UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

"VALORAÇÕES PARA ALGUNS SISTEMAS DE LÓGICA DO TEMPO"

CEZAR AUGUSTO MORTARI

Dissertação elaborada sob orientação do Prof. Dr. Oswaldo Porchat Pereira e apresentada como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência.

PRIMAVERA DE 1982

Para meus pais,

Dary e Maria Adelina.

AGRADECIMENTOS

Aos colegas, professores, e a todos aqueles que, de uma ou de outra forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui; aos amigos da "Turma do Funil"; ao meu orientador, Prof. Dr. Oswaldo Porchat Pereira; e, em especial, à Profª Andréa M. Loparić, sem cuja colaboração, paciência e amizade esta dissertação jamais teria sido levada a termo.

C.A.M.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Ao se falar em "lógica do tempo", ou "lógica temporal", deve-se ter em mente que há duas maneiras de se entender a expressão. De acordo com uma corrente, a lógica do tempo - a "teoria lógica do tempo" - constituiria um ramo independente da lógica, tal como a lógica modal (i.e., uma extensão da lógica clássica, introduzindo-se novos operadores, ditos "intensionais"). Mas há outro ponto de vista, para o qual lógica do tempo seria uma aplicação do Cálculo de Predicados (com predicados para entidades temporais, como instantes ou momentos, e quantificação sobre essas entidades). A primeira abordagem pode ser chamada "prioreana" (ou "intensional"), devido à grande influência exercida por A.N. Prior em seu desenvolvimento; enquanto que a segunda seria dita "quineana", devendo-se isto, obviamente, a W. Quine. (Cf. Benthem 1978. V. também Lacey 1972.)[1]

Trabalharemos aqui com cálculos[2] temporais intensionais, limitando-nos ainda às linguagens proposicionais. Existe uma grande variedade destes cálculos: eles procuram codificar as inferências que são válidas caso suponhamos ter o tempo (i.e., a série dos momentos) uma tal ou qual estrutura (e.g., linear, densa, sem começo nem fim, etc.). É nesse sentido que falamos em "lógica do tempo linear" ou em "cálculo para tempo circular", e assim por

---

[1] Há diversos argumentos, pró e contra cada abordagem. Para uma boa discussão deles, v. Benthem 1978.

[2] No decorrer deste trabalho, utilizaremos as expressões "sistema axiomático", "sistema" e "cálculo" como sinônimos.

diante.

Todos esses sistemas podem ser obtidos a partir do cálculo proposicional clássico por adição à linguagem de novos operadores (intensionais) e por acréscimo de postulados (ou seja, esquemas de axiomas e regras de inferência) envolvendo os mesmos. Os operadores, nos cálculos mais usuais, são quatro: F, P, G e H, com a seguinte tradução na linguagem natural:

F: será o caso que ...

P: foi o caso que ...

G: será sempre o caso que ...

H: foi sempre o caso que ...[3]

Essa maneira de construir os cálculos temporais faz com que os mesmos tenham uma semelhança estrutural bastante acentuada com as lógicas modais. Não é de admirar, portanto, que disponhamos, para os cálculos temporais, de uma semântica de Kripke. (V. Rescher & Urquhart 1971; Landim 1974, 1980.) Tal é o modo usual de construir uma semântica para esses cálculos - além, é claro, das semânticas algébricas. Recentemente, contudo, foi apresentada uma nova semântica para cálculos modais: a chamada "semântica de valorações". (V. Loparić 1977.) Tomando-se como referência a semântica do cálculo proposicional clássico, verificamos que, nas semânticas de Kripke, é a noção de modelo que sofre uma profunda reformulação; as definições de verdade, mesmo para os operadores intensionais, são dadas da forma usual, i.e., em termos de condições necessárias e suficientes. As semânticas de valorações procedem de forma inversa: a novidade está na maneira de formular as condi-

---

[3] Existem cálculos que possuem operadores para o próximo momento, ou o momento anterior, ou o "sempre", o "às vezes", etc., mas não trataremos deles. O estudo que aqui se fará, contudo, pode ser facilmente aplicado a cálculos cuja linguagem contém tais operadores.

ções de verdade para operadores intensionais; em contrapartida, um modelo é apenas um "mundo", isto é, uma valoração. Não necessitamos aqui da noção de vários universos compostos de mundos ligados por uma relação de acessibilidade. Além disso, as semânticas de valorações geram fácil e imediatamente procedimentos de decisão para os cálculos estudados - não através de quadros semânticos (método dos contra-exemplos), como é habitualmente feito em semânticas de Kripke, mas pela construção de tabelas de verdade generalizadas.

Temos então aqui um dos propósitos deste trabalho: construir semânticas de valorações para sistemas de lógica temporal - e apresentar, também, um método de decisão a partir dessas semânticas.

Poderíamos ainda examinar a relação entre sistemas modais e temporais, dada a semelhança estrutural acima mencionada. Uma das maneiras de se entender as modalidades aléticas é pelo recurso ao tempo. Por exemplo, podemos dizer que algo é "possível" se "é ou será verdadeiro". Isto leva a uma prática bastante usual: a de introduzir nos cálculos temporais os operadores "necessário" e "possível" através de definições. Contudo, se dermos atenção a algumas considerações filosófico-metafísicas, que depois serão mencionadas, tal prática é um tanto insatisfatória - e essa insatisfação levou ao surgimento de vários novos cálculos, ditos "modais-temporais", onde tanto os operadores modais quanto os temporais são introduzidos primitivamente, por axiomas. Faremos neste trabalho uma breve apresentação desses sistemas, que por si só merecem um estudo aprofundado. Nosso interesse principal fica sendo o de elaborar uma semântica de valorações e um método de decisão para eles.

Capítulo 0

INTRODUÇÃO

Nos cálculos apresentados neste trabalho, usaremos duas linguagens básicas: *L*1 e *L*2.

0.1. A Linguagem *L*1

*L*1 é formada pelos seguintes símbolos primitivos:

a) uma lista enumerável de variáveis proposicionais (que aqui não é necessário especificar);

b) operadores unários:

$-$ G H

c) operador binário:

$\rightarrow$

d) parênteses - como símbolos auxiliares de pontuação:

( )

0.2. A Linguagem *L*2

*L*2 é formada acrescentando-se a *L*1 o operador unário 'L'.

Seja $L \in \{L1, L2\}$. Uma *expressão de L* é uma sequência finita de símbolos de *L*. Definamos então as *fórmulas de L*.

0.3. DEFINIÇÃO. 1) Uma variável proposicional é uma fórmula; 2) se A e B são fórmulas, e § é um operador unário, §A e (A → B) são fórmulas[4]; 3) ums ex-

---

[4] Usaremos letras maiúsculas como variáveis metalinguísticas para

pressão de L é uma fórmula sse[5] o for em virtude de 1) ou 2).

0.4. Seja $L \in \{L1, L2\}$. 'FOR_L' denota o conjunto das fórmulas de L.

Usaremos as convenções usuais para eliminação de parênteses (v. Shoenfield 1967, p.17). Em sequências de um mesmo operador, os parênteses serão eliminados por associação à direita. Parênteses tornados desnecessários pelas convenções poderão ser mantidos para facilitar a leitura.

Podemos acrescentar a $L1$ os seguintes símbolos definidos:

e) (Def $\wedge$) $(A \wedge B) =_{df} -(A \rightarrow -B)$;

f) (Def $\vee$) $(A \vee B) =_{df} (-A \rightarrow B)$;

g) (Def $\leftrightarrow$) $(A \leftrightarrow B) =_{df} ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$;

h) (Def F) $FA =_{df} -G-A$;

i) (Def P) $PA =_{df} -H-A$.

Acrescentamos a $L2$ os símbolos definidos nos itens e) - i) acima, e mais:

j) (Def M) $MA =_{df} -L-A$.

No restante desta Introdução, adotaremos a seguinte prática: trabalharemos com a linguagem $L2$, e as definições aplicar-se-ão imediatamente a $L1$, bastando eliminar o operador 'L' e tudo o que estiver relacionado com o mesmo.

Como sabemos, um sistema axiomático S pode ser dado por um conjunto finito de postulados (esquemas de axiomas e regras de inferência). Nos cálcu

fórmulas. Letras gregas maiúsculas denotarão conjuntos de fórmulas.

[5] Usaremos 'sse' para abreviar 'se e somente se'.

los aqui estudados distinguiremos dois tipos de esquemas de axiomas e dois tipos de regras de inferência.

0.5. Esquemas de Axiomas:

1) Clássicos: A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3. $(-B \to -A) \to ((-B \to A) \to B)$.

2) Não-clássicos: a especificar em cada cálculo.

0.6. Regras de Inferência:

1) Regras de Dedução: A única regra de dedução será a de *modus ponens*.

$A, A \to B / B$ (MP)

2) Regras de Prova:

a) A / GA (RG)

b) A / HA (RH)

c) A / LA (*regra de Gödel*: N).

Cada cálculo, portanto, terá MP como regra de dedução, e uma ou mais regras de prova, que podem variar em cada caso.

0.7. DEFINIÇÃO. Seja S um sistema axiomático. Então:

a) Uma *prova em* S é uma sequência $A_1, \ldots, A_n$ de fórmulas tal que, para $1 \leq i \leq n$; i) A_i é um axioma de S; ou ii) há um $j < i$ e um $k < i$ tais que $A_k = A_j \to A_i$; ou iii) há um $j < i$ tal que $A_i = \S A_j$ (onde $\S \in \{G,H,L\}$);

b) Uma fórmula A é um *teorema de* S ($\vdash_S A$) se existe uma prova $A_1, \ldots, A_n$ onde $A_n = A$. (Tal prova é chamada *prova de* A *em* S.);

c) $\nvdash_S A$ sse não é o caso que $\vdash_S A$;

d) $\Gamma \vdash_S A$ (A é uma *consequência sintática de* Γ *em* S) se há uma sequência de fórmulas $A_1,\ldots,A_n$ tal que $A_n = A$ e, para $1 \leqq i \leqq n$, i) $A_i \in \Gamma$; ou ii) A_i é um axioma de S; ou iii) há um $j < i$ e um $k < i$ tais que $A_k = A_j \to A_i$; ou iv) há um $j < i$ tal que $A_i = \S A_j$ (onde $\S \in \{G,H,L\}$) e alguma subsequência de $A_1,\ldots,A_j$ é uma prova de A_j;

e) $\Gamma \nvdash_S A$ sse não é o caso que $\Gamma \vdash_S A$.[6]

0.8. DEFINIÇÃO. B é uma *subfórmula* de A se: a) $B = A$; ou b) para alguma subfórmula C de A, i) $C = \S B$, onde $\S$ é um operador unário; ou ii) para algum D, $C = B \to D$ ou $C = D \to B$.

0.9. DEFINIÇÃO. Seja S um sistema axiomático. $A_1,\ldots,A_n$ é uma *sequência normal* (de S) se, para $1 \leqq i \leqq n$,

a) se B é uma subfórmula de A_i então existe $j < i$ tal que $B = A_j$;

b) se $A_i = LA_k$, $1 \leqq k < i$, então existe $e < i$, $j < i$ tais que $A_e = GA_k$ e $A_j = HA_k$;[7]

c) para $1 \leqq i \leqq j$, se $A_i = A_j$ então $i = j$.

Como foi mencionado no início deste trabalho, o objetivo principal é apresentar semânticas de valorações para alguns cálculos. Valorações (para um sistema S numa linguagem L) serão funções de FOR_L no conjunto dos valores de verdade ($\{0,1\}$) que satisfazem certas condições - condições essas que serão especificadas para cada cálculo.

Nosso procedimento consistirá em três etapas: primeiramente definiremos funções de FOR_L em $\{0,1\}$ que respeitem as propriedades clássicas (extensionais) - chamá-las-emos "semi-valorações".

---

[6] Quando não houver risco de confusão, usaremos '$\vdash$' ao invés de '$\vdash_S$'.

[7] A cláusula b) é obviamente vácua para cálculos cuja linguagem é $L1$.

0.10. DEFINIÇÃO. Seja S um sistema axiomático numa linguagem L. Uma *semi-valoração* s é uma função de FOR_L em $\{0,1\}$ tal que:

1) $s(-A) = 1$ sse $s(A) = 0$;

2) $s(A \rightarrow B) = 1$ sse $s(A) = 0$ ou $s(B) = 1$.

Em seguida, para cada cálculo S, definiremos uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração para S - onde $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal de S.

Finalmente, o conceito de valoração para S é obtido da seguinte maneira:

0.11. DEFINIÇÃO. Seja S um cálculo. v é uma *valoração para* S se, para toda sequência normal $A_1,\ldots,A_n$, v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração para S.

0.12. DEFINIÇÃO. Seja S um sistema axiomático para o qual já foram definidas valorações. Então:

a) $\models_S F$ sse para toda valoração v para S, $v(F) = 1$;

b) $\Gamma \models_S F$ sse para toda valoração v para S, se $v(F') = 1$, para toda $F' \in \Gamma$, então $v(F) = 1$.[8]

Definidas as valorações para um cálculo S, trataremos de provar teoremas de correção e completude. As provas de completude a serem efetuadas seguirão as vias habituais, usando as propriedades dos conjuntos F-saturados, cuja definição e propriedades damos a seguir. (Cf. Loparić 1977.)

Seja S um sistema qualquer.

0.13. DEFINIÇÃO. Δ é um *conjunto* F-*saturado* se $\Delta \nvdash F$ e para toda $F' \notin \Delta$, $\Delta \cup \{F'\} \vdash F$.

---

[8] Quando não houver risco de confusão, usaremos '$\models$' ao invés de '$\models_S$'.

0.14. LEMA. Se Δ é um conjunto F-saturado,

a) $A \in \Delta$ sse $\Delta \vdash A$;

b) $-A \in \Delta$ sse $A \notin \Delta$;

c) $A \to B \in \Delta$ sse $A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$.

0.15. LEMA: Se $\Gamma \nvdash F$, há um conjunto F-saturado Δ tal que $\Gamma \subset \Delta$.

Para as provas dos lemas 0.14 e 0.15, v. Loparić 1977.

Ao longo deste trabalho, usaremos algumas abreviações importantes, que listamos a seguir.

0.16. DEFINIÇÃO. Seja Γ um conjunto de fórmulas, f uma função de um conjunto Δ, contendo Γ, em $\{0,1\}$ e $\S \in \{G,H,L\}$:

1) $\Gamma^{\S} =_{df} \{F \in \Gamma$: para alguma F', $F = \S F'\}$;

2) $\varepsilon(\Gamma^{\S}) =_{df} \{F: \S F \in \Gamma\}$;

3) $f \models \Gamma =_{df}$ para toda $F \in \Gamma$, $f(F) = 1$;

4) $\Gamma_{f,u} =_{df} \{F \in \Gamma: f(F) = u\}$.

0.17. DEFINIÇÃO. Seja S um cálculo numa linguagem L, $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal de S e f, f' funções de FOR_L em $\{0,1\}$. Para $1 \leq k \leq n$, dizemos que:

a) $f(k)f'$ sse $f' \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_k\}^{G}_{f,1})$ e $f \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_k\}^{H}_{f',1})$;

b) $f(L,k)f'$ sse $f' \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_k\}^{L}_{f,1})$.

PARTE I

CÁLCULOS TEMPORAIS

Capítulo I

O CÁLCULO Kt

I.1. APRESENTAÇÃO

O Cálculo Kt, introduzido por E.J. Lemmon em 1965 (Cf. Prior 1967, p.176) procura enfeixar todas as inferências que são válidas quando não se faz suposição alguma sobre a natureza do tempo. Por esta razão, Kt é também chamado "básico" ou "minimal".[9]

A linguagem de Kt, bem como a de todos os cálculos temporais estudados nesta Parte I, é $L1$.

Uma base axiomática para Kt é obtida adicionando-se aos esquemas de axiomas clássicos (A1 - A3) os seguintes esquemas não-clássicos:

A4. $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$

A5. $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$

A6. $-G-HA \rightarrow A$

A7. $-H-GA \rightarrow A$

As regras de prova de Kt são RG e RH. (A regra de dedução de todos os cálculos, como foi dito, é MP.)

Em Kt são esquemas de teoremas:

---

[9] V. Apêndice para uma relação de todos os cálculos considerados nesta dissertação.

T1. $PGA \to A$, $FHA \to A$

T2. $A \to GPA$, $A \to HFA$

T3. $G(A \to B) \wedge G(B \to A) \to (GA \leftrightarrow GB)$, $H(A \to B) \wedge H(B \to A) \to (HA \leftrightarrow HB)$

T4. $G(A \wedge B) \leftrightarrow (GA \wedge GB)$, $H(A \wedge B) \leftrightarrow (HA \wedge HB)$

T5. $G(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow G(A \to B) \wedge G(B \to A)$, $H(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow H(A \to B) \wedge H(B \to A)$

T6. $GA \to -F-A$, $HA \to -P-A$

T6a. $G-A \to -FA$, $H-A \to -PA$

T6b. $-GA \to F-A$, $-HA \to P-A$

T6c. $GGA \to -FF-A$, $HHA \to -PP-A$

T6d. $GG-A \to -FFA$, $HH-A \to -PPA$

T6e. $-GGA \to FF-A$, $-HHA \to PP-A$

T6f. $GF-A \to -FGA$, $HP-A \to -PHA$

T6g. $FG-A \to -GFA$, $PH-A \to -HPA$

T7. $-F(A \vee B) \leftrightarrow (-FA \wedge -FB)$, $-P(A \vee B) \leftrightarrow (-PA \wedge -PB)$

T8. $F(A \vee B) \leftrightarrow (FA \vee FB)$, $P(A \vee B) \leftrightarrow (PA \vee PB)$

T9. $G(A \to B) \to (FA \to FB)$, $H(A \to B) \to (PA \to PB)$

T10. $(GA \vee GB) \to G(A \vee B)$, $(HA \vee HB) \to H(A \vee B)$

T11. $F(A \wedge B) \to (FA \wedge FB)$, $P(A \wedge B) \to (PA \wedge PB)$[10]

T12. $G(-A \to A) \leftrightarrow GA$, $H(-A \to A) \leftrightarrow HA$

T13. $G(A \to -A) \leftrightarrow G-A$, $H(A \to -A) \leftrightarrow H-A$

T14. $G(B \to A) \wedge G(-B \to A) \leftrightarrow GA$, $H(B \to A) \wedge H(-B \to A) \leftrightarrow HA$

T15. $G(A \to B) \wedge G(A \to -B) \leftrightarrow G-A$, $H(A \to B) \wedge H(A \to -B) \leftrightarrow H-A$

T16. $GA \to G(B \to A)$, $HA \to H(B \to A)$

T17. $G-A \to G(A \to B)$, $H-A \to H(A \to B)$

T18. $GA \to (FB \to F(A \wedge B))$, $HA \to (PB \to P(A \wedge B))$

---

[10] As conversas de T10 e T11 não são teoremas de Kt.

Algumas regras derivadas de Kt:

R1. $A \leftrightarrow B$ / $GA \leftrightarrow GB$

R2. $A \leftrightarrow B$ / $HA \leftrightarrow HB$

R3. $A \rightarrow B$ / $FA \rightarrow FB$

R4. $A \rightarrow B$ / $PA \rightarrow PB$

R5. A / $FB \rightarrow F(A \wedge B)$

R6. A / $PB \rightarrow P(A \wedge B)$

O leitor atento provavelmente já terá intuído a simetria existente entre os operadores G e H. Ao longo desta dissertação, portanto, usaremos '∇' como uma variável metalinguística para 'G' e 'H', por comodidade, em definições ou provas que valem indiferentemente para os dois casos.

As seguintes propriedades valem para Kt.

I.1.1. Teorema da Dedução. $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ sse $\Gamma \vdash B \rightarrow A$.

PROVA. Prova-se da maneira usual (v. por exemplo Mendelson 1979, p.32). O caso em que uma fórmula é obtida por R∇ é contornado devido às condições expressas no item d)iv) da definição 0.7 (como se segue: suponhamos que ∇C foi obtido por R∇ a partir de C. Então há uma subsequência da dedução de ∇C a partir de $\Gamma \cup \{B\}$ que é uma prova de C. Ou seja, $\vdash C$ e, por R∇, $\vdash \nabla C$. Ora, $\vdash \nabla C \rightarrow (B \rightarrow \nabla C)$ (A1). Logo, por MP, $\Gamma \vdash B \rightarrow \nabla C$.

I.1.2. Se $\Gamma \vdash A$, então $\nabla\Gamma \vdash \nabla A$ (onde $\nabla\Gamma = \{\nabla B\colon B \in \Gamma\}$).

PROVA. Suponhamos que $\Gamma \vdash A$. Temos quatro casos:

1) $A \in \Gamma$. Então $\nabla A \in \nabla\Gamma$ e, obviamente, $\nabla\Gamma \vdash \nabla A$.

2) A é axioma. Então $\vdash A$, e $\vdash \nabla A$ (por R∇). Logo, $\nabla\Gamma \vdash \nabla A$.

3) A foi obtida a partir de B e $B \rightarrow A$ por MP. Pela hipótese de indução, temos $\nabla\Gamma \vdash \nabla B$ e $\nabla\Gamma \vdash \nabla(B \rightarrow A)$. Como $\vdash \nabla(B \rightarrow A) \rightarrow (\nabla B \rightarrow \nabla A)$ (A4 ou A5), $\nabla\Gamma \vdash$

$\nabla B \rightarrow \nabla A$. Por MP, $\nabla\Gamma \vdash \nabla A$.

4) $A = \nabla B$, e foi obtida por $R\nabla$. Se $\Gamma \vdash A$, então há uma prova de A em Kt, i.e., $\vdash A$. Por $R\nabla$, $\vdash \nabla A$, e $\nabla\Gamma \vdash \nabla A$.

I.2. VALORAÇÕES PARA Kt

Vamos então especificar as condições que as $A_1,\dots,A_n$-valorações devem satisfazer para que sejam valorações (para Kt).

I.2.1. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\dots,A_n$-*valoração* (para Kt) se $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal de Kt e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e, se para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)v'$;[11] para $\nabla = H$, $v'(n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$ então para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$ existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(n-1)v$.

Com isto ficam definidas as $A_1,\dots,A_n$-valorações e valorações para Kt (v. def. 0.11). O uso de sequências de fórmulas (sequências normais) e valorações que respeitam os requisitos de Kt (ou seja, que são "normais" - v. def. 2. 4[12]) apenas no âmbito da sequência é de grande importância para a decidibilidade, como se verá posteriormente.

Dada uma sequência normal $A_1,\dots,A_n$, e tendo sido definida uma valo-

---

[11] V. Introdução, def. 0.17.

[12] Nas referências dentro de um mesmo capítulo, o número do capítulo não será mencionado.

ração até um A_i qualquer (i.e., uma $A_1,\dots,A_i$-valoração), podemos estendê-la para A_{i+1}, e assim por diante. Definiremos então uma extensão em particular (extensão canônica) e mostraremos que ela satisfaz as exigências da def. 2.1 (ou seja, que é uma $A_1,\dots,A_{i+1}$-valoração).

I.2.2. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal. Dizemos que v' é a *extensão canônica* de v a $A_1,\dots,A_n$ se:

A) ou, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$ e $v' = v$;

B) ou, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ e v' é uma função de FOR_{L1} em $\{0,1\}$ tal que, para toda fórmula F,

1) se A_n não é subfórmula de F, então $v'(F) = v(F)$;

2) se A_n é subfórmula de F, então:

a) para $F = A_n$, $v'(F) = 0$ sse existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\bar{v}$ tal que $\bar{v}(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)\bar{v}$; para $\nabla = H$, $\bar{v}(n-1)v$;

b) para $F = -F'$, $v'(F) = 1$ sse $v'(F') = 0$;

c) para $F = F' \rightarrow F''$, $v'(F) = 1$ sse $v'(F') = 0$ ou $v'(F'') = 1$;

d) para $F = \nabla F'$, $v'(F) = v(F)$.

I.2.3. LEMA. Se v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' é a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$, então v' é uma semi-valoração.

PROVA. I) Suponhamos que, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$. Por 2.2.A, $v' = v$. Como v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração, v - e portanto v' - é uma semi-valoração, pela def. 2.1.

II) Suponhamos que, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$. Definamos, para cada fórmula F, $g(F)$, da seguinte maneira: 1) Se: a) A_n não é subfórmula de F; ou b) A_n é subfórmula de F e, para alguma F', $F = \nabla F'$, então $g(F) = 0$. 2) Se A_n é subfórmula de F e, para alguma F', F", $F = -F'$ ou $F = F' \rightarrow F''$ então: para $F = -F'$, seja $g(F) = g(F') + 1$, e para $F = F' \rightarrow F''$, seja $g(F) = g(F') + g(F'') + 1$.

Suponhamos que $g(F) = 0$. Então $F = A_n$, $A_n = \nabla A_m$ e as condições das semi-valorações são vácuas, ou, nos outros casos, por 2.2.B.1 e 2.2.B.2.d, $v' = v$; logo, também aqui as condições das semi-valorações são respeitadas.

Suponhamos que $g(F) > 0$. Caímos então nos casos onde v' é construída por 2.2.B.2.b ou 2.2.B.2.c, e verificamos diretamente que também nesses casos as condições das semi-valorações são observadas. Portanto, v' é uma semi-valoração.

I.2.4. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 \leqq k \leqq n$, e $\nabla \in \{G, H\}$, dizemos que v é ∇-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(k)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(k)v$.

I.2.5. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Em primeiro lugar, v' é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração, pois, por 2.3, é uma semi-valoração e, por construção, para $1 \leqq i \leqq n-1$, $v'(A_i) = v(A_i)$. Provemos que é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

1- Se, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, v' satisfaz todas as condições da definição (2.1) de uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

2- Se, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$, temos dois casos a examinar:

I) Seja $v'(A_n) = 0$. Suponhamos que $\nabla = G$. Por 2.2.B.2.a, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e $v(n-1)\overline{v}$. Como, para $1 \leqq i \leqq n-1$, $v'(A_i) = v(A_i)$, $v'(n-1)\overline{v}$; assim, são satisfeitas as condições exigidas na definição de $A_1,\dots,A_n$-valoração (2.1.2.I). Para $\nabla = H$, prova-se analoga-

II) Seja $v'(A_n) = 1$. Suponhamos que $\nabla = G$, e que exist

$p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Então $v(A_p) = 0$ e, como v é G-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(n-1)v_p$. Logo, $v'(n-1)v_p$. Ora, se tivéssemos $v_p(A_m) = 0$, por 2.2.B.2.a deveríamos ter $v'(A_n) = 0$ (tomando $\overline{v} = v_p$); portanto, $v_p(A_m) = 1$. Assim, $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v'(n-1)v_p$. Por 2.1.2.II, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $\nabla = H$, prova-se analogamente.

I.2.6. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Então v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. Por indução em n. Para $n = 1$ a propriedade é trivial. Seja $n > 1$ e suponhamos que toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso segue-se em primeiro lugar do lema 2.5 que:

(¶) As extensões canônicas das $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\dots,A_n$ são $A_1,\dots,A_n$-valorações.

Provemos agora que v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal, examinando os casos.

1- Se, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, segue-se, do fato de que v é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, que v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

2- Suponhamos que, para algum $m < n$, $A_n = GA_m$.

I) Seja $v(A_n) = 0$. Temos que:

1) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1})$;

2) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{H}_{v',1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{H}_{v',1})$ para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v'.

Como, por hipótese de indução, v é G-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, temos;

3) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(n-1)v_p$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\dots,A_n$. Então:

4) $\overline{v}_p(A_q) = 0$ e $v(n-1)\overline{v}_p$. De 1), 2) e 4): 5) $v(n)\overline{v}_p$.

De (¶), 3), 4) e 5), então:

6) para todo p, todo q, q < p < n tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração $\overline{v}_p$ tal que $\overline{v}_p(A_q) = 0$ e $v(n)\overline{v}_p$.

Por outro lado, como v é $A_1,\dots,A_n$-valoração, temos, por 2.1 que:

7) existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_n ($v_n = v'$) tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v(n-1)v_n$.

Seja $\overline{v}_n$ a extensão canônica de v_n a $A_1,\dots,A_n$. Então:

8) $\overline{v}_n(A_m) = 0$ e $v(n-1)\overline{v}_n$.

De 1), 2) e 8),

9) $v(n)\overline{v}_n$.

De (¶), 7), 8) e 9),

10) para p = n, q = m, $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração $\overline{v}_n$ tal que $\overline{v}_n(A_m) = 0$ e $v(n)\overline{v}_n$.

De 6) e 10), então, v é G-$A_1,\dots,A_n$-normal.

Temos ainda pela hipótese de indução que v é H-$A_1,\dots,A_n$-normal. Disso, e do fato de que A_n não é de forma HF, segue-se que:

11) para todo p, todo q, q < p ≦ n tais que $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v_p(n-1)v$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\dots,A_n$. Então:

12) $\overline{v}_p(A_q) = 0$ e $\overline{v}_p(n-1)v$.

De 2) e 12),

13) $\overline{v}_p \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{H}_{v,1})$.

Suponhamos agora que $\overline{v}_p(A_n) = 0$. Então $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}_p,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{G}_{\overline{v}_p,1})$ e, portanto, $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}_p,1})$. Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 1$. Por 2.2.B.2.a, para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$, se $v_p(n-1)\overline{v}$, então $\overline{v}(A_m) =$

$= 1$. Ora, $v_p(n-1)v$; logo, $v(A_m) = 1$. Como $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{\overline{v}_p,1}) \cup \{A_m\}$, $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1})$. Assim, nos dois casos:

14) $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1})$.

De 13) e 14),

15) $\overline{v}_p(n)v$.

De (¶), 11), 12) e 15), então, v é H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

II) Seja $v(A_n) = 1$. Temos:

1) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^G_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{v,1}) \cup \{A_m\}$;

2) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^H_{v',1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{v',1})$ para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v'.

Uma vez que $v(A_n) = 1$, temos disso e de 2.1.2.II que:

3) para todo p, todo q, $q < p \leq n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v(n-1)v_p$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\dots,A_n$. Então:

4) $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $\overline{v}_p(A_m) = 1$ e $v(n-1)\overline{v}_p$.

De 1), 2) e 4),

5) $v(n)\overline{v}_p$.

Portanto, de (¶), 3), 4) e 5), v é G-$A_1,\dots,A_n$-normal.

Prova-se que v é H-$A_1,\dots,A_n$-normal exatamente como no caso I).

3- Suponhamos que, para algum $m < n$, $A_n = HA_m$. A prova é análoga à do caso 2.

I.2.7. COROLÁRIO. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Então v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração e, para $1 \leq i \leq n-1$, $v'(A_i) = v(A_i)$.

PROVA. Como v é $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração, por 2.6 v é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal.

Por 2.5, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. E, por construção, para $1 \leqq i \leqq n-1$, temos que $v'(A_i) = v(A_i)$.

I.2.8. TEOREMA. v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração; 3) v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. A) Se v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração, temos, por 2.1, que $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal e que v é semi-valoração; de 2.6 segue que v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

B) Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, e seja v uma função de FOR_{L1} em $\{0,1\}$ satisfazendo 2) e 3). Mostraremos que v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração por indução em n.

Se $n = 1$, segue de 2) que v é uma A_1-valoração. Seja $n > 1$ e suponhamos que qualquer função de FOR_{L1} em $\{0,1\}$ que satisfaz 2) e é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração. Como v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal, é então G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal; como satisfaz 2), v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração. Temos agora três casos:

1- Para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$. Imediatamente, v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

2- Para algum $m < n$, $A_n = GA_m$.

I) Seja $v(A_n) = 0$. Como v é G-$A_1,\dots,A_n$-normal, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v(n)v_n$. Obviamente v_n é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e $v(n-1)v_n$. Logo, v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

II) Seja $v(A_n) = 1$. Como v é G-$A_1,\dots,A_n$-normal, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(n)v_p$. Obviamente v_p é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração, $v_p(A_m) = 1$ e $v(n-1)v_p$. Logo, v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

3- Para algum $m < n$, $A_n = HA_m$. Prova análoga à do caso 2.

I.3. CORREÇÃO.

I.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leqq i \leqq n$, se A_i é um axioma de Kt, $v(A_i) = 1$.

PROVA. a) Se A_i é um axioma clássico (A1 - A3), segue-se facilmente do fato de que v é uma semi-valoração, que $v(A_i) = 1$.

b) Seja A_i da forma $\nabla(A \to B) \to (\nabla A \to \nabla B)$. Se $v(A_i) = 0$, então $v(\nabla(A \to B)) = v(\nabla A) = 1$, e $v(\nabla B) = 0$. Nesse caso, por 2.8, existiria uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(B) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(n)v'$. Como A, $A \to B \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1})$, teríamos $v'(A) = v'(A \to B) = 1$ e $v'(B) = 0$ - o que não é possível. Logo, $v(A_i) = 1$. Para $\nabla = H$, analogamente.

c) Seja A_i da forma $-G-HA \to A$. Suponhamos que $v(-G-HA) = 1$ - e $v(G-HA) = 0$. Por 2.8 existe v' tal que $v'(-HA) = 0$ e $v(n)v'$. Então $v'(HA) = 1$, ou seja, $A \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v',1})$ e, portanto, $v(A) = 1$. Assim, se $v(-G-HA) = 1$, temos que $v(A) = 1$. Logo, $v(A_i) = 1$.

d) Seja A_i da forma $-H-GA \to A$. Tal como em d), $v(A_i) = 1$.

I.3.2. TEOREMA. Se F é um axioma de Kt e v é uma valoração, então $v(F) = 1$.

PROVA. Seja F um axioma de Kt; v uma valoração. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal tal que, para algum i, $1 \leqq i \leqq n$, $F = A_i$. Por 0.11, v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração e, por 3.1, $v(F) = 1$.

I.3.3. LEMA. Para todo n, todo i, $1 \leqq i \leqq n$, se v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração e $\vdash A_i$, então $v(A_i) = 1$.

PROVA. Por indução no número r de linhas de uma prova de A_i em Kt.

A) se $r = 1$, A_i é um axioma e a propriedade segue de 3.1.

B) se $r > 1$, ou A_i é um axioma, e a propriedade segue de 3.1, ou:

a) A_i foi obtido por MP a partir de B e $B \to A_i$. Temos $\vdash B$ e $\vdash B \to A_i$.

Formamos o seguinte conjunto $\alpha = \{C\colon C$ é subfórmula de $B \to A_i$ e $C \notin \{A_1,\ldots, A_n\}\}$. Se $\alpha \neq \phi$, arranjamos os elementos de α numa sequência $C_1,\ldots,C_k$ que respeite a ordem de comprimento das fórmulas. Caso $\alpha = \phi$, seja $\sigma = A_1,\ldots,A_n$ e $v' = v$. Caso contrário, $\sigma = A_1,\ldots,A_n,C_1,\ldots,C_k$. Formemos uma sequência $v_0,v_1,\ldots,v_k$, onde $v_0 = v$ e, para $1 \leqq j \leqq k$, seja v_j a extensão canônica de v_{j-1}. Tomemos $v' = v_k$. É óbvio então que σ é uma sequência normal e que v' é uma σ-valoração. Como $\vdash B$ e $\vdash B \to A_i$, temos, pela hipótese de indução, que $v'(B) = v'(B \to A_i) = 1$. Logo, $v'(A_i) = 1$. Uma vez que $v(A_i) = v'(A_i)$, então, $v'(A_i) = 1$.

b) $A_i = \nabla A_j$ e foi obtido de A_j por R∇. Ora, para toda sequência normal σ onde ocorre A_i, A_j ocorre também; logo, pela hipótese de indução, para toda σ-valoração v, $v(A_j) = 1$. Segue-se de 2.8 que, para toda σ-valoração v, $v(A_i) = 1$.

I.3.4. COROLÁRIO. Se $\vdash F$, então, para toda valoração v, $v(F) = 1$.

PROVA. Suponhamos que $\vdash F$. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal em que, para algum i, $1 \leqq i \leqq n$, $A_i = F$. Por 0.11 v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração e, por 3.3, $v(F) = 1$.

I.3.5. TEOREMA DE CORREÇÃO. Se $\Gamma \vdash F$, então $\Gamma \models F$.

PROVA. Suponhamos que $\Gamma \vdash F$, e seja $D_1,\ldots,D_r$ uma dedução de F a partir de Γ. Provamos o teorema aplicando indução em r.

A) se $r = 1$, então $F \in \Gamma$ (e nada há a provar) ou F é um axioma, e a propriedade segue de 3.4 e 0.12.

B) seja $r > 1$. Se $F \notin \Gamma$, e se F não é axioma, então:

a) para algum $j < m$, $i < m$, $D_i = D_j \to F$. I.e., F foi obtido por MP a partir de D_i e D_j. Logo $\Gamma \vdash D_i$, $\Gamma \vdash D_j$ e, pela hipótese de indução, $\Gamma \models D_i$, $\Gamma \models D_j$.

Portanto, para toda valoração v, se $v\models\Gamma$, $v(D_j) = v(D_i) = v(D_j \to F) = 1$ - e então $v(F) = 1$. Ou seja, $\Gamma\models F$.

b) para algum $j < m$, $F = \nabla D_j$. I.e., F foi obtido de D_j por R∇. Nesse caso, $\vdash D_j$ e $\vdash F$. Por 3.4, para toda valoração v', $v'(F) = 1$. Então, se $v\models\Gamma$, $v(F) = 1$. Ou seja, $\Gamma\models F$.

I.4. COMPLETUDE

A prova de completude, como foi dito, segue as vias habituais, usando as propriedades dos conjuntos F-saturados (v. 0.13 - 0.15).

I.4.1. LEMA. Se $\Gamma\nvdash\nabla F$, então existe Δ F-saturado tal que $\varepsilon(\Gamma^{\nabla}) \subset \Delta$.

PROVA. Se $\Gamma\nvdash\nabla F$, então $\Gamma^{\nabla}\nvdash\nabla F$ e, por 1.2, $\varepsilon(\Gamma^{\nabla})\nvdash F$. Por 0.15 há um conjunto Δ F-saturado tal que $\varepsilon(\Gamma^{\nabla}) \subset \Delta$.

I.4.2. LEMA. Se Δ é F-saturado, Δ' é F'-saturado, $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$ sse $\varepsilon(\Delta'^{H}) \subset \Delta$.

PROVA. a) Suponhamos que $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$, e seja $A \in \varepsilon(\Delta'^{H})$. Então $HA \in \Delta'$; logo, $-HA \notin \Delta'$. Nesse caso, como $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$, $G\text{-}HA \notin \Delta$; assim, $-G\text{-}HA \in \Delta$. Ora, $\vdash -G\text{-}HA \to A$; logo, $\Delta\vdash A$, i.e., $A \in \Delta$. Portanto, se $A \in \varepsilon(\Delta'^{H})$, então $A \in \Delta$. Ou seja, $\varepsilon(\Delta'^{H}) \subset \Delta$.

b) Suponhamos que $\varepsilon(\Delta'^{H}) \subset \Delta$. Analogamente a a), $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$.

I.4.3. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1,\ldots, A_n$, toda função f, se Δ é um conjunto F-saturado, e $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

PROVA. Primeiramente, é fácil provar, através de 0.14 que:

(¶) para todo Δ, toda F, toda sequência normal $A_1,\ldots,A_n$, toda f; se f é a função característica de Δ, então f é uma semi-valoração.

Apliquemos agora indução em n para provar o teorema. Se $n = 1$ a pro priedade segue trivialmente de (¶) acima. Suponhamos que vale para n-1, e seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, Δ um conjunto F-saturado e f a função característica de Δ.

1- Se, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, trivialmente f é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

2- Para algum $m < n$, $A_n = GA_m$.

I) $f(A_n) = 0$. Então $A_n \notin \Delta$, i.e., $\Delta \not\vdash GA_m$. Por 4.1 existe Δ' A_m-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$. Nesse caso, por 4.2, $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$. Seja f' a função característica de Δ'. Pela hipótese de indução, f e f' são $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações. Ora, $\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{f,1} \subset \Delta$; logo, $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{f,1}) \subset \varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$; assim, $f' \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{f,1})$. Por outro lado, $\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{f,1} \subset \Delta'$; portanto, $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{f',1}) \subset (\Delta'^H) \subset \Delta$. Assim, $f \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{f',1})$. Logo, por 0.17, $f(n-1)f'$. E como Δ' é A_m-saturado, $f'(A_m) = 0$. Temos então que, se $f(A_n) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração f' tal que $f'(A_m) = 0$ e $f(n-1)f'$. Por 2.1, f é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

II) $f(A_n) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $f(A_p) = 0$. Então $GA_q \notin \Delta$ e $\Delta \not\vdash GA_q$. Por 4.1 existe Δ' A_q-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$; nesse caso, por 4.2, $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$. Seja f' a função característica de Δ'. Pela hipótese de indução, f e f' são $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações. Por um argumento análogo ao caso anterior, mostra-se que $f(n-1)f'$. Como Δ' é A_q-saturado, $f'(A_q) = 0$; e como $A_m \in \varepsilon(\Delta^G)$, $f'(A_m) = 1$. Portanto, se $f(A_n) = 1$, f é $A_1,\dots,A_n$-valoração.

3- Para algum $m < n$, $A_n = HA_m$. Prova-se analogamente ao caso 2.

I.4.4. TEOREMA. v é uma valoração sse para algum Δ e alguma F tais que Δ é F-saturado, v é a função característica de Δ.

PROVA. a) Suponhamos que v é uma valoração. Seja $[v]_1 = \{A: v(A) = 1\}$, e seja $[v]_0 = \{B: v(B) = 0\}$. Seja $F \in [v]_0$; então $F \notin [v]_1$, e vê-se facilmente que

$[v]_1 \nvdash F$. Seja F' uma fórmula tal que $F' \notin [v]_1$. Então $v(F') = 0$, $v(-F') = 1$ e $-F' \in [v]_1$. Mas $v(-F' \to (F' \to F)) = 1$; logo, $-F' \to (F' \to F) \in [v]_1$. Assim, $[v]_1 \vdash F' \to F$; logo, $[v]_1 \cup \{F'\} \vdash F$. Seja $\Delta = [v]_1$. Então Δ é um conjunto F--saturado e, por construção de Δ, v é a função característica de Δ.

b) Suponhamos que, para algum Δ e alguma F tal que Δ é F-saturado, v é a função característica de Δ. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal qualquer. Por 4.3, v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Como a sequência $A_1,\ldots,A_n$ é qualquer, por 0.11 v é uma valoração.

I.4.5. TEOREMA DE COMPLETUDE. Se $\Gamma \models F$, então $\Gamma \vdash F$.

PROVA. Suponhamos que $\Gamma \models F$, e que $\Gamma \nvdash F$. Por 0.15 há um conjunto Δ F-saturado tal que $\Gamma \subset \Delta$. Seja v a função característica de Δ. Por 4.4, v é uma valoração. Como $\Gamma \subset \Delta$, $v \models \Gamma$; e como Δ é F-saturado, $v(F) = 0$. Portanto, por 0.12, $\Gamma \nvDash F$ - contradizendo a hipótese. Assim, $\Gamma \vdash F$.

I.5. OBSERVAÇÕES

Como foi visto nas seções 3 e 4, obtivemos, por meio de uma semântica de valorações, teoremas de correção e completude para Kt.[12a] A questão da decidibilidade será levantada numa terceira parte deste trabalho. (V. Parte III.) Passemos agora a outros cálculos temporais, para ver como é possível construir semânticas de valorações para os mesmos, tal como fizemos com Kt.

[12a] O conteúdo deste Capítulo I foi desenvolvido por A.M. Loparić e C.A. Mortari e apresentado no IV Encontro Brasileiro de Lógica (Unicamp, 1980) sob a forma de uma comunicação intitulada "Valorações na Lógica do Tempo".

Capítulo II

O CÁLCULO Km

II.1. APRESENTAÇÃO

Km é uma extensão de Kt, e poderia ser chamado a "lógica do tempo sem primeiro nem último momento". Isto não quer dizer que a ordem temporal deva consistir numa infinidade de momentos distintos: poderia haver apenas finitamente muitos momentos, ordenados em círculo. Trata-se da situação em que, para cada instante t, existe um t' anterior a t, e um t'' posterior a t - seja isso por estarem os momentos numa "reta", seja por estarem em "círculo", etc.

Formamos uma base axiomática para Km acrescentando aos postulados de Kt os seguintes esquemas de axiomas:

A8. $G\text{-}A \rightarrow -GA$

A9. $H\text{-}A \rightarrow -HA$

Todos os teoremas de Kt são teoremas de Km. Entre as fórmulas provadas especificamente em Km, temos:

T19. $GA \rightarrow FA$, $HA \rightarrow PA$

T20. $-FA \rightarrow F\text{-}A$, $-PA \rightarrow P\text{-}A$

T21. $F(A \rightarrow A)$, $P(A \rightarrow A)$

T22. $A \rightarrow FPA$, $A \rightarrow PFA$

T23. $PGA \rightarrow FPA$, $FHA \rightarrow PFA$

T24. PGA → PFA, FHA → FPA

Regras derivadas:

R7. A / FA

R8. A / PA

As propriedades I.1.1 (Teorema da Dedução) e I.1.2 também valem para Km.

II.2. VALORAÇÕES PARA Km

II.2.1. DEFINIÇÃO. ($A_1,\dots,A_n$-*valoração para* Km) A definição é como em Kt (v. I.2.1), com a seguinte nova redação para o item 2.II:

2) II) se $v(A_n) = 1$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v^* tal que $v^*(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)v^*$; para $\nabla = H$, $v^*(n-1)v$; além disso, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(n-1)v$.

A definição de extensão canônica de Km é a mesma de Kt, de modo que não vamos repeti-la aqui. Da mesma forma, o lema que prova que as extensões canônicas são semi-valorações permanece sem alteração.

II.2.2. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 \leq k \leq n$, e $\nabla \in \{G, H\}$, dizemos que:

a) v é ∇_0-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(k)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(k)v$;

b) v é ∇_1-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v^* tal que, pa ra $\nabla = G$, $v(k)v^*$; para $\nabla = H$, $v^*(k)v$.

II.2.3. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção, v' é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração. Provemos que é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

1- Se para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, v' satisfaz as condições da definição 2.1.

2- Se, para algum $m < n$, $A_n = GA_m$, temos dois casos a examinar:

I) $v'(A_n) = 0$. Prova-se como em Kt (v. I.2.5).

II) $v'(A_n) = 1$. Como v é G_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v^* tal que $v(n-1)v^*$. Então $v^*(A_m) = 1$ - caso contrário, por I.2.2.B.2.a, $v'(A_n) = 0$. Obviamente $v'(n-1)v^*$. Suponhamos então que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Prova-se, como em Kt, que existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v'(n-1)v_p$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

3- Se, para algum $m < n$, $A_n = HA_m$, a prova é análoga.

II.2.4. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Então é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. A prova procede como em I.2.6, por indução em n. Para $n = 1$ a propriedade é trivial. Seja $n > 1$. Segue-se de 2.3 e da hipótese de indução que:

(¶) As extensões canônicas das $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\dots,A_n$ são $A_1,\dots,A_n$-valorações.

Teríamos agora três casos. Se $A_n \neq \nabla A_m$, para todo $m < n$, a prova é imediata. Examinemos então o caso em que, para algum $m < n$, $A_n = GA_m$. (Se $A_n = HA_m$, a prova é análoga.) Prova-se que v é G_0- e H_0-$A_1,\dots,A_n$-normal da mes ma forma que se prova em Kt que v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

I) Seja $v(A_n) = 0$. Temos:

1) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1})$;

2) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{H}_{v',1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{H}_{v',1})$, para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v'.

Como v é G_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, temos:

3) existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v^* tal que $v(n-1)v^*$.

Seja $\overline{v}^*$ a extensão canônica de v^* a $A_1,\dots,A_n$. Então:

4) $v(n-1)\overline{v}^*$.

De 1), 2) e 4),

5) $v(n)\overline{v}^*$.

De (¶), 3) e 5), então, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração $\overline{v}^*$ tal que $v(n)\overline{v}^*$. I.e., v é G_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

E, como v é H_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, temos:

6) existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v^* tal que $v^*(n-1)v$.

Seja $\overline{v}^*$ a extensão canônica de v^* a $A_1,\dots,A_n$. Então:

7) $\overline{v}^*(n-1)v$.

De 2) e 7),

8) $\overline{v}^* \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{H}_{v,1})$.

Agora, suponhamos que $\overline{v}^*(A_n) = 0$. Então $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}^*,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^{G}_{\overline{v}^*,1})$, e $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}^*,1})$. Suponhamos que $\overline{v}^*(A_n) = 1$. Então $v(A_m) = 1$ - caso contrário, por I.2.2.B.2.a, $\overline{v}^*(A_n) = 0$. Segue-se que $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}^*,1})$. Portanto, nos dois casos:

9) $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^{G}_{\overline{v}^*,1})$.

De 8) e 9),

10) $\overline{v}^*(n)v$.

Assim, de (¶), 6) e 10), v é H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

II) Seja $v(A_n) = 1$. Prova-se que v é H_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal como no caso I).

Temos:

10) $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1}) \cup \{A_m\}$.

Como $v(A_n) = 1$, temos também, de 2.1.2.II, que:

11) existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v^* tal que $v^*(A_m) = 1$ e $v(n-1)v^*$.

Seja $\overline{v}^*$ a extensão canônica de v^* a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

12) $v(n-1)\overline{v}^*$ e $\overline{v}^*(A_m) = 1$.

Note-se que $\overline{v}^* \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}_{v,1}) \cup \{A_m\}$. Assim, de 2), 10) e 12),

13) $v(n)\overline{v}^*$.

Portanto, de (¶), 11) e 13), v é G_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

O Corolário correspondente a I.2.7 é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt.

II.2.5. TEOREMA. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração e 3) v é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

PROVA. A) Se v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração, a prova segue de 2.1 e 2.4.

B) Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal e v uma função de FOR_{L1} em $\{0,1\}$ satisfazendo 2) e 3). A prova procede por indução em n. Se $n = 1$, segue-se de 2) que v é uma A_1-valoração. Seja $n > 1$. Caso $A_n \neq \nabla A_m$, para todo $m < n$, trivialmente v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Suponhamos que $A_n = GA_m$, para algum $m < n$. (Se $A_n = HA_m$, a prova é análoga.)

O caso $v(A_n) = 0$ não traz diferenças em relação a Kt (v. I.2.8). Seja então $v(A_n) = 1$. Como v é G_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v^* tal que $v(n)v^*$. Obviamente v^* é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração, $v^*(A_m) = 1$ e $v(n-1)v^*$. Suponhamos agora que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que

$A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$. A prova então segue como em I.2.8 e, por 2.1, v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

II.3. CORREÇÃO

II.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leqq i \leqq n$, se A_i é um axioma de Km, $v(A_i) = 1$.

PROVA. a) Se A_i é uma axioma de Kt, prova-se como em Kt que $v(A_i) = 1$.

b) Seja A_i da forma $\nabla{-A} \to -\nabla A$. Suponhamos que $v(A_i) = 0$. Então $v(\nabla{-A}) = 1$ e $v(-\nabla A) = 0$. Logo, $v(\nabla A) = 1$. Para $\nabla = G$, por 2.5 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v^* tal que $v^*(A) = 1$ e $v(n)v^*$; logo, $v^* \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1})$. Então temos que $v^*(-A) = 1$, $v^*(A) = 0$ - uma contradição. Logo, $v(A_i) = 1$. Para $\nabla = H$, a prova é análoga.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5 (do capítulo sobre Kt) aplicam-se imediatamente a Km, sem alteração a não ser substituir-se "Kt" por "Km". Não iremos, portanto, repeti-los aqui.

II.4. COMPLETUDE

Similarmente, tudo o que foi mencionado sobre a completude de Kt aplica-se imediatamente a Km, com as alterações óbvias. A única diferença real acontece na prova do teorema correspondente a I.4.3. Vamos então desenvolvê-lo aqui.

II.4.1. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1,\ldots,A_n$, toda função f, se Δ é um conjunto F-saturado, e $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

PROVA. A prova procede como em Kt (v. I.4.3). O caso em que há diferença é quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ e $f(A_n) = 1$. Suponhamos que $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, a prova é análoga.) Temos $f(A_n) = 1$, i.e., $f(GA_m) = 1$, e $f(-GA_m) = 0$. Como $\vdash G{-}A_m \to -GA_m$, $\Delta \vdash G{-}A_m \to -GA_m$, e $f(G{-}A_m \to -GA_m) = 1$. Uma vez que f é semi-valoração (v. a prova em Kt), $f(G{-}A_m) = 0$. Por I.4.1 existe um conjunto Δ^* $-A_m$-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta^*$. Por I.4.2 $\varepsilon(\Delta^{*H}) \subset \Delta$. Seja f^* a função característica de Δ^*. Pela hipótese de indução f e f^* são $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações. Ora, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{f,1} \subset \Delta$, logo, $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{f,1}) \subset \varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta^*$. Então $f^* \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{f,1})$. Por outro lado, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{f^*,1} \subset \Delta^*$; portanto, $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{f^*,1}) \subset \varepsilon(\Delta^{*H}) \subset \Delta$. Então $f \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{f^*,1})$. Segue-se que $f(n-1)f^*$. E, como Δ^* é $-A_m$-saturado, $f^*(-A_m) = 0$, $f^*(A_m) = 1$. Assim, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração f^* tal que $f^*(A_m) = 1$ e $f(n-1)f^*$. Supondo-se agora que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $f(A_p) = 0$, a prova segue como em Kt. E, por 2.1, f é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

Capítulo III

O CÁLCULO Kr

III.1. APRESENTAÇÃO

Kr (v. Landim 1974, p.84) é um dos vários sistemas que poderiam ser chamados "lógicas do tempo circular" - ou seja, que procuram exprimir a circularidade do tempo. Contudo, caso suponhamos tal circularidade, nem todas as fórmulas que seriam intuitivamente válidas são teoremas de Kr (e.g., GA → HA). Estudaremos no próximo capítulo um outro cálculo, Ks, onde GA → HA, por exemplo, é um teorema. Juntando Kr e Ks obtemos um sistema do qual todas as fórmulas que intuitivamente exprimem a circularidade do tempo são teoremas. (Cf. Landim 1974, p.85)

Formamos uma base axiomática para Kr adicionando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A10. GA → A.

Não há necessidade de se acrescentar HA → A como postulado, pois esta fórmula pode ser deduzida a partir de A10.

Entre os teoremas de Kr, temos:

T25. HA → A

T26. A → FA, A → PA

T27. G-A → -GA, H-A → -HA

T28. GGA → GA, HHA → HA

T29. $GA \to (A \to -H-GA)$, $HA \to (A \to -G-HA)$ [13]

Note-se que T27 corresponde aos axiomas A8 e A9 de Km. Portanto, Km é um subsistema de Kr.

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para Kr.

III.2. VALORAÇÕES PARA Kr

As alterações, com respeito a Kt, são poucas.

III.2.1. DEFINIÇÃO. ($A_1,\ldots,A_n$-*valoração para* Kr) A mesma de Kt (v. I.2.1.), alterando-se apenas o item abaixo:

2) II) se $\upsilon(A_n) = 1$, então $\upsilon(A_m) = 1$ e para todo p, todo q, $q < p < n$, tais que $A_p = \nabla A_q$ e $\upsilon(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração υ_p tal que $\upsilon_p(A_q) = 0$, $\upsilon_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $\upsilon(n-1)\upsilon_p$; para $\nabla = H$, $\upsilon_p(n-1)\upsilon$.

As valorações para Kr, convém lembrar, são obtidas pela definição geral (0.11). A definição de extensão canônica é a mesma de Kt (I.2.4). Prova-se que as extensões canônicas são semi-valorações da mesma forma que em I.2.5.

III.2.2. DEFINIÇÃO. Seja υ uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que:

a) υ é ∇_0-$A_1,\ldots,A_k$-normal se, para todo p, todo q, $q < p \leqq k$, tais que $A_p =$

---

[13] A adição do esquema T28 a Kt gera o cálculo Kd - a "lógica do tempo denso". Adicionando o esquema T29 a Kt, teríamos uma "lógica do tempo discreto" - Ke. (V. Burgess 1979, p.570) Uma vez que tanto T28 como T29 são dedutíveis em Kr, não é possível fazer a distinção entre o caráter denso ou discreto do tempo. Tal só pode ser feito a partir de um cálculo que não tenha as duas fórmulas como teoremas (Kd, por exemplo).

∇A_q e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(k)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(k)v$;

b) v é ∇_1-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se, para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = 1$.

III.2.3. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção, v' é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração. A prova procede então por indução em n, como em I.2.5. A diferença com relação à prova em Kt ocorre quando $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$, e $v'(A_n) = 1$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, a prova é análoga.) Como v é G_1- e H_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, para todo p, todo q, $q < p < n$, se $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$, e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = 1$. Ou seja, $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{v,1})$ e $v \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{v,1})$. Por 0.17, $v(n-1)v$. Temos agora, de I.2.2.B.2.a, para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$, se $\overline{v}(n-1)v$, então $\overline{v}(A_m) = 1$. Segue-se que $v(A_m) = 1$. Suponhamos então que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Prova-se como em I.2.5 que existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0, v_p(A_m) = 1$ $v'(n-1)v_p$. Além disso, como $v(A_m) = 1$, $v'(A_m) = 1$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

III.2.4. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Então v é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. A prova é feita do modo habitual, por indução em n. A propriedade é trivial para n = 1. Seja portanto n > 1. Temos imediatamente que (¶) as extensões canônicas das $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações até $A_1,\dots,A_n$ são $A_1,\dots,A_n$-valorações.

Prova-se que v é G_0- e H_0-$A_1,\dots,A_n$-normal do mesmo modo como prova mos em Kt (v. I.2.6) que as $A_1,\dots,A_n$-valorações são G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normais. Resta provar que v é G_1- e H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal, e para isto teríamos três casos a considerar. Quando $A_n \neq \nabla A_m$, para todo $m < n$, a prova é imediata. Seja $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$, e seja $\nabla = G$. (Se $\nabla = H$, a prova é similar.)

I) Seja $v(A_n) = 0$. Segue-se disto e do fato de que v é G_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal que, para todo p, todo q, $q < p \leq n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 1$, que $v(A_q) = 1$. Ou seja, v é G_1-$A_1,\dots,A_n$-normal. Além disso, como A_n não é de forma HF, para alguma F, e v é H_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, temos que para todo p, todo q, $q < p \leq n$ tais que $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = 1$. Ou seja, v é H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

II) Seja $v(A_n) = 1$. Prova-se que v é H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal como no caso I) acima. Pela definição 2.1 temos que $v(A_m) = 1$. I.e., para $p = n$, $q = m$, $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = 1$. E como v é G_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, segue-se que v é G_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

O Corolário deste lema, correspondente a I.2.7, é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt.

III.2.5. TEOREMA. v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração e 3) v é G_0-, G_1-, H_0- e H_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. A) Se v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração, a prova segue de 2.1 e 2.4.

B) Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal e v uma função de FOR_{L1} em $\{0,1\}$ satisfazendo 2) e 3). A prova é feita por indução em n, como em I.2.8. A diferença com relação a I.2.8 ocorre quando $n > 1$, $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$, e $v(A_n) = 1$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) Como v é G_1-$A_1,\dots,A_n$-nor mal, $v(A_m) = 1$. Suponhamos então que existe p, existe q, $q < p < n$, tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$. A prova então segue como I.2.8 e, por 2.1, v é uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração.

III.3. CORREÇÃO

III.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração; então, para $1 \leq i \leq n$, se A_i é um axioma de Kr, $v(A_i) = 1$.

PROVA. a) Se A_i é um axioma de Kt, prova-se como em Kt (I.3.1) que $v(A_i) = 1$.
b) Seja A_i da forma $GA \to A$. Suponhamos que $v(GA) = 1$. Como v é uma $A_1, \ldots A_n$-valoração, por 2.5 $v(A) = 1$ - e é então impossível que $v(A_i) = 0$. Ou seja, $v(A_i) = 1$.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, do capítulo sobre Kt, aplicam-se imediatamente a Kr. Não achamos necessário repeti-los aqui, uma vez que não há alterações.

III.4. COMPLETUDE.

Da mesma forma, os lemas e teoremas com respeito à completude de Kt aplicam-se a Kr sem alterações (a não ser, é claro, ler-se "Kr" onde se lê "Kt"). Vamos desenvolver aqui apenas o teorema correspondente a I.4.3, que é onde existe uma diferença, se bem que mínima.

III.4.1. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1, \ldots, A_n$, toda função f, se Δ é um conjunto F-saturado e $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração.

PROVA. A prova procede como em Kt (v. I.4.3). O caso em que há diferença é quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ e $f(A_n) = 1$. Suponhamos que $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, a prova é análoga.) Temos $f(A_n) = 1$, i.e., $f(GA_m) = 1$. Então $GA_m \in \Delta$, e $\Delta \vdash GA_m$. Ora, $\vdash GA_m \to A_m$; logo, $\Delta \vdash A_m$, $A_m \in \Delta$ e $f(A_m) = 1$. Supondo-se agora que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $f(A_p) = 0$, a prova segue como em Kt. E, por 2.1, f é uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração.

Capítulo IV

O CÁLCULO Ks

IV.1. APRESENTAÇÃO

Conforme havíamos mencionado no capítulo anterior, estudaremos neste capítulo o cálculo Ks (v. Landim 1974, p.89). Formamos uma base axiomática para Ks acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A11. $GA \to HA$

Não há necessidade de se juntar $HA \to GA$ como axioma, pois esta fórmula pode ser provada em Ks. Vejamos então alguns teoremas de Ks:

T30. $HA \to GA$

T31. $-G-GA \to A$, $-H-HA \to A$

T32. $FA \to PA$, $PA \to FA$

T33. $FGA \to A$, $PHA \to A$

T34. $A \to GFA$, $A \to HPA$

T35. $GA \leftrightarrow HA$, $HA \leftrightarrow GA$

T36. $FA \leftrightarrow PA$, $PA \leftrightarrow FA$

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também são válidas em Ks.

IV.2. VALORAÇÕES PARA Ks

IV.2.1. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\dots,A_n$-*valoração* (para Ks) se $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal de Ks e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e, se para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$, $v(n-1)v'$ e $v'(n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$ então para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$ existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$, $v(n-1)v_p$ e $v_p(n-1)v$.

Valorações para Ks, lembremo-nos, são obtidas pela definição geral (0.11). A definição de extensão canônica sofre uma pequena alteração com relação a Kt:

IV.2.2. DEFINIÇÃO (*extensão canônica*) Como em Kt (v. I.2.2), com nova redação para o item 2) a):

2) a) para $F = A_n$, $v'(F) = 0$ sse existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(n-1)v$.

Prova-se como em I.2.5 que as extensões canônicas são semi-valorações.

IV.2.3. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 < k \leq n$, dizemos que v é ∇-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(n-1)v_p$ e $v_p(n-1)v$.

IV.2.4. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Como em I.2.5. v' é obviamente uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração; provemos que é $A_1,\dots,A_n$-valoração. Seja $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$. Se $v'(A_n) = 0$, por 2.2 existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(n-1)v$. Então $v'(n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(n-1)v'$; logo, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Consideremos então $v'(A_n) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v'(A_p) = 0$. Então $v(A_p) = 0$ e, como v é ∇-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(n-1)v_p$ e $v_p(n-1)v$. Por 2.2.B.2.a, $v_p(A_m) = 1$ (caso contrário, $v'(A_n) = 0$). E, é claro, $v'(n-1)v_p$ e $v_p(n-1)v'$. Também neste caso, portanto, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

IV.2.5. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Então v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. O mecanismo da prova é o mesmo de I.2.6, i.e., por indução em n. A propriedade é trivial para $n = 1$. Seja $n > 1$. Da hipótese de indução e do lema anterior, segue-se que (¶) as extensões canônicas das $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\dots,A_n$ são $A_1,\dots,A_n$-valorações.

Consideremos o caso importante, isto é, quando $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.)

I) $v(A_n) = 0$. Temos:

1) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^G_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{v,1})$;

2) $\varepsilon(\{A_1,\dots,A_n\}^H_{v',1}) = \varepsilon(\{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{v',1})$ para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v'.

Por hipótese de indução, v é G-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Então:

3) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(n-1)v_p$ e $v_p(n-1)v$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\dots,A_n$. Então:

4) $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $v(n-1)\overline{v}_p$ e $\overline{v}_p(n-1)v$.

De 1), 2) e 4), e a definição 0.17,

5) $v(n)\overline{v}_p$, e

6) $\overline{v}_p \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v,1})$.

Precisamos provar então que $v \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1})$. Se $\overline{v}_p(A_n) = 0$, não há problema. Seja $\overline{v}_p(A_n) = 1$. Nesse caso, por 2.2.B.2.a, $v(A_m) = 1$ - caso contrário $\overline{v}_p(A_n) = 0$. Nos dois casos, portanto:

7) $v \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1})$.

De 6) e 7), por 0.17,

8) $\overline{v}_p(n)v$.

De (¶), 3), 4), 5) e 8), então:

9) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{v}_p$ tal que $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $v(n)\overline{v}_p$ e $\overline{v}_p(n)v$.

Por outro lado, como v é $A_1,\ldots,A_n$-valoração, temos, por 2.1 que:

10) existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n $(v_n = v')$ tal que $v_n(A_m) = 0$, $v(n-1)v_n$ e $v_n(n-1)v$.

Seja $\overline{v}_n$ a extensão canônica de v_n a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

11) $\overline{v}_n(A_m) = 0$, $v(n-1)\overline{v}_n$ e $\overline{v}_n(n-1)v$.

De 1), 2) e 11),

12) $v(n)\overline{v}_n$.

Prova-se por um raciocínio similar ao feito acima que:

13) $\overline{v}_n(n)v$.

De (¶), 10), 11), 12) e 13),

14) para $p = n$, $q = m$, $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{v}_n$ tal que $\overline{v}_n(A_m) = 0$, $v(n)\overline{v}_n$ e $\overline{v}_n(n)v$.

De 9) e 14), então, v é G-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

O leitor já terá percebido que as diferenças em relação a Kt (I.2.6) são poucas. Onde em Kt tínhamos de provar, por exemplo, que "$v(n)v_p$", temos agora de provar que "$v(n)v_p$ e $v_p(n)v$" - o que é feito da maneira ilustrada no caso acima. Omitiremos, portanto, os demais casos desta prova, que prossegue como em I.2.6. O leitor não terá dificuldade alguma em desenvolver os casos não apresentados.

O lema 2.5 tem um corolário, que é enunciado e provado como seu correspondente em Kt (v. I.2.7).

IV.2.6. TEOREMA. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração; 3) v é G- e H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.
PROVA. Prova-se como o teorema correspondente no capítulo sobre Kt (I.2.8.). As alterações são mínimas, e não oferecem dificuldade alguma.

IV.3. CORREÇÃO

IV.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leq i \leq n$, se A_i é um axioma de Ks, $v(A_i) = 1$.
PROVA. a) Se A_i é um axioma de Kt, prova-se como em Kt (I.3.1) que $v(A_i) = 1$.
b) Seja A_i da forma $GA \to HA$. Suponhamos que $v(A_i) = 0$. Então $v(GA) = 1$ e $v(HA) = 0$. Por 2.6 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(A) = 0$, $v(n)v'$ e $v'(n)v$. Mas então, por 0.17, $v' \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1})$. Logo, $v'(A) = 1$ - uma contradição. Portanto, $v(A_i) = 1$.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, de Kt, aplicam-se imediatamente a Ks, sem alteração alguma. Não é necessário, assim, repeti-los aqui.

IV.4. COMPLETUDE

A seção sobre a completude de Ks apresenta alterações com relação a Kt apenas no teorema correspondente a I.4.3 (ou seja, na prova de que a função característica de um conjunto F-saturado, para alguma F, é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração). A prova de tal teorema não oferece dificuldades, mas para efetuá-la necessitamos do lema abaixo:

IV.4.1. LEMA. Se Δ é um conjunto F-saturado, Δ' é F'-saturado, $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subset \Delta'$ sse $\varepsilon(\Delta'^{\nabla}) \subset \Delta$.

PROVA. Seja $\nabla = G$, e suponhamos que $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$. Seja $A \in \varepsilon(\Delta'^{G})$. Então $GA \in \Delta'$ e $\Delta' \vdash GA$. Como $\vdash GA \to HA$, $\Delta' \vdash HA$, e $HA \in \Delta'$. Então $A \in \varepsilon(\Delta'^{H})$. De I.4.2, temos que $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$ sse $\varepsilon(\Delta'^{H}) \subset \Delta$. Então $A \in \Delta$.

Suponhamos agora que $\varepsilon(\Delta'^{G}) \subset \Delta$. A prova é análoga.

Para $\nabla = H$, prova-se da mesma forma.

Demonstrado este lema, a prova do teorema correspondente a I.4.3 faz-se sem dificuldade alguma, razão pela qual vamos omiti-la.

Capítulo V

O CÁLCULO Kc3

V.1. APRESENTAÇÃO

Kc3 foi apresentado por Prior, se bem que não com esta denominação (v. 1967, cap. IV, seções 1 e 2), e é também um cálculo que procura exprimir a circularidade do tempo.[14] Corresponderia a Kr U Ks, acrescido do postulado característico de Ktt (i.e., a "lógica do tempo transitivo". V. Apêndice.).

A linguagem de Kc3 é $\mathcal{L}1$. Uma base axiomática para este cálculo pode ser formada adicionando-se aos esquemas de axiomas clássicos (A1 - A3) os seguintes:

A4. $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$

A6. $-G-HA \rightarrow A$

A10. $GA \rightarrow A$

A11. $GA \rightarrow HA$

A12. $GA \rightarrow GGA$

Kc3 tem MP como regra de dedução, e apenas RG como regra de prova.

---

[14] Existem pelo menos dois outros cálculos de tempo circular: Kc e Kc2. (V. Apêndice) Ambos procuram evitar a equivalência entre operadores do passado e do futuro. Intuitivamente, buscam manter a distinção entre passado e futuro a despeito da circularidade do tempo. Estes dois cálculos caracterizam o que C.L. Hamblin denominou de lógica temporal "leste-oeste" - "no sentido em que a Califórnia está a leste, mas não oeste, de Sidney, e oeste, mas não leste, de Manchester". (Citado em Prior 1967, p.65.) Para um exame mais detalhado destes cálculos, ver Prior 1967, cap. IV.

RH pode ser deduzida dos postulados acima, bem como os demais axiomas de Kt (ou seja, A5 e A7). Kt, portanto, é um subsistema de Kc3.

Entre os esquemas de teoremas de Kc3, temos:

T37. $HA \to A$

T38. $HA \to GA$

T39. $HA \to HHA$

T40. $-G-GA \to A$, $-H-HA \to A$

T41. $GA \leftrightarrow HA$, $HA \leftrightarrow GA$

T42. $G-A \to -GA$, $H-A \to -HA$ (Kc3 contém Km)

T43. $GGA \to A$, $HHA \to A$ (Kc3 contém Kc)

T44. $GGA \to HA$, $HHA \to GA$ (Kc3 contém Kc2)

T45. $A \to (GA \to (HA \to HGA))$, $A \to (HA \to (GA \to GHA))$ (Kc3 contém Kl - "lógica do tempo linear". V. Apêndice)

T46. $GGA \to GA$, $HHA \to HA$ (Kc3 contém Kd)

T47. $GA \to (A \to -H-GA)$, $HA \to (A \to -G-HA)$ (Kc3 contém Ke)

T48. $-G-GA \to G-G-A$, $-H-HA \to H-H-A$ [15]

Como a única regra de prova de Kc3 é RG, convém lembrar que no item d) ii) da def. 0.7 (consequência sintática) o único valor que o símbolo '§' pode tomar é 'G'.

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para Kc3.

V.2. VALORAÇÕES PARA Kc3

---

[15] Todos os cálculos temporais apresentados neste trabalho (com exceção de K3, que veremos a seguir) são subsistemas de Kc3. Vê-se então que Kc3 é dos cálculos mais fortes - o que já era de se esperar, uma vez que os operadores G e H comportam-se em Kc3 como o operador de necessidade (L) em S5.

V.2.1. DEFINIÇÃO. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal e f, f' funções de FOR_{L1} em $\{0,1\}$. Para $1 \leq k \leq n$, dizemos que $f(\Lambda,k)f'$ sse $f' \models \{A_1,\dots,A_k\}^{G}_{f,1}$ e $f \models \{A_1,\dots,A_k\}^{H}_{f',1}$.

V.2.2. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\dots,A_n$-*valoração* (para Kc3) se $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e, se para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$, $v(\Lambda,n-1)v'$ e $v'(\Lambda,n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$ então $v(A_m) = 1$ e, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$, $v(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda,n-1)v$.

A definição de extensão canônica sofre uma pequena alteração com relação a Kt.

V.2.3. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) A mesma de Kt (v. I.2.2), com nova redação para o seguinte item:

2) a) para $F = A_n$, $v'(F) = 0$ sse existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(\Lambda,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(\Lambda,n-1)v$.

A prova de que as extensões canônicas são semi-valorações é a mesma (I.2.5).

V.2.4. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 \leq k \leq n$, dizemos que:

a) v é GH-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leq k$ tais que $A_p =$

GA_q ou $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(\Lambda,k)v_p$ e $v_p(\Lambda,k)v$;

b) v é ∇-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = 1$.

V.2.5. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G-, H- e GH-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Como em Kt (v. I.2.5). O caso interessante ocorre quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$.

I) seja $v'(A_n) = 0$. Por 2.3.B.2.a, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(\Lambda,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(\Lambda,n-1)v$. Obviamente $v'(\Lambda,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(\Lambda,n-1)v'$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

II) seja $v'(A_n) = 1$. Por 2.3.B.2.a, para toda $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$, se $v(\Lambda,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(\Lambda,n-1)v$, $\overline{v}(A_m) = 1$. É claro que $v \models \{A_1,\dots,A_{n-1}\}^G_{v,1}$ e $v \models \{A_1,\dots,A_{n-1}\}^H_{v,1}$; portanto, $v(\Lambda,n-1)v$, e $v(A_m) = 1$. Então $v'(A_m) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Prova-se da maneira usual (v. I.2.5) que existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v'(\Lambda,n-1)v_p$, $v_p(\Lambda,n-1)v'$ e $v_p(A_m) = 1$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

V.2.6. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Então v é G-, H- e GH-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. Do modo habitual, por indução em n. A propriedade é trivial para n = 1. Seja n > 1. Da hipótese de indução e do lema anterior segue-se que (¶) as extensões canônicas das $A_1,\dots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\dots,A_n$ são $A_1,\dots,A_n$-valorações.

A prova de que v é G- e H-$A_1,\dots,A_n$-normal é feita exatamente como em Kr (v. III.2.4). Resta então provar que v é GH-$A_1,\ldots,A_n$-normal. Suponhamos que, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ e $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.)

I) Seja $v(A_n) = 0$. Então:

1) $\{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1}$;

2) $\{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v',1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{v',1}$, para toda $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v'.

Como v é GH-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal, temos:

3) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda,n-1)v$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

4) $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $v(\Lambda,n-1)\overline{v}_p$ e $\overline{v}_p(\Lambda,n-1)v$.

De 1), 2) e 4), por 2.1,

5) $\overline{v}_p \models \{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1}$, $\overline{v}_p \models \{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v,1}$ e $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^H_{\overline{v}_p,1}$.

De 5),

6) $v(\Lambda,n)\overline{v}_p$.

Uma vez que $v(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda,n-1)v$, temos que $v \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v_p,1}$ e $v_p \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1}$; logo, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v_p,1}$. Como $v(A_n) = 0$, por 2.2 existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$, $v(\Lambda,n-1)v'$ e $v'(\Lambda,n-1)v$. Segue-se disso que $v'(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda, n-1)v'$; por 2.3, $\overline{v}_p(A_n) = 0$. Então $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{\overline{v}_p,1} = \{A_1,\ldots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1}$ e, portanto:

7) $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^G_{\overline{v}_p,1}$.

De 5) e 7),

8) $\overline{v}_p(\Lambda,n)v$.

Assim, de (¶), 3), 4), 6) e 8), temos:

9) para todo p, todo q, q < p < n tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $\upsilon(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{\upsilon}_p$ tal que $\overline{\upsilon}_p(A_q) = 0$, $\upsilon(\Lambda,n)\overline{\upsilon}_p$ e $\overline{\upsilon}_p(\Lambda,n)\upsilon$.

Temos que $\upsilon(A_n) = 0$, portanto:

10) existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração υ_n $(\upsilon_n = \upsilon')$ tal que $\upsilon_n(A_m) = 0$, $\upsilon(\Lambda,n-1)\upsilon_n$ e $\upsilon_n(\Lambda,n-1)\upsilon$.

Seja $\overline{\upsilon}_n$ a extensão canônica de υ_n a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

11) $\overline{\upsilon}_n(A_m) = 0$, $\upsilon(\Lambda,n-1)\overline{\upsilon}_n$ e $\overline{\upsilon}_n(\Lambda,n-1)\upsilon$.

De 1), 2) e 11),

12) $\overline{\upsilon}_n \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{\upsilon,1}$, $\overline{\upsilon}_n \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{H}_{\upsilon,1}$ e $\upsilon \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{H}_{\overline{\upsilon}_n,1}$.

De 12),

13) $\upsilon(\Lambda,n)\overline{\upsilon}_n$.

Ora, obviamente $\upsilon_n(\Lambda,n-1)\upsilon_n$, e, como $\upsilon_n(A_m) = 0$, por 2.3 $\overline{\upsilon}_n(A_n) = 0$. Então $\{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{\overline{\upsilon}_n,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{\overline{\upsilon}_n,1}$, e, portanto,

14) $\upsilon \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{\overline{\upsilon}_n,1}$.

De 12) e 14),

15) $\overline{\upsilon}_n(\Lambda,n)\upsilon$.

Assim, de (¶), 10), 11), 13) e 15), temos:

16) para p = n, q = m, $A_p = GA_q$ e $\upsilon(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{\upsilon}_n$ tal que $\overline{\upsilon}_n(A_m) = 0$, $\upsilon(\Lambda,n)\overline{\upsilon}_n$ e $\overline{\upsilon}_n(\Lambda,n)\upsilon$.

De 9) e 16), então, temos que υ é GH-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

II) Seja $\upsilon(A_n) = 1$. Então:

17) $\{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{v,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1} \cup \{A_n\}$.

De 2.2.2.II temos, uma vez que $v(A_n) = 1$,

18) $v(A_m) = 1$ e para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$, $v(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda,n-1)v$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

19) $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $v(\Lambda,n-1)\overline{v}_p$ e $\overline{v}_p(\Lambda,n-1)v$.

De 2) e 19),

20) $v(\Lambda,n)\overline{v}_p$.

Como $v(A_n) = 1$, temos, de 19), que:

21) $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{\overline{v}_p,1}$.

Temos agora duas possibilidades:

(A) Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 1$. Então $\overline{v}_p \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{v,1}$. Disso e de 21), $\overline{v}_p(\Lambda,n)v$. De (¶), 18) e 20), v é GH-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

(B) Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 0$. Definamos, para cada p, uma nova função v^*_p de FOR_{L1} em $\{0,1\}$, da seguinte maneira: para qualquer fórmula F,

a) se A_n não é subfórmula de F, então $v^*_p(F) = v_p(F)$;

b) se A_n é subfórmula de F, então:

b.1) para $F = A_n$, $v^*_p(F) = 1$;

b.2) para $F = -F'$, $v^*_p(F) = 1$ sse $v^*_p(F') = 0$;

b.3) para $F = F' \rightarrow F''$, $v^*_p(F) = 1$ sse $v^*_p(F') = 0$ ou $v^*_p(F'') = 1$;

b.4) para $F = \nabla F'$, $v^*_p(F) = v_p(F)$.

É fácil ver, pelo mesmo raciocínio utilizado na prova do lema I.2.3, que v^*_p é uma semi-valoração. Além disso, para $1 \leq i < n$, $v^*_p(A_i) = v_p(A_i)$. Como v_p é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração, v^*_p é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração. Provemos que v_p^* é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Temos que $v_p(A_m) = 1$; logo, $v_p^*(A_m) = 1$. Suponhamos então que existe r, existe s, $s < r < n$ tais que $A_r = GA_s$ ou $A_r = HA_s$ e $v_p^*(A_r) = 0$. Ora, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v_p^*,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v_p,1}$. Assim, como $v(\Lambda,n-1)v_p$ e $v_p(\Lambda,n-1)v$, segue-se que $v(\Lambda,n-1)v_p^*$, $v_p^*(\Lambda,n-1)v$, e que $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1} = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v_p^*,1}$. Portanto, para cada r tal que $v_p^*(A_r) = 0$, $v(A_r) = 0$. De 2.2.2.II, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_r tal que $v_r(A_q) = 0$, $v_r(A_m) = 1$, $v(\Lambda,n-1)v_r$ e $v_r(\Lambda,n-1)v$. Mas então $v_p^*(\Lambda,n-1)v_r$, $v_r(\Lambda,n-1)v_p^*$, e por 2.2, v_p^* é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Como $v_p^*(A_n) = 1$, $v_p^* \models \{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v,1}$; e, claro, $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^G_{v_p^*,1}$, $v_p^* \models \{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v,1}$ e $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^H_{v_p^*,1}$. Segue-se disso que $v(\Lambda,n)v_p^*$ e $v_p^*(\Lambda,n)v$. Assim, para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v_p^* tal que $v_p^*(A_q) = 0$, $v(\Lambda,n)v_p^*$ e $v_p^*(\Lambda,n)v$. Ou seja, v é GH-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

O Lema 2.6 tem um corolário (que corresponde a I.2.7). Este corolário é enunciado e provado como em I.2.7.

V.2.7. TEOREMA. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração; 3) v é G-, H- e GH-$A_1,\ldots,A_n$-normal.
PROVA. A prova é feita como em I.2.8. As alterações são irrelevantes.

V.3. CORREÇÃO

V.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leqq i \leqq n$, se A_i é um axioma de Kc3, $v(A_i) = 1$.
PROVA. a) se A_i é um axioma do cálculo proposicional clássico, segue-se fa-

cilmente, do fato de que v é uma semi-valoração, que $v(A_i) = 1$.

b) A_i é de forma $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$. Suponhamos que $v(A_i) = 0$. Então $v(G(A \rightarrow B)) = v(GA) = 1$, e $v(GB) = 0$. Por 2.7 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(B) = 0$, $v(\Lambda,n)v'$ e $v'(\Lambda,n)v$. Ou seja, $v' \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{v,1}$. Então $v'(GA) = v'(G(A \rightarrow B)) = 1$. Por 2.7, $v'(A) = v'(A \rightarrow B) = 1$ - e não é possível $v'(B) = 0$. Então $v(A_i) = 1$.

c) A_i é de forma $-G-HA \rightarrow A$. Suponhamos que $v(-G-HA) = 1$. Então $v(G-HA) = 0$. Por 2.7 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(-HA) = 0$, $v(\Lambda,n)v'$ e $v'(\Lambda,n)v$. Ora, então $v'(HA) = 1$ e, como $v \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{H}_{v',1}$, $v(A) = 1$. Assim, $v(A_i) = 1$.

d) A_i é de forma $GA \rightarrow A$. Se $v(GA) = 1$, por 2.7 $v(A) = 1$. Então $v(A_i) = 1$.

e) A_i é de forma $GA \rightarrow HA$. Se $v(A_i) = 0$, $v(GA) = 1$ e $v(HA) = 0$. Por 2.7 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(A) = 0$, $v(\Lambda,n)v'$ e $v'(\Lambda,n)v$. Então $v' \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{v,1}$, e $v'(A) = 1$: uma contradição. Logo, $v(A_i) = 1$.

f) A_i é de forma $GA \rightarrow GGA$. Se $v(A_i) = 0$, então $v(GA) = 1$ e $v(GGA) = 0$. Por 2.7 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(GA) = 0$, $v(\Lambda,n)v'$ e $v'(\Lambda,n)v$. Então $v' \models \{A_1,\ldots,A_n\}^{G}_{v,1}$, e $v'(GA) = 1$: uma contradição. Logo, $v(A_i) = 1$.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, sobre a correção de Kt, aplicam-se a Kc3 sem alteração alguma, de modo que não vamos repeti-los aqui.

V.4. COMPLETUDE

Vamos desenvolver aqui apenas o teorema correspondente a I.4.3. que é onde há alguma diferença em relação ao capítulo sobre Kt. Para tanto, necessitamos antes provar o seguinte lema:

V.4.1. LEMA. Se Δ é F-saturado, e Δ' é F'-saturado,

a) $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subset \Delta'$ sse $\varepsilon(\Delta'^{\nabla}) \subset \Delta$;

b) $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subset \Delta$;

c) $\Delta^{\nabla} \subset \varepsilon(\Delta^{\nabla})$.

PROVA. a) Suponhamos que $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subset \Delta'$, e seja $A \in \varepsilon(\Delta'^{\nabla})$. Então $\nabla A \in \Delta'$; logo, $-\nabla A \notin \Delta'$. Nesse caso, como $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subseteq \Delta'$, $\nabla-\nabla A \notin \Delta$; assim, $-\nabla-\nabla A \in \Delta$. Ora, $\vdash -\nabla-\nabla A \rightarrow A$; logo, $\Delta \vdash A$, e $A \in \Delta$. Assim, $\varepsilon(\Delta'^{\nabla}) \subset \Delta$.

b) Seja $A \in \varepsilon(\Delta^{\nabla})$. Então $\nabla A \in \Delta^{\nabla}$, $\nabla A \in \Delta$, e $\Delta \vdash \nabla A$. Como $\vdash \nabla A \rightarrow A$, $\Delta \vdash A$, e $A \in \Delta$. Portanto, $\varepsilon(\Delta^{\nabla}) \subset \Delta$.

c) Seja $\nabla A \in \Delta^{\nabla}$. Como $\vdash \nabla A \rightarrow \nabla\nabla A$, $\Delta \vdash \nabla\nabla A$, e $\nabla\nabla A \in \Delta$. Logo, $\nabla A \in \varepsilon(\Delta^{\nabla})$. Então $\Delta^{\nabla} \subset \varepsilon(\Delta^{\nabla})$.

V.4.2. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1,\ldots,A_n$, toda função f, se Δ é um conjunto F-saturado, e $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

PROVA. A prova procede como em I.4.3. As diferenças ocorrem quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.)

I) $f(A_n) = 0$, i.e., $A_n \notin \Delta$, e $\Delta \nvdash GA_m$. Por I.4.1 existe Δ' A_m-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$. Seja f' a função característica de f'. Pela hipótese de indução (v. I.4.3) f e f' são $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações. Ora, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{f,1} \subset \Delta^{G}$. Logo, por 4.1, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{f,1} \subset \varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$. Assim, $f' \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{f,1}$. Similarmente, usando 4.1 e I.4.2, mostramos que $f' \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{H}_{f,1}$, $f \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{f',1}$ e $f \models \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{H}_{f',1}$. Por 2.1, $f(\Lambda,n-1)f'$ e $f'(\Lambda,n-1)f$. Como Δ' é A_m-saturado, $f'(A_m) = 0$. Portanto, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração f' tal que $f'(A_m) = 0$, $f(\Lambda,n-1)f'$ e $f'(\Lambda,n-1)f$. Por 2.2, f é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

II) $f(A_n) = 1$. I.e., $f(GA_m) = 1$, $A_m \in \varepsilon(\Delta^{G})$. Logo, por 4.1, $A_m \in \Delta$, e $f(A_m) = 1$. Suponhamos então que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ ou $A_p = HA_q$ e $f(A_p) = 0$. (a) Suponhamos $A_p = GA_q$. Então $f(GA_q) = 0$, e $\Delta \not\vdash GA_q$. Por I.4.1 há um conjunto Δ' A_q-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^{G}) \subset \Delta'$. Seja f' a função característica de Δ'; pela hipótese de indução (v. I.4.3), f e f' são $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações. Ora, $A_m \in \varepsilon(\Delta^{G})$; logo, $A_m \in \Delta'$, e $f'(A_m) = 1$. Como Δ' é A_q-saturado, $f'(A_q) = 0$. Por um raciocínio análogo ao caso I) acima, prova-se que $f(\Lambda,n-1)f'$ e $f'(\Lambda,n-1)f$. Assim, por 2.1, f é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. (b) Suponhamos $A_p = HA_q$. Então $f(HA_q) = 0$, $HA_q \notin \Delta$. Como $\vdash GA_q \rightarrow HA_q$, $GA_q \notin \Delta$, e caímos então no caso (a) anterior.

Capítulo VI

O CÁLCULO K3

VI.1. APRESENTAÇÃO

Tanto quanto pudemos apurar, K3 é um cálculo novo. Nada foi encontrado a respeito dele em lugar algum, nem mesmo menção de seus axiomas característicos. K3 procura enfeixar todas as inferências válidas na suposição de ter o tempo a seguinte estrutura: dado um instante t_0 qualquer, se outros instantes $t_1,\ldots,t_n$ são posteriores (anteriores) a t_0, então $t_1 = \ldots = t_n$. Ou seja, cada instante teria no máximo um futuro, e um passado.[16]

A linguagem de K3 é $L1$. Formamos uma base axiomática para K3 juntando aos postulados de Kt os seguintes esquemas de axiomas:

A13. $-GA \to G-A$

A14. $-HA \to H-A$

Entre os teoremas de K3, temos:

T49. $FA \to GA$, $PA \to HA$

T50. $F-A \to -FA$, $P-A \to -PA$

T51. $FA \vee FB \to G(A \vee B)$, $PA \vee PB \to H(A \vee B)$

T52. $G(A \to B) \to (FA \to FB)$, $H(A \to B) \to (PA \to PB)$

T53. $FA \to G(A \to B)$, $PA \to H(A \to B)$

---

[16] Talvez se pudesse chamar K3 de "lógica do imediatismo e da memória curta"...

T54. $F-A \to G(A \to B)$, $P-A \to H(A \to B)$

T55. $FA \to (FB \to F(A \to B))$, $PA \to (PB \to P(A \to B))$

T56. $(GHA \wedge FB) \to (GHA \wedge GB)$, $(HGA \wedge PB) \to (HGA \wedge HB)$

T57. $F(-A \to A) \to GA$, $P(-A \to A) \to HA$

T58. $F((A \to B) \wedge (A \to -B)) \to G-A$, $P((A \to B) \wedge (A \to -B)) \to H-A$

T59. $F(A \to B) \to (FA \to GB)$, $P(A \to B) \to (PA \to HB)$

T60. $A \to (GA \to (HA \to HGA))$, $A \to (HA \to (GA \to GHA)$[17]

Regras derivadas:

R9. FA / GA

R10. PA / HA

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para K3.

VI.2. VALORAÇÕES PARA K3

VI.2.1. DEFINIÇÃO. Seja Γ um conjunto de fórmulas, e f, f' funções de um conjunto Δ, contendo Γ, em $\{0,1\}$:

$$f'(\Gamma^{\nabla})f =_{df} \text{ para toda } F \in \varepsilon(\Gamma^{\nabla}),\ f'(F) = f(\nabla F).$$

VI.2.2. DEFINIÇÃO. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal e f, f' funções de FOR_{L1} em $\{0,1\}$. Para $1 \leq k \leq n$, dizemos que:

$$f(\Omega,k)f' \text{ sse } f'(\{A_1,\ldots,A_k\}^{G})f \text{ e } f(\{A_1,\ldots,A_k\}^{H})f'.$$

VI.2.3. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-*valoração* (para K3) se $A_1,\ldots,A_n$ é uma

---

[17] Juntando os esquemas T60 a Ktt, obtemos o cálculo K1 (tempo linear). Entretanto, como $\nvdash_{K3}$ GA → GGA, K3 não contém K1. Cumpre notar também, como já foi dito no capítulo anterior, que K3 não é subsistema de Kc3.

sequência normal e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e, se para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(\Omega,n-1)v'$; para $\nabla = H$, $v'(\Omega,n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$, então para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(\Omega,n-1)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(\Omega,n-1)v$.

VI.2.4. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) A mesma de Kt (v. I.2.2), com nova redação para o item:

2) a) para $F = A_n$, $v'(F) = 0$ sse existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(\Omega,n-1)\overline{v}$; para $\nabla = H$, $\overline{v}(\Omega,n-1)v$.

VI.2.5. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que v é ∇-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se, para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que, para $\nabla = G$, $v(\Omega,k)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(\Omega,k)v$.

VI.2.6. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G- e H-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Como em I.2.7. O caso interessante é quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) I) se $v'(A_n) = 0$, por 2.4 existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e $v(\Omega,n-1)\overline{v}$. Por construção, para $1 \leqq i < n$, $v(A_i) = v'(A_i)$. Logo, $v'(\Omega,n-1)\overline{v}$, e, por 2.3, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. II) $v'(A_n) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$

tais que $A_p = GA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Então $v(A_p) = 0$ e, pela hipótese do lema, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v(\Omega,n-1)v_p$. Por 2.4, $v_p(A_m) = 1$, e por construção de v', $v'(\Omega,n-1)v_p$. Por 2.3, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

VI.2.7. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Então v é G- e H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

PROVA. Por indução em n. Para $n = 1$ a propriedade é trivial. Seja $n > 1$. Do lema anterior e da hipótese de indução segue-se que (¶) as extensões canônicas das $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\ldots,A_n$ são $A_1,\ldots,A_n$-valorações. Provemos o lema examinando os casos. Se, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, a prova é imediata. Suponhamos que $A_n = \nabla A_m$, para algum $m < n$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$ a demonstração é análoga.) Temos dois casos:

I) $v(A_n) = 0$. Por 2.3, temos:

1) existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e $v(\Omega,n-1)v'$.

Seja $\overline{v}'$ a extensão canônica de v' a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

2) $\overline{v}'(A_m) = 0$ e $v(\Omega,n-1)\overline{v}'$.

De 2), por 2.2,

3) $\overline{v}'(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G)v$ e $v(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H)\overline{v}'$.

Como $A_n \neq HF$,

4) $v(\{A_1,\ldots,A_n\}^H)\overline{v}'$.

Como $\overline{v}'(A_m) = 0$, $\overline{v}'(A_m) = v(A_n)$. Por 2.1 e 2.2,

5) $\overline{v}'(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)v$.

De 4) e 5), por 2.2,

6) $v(\Omega,n)\overline{v}'$.

De (¶), $\overline{v}'$ é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Como $\overline{v}'(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)v$, para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, $\overline{v}'(A_q) = 0$. Logo, tomando $\overline{v}' = v_p$, para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v_p tal que $v(\Omega,n)v_p$. I.e., v é G-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

Por outro lado, v é H-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal e, como A_n não é de forma HF, temos:

7) para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(\Omega,n-1)v$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

8) $\overline{v}_p(\Omega,n-1)v$.

De 8), por 2.2,

9) $v(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G)\overline{v}_p$ e $\overline{v}_p(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H)v$.

Como $A_n \neq HF$,

10) $\overline{v}_p(\{A_1,\ldots,A_n\}^H)v$.

Temos agora três possibilidades:

(A) Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 1$. Nesse caso, por 2.4.B.2.a, $v(A_m) = 1$. Então $v(A_m) = \overline{v}_p(A_n)$. De 9), por 2.1 e 2.2,

11) $v(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)\overline{v}_p$.

De 10) e 11),

12) $\overline{v}_p(\Omega,n)v$.

Assim, de (¶), 7) e 12), temos que, para todo p, todo q, $q < p \leqq n$, tais que $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{v}_p$ tal que $\overline{v}_p(\Omega,n)v$. I.e., v é H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

(B) Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 0$, e $v(A_m) = 0$. Então $v(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)\overline{v}_p$ e, como no caso (A) acima, v é H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

(C) Suponhamos que $\overline{v}_p(A_n) = 0$, e $v(A_m) = 1$. Definamos, para cada p, novas funções v^*_p de FOR_{L1} em $\{0,1\}$, da seguinte maneira: para toda fórmula F,

a) se A_n não é subfórmula de F, então $v^*_p(F) = v_p(F)$;

b) se A_n é subfórmula de F, então:

b.1) para $F = A_n$, $v^*_p(F) = 1$;

b.2) para $F = -F'$, $v^*_p(F) = 1$ sse $v^*_p(F') = 0$;

b.3) para $F = F' \to F''$, $v^*_p(F) = 1$ sse $v^*_p(F') = 0$ ou $v^*_p(F'') = 1$;

b.4) para $F = \nabla F'$, $v^*_p(F) = v_p(F)$.

É fácil ver que v^*_p é uma semi-valoração. Além disso, como v_p é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração e, para $1 \leqq i < n$, $v^*_p(A_i) = v_p(A_i)$, v^*_p é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração. Provemos que é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Suponhamos que exis- te r, existe s, $s < r < n$ tais que $A_r = GA_s$ e $v^*_p(A_r) = 0$. Então $v_p(A_r) = 0$. Uma vez que $v_p(\Omega,n-1)v$, segue-se que $v^*_p(\Omega,n-1)v$. Por hipótese, $v(A_m) = 1$. Então existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v tal que $v(A_m) = 1$ e $v^*_p(\Omega,n-1)v$. Logo, v^*_p é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Claramente $v^*_p(\{A_1,\ldots,A_n\}^H)v$, e, como $v(A_m) = v^*_p(A_n) = 1$, $v(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)v^*_p$. I.e., $v^*_p(\Omega,n)v$. Assim, para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = HA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v^*_p tal que $v^*_p(\Omega,n)v$. Ou seja, v é H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

II) Seja $v(A_n) = 1$. Temos, de 2.3,

13) para todo p, todo q, $q < p \leqq n$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_m) = 1$ e $v(\Omega,n-1)v_p$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

14) $\overline{v}_p(A_m) = 1$ e $v(\Omega,n-1)\overline{v}_p$.

De 14), por 2.2,

15) $\overline{v}_p(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G)v$ e $v(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H)\overline{v}_p$

Como $A_n \neq HF$,

16) $v(\{A_1,\ldots,A_n\}^H)\overline{v}_p$.

E, como $\overline{v}_p(A_m) = v(A_n) = 1$,

17) $\overline{v}_p(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)v$.

De 16) e 17),

18) $v(\Omega,n)\overline{v}_p$.

Assim, de (¶), 13), 14) e 18), v é G-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

Prova-se que v é H-$A_1,\ldots,A_n$-normal como no caso I).

O corolário correspondente a I.2.7 é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt.

VI.2.8. TEOREMA. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração sse: 1) v é uma semi-valoração; 2) $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal e 3) v é G- e H-$A_1,\ldots,A_n$-normal.
PROVA. Este teorema é facilmente demonstrado da mesma forma como foi provado o teorema I.2.8.

VI.3. CORREÇÃO

VI.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leqq i \leqq n$, se A_i é um axioma de K3, $v(A_i) = 1$.
PROVA. a) se A_i é um axioma de Kt, prova-se como em Kt que $v(A_i) = 1$.
b) Seja A_i da forma $-\nabla A \rightarrow \nabla -A$. Suponhamos que $v(A_i) = 0$. Então $v(-\nabla A) = 1$ e $v(\nabla -A) = 0$. Logo, $v(\nabla A) = 0$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) Por 2.8 há uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v(\Omega,n)v'$. Por 2.2, $v'(\{A_1,\ldots,A_n\}^G)v$ e então $v'(A) = v'(-A) = 0$ - uma contradição. Portanto, $v(A_i) = 1$.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, do capítulo sobre Kt, aplicam-se imediatamente a K3, sem alterações. Em vista disso, não vamos repeti-los aqui.

VI.4. COMPLETUDE

De maneira análoga, os lemas e teoremas sobre a completude de Kt aplicam-se sem alterações a K3. A única diferença ocorre no teorema correspondente a I.4.3. Vamos então desenvolvê-lo aqui.

VI.4.1. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1, \ldots, A_n$, toda f, se Δ é um conjunto F-saturado e $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração.

PROVA. A prova procede como em I.4.3. As diferenças ocorrem quando, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) Temos dois casos:

I) $f(A_n) = 0$. I.e., $A_n \notin \Delta$, e $\Delta \nvdash GA_m$. Por I.4.1 existe Δ' A_m-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$. Seja A uma fórmula tal que $f(GA) = 1$. Então $GA \in \Delta$, e, é claro, $A \in \varepsilon(\Delta^G)$. Logo, $A \in \Delta'$, e $f'(A) = 1$. Seja B uma fórmula tal que $f(GB) = 0$. Então $f(-GB) = 1$, e $-GB \in \Delta$. Como $\vdash -GB \rightarrow G-B$, $\Delta \vdash G-B$, $G-B \in \Delta$. Logo, $-B \in \varepsilon(\Delta^G)$, e então $-B \in \Delta'$; $B \notin \Delta'$ e $f'(B) = 0$. Assim, para qualquer fórmula GF, $f'(F) = f(GF)$. Segue-se que $f'(\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}^G)f$.

Por outro lado, se $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$, por I.4.2 $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$. Através de um raciocínio análogo ao mostrado acima, prova-se que $f(\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}^H)f'$. Por 2.2, $f(\Omega, n-1)f'$. Como Δ' é A_m-saturado, $f'(A_m) = 0$. Além disso, pela hipótese de indução (v. I.4.3), f e f' são $A_1, \ldots, A_{n-1}$-valorações. Assim, existe uma $A_1, \ldots, A_{n-1}$-valoração f' tal que $f'(A_m) = 0$ e $f(\Omega, n-1)f'$. Por 2.3, f é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

II) $f(A_n) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $f(A_p) = 0$. Então $GA_q \notin \Delta$, e $\Delta \nvdash GA_q$. Por I.4.1 existe um conjunto Δ' A_q-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$. Seja f' a função característica de Δ'. Como $A_m \in \varepsilon(\Delta\ )$, $f'(A_m) = 1$. Pela hipótese de indução (v. I.4.3), f e f' são A_1, $\dots,A_{n-1}$-valorações. Por um raciocínio análogo ao do caso I) acima, mostra-se que $f(\Omega,n-1)f'$. Por 2.3, f é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PARTE II

CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

Capítulo VII

O CÁLCULO T-Kt

VII.1. APRESENTAÇÃO

Uma das maneiras usuais de combinar operadores de lógica temporal com operadores modais é através de definições. Tomemos um cálculo temporal qualquer, por exemplo, Kt. Introduzimos os operadores modais através das seguintes definições:

(1) $LA =_{df} A \wedge GA \wedge HA$

(2) $MA =_{df} A \vee FA \vee PA$

Obtemos então as equivalências

(3) $LA \leftrightarrow A \wedge GA \wedge HA$

(4) $MA \leftrightarrow A \vee FA \vee PA$

Intuitivamente, (3) diz que uma proposição é necessária se e somente se for verdadeira todo o tempo. Contudo, sentimos que pode haver proposições verdadeiras todo o tempo sem serem de alguma forma necessárias. Da mesma maneira, algo não deixa de ser possível mesmo se sempre falso. Ou seja, ao invés das equivalências (3) e (4), gostaríamos de ter apenas as seguintes implicações:

(5) $LA \rightarrow A \wedge GA \wedge HA$

(6) $A \vee FA \vee PA \rightarrow MA$

Vamos então apresentar alguns cálculos com esta característica dese jada. Os operadores modais e temporais serão introduzidos axiomaticamente - não mais definiremos os primeiros em função dos últimos. Obtemos desta maneira cálculos modais-temporais, ao mais fraco dos quais chamaremos "T-Kt". Este cálculo é uma extensão conservativa tanto de T como de Kt. Em T-Kt aparecem também novos teoremas (fórmulas mistas) envolvendo os dois tipos de operador, modal e temporal.

T-Kt pode ser estendido de várias maneiras, e desta forma obtemos uma classe inteira de cálculos modais-temporais. Podemos estendê-lo modalmente, ou seja, tornando mais forte o ramo modal (S4-Kt, B-Kt, S5-Kt) ou então temporalmente (T-Km, T-Kl, T-Kc3, etc.). Pode-se ainda fazer as duas coisas - e obtemos então cálculos como S4-Kc, B-K3, S5-Kc2, etc. As combinações possíveis são numerosas; examinaremos apenas algumas delas.

Passemos então ao exame de T-Kt. Sua linguagem é *L2*. Formamos uma base axiomática para T-Kt acrescentando aos esquemas de axiomas A1 - A7 de Kt os seguintes:

A15. $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$

A16. $LA \rightarrow A$

A17. $LA \rightarrow GA$

A18. $LA \rightarrow HA$

T-Kt tem MP como regra de dedução, e sua única regra de prova é a regra de Gödel (N).[18]

---

[18] Como se pode ver, os cálculos modais-temporais são muito semelhantes aos cálculos bi-modais T-T e S4-S4 de Ishimoto, onde aparecem dois operadores de necessidade: um mais forte e um outro mais fraco. (V. Ishimoto & Fujikawa 1970; Ishimoto & Watanabe 1974.) Segundo Ishimoto (1970, p.129), a su-

Todos os teoremas de T, bem como de Kt, são teoremas de T-Kt. Entre os novos teoremas (fórmulas "mistas") temos os seguintes:

T61. $LA \to A \wedge GA \wedge HA$, $LA \to A \wedge HA \wedge GA$

T62. $A \vee FA \vee PA \to MA$, $A \vee PA \vee FA \to MA$

T63. $FA \to MA$, $PA \to MA$

T64. $GLA \to GA$, $HLA \to HA$

T65. $LLA \to GA$, $LLA \to HA$

T66. $LLA \to GLA$, $LLA \to HLA$

T67. $LGA \to GGA$, $LHA \to HHA$

T68. $GLA \to GGA$, $HLA \to HHA$

T69. $LLA \to GGA$, $LLA \to HHA$

T70. $LLA \to GHA$, $LLA \to HGA$

T71. $L(A \wedge B) \to (GA \wedge GB)$, $L(A \wedge B) \to (HA \wedge HB)$

T72. $L(-A \to A) \to GA$, $L(-A \to A) \to HA$

T73. $L(B \to A) \wedge L(-B \to A) \to GA$, $L(B \to A) \wedge L(-B \to A) \to HA$

T74. $LA \to (GB \to G(A \wedge B))$, $LA \to (HB \to H(A \wedge B))$

Regras derivadas:

R11. $A \to B \,/\, LA \to LB$

R12. $A \to B \,/\, GA \to GB$

---

gestão teria sido apresentada primeiramente por J. Rubin. Por outro lado, a idéia de tomar modalidades temporais e aléticas como primitivas numa mesma lógica já se encontra na "lógica ockhamista" abordada por Prior (1967, cap. VII; v. também Burgess 1979, pp.574-7). (Uma questão interessante seria ver se a lógica ockhamista corresponde a algum dos cálculos modais-temporais acima mencionados.) Além destas referências, nada mais encontramos com respeito a cálculos modais-temporais. Achamos que um estudo aprofundado a respeito deles deveria ser efetuado, nos seus aspectos sintáticos, semânticos, bem como nas suas implicações filosóficas. Um estudo que reservaremos para, quem sabe, trabalhos posteriores, uma vez que nosso objetivo aqui é apenas o de construir semânticas de valorações.

R13. $A \rightarrow B$ / $HA \rightarrow HB$

e mais as regras RG e RH.

As fórmulas abaixo não são teoremas de T-Kt:

1. $A \wedge GA \wedge HA \rightarrow LA$, $A \wedge HA \wedge GA \rightarrow LA$
2. $MA \rightarrow A \vee FA \vee PA$, $MA \rightarrow A \vee PA \vee FA$
3. $GA \rightarrow LA$, $HA \rightarrow LA$
4. $MA \rightarrow FA$, $MA \rightarrow PA$
5. $GA \rightarrow GLA$, $HA \rightarrow HLA$
6. $GA \rightarrow LLA$, $HA \rightarrow LLA$
7. $GLA \rightarrow LLA$, $HLA \rightarrow LLA$
8. $GGA \rightarrow LGA$, $HHA \rightarrow LHA$
9. $GGA \rightarrow GLA$, $HHA \rightarrow HLA$
10. $GGA \rightarrow LLA$, $HHA \rightarrow LLA$
11. $GHA \rightarrow LLA$, $HGA \rightarrow LLA$
12. $A \wedge -A$

Como a única regra de prova de T-Kt é N, convém lembrar que no item d) ii) da definição 0.7 (consequência sintática) o único valor que o símbolo '§' pode tomar é 'L'.

As propriedades I.1.1 (Teorema da Dedução) e I.1.2 também valem para T-Kt. As provas são as mesmas, com as modificações óbvias.

VII.1.1. Se $\Gamma \vdash A$, então $L\Gamma \vdash LA$ (onde $L\Gamma = \{LB: B \in \Gamma\}$).

PROVA. Prova-se do mesmo modo que em I.1.2.

Tendo então uma idéia do que é o cálculo T-Kt, procederemos como nos cálculos estudados anteriormente, apresentando para T-Kt uma semântica de valorações e procurando provar correção e completude.

VII.2. VALORAÇÕES PARA T-Kt

VII.2.1. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-*valoração* (para T-Kt) se $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência normal (v. 0.9) e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração e:

A) se, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ ... (como em Kt; v. I.2.1);

B) se, para algum $m < n$, $A_n = LA_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e $v(L,n-1)v'$;[19]

II) se $v(A_n) = 1$, então $v(A_m) = v(GA_m) = v(HA_m) = 1$ e, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v(L,n-1)v_p$.

Valorações para T-Kt são obtidas através da definição geral (0.11).

VII.2.2. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração e $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal. Dizemos que v' é a *extensão canônica* de v a $A_1,\ldots,A_n$ se:

A) ou, para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$, $A_n \neq LA_m$ e $v' = v$;

B) ou, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$ ou $A_n = LA_m$ e v' é uma função de FOR_{L2} em $\{0,1\}$ tal que, para toda fórmula F,

1) se A_n não é subfórmula de F, então $v'(F) = v(F)$;

[19] V. definição 0.17.

2) se A_n é subfórmula de F, então:

a) para $F = A_n$,

I) se $A_n = \nabla A_m$, $v'(F) = 0$ sse existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(n-1)\overline{v}$; para $\nabla = H$, $\overline{v}(n-1)v$;

II) se $A_n = LA_m$, $v'(F) = 0$ sse $v(A_m) = 0$ ou $v(\nabla A_m) = 0$ ou existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e $v(L,n-1)\overline{v}$;

b) para $F = -F'$, $v'(F) = 1$ sse $v'(F') = 0$;

c) para $F = F' \to F''$, $v'(F) = 1$ sse $v'(F') = 0$ ou $v'(F'') = 1$;

d) para $F = \nabla F'$ ou $F = LF'$, $v'(F) = v(F)$.

Prova-se como em Kt (v. I.2.3) que as extensões canônicas são semi--valorações.

VII.2.3. DEFINIÇÃO. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que:

a) v é ∇-$A_1,\dots,A_k$-*normal* ... (como em Kt - v. I.2.4);

b) v é L_0-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(L,k)v_p$;

c) v é L_1-$A_1,\dots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = v(\nabla A_q) = 1$.

VII.2.4.LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\dots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G-, H-, L_0- e L_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção, v' é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração. Para provar que é $A_1,\dots,A_n$-valoração, temos três casos:

1- Para todo $m < n$, $A_n \neq \nabla A_m$ e $A_n \neq LA_m$. Imediatamente, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

2- Para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$. Prova-se como em Kt (v. I.2.5) que v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

3- Para algum $m < n$, $A_n = LA_m$.

I) $v'(A_n) = 0$. Por 2.2, temos três possibilidades:

a) $v(A_m) = 0$. Obviamente $v \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{L}_{v,1})$, pois v é L_1-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal. Por 0.17, $v(L,n-1)v$, e, por construção de v', $v(L,n-1)v'$. Então v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

b) $v(\nabla A_m) = 0$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) Por 2.3 existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v(n-1)v_n$. Então $v_n \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1})$. Seja $A \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{L}_{v,1})$. Então $v(LA) = 1$, e, como v é L_1-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal, $v(GA) = 1$. Portanto, $A \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1})$, e $\varepsilon(\{A_1,\ldots A_{n-1}\}^{L}_{v,1}) \subset \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{G}_{v,1})$. Logo, $v_n \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^{L}_{v,1})$. Por 0.17, $v(L,n-1)v_n$. Por construção de v', $v'(L,n-1)v_n$. Portanto, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v'(L,n-1)v_n$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

c) há uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$ e $v(L,n-1)\overline{v}$. Obviamente $v'(L,n-1)\overline{v}$ e, portanto, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

II) $v'(A_n) = 1$. De 2.2, $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$. Logo, $v'(A_m) = v'(\nabla A_m) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Então $v(A_p) = 0$ e, como v é L_0-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(L,n-1)v_p$. Prova-se facilmente, à maneira de I.2.5, que $v_p(A_m) = 1$ e $v'(L,n-1)v_p$. Por 2.1, portanto, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

VII.2.5. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Então v é G-, H-, L_0- e L_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

PROVA. Por indução em n. Para n = 1 a propriedade é trivial. Seja n > 1. Segue-se do lema 2.4 e da hipótese de indução que (¶) as extensões canônicas das $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações a $A_1,\ldots,A_n$ são $A_1,\ldots,A_n$-valorações.

Prova-se que v é G- e H-$A_1,\ldots,A_n$-normal como em Kt (v. I.2.6). Provemos então que v é L_0- e L_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal, examinando os casos. Se, para todo $m < n$, $A_n \neq LA_m$, a prova é imediata. Suponhamos então $A_n = LA_m$, para algum $m < n$. Há duas possibilidades:

I) $v(A_n) = 0$. Temos:

1) $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^L_{v,1}) = \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{v,1})$.

Como v é L_0-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal,

2) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$ e $v(L,n-1)v_p$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

3) $\overline{v}_p(A_q) = 0$ e $v(L,n-1)\overline{v}_p$.

De 1) e 3),

4) $v(L,n)\overline{v}_p$.

Assim, de (¶), 2), 3) e 4),

5) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração $\overline{v}_p$ tal que $\overline{v}_p(A_q) = 0$ e $v(L,n)\overline{v}_p$.

Por outro lado, como $v(A_n) = 0$, temos, de 2.1,

6) existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v(L,n-1)v_n$.

Seja $\overline{v}_n$ a extensão canônica de v_n a $A_1,\ldots,A_n$. Então:

7) $\overline{v}_n(A_m) = 0$ e $v(L,n-1)\overline{v}_n$.

De 1) e 7)

8) $v(L,n)\overline{v}_n$.

Assim, de (¶), 5), 6), 7) e 8), v é L_0-$A_1,\dots,A_n$-normal.

Uma vez que $v(A_n) = 0$, segue-se imediatamente, do fato de que v é L_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, que v é L_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

II) $v(A_n) = 1$. De 2.1, temos:

9) para todo p, todo q, $q < p \leq n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v(L,n-1)v_p$.

Para cada p, seja $\overline{v}_p$ a extensão canônica de v_p a $A_1,\dots,A_n$. Então:

10) $\overline{v}_p(A_q) = 0$, $\overline{v}_p(A_m) = 1$ e $v(L,n-1)\overline{v}_p$.

De 10) e 0.17,

11) $v(L,n)\overline{v}_p$.

Assim, de (¶), 9), 10) e 11), v é L_0-$A_1,\dots,A_n$-normal.

Por outro lado, v é L_1-$A_1,\dots,A_{n-1}$-normal, i.e.,

12) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 1$, $v(A_q) = v(\nabla A_q) = 1$.

E, como $v(A_n) = 1$, temos:

13) $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$.

De 12) e 13), portanto, v é L_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

O corolário do lema 2.5 (que corresponde a I.2.7) é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt (v. I.2.7).

VII.2.6. TEOREMA. v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração e 3) v é G-, H- L_0- e L_1-$A_1,\dots,A_n$-nor mal.

PROVA. Apesar de estarmos agora trabalhando com $L2$, com um operador a mais, a prova deste teorema não oferece dificuldades, e faz-se do mesmo modo que em Kt (v. I.2.8).

3. CORREÇÃO

VII.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração; então, para $1 \leq i \leq n$, se A_i é um axioma de T-Kt, $v(A_i) = 1$.

PROVA. a) se A_i é um axioma de Kt, prova-se como em Kt (v. I.3.1) que $v(A_i) = 1$.

b) A_i é de forma $L(A \to B) \to (LA \to LB)$. Se $v(A_i) = 0$, então $v(L(A \to B)) = v(LA) = 1$, e $v(LB) = 0$. Por 2.6 existe uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração v' tal que $v'(B) = 0$ e $v(L,n)v'$. Como A, $A \to B \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_n\}^L_{v,1})$, $v'(A \to B) = v'(A) = 1$. Não é possível, portanto, $v'(B) = 0$. Segue-se que $v(A_i) = 1$.

c) A_i é de forma $LA \to A$. Se $v(LA) = 1$, por 2.6 $v(A) = 1$. Então $v(A_i) = 1$.

d) A_i é de forma $LA \to \nabla A$. Se $v(LA) = 1$, por 2.6 $v(\nabla A) = 1$. Então $v(A_i) = 1$.

VII.3.2. TEOREMA. Se F é um axioma de T-Kt e v é uma valoração, $v(F) = 1$.

PROVA. Segue imediatamente de 3.1.

VII.3.3. LEMA. Para todo n, todo i, $1 \leq i \leq n$, se v é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração e $\vdash A_i$, então $v(A_i) = 1$.

PROVA. Por indução no número r de linhas de uma prova de A_i em T-Kt.

A) se $r = 1$, A_i é um axioma e a propriedade segue de 3.1.

B) se $r > 1$, ou A_i é um axioma, e a propriedade segue de 3.1, ou:

a) A_i foi obtido por MP a partir de B e $B \to A_i$. Prova-se exatamente como em Kt (v. I.3.3).

b) $A_i = LA_j$ e foi obtido de A_j por N. Ora, para toda sequência normal σ onde ocorre A_i, A_j ocorre também; logo, pela hipótese de indução, para toda σ-valoração v, $v(A_j) = 1$. Segue-se de 2.6 que, para toda σ-valoração v, $v(A_i) = 1$.

VII.3.4. COROLÁRIO. Se $\vdash F$, então, para toda valoração v, $v(F) = 1$.

PROVA. Imediatamente, por 0.11 e 3.3.

VII.3.5. TEOREMA DE CORREÇÃO. Se $\Gamma \vdash F$, então $\Gamma \models F$.

PROVA. Como em I.3.5, por indução no número de linhas de uma dedução de F a partir de Γ. A única diferença é que, ao invés de termos RG e RH, como em Kt, a única regra de prova de T-Kt é N. A demonstração do teorema, contudo, é feita da mesma forma.

VII.4. COMPLETUDE.

VII.4.1. LEMA. Se $\Gamma \nvdash LF$, então existe Δ F-saturado tal que $\varepsilon(\Gamma^L) \subset \Delta$.

PROVA. Se $\Gamma \nvdash LF$, então $\Gamma^L \nvdash LF$ e, por 1.1, $\varepsilon(\Gamma^L) \nvdash F$. Por 0.15 há um conjunto Δ F-saturado tal que $\varepsilon(\Gamma^L) \subset \Delta$.

VII.4.2. LEMA. Se Δ é F-saturado, $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta$.

PROVA. Seja $A \in \varepsilon(\Delta^L)$. Então $LA \in \Delta$. Como $\vdash LA \to A$, $\Delta \vdash A$, e $A \in \Delta$.

VII.4.3. TEOREMA. Para todo conjunto Δ, toda fórmula F, toda sequência $A_1, \ldots, A_n$, toda função f, se Δ é um conjunto F-saturado, e $A_1, \ldots, A_n$ é uma sequência normal, a função característica f, de Δ, é uma $A_1, \ldots, A_n$-valoração.

PROVA. Faz-se como em I.4.3. O único caso em que há diferença acontece quando, para algum $m < n$, $A_n = LA_m$.

I) $f(A_n) = 0$. I.e., $A_n \notin \Delta$, e $\Delta \not\vdash LA_m$. Por 4.1 existe Δ' A_m-saturado tal que $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta'$. Seja f' a função característica de Δ'. Pela hipótese de indução (v. I.4.3), f e f' são $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valorações. Ora, $\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{f,1} \subset \Delta^L$; assim, $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{f,1}) \subset \varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta'$. Assim, $f' \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{f,1})$. Logo, $f(L,n-1)f'$. E, como Δ' é A_m-saturado, $f'(A_m) = 0$. Então f é uma $A_1,\ldots,$ A_n-valoração.

II) $f(A_n) = 1$. I.e., $f(LA_m) = 1$. Então $LA_m \in \Delta$. Como $\vdash LA_m \to A_m$, $\vdash LA_m \to GA_m$ e $\vdash LA_m \to HA_m$, $\Delta \vdash A_m$, $\Delta \vdash GA_m$ e $\Delta \vdash HA_m$. Segue-se que $f(A_m) = f(GA_m) = f(HA_m) = 1$. Suponhamos então que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $f(A_p) = 0$. Prova-se facilmente, por um raciocínio análogo ao caso I) acima, que existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração f_p tal que $f_p(A_q) = 0$, $f_p(A_m) = 1$ e $f(L,n-1)f_p$. Por 2.1, f é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

O teorema correspondente a I.4.4 é enunciado e provado do mesmo modo como em Kt (v. I.4.4).

VII.4.4. TEOREMA DE COMPLETUDE. Se $\Gamma \models F$, então $\Gamma \vdash F$.

PROVA. Como em I.4.5.

Capítulo VIII

O CÁLCULO B-Kt

VIII.1. APRESENTAÇÃO

B-Kt é uma extensão modal de T-Kt e, como o nome indica, é obtido juntando-se a T-Kt o esquema de axioma a seguir:

A19. $-L-LA \rightarrow A$

B-Kt é extensão conservativa de B e de Kt. Alguns teoremas mais:

T75. $FHA \rightarrow LMA$, $PGA \rightarrow LMA$

T76. $FLA \rightarrow LMA$, $PLA \rightarrow LMA$

T77. $MLA \rightarrow HFA$, $MLA \rightarrow GPA$

T78. $MLA \rightarrow GMA$, $MLA \rightarrow HMA$

As propriedades I.1.1, I.1.2 e VII.1.1 também valem para B-Kt.

VIII.2. VALORAÇÕES PARA B-Kt

VIII.2.1. DEFINIÇÃO. ($A_1,\ldots,A_n$-*valoração para* B-Kt) Como em T-Kt (v. VII. 2.1), com a seguinte nova redação para os itens

B) I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$, $v(L,n-1)v'$ e $v'(L,n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$, então $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$ e para todo p, todo q, q < p

$< n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$, $v(L,n-1)v_p$ e $v_p(L,n-1)v$.

VIII.2.2. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) Como em T-Kt (VII.2.2), com nova redação para o item

a) II) se $A_n = LA_m$, $v'(F) = 0$ sse $v(A_m) = 0$ ou $v(\nabla A_m) = 0$ ou existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(L,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(L,n-1)v$.

Prova-se facilmente que as extensões canônicas são semi-valorações.

VIII.2.3. DEFINIÇÃO. ($A_1,\ldots,A_k$-*normalidade*) Como em T-Kt (VII.2.3), com nova redação para o item

c) v é L_0-$A_1,\ldots,A_k$-*normal* se para todo p, todo q, $q < p \leqq k$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_k$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v(L,k)v_p$ e $v_p(L,k)v$.

VIII.2.4. LEMA. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal, v uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração e v' a extensão canônica de v a $A_1,\ldots,A_n$. Suponhamos ainda que v é G-, H-, L_0- e L_1-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal. Nesse caso, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.
PROVA. Por construção, v' é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração. Provamos que é v' uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração examinando os casos. A diferença em relação a T-Kt ocorre quando $A_n = LA_m$, para algum $m < n$.

I) $v'(A_n) = 0$. Por 2.2, temos três possibilidades:

a) $v(A_m) = 0$. Obviamente $v \vdash \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{v,1})$, pois v é L_1-$A_1,\ldots,A_{n-1}$-normal. Por 0.17, $v(L,n-1)v$. Por construção de v', $v(L,n-1)v'$ e $v'(L,n-1)v$. Então v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

b) $v(\nabla A_m) = 0$. Seja $\nabla = G$. (Para $\nabla = H$, analogamente.) Por 2.3 existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$ e $v(n-1)v_n$. Então $v_n \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^G_{v,1})$ e $v \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{v_n,1})$. Prova-se como em T-Kt (v. VII.2.4) que $v(L,n-1)v_n$. Seja $A_r = LA_s$, $s < r < n$, tal que $v_n(A_r) = 1$. $A_s \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{v_n,1})$. Como v_n é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração, é uma $A_1,\ldots,A_r$-valoração e, por 2.1, $v_n(HA_s) = 1$. Então $A_s \in \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^H_{v_n,1})$, e $v(A_s) = 1$. Portanto, $v \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}^L_{v_n,1})$. Então $v_n(L,n-1)v$. Por construção de v', $v'(L,n-1)v_n$ e $v_n(L,n-1)v'$. Assim, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_n tal que $v_n(A_m) = 0$, $v'(L,n-1)v_n$ e $v_n(L,n-1)v'$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

c) há uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração $\overline{v}$ tal que $\overline{v}(A_m) = 0$, $v(L,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(L,n-1)v$. Obviamente $v'(L,n-1)\overline{v}$ e $\overline{v}(L,n-1)v'$. Logo, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

II) $v'(A_n) = 1$. De 2.2, $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$. Logo, $v'(A_m) = v'(\nabla A_m) = 1$. Suponhamos que existe p, existe q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v'(A_p) = 0$. Prova-se facilmente, à menira de I.2.5, que existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$, $v'(L,n-1)v_p$ e $v_p(L,n-1)v'$. Por 2.1, v' é uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração.

VIII.2.5. LEMA. Seja v uma $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Então v é G-, H-, L_0- e L_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal.

PROVA. Prova-se que v é G- e H-$A_1,\ldots,A_n$-normal como em Kt (v. I.2.8). Prova-se que v é L_1-$A_1,\ldots,A_n$-normal como em T-Kt (v. VII.2.5). A prova de que v é L_0-$A_1,\ldots,A_n$-normal não oferece dificuldades, e é feita através da mesma argumentação utilizada para provar que as $A_1,\ldots,A_n$-valorações são ∇-$A_1,\ldots,A_n$-normais em Ks (v. IV.2.5).

O corolário do lema acima (que corresponde a I.2.7) é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt (v. I.2.7).

VIII.2.6. TEOREMA. v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração sse: 1) $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal; 2) v é uma semi-valoração e 3) v é G-, H-, L_0- e L_1-$A_1,\dots,A_n$-normal.

PROVA. Como em I.2.8, com as modificações necessárias.

3. CORREÇÃO

VIII.3.1. LEMA. Seja v uma $A_1,\dots,A_n$-valoração; então, para $1 \leq i \leq n$, se A_i é um axioma de B-Kt, $v(A_i) = 1$.

PROVA. a) se A_i é um axioma de T-Kt, prova-se como em T-Kt (v. VII.3.1) que $(A_i) = 1$.

b) A_i é de forma $-L-LA \rightarrow A$. Se $v(-L-LA) = 1$, $v(L-LA) = 0$ e, por 2.5, existe uma $A_1,\dots,A_n$-valoração v' tal que $v'(-LA) = 0$, $v(L,n)v'$ e $v'(L,n)v$. Então $v'(LA) = 1$, e, é claro, $v(A) = 1$. Assim, $v(A_i) = 1$.

Os lemas e teoremas VII.3.2 a VII.3.5 aplicam-se imediatamente a B-Kt, sem alterações (a não ser ler-se "B-Kt" onde se lê "T-Kt").

VIII.4. COMPLETUDE

A seção sobre a completude de B-Kt apresenta alterações com relação a T-Kt apenas no teorema correspondente a VII.4.3 (ou seja, na prova de que a função característica de um conjunto F-saturado, para alguma F, é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração, para alguma sequência normal $A_1,\dots,A_n$). A prova de tal teorema é feita sem dificuldade, mas para tanto necessitamos do seguinte lema:

VIII.4.1. LEMA. Se Δ é um conjunto F-saturado, Δ' é F'-saturado, $\varepsilon(\Delta^{L}) \subset \Delta'$ sse $\varepsilon(\Delta'^{L}) \subset \Delta$.

PROVA. Suponhamos que $\varepsilon(\Delta^{L}) \subset \Delta'$. Seja $A \in \varepsilon(\Delta'^{L})$. Então $LA \in \Delta'$; $-LA \notin \Delta'$. Como $\varepsilon(\Delta^{L}) \subset \Delta'$, $L\text{-}LA \notin \Delta$, e, assim, $-L\text{-}LA \in \Delta$. Como $\vdash -L\text{-}LA \rightarrow A$, $\Delta \vdash A$, e $A \in \Delta$. Logo, $\varepsilon(\Delta'^{L}) \subset \Delta$.

Suponhamos agora que $\varepsilon(\Delta'^{L}) \subset \Delta$. A prova é análoga.

Demonstrado este lema, a prova do teorema correspondente a VII.4.3 faz-se sem problemas, razão pela qual vamos omiti-la.

PARTE III

DECIDIBILIDADE

Capítulo IX

A DECIDIBILIDADE DE T-Kt

Neste capítulo mostraremos como, a partir das suas respectivas semânticas de valorações, obtemos métodos de decisão para os cálculos aqui estudados. Tomaremos T-Kt como exemplo, o que nos permitirá ver o comportamento tanto de operadores modais como de operadores temporais. Além disso, T e Kt são subsistemas de T-Kt, e um método de decisão para os primeiros é imediato se tivermos método de decisão para o último. Quanto aos demais cálculos, modais e modais-temporais, o método de decisão é facilmente obtido do mesmo modo como em T-Kt, fazendo-se necessárias apenas pequenas alterações para adaptar o método a cada cálculo.

Como dissemos ao início deste trabalho, o método de decisão que aqui mostraremos é feito através de tabelas de verdade generalizadas.[20] Dada uma fórmula A, é fácil construir uma sequência normal finita $A_1,\ldots,A_n$ onde A é o último termo. Seja $V(A_1,\ldots,A_n)$ a classe de todas as $A_1,\ldots,A_n$-valorações. Definiremos uma relação de equivalência da seguinte forma: $v \cong v'$ sse para $1 \leq i \leq n$, $v(A_i) = v'(A_i)$. Como $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência finita, é óbvio que $V(A_1,\ldots,A_n)/\cong$ é finito. Assim, um método de decisão para T-Kt consistirá num procedimento que nos permita produzir, para toda $|v| \in V(A_1,\ldots,A_n)/\cong$, a restrição $\overline{v}$ de alguma $v' \in |v|$ ao conjunto $\{A_1,\ldots,A_n\}$. Tal constru-

[20] O que se segue é baseado em Loparić 1977, onde Andréa Loparić apresenta um método de decisão para o cálculo K de Kripke a partir de uma semântica de valorações.

ção, designada por $T(A_1,\dots,A_n)$, e chamada "tabela" para $A_1,\dots,A_n$, decide da validade de uma fórmula qualquer da sequência (e, consequentemente, da propriedade de ser um teorema). Em particular, da fórmula A.

Vejamos, através de um exemplo, como isto funcionaria. Seja A a fórmula L--B → GB. Vamos construir uma sequência normal $A_1,\dots,A_n$ onde $A_n = A$. Primeiro, listamos todas as subfórmulas de A: B, -B, --B, GB, L--B, L--B → GB. Uma vez que há na sequência uma fórmula de forma LF, é necessário, de acordo com a definição 0.9, que GF e HF a precedam. Ou seja, nossa sequência $A_1,\dots,A_n$ agora é: B, -B, --B, GB, G--B, H--B, L--B, L--B → GB (onde n = 8).

O procedimento que aqui vamos mostrar consiste em construir a tabela para A_1 - ou seja, $T(A_1)$ - e depois estendê-la sucessivamente: $T(A_1,A_2)$, $\dots,T(A_1,\dots,A_n)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	-B	--B	GB	G--B	H--B	L--B	L--B → GB
1)	1	0	1	1	1	1	1	1
2)	0	1	0	1	1	1	0	1
3)	1	0	1	0	0	1	0	1
4)	0	1	0	0	0	1	0	1
5)	1	0	1	1	1	0	0	1
6)	0	1	0	1	1	0	0	1
7)	1	0	1	0	0	0	0	1
8)	0	1	0	0	0	0	0	1
9)	1	0	1	1	1	1	0	1

$T(A_1)$, $T(A_1,A_2)$ e $T(A_1,A_2,A_3)$ são construídas da maneira normal, i.e., como no cálculo proposicional clássico. Mas em $T(A_1,\dots,A_4)$ duas novas linhas foram acrescentadas. Vejamos como isso se explica. $T(A_1,A_2,A_3)/\cong$ tem obviamente apenas dois elementos: $|v_1|$ e $|v_2|$. Os elementos de $|v_1|$ e $|v_2|$, restritos a A_1,A_2,A_3 são representados na tabela pelas linhas 1 e 2. Agora, como $\{A_1,A_2,A_3\}^G = \{A_1,A_2,A_3\}^H = \phi$, temos, para $i \in \{1,2\}$,

I) $v_1(B) = 0$, $v_1 \models \varepsilon(\{A_1,A_2,A_3\}^G_{v_i,1})$ e $v_i \models \varepsilon(\{A_1,A_2,A_3\}^H_{v_1,1})$. Desta forma são satisfeitas as condições necessárias para a existência de v' e v'' em $T(A_1,\ldots,A_4)$ tais que $v' \in |v_1|$, $v'' \in |v_2|$ e $v'(A_4) = v''(A_4) = 0$.

II) vacuamente, para todo p, todo q, $q < p < 4$ tais que $A_p = GA_q$ e $v_i(A_p) = 0$, há um $j \in \{1,2\}$ tal que $v_j(A_4) = 0$, $v_j(A_4) = 1$, $v_j \models \varepsilon(\{A_1,A_2,A_3\}^G_{v_i,1})$ e $v_i \models \varepsilon(\{A_1,A_2,A_3\}^H_{v_j,1})$. (I.e., $v(3)v_j$.) Assim, ficam satisfeitas as condições necessárias para a existência de $\overline{v}'$, $\overline{v}''$ em $T(A_1,\ldots,A_4)$ tais que $\overline{v}' \in |v_1|$, $\overline{v}'' \in |v_2|$ e $\overline{v}'(A_4) = \overline{v}''(A_4) = 1$.

Em vista de I e II, é plausível que $T(A_1,\ldots,A_4)/\cong$ tenha quatro elementos $|v_1|,\ldots,|v_4|$, sendo a restrição de cada um deles a $A_1,\ldots,A_4$ representada pelas linhas 1 - 4 da tabela.

Na construção de $T(A_1,\ldots,A_5)$ não ocorre esse desdobramento de linhas - o que já era de se esperar, pois, se $B \leftrightarrow --B$, GB e G--B devem tomar valores iguais. Vejamos, por exemplo, como não é possível G--B tomar o valor 0 na linha 1. Seja $v \in |v_1|$, cuja restrição a $A_1,\ldots,A_4$ é representada pela linha 1. Temos que $\{A_1,\ldots,A_4\}^H = \phi$, e $\{A_1,\ldots,A_4\}^G_{v,1} = \{GB\}$. I.e., $\varepsilon(\{A_1,\ldots,A_4\}^G_{v,1}) = \{B\}$. Caso ocorresse $v(G{-}{-}B) = 0$, deveríamos ter v_i, $i \in \{1,\ldots,4\}$ tal que $v_i(--B) = 0$ e $v(4)v_i$ (i.e., $v_i \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_4\}^G_{v,1})$ - e então $v_i(B) = 1$). Mas $v_i(--B) = 0$ e $v_i(B) = 1$ não é possível. Logo, G--B não pode tomar o valor 0 na linha 1.

Por outro lado, vemos que é possível $v(G\text{--}B) = 1$, pois, vacuamente, para todo p, todo q, $q < p < 5$ tais que $A_p = GA_q$ e $v(A_p) = 0$, há um $j \in \{1, \ldots, 4\}$ tal que $v_j(A_q) = 0$, $v_j(A_3) = 1$ e $v(4)v_j$.

Essa situação repete-se na linha 2, onde mais uma vez G--B pode tomar apenas o valor 1. Nas linhas 3 e 4, ocorre o contrário: só é possível que G--B tome o valor 0. Assim, não se verifica, em $T(A_1, \ldots, A_5)$, desdobramento de linhas.

Por outro lado, em $T(A_1, \ldots, A_6)$ isto volta a ocorrer, e as razões são análogas às apontadas na construção de $T(A_1, \ldots, A_4)$. O mesmo raciocínio aplica-se a $T(A_1, \ldots, A_7)$, mas aqui houve apenas uma linha desdobrada (comparar linhas 1 e 9). Para $i \in \{2, \ldots, 8\}$, vemos que $v_i(\text{--}B) = 0$, ou $v_i(G\text{--}B) = 0$, ou $v_i(H\text{--}B) = 0$ e, portanto, as condições necessárias para $v_i(A_7) = 1$ não podem ser satisfeitas - ao contrário das condições necessárias para $v_i(A_7) = 0$. Nessas linhas, portanto, $v_i(A_7) = 0$.

$T(A_1, \ldots, A_8)$ é construída da maneira usual.

Uma vez indicado o funcionamento do método de decisão através do exemplo anterior, passemos a uma definição precisa de uma tabela para uma sequência normal $A_1, \ldots, A_n$.

IX.1. DEFINIÇÃO. Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência normal, e convencionemos designar por σ_i $(1 \leq i \leq n)$ o segmento inicial até i de $A_1, \ldots, A_n$.[21] Uma tabela

---

[21] No restante deste capítulo, usaremos σ_i para designar o segmento ini-

para $A_1,\dots,A_n$ é uma função $T[\sigma_n]$ de $\{\sigma_n\} \times J(\sigma_n)$ em $\{0,1\}$, onde:

1) $J(\sigma_1) = \{1,2\}$, $T[\sigma_1](A_1,1) = 1$ e $T[\sigma_1](A_1,2) = 0$;

2) Seja $J(\sigma_{n-1}) = \{1,\dots,q\}$;

a) Se A_n é variável proposicional, então $J(\sigma_n) = \{1,\dots,2q\}$ e:

i) para $i < n$, $j \in J(\sigma_{n-1})$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i < n$, $j' \in J(\sigma_{n-1})$ e $j = q + j'$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

iii) para $i = n$, $j \in J(\sigma_{n-1})$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

iv) para $i = n$, $j' \in J(\sigma_{n-1})$ e $j = q + j'$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

b) se $A_n = -A_k$, $k < n$, $J(\sigma_n) = J(\sigma_{n-1})$ e:

i) para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i = n$, $T[\sigma_n](A_i,j) \neq T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

c) se $A_n = A_k \to A_e$, $k < n$, $e < n$, $J(\sigma_n) = J(\sigma_{n-1})$ e:

i) para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i = n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$ sse $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 0$ ou $T[\sigma_{n-1}](A_e,j) = 1$;

d) se $A_n = GA_k$, $k < n$, para cada $j \in J(\sigma_{n-1})$

I) seja $\alpha(j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leq r < n$, se $A_r = GA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$, e para todo t, $1 \leq t < n$, se $A_t = HA_u$ e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j') = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_u,j) = 1\}$;

II) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = GA_q$ e $T[\sigma_{n-1}](A_p,j) = 0$, seja $\beta(p,j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_q,j') = 0$, $T[\sigma_{n-1}](A_k,j')$

---

cial até i, $1 \leq i \leq m$, de uma sequência normal $A_1,\dots,A_m$ qualquer.

$= 1$, e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = GA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$; e, para todo t, $1 \leqq t < n$, se $A_t = HA_u$ e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j') = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_u,j) = 1\}$;

III) Seja $\{j_1,\ldots,j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$ tal que:

1) $j_{m'} < j_{m''}$ se $m' < m''$;

2) $j_{m'} \in \{j_1,\ldots,j_m\}$ se $\alpha(j_{m'},n-1) \neq \phi$ e, para todo $p < n$, $\beta(p,j_{m'},n-1) \neq \phi$.

Então $J(\sigma_n) = \{1,\ldots,q,\ldots,q+m\}$, e:

i) para $i < n$, $j \leqq q$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i < n$, $j = q + m'$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j_{m'})$;

iii) para $i = n$, j tal que $\alpha(j,n-1) = \phi$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

iv) para $i = n$, j tal que $\alpha(j,n-1) \neq \phi$ e, para algum $p < n$, $\beta(p,j,n-1) = \phi$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

v) para $i = n$, j tal que $\alpha(j,n-1) \neq \phi$ e, para cada $p < n$, $\beta(p,j,n-1) \neq \phi$, caso em que, para algum $m' \in \{1,\ldots,m\}$, $j = j_{m'}$ ou $j = q + m'$,

1) se $j = j_{m'}$, então $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

2) se $j = q + m'$, então $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

e) se $A_n = HA_k$, $k < n$, para cada $j \in J(\sigma_{n-1})$

I) seja $\gamma(j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = HA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$ e, para todo t, $1 \leqq t < n$, se $A_t = GA_u$ e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j') = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_u,j) = 1\}$;

II) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = HA_q$ e $T[\sigma_{n-1}](A_p,j) = 0$, seja $\delta(p,j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_q,j') = 0$, $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 1$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = HA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$; e, para todo t, $1 \leqq t$

$< n$, se $A_t = GA_u$ e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j') = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_u,j) = 1\}$;

III) Seja $\{j_1,\ldots,j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$ tal que:

1) $j_{m'} < j_{m''}$ se $m' < m''$;

2) $j_{m'} \in \{j_1,\ldots,j_m\}$ se $\gamma(j_{m'},n-1) \neq \phi$ e, para todo $p < n$, $\delta(p,j,n-1) \neq \phi$.

Então $J(\sigma_n) = \{1,\ldots,q,\ldots,q+m\}$, e:

i) para $i < n$, $j \leqq q$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i < n$, $j = q + m'$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j_{m'})$;

iii) para $i = n$, j tal que $\gamma(j,n-1) = \phi$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

iv) para $i = n$, j tal que $\gamma(j,n-1) \neq \phi$ e, para algum $p < n$, $\delta(p,j,n-1) = \phi$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

v) para $i = n$, j tal que $\gamma(j,n-1) \neq \phi$ e, para cada $p < n$, $\delta(p,j,n-1) \neq \phi$, caso em que, para algum $m' \in \{1,\ldots,m\}$, $j = j_m{}'$ ou $j = q + m'$,

1) se $j = j_{m'}$, então $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

2) se $j = q + m'$, então $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

f) se $A_n = LA_k$, $k < n$, pela definição de sequência normal temos $e < n$, $f < n$ tais que $A_e = GA_k$ e $A_f = HA_k$. Para cada $j \in J(\sigma_{n-1})$

I) seja $\theta(j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = LA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1\}$;

II) para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $T[\sigma_{n-1}](A_p,j) = 0$, seja $\zeta(p,j,n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1})$: $T[\sigma_{n-1}](A_q,j') = 0$, $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 1$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = LA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1\}$;

III) Seja $\{j_1,\ldots,j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$ tal que:

1) $j_{m'} < j_{m''}$ se $m' < m''$;

2) $j_{m'} \in \{j_1,\ldots,j_m\}$ se $\theta(j,n-1) \neq \phi$ e, para todo $p < n$, $\zeta(p,j_{m'},n-1) \neq \phi$ e $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_k,j_{m'}) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_e,j_{m'}) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_f,j_{m'}) = 1$.

Então $j(\sigma_n) = \{1,\ldots,q,\ldots,q+m\}$, e:

i) para $i < n$, $j \leqq q$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

ii) para $i < n$, $j = q + m'$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_i,j)$;

iii) para $i = n$, j tal que $\theta(j,n-1) = \phi$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

iv) para $i = n$, j tal que $\theta(j,n-1) \neq \phi$ e, para algum $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) = \phi$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

v) para $i = n$, j tal que $\theta(j,n-1) \neq \phi$, para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 0$ ou $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_e,j) = 0$ ou $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_f,j) = 0$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$;

vi) para $i = n$, j tal que $\theta(j,n-1) \neq \phi$, para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_k,j) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_e,j) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_f,j) = 1$, caso em que, para algum $m' \in \{1,\ldots,m\}$, $j = j_{m'}$ ou $j = q + m'$,

1) se $j = j_{m'}$, então $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$;

2) se $j = q + m'$, então $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$.

Resta agora provar que as tabelas de valorações são um procedimento de decisão para T-Kt, isto é, que T-Kt é decidível através de tais tabelas.

IX.2. LEMA. Seja $A_1,\ldots,A_m$ uma sequência normal. Para todo $j \in J(\sigma_k)$, $1 \leqq k \leqq m$, existe $j^* \in J(\sigma_m)$ tal que, para todo i, $1 \leqq i \leqq k$, $\mathcal{T}[\sigma_k](A_i,j) = \mathcal{T}[\sigma_m](A_i,j^*)$.

PROVA. Prova-se facilmente por indução em $m - k$, baseada nas condições i) e ii) de a) - f) da definição 1.

IX.3. LEMA. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência normal. Para $1 \leqq i \leqq n$, se $A_i = LA_k$ então, para todo $j \in J(\sigma_n)$, se $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$, então $T[\sigma_n](A_k,j) = T[\sigma_n](A_e, j) = T[\sigma_n](A_f,j) = 1$, onde $A_e = GA_k$ e $A_f = HA_k$.

PROVA. Por indução em n.

1) $n = 1$. Trivialmente.

2) $n > 1$. Hipótese de indução: para $1 \leqq i < n$, se $T[\sigma_{n-1}](A_i,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = T[\sigma_{n-1}](A_e,j) = T[\sigma_{n-1}](A_f,j) = 1$.

Por construção, para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$. Segue-se do Lema 2 que:

(¶) para $1 \leqq i < n$, se $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$, então $T[\sigma_n](A_k,j) = T[\sigma_n](A_e,j) = T[\sigma_n](A_f,j) = 1$.

Seja $i = n$, e suponhamos que $A_n = LA_k$ e $T[\sigma_n](A_n,j) = 1$.

I) Suponhamos que $T[\sigma_n](A_k,j) = 0$. Pela definição 1, temos:

(a) i) $\theta(j,n-1) = \phi$ ou ii) para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$ (1.2.f.iv); ou

(b) i) $\theta(j,n-1) = \phi$ ou ii) para algum $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) = \phi$, ou iii) $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = T[\sigma_{n-1}](A_e,j) = T[\sigma_{n-1}](A_f,j) = 1$ (1.2.f.v).

(a) i) $\theta(j,n-1) = \phi$. Logo, para toda $j' \in J(\sigma_{n-1})$, se, para todo r, $1 \leqq r < n$ tal que $A_r = LA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 1$. Ora, para todo r, $1 \leqq r < n$ tal que $A_r = LA_s$ e $T[\sigma_n](A_r) = 1$, temos, por (¶), que $T[\sigma_n](A_s,j) = 1$ e, portanto, que $T[\sigma_{n-1}](A_s,j) = 1$. Logo, $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 1$ – e é impossível $T[\sigma_n](A_k,j) = 0$.

ii) para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$. Se tivermos $\theta(j,n-1) = \phi$, caímos em i), o que, como vimos, não é possível. Logo, $\theta(j,n-1) \neq \phi$. Mas temos por hipótese que $T[\sigma_n](A_k,j) = 0$ – i.e., $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 0$. Ora, se $\theta(j,n-1) \neq \phi$; para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$ e $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 0$, por 1.2.f.v, temos $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$ – o que contraria a hipótese do lema.

Assim, em (a), $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = T[\sigma_n](A_k,j) = 1$.

(b) i) $\theta(j,n-1) = \phi$. Como em (a) i).

ii) para algum $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) = \phi$. Temos que $\theta(j,n-1) \neq \phi$ (caso contrário caímos em (a) i)). Mas isto é suficiente, por 1.2.f.iv, para que tenhamos $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$ - contrariando a hipótese do lema.

iii) $T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = T[\sigma_{n-1}](A_e,j) = T[\sigma_{n-1}](A_f,j) = 1$. Ora, então $T[\sigma_n](A_k,j) = 1$.

Assim, em (b), $T[\sigma_n](A_k,j) = 1$.

De (a) e (b), portanto, se $T[\sigma_n](A_n,j) = 1$, $T[\sigma_n](A_k,j) = 1$.

II) Suponhamos que $T[\sigma_n](A_e,j) = 0$. Temos então:

(a) $\alpha(j,n-1) \neq \phi$ (1.2.d.iii), ou

(b) i) $\alpha(j,n-1) = \phi$ ou ii) para algum $p < n$, $\beta(p,j,n-1) = \phi$ (1.2.d.v).

(a) $\alpha(j,n-1) \neq \phi$. Mostraremos que essa suposição implica $\theta(j,n-1) \neq \phi$. Pela definição, se $\alpha(j,n-1) \neq \phi$, existe j' tal que $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = GA_s$ e $T[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $T[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$. Suponhamos então que existe t, $1 \leqq t < n$ tal que $A_t = LA_u$, $u < t$, e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j) = 1$. Pela hipótese de indução, $T[\sigma_{n-1}](GA_u,j) = 1$ - e então $T[\sigma_{n-1}](A_u,j') = 1$. Assim, existe j' tal que $T[\sigma_{n-1}](A_k,j') = 0$ e, para todo t, $1 \leqq t < n$, se $A_t = LA_u$ e $T[\sigma_{n-1}](A_t,j) = 1$, $T[\sigma_{n-1}](A_u,j') = 1$. Ou seja, $\theta(j,n-1) \neq \phi$.

Temos agora duas possibilidades. Suponhamos que, para algum $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) = \phi$. Nesse caso, por 1.2.f.iv, $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$ - contrariando a hipótese do lema. Deveremos ter então que, para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$. Mas, como $T[\sigma_{n-1}](A_e,j) = 0$, por 1.2.f.v segue-se que $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$ - novamente contrariando a hipótese do lema. Assim, não é possível que $\theta(j,n-1) \neq \phi$ - e, portanto, que $\alpha(j,n-1) \neq \phi$.

(b) i) $\alpha(j,n-1) = \phi$. Por 1.2.d.iii, $T[\sigma_n](A_e,j) = 1$ - contrariando a hipótese.

Não é necessário considerar (b) ii), pois, ou $\alpha(j,n-1) = \phi$ ou então $\alpha(j,n-1) \neq \phi$ e, nos dois casos, chegamos a uma contradição. Por conseguinte, de (a) e (b), $T[\sigma_n](A_n,j) = 1$.

III) Suponhamos $T[\sigma_n](A_f,j) = 1$. Analogamente a II), não é possível fazer tal suposição.

IX.4. LEMA. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal. Para toda valoração v há um $j \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i \leqq n$ $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$.

PROVA. Seja v uma valoração qualquer. Por definição (0.11) v é uma valoração para a sequência $A_1,\dots,A_n$ - i.e., v é uma $A_1,\dots,A_n$-valoração. A prova procede por indução em n.

1) Seja $n = 1$. Pela definição 1, $J(\sigma_1) = \{1,2\}$. Há duas possibilidades:

I) $v(A_i) = 0$. Por 1.1, temos que $T[\sigma_1](A_1,2) = 0$. Há então um $j = 2$ tal que $T[\sigma_n](A_i,j) = v(A_i)$.

II) $v(A_i) = 1$. Por 1.1 temos que $T[\sigma_1](A_1,1) = 1$. Há então um $j = 1$ tal que $T[\sigma_n](A_i,j) = v(A_i)$.

2) Seja $n > 1$, e seja $J(\sigma_{n-1}) = \{1,\dots,q\}$.

Hipótese de indução: para toda valoração v existe $j \in J(\sigma_{n-1})$ tal que, para $1 \leqq i < n$, $v(A_i) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$.

O que diz a hipótese de indução é que, para toda valoração v, há uma linha j da tabela até n-1 tal que v e j coincidem até n-1. É preciso então provar que coincidem na tabela até n, o que faremos examinando a construção da tabela até n.

Por construção, para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i.j) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$. Segue-se do Lema 2 que:

(¶) Para toda valoração v, há um $j \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i < n$, $v(A_i) = T[\sigma_{n-1}](A_i,j)$.

a) Seja A_n uma variável proposicional. Por 1.2.a, $J(\sigma_n) = \{1,...,2q\}$.

I) $v(A_n) = 0$. Por (¶), existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i < n$, $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$. Suponhamos que $j \in J(\sigma_{n-1})$ - i.e., $j \in \{1,...,q\}$. Por 1.2.a.i, há $j' \in J(\sigma_n)$ tal que, para $i < n$, $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$. Por 1.2.a.iv, para $i = n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 0$. Logo, existe $j' \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i \leqq n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = v(A_i)$. Suponhamos agora que $j = q + j'$. Por 1.2.a.iv, $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$ - e portanto, existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i \leqq n$, $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$.

II) $v(A_n) = 1$. Prova-se analogamente.

b) Seja $A_n = -A_k$, $k < n$.

I) $v(A_n) = 0$. Então $v(A_k) = 1$. Por (¶) há um $j \in J(\sigma_n)$ tal que $v(A_k) = T[\sigma_n](A_k,j)$. Por 1.2.b.ii, para $i = n$, $T[\sigma_n](A_n,j) \neq T[\sigma_n](A_k,j)$. Como $T[\sigma_n](A_k,j) = T[\sigma_{n-1}](A_k,j) = 1$, $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$.

II) $v(A_n) = 1$. Prova-se analogamente ao caso anterior.

c) Seja $A_n = A_k \rightarrow A_e$, $e < n$, $k < n$.

I) $v(A_n) = 0$. Então $v(A_k) = 1$ e $v(A_e) = 0$. Por (¶) existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que $T[\sigma_n](A_k,j) = 1$ e $T[\sigma_n](A_e,j) = 0$. Por 1.2.c.ii, $T[\sigma_n](A_n,j) = 0$.

II) $v(A_n) = 1$. Prova-se analogamente ao caso anterior.

d) Seja $A_n = GA_k$, $k < n$. Prova-se analogamente ao caso f) abaixo.

e) Seja $A_n = HA_k$, $k < n$. Prova-se analogamente ao caso f) abaixo.

f) Seja $A_n = LA_k$, $k < n$. Como $A_1,...,A_n$ é uma sequência normal, existe $e < n$, $f < n$ tais que $A_e = GA_k$ e $A_f = HA_k$.

I) Seja $\upsilon(A_n) = 0$. Pela definição, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração υ' tal que $\upsilon'(A_k) = 0$ e $\upsilon(L,n-1)\upsilon'$. Por (¶) existe $j' \in J(\sigma_n)$ tal que, para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = \upsilon'(A_i)$. Então: $T[\sigma_n](A_k,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$ tal que $A_r = LA_s$ e $\upsilon(A_r) = 1$, $T[\sigma_n](A_r,j) = 1$ e $T[\sigma_n](A_s,j') = 1$. Por definição, $\theta(j,n-1) \neq \phi$. Verificando na definição 1.2 os itens iv, v e vi de f), vemos que, qualquer o caso, há sempre j^* tal que, para $i < n$, $T[\sigma_n](A_i,j) = T[\sigma_n](A_i,j^*)$ e, além disso, $T[\sigma_n](A_n,j^*) = 0$. Portanto, existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i \leqq n$ $\upsilon(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$.

II) Seja $\upsilon(A_n) = 1$. Pela definição de $A_1,\ldots,A_n$-valoração, $\upsilon(A_k) = \upsilon(GA_k) = \upsilon(HA_k) = 1$ e, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $\upsilon(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração υ_p tal que $\upsilon_p(A_q) = 0$, $\upsilon(L,n-1)\upsilon_p$ e $\upsilon_p(A_k) = 1$. Por (¶), existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que $T[\sigma_n](A_k,j) = T[\sigma_n](A_e,j) = T[\sigma_n](A_f,j) = 1$ e, para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $\upsilon(A_p) = 0$, temos $T[\sigma_n](A_p,j) = 0$. Além disso, para todo t, $1 \leqq t < n$ tal que $A_t = LA_u$ e $\upsilon(A_t) = 1$, $T[\sigma_n](A_t,j) = 1$. Segue-se também de (¶) que existe $j' \in J(\sigma_n)$ tal que, para $1 \leqq i < n$, $\upsilon_p(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j')$. Temos portanto que $T[\sigma_n](A_q,j') = 0$, $T[\sigma_n](A_k,j') = 1$ e, como $\upsilon(L,n-1)\upsilon_p$, para todo t, $1 \leqq t < n$ tal que $A_t = LA_u$ e $T[\sigma_n](A_t,j) = 1$, $T[\sigma_n](A_u,j') = 1$. Disso tudo segue-se que, para todo $p < n$, $\zeta(p,j,n-1) \neq \phi$. Por 1.2.f.vi, temos que existe $j \in J(\sigma_n)$ $(j = j_m')$ tal que, para $1 \leqq i \leqq n$, $\upsilon(A_i) = T[\sigma_n](A_i,j)$.

IX.5. LEMA. Se $\vdash A$ então, para toda sequência normal $A_1,\ldots,A_n$, onde $A = A_i$, $1 \leqq i \leqq n$, e para todo $j \in J(\sigma_n)$, $T[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

PROVA. Procedemos por indução no número r de linhas de uma prova de A_i em T-Kt.

1) $r = 1$. Nesse caso, A_i é um axioma de T-Kt.

a) Seja A_i da forma $A \to (B \to A)$. Suponhamos que, para alguma $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$. Por 1.2.c.ii, $\mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = \mathcal{T}[\sigma_n](B,j) = 1$, e $\mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = 0$ - o que não é possível. Logo, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

b) Se A_i for da forma A2 ou A3, prova-se pelo mesmo raciocínio.

c) Seja A_i da forma $L(A \to B) \to (LA \to LB)$. Suponhamos que, para alguma $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$. Por 1.2.c.ii, $\mathcal{T}[\sigma_n](L(A \to B),j) = \mathcal{T}[\sigma_n](LA,j) = 1$, e $\mathcal{T}[\sigma_n](LB,j) = 0$. Pela definição 1 vemos que, se $\mathcal{T}[\sigma_n](LB,j) = 0$, então $\theta(j,n-1) \neq \phi$ - caso contrário, por 1.2.f.iii, $\mathcal{T}[\sigma_n](LB,j) = 1$. De $\theta(j,n-1) \neq \phi$ segue-se que existe $j' \in J(\sigma_n)$ tal que $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](B,j') = 0$ e, para todo r, $1 \leqq r < n$, se $A_r = LA_s$ e $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_r,j) = 1$, então $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_s,j') = 1$. Ora, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](L(A \to B),j) = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](LA,j) = 1$ - logo, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A \to B,j') = \mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A,j') = 1$. Mas temos que $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](B,j') = 0$, o que, pela condição 1.2.c.ii, não é possível. Portanto, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

d) Seja A_i da forma $G(A \to B) \to (GA \to GB)$ ou $H(A \to B) \to (HA \to HB)$. Prova-se analogamente a c).

e) Seja A_i da forma $-G-HA \to A$. Suponhamos que, para alguma $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 0$. Então $\mathcal{T}[\sigma_n](-G-HA,j) = 1$ e $\mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = 0$, ou seja, $\mathcal{T}[\sigma_n](G-HA,j) = 0$. Segue-se que existe $j' \in J(\sigma_n)$ tal que $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](-HA,j') = 0$ e, para todo t, $1 \leqq t < n$, se $A_t = HA_u$ e $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_t,j') = 1$, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A_u,j) = 1$. Ora, $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](HA,j') = 1$, e temos então $\mathcal{T}[\sigma_{n-1}](A,j) = \mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = 1$ - contrariando a suposição inicial de que $\mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = 0$. Logo, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

f) Seja A_i da forma $-H-GA \to A$. Analogamente a e), prova-se que para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

g) Seja A_i da forma $LA \to A$. Pelo Lema 3, se $\mathcal{T}[\sigma_n](LA,j) = 1$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A,j) = 1$. Logo, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\mathcal{T}[\sigma_n](A_i,j) = 1$.

h) Seja A_i da forma $LA \to GA$ ou $LA \to HA$. Prova-se analogamente ao caso anterior.

2) $r > 1$. Se A_i é um axioma, a propriedade já foi provada em 1).

a) A_i foi obtido por MP a partir de B e $B \to A_i$. Temos então que $\vdash B$ e $\vdash B \to A_i$. Tomemos uma sequência normal $A_1, \ldots, A_{n+k}$, $k \geqq 0$, onde $A_{n+k} = B \to A_i$. É claro que B ocorre nessa sequência. Como $\vdash B$ e $\vdash B \to A_i$, temos, pela hipótese de indução que, para toda $j^* \in J(\sigma_{n+k})$, $T[\sigma_{n+k}](B \to A_i, j^*) = T[\sigma_{n+k}](B, j^*) = 1$. Nesse caso, é necessário que, para toda $j^* \in J(\sigma_{n+k})$, $T[\sigma_{n+k}](A_i, j^*) = 1$. Ora, pelo Lema 2, se, para alguma $j \in J(\sigma_n)$, $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$, então, para algum $j^* \in J(\sigma_{n+k})$, $T[\sigma_{n+k}](A_i, j) = 0$. Logo, segue-se que, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$.

b) $A_i = LA_k$ e foi obtido por N a partir de A_k. Temos que $\vdash A_k$ e, pela hipótese de indução, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$. Mas então, por 1.2. f.I, para toda $j \in J(\sigma_n)$, $\theta(j, n-1) = \phi$. Logo, $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$, por 1.2.f.iii.

IX.6. TEOREMA. $\vdash A$ sse para toda sequência normal $A_1, \ldots, A_n$, onde $A = A_i$, $1 \leqq i \leqq n$, e para toda $j \in J(\sigma_n)$ $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$.

PROVA. A) Suponhamos que $\vdash A$. A prova é imediata, pelo Lema 5.

B) Suponhamos que para toda sequência normal $A_1, \ldots, A_n$, onde $A = A_i$, $1 \leqq i \leqq n$, e para toda $j \in J(\sigma_n)$, $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$. Suponhamos que $\nvdash A_i$. Então $\nvDash A_i$; logo, existe uma valoração v tal que $v(A_i) = 0$. Pelo Lema 4, existe $j \in J(\sigma_n)$ tal que $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ - contradizendo a hipótese. Logo, $\vDash A_i$.

Assim, T-Kt é decidível pelas tabelas de valorações. Para outros cálculos, temporais e modais-temporais, o método é o mesmo, sendo suficientes pequenas alterações. Note-se que a definição da tabela $T(A_1, \ldots, A_n)$ é estritamente baseada, ou reflete, a definição de $A_1,\ldots,A_n$-valoração. Dispondo-se então de uma definição tal, um procedimento de decisão por tabelas é facilmente obtido.

PARTE IV

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Capítulo X

PROBLEMAS ABERTOS

O objetivo a que nos havíamos proposto era o de construir semânticas de valorações para os diversos cálculos temporais e modais-temporais. Como se pôde ver nos capítulos anteriores, isto foi conseguido para um bom número de sistemas: construímos a semântica, provamos correção, completude e mostramos como obter um método de decisão. No entanto, há alguns cálculos para os quais isto não foi possível. São eles Ktt, Kl, Kd, Kc, Kc2 (estes bem conhecidos - v., e.g., Landim 1974, Prior 1967), S4-Kt, S5-Kt e suas várias extensões (S4-Kl, S5-Kd, S5-Kc3, etc.).

Idealizamos para alguns destes cálculos definições de $A_1,\ldots,A_n$-valorações que parecem ser bastante "naturais" e "satisfatórias": o problema reside em não se conseguir provar que as $A_1,\ldots,A_n$-valorações assim definidas são $A_1,\ldots,A_n$-normais (i.e., o lema correspondente a I.2.8). Vamos apresentá-los aqui, juntamente com as definições de $A_1,\ldots,A_n$-valorações sugeridas.

X.1. O CÁLCULO Ktt

Ktt, já tivemos ocasião de mencionar, seria a "lógica do tempo transitivo". Sua linguagem é *L*1, e obtemos uma base axiomática para ele acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A12. $GA \rightarrow GGA$

X.1.1. DEFINIÇÃO. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, e f, f' funções de FOR_{L1} em $\{0,1\}$. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que:

$f(\Pi,k)f'$ sse $f' \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_k\}^G_{f,1}) \cup \{A_1,\dots,A_k\}^G_{f,1}$ e $f \models \varepsilon(\{A_1,\dots,A_k\}^H_{f',1}) \cup \{A_1,\dots,A_k\}^H_{f',1}$.

X.1.2. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\dots,A_n$-*valoração* (para Ktt) se $A_1,\dots,A_n$ é uma sequência normal e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração e, se para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(\Pi,n-1)v'$; para $\nabla = H$, $v'(\Pi,n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$, então para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\dots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(\Pi,n-1)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(\Pi,n-1)v$.

X.2. O CÁLCULO Kl

Kl é uma extensão de Ktt, e corresponderia a uma "lógica do tempo linear". Uma base axiomática para o mesmo é obtida adicionando-se os esquemas abaixo a Ktt:

A20. $A \rightarrow (GA \rightarrow (HA \rightarrow HGA))$

A21. $A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$

X.2.1. DEFINIÇÃO. Seja $A_1,\dots,A_n$ uma sequência normal, e f, f' funções de FOR_{L1} em $\{0,1\}$. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que:

$f(\Psi,k)f'$ sse $f(\Pi,k)f'$, $f' \models \{A_1,\ldots,A_k\}^H_{f,1}$ e $f \models \{A_1,\ldots,A_k\}^G_{f',1}$.

X.2.2. DEFINIÇÃO. ($A_1,\ldots,A_n$-*valoração para* K1) Como em Ktt, com a seguinte alteração nos itens

I) ... para ∇ = G, $v(\Psi,n-1)v'$; para ∇ = H, $v'(\Psi,n-1)v$;

II) ... para ∇ = G, $v(\Psi,n-1)v_p$; para ∇ = H, $v_p(\Psi,n-1)v$.

X.3. O CÁLCULO S4-Kt

Obtemos S4-Kt adicionando a T-Kt o seguinte esquema:

A22. $LA \rightarrow LLA$

Para definir $A_1,\ldots,A_n$-valorações para S4-Kt, necessitamos de um outro tipo de sequência que não a sequência normal até agora utilizada, e que definimos a seguir:

X.3.1. DEFINIÇÃO. $A_1,\ldots,A_n$ é uma *sequência supernormal* se, para $1 \leqq i \leqq n$,

a) se B é uma subfórmula de A_i então existe $j < i$ tal que $B = A_j$;

b) se $A_i = LA_k$, $1 \leqq k \leqq i$, e existe $A_j = \nabla A_k$, $1 \leqq j \leqq n$, então $i < j$;

c) para $1 \leqq i \leqq j$, se $A_i = A_j$ então $i = j$.

X.3.2. DEFINIÇÃO. Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma sequência supernormal e f, f' funções de FOR_{L2} em $\{0,1\}$. Para $1 \leqq k \leqq n$, dizemos que:

a) $f(\Sigma,k)f'$ sse $f' \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_k\}^G_{f,1}) \cup \{A_1,\ldots,A_k\}^L_{f,1}$ e $f \models \varepsilon(\{A_1,\ldots,A_k\}^H_{f',1}) \cup \{A_1,\ldots,A_k\}^L_{f',1}$;

b) $f(\Phi,k)f'$ sse $f' \models \{A_1,\ldots,A_k\}^L_{f,1}$.

X.3.3. DEFINIÇÃO. v é uma $A_1,\ldots,A_n$-*valoração* (para S4-Kt) se $A_1,\ldots,A_n$ é uma sequência supernormal e:

1) $n = 1$ e v é uma semi-valoração;

2) $n > 1$, v é uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração e:

A) se, para algum $m < n$, $A_n = \nabla A_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e, para $\nabla = G$, $v(\Sigma,n-1)v'$; para $\nabla = H$, $v'(\Sigma,n-1)v$;

II) se $v(A_n) = 1$, então para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = \nabla A_q$ e $v(A_p) = 0$ existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e, para $\nabla = G$, $v(\Sigma,n-1)v_p$; para $\nabla = H$, $v_p(\Sigma,n-1)v$;

B) se, para algum $m < n$, $A_n = LA_m$,

I) se $v(A_n) = 0$, então existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v' tal que $v'(A_m) = 0$ e $v(\Phi,n-1)v'$;

II) se $v(A_n) = 1$, então $v(A_m) = 1$ e para todo p, todo q, $q < p < n$ tais que $A_p = LA_q$ e $v(A_p) = 0$, existe uma $A_1,\ldots,A_{n-1}$-valoração v_p tal que $v_p(A_q) = 0$, $v_p(A_m) = 1$ e $v(\Phi,n-1)v_p$.

X.4. O CÁLCULO S5-Kt

Obtemos S5-Kt adicionando a T-Kt o esquema abaixo:

A23. $L\text{-}A \to L\text{-}LA$

X.4.1. DEFINIÇÃO. ($A_1,\ldots,A_n$-*valoração para* S5-Kt) Como em S4-Kt, com a seguinte alteração nos itens

B) I) ... e $v'(\Phi,n-1)v$;

II) ... e $v_p(\Phi,n-1)v$.

X.5. OBSERVAÇÕES FINAIS

Para cada um dos cálculos acima apresentados, dispondo da definição de $A_1,\ldots,A_n$-valoração, facilmente definimos valoração, extensão canônica, $A_1,\ldots,A_n$-normalidade, etc. Prova-se que as extensões canônicas assim definidas são semi-valorações, bem como o lema correspondente a I.2.7. O que não se conseguiu, conforme dissemos, foi a prova do lema correspondente a I.2.8. As mais diversas tentativas foram feitas, sem sucesso. A questão pode resumir-se a uma técnica de prova inviável, ou até mesmo a uma incapacidade de ver o óbvio. A idéia de que não é possível construir semânticas de valorações para alguns cálculos não nos parece muito plausível, pois pode-se mostrar que existe uma relação muito estreita entre valorações e modelos de Kripke.[22] Ora, temos semânticas de Kripke para Ktt, Kl e Kd (v. Landim 1974), e é fácil construí-las para S4-Kt e S5-Kt.[23] Isso nos leva a crer que a não obtenção de resultados nestes casos está ligada apenas a dificuldades de natureza técnica.

Podemos notar características comuns a estes cálculos problemáticos, observando seus axiomas específicos. Senão vejamos:

Ktt: $GA \to GGA$

S4-Kt: $LA \to LLA$

S5-Kt: $MA \to LMA$ (equivalente a A23)

---

[22] V. Loparić 1977 onde isto é feito para o cálculo K.

[23] A única alteração de monta que têm as semânticas de Kripke para cálculos modais-temporais é a existência de duas relações de acessibilidade. Para ter uma idéia, v. Ishimoto & Watanabe 1974, onde são apresentados modelos de Kripke para cálculos bi-modais.

Kl: $A \wedge GA \wedge HA \rightarrow HGA$ (equivalente a A20)

$A \wedge HA \wedge GA \rightarrow GHA$ (equivalente a A21)

Kd: $GGA \rightarrow GA$

Kc2: $GGA \rightarrow HA$

Kc: $GGA \rightarrow A$

Note-se a estrutura bastante similar destas fórmulas. Isto sugere que, se encontrarmos a solução para um dos cálculos, facilmente resolveremos o problema de outros.

Curioso é que dispomos, para S5, de uma semântica de valorações. As definições são as mesmas de Kc3, se entendermos '∇' como 'L'. Para S4, contudo, o problema persiste. O fato de não se obter valorações para S5-Kt deve-se à existência de teoremas tipo $LA \rightarrow GLA$ e $LA \rightarrow HLA$.

Ficam as questões em aberto. É o que nos propomos investigar em trabalhos futuros,

se a tanto [nos] ajudar o engenho e arte...[24]

[24] Camões, *Os Lusíadas*, Canto Primeiro, 2ª estrofe.

APÊNDICE

BASES AXIOMÁTICAS PARA OS CÁLCULOS ABORDADOS NESTA DISSERTAÇÃO

I) ESQUEMAS DE AXIOMAS

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3. $(-B \to -A) \to ((-B \to A) \to B)$

A4. $G(A \to B) \to (GA \to GB)$

A5. $H(A \to B) \to (HA \to HB)$

A6. $-G-HA \to A$

A7. $-H-GA \to A$

A8. $G-A \to -GA$

A9. $H-A \to -HA$

A10. $GA \to A$

A11. $GA \to HA$

A12. $GA \to GGA$

A13. $-GA \to G-A$

A14. $-HA \to H-A$

A15. $L(A \to B) \to (LA \to LB)$

A16. $LA \to A$

A17. $LA \to GA$

A18. $LA \to HA$

A19. $-L-LA \to A$

A20. $A \to (GA \to (HA \to HGA))$

A21. $A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$

A22. $LA \rightarrow LLA$

A23. $L-A \rightarrow L-LA$

A24. $GGA \rightarrow GA$

A25. $GGA \rightarrow HA$

A26. $GGA \rightarrow A$

A27. $GA \rightarrow (A \rightarrow -H-GA)$

A28. $HA \rightarrow (A \rightarrow -G-HA)$

II) REGRAS DE INFERÊNCIA

MP. A, A → B / B

RG. A / GA

RH. A / HA

N. A / LA

III) CÁLCULOS TEMPORAIS

Todos os cálculos abordados nesta dissertação são obtidos acrescentando-se postulados ao Cálculo Proposicional Clássico (P). Uma base axiomática para P consiste nos esquemas de axiomas A1, A2 e A3, e na regra MP.

III) CÁLCULOS TEMPORAIS

Kt: P + A4, A5, A6, A7, RG e RH

Km: Kt + A8, A9

Kr: Kt + A10

Ks: Kt + A11

Kc3: P + A4, A6, A10, A11, A12, RG

K3: Kt $\dotplus$ A13, A14

Kd: Kt $\dotplus$ A24

Ke: Kt $\dotplus$ A27, A28

Kc: Kt $\dotplus$ A26

Kc2: Kt $\dotplus$ A25

Ktt: Kt $\dotplus$ A12

Kl: Ktt $\dotplus$ A20, A21

IV) CÁLCULOS MODAIS

K: P $\dotplus$ A15, N

T: K $\dotplus$ A16

B: T $\dotplus$ A19

S4: T $\dotplus$ A22

S5: T $\dotplus$ A23

V) CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

T-Kt: T $\dotplus$ A4, A5, A6, A7, A17, A18

B-Kt: T-Kt $\dotplus$ A19

S4-Kt: T-Kt $\dotplus$ A22

S5-Kt: T-Kt $\dotplus$ A23

BIBLIOGRAFIA

01. BENTHEM, J.F.A.K. van. "Tense Logic and Standard Logic". *Logique et Analyse*, (80): 41-83, 1978.

02. BURGESS, John P. "Logic and Time". *Journal of Symbolic Logic*, 44(4):566-82, 1979.

03. CAMÕES, Luís Vaz de. *Os Lusíadas*. São Paulo, Saraiva, 1960.

04. CHANG, C.C. & KEISLER, H.J. *Model Theory*. Amsterdam, North-Holland, 1973.

05. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. *An Introduction to Modal Logic*. London, Methuen, 1972.

06. ISHIMOTO, Arata & FUJIKAWA, Yoshimi. "On Some Bi-Modal Predicate Calculi". *Bulletin of the Tokyo Institute of Technology*, (100):129-41, 1970.

07. ___ & WATANABE, Y. "Some Bi-Modal Propositional Logics and Their Completeness". *Report of the Division of Humanities, Tokyo Institute of Technology*, (1):63-79, 1974.

08. KRIPKE, Saul. "A Completeness Theorem in Modal Logic". *Journal of Symbolic Logic*, 24: 1-14, 1959.

09. ___ "Semantical Analysis of Modal Logic, I, Normal Propositional Logic". *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9: 67-96, 1963.

10. LACEY, Hugh M. *A Linguagem do Espaço e do Tempo*. trad. Marcos Barbosa de Oliveira. São Paulo, Perspectiva, 1972.

11. LANDIM FILHO, Raul Ferreira. *Completude et Decidabilité de Quelques Systèmes de Logique du Temps*. Institut Superieur de Philosophie, Université Catholique de Louvain, janvier 1974. (Tese de Doutoramento)

12. ___ "Teorema da Completude para as Lógicas do Tempo". In: ___ & ALMEIDA, Guido Antonio de (org.) *Filosofia da Linguagem e Lógica*. São Paulo, Loyola; Rio de Janeiro, PUC, 1980. cap. IV, p.113-33.

13. LOPARIĆ, Andréa M. "The Method of Valuations in Modal Logic". In: ARRUDA, A.I., DA COSTA, N.C.A, CHUAQUI, R. (org.) *MATHEMATICAL LOGIC: Proceedings of the First Brazilian Conference*. New York, Marcel Dekker, 1977.

14. MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. 2 ed. New York, D. Van Nostrand, 1979.

15. PRIOR, Arthur N. *Time and Modality*. Oxford, Clarendon Press, 1957.

16. ___ *Past, Present and Future*. Oxford, Clarendon Press, 1967.

17. RESCHER, Nicholas & URQUHART, Alasdair. *Temporal Logic*. Wien, New York, Springer-Verlag, 1971.

18. SHOENFIELD, Joseph. *Mathematical Logic*. California, Addison-Wesley, 1967.

19. SNYDER, D.P. *Modal Logic and its Applications*. New York, D. Van Nostrand, 1971.