m)$ exprime, no sentido intuicionista, não sòmente que para cada n podemos encontrar um m para o qual podamos provar A(n,m), mas também que temos um procedimento efetivo (e podemos reconhecer-lo assim) que para cada n nos da um m. determinado. O consequente sòmente faz explícito o significado do antecedente, e consequentemente $AC_{n,h}$ é válido quando os quantificadores são interpretados intuicionisticamente.

Provaremos agora o seguinte Lema:

* Lema 4.5.3: Se $\vdash_{LQI} B$ então $\forall_{\alpha ab} \alpha \exists n\ A(\alpha, n)$.

Sabemos que $B \equiv \neg(C \wedge \neg D)$. Observamos que $C \wedge \neg D$ é equivalente a uma forma prenexa U. Pois dado que $C \equiv H \wedge E \wedge \forall x\ (Qx \vee \neg Qx)$ onde $H \equiv P \wedge G$ com $G \equiv \exists x\ Zx \wedge \forall x \exists y\ Sxy$, temos que C é uma conjunção de fórmulas prenexas. E dado que $D \equiv \exists x \exists y\ (Zy \wedge F_k xy)$ temos que $\neg D$ é equivalente a $\forall x \forall y \neg(Zy \wedge F_k xy)$, e consequentemente $C \wedge \neg D$ será uma conjunção de fórmulas prenexas, e uma conjunção de fórmulas prenexas de LQI pode transformar-se numa fórmula prenexa U de LQI fazendo todas as variáveis distintas. Pode mostrar-se que U tem a forma $\exists x \forall y \exists z \forall u_1 \ldots \forall u_s$

($Zx \wedge Syz \wedge W(u_1, \ldots\ldots u_s)$), e temos que B é equivalente a $\neg U$. Admitamos então que $\vdash_{LQI} B$. Então existe uma prova do sequente U: em L''. Dado que U é uma fórmula prenexa, e temos um teorema do tipo de Teorema de Herbrand para negações de fórmulas prenexas do cálculo de predicados (Ver Kreisel,[1958]), podemos encontrar uma prova de U que consiste numa prova de U': onde U' não contem quantificadores, e U': próva-se sòmente a través das regras da logica proposicional;seguida de uma prova de U: a partir de U':, a través sòmente das regras de introdução de quantificadores. U':terá a forma $U_1, \ldots\ldots U_q$: onde cada U_j $1 \leq j \leq q$ é uma instância de uma subsituição da parte de U livre de quantificadores obtida substituiendo variáveis livres por variáveis livres. Estas variáveis livres podem ser escolhidas das listas $b_1, \ldots b_q$ $c_1, \ldots\ldots c_q$, cada U_j tem a forma $Zb_j \wedge St_j c_j \; W_j$ para cada $1 \leq j \leq q$, onde t_j é b_i para algúm $i \leq j$ ou c_i para algúm $i < j$, e W_j é uma instância de uma substituição de $W(u_1, \ldots\ldots u_s)$. Dado que U': é demostrável, temos (usando as regras $\wedge$:, :$\neg$) uma prova em L'' da fórmula $\neg U'$, e consequentemente $\vdash_{LQI} \neg (U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_q)$, e dado que na verdade $\neg U'$ está livre de quantificadores, temos $\vdash_{LPI} \neg (U_1 \wedge U_2 \cdots \wedge U_q)$. Damos uma interpretação de $\neg U'$ sobre os números naturais.Assignemos 0 a cada variável b_i, e se assignamos n a t_i, assignemos n+1 a c_i. Logo t_1 pode ser sòmente b_1, t_2 pode ser $b_1=b_2=0$ ou $c_1=1$ e c_2 resultará 1 ou 2; t_3 pode ser $b_1=b_2=b_3=0$ ou 1, ou 2, e assim sucessivamente.

$t_1=0$	$c_1=1$	$b_1=0$
$t_2 \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$	$c_2 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$b_2=0$
$t_3 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$	$c_3 \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$b_3=0$

Escolhemos uma sequência α na expansão binária, e damos aos símbolos de predicado a interpretação intuitiva exposta imediatamente antes do Lema 4. 5. 2., interpretação que é relativa a α. Tendo feita a assignasão de números naturais a termos e variáveis, e tendo sido interpretados os símbolos de predicado do modo já indicado, tranformamos a fórmula $\sim U'$ na proposição $\sim U'*$. Dado que $\vdash_{LPI} U'$ devemos assignar a $\sim U'$ 1 na álgebra quociente de Lindembaum (por Soundness de LPI sobre as álgebra de Heyting) e conequentemente $\sim U'$ é equivalente em LPI com qualquer tautologia , e consequentemente $U'*$ é verdadeiro.

Vejamos o que acontece com cada instância substituitiva C_j, a parte livre de quantificadores de C contida como membro conjuntivo de U_j, sob a interpretação considerada acima. Sabemos que $C \equiv \exists x\ Zx \wedge \forall x \exists y\ Sxy \wedge P \wedge E \wedge \forall x\ (Qx \vee \sim Qx)$. Logo $C_j \equiv Zb_j \wedge S t_j c_j \wedge (Qa_i \vee \sim Qa_i) \wedge P_j \wedge E_j$, e feita a interpretação indicada acima C_j devem verdadeira. Dado que U é equivalente a $C \wedge \sim D$ e $\sim D \equiv \forall x \forall y \sim (Zx \wedge F_k xy)$ temos que $U_j \equiv C_j \wedge \sim D_j$ e conequentemente $\vdash_{LPI} ((C_1 \wedge \sim D_1) \wedge (C_2 \wedge \sim D_2) .... \wedge (C_q \wedge \sim D_q))$. Dado que $\sim U'$ é verdadeiro sob a interpretação e assignação de naturais e variáveis b_i, c_i, t_i, já considera termos que $\sim [((C_1 \wedge \sim D_1) \wedge (C_2 \wedge \sim D_2) \wedge \cdots \sim D_q))$ é verdadeira sob a interpretação e assignação dadas, e dado

cada
que C também é verdadeiro sob a mesma interpretação, temos que uma fórmula do tipo $\cap(\ \cap(Zs_1 \wedge F_k r_1 s_1) \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge \cap(Zs_q \wedge F_k r_q s_q))$ também é verdadeira, onde r_i e s_i são escolhidos da lista $b_1 \ldots b_q$, $c_1 \ldots c_q$. Seja n_i o número natural assignado a variável r_i. Temos que $h_k(n_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow f_k(n_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow F_k n_i s_i$ para $1 \leq i \leq q$. Logo não pode acontecer que $h_k(n_i) \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq q$, e dado que para cada n temos $h_k(n)=\emptyset \vee h_k(n) \neq \emptyset$, se infere que $h_k(n_i)=\emptyset$ para algum i, e consequentemente $\phi(\alpha, n_i)=\emptyset$, logo $\exists n A(\alpha, n)$. Dado que α é um elemento qualquer da expanão binária, temos que $\forall_{\alpha \in b} \alpha \ \exists n\ A(\alpha, n)$.

<u>Obervação 2:</u> Na prova do Lema 4. 5. 2. Temo assignado as letras de predicado que ocorrem na fómula $C \wedge \cap D$ uma interpretação qualquer. Na prova do Lema 4. 5. 3. Temos assignado a essas letras, a interpretação intuitiva exposta imediatamente antes da prova do Lema 4. 5. 2. Usando esta última interpretação, e considerando como dominio das variáveis a espécie N dos número naturais, próva-se a recíproca do Lema 4. 5. 2. Pois, consideramos a relação recursiva $A(\alpha, n)_{\alpha \in b}$ e a fórmula $B \equiv \neg(C \wedge \neg D)$ construída como a fizemos antes. Suponhamos que $\neg \exists n A(\alpha, n)$. Se B é inteiramente válida, B será verdadeira quando lhe assignemos a interpretação intuitiva. Dado que $\neg \exists n A(\alpha, n)$ teremos que $\forall n \neg A(\alpha, n)$, e conequentemente $\phi(\alpha, n)=1$, $\forall n$. Logo $f_k(n)=1\ \forall n$.

Então $D \equiv \exists x \exists y (Zy \wedge F_k xy)$ é falso sob a interpretação intuitivo que estamos considerando, e $\neg D$ será verdadeira intuicionificamente, e dado que C é verdadeira, teremos $C \wedge \neg D$ verdadeira e consequentemente $\neg\neg(C \wedge \neg D)$ verdadeira. Logo $\neg\neg \exists n A(\alpha, n)$.

Na verdade pode provar-se (Kreisel,[1962]) que a fórmula B do Teorema antecedente pode ser considerada uma fórmula negativa. Uma fórmula negativa é aquela formada a partir da negação de fórmulas atômicas sim fazer uso de $\vee$ ou de $\exists$. Pois próva-se o seguinte:

*Teorema 4.5.3. Se o fragmento negativo de LQI é internamente completo, então o esquema (10) vale para todo predicado recursivo P(n). Aquí daremos uma idea da prova. Os detalhes podem ver-se em Kreisel 1962, pág 143-149.

Como o fizemos no Teorema 4.5.1 intentamos encontrar para cada predicado recursivo P(n) uma fórmula negativa B' tal que se LQI é internamente completa para B' então $\neg\neg\exists n\, P(n) \rightarrow \exists n\, P(n)$. Para atingir este alvo consideraremos a função característica $\chi(n)$ associada a P(n). Raciocinando do mesmo modo que antes, dizemos que existe um sistema de equações E' que computa Herbrand-Gödel a $\chi(n)$. E' difiere de E por conter sòmente os símbolos de função $f_1, \ldots\ldots, f_k$ (o parámetro α para sequências de escolha não ocorre, e consequentemente não é necessário considerar f_0). Consideraremos P,G,H,D, como o fizemos antecedentemente, e uma fórmula E' que exprime E' de mesmo modo que E exprimía E .

Suponhamos que $\exists nP(n)$, isto é que $\chi(n) = 0$. Então $f_k(n) = 0$ é computable por E' .Se m é o numeral mais grande usado na derivação, e $G_m \equiv \exists x_0 \exists x_1 \ldots\ldots \exists x_m (Z\, x_0 \wedge S\, x_0 x_1 \wedge S\, x_{m-1}\, x_m)$, então $\vdash_{LQI} P \wedge G_m \wedge E' \supset D$, e consequentemente $\vdash_{LQI} C' \supset D$, pois $\vdash_{LQI} G \supset G_m$. Isto é se $\exists n\, P(n)$ então $\vdash_{LQI} C' \supset D$. Logo contraponendo e quantificando temos que se $\nvdash_{LQI} C' \supset D$ então $\forall n \neg P(n)$. Para cada fórmula K de LQI, seja K^- o resultado de adjuntar $\neg\neg$ a cada fórmula atômica de K, e seja K° o resultado de substituir cada parte de K da forma $\exists x\, R(x)$ por $\neg\forall x \neg R(x)$, e cada parte da forma $R \vee Q$ por $\neg(\neg R \wedge \neg Q)$. Demóstra-se (ver Kleene, [1974], cap XV,Teorema 60) que se $\vdash_{LQC} K$ então $\vdash_{LQI} K^{-\circ}$. Logo, se $\vdash_{LQI} K$ então $\vdash_{LQI} K^{-\circ}$. Logo se $\nvdash_{LQI} (C' \supset D)^{-\circ}$ então $\forall n \neg P(n)$.

Se ($C' \wedge \neg D$) fosse verdadeira para alguma interpretação, então por soundness de LQI teríamos $\nvdash_{LQI} (C' \supset D)$ e consequentemente $\forall n \neg P(n)$. Logo se $\neg\neg\exists n P(n)$ então ($C' \wedge \neg D$) será falsa para toda interpretação e consequentemente $\neg(C' \wedge \neg D)^{-\circ}$ será verdadeira para toda interpretação. A fórmula buscada B' é $\neg(C' \wedge \neg D)^{-\circ}$

6. Outro Teorema de limitação: a tese de church implica que o conjunto de fórmulas construtivamente válidas, não é recursivamente enumerável.

Um conjunto A chama-se recursivamente enumerável se e somente se A é vácuo, ou A é a imagem de uma função retursiva. Ou, exprimindo de outro modo, A é recursivamente enumerável se e somente pode dar-se uma numeração recursiva dos elementos de A. Intuitivamente se admitimos a Tese de Church, um conjunto A recursivamente enumerável é uma coleção de números naturais gerados através de um procedimento mecânico.

Lema 4.6 .1 : Um conjunto A é recursivamente numerável se e sòmente se A é exprimível na forma $(\exists y)\ R(x,y)$ onde R é uma relação recursiva. $R \subset N \times N$.

Demostração: Admitamos que A é recursivamente enumerável. Se A é vácuo , então A exprime-se na forma $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)\ (x \neq x \wedge y \neq y)$. Se A não é vácuo, então A é a imagem de uma função recursiva φ . Então A exprime-se na forma $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)\ (\underbrace{\varphi(y) = x}_{R(x,y)})$ com R(x,y) recursiva.

Recíprocamente, admitamos que $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)\ R(x,y)$, R recursiva. Se A é vácuo, entao A é recursivamente enumerável. Se A não é vácuo, seja k um elemento fixo de A. Definimos uma função Θ por

$$\Theta(z) = \begin{cases} k \text{ se } \neg R((z)_0, (z)_1) \\ \\ (z)_0 \text{ se } R((z)_0,(z)_1) \end{cases}$$

Por definição Θ é recursiva. Além disto A é a imagem de Θ . Pois $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)\ R(x,y)$. Tomemos $z = 2^x . 3^y$. Então $\Theta(z) = x$.

Consideremos dada uma numeração de Gödel para as fórmulas de

LQI. Podemos decidir dado um número natural x se este é o número de Gödel de um numeral, ou de uma letra de predicado. Logo pela Tese de Church o predicado IC(x) " x é o número de Gödel de um numeral" e o predicado PL (x) " x é o número de Gödel de una letra de predicado" são recursivos. Além disto como temos um número finito de axiomas o predicado Ax(x) " x é o número de Gödel de uma axioma de CQI" é recursivo. Consequentemente o predicado Pf(x,y) definido como " y é o número de Gödel de uma prova em CQI da fórmula com número de Gödel x " é recursivo.

Lema 4.6.2.

T_{CQI} o conjunto de números de Gödel dos teoremas de CQI é um conjunto recursivamente enumerável. Consequentemente todos os teoremas de CQI (e consequentemente de seu cálculo equivalente LQI) podem numerar-se recursivamente.

Demostração: $x \in T_{CQI}$ se e sòmente se $(\exists y)$ Pf(x,y) e Pf(x,y) é uma relação recursiva.

Definição 4.6.3 : Uma fórmula X é construtivamente válida se ela é verdadera sob toda interpretação dada em termos de funções construtivas e especies completamente definidas, isto é, especies em cuja definição não ocurrem parámetros para sequências de escolha.

Kreisel demostrou clásicamente que se admitimos a Tese de Church, então o conjunto de fórmulas construtivamente válidas não é recursivámente enumerável. Inferimos disto que existem fórmulas construtivamente válidas que não são demostráveis em CQI (ou em LQI). Pois se toda fórmula construtivamente válida fosse demostrável em CQI, dado que toda fórmula demostrável em CQI é internamente válida,e a fortiori construtivamente válida, teríamos que o conjunto de fórmulas demostráveis em CQI sería coincidente com o conjunto de fórmulas construtivamente válidas, e consequentemente este último conjunto sería recursivamente enumerável, em contraposição ao demostrado por Kreisel.

Podemos evitar a conclusão de que CQI é internamente incompleto rejeitando a Tese de Church (e consequentemente não inferiríase o resultado de Kreisel) ou admitindo que existem fórmulas construtivamente válidas que não são válidas sob interpretações mais gerais.

Embora até agora não tenha sido encontrada uma fórmula desse tipo, isto não implica que não existam. Das duas possibilidades, a mais razoável é discutir a Tese de Church.

A Tese de Church podería formular-se assim: toda função construtiva é recursiva. Na bibliografía usual as funções construtivas são chamadas funções dadas por uma lei (lawlike functions). Uma função dada por uma lei do tipo N -> N consiste numa lei que determina de modo efetivo um valor para cada argumento. Esta lei está dada numa forma tal, que ela é aplicavel a todo número, e nós podemos reconhecer esta aplicabilidade. Simbólicamente a Tese de Church exprimiría-se assim: f x y z (Txyz U(z)= f(y)) onde f é uma variável para funções dada por uma lei, x,y,z são variáveis que percorrem N, T é o predicado de Kleene. Para Troelstra [1977], temos duas razões para rejeitar a identificação construtivo = recursivo. i) Uma razão axiomática. A teória axiomática das sequências de escolha não depende dessa identificação, " therefore explicitly assuming recursiveness means carrying unnecessary information around " (Troelstra, [1977], pág 4-5). ii) Uma razão que Troelstra chama "filosófica". Todas as justificações conhecidas da Tese de Church dependem da análise conceptual de Turing que da razões convincentes para identificar " mecânicamente computável " com " recursivo ", mas nã para identificar " humanamente computável " com " recursivo".

A prova de Kreisel (Ver Van Dalen [1973]) é uma demonstraçào que usa argumentos clássicos não intuicionisticamente aceitáveis. Consequentemente não dá um argumento decisivo para rejeitar a completude de LQI, o teorema 4.5.1 da o argumento mais forte contra a completude de LQI.

7. <u>Árvores de Beth geralizadas</u>.

Temos visto que dispomos de uma prova da completude de LQI sobre as árvores de Beth, prova que não é intuicionisticamente aceitável. E temos visto que não existe possibilidade de melhorar esta situação. Por esta razão, intentou-se modificar a noção de árvore de Beth (Ver de Swart [1977]) para poder ter uma prova de completude intuicionisticamente aceitável.

A relação $\models$ entre os nodos de uma árvore de Beth $\langle G, R, \models P \rangle$ entre fórmulas atômicas de LQI e nodos de g, caracterizada pelas seguintes propriedades: para todos os nodos Γ e Δ da árvore $\langle g, r, f, p \rangle$ temos que as seguintes proposições são verdadeiras.

(i) $V(A,\Gamma)$ ou não $V(A,\Gamma)$, isto é, V é uma relação decidível.
(ii) Se $V(A,\Gamma)$ e $\Gamma R \Delta$ então $V(A,\Delta)$.
(iii) Não $V(\perp,\Gamma)$ onde $\perp$ é um símbolo do alfabeto de LQI que denota uma contradição.

Podemos definir então $\models$ do modo seguinte: $\Gamma \models A$, A atômica se e somente se existe uma barreira S de tal que para todo $\Delta \in S$, $V(A,\Delta)$. As árvores de Beth estão determinadas fundamentalmente por a relação V. Obtemos uma árvore de Beth geralizada quando substituimos a condição (iii) sobre a relação V acima, pela condição (iii) abaixo.
(iii') Se $V(\perp,\Gamma)$ então $V(A,\Gamma)$ para toda fórmula atômica A.
Esta modificação não é contra intuitiva desde que não afirmamos

categóricamente que para algúm nodo Γ, $V(\perp,\Gamma)$, a claúsula (iii$'$) é condicional.

Para as árvores de Beth geralizadas definimos $\Gamma \models A$ em função de V do modo indicado acima, e logo extendemos esta definição recursivamente para qualquer fórmula X e nodo Γ, como na seção 3 do capítulo 3. Mas não pode obter-se com esta definição de $\models$, para árvores de Beth geralizadas, um teorema de completude intuicionisticamente aceitável nas linhas expostas na seção 3 deste capítulo (Ver Dummett [1977] capítulo 5, seção 3). Esta situação levou a considerar árvores de Beth geralizadas onde estivesse definida uma relação entre nodos e fórmulas atômicas distinta da relação $\models$. Neste caso o intento era que a nova relação conservasse as seguintes quatro propriedades da relação $\models$ tal como ela resulta definida nas árvores de Beth geralizadas a partir da relação V:

i) Se $\Gamma \models \perp$ então $\Gamma \models X$ para qualquer fórmula X.

ii) Se $\Gamma \models X$ e $\Gamma R \Delta$ então $\Delta \models X$.

iii) Se S é uma barreira de Γ y para todo $\Delta \in S$, $\Delta \models X$ então $\Gamma \models X$.

iv) Se $\Gamma \models X$ então $\Gamma \tilde{\models} X$, onde $\tilde{\models}$ é a relação que resulta da restrição de V a sub-árvore consistente de todos os nodos Δ tais que $\Gamma R \Delta$.

As quatro proposições acima podem justificar-se intuitivamente: i) é a expressão da regra " ex falsum sequitur quodlibet ", ii) afirma que se podemos aseverar X num instante Γ, em todo instante posterior Δ também poderemos aseverar X, iii) afirma que se em qualquer instante possível posterior a podemos aseverar X, então em Γ poderemos aseverar X.

Uma relação proposta para substituir a relação , é a relação de quasi-verdade entre nodos e fórmulas X, denotada por ntr (X,Γ) definida assim:

(1) Se A é atômica então ntr (A,Γ) se é somente se $\{\Delta \mid V(A,\Delta)\}$ é uma barreira de Γ, ou para algúm Δ tal que $\Gamma R \Delta$, $V(\Delta,\perp)$.

(2) Se A e $B \wedge C$ então ntr (A,Γ) se é somente se ntr (B,Γ) e ntr (C,Γ).

(3) Se A e B C então ntr (A,Γ) se é somente se $\{\Delta$ / ntr (B,Δ) ou ntr $(C,\Delta)\}$ é barreira de Γ.

(4) Se A é B -> C então ntr (A,Γ) se é somente se para todo tal que $\Gamma R \Delta$, se ntr (B,Δ) então ntr (C,Δ).

(5) Se A e $\forall x\, B(x)$ então ntr (A,Γ) se é somente se para todo n, ntr $(B(n),\Gamma)$.

(6) Se A é $\exists x\, B(x)$ então ntr (A,Γ) se é somente se $\{\Delta$ tal que para algúm n, ntr $(B(n),\Delta)\}$ é barreira de Γ.

Díz -se que uma fórmula X é quase válida sobre uma árvore de Beth, se para todo nodo do mesmo se verifica que ntr(X,Γ). Demonstra-se intuicionisticamente (Ver Dummett [1977], cap. 5, seção 7) que se X é quase-válida sobre toda árvore de Beth, então $LQI \vdash X$. Este último resultado não é para nos suficiente para obter uma semântica (intuicionista) para a lógica intuicionista. A noção de quase-verdade não satisfaz a condição ii) da página anterior pois "se ntr(X,Γ) e $\Gamma R \Delta$, então ntr(X,Δ)" é falsa. Além disto a condição iii) " Se S é uma barreira de Γ e para todo $\Delta \in S$, ntr(X,Δ) então ntr(X,Δ) " não pode ser provada. É por estas carências que não pode assignar-se a ntr(X,Γ) a interpretação " no instante Γ podemos aseverar X ".

Conseqüentemente a interpretação semântica dada pelo modelo das árvores de Beth dotadas da relação de quase-verdade não pode ser correlacionada com a interpretação das constantes lógicas intuicionistas em termos de " ter uma prova de ...... ".

O intento de atingir uma prova de completude de LQI sobre os modelos internos que não dependa do princípio de Markov através da consideração da noção de quasi-verdade não tem exito. Pois para isto devería poder provar-se a proposição " Se X é internamente válida então X é válida sobre toda árvore de Beth geralizada ". Mas temos um contra exemplo ao Lema análogo ao 4.2.1. que é o Lema que permitiría uma prova da proposição antecedente. Se Υ é uma sequência de escolha livre pertencente a uma expansão s, e se para toda fórmula atômica A pussermos $A*(\Upsilon)$ equivalente a $\exists n$ ntr(A, (n)), então o Lema análogo ao 4.2.1. dirá que para toda fórmula X, $X*(\Upsilon)$ se é somente se $\exists n$ ntr (X, (n)).

Outra relação proposta para substituir a relação $\models$, é a relação de verdade amplia. Dizemos que uma árvore de Beth explode se para algúm nodo $\Gamma \in G$, $V(\perp, \Gamma)$. Defíne-se recursivamente que uma fórmula X é ampliamente válida num nodo Γ de uma árvore de Beth G, em símbolos ltr(X,Γ) se é somente se:

(1) X é atômica e G explode ou $S = \{\Delta$ tal que $V(X,\Delta)\}$ é barreira de Γ.
(2) X é $B \wedge C$ e ltr (B,Γ) e ltr (C,Γ).
(3) X é $B \vee C$ e $S = \{\Delta |$ tal que ltr(B,Δ) ou ltr$(C,\Delta)\}$ é barreira de

(4) X é $B \rightarrow C$ e para todo $\Gamma R \Delta$, se ltr(B,Δ) então ltr(C,Δ).
(5) X é $\forall x\, B(x)$ e para todo $n \in N$, ltr $(B(\bar{n}),\Gamma)$.
(6) X é $\forall x\, B(x)$ e S= $\{$tal que para algúm n, ltr $(B(\bar{n}),\Delta)$ é barreira de Γ.

Intuicionisticamente, o conceito de verdade amplia e tem a desvantagem, no caso de enunciados atômicos, de ser definido a partir de uma cláusula categórica (explode) que não pode ser traduzida em termos da " proof-interpretation" das constantes lógicas intuicionistas. Pois em instante nenhum, pode obter-se uma prova de $\perp$. Além disto, o conceito de verdade amplia não satisfaz as quatro propriedades da relação $\models$. Pois iii) " Se $S = \{\Delta$ tal que ltr(X,Δ) é barreira de Γ então ltr(X,Δ) " não pode provar-se. Pode dar-se um contra exemplo que mostra que provar iii) implicaría poder provar uma preposição da forma $\forall n \neg p(n) \vee \exists n\, p(n)$ (Ver Dummett, [1977], pág 280). Além disto iv) " se ltr (X,Γ) então $\text{lt}\tilde{r}$ (X,Γ) , onde $\text{lt}\tilde{r}$ defíne-se restringindo a relação V a árvore geralizada com origem X é intuicionistamente falsa. Ver um contra exemplo em Dummett, op.cit pág 279.

De modo análogo ao conceito de quasi-verdade, temos um teorema de completude sobre as árvores de Beth geralizadas dotadas da relação de verdade amplia. Dizemos que uma fórmula X é ampliamente válida sobre uma árvore de Beth, se para todo nodo Γ da árvore temos que ltr(X,Γ). Próva-se intuicionistamente que se X é ampliamente válida sobre toda árvore de Beth geralizada, então LQI $\vdash$ X. Mas a noção de verdade amplia não permite obter uma prova de completude que não dependa do princípio de Markov. Como antes, devería poder provar-se que se X é internamente válida, então X é ampliamente válida sobre toda árvore de Beth geralizada. Mas novamente temos um contra exemplo ao análogo do Lema 4.2.1 (Ver Dummett, op.cit, pág 282).

O alvo que devía ser atingido pelos conceitos de "quase-verdade" e "verdade ampl a" era a obtenção de uma prova (intuicionista) da completude de LQI sobre os modelos internos que não dependesse do princípio de Markov. É claro, dados os resultados da seção anterior, que não pode obter-se por argumentos puramente intuicionistas, um teorema de completude de LQI sobre os modelos internos, pois nesse caso teríamos uma prova intuicionista do princípio de Markov. Mas é pensável a possibilidade de que tal teorema dependa de um princípio (embora não admisível intuicionisticamente) mais fraco que Markov. O fato de ter provas intuicionisticamente aceptáveis das duas proposições " se X é quasi-válida (ampliamente válida) sobre toda árvore de Beth geralizada, então ", levou-nos a buscar uma prova de uma proposição análoga ao enunciado do Teorema 4.2.2 que dependesse de princípios mais fracos que Markov. Mas nos dois casos (quasi verdade e verdade amplia) temos contra exemplos aos Lemas análogos ao 4.2.1, lema que faz possível a demonstração do Teorema 4.2.2. É difícil pensar demonstrações de Teoremas do tipo 4.2.2. que não dependam de Lemas análogos ao 4.2.1. Pois estes permitiríam vincular efetivamente as noções de validade interna e quasi-validade (também validade amplia) sobre árvores de Beth, através de uma interpretação determinada das letras de predicado.

Outro conceito proposto para substituir a relação $\models$ é o conceito de verdade muito amplia de uma fórmula X num nodo Γ de uma árvore de Beth geralizada (vltr (X, Γ)). Define-se recursivamente assim:

(1) X é uma fórmula A atômica, então vltr (A,Γ) se é somente se $S = \{\Delta / V(A,\Delta)$ ou G explode$\}$ é uma barreira de .

(2) X é $B \wedge C$ e vltr(B,Γ) e vltr(C,Γ).

(3) X é $B \vee C$ e $S = \{\Delta /$ vltr(B,Δ) ou vltr$(C,\Delta)\}$ é uma barreira de Γ.

(4) X é $B \rightarrow C$ e para algúm Δ tal que $\Gamma R \Delta$, se vltr(B,Δ) então vltr(C,Δ).

(5) X é $\forall x B(x)$ e para todo n, vltr$(B(n),\Gamma)$.

(6) X é $x B(x)$ e $S=\{\Delta,$ tal que para algúm n, vltr$(B(n),\Delta)\}$ é barreira de Γ.

O conceito de verdade muito amplia tem a desvantagem de estar definido a partir da claúsula categórica "G explode ". Satisfaz as tres primeiras propriedades da relação $\models$ A quarta exprimida pela proposição " se vltr (X,Γ) então $\widetilde{\text{vltr}}$ (X,Γ) " não é satisfeita pelas mesmas razões que "se ltr(X,Γ) então ltr(X,Γ)" não é satisfeita. Diremos que X é muito ampliamente válida sobre uma árvore de Beth se para todo nodo temos vltr(X,). Como nos casos antecedentes próva-se que se X é ampliamente válida sobre árvores de Beth geralizadas, então $LQI \vdash X$(Ver Dummett, [1977] , pág 287).

O conceito de verdade muito ampl a tem sobre os conceitos de "verdade amplia" e "quasi-verdade" duas vantagens:

a) Podemos demonstrar um teorema análogo ao 4.2.2. para um ampl o fragmento de LQI. Isto é, próva-se que se X é uma fórmula de LQI que não contem $\perp$ (ou $\neg$), e X é internamente válida, então X é ampliamente válida sobre toda árvore de Beth geralizada. Esta prova é intuicionisticamente aceitável. Podemos então inferir que se X é uma fórmula nas condições antecedentes, então $LQI \models X$. Isto é, podemos obter uma prova intuicionisticamente aceitável da completude interna do fragmento de LQI livre da negação.

b) Também demonstra-se por argumentos intuicionistas (Ver Dummett, [1977], pág 289) que se X é válida sobre toda árvore de Beth geralizada, então X é muito ampliamente válida sobre toda árvore de Beth geralizada. A partir disto inferimos que se X é válida sobre toda árvore de Beth geralizada, então $LQI \vdash X$. Tínhamos visto que era impossível obter um teorema (intuicionista) da completude de LQI sobre as árvores de Beth geralizadas nas linhas expostas na seção 4 deste capítulo. Agora, através do conceito de verdade muito amplia, podemos obter um teorema intuicionista da completude de LQI sobre as árvores geralizadas de Beth.

Assim parece que as árvores de Beth geralizadas dão origem a uma semântica apropriada para a lógica intuicionista da primeira ordem, no sentido de que somente sobre eles pode dar-se uma prova de completude intuicionisticamente aceitável. Mas esta prova é aceitável no sentido de que ela não usa formas de inferência rejeitáveis intuicionisticamente (como a redução ao absurdo). Mas de uma prova intuicionista devemos exigir também que os conceitos que ocorrem nela também sejam intuicionisticamente aceitáveis. E temos visto que o conceito de verdade muito amplia por estar definido através da claúsula categórica " explode ", é intuicionisticamente objetável, pois não podemos admitir que num instante tenhamos uma prova da proposição absurda . Intuicionisticamente devemos exigir a correção material consistente em que os conceitos ocorrentes sejam intuicionisticamente aceitáveis. Se a correção formal fosse a única que devería ser exigida, daríamos uma interpretação formalista do intuicionismo, como um sub-sistema do sistema da lógica clássica.

NOTAS

(1) $B(\alpha) \rightarrow \exists n \quad B(\beta)$ é a forma mais simples do esquema de datos abertos, quando B não contem outro parámetro para uma sequência de escolha livre além de α. A justificação deste esquema está no fato de que em qualquer estadio da escolha dos termos de α, somente conhecemos um segmento inicial de α; consequentemente $B(\alpha)$ é também aseverada somente a partir de que $\alpha \in \bar{\alpha}(n)$. Logo B será também verdadeira para qualquer sequência β tal que $\beta \in \alpha(\bar{n})$.

Estamos interessados na generalização do esquema de datos abertos para o caso que b contenha outros parâmetros para sequências de escolha além de . Como geralização

$$* \; B(\alpha, \beta, \ldots) \rightarrow \exists n \underset{\gamma \in \bar{\alpha}(n)}{\forall \gamma} B(\gamma, \beta, \ldots)$$

não é correta. Pois tomamos $B(\alpha, \beta) \equiv (\alpha = \beta)$, então aplicando o esquema * resultará a proposição $\alpha = \beta \rightarrow \exists n \underset{\gamma \in \alpha(n)}{\forall \gamma} \gamma = \beta$ 'a que é claramente falsa.

Notação

$$\neq(\alpha, \beta_1, \ldots \beta_n) \equiv_{df.} (\alpha \neq \beta_1 \wedge \alpha \neq \beta_2 \wedge \ldots \alpha \neq \beta_n)$$

$$\forall \gamma \, B(\gamma, \beta_1, \ldots \beta_n) \equiv_{df} \forall \gamma (\neq(\gamma, \beta_1, \ldots \beta_n) \longrightarrow B(\gamma, \beta_1, \ldots \beta_n))$$

A geralização do esquema de datos abertos será

$$** \; B(\alpha, \beta_1 \ldots \beta_n) \wedge \neq(\gamma, \beta_1, \ldots \beta_n) \longrightarrow \exists n \underset{\gamma \in \bar{\alpha}(n)}{\forall \gamma} B(\gamma, \beta_1, \ldots \beta_n)$$

Identificamos as sequências de escolha com pontos de um espaço topológico com a propriedade de que dada uma sequência de escolha α, $\{\gamma / \gamma \in \bar{\alpha}(n)\}$ é um conjunto aberto. Observamos que se uma proposição asevera-se de uma sequência de escolha (um ponto do espaço) então, pelo esquema de datos abertos, ela também aseverá-se de uma vizinhança da mesma.

(2) Uma árvore com a propriedade de que todo nodo é seguido imediatamente por um número finito de caminhos (path) cháma-se um leque (fan). O Teorema do leque assevera que se todo caminho de um leque tem um número finito de nodos, então existe uma cota do número de nodos em todo caminho de um leque. Na linguagem das sequências de escolha podemos reformular o teorema assim: identificamos cada caminho do leque com uma sequência de escolha α, e cada nodo com uma sequência de escolha finita $\bar{\alpha}(n)$. Faremos uma exigência equivalente ao pedido de que todo caminho tenha um número finito de nodos. Suporemos que existe uma espécie de nodos R decidível, tal que cada caminho seja tal que exista um n com a propriedade de que $\bar{\alpha}(n) \in R$. Reformulamos o Teorema assim:

$$fan(s) \wedge \underset{\alpha \in s}{\forall \alpha} \exists n \, \bar{\alpha}(n) \in R \longrightarrow \exists p \underset{\alpha \in s}{\forall \alpha} \underset{n \leq p}{\exists n} \bar{\alpha}(n) \in R$$

Na prova deste teorema usá-se o Lema de Konig que não é intuicionisticamente admisível. Intuicionisticamente pode provar-se o Teorema do leque admitindo o princípio da Indução-barreira (Bar Induction) BI_D. BI_D asevera que se existe uma espécie R e uma espécie A tal que:

1. $\forall \vec{u} \; (\vec{u} \in R \vee \vec{u} \notin R)$
2. $\forall \alpha \exists n \; \bar{\alpha}(n)$
3. $\forall \vec{u} \; (\vec{u} \in R \longrightarrow \vec{u} \in A)$
4. $\forall \vec{u} \; (\forall k \; \vec{u}\,\hat{}\,k \in A \longrightarrow \vec{u} \in A)$

então a sequência vácua $\langle \; \rangle \in A$ (com $\vec{u}\,\hat{}\,k$ denotamos a sequência finita que resulta de acrescentar a sequência u com um termo novo k). BI_D é aceitado como axioma. Brouwer deu uma prova de BI que não é intuicionisticamente correta, mas ela é de um interesse muito grande porque ela reflete com plenitude a concepção intuicionista da conectiva $\rightarrow$. A prova de Brouwer apóia-se numa representação das provas possíveis dos antecedentes de BI_D e a partir dela da uma prova de $\langle \; \rangle \in A$, transformando cada prova dos

antecedentes de BI_D numa prova de $\langle\ \rangle \in A$.
Os detalhes podem ver-se em Dummett, [1977], capítulo 3.

CAPITULO V

A "PROOF-INTERPRETATION" DAS CONSTANTES LOGICAS INTUICIONISTAS

1. Possibilidade de obter provas canônicas.

A exposição a mais conhecida das constantes lógicas intuicionistas em termos de ter uma prova da preposição molecular onde eles ocorram como símbolo lógico principal, está em Heyting, [1956], pág. 96-97.

" Interpretations of the signs
The conjunction gives no difficulty: p∧q can be asserted if and only if both of p and q be asserted.
....
p∨q can be asserted if and only if at least one of the propositions p and q can be asserted.
The negation is the strong mathematical negation....... we remember that a mathematical proposition p always demands a construction with certain given properties; it can be asserted as soon as such a construction has been carried out. We say in this case that construction proves the proposition p and call it a proof of p. We also, for the sake of brevity, denote by p any construction which is intended by the proposition p. Then ¬p can be asserted if we possess a construction which from the suposition that a construction p were carried out, leads to a contradiction.
....
The implication p -> q can be asserted if and only if we possess a construction r, wich, joined to any construction proving p (suposing the latter be effected), would automatically effect a construction proving q ".

Com posterioridade Kreisel refinou esta caracterização acrescentando cláusulas condicionais. Para Kreisel, (ver Kreisel, [1965]) p -> q pode ser asseverada se estamos na possessão de uma construção r que transforma cada prova de p numa prova de q, e além disto temos uma prova deste fato.

A caracterização dos quantificadores intuicionistas segue as mesmas linhas. Uma prova de ∀x A(x) é uma construção que associa a cada objeto a (do dominio do discurso) uma prova p(a) de A(a) (mais uma verificação de que p satisfaz estas condições, no caso de adjuntar-como Kreisel- cláusulas segundas). Uma prova de ∃x A(x) é uma construção que escolhe um objeto a do dominio do discurso, e da uma prova de A(a). (Ver Sundholm, [1983]).

Outras variações da "proof-interpretation" foram propostas, como a de Kolmogorov (Kolmogorov, [1932]) e Van Dalen (Van Dalen, [1973]). Para os dethales ver Sundholm, [1983]. Em qualquer caso a exposição de Heyting ou a de Kreisel através do acréscimo de segundas cláusulas, são suficientemente abrangentes para os fins da discussão que a seguir empreenderemos.

Nos interessa determinar se esta caracterização das constantes lógicas intuicionistas faz sentido falando intuicionisticamente. Isto é, supondo que os quantificadores e conectivos que ocorrem nas cláusulas explicativas (definiens) são intuicionisticamente interpretados, queremos determinar se a explicação das constantes lógicas intuicionistas em termos de " ter uma prova de ....." é intuicionisticamente aceitável. Observamos duas coisas: i) A caracerização de Heyting dada acima supõe que sepamos qué coisa é uma prova de um enunciado atômico. Geralmente isto dependerá do tipo de discurso que estamos considerando. Se nossa linguagem é a linguagem da matemática intuicionista, uma prova de um enunciado atômico consistirá numa computação que verifique a igualdade de dois termos numéricos. Isto é o caso do enunciado atômico (3 + 2) = 3 + 2 + 2.3.2 ii) Existe uma circularidade no sentido que no definiens ocorrem as mesmas constantes lógicas que intentamos caracterizar. Poderíamos intentar esquivar esta dificuldade assim: admitamos ter uma comprensão implícita do uso intuicionista das constantes lógicas num fragmento da linguagem natural, e admitamos que nossa tarefa seja dar uma caracterização explícita do uso dessas constantes na linguagem da matemática intuicionista. Mas também neste caso não podemos esquivar totalmente a circularidade, desde que nas cláusulas que formam o definiens da proof-interpretation quantificamos sobre construções, que são objetos matemáticos (computações elementales ou compostos por elas).

A caracterização da contribuição das conectivas e dos quantificadores intuicionistas ao significado das expressões onde eles ocorrem, em termos prova parece também estar viciada de outro tipo de circularidade. Consideremos o caso do condicional intuicionista. Dadas duas proposições A e B não podemos caracterizar o condicional intuicionista como uma função dos valores de verdade de A e de B (função expressa através de uma tabela de verdade), pois essas não estão sempre determinados. O que deveríamos caracterizar é quando temos uma prova de A -> B. Para os intuicionistas uma prova de A -> B será uma construção que transforma cada prova de A numa prova de B. Mas esta definição é circular, se não pusermos um límite para as provas possíveis de A. Pois a definição sería impredicativa, dado que estaríamos quantificando sobre todas as possíveis provas de A nas que o próprio símbolo -> pode ocorrer, como parte do definiens, como acontece quando A foi obtida por Modus Ponens a partir de C e de C -> A. Se queremos esquivar esta circularidade da definição é necessário pôr como condição que o símbolo -> não ocorra numa prova de A.

Idêntica situação acontece na negação. Uma prova de ¬A consistirá numa construção que transforma cada prova de A numa prova de uma contradição. Se admitimos que nossa linguagem contenha numerais como constantes de individuo e que as únicas constantes de individuo sejam precisamente os numerais, então uma prova de A consistirá numa construção que transforma cada prova de A numa prova de 0 = 1. Mas A podería ter sido obtida a partir de B -> A e B, consequentemente novamente no definiens ocorrería a própria conectiva. Também a possível ocorrência numa prova do símbolo por definir acontece no caso da caracterização de uma prova de ∀x A(x). Uma prova de ∀x A(x) é desde um ponto de vista intuicionista, uma construção que para cada n da uma prova de A(n). Mas A(n) podería ter sido obtida a partir de ∀x A(x) através da regla de instanciação universal ou eliminação. Nestes casos estamos frente a outro tipo de circularidade. Não acontece aqui que usemos os mesmos símbolos lógicos por definir no discurso refente as construções que formam as provas, mas acontece que as provas mesmas contêm estes símbolos. Dado que o primeiro tipo de circularidade parecería poder ser esquivada (estamos aqui numa situação análoga a semântica de Tarski, onde para caracterizar o conceito de verdade lógica devémos supor uma compreensão intuitiva do que significa a verdade de um enunciado qualquer) investigaremos se o segundo tipo de circularidade pode ser esquivada.

Parece que na caracterização de A -> B, ¬A, ∀x A(x) devemos por uma cota as possíveis provas de A e de A(n) respectivamente, límite que está dado pela proibição de usar os símbolos por definir nas respectivas provas, isto é, nos respectivos definiens. Mas precisamos uma restrição mais forte. No caso do condicional, uma prova de A podería ter sido obtida a partir de C e ¬C através da regra ex falsum sequitur quodlibet, mas também a partir de C e de ¬C poderíamos ter obtido B sim que tivesse sido necessário aplicar uma construção especial a uma possível prova de A para obter uma prova de B; é suficiente repetir os mesmos passos que levaram a uma prova de A. Parece pois necessária uma limitação mais forte: pediremos que as provas de A e de A(n) no caso do condicional A -> B, da negação ¬A e da quantificação universal ∀x A(x) tenham a propriedade de que toda conectiva ou quantificador que ocorram nelas também ocorram em A ou em A(n), evitando assim o uso de regras de eliminação de conectivas e quantificadores.

Analisaremos as limitações na forma das provas que caracterizam a noção de " ter uma prova de ....." numa forma mais cuidadosa. Para fixar ideias consideremos A -> B quando A é uma proposição atômica. Sabemos quando temos uma prova de A -> B: quando cada prova de A pode ser transformada numa prova de B através de uma construção. Suponhamos que A seja uma proposição atômica do tipo 3+2 = 5. Uma prova de A não podería obter-se a partir de um processo onde ocorram eliminações de conectivas e quantificadores, se queremos caracterisar A -> B sim circularidade. Também é necessária a restrição semântica de que a prova de A não tenha apoio em noções fora do âmbito da aritmética elemental. Além disto, podemos dizer que a exigência de uma construção que transforme cada prova de A numa prova de B é ambigua: pode significar que a construção dependa de cada prova particular de A que demos, ou que seja uniforme, no sentido que dependa de características que todas as provas de A compartem. Mas se escolhemos esta última possibilidade, enfrentamos a seguinte dificuldade: Os intuicionistas têm negado a possibilidade de formalizar completamente qualquer teoría matemática, por ter reconhecido a impredizível variedadedos argumentos que a matemática usa, e a imposibilidade de circunscrever a priori o tipo de razoamento que será usado.

Fica aberta a outra possibilidade, isto é, que a construção que transforma cada prova de A numa prova de B (ou de 1=0 se estamos analisando o significado de A) dependa da prova particular dada de A. Mas neste caso teríamos que reformular o significado da expressão " ter uma prova de A -> B ". Diremos então que temos uma prova de A -> B quando para cada prova particular dada de A, existe uma construção - que depende da prova dada - que transforma essa construção numa prova de B. Debilitando assim o significado de A -> B, e retendo as restrições a complexidade de uma possível prova de A, evitamos a circularidade. (1).

Analisemos agora as expressões que contêm um quantificador universal. Podemos afirmar $\forall x\ A(x)$ sempre que para cada n podemos provar A(n). Na aritmética intuicionista (informal), fazemos uso do princípio de indução completa: $(A(0) \wedge \forall n\ A(n) \rightarrow A(n+1)) \rightarrow \forall n\ A(n)$. Dadas provas de $A(0) \wedge \forall n\ (A(n) \rightarrow A(n+1))$ deve então existir uma construção que para cada n permita provar A(n). Esta construção depende do n particular escolhido. Quando n=1 aplicamos Modus Ponens a A(0) e A(0) -> A(1) obtendo assim A(1), quando n=2 aplicamos Modus Ponens a A(1) e A(1) -> A(2) e obtemos assim A(2), e assim sucessivamente. Como o comprimento da prova depende de n, esta não é uniforme. Mas a prova intuicionista da indução matemática apresenta o seguinte problema: tínhamos pedido que a complexidade de A(n) de um límite para todos seus possíveis provas. Mas no caso do princípio de indução a prova de A(n) apoia-se na regra de -> eliminação para obter A(n) a partir de A(n-1) e de A(n-1) -> A(n) e $\forall$ eliminação para obter A(n-1) -> A(n). Consequentemente se A(n) fosse atômica, nossa exigência de que em toda prova de A(n) somente ocorram os conectivos e quantificadores que ocorrem em A(n) teria sido violada.

Toda a tarefa de construir uma caracterização semântica dos conectivos e quantificadores intuicionistas, em termos da noção de " ter uma prova de ....." sim que esta caracterização seja circular é muito difícil. Tínhamos visto que na definição das conectivas ->, $\neg$, e do quantificador $\forall$ em A -> B, $\neg$ A, e $\forall x\ A(x)$, propusemos - para esquivar a circularidade na definição " ter uma prova de ..." - que toda conectiva ou quantificador que ocorresse nas provas de A ou de A(n), ocorra também em A ou em A(n). No caso de que A e A(n) fossem atômicas, esta exigência impede que A ou A(n) tenham sido obtidas através de -> eliminação (por Modus Ponens) ou através de $\forall$- (por exemplificação universal) respectivamente. Podemos geralizar esta exigência assim: sejam A ou A(n) fórmulas atômicas quaisquer. Pediremos que toda fórmula que ocorra numa prova de A ou de A(n) seja uma sub-fórmula de A ou de A(n) respectivamente. "Subfórmula" deve ser entendido assim: toda sub-fórmula é uma sub-fórmula de ela mesma; se $\neg$ A é uma sub-fórmula de C, também A é uma sub-fórmula de C; se A -> B, A $\vee$ B, ou A $\wedge$ B são sub-fórmula de C, também A e B são sub-fórmulas de C; se $\forall x\ A(x)$ e $\exists x\ A(x)$ são sub-fórmulas de C, também A(t) é uma sub-fórmula de C para qualquer termo t.

Vejamos se podemos formalizar as exigências propostas acima numa linguagem de primeira ordem. Consideraremos o cálculo L do capítulo IV que usa uma noção ampliada de sequente. Um sequente $\Gamma : C$ será um par ordenado $\langle \Gamma, C \rangle$ tal que Γ é um conjunto finito de fórmulas, e C é uma fórmula ou o conjunto vácuo. Conservamos as regras de introdução do cálculo N do capítulo IV, mas substituimos as regras de eliminação por regras de introdução de símbolos lógicos a esquerda. Também acrescentamos uma regra de atenuação a direita quando o sucedente é vácuo. Denotamos por " :V " a regra de introdução de V a direita, e por " V : " a regra de introdução de V a esquerda. L tem a vantagem sobre N de ter a propriedade da sub-fórmula: em toda prova em L de um sequente Γ:A toda fórmula que ocorre num sequente pertencente a prova, deve ser uma sub-fórmula de A ou uma sub-fórmula de alguma das fórmulas de Γ. Intentamos saber se L exprime a lógica intuicionista. De fato o faz tão bem como N, pois próva-se como já temos visto que $\Gamma \vdash_N A$ see $\Gamma \vdash_L A$.

Aparentemente L tem a vantagem de fazer inteligível uma definição dos símbolos lógicos intuicionistas em termos de " ter uma prova de ......". Pois consideremos a expresão A -> B. Procuramos uma caracterização inteligível de " ter uma prova de A -> B ", para ter uma representação da contribuição de conectiva -> ao significado da expresão A -> B. Suponhamos que A seja formalizável na lógica intuicionista de primeira ordem através de uma fórmula A' . E suponhamos ter uma prova de A através de argumentos pertencentes somente a lógica intuicionista de primeira ordem. Logo $\vdash_N A'$ e então $\vdash_L A'$. Isto é, existe uma prova de : A' (e consequentemente de A) livre das regras de eliminação de conectivas e quantificadores. Considerações semelhantes podem ser aplicadas as expressões que contêm os restantes conectivos e quantificadores. Será isto suficiente para ter uma caracterização dos símbolos lógicos livre de circularidade?. Não, aparentemente. Pois, na caracterização de Heyting, no definiens, consideramos <u>toda</u> prova de A (não uma prova particular). Estaríamos mais perto de atingir nosso alvo, se toda prova de A (ou de A(n)) podesse levar-se a uma forma canônica livre de regras de eliminação de símbolos lógicos, e seria muito melhor, se essa forma canônica fosse única para cada prova. Mas ainda precisaríamos mais alguma coisa. Que acontece no caso que A contenha símbolos de operações aritméticas, ou seja obtida através de argumentos pertencentes a aritmética intuicionista? Neste caso precisaríamos também um teorema que permita transformar toda prova de A numa prova canônica. Analisamos esta situação porque a caracterização intuitiva da contribuição significativa dos símbolos lógicos intuicionistas em termos de " ter uma prova de .... ", considera o caso geral onde A ou A(n) são expressões da aritmética intuicionista informal, e fazemos referência a provas (na aritmética informal) de A ou de A(n). No caso que A contenha símbolos de operações aritméticas, mas seja provado somente através de regras e axiomas lógicos, também teremos que $\vdash A$, $\vdash_N A$ e $\vdash_L A$. Surge uma dificuldade muito grande, se supomos que A foi demonstrado usando argumentos que apoiam-se sobre principios próprios da aritmética intuicionista ,a seguir veremos isto.

Suponhamos que a=b fosse demonstrável nesse formalismo. Logo teremos uma prova de a=b, sim regras de eliminação de conectivas e quantificadores. Mas não pode existir uma prova de 0 = 1 deste tipo. Logo 0 = 1 sería indemonstrável neste formalismo, e consequentemente teríamos demonstrado a consistência da aritmética intuicionista, o que é impossível.

Então não podemos supor que o teorema de eliminação da regra de corte (que serve para demonstrar a equivalência dos cálculos N e L) seja verdadeiro para extensões da lógica de predicados. A operação de eliminação do corte consiste em empurrar o corte acima, até que ele desaparece. Devemos mostrar que este procedimento pode ser realizado sobre toda regra, e sobre todo sequente básico que ocorra na prova. Se introduzimos novos tipos de sequentes básicos, ou adjuntamos novas regras de inferência, por exemplo, o princípio de indução no caso da aritmética intuicionista, então temos que verificar a possibilidade de eliminar o corte sobre todas estas regras e sequentes novos. Para a aritmética formalizada do modo ordinário, não é verdadeira a regra de corte, como foi provado por Gentzen. Logo se procuramos uma caracterização de A -> B, onde A e B são proposições da aritmética intuicionista (informal) em termos de " ter uma prova de ....", não podemos afirmar que exista uma prova de A que não use regras de eliminação. Esta é uma limitação para construir uma teoría semântica intuitiva em termos de " ter uma prova de... ".

A partir de agora consideraremos o caso em que A e B são fórmulas exprimíveis na linguagem da lógica intuicionista de primeira ordem, e demonstráveis por argumentos pertencentes a lógica de predicados intuicionista. Temos visto que se podemos domonstrar A então temos $\vdash_L$ A, isto é, existe uma prova de A que não usa regras de eliminação de conectivos e quantificadores, e tal que toda fórmula que ocorra nesta prova é uma sub-fórmula de A. Mas nossa caracterização de A -> B, $\neg$ A, $\forall$x A(x), em termos de " ter uma prova de...", fez uso da expressão " toda prova de A ou de A(n) ". Então não é suficiente que exista uma prova de A livre de eliminação de conectivas e quantificadores, o que é desejável, é um resultado mais forte: que cada prova de A possa ser transformada numa prova de A livre de regras de eliminação, prova que chamaremos normal, ou canônica. Se além disto, esta forma normal é única para cada prova de A, poderemos definir as conectivas e quantificadores em termos dessas formas normais. Pois poderemos introduzir sobre o conjunto de provas de A a seguinte relação de equivalência: diremos que duas derivações Π e Π' de A são equivalentes se as duas têm a mesma forma normal. Logo para definir A -> B em termos de " ter uma prova de ......" diremos o seguinte: temos uma prova de A -> B quando podemos transformar uma prova de A em forma canônica numa prova de B. Nesse caso podemos transformar toda prova de A numa prova de B, pois a cada prova de A a transformamos numa prova normal ou canônica e logo transformamos esta prova normal numa prova de B. Definindo A -> B (o mesmo acontece para $\neg$ A, $\forall$x A(x)) em termos de provas em forma normal, temos a vantagem de estar livres de circularidade, pois a prova de A em forma normal está livre de eliminação de conectivos e quantificadores.

Podemos obter provas na forma normal operando diretamente sobre o cálculo N do capítulo 4 evitando o rodeio através de L. Vamos a definir quatro tipos de reduções. Diremos que uma prova em N de um sequente $\Gamma : \Delta$ está na forma normal, se nenhuma redução de algum dos quatro tipos pode ser-lhe aplicada. Um teorema de _forma normal_ dirá que todo sequente provável em N pode ser derivado em N através de uma prova em forma normal. Um _teorema de normalização_ dirá que toda prova de $\Gamma : \Delta$ pode ser levada a uma prova de $\Gamma : \Delta$ em forma normal através de uma sequência apropiada de passos reductivos. Um _teorema forte de normalização_ dirá que toda sequência de passos redutivos aplicados a uma prova dada de $\Gamma : \Delta$ termina numa prova de $\Gamma : \Delta$ em forma normal, e a forma normal corresponde a cada prova é única.

O primeiro tipo de reduções chama-se <u>reduções próprias</u>. Sua função é eliminar sequentes maximais. Um sequente chama-se maximal quando ocorre como a conclusão de uma regra de introdução, e ao mesmo tempo como premissa maior de uma regra de eliminação da mesma conectiva (a premissa maior contem a constante lógica que deve ser eliminada). O resultado da redução será uma sub-prova cuja conclusão é um sequente cujo sucedente coincide com o sucedente do sequente que é conclusão da prova original, e cujo antecedente está contido no antecedente da conclusão da prova original.

O passo redutivo distingue-se por casos dependendo das constantes lógicas envolvidas:

($\wedge$)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma : A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Delta : B\end{matrix}}{\Gamma, \Delta : A \wedge B}\,\wedge^{+}}{\Gamma, \Delta : A}\,\wedge^{-}$$

reduze-se a $\Gamma : A$

Se usamos a regra $\wedge^-$ para obter a conclusão $\Gamma, \Delta : B$, a redução é semelhante.

($\vee$)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma : A\end{matrix}}{\Gamma : A \vee B}\,\vee^{+} \qquad \begin{matrix}A : A \\ \vdots \\ A, \Delta : C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B, \Theta : C\end{matrix}}{\Gamma, \Delta, \Theta : C}\,\vee^{-}$$

reduze-se a

$$\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma : A \\ \vdots \\ \Gamma, \Delta : C\end{matrix}$$

o sequente A:A deve ter ocorrido (num ou mais lugares) acima da premissa menor. A idéia é obter o efeito de um corte substituindo o sequente básico $A:A$ por $\Gamma:A$ e sua prova, obtendo assim uma prova de Γ,Δ: C. Também operamos assim quando a premissa maior Γ: $A \vee B$, é obtida a partir de Γ: B através de $\vee^{+}$

($\to$)

$$\dfrac{\Gamma : A \qquad \dfrac{\begin{array}{c} A : A \\ \vdots \\ A, \Delta : B \end{array}}{\Delta : A \to B}\ \to^{+}}{\Gamma, \Delta : B}\ \to^{-}$$

reduze-se a

$$\begin{array}{c} \Gamma : A \\ \vdots \\ \Gamma, \Delta : B \end{array}$$

($\neg$)

$$\dfrac{\Gamma : A \qquad \dfrac{\begin{array}{c} A : A \\ \vdots \\ A, \Delta : B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A : A \\ \vdots \\ A, \Theta : \neg B \end{array}}{\Delta, \Theta : \neg A}\ \neg^{+}}{\Gamma, \Delta, \Theta : C}\ \neg^{-}$$

reduze-se a

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma : A \\ \vdots \\ \Gamma, \Delta : B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma : A \\ \vdots \\ \Gamma, \Theta : \neg B \end{array}}{\Gamma, \Delta\ \Theta : C}\ \neg^{-}$$

($\forall$)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A(y)}{\Gamma : \forall x A(x)}\ \forall^{+}}{\Gamma : A(t)}\ \forall^{-}$$

reduze-se

$$\Gamma : A(t)$$

Y não ocorre livre em Γ e é substituida em toda a prova de Γ : A(y) por t, onde t é livre para x em A(x).

(∃)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A(t)}{\Gamma : \exists x A(x)}\,\exists^{+} \qquad \begin{matrix} A(y) : A(y) \\ \vdots \\ A(y), \Delta : C \end{matrix}}{\Gamma, \Delta : C}\,\exists^{-}$$

reduze-se a

$$\Gamma : A(t)$$

$$\Gamma, \Delta : C$$

Toda ocorrência livre de y na prova de $A(y), \Delta : C$ é substituida por o termo t; e o sequente básico $A(y) : A(y)$ é substituido por $\Gamma : A(t)$ e sua prova; isto não afeta Δ ou C que não contêm y livre.

O segundo tipo de reduções é o tipo das <u>reduções permutativas</u>. Uma redução permutativa é possivel quando a conclusão de uma aplicação das regras $\vee^-$, $\exists^-$ é a premissa maior de uma regra de eliminação. Assim

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad A, \Delta : C \qquad B, \Theta : C}{\Gamma, \Delta, \Theta : C}\,\vee^- \qquad \Lambda : D}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}\,R$$

reduze-se a

$$\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad \dfrac{A, \Delta : C \qquad \Lambda : D}{A, \Delta, \Lambda : E}\,R \qquad \dfrac{B, \Theta : C \qquad \Lambda : D}{B, \Theta, \Lambda : E}\,R}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}$$

No caso da regra $\exists^-$ a forma geral é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : \exists x A(x) \qquad A(y), \Delta : C}{\Gamma, \Delta : C}\,\exists^- \qquad \Theta : D}{\Gamma, \Delta, \Theta : E}\,R$$

que é reduzida a

$$\dfrac{\Gamma : \exists x A(x) \qquad \dfrac{A(y), \Delta : C \qquad \Theta : D}{A(y), \Delta, \Theta : E}\,R}{\Gamma, \Delta, \Theta : E}$$

As reduções permutativas seguidas de reduções próprias eliminam <u>segmentos maximais</u>. Introduzimos a noção de segmento assim: observemos que a conclusão de uma aplicação de uma regra $\vee^-$, ou de uma regra $\exists^-$ tem o mesmo sucedente que as premissa (s) menor (es). Consideremos um sequente que não seja ele mesmo a conclusão de uma regra $\vee^-$ ou de uma regra $\exists^-$, mas que seja a premissa menor de uma aplicação destas regras. Sua conclusão pode ser novamente a premissa menor de uma ou outra das duas regras, $\vee^-$, $\exists^-$. Se seguimos descendendo pelo caminho da árvore de prova, e detemos nossa marcha quando chegamos a um sequente que não seja a premissa menor de uma aplicação das regras $\vee^-$, $\exists^-$, teremos uma parte do caminho onde todos os sucedentes são iguais. A sequência Γ_1:A,.......... Γ_n:A de sequentes assim obtida, chama-se um segmento. Se além disto Γ_1: A é a conclusão de uma regra de introdução e Γ_n: A é a premissa maior de uma regra de eliminação da mesma conectiva, o segmento é chamado maximal. Vejamos que efetivamente as reduções permutativas seguidas de uma redução própria eliminam segmentos maximais. Seja Γ_1: F,.......... Γ_n: F um segmento maximal. Γ_n : F é a premissa maior de uma regra de eliminação R, mas além disto é a conclusão de $\vee^-$ ou de $\exists^-$, sendo Γ_{n-1}: F a premissa menor da aplicação de uma destas duas últimas regras. Para fixar idéias, suponhamos que Γ_n : F seja a conclusão de $\vee^-$. A situação é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad \overbrace{A, \Delta}^{\Gamma_{n-1}} : F \qquad B, \Theta : F}{\Gamma, \Delta, \Theta : F} \qquad \Lambda : D}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}\,R$$

Através de uma redução permutativa passamos a

$$\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad \dfrac{A, \Delta : F \qquad \Lambda : D}{A, \Delta, \Lambda : E}\,R \qquad \dfrac{B, \Theta : F \qquad \Lambda : D}{B, \Theta, \Lambda : E}\,R}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}$$

Pela sua vez Γ_{n-1}: F é a conclusão de $\vee^-$ ou de $\exists^-$ e premissa maior de R, consequentemente podemos aplicar a esta prova uma nova redução permutativa. Iterando este processo chegaremos a uma prova onde Γ_1 : F, seja a premissa maior de R e também conclusão de R. Então aplicando uma redução própria o segmento maximal desparece.

O terceiro tipo de reduções é o tipo das simplificações imediatas. Estas eliminam aplicações redundantes de $\vee^-$ ou de $\exists^-$ que ocorrem quando o antecedente da conclusão contem totalmente o antecedente de uma das premissas menores. Por exemplo, se a premissa maior de uma regra V é Γ : A$\vee$B, e uma das premissas menores é Δ : C, a aplicação de $\vee^-$ é superflua e pode ser eliminada.

O quarto tipo de reduções é o tipo das reduções $\neg^-$, elas baixam o grau do sucedente da conclusão de uma aplicação de $\neg$. Assim se temos a situação

$$\frac{\Gamma : A \qquad \Delta : \neg A}{\Gamma, \Delta : B \wedge C}\ \neg^-$$

reduze-se a

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : \neg A}{\Gamma, \Delta : B} \qquad \dfrac{\Gamma : A \qquad \Delta : \neg A}{\Gamma, \Delta : C}\ \neg^-}{\Gamma, \Delta : B \wedge C}\ \wedge^+$$

Iterando este processo obtemos uma prova tal que o sucedente da conclusão de uma aplicação qualquer de $\neg^-$ seja atômico. Mais uma definição: dizemos que um sequente maximal é um segmento maximal de comprimento 1. Uma prova na forma normal será uma prova onde: 1) os segmentos maximais têm sido eliminados, 2) não existem aplicações superfluas de $\vee^-$ ou de $\exists^-$, 3) o sucedente da conclusão de toda aplicação de $\neg^-$ é atômico.

* Teorema 5.1.3: Toda prova em N de um sequente Γ : A pode transformar-se numa prova em forma normal em N do sequente Δ : A onde Δ está contido em Γ. (Teorema de normalização).

Demonstração: Cada passo redutivo transforma uma prova em N de Γ : A numa prova do sequente Θ: A, $\Theta \subseteq \Gamma$. Demonstraremos que pode encontrar-se uma sequência finita de passos redutivos tais que sua aplicação sucessiva transformam a prova de Γ : A numa prova de Δ : A, Δ contido em Γ, com a propriedade de que nenhuma redução de algúm dos quatro tipos acima expostos, pode ser-lhe aplicada. Primeiramente provaremos o teorema de normalização para reduções próprias e permutativas. A extensão aos outros dois tipos de reduções é fácil. Provaremos então que podemos chegar a uma prova de Δ: A, tal que nenhuma redução própria ou permutativa possa ser-lhe aplicada. Definimos o grau d de um segmento maximal como o número de constantes lógicas que ocorrem na fórmula que é o sucedente comum. Fazemos a prova por indução sobre o par (d,1) onde d é o maior de todos os graus dos segmentos maximais que ocorrem na prova dada, e ℓ é a suma dos comprimentos dos segmentos maximais de grau d. Dizemos que (d,ℓ) é menor que (d',ℓ') se $d<d'$ ou $d=d$ $\ell<\ell'$. Escolhemos um segmento maximal de grau d tal que nenhum segmento maximal de grau d ocorra acima de ele mesmo na árvore de prova, e tal que a regra de eliminação que tem como premissa maior o último sequente do segmento não tenha como premissa menor um sequente $\Lambda : D$ que pertença ou esteja debaixo de outro segmento maximal de grau d. Se o segmento escolhido deste modo, é um sequente maximal, aplicando uma redução própria ou reduzimos d ou baixamos ℓ a $\ell-1$. Pois ao aplicar o passo redutivo desaparece o sequente maximal. Se este é o único segmento maximal na prova de grau d, então reduzimos o grau de d, se existem outros segmentos maximais de grau d, baixamos ℓ a $\ell - 1$. Se o comprimento do segmento escolhido é maior que 1 então aplicamos uma redução permutativa. Pelas condições de escolha do segmento reduzimos ℓ. Para ilustrar esta última afirmação chamamos R a regra de eliminação que tem como premissa maior ao último sequente $\Gamma_n : F$ do segmento, e suponhamos que $\Gamma_n : F$ tenha sido obtido a partir de $\vee^-$. A situação é a seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad A, \Delta : F \qquad B, \Theta : F}{\Gamma, \Delta, \Theta : F} \qquad \Lambda : D}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}\, R$$

reduze-se a

$$\dfrac{\Gamma : A \vee B \qquad \dfrac{A, \Delta : F \qquad \Lambda : D}{A, \Delta, \Lambda : E}\, R \qquad \dfrac{B, \Theta : F \qquad \Lambda : D}{B, \Theta, \Lambda : E}\, R}{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda : E}\, \vee$$

Dado que $\wedge$: D não é parte de nenhum segmento maximal de comprimento d, então baixamos l em i; se $\wedge$: D fosse parte de algúm segmento maximal de comprimento d no caso que R fosse $\vee$ ou $\exists$ estaríamos acrescentando o comprimento desse segmento em i e consequentemente tendo sido aplicado todo o processo redutivo fica l invariante. Logo aplicando a hipótese indutiva infiére-se o resultado para reduções permutativas e próprias.

Suponhamos ter chegado a uma prova de Δ:A tal que nenhuma redução própria ou permutativa lhe pode ser aplicada. Efetuamos as reduções e as simplificações imediatas. Este processo é finito, e consequentemente tem um termo. Chegamos a uma prova normal de Δ:A.

<u>Corolario 5.1.4:</u> Todo sequente provável em N pode ser derivado através de uma prova em forma normal (Teorema de forma normal).

Demonstração: Seja uma prova de Γ:A em N. Pelo Teorema anterior obtemos uma prova em N em forma normal de Δ : A onde Δ está contido em Γ. Aplicando agora atenuação obtemos uma prova em forma normal de Γ : A.

Demonstra-se usando um processo indutivo mais complexo um teorema de normalização forte que diz que <u>toda</u> sequência de passos redutivos aplicados a uma prova de Γ:A permite obter uma prova de Δ : A, $\Delta \subseteq \Gamma$ em forma normal. Demonstra-se (isto é, o interessante para nossa discussão da proof-interpretation) que as provas em forma normal possuem a propriedade da sub-fórmula: qualquer fórmula que ocorre na derivação de um sequente Γ: A é uma sub-fórmula de A ou de alguma fórmula de Γ (Ver Prawitz, [1965], cap 4).

Não podemos extender este resultado ao caso da aritmética intuicionista formal ou aritmética de Heyting (HA). Neste formalismo encontramos a regra de indução

$$\frac{\Gamma : A(0) \qquad \Delta, A(a) : A(a')}{\Gamma, \Delta : A(\tau)}$$

Esta regra pode reformular-se como uma regra de introdução para $\forall$

$$\frac{\Gamma : A(0) \qquad \Delta, A(a) : A(a')}{\Gamma, \Delta : \forall x\, A(x)}$$

E quando uma aplicação de $\forall^+$ (formulada na forma imediatamente exposta acima) e seguida por uma aplicação de $\forall^-$ onde t é um numeral, temos a situação seguinte

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : A(0) \qquad \Delta, A(a) : A(a')}{\Gamma, \Delta : \forall x A(x)}\ \forall^+}{\Gamma, \Delta : A(t)}\ \forall^-.$$

Se t é a' a inferência anterior pode ser transformada em

$$\dfrac{\Gamma : A(0) \qquad \dfrac{\Delta, A(0) : A(a')}{\Delta : A(0) \supset A(a')}\ \to^+}{\Gamma, \Delta : A(a')}\ \to^-$$

com $A(0) : A(0)$ acima de $\Delta, A(0) : A(a')$.

que reduze-se a

$$\dfrac{\Gamma : A(0)}{\Gamma, \Delta : A(a')}$$

eliminándose assim o sequente maximal Γ, Δ : A(x). Mas se t não é um numeral, a redução antecedente não pode efecturar-se e o sequente maximal Γ, Δ: A(x) deve eliminar-se de outro modo.

Gentzen provou para a aritmética de Peano que toda prova de um sequente Γ : A com A atômica reduze-se a forma normal. O resultado extende-se a aritmética intuicionista. A prova usa argumentos finitistas ampliados através da introdução da indução até ε_0. Por forma normal entendemos, no caso da aritmética intuicionista, a mesma forma exposta antecedentemente, isto é, não passível de ulteriores reduções próprias ou permutativas, simplificações imediatas e reduções $\neg^-$. A aceitação de uma prova do tipo Gentzen, para obter uma caracterização da " proof-interpretation " livre de circularidades é um assunto controvertível. E um problema análoga a aceitação desde um ponto de vista finitista, da prova de Gentzen. Mas entanto é difícil separar o finitista do estrictamente finitista, é claro, que o intuicionista não é idêntico com o estrictamente finitista. Mas o problema não é que a prova de Gentzen possa ser intuicionisticamente inaceitável no sentido de usar regras de inferência não aceitáveis desde um ponto de vista intuicionista, mas que a prova tem um caracter impredicativo: demonstra propriedades das derivaçòes na aritmética intuicionista usando conceitos que formam parte de uma totalidade teórica que engloba a aritmética intuicionista. Mas justamente nosso interesse na obtençào de derivações em forma normal estaba no fato de que elas permitem uma exposição da " proof-interpretation " livre de circularidades. Em resumo, o carácter impredicativo da " proof-interpretation " das constantes lógicas intuicionista parece inevitável. Se queremos esquivar circularidades na exposição das constantes lógicas intuicionistas, devemos procurar um teorema que permita reduzir toda derivação a forma normal, mas na demonstração deste teorema usaremos conceitos que formam parte de uma totalidade que engloba a aritmética intuicionista elemental, e consequentemente esbarraremos novamente num discurso impredicativo.

2. <u>Representação do significado intuitivo das constantes lógicas intuicionistas dado pela "proof-interpretation" em termos de árvores de Beth.</u>

Procuramos dar uma representação da contribuição das constantes lógicas intuicionistas ao significado das proposições onde elas ocorrem, em termos de árvores de Beth. Intuitivamente estes significados são caracterizados descrevendo o que é uma prova destas proposições. Com Dummett¶ (Dummett, [1977], cap 7) distinguiremos entre <u>demonstrações e provas canônicas</u>. Numa demonstração podemos usar o princípio $A \vee \neg A$ no caso que A seja decidível, sim estar forçados a dar uma prova de A ou uma prova de $\neg A$, também podemos afirmar $\exists x\ A(x)$ no caso de dispor em princípio de um procedimento para encontrar um m tal que $A(m)$, sim estar obrigados a efetuar todos os passos deste procedimento. Assim, no percurso de uma demonstração matemática para um n particular podemos usar na dedução principal a disjunção ou $n+n+1$ é primo ou n^2+n+1 não é primo, sim estar obrigados a dar uma prova de que n^2+n+1 é primo ou uma prova de que n^2+n+1 não é primo; analogamente na presença de um conjunto finito de números podemos afirmar a existência de um deles que é o menor de todos, sim estar obrigados a mostra-lo. Mas numa prova canônica não pode ficar procedimento sem ser efetuado, todas as operações indicadas como possíveis de fazer em princípio, devem ser realizadas. Observamos que podemos considerar uma prova canônica como uma demonstração, a proposição recíproca não é verdadeira.

Temporalmente podemos interpretar a situação assim: num instante temos uma prova canônica de $A \vee B$, se em Γ temos uma prova canônica de A ou temos uma prova canônica de B; em Γ temos uma prova canônica de $\exists x\ A(x)$ se em Γ temos uma prova canônica de $A(m)$ para alguém m. Entanto podemos afirmar que em Γ temos uma demonstração de $A \vee B$ se em um instante posterior Δ, instante no qual já foram efetuadas todas as operações indicadas na dedução principal, temos uma prova em geral de A ou uma prova em geral de B, prova que poderá ser uma prova canônica ou uma demonstração; do mesmo modo, dizemos que em Γ temos uma demonstração de $\exists x\ A(x)$ no caso que em um instante posterior Δ tenhamos uma prova em general (prova canônica ou demonstração) de $A(m)$ para alguém m. Isto é razoável. Dada uma árvore de Beth, como interpretaríamos a expressão $\Gamma \models A$?. Interpretamos os nodos da árvore de Beth como instantes $\Gamma *$. Pelo visto parece razoável interpretar $\Gamma \models A$ como a proposição "em $\Gamma *$ temos uma demonstração de A", e não como "em $\Gamma *$ temos uma prova canônica de A", pois as condições sob as quais podemos afirmar em uma árvore de Beth $\Gamma \models A \vee B$ ou $\Gamma \models \exists x\ A(x)$ dependem não somente de Γ mas também dos nodos seguintes a Γ.

Precisaremos mais o que temos visto. De aqui para frente consideraremos fórmulas fechadas para simplificar a exposição. Identificamos como temos visto antecedentemente os nodos de uma árvore de Beth com instantes. Além disto, suponhamos que acrescentamos a estrutura da árvore de Beth com uma assignação de significados as fórmulas que ocorrem associadas, com os

nodos da árvore, pela relação $\not\models$, assim se A é uma fórmula, A* é a proposição correspondente assignada. Seja Q uma fórmula atômica qualquer. Diremos que Q é verificada num nodo Γ de uma árvore de Beth, se no instante Γ* temos uma prova canônica de Q*; e denotamos este fato por $V(Q,\Gamma)$. Claramente temos que:
(i) $V(Q,\Gamma)$ ou não $V(Q,\Gamma)$ isto é, V é uma relação decidível.
(ii) Se $V(Q,\Gamma)$ e $\Gamma R \Delta$ (isto é, se Δ * é posterior a Γ *) então $V(Q,\Delta)$.
(iii) não $V(\bot,\Gamma)$ onde $\bot$ simboliza uma contradição.

<u>Definição 5.2.1.</u> Uma fórmula fechada A é verdadeira num nodo Γ de uma árvore de Beth se e somente se uma das seguintes cláusulas é verdadeira:

(i) A é atômica e A é verificada em Γ.

(ii) A é $B \wedge C$ e B e C são verificadas em Γ.

(iii) A é $B \vee C$ e B ou C são verificadas em Γ.

(iv) A é $B \rightarrow C$ e para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$ se B é verificada em Δ então $S = \{ \Theta / C$ é verificada em $\Theta \}$, é barreira de Δ.

(v) A é $\neg B$ e para nenhum Δ tal que $\Gamma R \Delta$ B é verificada em Δ.

(vi) A é $\forall xB(x)$ e para todo m $\{\Theta /$ B(m) é verificada em $\Theta\}$ é barreira de Γ.

(vii) A é $\exists xB(x)$ e para algum m, $B(\bar{m})$ é verificada em Γ.

<u>Lema 5.2.2.</u> Se A é verdadeira em Γ, então é verificada em todo nodo Δ tal que $\Gamma R \Delta$. Prova por indução na complexidade de A.

Temos definido assim quando uma fórmula fechada A é <u>verificada</u> num nodo de uma árvore de Beth. Agora definiremos quando A é <u>verdadeira</u> num nodo de uma árvore de Beth. Como o fizemos antecedentemente associaremos a cada nodo Γ um instante Γ *. Suporemos também dada uma assignação de significados às letras de predicado e um domínio D para as variáveis de modo tal que A seja interpretada como uma proposição A*.

<u>Definição 5.2.2.</u> A é verdadeira em Γ se e somente se em Γ * temos uma demostração de A*.

Faremos a seguinte suposição: seja A atômica, A é verdadeira em um nodo Γ se e somente se $\{ \Theta /$ A é verificada em $\Theta \}$ é uma barreira de Γ. A suposição é razoável. Se num instante Γ * temos uma demostração de A*, em qualquer situação teórica posterior teremos uma prova canônica de A*, situação onde já as operações indicadas na demostração de A* têm sido efetuadas. Denotamos com T(A, Γ) a relação "A é verdadeira em Γ ".

Faremos a suposição de que uma fórmula fechada A é verdadeira num nodo Γ de uma árvore de Beth se e somente se alguma das seguintes condições é verdadeira:

(i) A é atômica e A é verdadeira em Γ . Isto é, temos em Γ * uma demostração de A*.

(ii) A é $B \wedge C$ e T(B, Γ) e T(C, Γ).

(iii) A é $B \vee C$ e existe uma barreira S de Γ tal que para todo $\Theta \in$ S, T(B, Θ) ou T(C, Θ).

(iv) A é $B \rightarrow C$ e para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$ se T(B, Δ) então T(C, Δ).

(v) A é $\neg$ B e para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$, não é verdadeiro que T(Δ, B).

(vi) A é $\forall$ xB(x) e para todo $m \in N$ T(B($\bar{m}$), Γ)..

(vii) A é $\exists$ xB(x) e existe uma barreira S de Γ tal que para todo $\Theta \in$ S existe $n \in N$ com a propriedade de que T(B($\bar{n}$), Θ).

<u>Proposição 5.2.3.</u> Uma fórmula A qualquer é verdadeira num nodo Γ se e somente se {Θ / A é verificada em Θ } é uma barreira de Γ .

Temos que considerar 8 casos dependendo cada caso da forma que tenha A.

(i) Se A é atômica, a proposição é verdadeira pela suposição debaixo da definição 5.2.2.

(ii) Seja $A \equiv B \wedge C$, então em Γ * temos uma demostração de B* $\wedge$ C* e conseqüentemente uma demostração de B* e de C*. Logo B é verdadeira em Γ , C é verdadeira em Γ . Então os conjuntos S={Θ / B é verificada em Θ } e T={Θ / C é verificada em Θ } são barreiras de Γ . Então pelo Lema 5.2.2. podemos formar uma barreira U de Γ tal que para todo $\Delta \in$ U, $B \wedge C$ é verificada em Δ . Reciprocamente, suponhamos que U={ Δ / $B \wedge C$ é verificada em Δ } é barreira de Γ . Logo S={Θ /B é verificada em Θ } e T={Θ / C é verificada em Θ } são barreiras de Γ pois $U \subset S$, $U \subset T$. Logo B é verdadeira em Γ e C é verdadeira em Γ . Conseqüentemente A é verdadeira em Γ .

(iii) A é $B \vee C$. Se A é verdadeira em um nodo Γ , então temos em Γ * uma demostração de A*. Logo existirá uma barreira S de instantes Δ * tais que em Δ * tenhamos uma demostração de B* ou de C*. Logo para cada $\Delta \in$ S, B é verdadeira em Δ ou C é verdadeira em Δ . Além disto para cada $\Delta \in$ S, existe S barreira de Δ tal que se B é verdadeira em Δ , então B é verificada em cada nodo de S_{Δ}, e se C é verdadeira em Δ , então C é verificada em cada nodo de S_Δ (hipótese indutiva). Em qualquer caso, dado $\Delta \in S$ para todo nodo de S_Δ, $B \vee C$ é verificada nesse nodo. Logo $T = \bigcup_{\Delta \in S} S_\Delta$ é uma barreira de Γ e para cada nodo Θ de T temos que $B \vee C$ é verificada em Θ. Reciprocamente, suponhamos que $T = \{\Theta \,/\, B \vee C$ é verificada em $\Theta\}$ é barreira de Γ. Seja $\Delta \in T$, tal que, por exemplo, B é verificada em Δ. Δ é barreira de ele mesmo, conseqüentemente (hipótese indutiva) B e verdadeira em Δ. Logo para cada nodo Θ de T, B é verdadeira em Θ, ou C é verdadeira em Θ. Logo $B \vee C$ é verdadeira em Θ.

(iv) A é $B \rightarrow C$. Suponhamos que A seja verdadeira num nodo Γ. Mostraremos que A é verificada em Γ e dado que Γ é barreira de ele mesmo a prova já está pronta. Seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$ e suponhamos que B é verificada em Δ. Logo pela hipótese indutiva B é verdadeira em Δ e conseqüentemente C é verdadeira em Δ (pois em Γ^* temos uma demostração de $B^* \rightarrow C^*$, se dada uma demostração de B^* podemos obter uma demostração de C^*). Logo $\{\Theta \,/\, C$ é verificada em $\Theta\}$ é uma barreira de Δ. Reciprocamente, suponhamos que $S = \{\Theta \,/\, B \rightarrow C$ é verificada em $\Theta\}$ é barreira de Γ. Seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$. Seja B verdadeira em Δ, provaremos que C é verdadeira em Δ. Se isto acontecera, teremos que dado um instante Δ^* posterior o igual a Γ^* e uma demostração de B^* em Δ^*, teremos em Δ^* uma demostração de C^*. Logo teremos em Γ^* uma demostração de $B^* \rightarrow C^*$ e conseqüentemente resultará $B \rightarrow C$ verdadeira em Γ. Suponhamos pois B verdadeira em Δ e $\Gamma R \Delta$. Pela hipótese indutiva $T = \{\Theta \,/\, B$ é verificada em $\Theta\}$ é barreira de Δ e logo (pelo Lema 5.2.3) $U = \{\Theta \,/\, B$ e $B \rightarrow C$ são verificada em $\Theta\}$ é barreira de Δ. Logo o conjuntos $\{\Sigma \,/\, C$ é verificada em $\Sigma\}$ é barreira de Δ e logo pela hipótese indutiva C é verdadeira em Δ. Logo A é verdadeira em Γ.

(v) A é $\neg B$. Seja A verdadeira em Γ. Provaremos que A é verificada em Γ. Pois seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$. Dado que A é verdadeira em Γ, então B não é verdadeira em Δ, pois para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$, B não é verdadeira em Δ. Pois se supor que em Γ^* temos uma demostração de B^* leva a uma contradição, então em qualquer instante Δ^* posterior a Γ^* não teremos uma demostração de B^*. Logo B não é verificada em Δ, caso contrário B seria verdadeira em Δ. Logo A é verificada em Γ. Reciprocamente, suponhamos que $S = \{\Theta \,/\, \neg B$ é verificada em $\Theta\}$ é uma barreira de Γ. Seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$. Se B fosse verdadeira em Δ então teríamos uma barreira S_Δ de Δ tal que para todo $\Sigma \in S_\Delta$, B é verificada em Σ. Logo existiria um nodo Ω tal que $\Gamma R \Omega$ onde $B \wedge \neg B$ é verificada em Ω. Absurdo. Logo B não é verdadeira em Δ e conseqüentemente A é verdadeira em Γ.

(vi) A é $\forall x B(x)$. Suponhamos que A fosse verdadeira em Γ. Demostraremos que A é verificada em Γ. Dado que em Γ^* temos uma demostração de $\forall x B^*(x)$, para cada m temos em Γ^* uma demostração de $B^*(m)$. Logo B(m) é verdadeira em Γ para cada $m \in N$. Então o conjunto $S=\{\Theta / B(m)$ é verificada em $\Theta\}$ é barreira de Γ. Logo $\forall xB(x)$ é verificada em Γ. Reciprocamente suponhamos que $S=\{\Theta / \forall xB(x)$ é verificada em $\Theta\}$ seja barreira de Γ. Seja $m \in N$, provaremos que $B(m)$ é verdadeira em Γ, e deduziremos disto que $\forall xB(x)$ é verdadeira em Γ. Para todo $\Delta \in S$, $S_\Delta=\{\Sigma / B(m)$ é verificada em $\Sigma\}$ é barreira de Δ. Formamos $T=\bigcup_{\Delta \in S} S_\Delta$. T é uma barreira de Γ e para todo $\Lambda \in T$, $B(m)$ é verificada em Λ. Logo $B(m)$ é verdadeira em Γ.

(vii) A é $\exists xB(x)$. Suponhamos que A seja verdadeira em Γ. Logo existe uma barreira S de Γ tal que para todo $\Delta \in S$, existe $n \in N$ com propriedade de que $B(n)$ é verdadeira em Δ. Pois se em Γ^* temos uma demostração de $\exists xB(x)$, no instante Δ^* posterior temos uma demostração de $B(\bar{n})$ para algum n. Pela hipótese indutiva sabemos que existe uma barreira T_Δ de Δ tal que para todo nodo $\Sigma \in T_\Delta$, existe $n \in N$ tal que $B(n)$ é verificada em Σ. Fazemos $R=\bigcup_{\Delta \in S} T_\Delta$. Para cada nodo $\sigma \in R$, existe n tal que $B(n)$ é verificada em Θ. Logo para cada nodo $\sigma \in R$, temos que A é verificada em σ. Dado que R é uma barreira de Γ temos aquelo que queríamos demostrar. Reciprocamente, suponhamos que $S=\{\sigma / \exists xB(x)$ é verificada em $\sigma\}$ é uma barreira de Γ. Então para $\sigma \in S$, existe m tal que $B(m)$ é verificada em σ. Logo pela hipótese indutiva, para cada $\sigma \in S$, existe m tal que $B(m)$ é verdadeira em σ.

<u>Proposição 5.2.4.</u> Seja $\langle \mathcal{G}, R, \models P \rangle$ uma árvore de Beth cujo domínio seja o conjunto dos números naturais. Suponhamos dada uma interpretação para as letras de predicado de LQI. Suponhamos que para toda fórmula atômica A e para todo nodo $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\Gamma \models A$ se e somente se $T(\Gamma, A)$. Então para toda fórmula X y para todo nodo $\Gamma \in \mathcal{G}$ temos que $\Gamma \models X$ se e somente se $T(\Gamma, X)$. A demostração é fácil a partir da definição da relação $\models$.

Dado que para toda fórmula atômica A temos definido $V(\Gamma, A)$ como "em Γ^* temos uma prova canônica de A^*" poderíamos supor que para toda fórmula X, $V(\Gamma, X)$ se e somente se em Γ^* temos uma prova canônica de X^*. Mas esta identificação fracassa no caso que X seja $Y \rightarrow Z$, ou $\forall xY(x)$. Pois se em Γ^* temos uma prova canônica de $Y^* \rightarrow Z^*$, temos um método para transformar imediatamente toda prova de Y^* dada num instante Δ^* posterior a Γ^* numa prova de Z^*, mas de $V(\Gamma, Y \rightarrow Z)$ infere-se por definição que para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$ se $V(\Delta, Y)$ então $S=\{\sigma / V(\sigma, Z)\}$ é barreira de Δ e não se infere que $V(\Delta, Z)$ como seria desejável para poder realizar a identificação acima exposta. Analogamente, se em Γ^* temos uma prova canônica de $\forall xY(x)$ então parece razoável afirmar que para todo $m \in N$ temos em Γ^* uma prova canônica de $Y^*(m)$. Mas de $V(\Gamma, \forall xY(x))$ infere-se por definição que $\{\sigma / V(\sigma, Y(m))\}$ é barreira de Γ e não infere-se que para todo $m \in N$ $V(\Gamma, Y(\bar{m}))$ como seria desejável para fazer a identificação exposta acima. Dada esta situação poderíamos tentar modificar as clausulas iv e

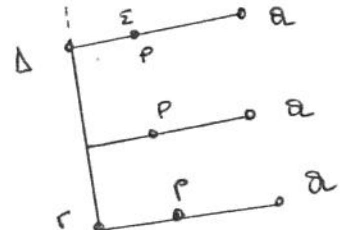
vi) da definição 5.2.1. assim:

vi') A é $\forall x B(x)$ e para todo $m \in N$, $B(m)$ é verificada em Γ.

iv') A é $B \to C$ e para todo Δ tal que $\Gamma\Delta$ se B é verificado em Δ então C é verificado em Δ.

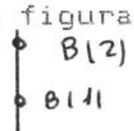
Aceitemos a definição (iv'). Mostraremos que sob essa definição não é verdadeira em geral a proposição 5.2.3 para $P \to Q$, com P atômica.

Consideremos a árvore de Beth da figura exposta abaixo, onde as fórmulas P e Q escrevem-se muito perto do primeiro nodo onde elas são verificada.



$P \to Q$ é verdadeira em Γ pois P é verdadeira nos nodos onde primeiro é verificada, e também nos posteriores, e somente nestes nodos, e em todos estes nodos Q é verdadeira (estamos supondo a verdade de 5.2.2 em geral, e de 5.2.3 para fórmulas atômicas). Mas $P \to Q$ não é verificada em nenhum dos nodos do caminho extremo esquerdo se aceitamos a definição de (iv'), pois se Δ é um nodo em esse caminho consideremos o nodo seguinte Σ que não esteja no caminho extremo esquerdo. P é verificada em Σ mas Q não é verificada em Σ.

Analogamente aceitemos (vi') e admitamos a proposição 5.2.3 para toda fórmula $B(m)$. Mostraremos que em geral não é verdadeira a proposição 5.2.3 para $\forall x B(x)$. Consideremos a árvore de Beth da figura abaixo



onde cada fórmula escreve-se muito perto do primeiro nodo onde ela é verificada. $\forall x B(x)$ é verdadeira em Γ, Pois para cada m, o conjunto $\{\Theta \,/\, B(m)$ é verificada em $\sigma\}$ é barreira de Γ e conseqüentemente pela proposição 5.2.3, $B(m)$ é verdadeira em Γ. Mas se aceitamos (vi') $\forall x B(x)$ não é verificada em nodo nenhum da árvore.

Assim temos visto que nosso intento de modificar a definição de "x é verificada num nodo Γ" para que ela coincida com a afirmação "em Γ * temos uma prova canônica de X*" da como resultado a invalidade de 5.2.3. Mas justamente 5.2.3 dava uma razão forte para identificar verificação de X em Γ com ter uma prova canônica de X* em Γ *. Pois, dado que uma fórmula X é verdadeira num nodo Γ se e somente se o conjunto dos nodos onde ela é verificada é uma barreira de Γ, e parece razoável pensar que temos uma demostração de X* quando a partir de um instante posterior tenhamos uma prova canônica de X*, então surge naturalmente a idéia de identificar "X é verificada em Γ" com "em Γ * temos uma prova canônica de X*". A dificuldade de caracterizar a relação de verificação em termos do conceito de prova canônica está em que, enquanto a relação de verificação está claramente definida desde um ponto de vista formal, os conceitos de "demostração", e "prova canônica" são intuitivos, justamente pelo fato de não serem exaustivamente representáveis num sistema formal.

Da proposição 5.2.3 podemos deduzir os seguintes corolários:

Corolário 5.2.5 : Seja $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \vDash, P \rangle$ uma árvore de Beth, e suponhamos dada uma interpretação das letras de predicado de LQI tal que a partir dela definamos T(Γ, X) e V(Γ, X) para toda fórmula X de LQI.

Então:

i) $Y \rightarrow Z$ é verdadeira em $\Gamma \Leftrightarrow$ $Y \rightarrow Z$ é verificada em Γ.

ii) Y é verdadeira em $\Gamma \Leftrightarrow \neg$ Y é verificada em Γ.

iii) $\forall xY(x)$ é verdadeira em $\Gamma \Leftrightarrow \forall xY(x)$ é verificada em Γ

Demostração:

i) ($\Rightarrow$) seja Δ tal que $\Gamma R \Delta$ e suponhamos que Y é verificada em Δ . Logo Y é verdadeira em Δ e conseqüentemente Z é verdadeira em Δ. Então T={ Θ /Z é verificada em Θ } é uma barreira de Δ e então $Y \rightarrow Z$ é verificada em Γ . ($\Leftarrow$) Se $Y \rightarrow Z$ é verificada em Γ então, pela proposição 5.2.3 $Y \rightarrow Z$ é verdadeira em .

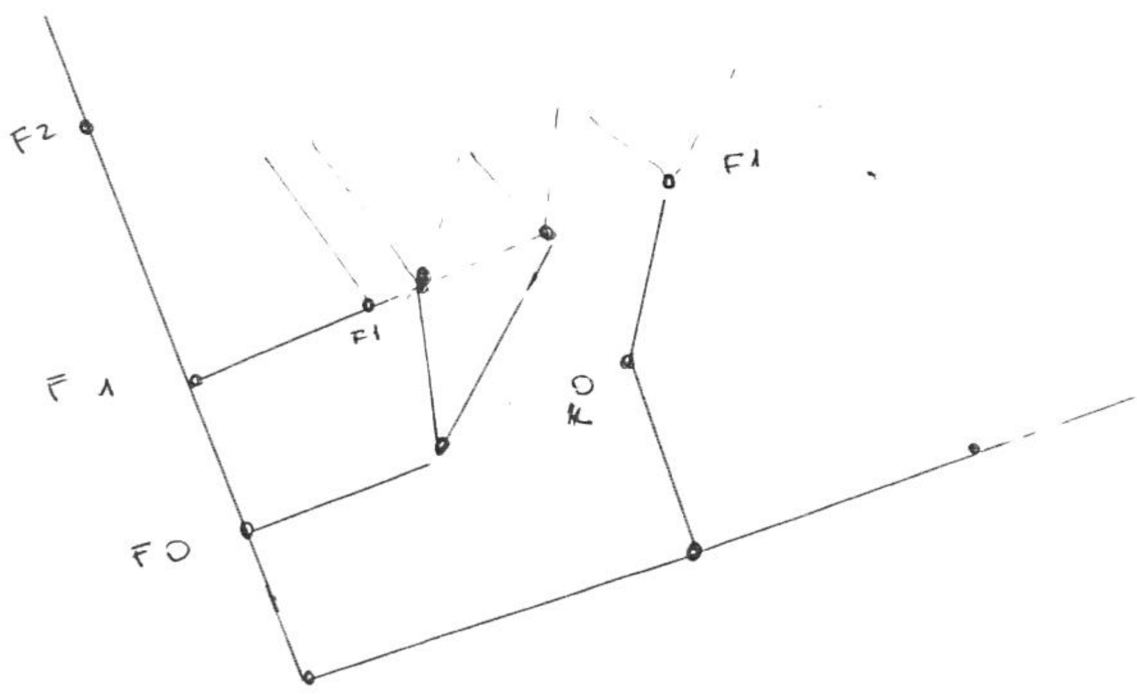
ii) ($\Rightarrow$) Para todo Δ tal que $\Gamma R \Delta$ Y não é verificada em Δ, pois no caso contrário pela proposição 5.2.3 Y seria verdadeira em Δ . ($\Leftarrow$) Pela proposição 5.2.3.

iii) ($\Rightarrow$) Seja $m \in N$. $Y(\bar{m})$ é verdadeira em Γ . Logo S={ Θ / $Y(\bar{m})$ é verificada em Θ } é barreira de Γ . Então $\forall xY(x)$ é verificada em Γ . ($\Leftarrow$) Trivial a partir de 5.2.3.

Dummett propõe modificar nossa concepção das árvore de Beth do modo seguinte: "we have, in effect, to regard the temporal stages represented by the levels not as intervals, such as days, which are ineluctably replaced by their sucessors, so that we insecapably travel down the tree (until we reach a terminal node, if we do), but as punctuated by efforts, not necessarily successful, to obtain more information" (Dummett, [1977], p. 408). Entendida assim, deste modo, uma árvore de Beth, o fato de que um conjunto S seja uma barreira de Γ não significa que quando estejamos em Γ * saibamos que num tempo finito estaremos inelutavelmente num estado $\Delta \in$ S, mas somente que temos as ferramentas, se escolhemos aplicá-las, para chegar a algum dos estados $\Delta \in$ S. Isto coincide com a concepção de que aquilo que uma demostração da, é um método efetivo de obter, se o desejamos, uma prova canônica. Mas isto não resolve a dificuldade de fazer coincidir a proposição 5.2.3 e a identificação de V(Γ , X) com o fato de ter uma prova canônica de X* em Γ *, para X uma fórmula X qualquer.

Existem outras dificuldades para identificar verificação de uma fórmula X num nodo Γ com o fato de ter uma prova canônica em Γ * de X*. Dado que as explicações das constantes lógicas intuicionistas usam a noção de prova de um enunciado, e uma prova de um enunciado qualquer depende da possibilidade de ter provas canônicas de seus componentes, devemos admitir que é decidível se uma construção é ou não é uma prova canônica de um enunciado. Pois nossa caracterização das constantes da lógica intuicionista deve ser feita em termos de uma linguagem neutral entre o uso clássico e o uso intuicionista, para esquivar circularidades. E a decidibilidade da segurança desta neutralidade. Assim a explicação das constantes lógicas intuicionistas, dada pela "proof interpretation" seria uma explicação genuína, no sentido de que para poder ser entendida devemos conhecer o uso destas constantes num contexto restrito, isto é, num contexto decidível. Mas nas árvore de Beth, embora admitemos que é decidível se uma fórmula atômica fechada dada é verificada em um nodo , não acontece a mesma coisa para fórmula fechadas em gera; não temos modo de determinar se P$\longrightarrow$Q ou $\forall$ xF(x) é verificada num nodo Γ . Assim não podemos representar o significado das constantes lógicas em termos de "X é verificada num nodo Γ", também não podemos explicá-lo em termos da noção de "fórmula verdadeira em um nodo Γ " pois não é decidível se uma fórmula dada X é verdadeira em um nodo de uma árvore de Beth.

Os nodos de uma árvore de Beth não dão uma representação adequada do que é um estado de informação Γ *. Enquanto que em Γ * é decidível se temos uma prova em geral de uma fórmula complexa A, no nodo Γ não é decidível se A é verificada em Γ , pois a verificação de A depende não somente do comportamento de suas componentes atômicas nos nodos antecedentes a Γ , mas também daquilo que acontece nos nodos posteriores a Γ . Para decidir se A é verificada ou não é verificada em Γ , precissaríamos ter uma representação exata de uma estrutura infinita, T_{Γ} , a subárvore de Beth com vértice Γ. Logo não podemos dar uma interpretação de uma fórmula somente indicando quais são os nodos de uma árvore de Beth onde ela é verificada, precisamos das explicitamente uma interpretação para as letras de predicado. é por isto que os modelos internos dão origem a uma verdadeira semântica para LQI em contraposição as árvores de Beth. As limitações das árvores de Beth para dar uma semântica apropriada para a lógica intuicionista estão no fato de que no trânsito desde uma especificação das construções que servem como prova dos enunciados da matemática tem-se uma descrição da totalidade das situações nas que poderiamos obter tais provas, perdemos informação que é essencial para fixar o significado dos enunciados que devem ser provados. Por exemplo, seja a árvore de Beth da figura abaixo as fórmulas escrevem-se à esquerda muito perto dos nodos onde primeiro são verificadas. Se representamos os nodos por seqüências finitas compostas pelos símbolos 0 e 1, $F(\bar{m})$ é verificada em $\vec{u}$ se e somente se $\vec{u}$ contém pelo menos m+1 símbolos 0. $\neg\forall x(F(x)\vee\neg F(x))$ é verdadeira no vértice. Determinado, assim, deste modo, uma árvore de Beth, não damos um significado determinado para a letra de predicado F interpretada como um predicado de teoria de números F*; indicamos somente determinadas condições cuja satisfação por um predicado da teoria de números F* faz verdadeiro o enunciado $\neg\forall n(F^*(n)\vee\neg F^*(n))$. Não damos um exemplo determinado. Analogamente no Capítulo 4, parte 1, demos um contraexemplo através de uma árvore de Beth cujo vértice Γ é tal que $\Gamma \nvDash \forall x(F(x)\vee\neg F(x))\wedge(\neg\neg\exists xF(x)\rightarrow\exists xF(x))$. Mas assim não demos um contraexemplo individual ao princípio de Markov, que não é admissível por considerações gerais sobre as constantes lógicas intuicionistas. Para dar um significado determinado às letras esquemáticas de predicado, devemos determinar que tipo de construções constituem uma verificação de cada fórmula atômica, como podemos reconhecer qual é o estado de informação onde nós estamos. Estas considerações indicariam que as árvore de Beth não dão, na verdadeira, uma teoria semântica de nenhum tipo (não intuicionista, também não clássica) dado que não determinam significados específicos para as letras de predicado das fórmula relacionadas com os nodos das árvores.



NOTAS

(1) "We cannot incorporate into our first order logic laws embodying the full intuitionistic meaning of the conective : in that logic the introduction rule for entitles us to assert A B only when B can be derived from A as hypothesis, In order to exploit the full intuitionistic meaning of , we should need to be able, whithin intuitionistic analysis, to derive, for each statement A, the conditional A x c ", onde <s, c> é uma expansão complexa e < s, c> é uma prova de A completamente analisada (Dummett, [1977], p. 103). O condicional intuicionista ocorre plenamente desenvolvido na prova de Brouwer do princípio de Indução-Barreira (Bar Induction). Esta prova consiste na derivação a partir da forma de uma possível prova do antecedente da prova do conseqüente. É claro que aqui pressupomos que podemos ter uma representação de toda possível prova do antecedente.

CONCLUSÕES

. Tendo examinado as diferentes teorías semânticas para a lógica intuicionista de primeira ordem, reconhecemos nelas dois tipos de dificuldades para constituir uma teoría semântica para essa lógica.

Primeiro, temos aqueles impedimentos de natureza matemática. Este é o caso das teorías cujas provas de completude não podem ser intuicionisticamente aceitáveis pelo fato de descansar sobre formas de inferência rejeitáveis na matemática intuicionista, como acontece no caso das árvores de Beth ou dos modelos internos. Segundo temos aqueles impedimentos de natureza mais filosófica, os que consequentemente são mais discutiveis, e cuja formulação provem da discurssão sobre a forma que uma teória semântica deve ter. Planteamos a questão seguinte: supondo que tivessemos provas de completude para a teória das árvores de Beth intuicionisticamente aceitáveis, no sentido de não violar as regras da matemática intuicionista, aceitaríamos essa teória como uma teória semântica apropriada para a lógica intuicionista?. A resposta dependerá de nossa consideração do que deve ser uma teória semântica. Se consideramos que o alvo que deve ser atingido, é a caracterização de aquelas formas de enunciado que são verdadeiras no sentido intuicionista, pela sua forma gramatical, aceitaríamos sob a suposição feita-a teória das árvores de Beth. Mas se consideramos que o alvo que deve ser atingido é dar uma justificação do uso dos enunciados intuicionistas a partir do significado de seus componentes, rejeitaríamos a teória das árvores de Beth. Dumett, [1975], pág 102 distingue entre as teórias semânticas que intentam interpretar uma linguagem a partir de conceitos que são escolhidos como primitivos, e aquelas que procuram caracterizar também esses conceitos primitivos. No primeiro grupo temos as caracterizações do significado em termos do conceito de verdade. Se aceitamos que este é o alvo que deve ser atingido, então uma semântica para uma lógica consistirá no estudo de aqueles enunciados que são verdadeiros pela sua forma gramatical, precisando mais, no estudo de aquelas formas de enunciado que por substituições categorialmente adequadas dão origem em todos os casos a enundiados verdadeiros. Neste señtido de teória semântica -sob a suposição feita acima as árvores de Beth constituiriam uma semântica apropriada para a lógica intuicionista. Mas se consideramos do mesmo modo que Dumett que outro tipo de teória semântica é possível, isto é, uma teória que caracterize o significado em termos de condições de asseveração (em termos de condições de uso e não a partir de conceitos primitivos cujo significado fique sim ser analisado) então a teória das árvores de Beth não constituiría uma semântica apropriada, pois nesta teória, o significado das expressões da lógica de primeiro ordem não fica unívocamente determinado a partir das condições de asseveração de seus componentes.

Em determinados casos, os impedimentos de natureza filosófica, parecem estar de trás da rejeição de uma teória semântica. Por exemplo, demonstramos matemáticamente que qualquer prova de completude sobre os modelos internos permitirá derivar a partir dela uma prova de um esquema do tipo de Markov. Mas a objeção contra o princípio de Markov é de natureza filosófica pois descansa na interpretação das constantes lógicas intuicionistas. Uma objeção de natureza matemática, consistiría em encontrar um contraexemplo ao princípio de Markov na matemática intuicionista. Mas não existe tal contraexemplo dentro da aritmética intuicionista elemental (embora podería este existir na Analisis intuicionista). Um caso análogo acontece na " proof-interpretation " das constantes lógicas intuicionistas. Matemáticamente podemos demonstrar que não pode existir uma redução de toda derivação na aritmética intuicionista a uma forma normal que tenha a propriedade da sub-fórmula. A partir deste deríva-se o inevitável carácter impredicativo da " proof-interpretation ". Podem ser formuladas objeções contra a aceitação das definições impredicativas, a partir das concepções intuicionistas sobre a existência matemática, e sobre as relações entre matemática e linguagem. Mas até agora não temos encontrado caso nenhum onde a admissão de definições impredicativas leve a uma contradição na matemática intuicionista (a derivação do paradoxo de Russell usa o principio do terceiro excluido, além disto restaría ver que a ocorrência desta derivação deriva-se do uso de definições impredicativas). A objeção contra a aceitação de definições impredicativas é filosófica.

Mas entanto as objeções de natureza matemática são decisivas, aquelas de natureza mais conceitual podem ser discutidas. A partir deste fato, podemos analisar as distintas teórias semânticas propostas levando em conta sua maior o menor verossemelhança intuicionista. A "proof-interpretation" parece ser a mais forte. Sua aceitação dependerá de encontrar argumentos convincentes para a aceitação de definições impredicativas. Além disto, deverá mostrar-se que é improvável derivar a partir destas definições, contradições na matemática intuicionista. A teória das árvores de Beth geralizadas não apresenta objeções de natureza matemática, mas seu carácter de construção ad-hoc é evidente. Sua aceitação dependerá de que admitamos ou não admitamos que o alvo principal que uma teória semântica para a lógica intuicionista deve atingir é o reconhecimento das formas de enunciados válidas. A teória das árvores de Beth comuns exige além disto encontrar argumentos para a aceitação do princípio de Markov, que apriori é rejeitável pelo significado das constantes lógicas intuicionistas, sendo muito alta a probabilidade de encontrar contra exemplos ao princípio na matemática intuicionista. A teória dos modelos internos, embora não apresenta um carácter tão artificial como a das árvores de Beth, tem as mesmas dificuldades antecedentemente expostas pela sua admissão do princípio de Markov.

A teória a mais promissória é a proof-interpretation. As relações entre predicativismo e intuicionismo até agora não tem sido o suficientemente estudadas. A aceitação ou não da "proof-interpretation" dependerá dessa investigação. Muitas das questões aquí nesta tese suscitadas dependeram dos progressos da

Análises intuicionista. A ocorrência de um contra exemplo ao princípio de Markov deixaria de pé somente a "proof-interpretation" e a teória das árvores de Beth geralizadas. Mas a primeira é respeituosa do espirito do intuicionismo, entanto a segunda apresenta um carácter artificial.

BIBLIOGRAFIA

ARISTOTELES De l'interpretation. Tradução francesa de J. Tricot. Librarie philosophique J. Vrin.1984.

Les secondes analytiques. Tradução francesa de J. Tricot. Librarie philosophique J.Vrin ,1979.

BETH,E.W The foundations of Mathematics, Amsterdam North Holland, 1959.

BROUWER,L.E.J Collected Works,vol I, Philosophy and Foundations of Mathematics, Amsterdam,1975.

DAVIDSON,D. Inquires into truth and interpretation. Clarendon Press, 1985.

DALEN,D.Van Lectures on Intuitionis em Cambridge Summer School in Mathematical Logic, Springer, Berlin 1973

Intuitionistic Logic , em D. Gabbay e F.Guenthner (eds) Handbook of Philosophical Logic,Vol III,225-339.1986. Reidel.

DUMMETT,M Truth and other Enigmas,Duckworth,1978.

Elements of intuitionism,1977,Oxford Logic Guides,O.U.P.

Comments on Professor Prawitz's Paper, em Logic and Philosophy,G.H.Von Wright (ed),Martinus Nijhoff Publishers, 1980.

What is a theory of meaning em Mind and Language,Wolfson College Lectures 1974, edited by S. Guttenplan.

FITTING,M.C: Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing,Amsterdam,1969.

GABBAY,D. Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistical Logic. Reidel 1981.

HAACK,S. Deviant Logic,1977,C.U.P.

HEYTING,A. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. Erkentnis, vol 2,1931,págs 100-15. Traduçao inglesa em Philosophy of Mathematics: Selected Readings,P Benacerraf and H.Putnam eds,Englewood Cliffs, N.J, 1964.

HILBERT,D. e ACKERMANN,W Elementos de lógica teórica,2º ed,Editorial Tecnos,Madrid,1975.

JERVELL,H.R. A normal form in first order arithmetic. Em Second Scandinavian Logical Symposium J.E.Fenstad (eds), North Holland Amsterdam 1971

KLEENE,S.C On the interpretation of Intuitionistic Number Theory, J.Symb Log,vol 10,1945,págs 109-24.

Realizability: A retrospective Survey,em Cambrdige Summer School in Mathematical Logic, Springer,Berlin,1973.

Introducción a la Metamatemática. Traduçaõ Manuel Garrido, Editorial Tecnos,Madrid, 1974.

KNEALE,W. e KNEALE,M. El desarrollo de la lógica. Editorial Tecnos, Madrid, 1974.

KOLMOGOROV,A.N Zur Deutung der intuitionistischen Logik,Mathematische Zeitschrift,Vol 35,1932,págs 58-65. Traduçao inglesa em From Frege to Gödel,ed J.van Heijenoort,Harvard University Press,1967.

KREISEL,G Elementary Completeness Properties of Intuitionistic Logic whith a Note on Negations of Prenex Formulae, J. Symb Log,vol 23,1958,págs 317-30.

A Remark on Free Choice Sequences and the Topological Completeness Proofs,J.Symb Log,vol 23,1958,págs 369-88.

On weak Completeness of intuitionistic Predicate Logic, J.Symb Log, vol 27,1962,págs 139-58.

Mathematical Logic,em T.L. Saaty (eds) Lectures on Modern Mathematics III, Wiley and Sons,New York, 1965.

A survey of proof Theory I, J. Symb Logic,1968,vol 33.

A survey or proof Theory II, em Proc. Second Scandinavian Logical Symposium J.E.Fenstad (eds),North Holland, Amsterdam,1971.

Church's Tesis, a kind of reducibility axiom of constructive mathematics, Kino,A , Myhill,J, Vesley,R.E (eds) North Holland,1968,Amsterdam.

LORENZEN,P Metamatemática,Traduçaõ espanhola de Jacobo Muñoz,Editorial Tecnos,Madrid, 1971.

Normative Logic and Ethics,Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.

LORENZEN,P e SCHWEMMER,O Konstruktive Logik,Ethik und Wissenchaftstheorie,Bibliographisches Institut, Mannheim,1975.

MC CARTY,CH Intuitionism: An Introduction to a Seminar. Journal of Philosophical Logic, vol 12,nº2,May 1983.

MENDELSON,E Introduction to Mathematical Logic, Second Edition, Van Nostrand,1979.

PRAWITZ,D Meanings and Proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic. Theoria 43,págs 2-40.1977.

Proofs and the meanings and completeness of the logical constants. Em Hintikka et al, Essays on mathematical and philosophical logic. Reidel,1978.

On the idea of a general proof theory. Synthese 27, págs 63-77,1974.

Ideas and results in proof-theory. Proceedings of the second Scandinavian logic Symposium,ed J.E.Fenstad,Amsterdam,1971,235-250.

Natural Deduction. A proof-theoretical Study,Stockholm, Almqvist e Wiksell,1965.

Intuitionistic Logic: A philosophical Challenge. Logic and Philosophy,G.H.Von Wright (ed),Martinus Nijhoff Publishers,1980.

QUINE,W.V.O Filosofía de la lógica,Tradução Manuel Sacristán,Madrid, 1981.

SCHUTTE,K Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Springer,1968.

SHOENFIELD,J. Mathematica Logic,Addison Wesley,1967.

SUNDHOLM,G Constructions,proofs and the meanings of the logical constants. Journal of philosophical logic,12,151-172 1983.

SWART,H de An intuitionistic plausible interpretation of intuitionistic logic, em J.Symb Log,vol 42,4,1977.

TAIT,W. Against intuitionis :constructive mathematics is part of classical mathematics. Journal of Philosophical logic 12,nº 2,1983.

TARSKI,A The concept of truth in formalised languages , em Logic, Semantics and Metamathematics, trans Woodger,J.H., O.U.P. ,1956.

The semantical conception of truth and the fooundations of semantics em Feigel e Sellars, Readings in philoso-

TROELSTRA,A   Principles of Intuitionism,nº95 em Lecture Notes in Mathematics,Springer,Berlin, Heidelberg,1969.

Choice Sequences, a chapter of intuitionistic mathematic Oxford logic Guides, O.U.P,1977.

Analysing Choice Sequences,Journal of Philosophical Logic,Vol 12,Nº2,May 1983.

SCOTT WEINSTEIN The intended Interpretation of intuitionistic Logic, Journal of Philosophical Logic, Vol 12,Nº2,May 1983.