UNICAMP

Edgar Luis Bezerra de Almeida

Lógicas abstratas e o primeiro teorema de Lindström

Campinas
2013

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

Edgar Luis Bezerra de Almeida

Lógicas abstratas e o primeiro teorema de Lindström

Orientadora: Itala M. L. D'Ottaviano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) para a obtenção do Título de Mestre em Filosofia.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO DEFINITIVA DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO EDGAR LUIS BEZERRA DE ALMEIDA E ORIENTADA PELA PROFA. ITALA M. L. D'OTTAVIANO.
CPG, 11 de março, 2013.

Campinas
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
SANDRA APARECIDA PEREIRA-CRB8/7432 - BIBLIOTECA DO IFCH
UNICAMP

	Almeida, Edgar Luis Bezerra de, 1976-
AL64L	Lógicas abstratas e o primeiro teorema de Lindström / Edgar Luis Bezerra de Almeida. -- Campinas, SP : [s.n.], 2013
	Orientador: Itala Maria Loffredoo D'Ottaviano Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Semântica - Modelos matemáticos. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Lógica de primeira ordem. I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo, 1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em Inglês: Abstract logics and the first Lindström's theorem
Palavras-chave em inglês:
Semantics - Mathematical models
Logic, Symbolic and mathematical
First-order logic
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Itala Maria Loffredoo D'Ottaviano [Orientador]
Hércules de Araújo Feitosa
Rodrigo de Alvarenga Freire
Data da defesa: 11-03-2013
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, em sessão pública realizada em 11 de março de 2013, considerou o candidato Edgar Luis Bezerra de Almeida aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Freire

Rodrigo de Alvarenga Freire

Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano

Prof. Dr. Rodolfo C. Ertola Biraben

À Raquel de Andrade Luciano.

Agradecimentos

Agradeço à professora Itala M. L. D'Ottaviano pela orientação e incentivo dispensados durante todo o processo de produção desta Dissertação e ao professor Hércules de Araujo Feitosa, com quem iniciei meus estudos em lógica; agradeço também a Rodrigo de Alvarenga Freire, pela amizade e incentivo.

Agradeço ainda aos professores Itala M. L. D'Ottaviano, Walter A. Carnielli e Marcelo E. Coniglio, bem como os pesquisadores Rodolfo Ertola e Fábio Bertato pelo esforço hercúleo que mantém uma atmosfera de rico debate intelectual e livre circulação de ideias no Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP.

Ainda, agradeço aos amigos e colegas do Centro de Lógica, Epistemologia e História da UNICAMP, felizmente muitos para serem nomeados, pela convivência harmoniosa, pelo ambiente amistoso e pelo clima de camaradagem que perpassa todas as atividades desenvolvidas no referido Centro.

Por fim, agradeço aos membros da banca de qualificação e de defesa desta Dissertação de Mestrado.

A todos eles, MUITO OBRIGADO.

Resumo

Esta Dissertação apresenta uma definição de lógica abstrata e caracteriza alguns sistemas lógicos bastante conhecidos na literatura como casos particulares desta. Em especial, mostramos que a lógica de primeira ordem, lógica de segunda ordem, lógica com o operador Q_1 de Mostowski e a lógica infinitária $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ são casos particulares de lógicas abstratas. Mais que isso, mostramos que tais lógicas são regulares.

Na análise de cada uma das lógicas acima citadas, mostramos o comportamento das mesmas com relação às propriedades de Löwenheim-Skolem e compacidade enumerável, resultados estes centrais à teoria de modelos. Nossa análise permite-nos constatar que, dentre os quatro casos apresentados, o único que goza de ambas as propriedades é a lógica de primeira ordem; as demais falham em uma, na outra ou em ambas as propriedades.

Mostramos que isso não é mera coincidência, mas sim um resultado profundo, que estabelece fronteiras bem delimitadas à lógica de primeira ordem, conhecido como primeiro teorema de Lindström: se uma lógica é regular, ao menos tão expressiva quanto a lógica de primeira ordem e satisfaz ambas as propriedades citadas, então esta é equivalente a lógica de primeira ordem. Realizamos uma prova cuidadosa do teorema, em que cada ideia e cada estratégia de prova é estabelecida criteriosamente.

Com seu trabalho, Lindström inaugurou um novo e profícuo campo de estudo, a teoria abstrata de modelos que estabelece, com relação a diversas combinações de propriedades de sistemas lógicos, uma estratificação entre lógicas. Apresentamos um outro exemplo de tal estratificação através de uma versão modal do teorema de Lindström, versão esta que caracteriza a lógica modal básica como maximal quanto a bissimilaridade e compacidade.

Encerramos esta Dissertação com algumas considerações acerca da influência do primeiro teorema de Lindström.

Abstract

This thesis presents the definition of abstract logic and features some quite logical systems presented in the literature as particular cases of this. In particular, we show that first-order logic, second-order logic, the logic with Mostowski's operator Q_1 and the infinitary logic $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ are specific systems of abstract logic. Moreover, we show that such logics are regular.

In the analysis of each above mentioned logical systems we analyses his performance with regard to the properties of compactness and Löwenheim-Skolem, results that have important role in model theory. Our analysis allows us to conclude that among the four cases, the only one who enjoys both properties is the first-order logic, and all others fail in one, other or both properties.

We show that this is not mere coincidence, but rather a deep, well-defined boundaries establishing the first-order logic, known as first Lindström's theorem: a regular logic that is at least as expressive as first-order logic and satisfies both properties mentioned, then this is equivalent to first-order logic. We conducted a thorough proof of the theorem, in which each idea and each proof strategy is carefully established.

With his work Lindström inaugurated a new and fruitful field of study, the abstract-model theory, which establishes with respect to different combinations of properties of logical systems, stratification between logical. Here is another example of such stratification through one of the theorem of modal version Lindström, which characterizes this version of the logic basic modal such as maximal bissimimulation and compactness.

We conclude the thesis with some considerations about the influence of the Lindström's theorem.

Sumário

Introdução

A lógica de primeira ordem é munida de uma série de propriedades interessantes, dentre as quais se destacam:

- $\aleph_0$-compacidade: se um conjunto Γ de sentenças é tal que todo subconjunto finito de Γ tem modelo, então o conjunto Γ como um todo tem modelo.
- Löwenheim-Skolem: se um conjunto de sentenças de tamanho enumerável tem modelo com domínio infinito, então este conjunto de sentenças tem modelo de domínio enumerável.
- Löwenheim-Skolem-Tarski: se um conjunto de sentenças enumerável tem modelo infinito, então tem modelo com cardinalidade infinita qualquer.
- Completude: toda sentença válida é um teorema[1].
- Definibilidade de Beth: se uma sentença define implicitamente um predicado que ocorre dentre seus símbolos, então ela também o define explicitamente.

Per Lindström (1936 - 2009), filósofo e lógico-matemático sueco que de acordo com Väänänem & Westerstähl, [24], "was a rather withdrawn person, not a frequent conference participant, and he did not feel that his results, once published, needed further advertising: they should speak for themselves". Ainda de acordo com estes autores,

> It was during his early university studies, in first practical and then theoretical philosophy, that he became interested in logic, and began to develop his remarkable mathematical talent. Although he had contact with other Swedish logicians such as Stig Kanger in Uppsala and Sören Halldén in Lund, he had no teacher, but essentially taught himself mathematical logic, apparently by reading Kleene's Introduction to Metamathematics which appeared in 1952, and Tarski's, Vaught's, and Robinson's model-theoretic papers from the fifties.

[1]Em contextos mais gerais que a lógica de primeira ordem esta asserção é substituída pela completude abstrata, presente quando o conjunto de sentenças válidas é recursivamente enumerável.

Na década de 1960 Lindström publicou uma série de resultados em teoria de modelos, dentre eles o conhecido “teste de Lindström” para teorias modelo-completas e uma prova de que boa ordenação não é definível em uma lógica que estenda a lógica de primeira ordem ao permitir conjunções enumeráveis de fórmulas e novos símbolos de predicados. Ainda neste período Lindström desenvolveu uma teoria de quantificadores que citaremos brevemente na Seção 2.1. A partir da década de 1970 sua atenção se voltou à aritmetização da metamatemática e, nesta área, além de resultados de destaque, publicou seu único livro, *Aspects of Incompleteness*, na série Lectures on Logic da ASL, [17].

Contudo, foi em 1969 que Lindström publicou o trabalho pelo qual é mais reconhecido. Em [15], um artigo de apenas 11 páginas, ele estabeleceu uma série de resultados que caracterizam a lógica de primeira ordem; especificamente, ele provou que a lógica de primeira ordem é maximal com relação a qualquer um dos seguintes pares de propriedades:

- $\aleph_0$-compacidade e Löwenheim-Skolem;
- Löwenheim-Skolem e Löwenheim-Skolem-Tarski;
- Löwenheim-Skolem e completude;
- Löwenheim-Skolem e definibilidade de Beth.

Dos pares de propriedades acima, dois recebem especial destaque. O primeiro é o par formado pelas propriedades de $\aleph_0$-compacidade e Löwenheim-Skolem, que desempenham papel fundamental à teoria de modelos da lógica de primeira ordem; por exemplo, $\aleph_0$-compacidade tem como consequência que, se um conjunto de sentenças é inconsistente, então essa inconsistência pode ser isolada em um subconjunto finito do conjunto inicial, enquanto a outra propriedade dá origem aos modelos não-*standard* da aritmética. Por essa razão, a caracterização da lógica de primeira ordem como a única munida destas duas propriedades compõe o que é conhecido como primeiro teorema de Lindström.

O segundo par interessante de propriedades é aquele que envolve a completude, em função de seu relevante papel de conexão entre semântica e sintaxe, bem como a importante identificação entre o conjunto de sentenças válidas ser recursivamente enumerável e a completude; isso faz com que a caracterização da lógica de primeira ordem como maximal com relação à completude e Löwenheim-Skolem receba uma denominação própria, conhecida como segundo teorema de Lindström.

Todavia, para caracterizar uma lógica como maximal com relação a algum conjunto de propriedades é preciso uma compreensão clara do que é lógica, mas, ainda hoje, não há consenso quanto à resposta à questão: *o que é lógica?* Lindström evitou a polêmica ao fornecer uma definição que identifica uma lógica com uma classe de estruturas fechadas para determinadas propriedades. Com isso, ele contornou o problema de apresentar uma sintaxe, semântica e relação de satisfatibilidade à definição de lógica e considerou, exclusivamente, a contraparte semântica oferecida pelas estruturas.

Tal atitude, embora frutífera e adequada aos resultados que Lindström tinha em mente, tem óbvios problemas quanto a sua aceitabilidade. Segundo Barwise, [1], página 14,

> From the point of view of logic, this is at best a stop-gap measure, to be replaced by an analysis of just what makes up a logic. But the task of coming up with a general definition of just what constitutes a logic has been a large one, one that may still be not entirely settled.

A publicação e popularização dos teoremas de Lindström que, justiça seja feita, também foram obtidos de maneira independente por Harvey Friedman em 1970, levaram à busca de teoremas de caracterização para outras lógicas, além do estudo das inter-relações entre diversas propriedades semânticas das lógicas, o que deu origem à teoria de modelos abstratos. Infelizmente, tais resultados são raros e muitos sistemas lógicos importantes ainda não possuem caracterizações adequadas.

O primeiro objetivo deste trabalho é apresentar e discutir uma definição de lógica abstrata que, embora não coincida em detalhes com a introduzida por Lindström em 1969, é nela inspirada e tem se mostrado canônica nos textos de lógica que consideram a teoria abstrata de modelos.

O segundo objetivo é estabelecer uma bibliografia mínima sobre o primeiro teorema de Lindström em língua portuguesa, algo que até o momento não vimos disponível e, para isso, enunciaremos e provaremos em detalhes e de modo auto-contido este resultado, usando uma definição de lógica abstrata bastante abrangente.

Por fim, este trabalho tem como objetivo contribuir à discussão acerca do impacto dos teoremas de Lindström sobre as discussões fundacionais que usam como lógica subjacente a lógica de primeira ordem.

Visando a atingir estes objetivos, o presente trabalho está dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 1 definimos linguagem, estrutura, lógica abstrata e apresentamos as condições de regularidade das mesmas. Como um caso concreto, mostramos que a lógica de primeira ordem é um caso particular de lógica abstrata regular. Encerramos o capítulo com o enunciado preciso dos teoremas da compacidade e de Löwenheim-Skolem, além de considerar algumas adequações dos mesmos para lógicas abstratas quaisquer.

No Capítulo 2 definimos quando uma lógica é mais expressiva do que outra e apresentamos três casos particulares, cada um dos quais é um representante típico de amplas famílias que estendem a lógica de primeira ordem em três caminhos distintos: introdução de novos quantificadores, introdução de novas regras de formação de fórmulas e introdução de novas variáveis. Mostramos em detalhes que cada uma dessas lógicas satisfaz as condições de lógica abstrata regular e analisamos o comportamento de cada uma delas com relação às propriedades de compacidade e Löwenheim-Skolem, constando que cada uma delas falha com relação a, ao menos, uma destas propriedades.

No Capítulo 3 destacamos que o comportamento das lógicas do capítulo anterior, com relação às propriedades citadas não é casual mas, sim, consequência do primeiro teorema de Lindström, que será enunciado e provado com cuidado.

No Capítulo 4 descrevemos as lógicas modais abstratas, construídas de maneira análoga às do Capitulo 1, mas que não são lógicas no sentido até então considerado. Enunciamos e provamos em detalhe um teorema de caracterização análogo ao de Lindström, em que a lógica modal básica é maximal com relação às propriedade de bissimulação e compacidade.

Por fim, no Capítulo 5 tecemos algumas considerações relativas às contribuições dos teoremas de Lindström, quanto aos limites da lógica de primeira ordem, às investigações de caráter fundacional; ainda, elencamos alguns tópicos para estudos e análises futuras.

Capítulo 1

Lógica Abstrata e de Primeira Ordem

Neste capítulo, apresentaremos uma definição de lógica abstrata bem próxima àquela introduzida por Lindström em 1969, [15]. Como um exemplo concreto, definimos a lógica de primeira ordem e mostramos que a mesma é um caso particular de lógica abstrata.

1.1 Linguagem e Estrutura

Nesta seção definimos os importantes conceitos de linguagem e estrutura, além de considerarmos como as estruturas fornecem uma semântica, isto é, um significado a certas expressões formais da linguagem. Fundamental para esta análise é o conceito de assinatura.

Definição 1.1.1 Uma *assinatura* é um par (Σ, g), composto por um conjunto $\Sigma = \{\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{C}\}$ e uma função g. Os membros $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ e $\mathbb{C}$ da assinatura são conjuntos e seus elementos são denominados, respectivamente, *símbolos de predicado*, *símbolos de função* e *símbolos de constante* da assinatura. A função g associa, a cada símbolo de função e a cada símbolo de predicado, um número natural positivo, denominado a *aridade* do símbolo. Em geral, explicitaremos ou suporemos a aridade do símbolo como conhecida e não faremos referência à função g. Deste modo, identificamos a assinatura com o conjunto Σ. Uma *assinatura relacional* é uma assinatura em que o único conjunto não vazio é $\mathbb{P}$.

Uma *variável individual* é qualquer elemento do conjunto infinito enumerável $\mathcal{V}_C = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\}$. Usaremos as letras x, y e z, com ou sem subíndices, como metavariáveis para as variáveis individuais. Quando não houver risco de confusão diremos apenas variável, em vez de variável individual. A letra Σ será reservada, exclusivamente, para denotar assinaturas. Uma *linguagem* será qualquer coleção não vazia $\mathcal{L}$ cujos elementos são os *símbolos* da linguagem.

Eventualmente, uma linguagem pode ser uma classe, embora as linguagens que consideraremos em todo este trabalho sejam, exclusivamente, conjuntos. Temos abaixo um importante caso particular de linguagem.

Definição 1.1.2 Uma *linguagem de primeira ordem* é um conjunto $\mathcal{L}_{\text{I}} = \Sigma \cup \mathcal{V}_C \cup \{\neg, \vee, \exists, \equiv\}$, em que $\neg$, $\vee$, $\exists$ e $\equiv$ são denominados, respectivamente, *conectivo de negação*, *conectivo de disjunção*, *quantificador existencial* e *símbolo de igualdade.*

A definição acima deixa latente que, dentre as linguagens de primeira ordem, o único componente que as diferencia é a assinatura, o que motiva a notação $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$ que denota, tanto a linguagem de primeira ordem estabelecida por uma assinatura Σ particular, quanto a linguagem $\mathcal{L}_{\text{I}}$ que possui assinatura Σ.

Exemplo 1.1.3 São exemplos de assinaturas e linguagens de primeira ordem:

- $\Sigma = \emptyset$ e $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$ é a linguagem de primeira ordem pura.
- $\Sigma' = \{\in\}$ e $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma'}$ é uma linguagem de primeira ordem da teoria de conjuntos usual, em que $\in$ é um símbolo de predicado binário.
- $\Sigma'' = \{\circ, e\}$ e $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma''}$ é uma linguagem de primeira ordem dos grupos, em que $\circ$ é um símbolo de função binária e e é um símbolo de constante.
- $\Sigma''' = \{0, S, +, \cdot, \mathfrak{exp}\}$ e $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma'''}$ é uma linguagem da aritmética de primeira ordem, em que 0 é um símbolo de constante, S é um símbolo de função unária, $+, \cdot$ e $\mathfrak{exp}$ são símbolos de funções binárias.

Agora que conhecemos uma linguagem, estamos em condições de estabelecer as "frases". Para a linguagem de primeira ordem, o primeiro passo na construção das sentenças é concatenar os símbolos da linguagem, visando à construção das primeiras "palavras". Essas primeiras palavras são os termos da linguagem, cujo papel é análogo ao dos substantivos em linguagem natural e cujas regras de formação determinam a "ortografia" de formação dos termos.

Definição 1.1.4 Seja Σ uma assinatura. Um Σ-*termo da linguagem* $\mathcal{L}_{\text{I}}$, abreviado por $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$-termo, é uma concatenação de símbolos obtida, exclusivamente, através de uma das seguintes regras:

(a) Se t é um símbolo de variável de $\mathcal{L}_{\text{I}}$ ou t é um símbolo de constante em Σ, então então t é um $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$-termo;

(b) Se $t_1, ..., t_n$ são $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$-termos e f é um símbolo de função n-ária em Σ, então $ft_1...t_n$ é um $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$-termo.

Cada vez que um símbolo s da linguagem aparece em um termo t há uma *ocorrência de s em t*. A *complexidade* de um termo é o número ocorrências de símbolos, repetidos ou não, que ocorrem no termo. Um termo t é *fechado* quando não há ocorrência de alguma variável em t e, caso contrário, trata-se de *termo aberto*. O conjunto dos $\mathcal{L}_{\text{I}}^{\Sigma}$-termos será denotado $\text{T}_{\text{I}}^{\Sigma}$.

Agora que conhecemos as primeiras palavras da linguagem, podemos estabelecer as regras para a formação de "frases" da linguagem.

Definição 1.1.5 Uma Σ-*fórmula da linguagem* $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$, abreviadamente $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula, é uma concatenação de símbolos obtida, exclusivamente, pela aplicação de uma das seguintes regras:

(a) Se t_1 e t_2 são termos em $\mathrm{T}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$, então $t_1 \equiv t_2$ é uma $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula;

(b) Se $t_1, ..., t_n \in \mathrm{T}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ e P em Σ é símbolo de predicado n-ário, então $Pt_1...t_n$ é $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula;

(c) Se φ e ψ são $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmulas, então tanto $\neg\varphi$ quanto $\varphi \vee \psi$ também o são;

(d) Se φ é uma $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula e x é uma variável, então $\exists x\varphi$ é $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula.

As fórmulas definidas pelas clausulas (a) ou (b) acima são denominadas *fórmulas atômicas*. O conjunto das $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmulas será denotado $\mathrm{F}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$. Quando a assinatura e a linguagem estiverem claras pelo contexto ou não forem importantes à discussão diremos, simplesmente, *fórmula* em vez de Σ-fórmula da linguagem $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$.

Uma abreviação muito útil à escrita de fórmulas é a seguinte: (i) $\varphi \wedge \psi$ é abreviação de $\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$; (ii) $\varphi \rightarrow \psi$ é abreviação de $(\neg\varphi) \vee \psi$; (iii) $\varphi \leftrightarrow \psi$ é abreviação de $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ e (iv) $\forall x\varphi$ é abreviação de $\neg\exists x\neg\varphi$.

Destacamos que letras gregas minúsculas serão usadas, sempre, como metavariáveis para fórmulas e que parenteses serão usados como símbolos metalógicos para indicar a ordem de formação de fórmulas; eventualmente, os usaremos também para facilitar a leitura de fórmulas obtidas através da regra (d); assim, se φ é fórmula e x é variável, então $\exists x(\varphi)$ é outra grafia para a fórmula $\exists x\varphi$. Para evitar o uso de demasiados parentes, usaremos a seguinte convenção: o conectivo $\neg$ tem primazia sobre os demais e a associatividade ocorre a direita. Assim, $\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$ pode ser escrito, sem ambiguidade, $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ e $\varphi \vee (\psi \vee \gamma)$ é, simplesmente, $\varphi \vee \psi \vee \gamma$.

Em uma fórmula, nem todas as variáveis compartilham do mesmo *status*.

Definição 1.1.6 Uma ocorrência de uma variável x em uma fórmula φ é *ligada em* φ se, e somente se, x ocorre em uma parte de φ da forma $\exists x\psi$, em que ψ é uma fórmula. Uma ocorrência de uma variável x em uma fórmula φ é *livre em* φ se, e somente se, x não é ligada em φ. Uma $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-*sentença* é uma $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-fórmula em que não há ocorrência de variável livre. O conjunto das $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$-sentenças será denotado $\mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$.

Uma notação bastante útil em tudo o que se segue é a seguinte: $\varphi(x_0, ...x_n)$ denota uma fórmula φ na qual as únicas variáveis que possuem ocorrência livre em φ estão entre $x_0, ..., x_n$, duas a duas distintas. Analogamente, $t(x_0, ...x_n)$ denota um termo aberto t cujas variáveis estão entre $x_0, ..., x_n$, duas a duas distintas. Na sequência $(x_0, ...x_n)$ supomos que a ordem das metavariáveis é induzida pela ordem das variáveis no conjunto $\mathcal{V}_C$.

Exemplo 1.1.7 Sejam P e U símbolos de predicado unário, R um símbolo de predicado binário, T um símbolo de predicado ternário e c um símbolo de constante.

- Se φ é a fórmula $T\mathbf{x}_7 c\mathbf{x}_5$, então uma notação adequada é $\varphi(x_0, x_1)$, em que x_0 é $\mathbf{x}_5$ e x_1 é $\mathbf{x}_7$. Quando as variáveis livres forem poucas, em vez de x_0, x_1 e x_2 usaremos x, y e z, respectivamente.

- Se φ é $\exists x(Ryz \wedge \exists y(y \equiv x \vee Ryz) \wedge Px)$, então toda ocorrência de x é ligada, toda ocorrência de z é livre e, da esquerda para a direita, a primeira ocorrência de y é livre, enquanto as outras três ocorrências são ligadas. Assim, uma notação adequada a esta fórmula é $\varphi(y, z)$.

- É imediato a partir da definição que (i) todas as variáveis que ocorrem em uma fórmula atômica são livres, (ii) que as variáveis que ocorrem livre em $\neg\varphi$ são as variáveis que ocorrem livre em φ, (iii) que as variáveis que ocorrem livre em $\varphi \vee \psi$ são as variáveis que ocorrem livre em φ ou em ψ e (iv) que as variáveis que ocorrem livre em $\exists x(\varphi)$ são as variáveis que ocorrem livre em φ, exceto x.

Adjacente à linguagem, o conceito de estrutura é fundamental a todo este trabalho. Em particular, as estruturas serão utilizadas para construir a semântica das linguagens.

Definição 1.1.8 Uma *estrutura* $\mathfrak{A}$ é uma quadrupla $(|\mathfrak{A}|, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$ em que:

- $|\mathfrak{A}|$ é um conjunto não vazio, denominado o *domínio da estrutura*. Os elementos do domínio são denominados os elementos da estrutura e a cardinalidade da estrutura é definida pela cardinalidade de seu domínio;

- $\mathcal{R}$ é uma coleção de relações n-árias em $|\mathfrak{A}|$, isto é, $\mathcal{R} = \{R^n_m \mid R^n_m \subseteq |\mathfrak{A}|^n\}$, em que R^n_m denota a m-ésima relação de aridade n, $n > 0$;

- $\mathcal{F}$ é uma coleção de funções n-árias em $|\mathfrak{A}|$, isto é, $\mathcal{F} = \{f^n_m \mid f^n_m : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|\}$, em que f^n_m denota a m-ésima função de aridade n, $n > 0$;

- C é um subconjunto de elementos do domínio, cujos elementos são denominados *constantes* da estrutura.

As estruturas serão representadas, exclusivamente, por letras góticas maiúsculas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc, enquanto os domínios serão representados por $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$,$|\mathfrak{C}|$, etc. Uma estrutura é *estrutura algébrica* quando $\mathcal{R} = \emptyset$ e $\mathcal{F} \neq \emptyset$; quando uma estrutura é tal que $\mathcal{F} = \emptyset$ e $\mathcal{R} \neq \emptyset$, trata-se de uma *estrutura relacional*.

Em geral, os índices das relações e funções serão omitidos. Quando os componentes da estrutura são finitos a designaremos através da listagem de seus elementos. Por exemplo, se uma estrutura é composta por uma relação R, duas funções g e h e três constantes c, d e e, escrevemos $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, \{R\}, \{f, g\}, \{c, d, e\})$ ou, simplesmente, $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, R, f, g, c, d, e)$.

Exemplo 1.1.9 Um exemplo bem simples de estrutura é o conjunto $\mathfrak{A}$ dado por:

$$\mathfrak{A} = \{\{\boxdot, \circledast, \clubsuit\},\ \{(\clubsuit, \boxdot), (\clubsuit, \circledast), (\clubsuit, \clubsuit)\},\ \{\{(\boxdot, \circledast), (\circledast, \clubsuit), (\clubsuit, \boxdot)\}, \{(\boxdot, \boxdot), (\circledast, \circledast), (\clubsuit, \clubsuit)\}\},\ \{\boxdot\}\}$$

sendo que $\{\boxdot, \circledast, \clubsuit\}$ é o domínio da estrutura, $\{\boxdot\}$ é conjunto de constantes, a única relação é dada pelo conjunto $\{(\clubsuit, \boxdot), (\clubsuit, \circledast), (\clubsuit, \clubsuit)\}$ e $\{\{(\boxdot, \circledast), (\circledast, \clubsuit), (\clubsuit, \boxdot)\}, \{(\boxdot, \boxdot), (\circledast, \circledast), (\clubsuit, \clubsuit)\}\}$ é o conjunto das funções (unárias) da estrutura.

Estruturas como a acima são artificiais, mas muitas vezes úteis como contraexemplos; usualmente, são consideradas estruturas comuns à matemática, tais como grupos, corpos ordenados, ordem linear densa, espaços vetoriais, espaços métricos, anéis, etc.

O papel desempenhado por uma estrutura é o de estabelecer a semântica de linguagens e, para atingir este objetivo, é necessário compatibilizar a linguagem com a estrutura. Tal compatibilização é bem sucedida quando é possível interpretar cada símbolo de predicado n-ário da linguagem como uma relação n-ária da estrutura, cada símbolo de função como uma função e analogamente às variáveis. Destacamos que os demais símbolos da estruturas não são considerados aqui; o importante é, estritamente, os símbolos da assinatura da linguagem. Isso motiva o conceito de Σ-estrutura.

Definição 1.1.10 Sejam Σ uma assinatura e $\mathfrak{A}$ uma estrutura. Uma Σ-estrutura, denotada $\mathfrak{A}_\Sigma$, é uma tripla $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mathfrak{g})$, em que $\mathfrak{g} : \Sigma \to \mathfrak{A}$ é uma função, denominada *interpretação*, que a cada símbolo de predicado n-ário em Σ associa uma relação n-ária em $\mathfrak{A}$, a cada símbolo de função n-ária em Σ associa uma função n-ária em $\mathfrak{A}$ e a cada símbolo de constante em Σ associa um elemento em $|\mathfrak{A}|$. Quando s é um símbolo em Σ, a imagem de s por $\mathfrak{g}$ é denotada $s^{\mathfrak{A}}$ em vez de $\mathfrak{g}(s)$.

Em geral, a interpretação será considerada conhecida e iremos nos referir, simplesmente, a Σ-estrutura $\mathfrak{A}$ em vez de $\mathfrak{A}_\Sigma$.

A definição acima deixa latente que, se $P, f, c \in \Sigma$ são símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante e $\mathfrak{A}$ é uma Σ-estrutura, então $P^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ e $c^{\mathfrak{A}}$ são, respectivamente, uma relação n-ária, uma $f^{\mathfrak{A}}$ função n-aria e uma constante da estrutura.

Usualmente, consideraremos os símbolos da assinatura de modo que sua interpretação em uma estrutura seja o menos traumática possível. Por exemplo, quando desejamos falar acerca dos números inteiros em uma linguagem formal $\mathcal{L}_I$, escolhemos os símbolos da assinatura de modo que a grafia do símbolo seja análoga à grafia usual do elemento da estrutura que temos em mente. Por exemplo, suponha que $\mathbb{Z}$ é a estrutura dos números inteiros e quereremos "falar do zero" na linguagem formal $\mathcal{L}_I$; em vez de considerarmos um símbolo de constante $c \in \Sigma$ tal que $c^{\mathbb{Z}} = 0$, considerarmos o como símbolo de constante 0, cuja interpretação na estrutura dos números inteiros é o inteiro zero, isto é, $0^{\mathbb{Z}} = 0$. Claramente, o "0" à esquerda da igualdade é símbolo, e o à direita é o número inteiro zero. Quando tomamos tal postura dizemos que o símbolo possui uma *interpretação pretendida* em uma dada estrutura.

A partir de uma estrutura podemos obter novas estruturas, através de restrições adequadas no domínio.

Definição 1.1.11 Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas. Se $R, f, c \in \Sigma$ são símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante, então $\mathfrak{A}$ é *subestrutura de* $\mathfrak{B}$, denotado $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, quando as seguintes condições são satisfeitas:

$$\text{(a) } |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}| \qquad \text{(b) } c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} \qquad \text{(c) } R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap |\mathfrak{A}|^n \qquad \text{(d) } f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright |\mathfrak{A}|^n$$

Um conjunto não vazio $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ é *fechado em* Σ quando X é domínio de uma subestrutura da Σ-estrurura $\mathfrak{A}$.

O próximo teorema estabelece sob quais condições podemos obter uma subestrutura de uma dada estrutura.

Teorema 1.1.12 (Teorema das Subestruturas) *Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ um conjunto não vazio. As condições necessárias e suficientes para que $X = |\mathfrak{B}|$ e $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ são:*

(a) Se c é símbolo de constante em Σ, então $c^{\mathfrak{A}} \in X$;

(b) Se $f \in \Sigma$ é símbolo de função n-ária e $x_1, ..., x_n$ uma sequência em X, então $f^{\mathfrak{A}}(x_1...x_n) \in X$.

Nestas condições, a subestrutura $\mathfrak{B}$ é única.

Prova. (Necessidade) Suponha que $X = |\mathfrak{B}|$ e $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Por definição de estrutura, se $c \in \Sigma$, então $c^{\mathfrak{B}} \in |\mathfrak{B}| = X$; mas pela definição de subestrutura, $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$ e, portanto, $c^{\mathfrak{A}} \in X$. Analogamente, para cada símbolo de função n-ária $f \in \Sigma$, $f^{\mathfrak{B}}(x_1, ..., x_n) \in |\mathfrak{B}|$; mas pela definição de subestrutura para $x_1, ..., x_n \in |\mathfrak{B}|$, $f^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n) \in X$.

(Suficiência) Para cada símbolo de constante c, cada símbolo de predicado n-ário P e cada símbolo de função n-ário f da linguagem, definimos $\mathfrak{B}$ de tal modo que $|\mathfrak{B}| = X$, $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$, $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap X^n$ e $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \upharpoonright X^n$. Desse modo, é imediato da definição que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.

(Unicidade) Suponhamos que X é domínio das subestruturas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$. Assim, $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{C}}$, $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \upharpoonright |\mathfrak{B}|^n = f^{\mathfrak{A}} \upharpoonright |\mathfrak{C}|^n = f^{\mathfrak{C}}$ e $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}} \cap |\mathfrak{B}|^n = P^{\mathfrak{A}} \cap |\mathfrak{C}|^n = P^{\mathfrak{C}}$. Logo, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. ■

Corolário 1.1.13 Σ *relacional é condição suficiente para que um conjunto qualquer $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ seja domínio de uma subestrutura da Σ-estrutura $\mathfrak{A}$.*

Prova. Assinatura relacional satisfaz por vacuidade as hipóteses do Teorema 1.1.12. ■

O teorema das subestruturas justifica a próxima definição.

Definição 1.1.14 Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $X \subseteq |\mathfrak{A}|$. Nestas condições, $\mathfrak{B}$ é a *subestrutura de* $\mathfrak{A}$ *gerada por* X se, e somente se, $\mathfrak{B}$ é a menor subestrutura de $\mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq |\mathfrak{B}|$. A expressão $\mathfrak{B} = \langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ denota que $\mathfrak{B}$ é a subestrutura de $\mathfrak{A}$ gerada por X. Quando X é finito, a estrutura $\mathfrak{B}$ é *finitamente gerada*.

Exemplo 1.1.15 Sejam $\mathbb{P}$ e $\mathbb{I}$, respectivamente, o conjunto dos naturais pares e ímpares e as estruturas $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, 0)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{P}, +, 0)$ e $\mathfrak{C} = (\mathbb{I}, +, 0)$. Então $\mathfrak{B}$ é subestrutura de $\mathfrak{A}$, mas $\mathfrak{C}$ não, pois a soma não é fechada para os ímpares. Além disso, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{P} \rangle_{\mathfrak{A}}$.

Além de alterarmos o domínio de uma estrutura, podemos alterar a linguagem subjacente às mesmas e, assim, obtemos novas estruturas.

Definição 1.1.16 Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $\mathfrak{B}$ uma Σ'-estrutura tais que $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Se $P, f, c \in \Sigma$ são símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante, então $\mathfrak{A}$ é um *reduto de* $\mathfrak{B}$ *para* Σ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ (b) $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}}$ (c) $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}}$ (d) $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$

Denotamos que $\mathfrak{A}$ é o reduto de $\mathfrak{B}$ para Σ por $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}|_{\Sigma}$. Nestas mesmas condições, dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma *expansão* de $\mathfrak{A}$ para Σ'.

A definição de reduto deixa latente que, se $\mathfrak{A}$ é um reduto de $\mathfrak{B}$ para Σ, então $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ concordam na interpretação de todos os símbolos em Σ, embora $\mathfrak{B}$ possa, eventualmente, interpretar outros símbolos além daqueles em Σ. Basicamente, obtemos o reduto de uma assinatura Σ' para Σ simplesmente "esquecendo" de interpretar os símbolos presentes no conjunto $\Sigma' - \Sigma$.

Exemplo 1.1.17 Sejam c e d símbolos de constantes, f um símbolo de função binária, P um símbolo de predicado binário, $\Sigma = \{c, f\}$, $\Sigma' = \{c, d, f, P\}$, $\mathfrak{A} = \{\mathbb{N}, 0, +\}$ e $\mathfrak{B} = \{\mathbb{N}, 0, 1, +, \leq\}$. Então $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}|_{\Sigma}$.

Agora, estamos em condições de definir um conceito fundamental, relacionado ao estudo das estruturas e da semântica por elas estabelecidas.

Definição 1.1.18 Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas e $P, f, c \in \Sigma$ símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante. Uma função $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ é um *isomorfismo de* $\mathfrak{A}$ *em* $\mathfrak{B}$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) h é bijetiva;

(b) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$;

(c) $(a_1, ..., a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \big(h(a_1), ..., h(a_n)\big) \in P^{\mathfrak{B}}$;

(d) $h\big(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)\big) = f^{\mathfrak{B}}\big(h(a_1), ..., h(a_n)\big)$.

Duas estruturas são *isomorfas* quando existe um isomorfismo entre elas. Denotamos que as estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomorfas por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ e que h é um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ por $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

1.2 Lógica Abstrata

Uma lógica abstrata é composta por uma coleção de estruturas matemáticas, uma coleção de sentenças e uma relação entre elas. Tal concepção de lógica foi introduzida por Lindström em seu célebre trabalho de 1969, [15]. A definição que apresentaremos não coincide exatamente com a proposta de Lindström, mas é a forma que têm se mostrado extremamente útil a uma série de trabalhos, dentre os quais se destacam [6] e [8].

Consideraremos $\mathbb{V}$ como a classe de todos os conjuntos, $\mathbb{S}$ a classe das assinaturas e $\mathcal{K}$ a classe das Σ-estruturas. Uma lógica abstrata é uma função de $\mathbb{S}$ em $\mathbb{V}$ e uma relação binária fechada para algumas propriedades "básicas".

Definição 1.2.1 Uma lógica abstrata $\mathbb{L}$ é um par $(L, \models_{\mathbb{L}})$, que satisfaz:

(a) $L : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$ é uma função que, a cada assinatura Σ em $\mathbb{S}$ associa a coleção L^{Σ} das Σ-sentenças de $\mathbb{L}$ e $\models_{\mathbb{L}}$ é uma relação binária com domínio $\mathcal{K}$;

(b) Se $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, então $L^{\Sigma_0} \subseteq L^{\Sigma}$;

(c) Se $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$, então existe um Σ tal que $\mathfrak{A}$ é uma Σ-estrutura e φ é Σ-sentença de $\mathbb{L}$;

(d) Se $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ e $\mathfrak{B}$ é uma estrutura isomorfa a $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi$;

(e) Se $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\varphi \in L^{\Sigma_0}$ e $\mathfrak{A}$ é Σ-estrutura, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathbb{L}} \varphi$.

As propriedades (d) e (e) acima são conhecidas, respectivamente, como *propriedade do isomorfismo* e *propriedade do reduto*. Quando $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ dizemos que φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$ ou, então, que $\mathfrak{A}$ é *modelo* de φ. Usaremos *sistema semântico* $\mathbb{L}$ e *lógica* $\mathbb{L}$ como sinônimos de lógica abstrata $\mathbb{L}$.

Denotaremos um sistema semântico $(L, \models_{\mathbb{L}})$ também por $(L^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$, visando enfatizar que o domínio de L é a classe das assinaturas; ainda, usaremos L^{Σ} com um duplo significado, que o contexto não permitirá confusão: quando em $(L^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$, L^{Σ} denota a função L com domínio na classe das assinaturas e, quando escrevermos $\varphi \in L^{\Sigma}$, nos referimos ao fato que φ é um elemento (sentença) da imagem de Σ por L. Nesta última situação também diremos que se trata de uma $\mathbb{L}$-sentença ou uma sentença de $\mathbb{L}$.

Definimos lógica abstrata sem qualquer referência a axiomas e regras de dedução e, para evitar confusões, talvez fosse melhor nomeá-la de outro modo, em que concordamos com Ebbinghaus em [5], página 28:

> "The reader will notice here that we did not incorporate condictions concerning rules of inference or other "logical" properties in our definition. Hence it would seem more appropriate to use a term such as *model-theoretic languages* instead of the term logic. However, the latter is shorter and has become costumary".

Como a definição de lógica apresentada é deveras geral, as lógicas particulares mais interessantes serão aquelas cujas estruturas possuem propriedades importantes e cuja linguagem seja rica o suficiente para expressar o discurso acerca da propriedade. Como um primeiro exemplo concreto de tal lógica interessante, estabeleceremos a lógica de primeira ordem $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$; para isso, identificaremos o conjunto das $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentenças com o conjunto L_{I}^{Σ} obtido na seção anterior. A relação $\models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}}$ será definida na sequência desta seção. No próximo capítulo há outros exemplos de sistemas semânticos. Antes, adotaremos algumas convenções.

Quando $\mathfrak{A}$ é uma estrutura, designaremos por $\bar{a}$ uma sequência $(a_1, ..., a_n)$, em que cada a_i é um elemento do domínio da estrutura. De modo análogo, $\bar{x}$ é uma sequência de variáveis $x_1, ..., x_n$, duas a duas distintas; desse modo, $\varphi(\bar{x})$ deixa subentendido que as variáveis livres de φ estão dentre $x_0, ...x_n$. Se o contexto deixar evidente que f é uma função unária (ou símbolo de função), denotaremos a sequência $\big(h(s_1), ..., h(s_n)\big)$ por $h(\bar{s})$. Por fim, $\bar{t}$ denota uma sequência $(t_1, ..., t_n)$ de termos.

Está implícito na definição de lógica abstrata que o papel da relação $\models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}}$ é o de estabelecer quando uma sentença em $\mathrm{L}_\mathrm{I}^\Sigma$ é verdadeira em uma estrutura. Portanto, como as sentenças são definidas a partir das fórmulas e, estas, são definidas recursivamente, é natural que definamos uma relação para fórmulas e, depois, para sentenças. Começaremos por estabelecer um significado, ou interpretação, dos termos de $\mathrm{T}_\mathrm{I}^\Sigma$ em uma Σ-estrutura. A ideia é que cada termo seja o nome de um elemento da estrutura.

Definição 1.2.2 Sejam $t(\bar{x})$ um termo em $\mathrm{T}_\mathrm{I}^\Sigma$, $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $\bar{a}$ uma sequência de elementos de $|\mathfrak{A}|$, ao menos tão longa quanto $\bar{x}$. O *valor do termo $t(\bar{x})$ em $\bar{a}$ de* $\mathfrak{A}$, denotado $t^\mathfrak{A}[\bar{a}]$, é definido indutivamente pelas seguintes clausulas:

- se t é um símbolo de variável $x_i \in \mathcal{L}_\mathrm{I}$, então $t^\mathfrak{A}[\bar{a}] = a_i$;
- se t é um símbolo de constante $c \in \Sigma$, então $t^\mathfrak{A}[\bar{a}] = c^\mathfrak{A}$;
- se t é $ft_1, ..., t_n$ e $f \in \Sigma$ é símbolo de função n-ária, então $t^\mathfrak{A}[\bar{a}] = f^\mathfrak{A}(t_1^\mathfrak{A}[\bar{a}], ..., t_n^\mathfrak{A}[\bar{a}])$.

Quando t é um termo sem variáveis, a sequência $\bar{a}$ não desempenha papel algum em sua interpretação por $\mathfrak{A}$ e escrevemos simplesmente $t^\mathfrak{A}$ em vez de $t^\mathfrak{A}[\bar{a}]$.

Estamos agora próximos de interpretar as fórmulas de uma linguagem em uma estrutura e, assim, dar mais um passo em direção ao nosso objetivo. A ideia é adotar uma postura análoga a aquela adotada com os termos e definir a interpretação de uma fórmula olhando para seus componentes menores. Assim, quando φ é $\psi \vee \gamma$, devemos estabelecer a interpretação de φ a partir das interpretações de ψ e γ. O problema é que a variáveis livres em φ, ψ e γ não necessariamente são as mesmas. O caminho, então, é considerarmos todas as variáveis, livres e ligadas, que ocorrem em φ, pois elas certamente também ocorrem em ψ e γ, e definirmos a interpretação com base nestas variáveis e, depois, mostramos que só as variáveis livres de φ é que são realmente importantes à discussão. Esta última asserção não será provada aqui, pois a mesma pode ser vista em detalhes em Chang & Keisler, [4], página 29, Proposição 1.3.29.

Definição 1.2.3 Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, $\varphi(\bar{x})$ em $\mathrm{F}_\mathrm{I}^\Sigma$ e $\bar{a}$ uma sequência ao menos tão longa quanto $\bar{x}$. A *fórmula $\varphi(\bar{x})$ é satisfeita em $\bar{a}$ de* $\mathfrak{A}$, denotado $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi[\bar{a}]$, quando:

(a) Se $t_1(\bar{x}) \in \mathrm{T}_\mathrm{I}^\Sigma$, $t_2(\bar{x}) \in \mathrm{T}_\mathrm{I}^\Sigma$ e φ é $t_1 \equiv t_2$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $t_1^\mathfrak{A}[\bar{a}] = t_2^\mathfrak{A}[\bar{a}]$.

(b) Se P é um símbolo de predicado n-ário em Σ, para $i = 1, ..., n$ temos que $t_i(\bar{x}) \in \mathrm{T}_\mathrm{I}^\Sigma$ e φ é $Pt_1...t_n$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $(t_1^\mathfrak{A}[\bar{a}], ..., t_n^\mathfrak{A}[\bar{a}]) \in P^\mathfrak{A}$.

(c) Se φ é a fórmula $\neg\psi(\bar{x})$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, não é o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \psi[\bar{a}]$.

(d) Se φ é a fórmula $(\psi \vee \sigma)(\bar{x})$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \psi[\bar{a}]$ ou $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \sigma[\bar{a}]$.

(e) Se φ é a fórmula $(\exists y)\psi(y,\bar{x})$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \psi[b,\bar{a}]$, para algum $b \in |\mathfrak{A}|$.

Quando uma fórmula $\varphi(\bar{x})$ é satisfeita em $\bar{a}$ de $\mathfrak{A}$ dizemos também que $\varphi(\bar{x})$ é *verdadeira na sequência* $\bar{a}$ de $\mathfrak{A}$. Quando o contexto não deixar margem à dúvidas, escreveremos $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ em vez de $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi[\bar{a}]$.

A definição acima deixa latente que a sequência $\bar{a}$ é relevante à interpretação das variáveis livres; assim, uma estrutura fornece uma interpretação, independente da sequência $\bar{a}$ escolhida, apenas para o caso de sentenças. Por essa razão concentraremos nosso discurso em sentenças, não em fórmulas. Entretanto, aqui cabe uma consideração: embora estejamos interessados em sentenças e estas são casos particulares de fórmulas, tratar diretamente com elas é difícil, uma vez que as mesmas não são geradas recursivamente de modo simples como as fórmulas. Assim, em geral, iremos concluir que as sentenças gozam de uma certa propriedade após mostrar que todas as fórmulas gozam de tal propriedade. Tomaremos a liberdade de denominar a relação $\models$, com qualquer indíce, de *relação de satisfatibilidade.*

Assim, quando φ é uma sentença, a sequência $\bar{a}$ é irrelevante e escrevemos, simplesmente, $\mathfrak{A} \models \varphi$ e dizemos *φ é verdadeira em* $\mathfrak{A}$, bem como que $\mathfrak{A}$ é *modelo* de φ. Ainda, quando uma Σ-fórmula φ é verdadeira em todas as Σ-estruturas dizemos que φ é uma *fórmula válida* e, quando duas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são modelo de exatamente as mesmas sentenças dizemos que estas estruturas são *elementarmente equivalentes*, o que é denotado por $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Dado um conjunto $\Gamma \subseteq L_I^\Sigma$ e uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, diremos que Γ é verdadeiro em $\mathfrak{A}$ quando $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \gamma$, para toda $\gamma \in \Gamma$; nestas condições, diremos também que Γ é verdadeiro em $\mathfrak{A}$. Ainda, diremos que $\varphi \in L_I^\Sigma$ é consequência lógica de Γ, denotado $\Gamma \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$ quando Γ verdadeiro em $\mathfrak{A}$ implica que φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$, para todo $\mathfrak{A}$. Em vez de $\{\gamma\} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$ escrevemos $\gamma \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$. Estamos agora em condições de estabelecer o primeiro caso concreto de lógica abstrata.

Teorema 1.2.4 *O par* $\left(L_I^\Sigma, \models_{\mathbb{L}_I}\right)$ *é uma lógica abstrata.*

Prova. Precisamos verificar que as condições da Definição 1.2.1 são satisfeitas. As condições (a), (b) e (c) são imediatas, a partir das definições de $\models_{\mathbb{L}_I}$ e L_I^Σ. As propriedades do isomorfismo e do reduto são verificadas por indução na complexidade de fórmulas.

Propriedade do isomorfismo

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas isomorfas, h um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e $\varphi \in F_I^\Sigma$ uma fórmula. Mostraremos por indução na complexidade de φ que, se $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$, então $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$.

Indução nos termos: verificamos que, para todo $t(\bar{x}) \in T_I^\Sigma$, temos $h(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]$ $(\star)$.

- Passo base: se $t(\bar{x})$ é a variável x_i, então $h(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = h(a_i) = t^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]$. Por outro lado, se t é um símbolo de constante c, então $h(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = h(c^{\mathfrak{A}}) = t^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]$.

- Passo de indução: Seja t o termo $ft_1...t_n$, em que $t_1, ..., t_n$ é uma sequência de termos e $f \in \Sigma$ um símbolo de função n-ária. Então $h(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = h\Big((ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}\Big)[\bar{a}] = h\Big(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]...t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])\Big) \overset{iso}{=} f^{\mathfrak{B}}\Big(h(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])...h(t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])\Big) \overset{HI}{=} f^{\mathfrak{B}}\Big(t_1^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]...t_n^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]\Big) = (ft_1...t_n)^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}] = t^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]$, o que conclui a indução nos termos.

Indução nas fórmulas: mostramos que se $\varphi \in \mathrm{F}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ e $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi[\bar{a}]$, então $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi[h\bar{a}]$.

- Passo base: $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos, P é símbolo de predicado e $\varphi(\bar{x})$ é fórmula atômica.
  - φ é $t_1 \equiv t_2$. Então, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} (t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \Leftrightarrow h(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = h(t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (t_1 \equiv t_2)[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$. No terceiro $\Leftarrow$ usamos o fato que h é injetiva. No restante, apenas definições e ($\star$).
  - φ é $Pt_1...t_n$. Então, $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (Pt_1...t_n)[\bar{a}] \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \in P^{\mathfrak{A}} \overset{iso}{\Leftrightarrow} \Big(h(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]), ..., h(t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])\Big) \in P^{\mathfrak{B}} \overset{\star}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]) \in P^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (Pt_1...t_n)[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h\bar{a}]$.

- Passo de indução: precisamos verificar três casos:
  - φ é $\neg\psi$. Então $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\neg\psi)[\bar{a}] \Leftrightarrow$ não é o caso que $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}] \overset{HI}{\Leftrightarrow}$ não é o caso que $\mathfrak{B} \models \psi[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h\bar{a}]$.
  - φ é $\psi \vee \sigma$. Então $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\psi \vee \sigma)[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}]$ ou $\mathfrak{A} \models \sigma[\bar{a}] \overset{hi}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models \psi[h\bar{a}]$ ou $\mathfrak{B} \models \sigma[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\psi \vee \sigma)[h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h\bar{a}]$.
  - φ é $\exists y\psi(x, \bar{x})$. Então $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\psi(y, \bar{x})[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[b, \bar{a}]$, para algum $b \in |\mathfrak{A}| \overset{hi}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models \psi[hb, h\bar{a}]$, para algum $b \in |\mathfrak{A}|$ e tal que $h(b) \in |\mathfrak{B}| \overset{iso}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models \psi[hb, h\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists y\psi(y, \bar{x})[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\bar{a}]$.

Com isso constatamos que vale a propriedade do reduto, pois se o mesma se verifica para fórmulas, se verifica também trivialmente para sentenças.

Propriedade do reduto: Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, $\mathfrak{B}$ uma Σ-estrutura, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, e $\mathfrak{B}$ uma expansão de $\mathfrak{A}$ para Σ. Então, $\mathfrak{A} \models \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{B}|_{\Sigma} \models \varphi$. A prova é por indução e, pelas regras de formação dos termos, é imediato que para todo termo $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{I}}^{\Sigma_0}$, temos $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t^{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}[\bar{a}]$, pois os domínios de $\mathfrak{A}$ e de seu reduto para Σ_0 são os mesmos, além da interpretação coincidir para os membros de Σ_0. Para a fórmula atômica $Pt_1...t_n$ com $P \in \Sigma_0$ símbolo de predicado n-ário, temos

$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} Pt_1...t_n[\bar{a}] \Leftrightarrow \Big(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]\Big) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \Big(t_1^{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}[\bar{a}]\Big) \in P^{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}} \Leftrightarrow \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} Pt_1...t_n[\bar{a}]$.

A outra fórmula atômica é verificada de modo análogo e às fórmulas não atômicas a verificação é imediata, a partir da hipótese de indução. Com isso, podemos concluir que todas as fórmulas de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ gozam da propriedade do reduto e, consequentemente, todas as sentenças, o que conclui a prova do teorema. ■

Denominamos o par $\left(\mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}}\right)$ de *lógica de primeira ordem, sistema semântico* $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, *lógica abstrata* $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ ou, simplesmente, *lógica* $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.

Encerramos esta seção observando que, embora nossa definição de lógica abstrata se refira a sentenças, ao longo das considerações acerca de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ manipulamos fórmulas e consideramos sentenças como casos particulares destas. Esta atitude será adotada também no próximo capítulo, quando considerarmos outros sistemas semânticos pois, vale a pena enfatizar, as fórmulas têm regras recursivas de formação muito simples. Entretanto, a definição de lógica abstrata pode ser alterada de modo a abarcar o conceito de fórmulas. Por exemplo, uma lógica abstrata pode ser generalizada para uma quadrupla $\mathfrak{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \mathrm{F}^{\Sigma}, \models_{\mathfrak{L}}, \models_{\mathfrak{L}}^{*})$, em que L^{Σ} e $\models_{\mathfrak{L}}$ se referem às sentenças e são definidos como anteriormente, enquanto $\mathrm{F} : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$ é uma função com domínio na classe das assinaturas e F^{Σ} é a coleção das Σ-fórmulas de $\mathfrak{L}$. Por sua vez, $\models_{\mathfrak{L}}^{*}$ *subseteq*$\left(\mathcal{K} \times \mathrm{F}^{\Sigma} \times \mathfrak{seq}\right)$ é uma relação ternária, em que $\mathcal{K}$ é a classe das Σ-estruturas e $\mathfrak{seq}$ é a classe das sequências nas partes de $\mathcal{K}$.

É possível introduzir outras noções usuais, por exemplo, variáveis livres. Estendemos $\mathfrak{L}$ para uma quíntupla $\mathfrak{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \mathrm{F}^{\Sigma}, \models_{\mathfrak{L}}, \models_{\mathfrak{L}}^{*}, \mathfrak{h})$, em que $\mathfrak{h} : \mathrm{F}^{\Sigma} \to \mathbb{V}$, que estabelece as variáveis livres de cada fórmula em F^{Σ}. Assim, se quisermos manter, abstratamente, que sentenças são casos particulares de fórmulas, consideramos $\mathrm{L}^{\Sigma} \cap \mathrm{F}^{\Sigma} = \mathrm{L}^{\Sigma}$ e, se $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$, então $\mathfrak{h}(\varphi) = \emptyset$. Outros conceitos usuais podem ser abarcados na definição de lógica abstrata, mas nos fixaremos na Definição 1.2.1

1.3 Lógica Abstrata Regular

A definição de lógica abstrata de que dispomos é muito geral e, com o objetivo de estabelecer o teorema de caracterização apresentado por Lindström, vamos impor algumas restrições aos sistemas semânticos.

Definição 1.3.1 Uma lógica $\mathbb{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$ possui a *propriedade booleana* se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para toda sentença $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ existe uma sentença $\psi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ tal que, para toda Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ se, e somente se, não é o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$.

(b) Para quaisquer $\gamma, \psi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ existe uma $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ tal que para toda Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \gamma$ ou $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$.

Teorema 1.3.2 *A lógica de primeira ordem possui a propriedade booleana.*

Prova. De fato, se para cada sentença $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ considerarmos a sentença $\neg\varphi \in \mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$, então para toda Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, temos que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$ se, e somente se, não é o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \neg\varphi$, o que verifica a condição (a). Para a condição (b), basta observarmos que para as sentenças $\varphi, \psi \in \mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ basta considerarmos a sentença $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$; deste modo, para toda Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, temos que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi \vee \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \psi$. ■

Consideremos uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$ e $P \notin \Sigma$ um símbolo de predicado unário. A partir de $\mathfrak{A}$ podemos construir uma $\Sigma\cup\{P\}$-estrutura, denotada $\mathfrak{A}_{[P]}$, da seguinte forma: tomamos um conjunto não vazio $P^{|\mathfrak{A}|} \subseteq |\mathfrak{A}|$ que seja fechado para Σ em $\mathfrak{A}$, isto é, que seja domínio de alguma subestrutura de $\mathfrak{A}$, e impomos que a interpretação de P em $\mathfrak{A}_{[P]}$ seja este conjunto, isto é, $P^{\mathfrak{A}_{[P]}} = P^{|\mathfrak{A}|}$. Com isso, temos que $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$ é subestrutura da Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, que por sua vez é reduto para Σ da $\Sigma\cup\{P\}$-estrutura $\mathfrak{A}_{[P]}$. O conjunto $P^{|\mathfrak{A}|}$ escolhido de modo a permitir a construção descrita acima é a *P-parte da estrutura* $\mathfrak{A}$.

Essa ideia pode ser facilmente generalizada: sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e os símbolos de predicado unário $P \notin \Sigma$ e $Q \notin \Sigma$. $\mathfrak{A}_{[P,Q]}$ denota a $\Sigma \cup \{P, Q\}$-estrutura, em que $P^{|\mathfrak{A}|}$ é a P-parte de $\mathfrak{A}$ e $Q^{|\mathfrak{A}|}$ é a Q-parte de $\mathfrak{A}$. Analogamente para $\mathfrak{A}_{[P_1,P_2,\ldots,P_n]}$.

Definição 1.3.3 Uma lógica $\mathbb{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$ admite a *propriedade da relativização* se, e somente se, para toda $\mathbb{L}$-sentença $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ e todo predicado unário $P \notin \Sigma$ existe uma $\mathbb{L}$-sentença $\varphi^p \in \mathrm{L}^{\Sigma\cup\{P\}}$ tal que

$$\mathfrak{A}_{[P]} \models_{\mathbb{L}} \varphi^p \text{ se, e somente se, } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \varphi$$

A sentença φ^p é a *sentença relativizada de φ por P*.

No caso de fórmulas, denotaremos a fórmula relativizada de $\varphi(\bar{x})$ por P tanto por $\varphi^p(\bar{x})$ quanto por $\varphi(\bar{x})^p$.

Como um exemplo concreto, mostraremos que a lógica abstrata $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ possui a propriedade de relativização, o que será estabelecido pelo próximo teorema. No próximo capítulo são apresentados outros exemplos de sistemas semânticos com essa propriedade.

Teorema 1.3.4 *A lógica $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ goza da propriedade da relativização.*

Prova. Consideremos a Σ-sentença φ, a Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, $P\notin\Sigma$ um símbolo de predicado unário, $P^{|\mathfrak{A}|} \subseteq |\mathfrak{A}|$ o domínio de uma subestrutura de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}_{[P]}$ a $\Sigma \cup \{P\}$-estrutura obtida por expansão de $\mathfrak{A}$ e na qual a interpretação de P coincide com $P^{|\mathfrak{A}|}$. A prova é por indução na complexidade das fórmulas. Primeiro, verificamos que a interpretação dos termos em $\mathrm{T}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ coincidem em $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{A}_{[P]}$:

- Passo base: se t é a variável x_i, então $t^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] = a_i = t^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]$; se t é símbolo de constante, então $t^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] = c^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}] = t^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]$. A segunda igualdade é garantida pela definição de subestrutura, enquanto a terceira pela expansão;

- Passo de indução: se t é $ft_1...t_n$, em que cada t_i é termo, então

$$t^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] = f^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} t_1^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}]...t_n^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] \overset{HI}{=} f^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]...t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}] = f^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}] t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]...t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}].$$

Vamos definir a sentença relativizada φ^p indutivamente: (i) se φ é a sentença atômica ψ, então φ^p é ψ; (ii) se φ é a sentença $\neg\psi$, então φ^p é $\neg\psi^p$; (iii) se φ é a sentença $\psi \vee \sigma$, então φ^p é $\psi^p \vee \sigma^p$ e (iv) se φ é a sentença $\exists x\psi(x)$, então φ^p é $\exists x(Px \wedge (\psi(x))^p)$.

Vamos agora verificar a propriedade, por indução na complexidade das fórmulas:

- Caso base: φ é uma sentença atômica e, portanto, existem duas possibilidades:

  (i) R é um símbolo de predicado n-ário, $t_1, ..., t_n$ é sequência de termos e φ é $Rt_1...t_n$. Logo, $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models Rt_1...t_n[\bar{a}] \Leftrightarrow (t_1^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}], ..., t_n^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}]) \in R^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]) \in R^{\mathfrak{A}_{[P]}} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models Rt_1...t_n[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}]$. $R^{\mathfrak{A}_{[P]}} \cap (P^{|\mathfrak{A}|})^n = R^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}$.

  (ii) φ é $t_1 \equiv t_2$, sendo que t_1 e t_2 são termos. Então, $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models (t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \Leftrightarrow t_1^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] = t_2^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models (t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \varphi^p[\bar{a}]$. Na terceira ocorrência de $\Leftrightarrow$ usamos a hipótese de indução para termos fechados.

- Passo de indução: há três casos que devem ser considerados:

  (i) Se φ é $\neg\psi$, então $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow$ não é o caso que $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi[\bar{a}] \overset{HI}{\Leftrightarrow}$ não é o caso que $\mathfrak{A}_{[P]} \models \psi^p[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \neg\psi^p[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}]$.

  (ii) Se φ é $\psi \vee \sigma$, então $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models (\psi \vee \sigma)[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi[\bar{a}]$ ou $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \sigma[\bar{a}] \overset{HI}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}_{[P]} \models \psi^p[\bar{a}]$ ou $\mathfrak{A}_{[P]} \models \sigma^p[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models (\psi^p \vee \sigma^p)[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}]$.

  (iii) Se φ é $\exists y \psi(y, \bar{x})$, então

$$
\begin{aligned}
\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] &\Rightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \exists y \psi(y, \bar{x})[\bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ existe um } b \in P^{|\mathfrak{A}|} \text{ tal que } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(y, \bar{x})[b, \bar{a}] \\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \text{ existe um } b \in P^{|\mathfrak{A}|} \text{ tal que } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(\psi(y, \bar{x})\Big)^p [b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ há } b \in P^{|\mathfrak{A}|} \subseteq |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tq. } \mathfrak{A}_{[P]} \models P(y)[b, \bar{a}] \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(\psi(y, \bar{x})\Big)^p [b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ existe um } b \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tal que } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(P(y) \wedge \psi(y, \bar{x})\Big)^p [b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \exists y (P(y) \wedge (\psi(y, \bar{x}))^p) \\
&\Rightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \psi^p[\bar{a}].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}] &\Rightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \exists y \Big((\psi(y, \bar{x}))^p \wedge P(y)\Big)[\bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ existe um } b \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tal que } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(P(y) \wedge (\psi(y, \bar{x}))^p\Big)[b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ existe um } b \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tq. } \mathfrak{A}_{[P]} \models P(y)[b, \bar{a}] \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(\psi(y, \bar{x})^p\Big)[b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \text{ existe um } b \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tal que } P^{\mathfrak{A}_{[P]}} b \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models \Big(\psi(y, \bar{x})^p\Big)[y, \bar{a}] \\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \text{ existe um } b \in P^{|\mathfrak{A}|} \text{ tal que } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(y, \bar{x})[b, \bar{a}] \\
&\Rightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \exists y \Big(\psi(y, \bar{x}\Big)[\bar{a}] \\
&\Rightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}].
\end{aligned}
$$

Isso conclui a demonstração do teorema. ■

Uma lógica pode ser munida de uma outra propriedade interessante, a substituição, que nos permite substituir os símbolos de constantes e de funções por novos símbolos de predicado.

Definição 1.3.5 Sejam Σ uma assinatura, Σ_R uma assinatura relacional, $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $\mathfrak{A}_R$ uma Σ_R-estrutura. Nestas condições, a lógica abstrata $\mathbb{L}$ goza da *propriedade da substituição* quando, para toda $\varphi \in L^{\Sigma}$ existe uma $\varphi_R \in L^{\Sigma_R}$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models_{\mathbb{L}} \varphi_R$.

Como um exemplo concreto de lógica munida da propriedade da substituição temos a lógica de primeira ordem e, para prová-lo, vamos estabelecer um resultado que nos permite escrever os termos de uma linguagem de primeira ordem de forma canônica, sem que dois símbolos de função sejam consecutivos.

Definição 1.3.6 Sejam $P, f, c \in \Sigma$ símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante. Uma Σ-fórmula φ é uma *fórmula termos-reduzida* quando é obtida através de alguma das claúsulas:

(a) φ é $Px_1...x_n$
(b) φ é $x \equiv y$
(c) φ é $fx_1...x_n \equiv y$
(d) φ é $c \equiv x$
(e) φ é $\neg\psi$ e ψ é termos-reduzida
(f) φ é $\exists x\psi$ e ψ é termos-reduzida
(g) φ é $\psi \vee \gamma$ e ψ, γ são termos-reduzidas.

Exemplo 1.3.7 Na assinatura $\Sigma = \{f, g, c\}$ em que f e g são, respectivamente, símbolos de função unária e binária e c é símbolo de constante, seja $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, s, +, 0)$ uma Σ-estrutura em que s é a função sucessor em $\mathbb{N}$. Se τ_1 é $(x_1 \equiv fc) \wedge (gx_2x_3 \equiv x_4) \wedge (x_2 \equiv fc) \wedge (x_3 \equiv fx_5) \wedge (x_4 \equiv fc)$ e τ_2 é $gffcfc \equiv x_4$, então τ_1 é fórmula com termos reduzidos e τ_2 não, embora $\mathfrak{A} \models \tau_1[(1, 1, 2, 3, 1)]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models \tau_2[(1, 1, 2, 3, 1)]$.

Proposição 1.3.8 *Para toda sentença $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentença φ existe uma $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentença φ^* que é termo-reduzida e possui as mesmas variáveis livres de φ.*

Prova. O passo chave da prova consiste em definirmos de modo apropriado a fórmula φ^*. Para isso, sejam $P, f, g, c \in \Sigma$ símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, funções n-ário e constante. Dada uma fórmula φ em F_{I}^{Σ}, definimos as fórmulas com termos reduzidos indutivamente:

- Se φ é $x \equiv y$ ou se φ é $x \equiv c$, então φ^* é própria φ;
- Se φ é $ft_1...t_n \equiv y$, então φ^* é $\exists x_1...\exists x_n((t_1 \equiv x_1)^* \wedge ... \wedge (t_n \equiv x_n)^* \wedge fx_1...x_n = y)$;
- Se φ é $ft_1...t_n \equiv c$ então φ^* é $\exists x((ft_1...t_n \equiv x)^* \wedge (x \equiv c)^*)$;
- Se φ é $ft_1...t_n \equiv gt'_1...t'_n$ então φ^* é $\exists x((ft_1...t_n \equiv x)^* \wedge (x \equiv gt'_1...t'_n)^*)$;
- Se φ é $Pt_1...t_n$ então φ^* é $\exists x_1...\exists x_n((t_1 \equiv x_1)^* \wedge ... \wedge (t_n \equiv x_n)^* \wedge Px_1...x_n)$;
- Se φ é $\neg\psi$, então φ^* é $\neg\psi^*$; se φ é $\psi \vee \gamma$, então φ^* é $\psi^* \vee \gamma^*$;
- Se φ é $\exists x\psi$, então φ^* é $\exists x\psi^*$.

É imediato da definição acima que φ^* é uma fórmula com termos reduzidos, obtida a partir de φ, e que as variáveis livres presentes em ambas são as mesmas. Além disso, por indução na complexidade das fórmulas[1] temos que φ é logicamente equivalente a φ^*. ■

[1] A prova por indução foi omitida por ser muito simples, longa e não contribuir à exposição.

Teorema 1.3.9 (Teorema da substituição) *O sistema semântico $\mathbb{L}_\mathrm{I}$ possui a propriedade da substituição.*

Prova. Sejam Σ uma assinatura, $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, Σ_R uma assinatura relacional e $\mathfrak{A}_R$ uma Σ_R-estrutura. O passo chave na demonstração consiste em definirmos, de modo adequado, para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{L}_\mathrm{I}^\Sigma$ uma fórmula $\varphi_R \in \mathrm{L}_\mathrm{I}^{\Sigma_R}$, o que pode ser feito por indução na complexidade de φ:

- Se em φ não há ocorrência de símbolos de constantes ou funções, então φ_R é φ;
- Se φ é $x \equiv y$, então φ_R é $x \equiv y$;
- Se f é símbolo de predicado n-ário e φ é $f\bar{x} \equiv y$, então φ_R é $P\bar{x}y$, sendo que $P \notin \Sigma$ é símbolo de predicado (n+1)ário;
- Se φ é $\neg\psi$, então φ_R é $\neg\psi_R$;
- Se φ é $\psi \vee \sigma$, então φ_R é $\psi_R \vee \sigma_R$;
- Se φ é $\exists x\psi$, então φ_R é $\exists x\psi_R$.

Agora, precisamos construir o modelo $\mathfrak{A}_R$ para φ_R, a partir de um modelo $\mathfrak{A}$ para φ. Para isso, basta considerarmos:

- $|\mathfrak{A}_R| = |\mathfrak{A}|$;
- Se $P \in \Sigma$ é um símbolo de predicado, então $P^{\mathfrak{A}_R} = P^{\mathfrak{A}}$;
- Se $f \in \Sigma$ é um símbolo de função n-ária, então $P^{\mathfrak{A}_R}a_1, \cdots, a_n, a$ se, e somente se, $f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = a$, onde $P \in \Sigma_R$ é um símbolo de predicado $n+1$-ário não presente em Σ;
- Se $c \in \Sigma$ é um símbolo de constante, então $Q^{\mathfrak{A}_R}a$ se, e somente se, $c^{\mathfrak{A}} = a$, onde $Q \in \Sigma_R$ é um símbolo de predicado unário não presente em Σ.

Agora, por simples indução na complexidade das fórmulas termo-reduzidas φ temos que $\mathfrak{A} \models \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models \varphi_R$. ■

Definição 1.3.10 Uma lógica é *regular* quando goza da propriedade booleana, propriedade da relativização e da propriedade da substituição.

Teorema 1.3.11 *O sistema semantico $\mathbb{L}_\mathrm{I}$ é regular.*

Prova. A prova foi apresentada nos Teoremas 1.3.2, 1.3.4 e 1.3.9. ■

Encerramos esta seção estabelecendo um método de comparação entre o poder expressivo de lógicas. No Capítulo 4 estenderemos essa análise para outros tipos de estruturas, como as estruturas modais.

Definição 1.3.12 Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ duas lógicas abstratas.

(a) Uma $\mathbb{L}$-sentença φ é *logicamente equivalente* a uma $\mathbb{L}'$-sentença φ' quando toda estrutura que é modelo de φ é modelo de φ' e reciprocamente;

(b) A lógica $\mathbb{L}$ é ao menos tão *expressiva* quanto a lógica $\mathbb{L}'$ quando, para toda $\mathbb{L}$-sentença existe uma $\mathbb{L}'$-sentença tal que ambas são logicamente equivalentes. Denotamos que $\mathbb{L}$ é ao menos tão expressiva quanto $\mathbb{L}'$ por $\mathbb{L} \sqsubseteq \mathbb{L}'$ e, nesta situação, dizemos também que $\mathbb{L}$ é *sublógica* de $\mathbb{L}'$;

(c) Duas lógicas $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ são *igualmente expressivas* quando $\mathbb{L} \sqsubseteq \mathbb{L}'$ e $\mathbb{L}' \sqsubseteq \mathbb{L}$. Denotamos que $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ são igualmente expressivas por $\mathbb{L} \sim \mathbb{L}'$;

(d) A lógica $\mathbb{L}'$ é *estritamente mais expressiva* que a lógica $\mathbb{L}$ quando $\mathbb{L} \sqsubseteq \mathbb{L}'$ e não é o caso que $\mathbb{L} \sim \mathbb{L}'$. Denotamos que $\mathbb{L}'$ é estritamente mais expressiva que $\mathbb{L}$ por $\mathbb{L} \sqsubset \mathbb{L}'$.

No próximo capítulo serão apresentados exemplos de lógicas mais expressivas que a lógica $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.

1.4 Os teoremas de Löwenheim-Skolem e da Compacidade

Nesta seção apresentaremos, sem provas, os teoremas da compacidade e de Löwenheim -Skolem para a lógica abstrata $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ e generalizaremos, como propriedades, estes resultados para sistemas semânticos quaisquer.

Em 1915 Leopold Löwenheim mostrou que, se uma fórmula de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ possui modelo infinito, então esta fórmula possui modelo de domínio enumerável; em 1920 o resultado foi generalizado por Thoralf Skolem.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Löwenheim-Skolem) *Sejam Σ enumerável e $\Gamma \subseteq \mathrm{F}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ um conjunto enumerável de fórmulas. Se Γ possui um modelo de cardinalidade infinita, então Γ possui modelo enumerável.*

Não apresentaremos a prova deste teorema; uma demonstração pode ser vista em Hodges, [10], página 69, que a descreve como "The quickest way to prove Skolem results" e cuja estratégia consiste basicamente em três etapas:

- Hodges mostra como, a partir de uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$ e um subconjunto X de $|\mathfrak{A}|$, obter uma subestrutura de $\mathfrak{A}$ gerada por X.

- Com isso, ele obtém uma cadeia de subestruturas $\mathfrak{B}_n$ tal que para toda $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-fórmula $\varphi(y, \bar{x})$ e toda sequência $\bar{a}$ de elementos de $\mathfrak{B}_n$ tais que, se existe um b em $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(y, \bar{x})[b, \bar{a}]$, então este b é elemento de $\mathfrak{B}_{n+1}$.

- Por fim, considerando-se $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$, esta é contável e, pelo critério de Tarski-Vaught[2], $\mathfrak{B}$ é subestrutura elementarmente equivalente a $\mathfrak{A}$, o que completa a prova.

Outra prova do Teorema de Löwenheim-Skolem envolve estabelecer um conjunto finito de axiomas para $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ e, na prova de completude *à la* Henkin, adaptar a prova de maneira adequada. Tal demonstração pode ser vista em Chang & Keisler, [4], página 66.

O Teorema de Löwenheim-Skolem além de, como já dito, ser importante ao sistema semântico $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, inaugurou uma nova era na Lógica, como assevera Enderton, [7], pág. 141:

> "The theorem marked a new phase in mathematical logic. Earlier work had been done in the direction of *formalizing* mathematics by means of formal language and dedutive calculi; this work was initiated largely by Gottlob Frege in 1879. For example,... But the modern phase began when logicians stepped back and began to prove results *about* the formal systems that they had been constructing."

Segundo Wolenski, [25], o teorema de Löwenheim-Skolem foi fundamental para que os logicistas dessem atenção a outras lógicas:

> Famous (and less famous) axiomatizations at the end of the 19th century, namely Dedekind's (number theory), Peano's (number theory) and Hilbert's (geometry) were second-order, due to axioms, like induction (Dedekind, Peano) and completeness (of real numbers) (Hilbert). Frege's logic was also second-order, and the system of Principia covered what is presently known as ω-logic. Nobody at that time made any difference between first- and higher-order logic. The situation changed about 1915 when Löwenheim proved his famous result, later improved by Skolem, about satisfiability of first-order formulas in the domain of natural numbers.

Em sistemas semânticos, distintos de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ podemos encontrar, ou não, resultados análogos; diremos que uma lógica abstrata $\mathbb{L}$ possui a *propriedade de Löwenheim-Skolem* quando, dado qualquer conjunto enumerável Γ de $\mathbb{L}$-sentenças, valer a condição: se Γ possui modelo de cardinalidade infinita, então Γ possui modelo de cardinalidade enumerável.

Outro resultado de suma importância à $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ é o teorema da compacidade.

Teorema 1.4.2 (Teorema da Compacidade) *Seja Γ um conjunto qualquer de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-fórmulas. Se todo subconjunto finito de Γ tem modelo, então o próprio conjunto Γ tem modelo.*

A prova deste resultado também será omitida, mas a mesma pode ser vista em diversos textos introdutórios de lógica, como Mendelson [18] e Enderton [7] e a prova é consequência direta do teorema da completude de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$. Uma outra demonstração, difícil e puramente semântica pode ser vista em Bell & Slomson [2].

[2]Quando $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, este critério estabelece condições necessárias e suficientes para $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Há sistemas semânticos que não satisfazem a compacidade no sentido acima, mas há dois modos imediatos em que podemos enfraquecer a noção de compacidade.

Dado um cardinal infinito κ, uma lógica abstrata $\mathbb{L}$ é *κ-compacta* quando, dado um conjunto de $\mathbb{L}$-sentenças Γ, todo subconjunto de cardinalidade menor que κ ter modelo é condição suficiente para que Γ tenha modelo. Por exemplo, a lógica $\mathbb{L}_{\text{I}}$ é $\aleph_0$-compacta, pois o conjunto de sentenças é enumerável e vale o teorema da compacidade.

A nova versão da compacidade pode ainda ser estabelecida do seguinte modo: dados dois cardinais κ e λ tais que $\kappa \geq \lambda \geq \aleph_0$, uma lógica abstrata $\mathbb{L}$ é (κ, λ)-compacta quando, para qualquer conjunto de $\mathbb{L}$-sentenças com cardinalidade menor ou igual a κ, se todo subconjunto de Γ com cardinalidade menor que λ tem modelo, então Γ tem modelo. Uma vez que o conjunto de $\mathbb{L}_{\text{I}}$-sentenças é enumerável, temos que $\mathbb{L}_{\text{I}}$ é $(\aleph_0, \aleph_0)$-compata.

A importância da compacidade para os sistemas semânticos que estendem $\mathbb{L}_{\text{I}}$ é dupla: em primeiro lugar, sistemas semânticos munidos de alguma forma de teorema de completude, em especial a completude abstrata[3] são munidos de alguma forma de compacidade e, consequentemente, sistemas não compactos não possuem um teorema de completude.

Em segundo lugar, a $\aleph_0$-compacidade desempenha papel central em teoria de modelos para $\mathbb{L}_{\text{I}}$, ; desse modo, muitos resultados modelo-teóricos para lógicas abstratas quaisquer podem ser obtidos mimetizando os resultados em $\mathbb{L}_{\text{I}}$. Quando a compacidade falha, a investigação modelo-teórica dessas lógicas torna-se deverás complicada.

[3]Uma lógica possui completude abstrata quando o conjunto das sentenças válidas da lógica é recursivamente enumerável.

Capítulo 2

Extensões da Lógica de Primeira Ordem

No capítulo anterior definimos a lógica $\mathbb{L}_{\text{I}}$ e apresentamos o conceito de uma lógica ser mais expressiva do que outra sem, entretanto, apresentar exemplos. Tais extensões podem ser canonicamente obtidas através da introdução de novos *quantificadores*, novos *operadores* ou novas *variáveis* na linguagem inicial $\mathcal{L}_{\text{I}}$, seguida de uma adequação das regras que definem as fórmulas, a relação de satisfatibilidade e todas as demais noções subjacentes, de tal modo que os novos elementos sejam naturalmente incorporados aos novos sistemas semânticos. Estes novos quantificadores irão quantificar sobre as variáveis de $\mathcal{L}_{\text{I}}$, os novos operadores permitirão a concatenação de infinitas fórmulas de $\mathbb{L}_{\text{I}}$ e as novas variáveis serão quantificadas, o que motiva a denominação dos sistemas semânticos obtidos através destas estratégias, respectivamente, *lógicas com quantificadores generalizados, lógicas infinitárias* e *lógicas de ordem superior*. Vale a pena enfatizar que a noção de estrutura não é alterada nestas extensões, ou seja, a classe de estruturas que serve como domínio da relação de satisfatibilidade dessas lógicas é precisamente a mesma de $\mathbb{L}_{\text{I}}$, embora as relações de satisfatibilidade envolvidas sejam, naturalmente, outras.

Nas três primeiras seções deste capítulo apresentaremos um representante típico de cada uma dessas formas de extensão e analisaremos o comportamento dos mesmos com relação às propriedades de Löwenheim-Skolem e $\aleph_0$-compacidade.

2.1 A lógica com "existe uma quantia incontável" $\mathbb{L}_{Q_1}$

No caso concreto de sistema semântico apresentado no capítulo anterior, os quantificadores existencial e universal podem ser considerados como quantificadores de cardinalidade, no seguinte sentido: dada uma fórmula com uma variável livre $\varphi(x)$, a validade de $\exists x\varphi(x)$ indica que a extensão de φ não é vazia, enquanto que a validade de $\forall x\varphi(x)$ determina que o complementar da extensão de φ, com relação ao universo dos modelos, é vazio. Em 1957, Mostowski, [19], generalizou esta ideia com a introdução da família de quantificadores Q_α, em que a validade da sentença $Q_\alpha x(\varphi(x))$ expressa condições acerca da cardinalidade da extensão de φ e de seu complementar. De modo mais preciso, Mostowski estipulou que $Q_\alpha x(\varphi(x))$ é válida apenas na classe de estruturas cujos domínios possuem cardinalidade, no mínimo, $\aleph_\alpha$. Esses quantificadores são conhecidos como *quantificadores generalizados de Mostowski*.

Em 1966, Lindström, [14], generalizou os quantificadores generalizados de Mostowski em duas direções. Primeiro, permitiu que o mesmo quantificador tivesse em seu escopo mais de uma fórmula ao mesmo tempo, construindo assim sentenças da forma $Qx(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ e, com isso, ele mostrou ser possível caracterizar noções tais como "a maioria dos X é Y". Em seguida, permitiu que um mesmo quantificador ligasse mais de uma variável ao mesmo tempo, permitindo a construção de sentenças da forma $Qx; xy(P(x), R(x, y))$, em que "x" e "xy" são ligadas por Q; isso permitiu a Lindström expressar que "a relação R bem-ordena o conjunto P". Tais quantificadores são conhecidos como *quantificadores generalizados de Lindström*.

Em Feferman & Barwise, [8], parte B, há uma ampla discussão sobre as propriedades modelo-teóricas de lógicas obtidas com o acréscimo dos quantificadores Q_α de Mostowski à linguagem de $\mathbb{L}_\mathrm{I}$. Nesta seção, limitaremos nossa discussão a alguns dos principais aspectos modelo-teóricos do sistema semântico oriundo da introdução do quantificador Q_1 de Mostowski e encerraremos esta seção com alguns comentários, muito breves, relativos à inserção de Q_0.

Definição 2.1.1 Uma *linguagem* $\mathcal{L}_{Q_1}$ é uma linguagem $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ acrescida do símbolo Q_1. O conjunto $\mathrm{T}^\Sigma_{Q_1}$ dos Σ-termos de $\mathcal{L}_{Q_1}$ coincide com o conjunto $\mathrm{T}^\Sigma_\mathrm{I}$ e as Σ-fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{Q_1}$ são estabelecidas pelas seguintes clausulas:

(a) Se φ é uma $\mathcal{L}^\Sigma_\mathrm{I}$-fórmula, então φ é uma $\mathcal{L}^\Sigma_{Q_1}$-fórmula;

(b) Se φ é uma $\mathcal{L}^\Sigma_{Q_1}$-fórmula, então $Q_1x(\varphi)$ também o é.

O conjunto das $\mathcal{L}^\Sigma_{Q_1}$-fórmulas será denotado $\mathrm{F}^\Sigma_{Q_1}$. Quando $\varphi \in \mathrm{F}^\Sigma_{Q_1}$ é da forma $Q_1x(\psi)$, as variáveis livres de φ são as mesmas de ψ, exceto x, que é variável ligada. Para as demais fórmulas de $\mathcal{L}_{Q_1}$ caracterizamos as variáveis livres, bem como os conceitos de variável ligada, complexidade, ocorrência, sentença, etc; da mesma maneira que os conceitos associados a $\mathcal{L}_\mathrm{I}$. Denotaremos o conjunto das $\mathcal{L}^\Sigma_{Q_1}$-sentenças por $\mathrm{L}^\Sigma_{Q_1}$.

As noções de estrutura, estrutura adaptada a uma assinatura, sequência de elementos de uma estrutura, interpretação dos termos e das fórmulas em uma estrutura, etc., são idênticas às discutidas no capítulo anterior e, com elas em mente, podemos definir uma relação de satisfatibilidade entre fórmulas, estruturas e sequências que contemplem o novo símbolo Q_1, além de ser coerente com a interpretação pretendida a este último.

Definição 2.1.2 Seja $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura. A relação *a sequência $\bar{a}$ satisfaz a $\mathcal{L}^\Sigma_{Q_1}$-fórmula $\varphi(\bar{x})$ em $\mathfrak{A}$* é denotada $\mathfrak{A} \models_{Q_1} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ e definida por:

(a) Se $\varphi \in \mathrm{F}^\Sigma_\mathrm{I}$, a relação $\mathfrak{A} \models_{Q_1} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ vale se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ vale;

(b) Se $\varphi \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}$ é da forma $Q_1 y\Big(\psi(y,\bar{x})\Big)$, então vale a relação $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, existem ao menos $\aleph_1$ elementos b em $|\mathfrak{A}|$ tais que $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \psi(y,\bar{x})[b,\bar{a}]$.

As noções de fórmula verdadeira, fórmula satisfatível, sentença verdadeira em um modelo, sentença válida, conjunto de sentenças verdeiras em um modelo, etc., são adaptações imediatas das apresentadas no capitulo anterior.

Observamos que uma vez que a coleção de fórmulas que estabelecemos é uma extensão das $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-fórmulas e a classe de extensões é a mesma, a relação de satisfatibilidade acima definida é uma extensão de $\models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}}$. Estamos agora em condições de estabelecer uma nova lógica abstrata.

Teorema 2.1.3 *O par* $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}, \models_{\mathrm{Q}_1}\right)$ *é um sistema semântico.*

Prova. As condições (a) e (b) da definição de sistemas semânticos são imediatas pelas Definições 2.1.1 e 2.1.2. Quanto à propriedade do reduto e do isomorfismo, as provas são por indução na complexidade das fórmulas e, em virtude de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ ser sistema semântico, para as fórmulas comuns entre $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$ e $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}$ a discussão está encerrada. Para as demais, vamos supor que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}$, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são Σ-estruturas e $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é um isomorfismo.

(c) Propriedade do isomorfismo: Vamos supor que $\psi(y,\bar{x}) \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}$; como hipótese de indução temos que, se $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \psi(y,\bar{x})[b,\bar{a}]$, então $\mathfrak{B} \models_{\mathrm{Q}_1} \psi(y,\bar{x})[hb,h\bar{a}]$. Seja φ a Σ-fórmula $Q_1 y(\psi(y,\bar{x}))$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \varphi[\bar{a}] & \Rightarrow & \mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} Q_1 y\Big(\psi(y,\bar{x})\Big)[\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } b \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tais que } \mathfrak{A} \models \psi(y,\bar{x})[b,\bar{a}] \\
& \overset{\text{HI+iso}}{\Rightarrow} & \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ ind. } hb \text{ em } |\mathfrak{B}| \text{ tais que } \mathfrak{B} \models \psi(y,\bar{x})[hb,h\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{B} \models Q_1 y\Big(\psi(y,\bar{x})\Big)[h\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{B} \models \varphi[h\bar{a}].
\end{array}$$

(d) Propriedade do reduto. Todos os casos são idênticos ao caso $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, exceto um:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \varphi[\bar{a}] & \Rightarrow & \mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} Q_1 y(\psi(y,\bar{x}))[\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indivíduos } b \text{ em } |\mathfrak{A}| \text{ tq. } \mathfrak{A} \models_{\mathrm{Q}_1} \psi(y,\bar{x})[b,\bar{a}] \\
& \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} & \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } b \text{ em } |\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}| \text{ tq. } \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathrm{Q}_1} \psi(y,\bar{x})[b,\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathrm{Q}_1} Q_1 y(\psi(y,\bar{x}))[\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathrm{Q}_1} \varphi[\bar{a}].
\end{array}$$

Como as propriedades do isomorfismo e do reduto são válidas para todas as fórmulas, elas são, em particular, válidas para todas as sentenças, o que conclui a prova. ∎

O par ordenado $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\mathrm{Q}_1}, \models_{\mathrm{Q}_1}\right)$ será denotado por $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$ e denominado *lógica com o quantificador "existe uma quantia incontável"* ou *sistema semântico* $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$ ou, ainda, *lógica abstrata* $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$. Pela Definição 1.2.1 o sistema semântico $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$ claramente é munido da propriedade booleana; as próximas duas proposições mostrarão que $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$ é regular.

Proposição 2.1.4 *A lógica abstrata* $\mathbb{L}_{\mathrm{Q}_1}$ *goza da propriedade de relativização.*

Prova. As definições das estruturas envolvidas são as mesmas da Definição 1.3.3 e a prova é por indução na complexidade de fórmulas. Em virtude do Teorema 1.3.4, precisamos apenas definir a relativização das sentenças que envolvem o quantificador Q_1: se a sentença φ é $Q_1x(\psi(x))$, então φ^p é $Q_1x(Px \wedge \psi(x)^p)$. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} \varphi \quad &\Rightarrow \quad \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} Q_1x(\psi(x)) \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indivíduos } a \in |\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}| \text{ tais que} \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} \psi(x)[a] \\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \quad \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indivíduos } a \in |\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}| \text{ tais que } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \psi(x)^p[a] \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1\ a \in |\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}| = P^{|\mathfrak{A}|} \subseteq |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ t.q. } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} (x)^p[a] \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1\ a \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ t. q. } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} P(x)[a] \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \psi(x)^p[a] \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } a \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tais que } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \Big(P(y) \wedge \psi(x)^p\Big)[a] \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} Q_1x\Big(P(x) \wedge \psi(x)^p\Big) \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \varphi^p;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \varphi^p \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} Q_1x\Big(P(x) \wedge \psi(x)^p\Big) \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } a \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tais que } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \Big(P(x) \wedge \psi(x)^p\Big)[a] \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1\ a \in |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ t. q. } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} P(x)[a] \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \Big(\psi(x)^p\Big)[a] \\
&\Rightarrow \quad \text{existem ao menos } \aleph_1\ a \in |\mathfrak{A}_{[P]}| = P^{|\mathfrak{A}|} = |\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}| \text{ t. q. } \mathfrak{A}_{[P]} \models_{Q_1} \psi(x)^p[a] \\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \quad \text{existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } a \in |\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}| \text{ tais que } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} \psi(x)[a] \\
&\Rightarrow \quad \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} Q_1x\Big(\psi(x)\Big) \\
&\Rightarrow \quad \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{Q_1} \varphi.
\end{aligned}
$$

Isso conclui a prova por indução. ■

Um corolário da prova acima é que a lógica $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$, qualquer que seja o α, goza da propriedade de relativização. De fato, basta estabelecermos que, quando a sentença φ é $Q_\alpha x(\psi(x))$, sua relativização φ^p é $Q_\alpha x(P(x) \wedge \psi(x)^p)$; com isso, a prova acima pode ser adaptada a estes novos quantificadores.

Proposição 2.1.5 *A lógica $\mathbb{L}_{Q_1}$ é munida da propriedade de substituição.*

Prova. Construímos uma assinatura Σ_R a partir de uma assinatura Σ do seguinte modo: (i) inicialmente Σ_R é vazio e todo símbolo de relação em Σ é acrescentado a Σ_R; (ii) a cada símbolo de função n-ário em Σ é acrescentado um novo símbolo de predicado $(n+1)$-ário em Σ_R; (iii) a cada símbolo de constante em Σ é acrescentado um símbolo de predicado unário em Σ_R e (iv) os símbolos em Σ_R são apenas aqueles descritos nos passos (i), (ii) e (iii). Claramente, Σ_R é relacional. Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura e $\mathfrak{A}_R$ uma Σ_R-estrutura construída como no Teorema 1.3.9. Por fim, consideremos uma sentença φ em $\mathrm{L}^{\Sigma}_{Q_1}$. Há apenas duas possibilidades a esta sentença:

- $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$ e portanto, pelo Teorema 1.3.9, existe uma sentença φ_R tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models_{\mathbb{L}_\mathrm{I}} \varphi_R$ e, como φ é membro de $\mathrm{L}^{\Sigma}_{Q_1}$, $\mathfrak{A} \models_{Q_1} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models_{Q_1} \varphi_R$;

- φ é $Q_1x(\psi(x))$ e $\psi(x) \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$; para estas fórmulas basta definir que φ_R é $Q_1x(\psi(x)_R)$ e, com o mesmo argumento usado acima, concluímos que $\mathfrak{A} \models_{Q_1} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models_{Q_1} \varphi_R$

Com isso, concluímos que $\mathbb{L}_{Q_1}$ satisfaz a propriedade da substituição. ■

Proposição 2.1.6 *A lógica abstrata $\mathbb{L}_{Q_1}$ é estritamente mais expressiva do que $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.*

Prova. Pela Definição 2.1.2 temos para toda fórmula φ de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ que, se $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$, então $\mathfrak{A} \models_{Q_1} \varphi$ e, portanto, $\mathbb{L}_{\mathrm{I}} \sqsubseteq \mathbb{L}_{Q_1}$. Por outro lado, consideremos a $\mathbb{L}_{Q_1}$-sentença $\neg Q_1x(x \equiv x)$; com isso:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_{Q_1} \neg Q_1x(x \equiv x) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{não é o caso que } \mathfrak{A} \models_{Q_1} Q_1x(x \equiv x) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{não existem ao menos } \aleph_1 \text{ indiv. } a \in |\mathfrak{A}| \text{ t.q. } \mathfrak{A} \models_{Q_1} (x \equiv x)[a] \\ &\Leftrightarrow \quad \text{a cardinalidade de } |\mathfrak{A}| \text{ é estritamente menor do que } \aleph_1. \end{aligned}$$

Assim $\neg Q_1x(x \equiv x)$ é verdadeira, única e exclusivamente, em modelos de domínio contável. Agora, vamos supor que exista uma $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-fórmula ψ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \psi$ se, e somente se, o domínio de $\mathfrak{A}$ é enumerável. Como para $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ vale o Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, existe uma estrutura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \psi$ e $|\mathfrak{B}|$ é não enumerável. Assim, não existe uma sentença de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ que caracterize as estruturas de domínio enumerável e, portanto, $\mathbb{L}_{\mathrm{I}} \sqsubset \mathbb{L}_{Q_1}$. ■

Proposição 2.1.7 *O sistema semântico $\mathbb{L}_{Q_1}$ não goza da propriedade de Löwenheim-Skolem.*

Prova. De fato, consideremos novamente a L_{Q_1}-sentença $Q_1x(x \equiv x)$. Assim, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, por definição $\mathfrak{A} \models Q_1x(x \equiv x)$ se, e somente se, o domínio de $\mathfrak{A}$ possui cardinalidade no mínimo $\aleph_1$. Portanto, não é admissível a existência de uma estrutura $\mathfrak{B}$ com domínio enumerável e tal que $\mathfrak{B} \models Q_1x(x \equiv x)$. Consequentemente, não vale a propriedade de Löwenheim-Skolem em $\mathbb{L}_{Q_1}$. ■

Proposição 2.1.8 *A lógica $\mathbb{L}_{Q_1}$ é $\aleph_0$-compacta.*

Prova. A prova deste resultado foi apresentada em 1970 por Keisler, [12], e não será reproduzida aqui. A estratégia de prova consiste em inicialmente formular um sistema de axiomas para $\mathbb{L}_{Q_1}$ que seja correto e completo com relação à relação de satisfatibilidade $\models_{Q_1}$ e, em seguida, adaptar a prova de $\aleph_0$-compacidade da lógica $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$. ■

Na família de quantificadores Q_α, outro de natural interesse é o quantificador Q_0, cuja interpretação pretendida é $\mathfrak{A} \models Q_0x(\psi(x))$ se, e somente se, exitem contáveis $a \in |\mathfrak{A}|$ tais que $\mathfrak{A} \models \psi(x)[a]$. Embora possamos definir uma lógica abstrata com Q_0 de modo análogo ao aplicado a Q_1, o sistema resultante não é bem comportado, uma vez que não satisfaz a propriedade de Löwenheim-Skolem, não é contavelmente compacto e não possui completude abstrata.

Por essa razão, embora tais sistemas sejam capazes de distinguir estruturas finitas das não finitas e de caracterizar grupos de torção, os mesmos são preteridos à lógica infinitária estudada na próxima seção.

Concluímos esta seção enfatizando que a *o sistema semântico $\mathbb{L}_{Q_1}$ é regular, mais expressivo do que $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, $\aleph_0$-compacto e não satisfaz a propriedade de Löwenheim-Skolem.*

2.2 A lógica infinitária $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$

Alternativamente à inclusão de novos operadores à linguagem, extensões do sistema $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ podem ser obtidas ao permitirmos novas regras de formação às fórmulas e, os sistemas $\mathbb{L}_{\kappa\lambda}$, compõem uma família importante dessas extensões. Nos sistemas semânticos $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ as regras para formação de fórmulas exigem que apliquemos qualquer conectivo ou quantificador apenas um número finito de vezes; as lógicas $\mathbb{L}_{\kappa,\lambda}$ removem estas limitações, permitindo que novas fórmulas sejam formadas a partir da concatenação de "menos do que κ outras fórmulas" e nas quais é permitida a ocorrência "de menos do que λ quantificadores", sendo que κ e λ são cardinais quaisquer. Por esse motivo, quando ao menos um dos cardinais κ ou λ é infinito e maior do que $\aleph_0$, estas lógicas são denominadas *lógicas infinitárias*.

Nesta seção consideraremos a lógica infinitária $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$, isto é, lógicas em que novas fórmulas podem ser obtidas a partir de uma quantia enumerável de fórmulas e finitas aplicações de quantificadores. Esse raciocínio justifica a notação, bastante usual mas que não adotaremos aqui, de $\mathbb{L}_{\omega\omega}$ para $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.

Definição 2.2.1 Uma *linguagem* $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ é uma linguagem $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ acrescida do símbolo $\bigvee$. Dada uma assinatura Σ, o conjunto $\mathrm{T}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$ dos Σ-termos da linguagem $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ coincide com o conjunto $\mathrm{T}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$. As Σ-fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ são estabelecidas pelas seguintes clausulas:

(a) Se φ é uma $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$-fórmula, então φ é uma $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$-fórmula;

(b) Se Ψ é um conjunto enumerável de $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$-fórmulas, então $\bigvee\Psi$ é uma $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$-fórmula.

O conjunto das $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$-fórmulas será denotado $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$. Estabelecemos os conceitos de variável livre, variável ligada, fórmula, sentença, etc, da mesma maneira que os conceitos associados a $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$. Denotaremos o conjunto das $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$-sentenças por $\mathrm{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$.

A interpretação pretendida ao símbolo $\bigvee$ é a disjunção enumerável de fórmulas, isto é, se o conjunto $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, ...\}$ é infinito, então a intuição por trás $\bigvee\Psi$ é a disjunção $\psi_1 \vee \psi_2 \vee ...$ de todas as fórmulas em Ψ, expressão esta que não é admitida como fórmula da linguagem $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$. Quando o conjunto Ψ for finito, cometeremos o abuso de escrever $\bigvee\Psi$ para representar $\psi_1 \vee ... \vee \psi_n$ com cada ψ_i, $i = 1, ..., n$, em Ψ.

As noções de estrutura, estrutura adaptada a uma assinatura, sequência de elementos de uma estrutura, interpretação dos termos e das fórmulas em uma estrutura, etc, são idênticas às discutidas no capítulo anterior e, com elas em mente, podemos definir uma relação de satisfatibilidade entre fórmulas e estruturas que contemple as $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-fórmulas.

Definição 2.2.2 Sejam $\varphi \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$, Ψ um conjunto enumerável de fórmulas em $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$ e $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura. A relação *a fórmula $\varphi(\bar{x})$ é satisfeita pela sequência $\bar{a}$ de* $\mathfrak{A}$, denotada $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$, é definida por:

(a) Se $\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$, a relação $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ vale se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ vale;

(b) Vale $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \bigvee \Psi[\bar{a}]$, e somente se, para alguma $\psi(\bar{x}) \in \Psi$ vale $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \psi(\bar{x})[\bar{a}]$.

As noções de fórmula verdadeira, fórmula satisfatível, sentença verdadeira em um modelo, sentença válida, conjunto de sentenças verdadeiras em um modelo, etc., são análogas àquelas presentes na Definição 1.2.3.

Exemplo 2.2.3 Do mesmo modo que os quantificadores $\exists$ e $\forall$ são duais em $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, podemos estabelecer o dual $\bigwedge$ de $\bigvee$. A interpretação pretendida ao operador $\bigwedge$ é o de "conjunção infinita"e, de modo mais preciso, se Ψ é um conjunto enumerável de $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$, então $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \bigwedge \Psi$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \psi$, para toda ψ em Ψ. Consideremos $\neg\Psi = \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi\}$; então, para toda estrutura $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \neg\Big(\bigvee(\neg\Psi)\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{não é o caso que } \mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \bigvee(\neg\Psi) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{não é o caso que } \mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \neg\psi, \text{ para alguma } \psi \text{ em } \Psi \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \psi, \text{ para toda } \psi \text{ em } \Psi \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \bigwedge \Psi.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4 Sejam G um conjunto não vazio, $\circ$ uma função binária em G e e um elemento de G. Um grupo é uma estrutura $\mathfrak{G} = (G, \circ, e)$, caracterizada pelas seguintes $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentenças:

(i) $\forall x \forall y \forall z(((x \circ y) \circ z) \equiv (x \circ (y \circ z)))$ (ii) $\forall x((x \circ e) \equiv x)$ (iii) $\forall x \exists y(x \circ y \equiv e)$

Um grupo de torção é um grupo $\mathfrak{G}$ tal que, para todo membro a de G, existe um inteiro positivo n tal que

$$\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\circ \text{ aplicado } n \text{ vezes}} = e$$

Uma caracterização desta propriedade com a lógica de primeira ordem não é possível, pois ela deve ser lida como $a \circ a = e$ ou $a \circ a \circ a = e$ ou $a \circ a \circ a \circ a = e$ ou $\cdots$, cuja formalização canônica é a sentença $\forall x((x \circ x \equiv e) \vee (x \circ x \circ x \equiv e) \vee \ldots)$, que não é lícita em $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$. No entanto, tal propriedade pode ser caracterizada por uma $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$-sentença. De fato, consideremos as fórmulas recursivamente geradas por $f(0) = (x \equiv x)$, $f(n+1) = x \circ f(n)$ e o conjunto $\Psi = \{f(n) \equiv e \mid n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, este conjunto é enumerável e, portanto, a propriedade de grupo de torção pode ser caracterizada pela sentença $\forall x(\bigvee \Psi)$. Logo, os grupos de torção são caracterizáveis em $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$.

Proposição 2.2.5 *O par* $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}, \models_{\omega_1\omega}\right)$ *é um sistema semântico.*

Prova. As condições (i) e (ii) da definição de sistemas semânticos são imediatas pelas Definições 2.2.1 e 2.2.2. Quanto à propriedade do reduto e do isomorfismo, as provas são por indução na complexidade das fórmulas e, em virtude de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ ser sistema semântico, para as fórmulas comuns entre $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$ e $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$ a discussão está encerrada. Para as demais, vamos supor que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são Σ-estruturas, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. Seja Ψ um conjunto enumerável de de fórmulas em $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$:

(iii) Propriedade do isomorfismo. A HI é: se $\mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[\bar{a}]$, então $\mathfrak{B}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[h\bar{a}]$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi\Big)[\bar{a}] &\Rightarrow \mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x}) \text{ em } \Psi\\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \mathfrak{B}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[h\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x}) \text{ em } \Psi\\
&\Rightarrow \mathfrak{B}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi\Big)[h\bar{a}].
\end{aligned}$$

(iv) Propriedade do reduto. Todos os casos são idênticos a $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, exceto um:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi\Big)[\bar{a}] &\Rightarrow \mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x}) \text{ em } \Psi\\
&\overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \mathfrak{A}|_{\Sigma_0}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x}) \text{ em } \Psi\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}|_{\Sigma_0}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi\Big)[\bar{a}].
\end{aligned}$$

Como as propriedades do isomorfismo e do reduto são válidas para todas as fórmulas, em particular são válidas para todas as sentenças, o que conclui a prova. ■

A partir de agora denotaremos o sistema semântico $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\omega_1\omega},\models_{\omega_1\omega}\right)$ por $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$, que denominaremos *lógica da "disjunção infinita"* ou *sistema semântico* $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ ou, ainda, *lógica abstrata* $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$. Pela Definição 2.2.2 o sistema semântico $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ claramente é munido da propriedade booleana; as próximas duas proposições mostrarão que $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ é regular.

Proposição 2.2.6 *A lógica $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ goza da propriedade de relativização.*

Prova. As definições das estruturas envolvidas são as mesmas da Definição 1.3.3 e a prova é por indução na complexidade de fórmulas. Em virtude do Teorema 1.3.4, precisamos apenas definir a relativização das fórmulas que envolvem o símbolo $\bigvee$: se a fórmula φ é $\bigvee\Psi$, então φ^p é $\bigvee\Big(\Psi^p\Big)$, em que $\Psi^p = \{\psi^p \mid \psi\in\Psi\}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}\models_{\omega_1\omega}\varphi[\bar{a}] &\Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi\Big)[\bar{a}]\\
&\Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}\models_{\omega_1\omega}\psi(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x})\in\Psi\\
&\overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}_{[P]}\models_{\omega_1\omega}\psi^p(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi(\bar{x})\in\Psi\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]}\models_{\omega_1\omega}\psi^p(\bar{x})[\bar{a}], \text{ para alguma } \psi^p(\bar{x})\in\Psi^p\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]}\models_{\omega_1\omega}\Big(\bigvee\Psi^p\Big)[\bar{a}]\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]}\models_{\omega_1\omega}\varphi^p[\bar{a}].
\end{aligned}$$

Como verificamos a relativização para as fórmulas, as sentenças também estão munidas de tal propriedade. ■

Proposição 2.2.7 *O sistema semântico $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ possui a propriedade de substituição.*

Prova. Sejam Σ uma assinatura e $\varphi\in\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$. Construímos a assinatura Σ_R a partir de Σ como na Proposição 2.1.5. Sejam ainda $\mathfrak{A}$ uma Σ estrutura e $\mathfrak{A}_R$ uma Σ_R estrutura construída como no Teorema 1.3.9. Por fim, consideremos uma fórmula φ em $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$. Há apenas duas possibilidades a esta fórmula:

- $\varphi\in\mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$ e portanto, pelo Teorema 1.3.9, existe uma fórmula φ_R tal que $\mathfrak{A}\models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}}\varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R\models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}}\varphi_R$ e, como $\varphi\in\mathrm{F}^{\Sigma}_{\omega_1\omega}$, $\mathfrak{A}\models_{\omega_1\omega}\varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R\models_{\omega_1\omega}\varphi_R$;

- $\Psi = \{\psi \mid \psi \in F_{\mathrm{I}}^{\Sigma}\}$ possui cardinalidade $\aleph_0$ e φ é $\bigvee\Psi$; nestas condições, basta estabelecer que φ_R é $\bigvee\Psi_R$, em que $\Psi_R = \{\psi_R \mid \psi \in \Psi\}$ e, com o mesmo argumento usado acima, concluímos que $\mathfrak{A} \models_{\omega_1\omega} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_R \models_{\omega_1\omega} \varphi_R$.

Como sentenças são casos particulares de fórmulas e a substituição vale para fórmulas, concluímos que $\mathbb{L}_{\omega 1,\omega}$ satisfaz a propriedade da substituição. ■

Proposição 2.2.8 *$\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ é uma lógica regular estritamente mais expressiva do que $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.*

Prova. Por um lado, é imediato das definições que toda $\mathbb{L}_{\mathrm{I}} \sqsubseteq \mathbb{L}_{\omega_1\omega}$. Por outro lado, o Exemplo 2.2.4 mostra, através dos grupos de torção, que não é o caso que $\mathbb{L}_{\omega_1\omega} \sqsubseteq \mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, o que conclui a prova. ■

Proposição 2.2.9 *O sistema semântico $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ é munido da propriedade de Löwenheim-Skolem.*

Prova. Não apresentaremos a prova, que pode ser vista em Keisler, [13], capítulo 7. ■

Proposição 2.2.10 *A lógica abstrata $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ não é $\aleph_0$-compacta.*

Prova. A prova consiste basicamente em encontrarmos um conjunto Λ de $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$-sentenças que não possui modelo, embora seus subconjuntos finitos, sim. Consideremos para cada n a fórmula $\varphi_{[n]} \in F_{\omega_1\omega}$, dada por $\exists x_1 ... \exists x_n \Big(\bigwedge\{\neg(x_i \equiv x_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ e } n \geq 2\}\Big)$. A intuição por trás de tais fórmulas é que "existem ao menos n elementos distintos"; além disso, cada $\varphi_{[n]}$ é uma sentença de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, pois é uma conjunção finita de negação de atômicas. Dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, claramente $\mathfrak{A} \models \varphi_{[n]}$ se, e somente se, a cardinalidade de $|\mathfrak{A}|$ é maior ou igual a n.

Vamos coletar todas as fórmulas acima definidas em um único conjunto Γ, isto é, $\Gamma = \{\varphi_{[n]} \mid n \geq 2\}$. Assim, para toda estrutura $\mathfrak{A}$ temos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi_{[n]}, \text{ para toda } \varphi_{[n]} \text{ em } \Gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \text{a cardinalidade de } |\mathfrak{A}| \text{ é menor ou igual a } n, \text{ para todo natural } n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{a cardinalidade de } |\mathfrak{A}| \text{ é } \aleph_0. \end{aligned}$$

Agora, consideremos que $\varphi_{[F]}$ é a fórmula $\bigvee\{\neg\varphi_{[n]} \mid n \geq 2\}$. Como a disjunção é infinita, trata-se de uma fórmula de $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ mas não de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$. Ainda, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ qualquer:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi_{[F]} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \neg\varphi_{[n]} \text{para algum natural } n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{não é o caso que } |\mathfrak{A}| \text{ tem cardinalidade maior ou igual a } n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{a cardinalidade de } |\mathfrak{A}| \text{ é finita.} \end{aligned}$$

Finalmente, consideremos o conjunto $\Lambda = \{\varphi_{[F]}\} \cup \Gamma$. Por um lado, todo subconjunto finito de Λ tem um modelo cuja cardinalidade é finita, isto é, menor do que $\aleph_0$.

Por outro lado, Λ não tem modelo, pois se o tivesse, sua cardinalidade deveria ser finita (para $\varphi_{[F]}$) e, ao mesmo tempo, igual a $\aleph_0$ (para Γ). Consequentemente, $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ não é $\aleph_0$-compacta. ■

Concluímos esta seção enfatizando que a *o sistema semântico $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ é regular, mais expressivo do que $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, munido da propriedade de Löwenheim-Skolem e não satisfaz a propriedade da $\aleph_0$-compacidade.*

2.3 A lógica de segunda ordem $\mathbb{L}_{\text{II}}$

Nesta seção analisaremos uma extensão do sistema semântico $\mathbb{L}_{\text{I}}$ obtida quando ampliamos o conjunto de variáveis da linguagem $\mathcal{L}_{\text{I}}$ e adaptamos as regras de formação de termos e de fórmulas de modo a contemplar os novos elementos. Analisaremos este novo sistema quanto às propriedades de Löwenheim-Skolem e $\aleph_0$-compacidade, além de discutirmos brevemente as complicações que a inclusão dessas novas variáveis imputam às propriedades modelo-teóricas destas novas lógicas.

Definição 2.3.1 Uma *linguagem* $\mathcal{L}_{\text{II}}$ é obtida a partir de uma linguagem $\mathcal{L}_{\text{I}}$ através da inserção de dois conjuntos de variáveis:

(a) Um conjunto $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \{\mathbf{X}^n_m \mid m,\ n \geq 1\}$ cujos elementos são as *variáveis de predicado*.

(b) Um conjunto $\mathcal{V}_{\mathcal{F}} = \{\mathbf{F}^n_m \mid m,\ n \geq 1\}$ cujos elementos são as *variáveis de função*.

O elemento $\mathbf{F}^j_i$ é a i-ésima variável de função com aridade j, enquanto $\mathbf{X}^j_i$ é a i-ésima variável de predicado j-ária. Os conjuntos $\mathcal{V}_C$, $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ são enumeráveis e, dois a dois, disjuntos.

Quando o contexto deixar claro qual a aridade da variável de predicado ou função, o índice de aridade será omitido; do mesmo modo, o índice de posição no conjunto de variáveis será omitido quando o mesmo não for relevante ou estiver claro pelo contexto. Usaremos X^j_i e F^j_i, respectivamente, como metavariáveis para $\mathbf{X}^j_i$ e $\mathbf{F}^j_i$.

Como a linguagem $\mathcal{L}_{\text{II}}$, quando comparada à linguagem $\mathcal{L}_{\text{I}}$, apresenta variáveis de função, é natural que o conjunto de termos da primeira seja uma extensão dos termos da segunda.

Definição 2.3.2 Seja Σ uma assinatura. Definimos os Σ-*termos da linguagem* $\mathcal{L}_{\text{II}}$ por:

(a) Se x é a variável individual, então x é um $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termo;

(b) Se c é o símbolo de constante em Σ, então c é um $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termo;

(c) Se $t_1, ..., t_j$ são $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termos e F^j_i é a variável de função, então $F^j_i t_1...t_j$ é $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termo;

(d) Se $t_1...t_n$ são $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termos e $f \in \Sigma$ é um símbolo de função n-ária, então $f t_1...t_n$ é $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{II}}$-termo.

O conjunto de todos os Σ-termos de $\mathcal{L}_{\text{II}}$ será denotado $\mathrm{T}^{\Sigma}_{\text{II}}$.

A definição acima deixa explícito que os termos serão as expressões construídas a partir das variáveis individuais, constantes individuais, de símbolos de função (da assinatura) aplicada aos termos e de variáveis de função aplicadas em termos. A inclusão destas últimas exige que façamos uma pequena adequação na notação do capítulo anterior. Nesta seção, $\bar{u} = (u_0, u_1, ...)$ é uma sequência, possivelmente infinita, tal que cada u_i é uma *variável individual, variável de função ou variável de predicado*; por sua vez, $t(\bar{u})$ denota um termo de $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$ cujas variáveis estão dentre os elementos de $\bar{u}$, embora possivelmente haja em $\bar{u}$ elementos que não são variáveis do termo. Por exemplo, se considerarmos $\Sigma = \{c, f\}$, com c um símbolo de constante e f um símbolo de função unária, $t(u_1, u_2)$ pode denotar qualquer um dos termos: x_0, ffx_0, $F^2x_0x_0$, F^2fcx_0, fF^2x_1c, etc.

A noção de interpretação de um termo em uma sequência de elementos de uma estrutura é análoga àquela do Capítulo 1. A exceção, aqui, é que a sequência, em vez de ser composta exclusivamente por elementos do domínio da estrutura, será composta por elementos do domínio, relações $n-$árias e funções n-árias. Vamos estabelecer esta ideia mais precisamente.

Definição 2.3.3 Sejam $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, $t = t'(\bar{u})$ um termo em $\mathrm{T}_{\text{II}}^{\Sigma}$, $\bar{a} = (a_0, a_1, ...)$ uma sequência ao menos tão longa quanto $\bar{u}$ e tal que cada a_i é um elemento das partes de $\mathfrak{A}$. A *interpretação do termo t na sequência $\bar{a}$ de* $\mathfrak{A}$ é denotada $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ e definida pelas seguintes cláusulas:

(a) Se t é a variável individual x_i, então $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ é a_i e a_i é um elemento do domínio de $\mathfrak{A}$;

(b) Se t é o símbolo de constante $c \in \Sigma$, então $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ é um elemento $c^{\mathfrak{A}}$ do domínio de $\mathfrak{A}$;

(c) Se F_i^j é variável de função e t é o termo $F_i^j t_1...t_j$, então $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ é $F^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]...t_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$;

(d) Se $f \in \Sigma$ é símbolo de função n-ária, e t é o termo $ft_1...t_n$, então $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ é $f^{\mathfrak{A}}t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]...t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$.

Estamos agora em condições de estabelecer as fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{\text{II}}$ e, em seguida, definir a relação de satisfatibilidade entre estruturas e fórmulas.

Definição 2.3.4 Seja Σ uma assinatura. As Σ-*fórmulas da linguagem* $\mathcal{L}_{\text{II}}$ são estabelecidas por:

(a) Se t_1 e t_2 são $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-termos, então $t_1 \equiv t_2$ é $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmula;

(b) Se $t_1, ..., t_n$ são $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-termos e $P \in \Sigma$ é predicado n-ário, então $P^n t_1...t_n$ é $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmula;

(c) Se $t_1, ..., t_n$ são $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-termos e X^n é variável de predicado n-ário, então $X^n t_1...t_n$ é $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmula;

(d) Se φ e ψ são $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmulas, então tanto $\neg\varphi$ quanto $\varphi \vee \psi$ também o são.

(e) Se φ é uma $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmula, tanto $\exists x(\varphi)$ quanto $\exists X_i^j(\varphi)$ e $\exists F_i^j(\varphi)$ também o são.

Quando φ é uma $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmula da forma $\exists X(\psi)$, as variáveis livres de φ são as mesmas de ψ, exceto X, que é variável ligada. O mesmo ocorre quando φ é $\exists F(\psi)$: as variáveis livres de φ são as variáveis livres de ψ menos F, que é variável ligada. Os conceitos de sentença, complexidade de fórmula e demais conceitos associados às fórmulas são definidos como em $\mathbb{L}_{\text{I}}$. O conjunto das $\mathcal{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$-fórmulas será denotado $\mathrm{F}_{\text{II}}^{\Sigma}$, enquanto o conjunto das sentenças será denotado $\mathrm{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$.

Como todo termo em $\mathrm{T}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$ é termo em $\mathrm{T}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$, a cláusulas acima deixam latente que $\mathrm{F}_{\mathrm{I}}^{\Sigma} \subseteq \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$ e, consequentemente, $\mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma} \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$. Estamos agora em condições de estabelecer uma semântica para as fórmulas em $\mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$.

Definição 2.3.5 (Semântica *full*) Sejam Σ uma assinatura, $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, $\varphi \in \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$ uma fórmula e $\bar{a}$ uma sequência de elementos de $\mathfrak{A}$. A relação *a fórmula φ é satisfeita na sequência $\bar{a}$ de $\mathfrak{A}$* é denotada $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ e definida por indução na complexidade de φ:

(a) Se φ é $t_1 \equiv t_2$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$;

(b) Se φ é $Pt_1...t_n$ então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $\left(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]\right) \in P^{\mathfrak{A}}$;

(c) Se φ é $X^n t_1...t_n$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $\left(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]\right) \in X^{n\mathfrak{A}}[\bar{a}]$;

(d) Se φ é $\neg\psi$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, não é o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \psi[\bar{a}]$;

(e) Se φ é $\psi \vee \sigma$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \psi[\bar{a}]$ ou $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \sigma[\bar{a}]$;

(f) Se φ é $\exists x(\psi(y, \bar{u}))$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ see, existe um b em $|\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \psi(y, (\bar{u}))[b, \bar{a}]$;

(g) Se φ é $\exists X^n(\psi(X^n, \bar{u}))$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ see, há uma relação R em $\mathfrak{A}$ tq. $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \psi(X^n, \bar{u}))[R, \bar{a}]$;

(h) Se φ é $\exists F^n(\psi(F^n, \bar{u}))$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \varphi[\bar{a}]$ see, há uma função f em $\mathfrak{A}$ tq. $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{II}} \psi(F^n, \bar{u}))[f, \bar{a}]$.

As noções de fórmula verdadeira, fórmula satisfatível, conjunto de fórmulas verdadeiras, consequência tautológica, etc., são análogas às do capítulo anterior.

A definição acima é conhecida como *semântica full* ou *semântica padrão* para as fórmulas de $\mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$. Outra formulação bastante presente nos tratados de lógica pode ser vista, por exemplo, em Shapiro [20] e Enderton [7] e estabelece, grosseiramente, que a relação R e a função f das cláusulas (g) e (h), na definição acima, devem ser procuradas em alguma coleção de relações (funções) da estrutura, mas não necessariamente em "em toda a estrutura". Esta formulação dá origem à semântica de Henkin para as fórmulas de $\mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$.

Definição 2.3.6 (Semântica de Henkin) Sejam Σ uma assinatura, $\mathfrak{A}$ uma Σ-estrutura, $\varphi \in \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$ uma fórmula e $\bar{a}$ uma sequência de elementos de $\mathfrak{A}$. Sejam, ainda, $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^n$ alguma coleção de relações n-árias em $\mathfrak{A}$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}^n$ uma coleção de funções n-árias em $\mathfrak{A}$. A relação *a fórmula φ é Henkin-satisfeita na sequência $\bar{a}$ de* $\mathfrak{A}$ é denotada $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{H}} \varphi[\bar{a}]$ e compartilha as características de (a) a (f) da semântica *full*. Os casos restantes são estabelecidos pelas regras:

(g') Se φ é $\exists X^n(\psi(X^n, \bar{u}))$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{H}} \varphi[\bar{a}]$ see, há uma $R \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}^n$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{H}} \psi(X^n, \bar{u}))[R, \bar{a}]$;

(h') Se φ é $\exists F^n(\psi(F^n, \bar{u}))$, então $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{H}} \varphi[\bar{a}]$ see, existe $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}^n$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathrm{H}} \psi(F^n, \bar{u}))[f, \bar{a}]$.

As noções de fórmula verdadeira, fórmula satisfatível, conjunto de fórmulas verdadeiras, consequência tautológica, etc., são análogas às da semântica padrão.

Os quantificadores existenciais possuem seu dual universal em ambas as semânticas, em que $\forall X^n(\psi)$ e $\forall F^n(\psi)$ abreviam $\neg\exists X^n(\neg\psi)$ e $\neg\exists F^n(\neg\psi)$. Ambas as relações de satisfatibilidade são facilmente estendidas para esses quantificadores, de modo uma estrutura satisfaz, $full$ ou Henkin, uma fórmula quantificada em uma sequência se, e somente se, satisfaz o dual da fórmula. Para as fórmulas com $\forall$ temos:

- $\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \forall X^n(\psi(X^n, \bar{u}))$ see, para toda relação n-ária R em $\mathfrak{A}$, vale $\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \psi(X^n, \bar{u}))[R, \bar{a}]$;
- $\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \forall F^n(\psi(F^n, \bar{u}))$ see, para toda função n-ária f em $\mathfrak{A}$ vale $\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \psi(F^n, \bar{u}))[f, \bar{a}]$;
- $\mathfrak{A} \models_{\text{H}} \forall X^n(\psi(R^n, \bar{u}))$ se, e somente se, para toda relação $R \in \mathcal{D}^n_{\mathcal{R}}$ vale $\mathfrak{A} \models_{\text{H}} \psi(X^n, \bar{u}))[R, \bar{a}]$;
- $\mathfrak{A} \models_{\text{H}} \forall F^n(\psi(F^n, \bar{u}))$ se, e somente se, para toda função $f \in \mathcal{D}^n_{\mathcal{F}}$ vale $\mathfrak{A} \models_{\text{H}} \psi(F^n, \bar{u}))[f, \bar{a}]$.

Num primeiro momento a existência de mais de uma semântica para fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{\text{II}}$ pode gerar estranheza, mas não há justificativas a esta postura, basicamente por duas razões.

Primeiro porque é usual, principalmente em sistemas semânticos menos expressivos que $\mathbb{L}_{\text{I}}$, estabelecer mais de uma semântica, algumas vezes com famílias inteiras de semânticas.

Um segundo motivo é bem forte: o próprio conjunto de fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{\text{I}}$ admite mais de uma semântica. Segundo Freire, [9], página 22,

> ...a Lógica é formulada com quantificadores, mas as formulações podem variar ligeiramente de acordo com a interpretação das variáveis livres. Há duas interpretações possíveis: a interpretação condicional das variáveis e a interpretação da generalidade...

Tais interpretações fornecem contrapartes sintáticas distintas (que não consideramos aqui) mas, ainda segundo [9], em função do Teorema das Constantes, elas são inter-interpretáveis. Assim, a existência de mais de uma semântica para um conjunto de fórmulas não é fonte de problemas; ao contrário, tais semânticas permitem uma maior riqueza conceitual aos sistemas semânticos.

Em todas os casos concretos de lógicas que tratamos até o momento, as estruturas são quádruplas formadas por domínio, coleção de constantes, coleção de relações de aridades finitas e coleção de funções de aridade finita. Entretanto, as linguagens das lógicas consideradas são distintas, com a mudança mais drástica ocorrendo em $\mathcal{L}_{\text{II}}$, com a inclusão de infinitos novos símbolos de variável. Não é, simplesmente, a inclusão de novas variáveis à linguagem que torna $\mathbb{L}_{\text{II}}$ de *segunda ordem* mas, sim, a maneira como estas novas variáveis são interpretadas na estrutura; nas anteriores, as variáveis sempre eram interpretadas como indivíduos do universo e, agora, as variáveis $\mathbf{F}^n_m$ e $\mathbf{X}^n_m$ são interpretadas como relações e funções, isto é, são interpretadas como *coleções de indivíduos*. Nesse sentido, um sistema semântico "de terceira ordem" terá em sua linguagem símbolos de variáveis que serão interpretados como coleções de funções ou relações e assim sucessivamente. As lógicas abstratas $\mathbb{L}_{\text{I}}$, $\mathbb{L}_{Q_1}$ e $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ são lógicas de primeira ordem, embora tradicionalmente apenas a primeira receba esta designação.

A maneira como as variáveis de função e relação são interpretadas levam a dificuldades hercúleas quanto ao desenvolvimento da teoria de modelos para tais lógicas. Por exemplo, a lógica de segunda ordem é considerada na Parte D em Barwise & Feferman [8] e consiste, sem dúvida, na parte mais curta e com tratamento menos geral que as anteriores, dedicadas aos sistemas $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$ e $\mathbb{L}_{\kappa\lambda}$. Outro indicativo da dificuldade em atacar através de ferramentas da teoria de modelos as lógicas de ordem superior é oferecida por Chang & Keisler, [4], que em sua edição de 1973 aponta como vigésimo quarto (e último) item no Apêndice B, *Open Problems in Classical Model Theory*:

"24. Develop the model theory of second- and higher-order logic"

Vamos verificar que o conjunto de sentenças $\mathbb{L}_{\text{II}}$ e ambas as semânticas, *full* e Henkin, formam sistemas semânticos.

Proposição 2.3.7 *Os pares* $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\text{II}}, \models_{\text{II}}\right)$ *e* $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\text{II}}, \models_{\text{H}}\right)$ *são lógicas abstratas.*

Prova. As provas para cada um dos pares são análogas e, por sua vez, podem ser feitas de modo similar ao sistema $\mathbb{L}_{\text{I}}$. A veracidade das cláusulas (a) e (b) na definição de lógica abstrata é verificadas imediatamente pelas definições. As propriedades do reduto e do isomorfismo são verificadas por indução na complexidade das fórmulas mas, como já fizemos esta prova em diversas outras oportunidades, verificaremos apenas o isomorfismo, e para apenas dois casos. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas e h um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. Por indução na complexidade dos termos em $\mathrm{T}^{\Sigma}_{\text{II}}$, verificamos que $h(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]$. Para as fórmulas:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models_{\text{II}} X^n t_1 ... t_n[\bar{a}] & \Rightarrow & \left(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]\right) \in (X^n)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\
& \stackrel{\text{iso}}{\Rightarrow} & h\left(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]\right) \in (X^n)^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}] \\
& \stackrel{\text{HI}}{\Rightarrow} & \left(t_1^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}]\right) \in (X^n)^{\mathfrak{B}}[h\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{B} \models_{\text{II}} X^n t_1 ... t_n[h\bar{a}] \\
\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \exists X \varphi(X^n, \bar{u})[\bar{a}] & \Rightarrow & \text{existe uma relação } R \text{ em } \mathfrak{A} \text{ tal que } \mathfrak{A} \models_{\text{II}} \varphi(X^n, \bar{u})[R, \bar{a}] \\
& \stackrel{\text{HI}}{\Rightarrow} & \text{exite uma relação } R \text{ em } \mathfrak{A} \text{ tal que } \mathfrak{B} \models_{\text{II}} \varphi(X^n, \bar{u})[R, h\bar{a}] \\
& \stackrel{\text{iso}}{\Rightarrow} & \text{existe uma relação } hR \text{ em } \mathfrak{B} \text{ tq. } \mathfrak{B} \models_{\text{II}} \varphi(X^n, \bar{u})[hR, h\bar{a}] \\
& \Rightarrow & \mathfrak{B} \models_{\text{II}} \exists X^n \varphi(X^n, \bar{u})[h\bar{a}].
\end{array}
$$

Para os demais casos de indução o argumento se repete; além disso, como verificamos para todas as fórmulas, as propriedades valem para todos as sentenças. ■

Não iremos mais nos referir ao sistema semântico $\left(\mathrm{L}^{\Sigma}_{\text{II}}, \models_{\text{H}}\right)$ por uma razão bem simples: este sistema herda muitas das propriedades da lógica abstrata $\mathbb{L}_{\text{I}}$. De fato, Shapiro,

[20], mostra, com nomenclatura e motivações bem distintas das nossas, quais são as propriedades preservadas. O par $\left(\mathrm{L}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}, \models_{\mathrm{II}}\right)$ será denotado $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$ e denominado *sistema semântico de segunda ordem*, *lógica abstrata de segunda ordem* ou, ainda, *lógica* $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$.

A veracidade da propriedade booleana para $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$ é imediata a partir da definição da relação de satisfatibilidade. Vamos verificar que tal lógica é, também, regular.

Proposição 2.3.8 *A lógica $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$ goza da propriedade de relativização.*

Prova. As ideias envolvidas no estabelecimento das estruturas são as mesmas utilizadas no teorema correspondente do capítulo anterior: dada uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, escolhemos um conjunto $P^{|\mathfrak{A}|}$ fechado para Σ em $\mathfrak{A}$ e, assim, temos a Σ-subestrura $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$. Agora, expandimos Σ com um novo símbolo de predicado unário P e a $\Sigma \cup \{P\}$-estrutura $\mathfrak{A}_{[P]}$ é uma expansão de $\mathfrak{A}$, cuja interpretação de P é $P^{|\mathfrak{A}|}$. Queremos mostrar que, para toda fórmula φ em $\mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma}$ existe uma $\Sigma \cup \{P\}$-fórmula $\varphi^{p} \in \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^{\Sigma\cup\{P\}}$ tal que $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathrm{II}} \varphi$ se, e somente se, $\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathrm{II}} \varphi^{p}$.

Os termos e fórmulas que são compartilhados por $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$ e $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ já foram considerados no Teorema 1.3.9. Vamos verificar os termos em que há ocorrência de variável de função: se t é $Ft_1...t_n$, então

$$\begin{aligned}(F^n t_1...t_n)^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} &= F^{n\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} t_1^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} ... t_n^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} \overset{\text{HI}}{=} F^{n\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}} ... t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}} \\ &= F^{n\mathfrak{A}_{[P]}} t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}} ... t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}}, \text{ pois } t_i^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}} = t_i^{\mathfrak{A}_{[P]}} \in P^{|\mathfrak{A}|}. \text{ Logo, } F^{n\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}|_{(P^{|\mathfrak{A}|})^n} = F^{n\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}.\end{aligned}$$

Vamos completar as cláusulas que definem as fórmulas de $\mathbb{L}_{\mathrm{II}}$:

- Se φ é $X^n t_1...t_n$, então φ^p é φ e, nestas condições, as condições do teorema são satisfeitas:
$$\begin{aligned}\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] &\Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models X^n t_1...t_n[\bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \left(t_1^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}], ..., t_n^{\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}}[\bar{a}]\right) \in X^n[\bar{a}] \\ &\overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \left(t_1^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}], ..., t_n^{\mathfrak{A}_{[P]}}[\bar{a}]\right) \in X^n[\bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models X^n t_1...t_n[\bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p.\end{aligned}$$

- Se φ é $\exists F^n \psi$, então φ^p é $\exists F^n\Big((F^n|_{P^n}) \wedge \psi^p\Big)$ e, com isso, temos:
$$\begin{aligned}\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] &\Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \exists F^n\Big(\psi(F^n, \bar{x})\Big)[\bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \text{existe uma função } f : (P^{|\mathfrak{A}|})^n \to P^{|\mathfrak{A}|} \text{ tq. } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(F^n, \bar{x})[f, \bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \text{existe } f^* : |\mathfrak{A}_{[P]}|^n \to |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tq. } f \text{ é } f^*|_{P^{|\mathfrak{A}|}} \text{ e } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(F^n, \bar{x})[f, \bar{a}] \\ &\overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \text{existe uma } f^* : |\mathfrak{A}_{[P]}|^n \to |\mathfrak{A}_{[P]}| \text{ tq. } f \text{ é } f^*|_{P^{|\mathfrak{A}|}} \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models \psi^p(F^n, \bar{x})[f, \bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \exists F^n\Big((F^n|_{P^n}) \wedge \psi(F, \bar{x})^p\Big)[\bar{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}].\end{aligned}$$

- Se φ é $\exists X^n \psi$, então φ^p é $\exists X^n\Big((X^n \subseteq P^n) \wedge \psi^p\Big)$ e, portanto:

$$
\begin{aligned}
\langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \varphi[\bar{a}] &\Leftrightarrow \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \exists X^n \psi(X^n, \bar{x})[R, \bar{a}] \\
&\Leftrightarrow \text{existe um } R^n \subseteq (P^{|\mathfrak{A}|})^n \text{ tal que } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(X^n, \bar{x})[R, \bar{a}] \\
&\Leftrightarrow \text{existe um } R^n \subseteq (P^{|\mathfrak{A}|})^n \subseteq |\mathfrak{A}_{[P]}|^n \text{ tal que } \langle P^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models \psi(R, \bar{x})[R, \bar{a}] \\
&\overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \text{existe } R^* \subseteq |\mathfrak{A}_{[P]}|^n \text{ tal que } R^n = R^*|(P^{|\mathfrak{A}|})^n \text{ e } \mathfrak{A}_{[P]} \models \psi^p(X^n, \bar{x})[R, \bar{a}] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \exists X^n \Big((X^n \subseteq P^n) \wedge \psi^p(X^n, \bar{x}) \Big)[R, \bar{a}] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}_{[P]} \models \varphi^p[\bar{a}].
\end{aligned}
$$

Com isso, encerramos a prova do teorema da relativização para $\mathbb{L}_{\text{II}}$. ■

O próximo resultado estabelecerá que, dada uma assinatura Σ e o conjunto de fórmulas $\mathrm{F}_{\text{II}}^{\Sigma}$, podemos substituir a assinatura antiga por outra relacional e construir um novo conjunto de fórmulas, equivalente ao primeiro.

Proposição 2.3.9 *A lógica $\mathbb{L}_{\text{II}}$ é munida da propriedade da substituição.*

Prova. Sejam Σ uma assinatura e $\varphi \in \mathrm{F}_{\text{II}}^{\Sigma}$. Construímos a assinatura Σ_R a partir de Σ como na Proposição 2.1.5, acrescida de mais uma cláusula: a cada variável de função $\mathcal{V}_F^n$ em Σ é acrescentado em Σ_R uma nova variável de predicado $\mathcal{V}_X^{n+1}$ em Σ_R. A estrutura $\mathfrak{A}_R$ será estabelecida como na prova do Teorema 1.3.9; precisamos apenas impor condições sobre as fórmulas termo-reduzido e as fórmulas relativizadas não contempladas no referido Teorema:

- definição da fórmula termo-reduzido φ^* associada a φ:
  - se $F \in \Sigma$ e φ é $Ft_1...t_n \equiv x$, então φ^* é $\exists x_1 ... \exists x_n \Big((t_1 \equiv x_1)^* \wedge ... \wedge (t_n \equiv x_n) \wedge \mathrm{F}x_1...x_n \Big)$
  - se $x \in \Sigma$ e e φ é $Xt_1...t_n$, então φ^* é $\exists x_1 ... \exists x_n \Big((t_1 \equiv x_1)^* \wedge ... \wedge (t_n \equiv x_n) \wedge \mathrm{X}x_1...x_n \Big)$
- se φ é Σ-fórmula, $X \in \Sigma$ é a nova variável e φ^* é $Fx_1...x_n = x$, então φ^* é $Xx_1...x_nx$.

Por simples indução na complexidade das fórmulas e termos verifica-se facilmente que $\mathfrak{A} \models_{\text{II}} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{\text{II}} \varphi^* \Leftrightarrow \mathfrak{A}_R \models_{\text{II}} \varphi_R$, para toda $\varphi \in \mathbb{L}_{\text{II}}$. Como já realizamos induções análogas diversas outras vezes, não as faremos aqui. ■

Com um argumento semelhante ao apresentado na prova da Proposição 2.2.10 podemos mostrar que a compacidade não se verifica para a lógica $\mathbb{L}_{\text{II}}$; essencialmente, precisamos substituir a fórmula $\varphi_{[F]}$ de $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ por uma fórmula $\mathrm{F}_{\text{II}}^{\Sigma}$ que seja válida, única e exclusivamente, em estruturas com domínio finito. O detalhes serão feitos na prova da próxima proposição.

Proposição 2.3.10 *A lógica $\mathbb{L}_{\text{II}}$ não é $\aleph_0$−compacta.*

Prova. Inicialmente, notemos que quando injetividade é condição suficiente à sobrejetividade de uma função $f : A \to A$, concluímos que o conjunto A é finito. Assim, se formalizarmos a expressão "toda função de mesmo domínio e contradomínio que é injetiva é, necessariamente, sobrejetiva" pela $\Sigma-$sentença $\forall f\Big(\forall x\forall y((fx \equiv fy) \to (x \equiv y)) \to \forall x\exists y(x \equiv y)\Big)$, então esta $\mathbb{L}_{\text{II}}-$sentença será válida apenas em $\Sigma-$estruturas de domínio finito. Podemos retirar a dependência de Σ sem alterar e considerar qualquer estrutura em vez das $\{f\}-$estruturas, o que pode ser efetuado através da substituição (relativização) da função $f^{\mathfrak{A}}$ pelo seu gráfico $\forall X\forall x\exists! y(Xxy)$. Denominaremos δ a sentença

$$\forall X\Big((\forall x\exists! y(Xxy)) \wedge \forall x\forall y\forall z((Xxz \wedge Xyz) \to x \equiv y) \to \forall y\exists xXxy\Big)^{1}$$

Com isso, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ temos que $\mathfrak{A} \models \delta$ se, e somente se, $|\mathfrak{A}|$ é finito. Como cada $\varphi_{[n]}$ da seção anterior era uma $\mathbb{L}_{\text{I}}-$sentença, podemos considerá-las, também, $\mathbb{L}_{\text{II}}-$sentenças e estabelecer o conjunto $\Lambda = \{\delta\} \cup \{\varphi_{[n]} \mid n \geq 2\} \subseteq \mathrm{L}_{\text{II}}^{\Sigma}$.

Finalmente, cada subconjunto finito de Λ possui modelo com cardinalidade finita, enquanto Λ, não. Logo, $\mathbb{L}_{\text{II}}$ não é $\aleph_0-$compacta. ■

Proposição 2.3.11 *A lógica $\mathbb{L}_{\text{II}}$ não goza da propriedade de Löwenheim-Skolem.*

Prova. Consideremos que $\xi(X)$ é a $\mathbb{L}_{\text{II}}-$fórmula

$$(\forall x\exists! y(Xxy)) \wedge \forall x\forall y\forall z((Xxz \wedge Xyz) \to x \equiv y) \to \forall y\exists xXxy$$

Pelos comentários tecidos na prova da Proposição 2.3.10, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, temos que $\mathfrak{A} \models \xi(X)[\bar{a}]$ se, e somente se, $X^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ é finito.

Notemos agora que, dado um conjunto A e uma relação de ordem em R em $A \times A$, para $b \in A$, a existência de apenas finitos $a \in A$ tais que aRb é condição necessaria e suficiente à enumerabilidade de A. Mas essa condição pode ser formalizada pela $\mathbb{L}_{\text{II}}-$ sentença γ^{2}:

$$\exists Y\Big(\forall x\neg Yxx \wedge \forall x\forall y\forall z((Yxy \wedge Yyz) \to Yxz) \wedge \forall x\forall y(Yxy \vee x \equiv y \vee Yyx)$$
$$\wedge \forall x\exists X(\xi(X) \wedge \forall y(Xy \leftrightarrow Yyx))\Big)$$

Assim, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \gamma$ se, e somente se, o domínio de $\mathfrak{A}$ é enumerável. Por outro lado, $\neg\gamma$ é uma $\mathbb{L}_{\text{II}}-$sentença, e, portanto, qualquer que seja a estrutura $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \neg\gamma$ se, e somente se, o domíno de $\mathfrak{B}$ é não enumerável. Consequentemente, existe uma $\mathbb{L}_{\text{II}}-$senteça que possui modelo não enumerável mas não modelo enumerável. Logo, $\mathbb{L}_{\text{II}}$ não goza da propriedade de Löwenheim-Skolem. ■

Concluímos esta seção destacando que $\mathbb{L}_{\text{II}}$ é um sistema semânticos *regular, estritamente mais expressivo do que $\mathbb{L}_{\text{I}}$ e no qual falham as propriedades de Löwenheim-Skolem e $\aleph_0$-compacidade.*

---

[1] A expressão $\forall x\exists! y\big(Xxy\big)$ formaliza a expressão "é função", enquanto o resto da expressão representa a sobrejetividade e injetividade da função. A sentença δ desempenhará em $\mathbb{L}_{\text{II}}$ papel análogo ao que $\varphi_{[F]}$ desempenhou na seção anterior.

[2] A interpretação pretendida dessa sentença é: "existe uma relação binária não reflexiva, transitiva, tricotômica e cujo domínio é um conjunto finito".

Capítulo 3

O Primeiro Teorema de Lindström

Em seu trabalho de 1969, [15], Lindström estabeleceu dois critérios de demarcação à lógica de primeira ordem. Em [16], Lindström relata as motivações por trás da descoberta desse resultado e de suas investigações acerca de quantificadores.

Nas quatro primeiras seções deste Capítulo apresentaremos uma prova minuciosa do primeiro teorema e, na última seção, enunciaremos o segundo teorema de Lindström bem como outros critérios, estabelecidos por Karp e Robinson.

No capítulo anterior consideramos três lógicas abstratas mais expressivas do que $\mathbb{L}_{\text{I}}$ e verificamos que cada uma delas falhava quanto a $\aleph_0$-compacidade ($\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$), ou a propriedade de Löwenheim-Skolem ($\mathbb{L}_{Q_1}$) ou ambas ($\mathbb{L}_{\text{II}}$). O primeiro teorema de Lindström assevera que esses resultados não são fortuitos: *não existe uma lógica regular com maior poder expressivo do que a lógica de primeira ordem e na qual valem, simultaneamente, a propriedade da $\aleph_0$-compacidade e de Löwenheim-Skolem*. Uma prova por redução ao absurdo será apresentada segundo o seguinte roteiro:

L1) Supomos que existe uma lógica abstrata regular $\mathbb{L}$ com maior poder expressivo do que a lógica de primeira ordem $\mathbb{L}_{\text{I}}$ e na qual valem as propriedades da Compacidade e de Löwenheim-Skolem. Além disso, consideramos uma sentença φ de $\mathbb{L}$ que não é logicamente equivalente a qualquer sentença de primeira ordem;

L2) Mostramos que o significado de cada sentença de $\mathbb{L}$ depende apenas de uma quantidade finita de símbolos e, para isso, utilizaremos explicitamente a propriedade da Compacidade;

L3) Em seguida, concluiremos que existem estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ que são isomorfas em redutos finitos e que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ enquanto $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\varphi$. Esse resultado é consequência do conceito de isomorfismo parcial, introduzido na primeira seção deste Capítulo;

L4) Mostraremos como obter um isomorfismo entre as estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ do passo acima com o auxílio do Teorema de Löwenheim-Skolem;

L5) Esta última asserção estabelece a existência de modelos isomorfos de $\mathbb{L}$-sentenças contraditórias e, portanto, em $\mathbb{L}$ não é válida a propriedade do isomorfismo, absurdo. Assim, concluímos que não existe uma tal lógica $\mathbb{L}$.

A primeira e a última etapa não apresentam dificuldade significativa. As outras etapas serão cuidadosamente estabelecidas em detalhes neste capítulo.

3.1 Um Teorema que depende da compacidade

O próximo teorema corresponde ao item **L2)** do roteiro apresentado acima e já temos condições de prová-lo sem a necessidade de novos conceitos. Grosseiramente, estabeleceremos que em um sistema semântico regular o significado de cada sentença depende apenas de um número finito de símbolos da linguagem.

Teorema 3.1.1 *Seja $\mathbb{L}$ uma lógica abstrata regular, $\aleph_0$-compacta, ao menos tão expressiva quanto $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ e Σ uma assinatura relacional. Nestas condições, dada qualquer sentença $\psi \in L^{\Sigma}$, existe uma sub-assinatura finita Σ_0 de Σ tal que, se duas Σ-estruturas quaisquer $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomorfas no reduto para Σ_0, então $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi$.*

Prova. Será desenvolvida em quatro etapas. Na primeira, estenderemos a linguagem para que possamos expressar um isomorfismo entre duas estruturas; na segunda etapa, obteremos uma estrutura adaptada a essa linguagem estendida que é modelo de uma fórmula da linguagem estendida e na terceira etapa mostraremos como extrair uma assinatura finita a partir da sentença da linguagem estendida. Por fim, na quarta etapa mostraremos que a assinatura finita obtida na etapa anterior satisfaz as condições deste teorema.

Etapa 1: Estendemos a assinatura original com dois novos predicados unários U e V, um novo símbolo de função unária f e obtemos, assim, a assinatura $\Sigma' = \Sigma \cup \{U, V, f\}$. Agora, consideramos o conjunto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6\}$, em que:

- γ_1 é a sentença $\exists x Ux$;
- γ_2 é a sentença $\exists x Vx$;
- γ_3 é a sentença $\forall x(Ux \to Vfx)$;
- γ_4 é a sentença $\forall y\big(Vy \to \exists x(Ux \wedge fx \equiv y)\big)$;
- γ_5 é a sentença $\forall x \forall y\big((Ux \wedge Vy \wedge fx \equiv fy) \to x \equiv y\big)$;
- γ_6 é a sentença $\forall x_1 ... \forall x_n\big((Ux_1 \wedge ... \wedge Ux_n) \to (Px_1...x_n \leftrightarrow Pfx_1...fx_n)\big)$ e $P \in \Sigma$ é símbolo de predicado n-ário.

A assinatura inicial Σ é relacional e $\mathbb{L}$ é uma lógica regular; assim, poderíamos substituir o símbolo de função f por um novo predicado binário. No entanto, como desejamos deixar latente a intuição que motiva as fórmulas com o símbolo f, não o faremos. A despeito disso, consideraremos a assinatura Σ' relacional[1].

Observemos que Γ é um conjunto de Σ'-sentenças que caracteriza estruturas isomorfas. Além disso, se considerarmos uma Σ'-estrutura $\mathfrak{A}$ que é modelo de Γ:

- γ_1 garante que a U-parte de $\mathfrak{A}$ é não vazio e podemos definir a subestrutura $\langle U^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$;
- γ_2 estabelece para V o mesmo que γ_1 garante para U;
- γ_3 estabelece que f é uma função de $U^{|\mathfrak{A}|}$ em $V^{|\mathfrak{A}|}$;
- A conjunção entre γ_3 e γ_4 assevera que f é sobrejetiva;
- A conjunção entre γ_3 e γ_5 assevera que f é injetiva;
- Com a conjunção entre $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ e γ_6 obtemos que f é um isomorfismo entre subestruturas de $\mathfrak{A}$ geradas por $U^{|\mathfrak{A}|}$ e $V^{|\mathfrak{A}|}$.

Com isso, concluímos a primeira etapa.

Etapa 2: Vamos adotar a seguinte conveção: se $\mathbb{L}_{\mathrm{I}} \sqsubset \mathbb{L}$ e α é uma sentença de $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$, então α^* é uma sentença de $\mathbb{L}$ logicamente equivalente a α. Agora consideraremos o conjunto $\Gamma^* = \{\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma\}$ e vamos *supor* que $\mathfrak{A}$ é uma Σ-estrutura tal que $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \Gamma^*$. Consequentemente, pela definição de equivalência lógica entre sentenças, $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \Gamma$ e, portanto, $U^{|\mathfrak{A}|} \neq \emptyset$, $V^{|\mathfrak{A}|} \neq \emptyset$ e $f^{|\mathfrak{A}|} \upharpoonright U^{|\mathfrak{A}|}$ é um isomorfismo de $\langle U^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$ em $\langle V^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$.

Como $\mathbb{L}$ é uma lógica abstrata, vale a propriedade do isomorfismo; além disso $\langle U^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$ e $\langle V^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}}$ são isomorfas. Logo, para a fórmula ψ da hipótese temos que $\langle U^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi$ se, e somente se, $\langle V^{|\mathfrak{A}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi$. Pela regularidade de $\mathbb{L}$ vale a propriedade da relativização e, portanto, $\mathfrak{A}_{[U]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_{[V]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$.

Mas como $\mathfrak{A}_{[U]}$ e $\mathfrak{A}_{[V]}$ são redutos de $\mathfrak{A}_{[U,V,f]}$, a Propriedade do Reduto nos permite escrever que $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ se, e somente se, $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$. Por fim, como por hipótese $\mathbb{L}$ admite a propriedade booleana, $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$, o que encerra a Etapa 2.

Etapa 3: Na etapa anterior *supusemos* que $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \Gamma^*$ e *concluímos* que $\mathfrak{A}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$. Consequentemente, $\Gamma^* \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$; mas como $\mathbb{L}$ é $\aleph_0$-compacta, inferimos que existe um Γ_0^* finito tal que $\Gamma_0^* \subseteq \Gamma^*$ e $\Gamma_0^* \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$.

Uma vez que Γ_0^* é um subconjunto finito de sentenças de Γ^*, temos um conjunto finito Γ_0 de sentenças de primeira ordem logicamente equivalentes as sentenças de Γ_0^*. Assim, há em Γ_0 finitas sentenças, cada uma delas com um número finito de símbolos; logo, podemos

[1]Passaremos por essa mesma situação na próxima seção e lá também cometeremos o abuso de considerar uma assinatura com um símbolo de função como relacional. Mais uma vez, não vemos problema formal nessa atitude, uma vez que as lógicas em análise são regulares e, portanto, são munidas da propriedade da substituição.

extrair de Γ_0 uma assinatura finita Σ_0 composta pelos símbolos que ocorrem nos membros de Γ_0. Por fim, como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, temos que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ e, com isso, encerramos essa etapa.

Etapa 4: Falta verificarmos que a assinatura Σ_0 obtida na etapa anterior satisfaz o teorema, isto é, que duas estruturas isomorfas em redutos finitos satisfazem as mesmas sentenças. Para isso, supomos que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são Σ-estruturas e g é um isomorfismo entre $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}$ e $\mathfrak{B}|_{\Sigma_0}$. Caso $|\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}| \neq \emptyset$, consideramos uma estrutura $\mathfrak{C}$ tal que $|\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{C}| = \emptyset$ e $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$. Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar $|\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}| = \emptyset$.

Por fim, consideremos uma Σ'-estrutura $\mathfrak{D}$ tal que:

- $|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{A}| \cup |\mathfrak{B}|$;
- $P^{\mathfrak{D}} = P^{\mathfrak{A}} \cup P^{\mathfrak{B}}$, para todo símbolo de predicado n-ário $P \in \Sigma'$;
- A U-parte de $\mathfrak{D}$ é $|\mathfrak{A}|$ e a V-parte de $\mathfrak{D}$ é $|\mathfrak{B}|$;
- $f^{\mathfrak{D}}$ é tal que $f^{\mathfrak{D}} \upharpoonright |\mathfrak{A}| = g$

Pela construção de $\mathfrak{D}$ temos que $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}_I} \Gamma_0$; como Γ_0 é logicamente equivalente a Γ_0^*, segue que $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \Gamma_0^*$.

Mas, na Etapa 3, vimos que $\Gamma_0^* \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$ e, assim, $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u \leftrightarrow \psi^v$.

Pela propriedade booleana, $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ se, e somente se, $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$.

Considerando a propriedade do reduto, $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ se, e somente se, $\mathfrak{D}_{[U]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ e, com igual razão, $\mathfrak{D}_{[U,V,f]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$ se, e somente se, $\mathfrak{D}_{[V]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$. Logo, $\mathfrak{D}_{[U]} \models_{\mathbb{L}} \psi^u$ se, e somente se, $\mathfrak{D}_{[V]} \models_{\mathbb{L}} \psi^v$. Pela propriedade de relativização, $\langle U^{|\mathfrak{D}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi$ se, e somente se, $\langle V^{|\mathfrak{D}|}\rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi$. Mas $\langle U^{|\mathfrak{D}|}\rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ e $\langle V^{|\mathfrak{D}|}\rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$ e, portanto, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi$. ■

3.2 Um Teorema que depende de um m-isomorfismo

Embora a existência de um isomorfismo entre duas estruturas seja condição suficiente à equivalência elementar, a recíproca não é verdadeira; entretanto, podemos enfraquecer as condições de isomorfismo entre estruturas e obter novas relações interessantes entre estruturas, além de tornar a equivalência elementar condição suficiente a esta versão mais fraca de isomorfismo. Iniciamos este processo através do conceito de isomorfismo parcial.

Definição 3.2.1 Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas e $P, f, c \in \Sigma$ símbolos, respectivamente, de predicado n-ário, função n-ária e constante. Uma função $p : X \to Y$ é um *isomorfismo parcial de* $\mathfrak{A}$ *em* $\mathfrak{B}$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, $Y \subseteq |\mathfrak{B}|$ *e* p *é injetiva;*
(b) $p(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$;
(c) $(a_1, ..., a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \big(p(a_1), ..., p(a_n)\big) \in P^{\mathfrak{B}}$;
(d) $p(f^{\mathfrak{A}} a_1 ... a_n) = f^{\mathfrak{B}}\big(p(a_1) ... p(a_n)\big)$.

A definição acima deixa latente que um isomorfismo parcial p pode ser obtido a partir de um isomorfismo h tomando-se o domínio X de p como um subconjunto do domínio de h e $p = h \upharpoonright X$. Mas, principalmente, podemos construir isomorfismos parciais mesmo entre estruturas não isomorfas, como ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 3.2.2 Sejam $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \oplus)$ a estrutura dos números naturais com a soma usual, $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ a estrutura dos números reais com soma e produto usuais, $\mathbb{P}$ o conjunto dos naturais pares, $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e a função $p : \mathbb{P} \to \mathbb{Z}$ tal que $p(x) = 2 \cdot x$. Então, p é um isomorfismo de parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

De fato, p é injetiva e, $p(x_1 \oplus x_2) = 2 \cdot (x_1 + x_2) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = p(x_1) + p(x_2)$.

Para que duas estruturas sejam isomorfas, basta que exista um isomorfismo entre elas; para que elas sejam parcialmente isomorfas, exigiremos "algo a mais" mas, antes de estabelecer a definição, fixaremos a seguinte notação: $q \supset p$ denota que p e q são funções, $dom(p) \subset dom(q)$ e que $p = q \restriction dom(p)$. Lemos $q \supset p$ como *q estende p*.

Definição 3.2.3 Duas Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são *parcialmente isomorfas*, denotado $\mathfrak{A} \overset{p}{\cong} \mathfrak{B}$, quando existe um conjunto I que goza das seguintes propriedades:

(a) I é não vazio e, se $p \in I$, então p é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$;

(b) Para todo $p \in I$ e todo $a \in |\mathfrak{A}|$, existe um $q \in I$ tal que $q \supset p$ e $a \in dom(q)$;

(c) Para todo $p \in I$ e todo $b \in |\mathfrak{B}|$, existe um $q \in I$ tal que $q \supset p$ e $b \in img(q)$.

O conjunto I *define* um isomorfismo parcial entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ quando I goza destas propriedades.

A condição (b) na definição acima é conhecida como "propriedade do vai", enquanto a condição (c) é a "propriedade do vem". Deste modo, estruturas parcialmente isomorfas são munidas da "*propriedade do vai-e-vem*" [2].

Grosseiramente, toda vez que aplicamos a "propriedade do vai" ampliamos o domínio de um isomorfismo parcial entre duas estruturas, enquanto ao aplicarmos a "propriedade do vem", ampliamos o conjunto imagem do isomorfismo parcial; assim, podemos pensar em extensões de isomorfismos parciais como aproximações sucessivas de um isomorfismo. A Proposição 3.2.5 estabelecerá sob quais condições essa aproximação isomorfismos parciais estabelece um isomorfismo.

O próximo exemplo é um caso clássico da aplicação da "propriedade do vai-e-vem" e, em virtude da grande importância da mesma, iremos apresentá-la em detalhes.

Exemplo 3.2.4 (Cantor) Quaisquer dois modelos do conjunto de sentenças que caracteriza uma ordem linear enumerável, densa e sem ponto final são isomorfos.

Prova. A assinatura necessária para caracterizar a ordem linear densa sem ponto final é composta de um único símbolo de predicado binário $<$, ou seja, $\Sigma = \{<\}$. Para que uma estrutura seja modelo da ordem linear densa sem ponto final, basta que ela seja modelo do conjunto constituído das seguintes sentenças:

Ordem linear: $\forall x(\neg(x < x))$, $\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z)$ e $\forall x \forall y(x < y \vee x \equiv y \vee y < x)$;

[2] Em inglês, essa propriedade é conhecida como a *Back-and-forth Property.*

Densidade: $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$;

Sem ponto final: $\forall x \exists y(x < y)$ e $\forall x \exists y(y < x)$.

Agora, consideramos duas Σ-estruturas enumeráveis $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ que são modelos enumeráveis das sentenças acima e ordenamos os elementos de $|\mathfrak{A}|$ e $|\mathfrak{B}|$, respectivamente, em $a_0, a_1, ...$ e $b_0, b_1, ...$

Nossa estratégia consiste em construir uma sequência $f_n : A_n \rightarrow B_n$, $n \in \mathbb{N}$, tal que:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq |\mathfrak{A}| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B_n \subseteq |\mathfrak{B}| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$;
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n é um isomorfismo parcial de $\langle A_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ em $\langle B_n \rangle_{\mathfrak{B}}$;
- O conjunto de isomorfismos parciais é ordenado pela inclusão, isto é, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se $m < n$, então $f_m \subseteq f_n$;
- Se $x, y \in A_n$ e $x < y$, então $f_n(x) < f_n(y)$.

Com isso, $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ será um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. A construção será em três classes de estágios: no estágio zero, temos apenas conjuntos vazios; nos estágios ímpares, a construção "Vai" estende o domínio de f, enquanto nos estágios pares a construção "vem" estende o contradomínio de f.

Estágio zero: tomamos $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$.

Estágios ímpares: construímos os passos ímpares das sequências (f_n), (A_n) e (B_n), de tal modo que o conjunto A_{2n+1} sempre contenha o elemento a_n. Mas há apenas duas possibilidades para a_n com relação ao conjunto A_{2n}:

- $a_n \in A_{2n}$. Neste caso, basta manter tudo como está, isto é, tomamos $A_{2n+1} = A_{2n}$, $B_{2n+1} = B_{2n}$ e $f_{2n+1} = f_{2n}$.
- $a_n \notin A_{2n}$. Neste caso, para incluir a_n no domínio de f_{2n} precisamos de um $b \in (|\mathfrak{B}| - B_{2n})$ tal que, para todo $x \in A_{2n}$ tenhamos $x < a_n \Leftrightarrow f_{2n}(x) < b$. Mas como $\mathfrak{A}$ é modelo das sentenças de **Ordem**, há apenas 3 possibilidades para a_n:
  - a_n é maior do que todo elemento de A_{2n}. Como B_{2n} é finito e $\mathfrak{B}$ é modelo da primeira sentença de **Sem ponto final**, podemos encontrar um $b \in |\mathfrak{B}|$ maior do que todo elemento de B_{2n}. Com isso, para todo $x \in A_{2n}$, se $x < a_n$ então $f_{2n}(x) < f_{2n}(a_n) = b$.
  - a_n é menor do que todo elemento de A_{2n}. Como B_{2n} é finito e $\mathfrak{B}$ é modelo da segunda sentença de **Sem ponto final**, podemos encontrar um $b \in |\mathfrak{B}|$ menor do que todo elemento de B_{2n}. Com isso, para todo $x \in A_{2n}$, se $a_n < x$ então $b = f_{2n}(a_n) < f_{2n}(x)$.

– a_n está entre dois elementos de A_{2n}. Neste caso, exisadem $x, y \in A_{2n}$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $x < a_n < y$. Como $x < y$ e, tanto $f_{2n}(x)$ como $f_{2n}(y)$ foram obtidos a partir de etapas anteriores de construção, $f_{2n}(x) < f_{2n}(y)$. Por fim, como $\mathfrak{B}$ é modelo de **Densidade**, podemos escolher um $b \in (|\mathfrak{B}| - B_{2n})$ tal que $f_{2n}(x) < b < f_{2n}(y)$. Assim, se $x < a_n < y$, então $f_{2n}(x) < f_{2n}(a_n) = b < f_{2n}(y)$, como queríamos.

Portanto, se $a_n \notin A_{2n}$ tomamos $A_{2n+1} = A_{2n} \cup \{a_n\}$, $B_{2n+1} = B_{2n} \cup \{b\}$ e $f_{2n+1} : A_{2n+1} \to B_{2n+1}$ tal que $f_{2n+1}(a_n) = b$.

Estágios pares: são estabelecidos de modo análogo aos ímpares; construímos os passos pares das sequências (f_n), (A_n) e (B_n), de tal modo que o conjunto B_{2n+2} sempre contenha o elemento b_n. E há apenas duas possibilidades para b_n com relação ao conjunto B_{2n+2}:

- $b_n \in B_{2n+1}$. Neste caso, basta manter tudo como está: $A_{2n+2} = A_{2n+1}$, $B_{2n+2} = B_{2n+1}$ e $f_{2n+2} = f_{2n+1}$.
- $b_n \notin B_{2n+1}$. Novamente, precisamos analisar três casos e, no primeiro, b_n é o maior do que todo elemento de B_{2n+1}. Como A_{2n+1} é finito e $\mathfrak{A}$ é modelo da segunda sentença de **Sem ponto final**, podemos encontar um $a \in |\mathfrak{A}|$ maior do que todo elemento de A_{2n+1}. Com isso, para todo $x \in A_{2n+1}$, se $x < a$ então $f_{2n+1}(x) < f_{2n+1}(a) = b_n$. Os outros dois casos também estão em analogia direta com os passos ímpares. Portanto, se $b_n \notin B_{2n+1}$ tomamos $A_{2n+2} = A_{2n+1} \cup \{a\}$, $B_{2n+2} = B_{2n+1} \cup \{b_n\}$ e $f_{2n+2} : A_{2n+2} \to B_{2n+2}$ tal que $f_{2n+2}(a) = b_n$.

Com isso, tomamos $\mathfrak{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ e $f = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} f_n$ é isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. ■

No exemplo acima, a partir de isomorfismos parciais obtemos um isomorfismo entre duas estruturas, mas isso nem sempre é o caso; em particular, isomorfismos parciais não podem ser estendidos a um isomorfismo entre estruturas de domínio não enumerável.

Proposição 3.2.5 *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas. Então:*

(a) Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomorfas, então são parcialmente isomorfas.

(b) Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são parcialmente isomorfas e de domínios enumeráveis, então são isomorfas.

Prova. A prova do item (a) é direta e, a do item (b), inspirada no exemplo anterior.

(a) Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomorfas, então existe um isomorfismo $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Assim, basta tomarmos $I = \{h\}$ e, consequentemente, I define um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

(b) Construiremos um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ a partir de uma família de isomorfismos parciais munidos da "propriedade de vai-e-vem". Por hipótese, $|\mathfrak{A}|$ e $|\mathfrak{B}|$ são enumeráveis e podemos consider $|\mathfrak{A}| = \{a_0, a_1, ...\}$ e $|\mathfrak{B}| = \{b_0, b_1, ...\}$. Como no exemplo anterior, construiremos o isomorfismo a partir de três classe de estágios: (i) no estágio zero, $p_0 = \emptyset$, (ii) nos estágios ímpares, $n = 2m + 1$ e tomamos $a_n \in dom(p_n)$ e (iii) nos estágios pares, $n = 2m + 2$ e tomamos $b_n \in img(p_n)$. Com isso, $p_n \subseteq p_{n+1}$. Agora, basta observarmos que $p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, $dom(p) = |\mathfrak{A}|$ e $img(p) = |\mathfrak{B}|$. Consequentemente, p é um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. ■

Até o momento temos duas maneiras de "comparar" estruturas adaptadas a uma linguagem, os isomorfismos e os isomorfismos parciais. No entanto, para os resultados que pretendemos provar, a primeira concepção é muito forte e, a segunda, muito fraca. Por isso, definiremos um tipo intermediário de isomorfismo.

Definição 3.2.6 Duas Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são *m-isomorfas* quando existe uma sequência $I_0, I_1, ...I_{m-1}$ de conjuntos não vazios de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, munidos da "propriedade do vai-e-vem". $\mathfrak{A} \overset{m}{\cong} \mathfrak{B}$ denota que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são m-isomorfas. Quando duas estruturas são m-isomorfas dizemos também que há um *isomorfismo de tipo m* entre elas.

O objetivo central desta seção é enunciar e provar o resultado correspondente ao item **L3)** do roteiro apresentado no início do presente capítulo. Para isso, definiremos uma família de fórmulas e mostraremos que cada um dos membros dessa família é uma fórmula de $\mathbb{L}_I$; posteriormente, utilizaremos estas fórmulas para definir um isomorfismo de tipo m entre estruturas adequadas aos nossos propósitos[3].

Notação 3.2.7 Sejam Σ_0 uma assinatura relacional finita, $\mathfrak{B}$ uma Σ_0-estrutura e $\overline{b_r} = (b_0, ..., b_{r-1}) \in |\mathfrak{B}|^r$, para todo $r > 0$. Se $b \in |\mathfrak{B}|$ e, para $i \leq r$, temos $b \neq b_i$, então $\overline{b_r}b$ denota $(b_0, ..., b_{r-1}, b)$.

Definição 3.2.8 Definimos o conjunto Φ_r por

$$\Phi_r = \{\varphi \mid \varphi \text{ é um } \Sigma_0\text{-literal com, no máximo, } r \text{ variáveis livres}\}.$$

Exemplo 3.2.9 Consideremos $\Sigma = \{P, Q, R\}$ tal que P, Q e R são símbolos de predicado, respectivamente, unário, binário e ternário. Nestas condições,

- $\Phi_0 = \emptyset$, pois não há algum Σ-literal fechado;
- $\Phi_1 = \{Px, \neg Px\}$;
- $\Phi_2 = \{Px, \neg Px, Qxy, \neg Qxy\}$;
- $\Phi_3 = \{Px, \neg Px, Qxy, \neg Qxy, Rxyz, \neg Rxyz\}$;

[3] A maior parte dos resultados dessa seção diz respeito, exclusivamente, às sentenças de $\mathbb{L}_I$; entretanto, são importantes ao tratamento abstrato que estamos desenvolvendo, pois permitirão generalizar resultados e fornecerão contraparte intuitiva para lógicas abstratas mais expressivas do que a $\mathbb{L}_I$.

- $\Phi_n = \Phi_3$, para todo $n \geq 3$.

Proposição 3.2.10 *O conjunto Φ_r é finito, para todo r natural.*

Prova. Por indução sobre r. Para $r = 0$, Φ_0 é o conjunto de Σ_0-literais com 0 variáveis livres e, assim, $\varphi \in \Phi_0$ se, e somente se, φ é um literal fechado. Como a assinatura de Σ_0 só possui símbolos de relação, não existem tais φ e, portanto, $\Phi_0 = \emptyset$ é finito. Agora, suponha que Φ_r é um conjunto finito; então Φ_{r+1} é o conjunto das Σ_0-fórmulas com, no máximo, $r+1$ variáveis livres. Logo, $\Phi_{r+1} \subseteq \Phi_r \cup \{\varphi \mid \varphi$ é um literal com exatamente $r+1$ variáveis livres$\}$. Por hipótese, Φ_r é finito e como Σ_0 é finito, há apenas finitos literais com exatamente $r+1$ variáveis livres. Logo, Φ_{r+1} é finito. ■

Podemos, agora, tomar o conjunto Γ_r das fórmulas de Φ_r que são satisfatíveis em $\bar{b}_r$ de $\mathfrak{B}$, isto é, o conjunto

$$\Gamma_r = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi_r \text{ e } \mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}_r]\}.$$

Vamos denotar a conjunção das fórmulas em Γ por $\bigwedge \Gamma$; como, por definição, $\Gamma_r \subseteq \Phi_r$ para todo r, temos que Γ_r é um conjunto finito e, como a conjunção finita de $\mathbb{L}_\mathrm{I}$-fórmulas é uma $\mathbb{L}_\mathrm{I}$-fórmula, concluímos que $\bigwedge \Gamma_r$ é uma fórmula em $\mathrm{F}_\mathrm{I}^\Sigma$.

Definição 3.2.11 Seja $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ uma fórmula em $\mathrm{F}_\mathrm{I}^\Sigma$, definida indutivamente por

$$\begin{cases} \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r} & \text{é a fórmula} \quad \bigwedge \Gamma_r; \\ \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r} & \text{é a fórmula} \quad \Big(\forall x_r \bigvee \{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b} \mid b \in \mathfrak{B}\}\Big) \wedge \Big(\bigwedge \{\exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b} \mid b \in \mathfrak{B}\}\Big). \end{cases}$$

Quando o contexto deixar claro que $b \in \mathfrak{B}$, escreveremos $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ em vez de $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b} \mid b \in \mathfrak{B}\}$.

Exemplo 3.2.12 Consideremos $\mathfrak{B}$ tal que $|\mathfrak{B}| = \mathbb{N}$ e os conjuntos do Exemplo 3.2.9 tais que:

- $\mathfrak{B} \models Px_0[\bar{b}]$ se, e somente se, b_0 é par;
- $\mathfrak{B} \models Qx_0x_1[\bar{b}]$ se, e somente se, b_0 é menor do que b_1;
- $\mathfrak{B} \models Rx_0x_1x_2[\bar{b}]$ se, e somente se, b_1 está entre b_0 e b_2.

Definiremos as fórmulas $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}$ para $n = 0, 1, 2$ em $\bar{b}_0 = (2)$, $\bar{b}_1 = (2, 9)$ e $\bar{b}_2 = (2, 9, 7)$.

$$\begin{array}{llll} n = 0 & \Rightarrow & \varphi^0_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} \quad \bigvee \{\varphi \in \Phi_1 \mid \mathfrak{B} \models \varphi[(2)]\} \\ & \Rightarrow & \varphi^0_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} \quad Px_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} n = 1 & \Rightarrow & \varphi^1_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} \quad \Big(\forall x_0 \bigvee \{\varphi^0_{\mathfrak{B},(2,9)}\}\Big) \wedge \Big(\bigwedge \{\exists x_0 \varphi^0_{\mathfrak{B},(2,9)}\}\Big) \\ & \text{mas,} & \varphi^0_{\mathfrak{B},(2,9)} & \text{é} \quad \bigwedge \{\varphi \in \Phi_2 \mid \mathfrak{B} \models \varphi[(2,9)]\} \\ & \Rightarrow & \varphi^0_{\mathfrak{B},(2,9)} & \text{é} \quad Px_0 \wedge Qx_0x_1 \\ & \text{logo,} & \varphi^1_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} \quad \Big(\forall x_0 \bigvee \{Px_0 \wedge Qx_0x_1\}\Big) \wedge \Big(\bigwedge \{\exists x_0 (Px_0 \wedge Qx_0x_1)\}\Big) \\ & \Rightarrow & \varphi^1_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} \quad \forall x_0 (Px_0 \wedge Qx_0x_1) \wedge \exists x_0 (Px_0 \wedge Qx_0x_1). \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrcl}
n=2 & \Rightarrow\quad \varphi^2_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} & \Big(\forall x_0 \bigvee\{\varphi^1_{\mathfrak{B},(2,9)}\}\Big) \wedge \Big(\bigwedge\{\exists x_0 \varphi^1_{\mathfrak{B},(2,9)}\}\Big) \\
 & \text{mas,}\quad \varphi^1_{\mathfrak{B},(2,9)} & \text{é} & \Big(\forall x_1 \bigvee\{\varphi^0_{(2,9,7)}\}\Big) \wedge \Big(\bigwedge\{\exists x_1 \varphi^0_{(2,9,7)}\}\Big) \\
 & \Rightarrow\quad \varphi^1_{\mathfrak{B},(2,9)} & \text{é} & \Big(\forall x_1 \bigvee\{Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2\}\Big)\wedge \\
 & & & \wedge\Big(\bigwedge\{\exists x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2)\}\Big) \\
 & \Rightarrow\quad \varphi^1_{\mathfrak{B},(2,9)} & \text{é} & \forall x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2) \\
 & \text{logo,}\quad \varphi^2_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} & \Big(\forall x_0 \bigvee\{\forall x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2)\}\Big)\wedge \\
 & & & \wedge\Big(\bigwedge\{\exists x_0(\forall x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2))\}\Big) \\
 & \Rightarrow\quad \varphi^2_{\mathfrak{B},(2)} & \text{é} & \forall x_0 \forall x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2)\wedge \\
 & & & \wedge \exists x_0 \forall x_1(Px_0 \wedge Qx_0x_1 \wedge \neg Rx_0x_1x_2)
\end{array}
$$

Agora, há alguns fatos relativos a esta família de fórmulas que são provados por indução sobre n e necessários às etapas seguintes.

Proposição 3.2.13 *Seja Σ_0 uma assinatura relacional finita. Podemos afirmar que:*

(a) Para cada n, o conjunto $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r} \mid \mathfrak{B}$ é Σ-estrutura e $\bar{b}_r \in \mathfrak{B}\}$ é finito;

(b) Cada $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é uma fórmula em $L^{\Sigma_0}_{\text{I}}$;

(c) Cada $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ possui, no máximo, r variáveis livres;

(d) Se $\mathfrak{B}$ é uma Σ_0-estrutura, então $\mathfrak{B} \models \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[b_r]$.

Prova. As provas são por indução em n:

(a) Para $n = 0$, como $\Gamma_r \subseteq \Phi_r$, pela Proposição 3.2.10, Γ_r é finito e, portanto, por definição $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ também o é. Por hipótese de indução, $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}\}$ é finito. Logo, tanto $\bigvee\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}\}$ quanto $\bigwedge\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}\}$ são finitos e, portanto, por definição $\{\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}\}$ é finito.

(b) Para $n = 0$ é imediato, pois $\bigwedge \Gamma_r$ é fórmula em $L^{\Sigma_0}_{\text{I}}$, portanto, $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ também o é. Agora, supondo que $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é uma $\mathbb{L}_{\text{I}}$-fórmula para todo r, pela hipótese de indução, $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ é finito e, portanto, também são finitos os conjuntos $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ e $\{\exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$. Logo, $\forall x_r \bigvee\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ é uma fórmula em $L^{\Sigma_0}_{\text{I}}$, assim como $\bigwedge\{\exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$. Portanto, $\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é uma Σ_0-fórmula em $L^{\Sigma_0}_{\text{I}}$.

(c) Para $n = 0$ é imediato, pela definição de $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$. Agora, vamos supor que $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ possui no máximo r variáveis livres; assim, por definição, cada fórmula no conjunto $\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ possui, no máximo, $r+1$ variáveis livres. Consequentemente, tanto $(\forall x_r \bigvee\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\})$ quanto $\bigwedge\{\exists x_r\ \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}$ possuem, no máximo, r variáveis livres. Portanto, $\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é uma fórmula com no máximo r vari-áveis livres.

(d) Para $n = 0$ e $r > 0$ é imediato pela definição. Agora, vamos supor que $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}}[\bar{b}_r]$; como $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ possui posto n, $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}b'}[\bar{b}_r, b']$, para todo b' em $|\mathfrak{B}|$. Assim, $\mathfrak{B} \models \bigvee\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b'} \mid b \in |\mathfrak{B}|\}[\bar{b}_r b']$ e $\mathfrak{B} \models \exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b'}[\bar{b}_r b']$. Consequentemente, $\mathfrak{B} \models \forall x_r \bigvee\{\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b'} \mid b' \in |\mathfrak{B}|\}[\bar{b}_r b']$ e $\mathfrak{B} \models \bigwedge\{\exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b'} \mid b' \in |\mathfrak{B}|\}$ e, portanto, $\mathfrak{B} \models \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}}$. ■

Uma intuição por trás das fórmulas $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é que podemos considerar $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ como uma fórmula que é satisfatível em uma subestrutura de $\mathfrak{B}$ gerada por $\bar{b}_r$. Analogamente, $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ será uma fórmula satisfatível em uma subestrutura de $\mathfrak{B}$, gerada por $\bar{b}_r$ *acrescido* de n novos elementos de $\mathfrak{B}$, isto é, satisfatível em $\langle b_0, ...b_{r-1}, b_r, ..., b_{r+n-1}\rangle_{\mathfrak{B}}$.

Tal intuição justifica considerarmos também as fórmulas da forma $\varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$. Claramente, para $n = 0$, a fórmula $\varphi^0_{\mathfrak{A},\emptyset}$ não está definida, pois $\bigwedge \Gamma_0 = \emptyset$. No entanto, se considerarmos $n > 0$, então podemos admitir sem problemas as fórmulas $\varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$ que não possuem variáveis livres em virtude do item (b). Assim, pelo item (a), $\varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$ são Σ_0-*sentenças em* $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$.

Agora, daremos um passo muito importante; vamos aplicar as fórmulas definidas anteriormente para estabelecer um m-isomorfismo entre duas estruturas; para isso, precisamos essencialmente enunciar e provar as próximas três Proposições.

Proposição 3.2.14 *Sejam Σ_0 uma assinatura relacional finita, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ_0-estruturas, $\varphi(\bar{x}_r)$ uma Σ_0-fórmula atômica, $X = \{a_0, ..., a_{r-1}\} \subseteq |\mathfrak{A}|$ e $Y = \{b_0, ..., b_{r-1}\} \subseteq |\mathfrak{B}|$. Nestas condições, são equivalentes as asserções:*

(a) $p : X \to Y$, tal que $p(a_i) = b_i$, é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$;

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}_r]$ se, e somente se, $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}_r]$.

Prova. $((a) \Rightarrow (b))$ Como φ é atômica, temos duas possibilidades:

- φ é $x_i \equiv x_j$, para $i, j < r$. Então $\mathfrak{A} \models (x_i \equiv x_j)[\bar{a}_r] \Leftrightarrow a_i = a_j \overset{\Leftarrow \text{inj}}{\Leftrightarrow} p(a_i) = p(a_j) \Leftrightarrow b_i = b_j \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (x_i \equiv x_j)[\bar{b}_r]$.

- φ é $P(x_{i_1}, ...x_{i_n})$, com $P \in \Sigma_0$ um símbolo relacional n-ário e $i_j < r$ para $j < n$. Então, $\mathfrak{A} \models P(x_{i_1}, ...x_{i_n})[\bar{a}_r] \Leftrightarrow (a_{i_1}, ...a_{1_n}) \in P^{\mathfrak{A}} \overset{\Leftarrow \text{inj}}{\Leftrightarrow} (p(a_{i_1}), ...p(a_{i_n})) \in P^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(x_{i_1}, ...x_{i_n})[\bar{b}_r]$.

$((b) \Rightarrow (a))$ p é injetiva. De fato, $p(a_i) = p(a_j) \Rightarrow b_i = b_j \Rightarrow \mathfrak{B} \models (x_i \equiv x_j)[\bar{b}_r] \overset{\text{hip}}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \models (x_i \equiv x_j)[\bar{a}_r] \Rightarrow a_i = a_j$. Além disso, P satisfaz a condição de isomorfismo: $(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models P(x_{i_1}, ..., x_{i_n})[\bar{a}_r] \overset{\text{hip}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models P(x_{i_1}, ..., x_{i_n})[\bar{b}_r] \Leftrightarrow (b_{i_1}, ..., b_{i_n}) \in P^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow (p(a_{i_1}), ...p(a_{i_n})) \in P^{\mathfrak{B}}$. ■

Proposição 3.2.15 *Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são duas Σ_0-estruturas tais que $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[\bar{a}_r]$, então existe um isomorfismo parcial $p : X = \{a_0, ..., a_{r-1}\} \to Y = \{b_0, ..., b_{r-1}\}$, tal que $p(a_i) = b_i$, para todo $i \leq r$.*

Prova. A prova será por indução sobre n.

- Caso base: $n = 0$. A fórmula $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ é uma conjunção finita de literais e, portanto, $\mathfrak{A} \models \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[\bar{a}_r]$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models \psi_1[\bar{a}_r]$ e $\mathfrak{A} \models \psi_2[\bar{a}_r]$ e ... e $\mathfrak{A} \models \psi_k[\bar{a}_r]$, em que cada ψ_i é ou γ_i ou $\neg\gamma_i$ e γ_i é atômica. Assim, pela Proposição 3.2.14, concluímos que p é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

- Hipótese de indução: a Proposição é verdadeira para $\varphi^n_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$.

- Passo de indução: suponhamos que $\mathfrak{A} \models \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[a_r]$ e escolhamos um $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $a \neq a_i$ quando $i < r$; pela definição de $\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ temos que $\mathfrak{A} \models \forall x \bigvee\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}[\bar{a}_r]$ e, portanto, existe um $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}[\bar{a}_r a]$. Pela hipótese de indução, existe um isomorfismo parcial p de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ tal que $\mathrm{p}(a_i) = b_i$, para $i < r$. Logo, existe um isomorfismo parcial q (que estende p) de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ tal que $q(x) = \begin{cases} p(a_i) & \text{se } a_i \in dom(p) \\ b & \text{se } x = a \end{cases}$.

■

Mostraremos agora como construir um m-isomorfismo entre duas estruturas a partir das fórmulas da Definição 3.2.11.

Proposição 3.2.16 *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas e, se I_n é o conjunto dado por:*

$$I_n = \{p \mid p \text{ é um isomorfismo parcial } p : X \to Y, \text{ tal que } p(a_i) = b_i, n \in \mathbb{N} \text{ e } \mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[\bar{a}_r]\},$$

então $(I_n)_{n\leq m}$ define um m-isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Prova. Precisamos verificar apenas que $(I_n)_{n\leq m}$ satisfaz a definição de m-ismorfismo:

(a) Pela definição de I_n, $\mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[\bar{a}_r]$ e, então, pela Proposição 3.2.15, $p \in I_n$ é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$; consequentemente, I_n é um conjunto não vazio de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

(b) Sejam $n + 1 \leq m$ e $p \in I_{n+1}$ um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e $a \in \mathfrak{A}$. Então, pela definição de I_{n+1} temos que $\mathfrak{A} \models \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}[\bar{a}_r]$ e, pelas definições de I_{n+1} e $\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$, temos que $\mathfrak{A} \models \forall x_r \bigvee\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}\}[\bar{a}_r]$. Desse modo, existe um $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}[\bar{a}_r a]$. Logo, pela Proposição 3.2.15, existe um isomorfismo parcial $q \in I_n$ tal que $q(a_i) = p(a_i)$, para $i < r$ e $q(a) = b$; portanto, q estende p e $a \in dom(q)$. Assim, concluímos que $(I_n)_{n\leq m}$ possui a "propriedade do vai".

(c) Agora, sejam $n + 1 \leq m$ e $p \in I_{n+1}$ um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e $b \in \mathfrak{B}$. Então, pelas definições de I_{n+1} e $\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r}$ temos que $\mathfrak{A} \models \left(\bigwedge\{\exists x_r \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b} \mid b \in |\mathfrak{B}|\}\right)[\bar{a}_r]$. Daí, para cada $b \in |\mathfrak{B}|$ existe um $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\bar{b}_r b}[\bar{a}_r a]$. Logo, pela Proposição 3.2.15, existe um isomorfismo parcial $q \in I_n$ tal que $q(a_i) = p(a_i)$, para $i < r$ e $q(a) = b$; portanto, q estende p e $b \in img(q)$. Assim, concluímos que $(I_n)_{n\leq m}$ possui a "propriedade do vem". ■

Corolário 3.2.17 *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas Σ-estruturas. Se $\mathfrak{A} \models \varphi^{m}_{\mathfrak{B}\emptyset}$, então $\mathfrak{A} \overset{m}{\equiv} \mathfrak{B}$.*

Prova. Se $\mathfrak{A} \models \varphi^{m}_{\mathfrak{B}\emptyset}$, então a construção da família I_n na Proposição 3.2.16 garante que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são m-isomorfas e, portanto, m-equivalentes. ■

O posto de uma fórmula expressa o número de ocorrências de quantificadores em uma fórmula. De modo mais preciso, dada uma fórmula φ em $\mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}}$, o *posto de uma fórmula* é uma função $rq(\varphi) : \mathrm{F}^{\Sigma}_{\mathrm{I}} \to \mathbb{N}$ tal que: (i) se φ é atômica, $rq(\varphi) = 0$, (ii) se φ é $\neg\psi$, $rq(\varphi) = rq(\psi)$, (iii) se φ é $\psi \vee \gamma$, $rq(\varphi) = \text{máximo } \{rq(\psi), rq(\gamma)\}$ e (iv) se φ é $\exists x\psi$, $rq(\varphi) = rq(\psi) + 1$.

No Capítulo 1, vimos que duas Σ-estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes e afirmamos que a recíproca é falsa. Mas, agora, podemos provar uma versão mais fraca da recíproca deste teorema.

Proposição 3.2.18 *O posto de cada fórmula $\varphi^n_{\mathfrak{B}\bar{b}_r}$ é n. Além disso, quaisquer duas estruturas m-equivalentes são m-isomorfas.*

Prova. A demonstração relativa ao posto não será exibida, pois é uma simples indução na complexidade da fórmula. Quanto a segunda asserção, sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas estruturas tais que $\mathfrak{A} \overset{m}{\equiv} \mathfrak{B}$. Então, pela definição de m-equivalência e pela Proposição 3.2, temos que $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}\emptyset}$, para todo $1 \leq n \leq m$. Pela hipótese de que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são m-equivalentes, concluímos que $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{A}\emptyset}$. Logo, a família de conjuntos I_n da Proposição 3.2.16 é uma família de conjuntos não vazios e é munida da "propriedade de vai-e-vem" e, portanto, $\mathfrak{A} \overset{m}{\cong} \mathfrak{B}$. ■

As construções que desenvolvemos nesta seção e na anterior delineiam um caminho básico a ser percorrido para provar a parte mais dura da Caracterização Algébrica da Equivalência Elementar, resultado esse obtido por Fräisse e que, segundo Våånånen e Westerståhl (2010), página 101, foi redescoberto de maneira independente por Lindström.

Estamos agora em condições de enunciar o principal resultado desta seção e que, grosseiramente, assevera que estruturas que satisfazem sentenças contraditórias podem ser m-isomorfas em redutos finitos. Dito de outra forma, existirão estruturas que se relacionam com as mesmas sentenças até um certo posto, mas que depois disso passam a discordar. O próximo teorema coloca essas asserções em termos precisos.

Teorema 3.2.19 *Sejam Σ uma assinatura relacional, $\mathbb{L}$ uma lógica abstrata estritamente mais expressiva do que $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ e ψ uma $\mathbb{L}$-sentença que não é equivalente a alguma $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentença. Nestas condições, para toda assinatura finita $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ e todo $m \in \mathbb{N}$, existem Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que*

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi, \quad \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi \quad e \quad \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \overset{\mathrm{m}}{\cong} \mathfrak{B}|_{\Sigma_0}.$$

Prova. Como, por hipótese, $\mathbb{L}_{\mathbb{I}} \sqsubset \mathbb{L}$, sejam φ uma $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentença e $\varphi^* \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ uma $\mathbb{L}$-sentença da lógica abstrata e que é logicamente equivalente a φ; como φ é uma sentença qualquer, podemos considerá-la, em particular, como a fórmula $\bigvee\{\varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}\emptyset} \mid \mathfrak{A}$ é Σ-estrutura, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ e $m \geq 1\}$. Pela Proposição 3.2.13, φ assim definida é, de fato, uma $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$-sentença.

Observemos agora que, para toda Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \rightarrow \varphi^*$. De fato, suponha que, para alguma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, não seja o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \rightarrow \varphi^*$. Então, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ e não é o caso que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$ $(\star)$. Mas, pela definição de φ, o reduto de $\mathfrak{A}$ para Σ_0 satisfaz φ e, pelo teorema do reduto, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$. Como φ e φ^* são logicamente equivalentes, $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$, o que contraria $(\star)$.

Da hipótese de que ψ não é logicamente equivalente a φ, concluímos que ψ não é logicamente equivalente a φ^*; do parágrafo anterior, concluímos que existe uma Σ-estrutura $\mathfrak{B}$ tal que não é o caso que $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^* \rightarrow \psi$, isto é, $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$ e não é o caso que $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi$.

Por hipótese, $\mathbb{L}$ é regular e consequentemente vale a propriedade boolena, donde concluímos que $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$ e $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi$. Assim, pela equivalência entre φ e φ^* concluímos que existe uma estrutura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$ e $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi$.

Como $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$, pela definição de φ existe uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ e $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}$, para algum $m \geq 1$. Então, pela Proposição 3.2.13 (d) $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}$. Logo, apenas os símbolos presentes em Σ_0 são significativos à interpretação de $\varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}$ e, de $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}$ concluímos que $\mathfrak{B}|_{\Sigma_0} \models_{\mathbb{L}} \varphi^m_{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}}$. Finalmente, pelo Corolário 3.2.17, temos que $\mathfrak{B}|_{\Sigma_0} \overset{m}{\cong} \mathfrak{A}|_{\Sigma_0}$. ■

3.3 Um Teorema que depende de Löwenheim-Skolem

O terceiro e último estágio que iremos cumprir em direção à prova do primeiro teorema de Lindström consiste em adaptarmos o Teorema 3.2.19 para um contexto puramente abstrato, isto é, sem referências às sentenças de primeira ordem. Vale a pena destacarmos que todos os objetos presentes no Teorema 3.2.19 e na definição de m-isomorfismo são objetos matemáticos (funções, relações de ordem, estruturas, etc); então, é natural considerarmos um outro objeto matemático - uma estrutura - que contenha todos os “ingredientes” do Teorema 3.2.19. Vamos construir uma estrutura $\mathfrak{C}$ que encerre todos os elementos de que precisamos:

1. As estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ na definição de isomorfismos serão subestruturas de $\mathfrak{C}$, cujos domínios são subconjuntos de $|\mathfrak{C}|$ e, já antecipando a linguagem que posteriormente será tomada como subjacente a esta estrutura, consideraremos os conjuntos $U^{|\mathfrak{A}|}$ e $V^{|\mathfrak{B}|}$ de tal modo que $\mathfrak{A} = \langle U^{|\mathfrak{C}|}\rangle_{\mathfrak{C}}$ e $\mathfrak{B} = \langle V^{|\mathfrak{C}|}\rangle_{\mathfrak{C}}$.

2. O conjunto de índices da família $(I_n)_{n\leq m}$ de conjuntos de isomorfismos parciais será um subconjunto de $|\mathfrak{C}|$, caracterizado por um predicado unário W, isto é, $W^{|\mathfrak{C}|} = \{0, 1, 2, ..., m\}$.

3. O “tipo” do isomorfismo será caracterizado por uma constante c, isto é, $m = c^{|\mathfrak{C}|}$.

4. A relação de menor ou igual entre os índices da família $(I_m)_{n\leq m}$ será capturada pela relação de ordem $<^{|\mathfrak{C}|}$ em $W^{|\mathfrak{C}|}$ e tomaremos a função predecessor f restrita a $W^{|\mathfrak{C}|}$, isto é, $f^{|\mathfrak{C}|}(0) = 0$ e $f^{|\mathfrak{C}|}(n + 1) = n$ para todo $n < m$.

5. O conjunto de todos os isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ será caracterizado por um predicado unário relativizado por $\mathfrak{C}$, isto é, $P^{|\mathfrak{C}|} = \bigcup_{n\leq m} I_n$. Assim, p é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $P^{|\mathfrak{C}|}p$. Vale a pena destacarmos que ainda não estabelecemos isomorfismos entre redutos finitos das estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

6. Falta caracterizarmos dois elementos presentes na “propriedade do vai-e-vem”, o que será feito pelas relações:
   - $I^{|\mathfrak{C}|}mp$ se, e somente se, $m \leq k$ e $p \in Im$;
   - $G^{|\mathfrak{C}|}pab$ se, e somente se, $P^{|\mathfrak{C}|}p$ e $a \in dom(p)$ e $b = p(a)$.

7. Para terminarmos a especificação da estrutura $\mathfrak{C}$, falta apenas especificarmos o domínio dessa estrutura, o que é feito de modo natural a partir da análise dos ingredientes da mesma.
$$|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cup |\mathfrak{B}| \cup \{0, 1, ..., m\} \cup \bigcup_{n \leq m} I_n.$$

Um aspecto positivo dos objetos presentes no Teorema 3.2.19 e, consequentemente na estrutura $\mathfrak{C}$ que acabamos de definir, reside no fato que todos eles podem ser caracterizados por sentenças de primeira ordem em uma assinatura $\Sigma' = \Sigma \cup \{c, P, U, V, W, <, I, G, f\}$, sendo que c é um símbolo de constante, P, U, V e W são símbolos de predicados unários, $<$ e I são símbolos de predicado binário, G é um símbolo de predicado ternário, f é um símbolo de função unária e nenhum dos símbolos listados é membro de Σ. Claro, quando a estrutura foi definida acima, denominamos cada um dos seus componentes com o objetivo que $\mathfrak{C}$ seja uma Σ'-estrutura.

Toda a construção foi motivada por um resultado válido para lógicas regulares e toda a aplicação desta construção será destinada a tais lógicas. Claro, pela Propriedade da Substituição, poderíamos estabelecer uma nova linguagem e considerar um novo símbolo de predicado binário que substituisse f; no entanto, como nossa notação já está demasiamente carregada, não o faremos e, a despeito da presença de f em Σ', *consideraremos* Σ *uma assinatura relacional*[4].

Agora que já especificamos os elementos do Teorema 3.2.19, vamos caracterizá-los como Σ'-sentenças de primeira ordem.

- Se considerarmos que a sentença λ_1 é $\exists x Ux \wedge \varphi^u$, tal sentença estabelece que, em todo modelo $\mathfrak{C}$ de λ_1, temos que $U^{|\mathfrak{C}|} \neq \emptyset$ e $\langle U^{|\mathfrak{C}|} \rangle_{\mathfrak{C}} \models_{\mathbb{L}_I} \varphi$.

- Por outro lado, quando λ_2 é $\exists x Vx \wedge \neg\varphi^v$, temos que em todo modelo $\mathfrak{C}$ de λ_2, $V^{|\mathfrak{C}|} \neq \emptyset$ e $\langle V^{|\mathfrak{C}|} \rangle_{\mathfrak{C}} \models_{\mathbb{L}_I} \neg\varphi$. Desse modo, se tomarmos $\mathfrak{A} = \langle U^{|\mathfrak{C}|} \rangle_{\mathfrak{C}}$ e $\mathfrak{B} = \langle V^{|\mathfrak{C}|} \rangle_{\mathfrak{C}}$, temos quase[5] o que precisamos.

- Na construção de $\mathfrak{C}$ capturamos m-isomorfismos entre subestruturas de $\mathfrak{C}$, mas não o m-isomorfismo entre redutos finitos dessas subestruturas; podemos realizar uma "filtragem" desses elementos através das sentenças λ_3, λ_4 e λ_5, sendo que:
  - λ_3 é $\forall p(Pp \rightarrow \forall x \forall y(Gpxy \rightarrow (Ux \wedge Vy)))$;
  - λ_4 é $\forall p(Pp \rightarrow \forall x \forall y \forall x' \forall y'(Gpxy \wedge Gpx'y') \rightarrow (x \equiv x' \leftrightarrow y \equiv y'))$;
  - λ_5 é $\forall p(Pp \rightarrow \forall \bar{x} \forall \bar{y}((Gpx_1y_1 \wedge \cdots \wedge Gpx_ny_n) \rightarrow (Rx_1 \cdots x_n \leftrightarrow Ry_1 \cdots Ry_n)))$, sendo que R é símbolo de predicado n-ário, $R \in \Sigma_0$ e $\Sigma_0 \subseteq \Sigma'$ finita.

[4]Vide a nota de rodapé número 1.

[5]Quase porque ainda faltam elementos do Teorema 3.2.19 a serem representados e, principalmente, porque essa caracterização está sendo desenvolvida em linguagem de primeira ordem.

Assim, a sentença $\lambda_3 \wedge \lambda_4$ "seleciona" um isomorfismo parcial entre subestruturas de seus modelos e a sentença $\lambda_3 \wedge \lambda_4 \wedge \lambda_5$ separa os isomorfismos parciais em redutos finitos de subestruturas de seu modelo.

- A relação de ordem presente em $\mathfrak{C}$ pode ser caracterizada pela conjunção das sentenças λ_6, λ_7 e λ_8, sendo que
  - λ_6 é $\exists x \exists y(x < y) \wedge \forall x \neg(x < x)$;
  - λ_7 é $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$;
  - λ_8 é $\forall x \forall y((\exists z(x < z \vee z < x) \wedge \exists w(y < w \vee w < y)) \rightarrow (x < y \vee x \equiv y \vee y < x))$.
- O fato de que em $\mathfrak{C}$ a relação de ordem no conjunto de índices da família de conjuntos I_m possui maior elemento pode ser caracterizado pela sentença λ_9,
  - λ_9 é a sentença $\forall x(Wx \leftrightarrow (x \equiv c \vee \exists y(y < x \vee x < y))) \wedge \forall x(Wx \rightarrow (x < c \vee x \equiv c))$.

  A sentença acima assevera que, em um modelo de λ_9, a relação $<^{|\mathfrak{C}|}$ é vazia e $W^{|\mathfrak{C}|} = \{c\}$ ou, então, que $W^{|\mathfrak{C}|}$ é o campo da relação e $c^{\mathfrak{C}}$ é o maior elemento da relação. Em qualquer dos casos, a W-parte de $\mathfrak{C}$ é não vazia.
- A função predecessor em $\mathfrak{C}$ será caracterizada por λ_{10},
  - λ_{10} é $\forall x(\exists y(x < y) \rightarrow (fx < x \wedge \neg \exists z(fx < z \wedge z < x)))$.
- Ainda em $\mathfrak{C}$ temos que para todo x no campo da relação de ordem, o conjunto de isomorfismos parciais I_x é não vazio, o que será caracterizado pela sentença λ_{11},
  - λ_{11} é $\forall x(Wx \rightarrow \exists p(Pp \wedge Ixp))$.
- Por fim, precisamos estabelecer que os isomorfismos parciais entre as subestruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{C}$ são munidos da "propriedade de vai-e-vem". A sentença λ_{12} caracteriza a propriedade do Vai, enquanto λ_{13} a do "vem".
  - λ_{12} é $\forall x \forall p \forall u((fx < x \wedge Ixp \wedge Uu) \rightarrow \exists q \exists v(Ifxq \wedge Gquv \wedge \forall x' \forall y'(Gpx'y' \rightarrow Gqx'y')))$;
  - λ_{13} é $\forall x \forall q \forall v((fx < x \wedge Ixp \wedge Vv) \rightarrow \exists p \exists u(Ifxq \wedge Gquv \wedge \forall x' \forall y'(Gpx'y' \rightarrow Gqx'y')))$.

Para concluirmos a caracterização do Teorema 3.2.19 falta apenas inserirmos nossa construção em um ambiente abstrato, fora do contexto das sentenças de primeira ordem. Para isso, consideremos um sistema semântico, $\mathbb{L}$ no mínimo tão expressivo quanto a lógica abstrata $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$; desse modo, para toda para toda φ em $\mathbb{L}_{\mathrm{I}}$ existe uma φ^* em $\mathbb{L}$ tal que $\mathfrak{C} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{C} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$. Agora, consideramos o conjunto $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{13}\}$ e o conjunto $\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_{13}^*\}$, sendo que λ_i^* é uma sentença da lógica $\mathbb{L}$, logicamente equivalente à sentença de primeira ordem λ_i.

Assim, como $\mathfrak{C}$ é modelo do conjunto Λ que captura o Teorema 3.2.19 em lógica de primeira ordem, $\mathfrak{C}$ também é modelo do conjunto Λ^* que *captura o mesmo teorema em uma lógica regular* $\mathbb{L}$ *pelo menos tão expressiva quanto a lógica de primeira ordem*.

Finalmente, estamos em condições de provar o resultado central desta seção.

Teorema 3.3.1 *Sejam Σ uma assinatura relacional e $\mathbb{L} = (\mathrm{L}^\Sigma, \models_{\mathbb{L}})$ uma lógica abstrata regular na qual vale a propriedade de Löwenheim-Skolem e tal que Λ é o conjunto de $\mathbb{L}$-sentenças discutido acima. Nestas condições, se em todo modelo $\mathfrak{D}$ de Λ^* o campo da relação $<^{|\mathfrak{D}|}$ é infinito, então existem estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que*

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi, \quad \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\varphi \quad e \quad \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \cong \mathfrak{B}|_{\Sigma_0}.$$

Prova. Seja $\mathfrak{D}$ um modelo de Λ. Como Σ é relacional, qualquer conjunto não vazio é domínio de alguma Σ-estrutura. Uma vez que $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_1^*$, temos em $U^{|\mathfrak{D}|} \neq \emptyset$ o domínio de uma subestrutura de $\mathfrak{D}$ e, ainda do fato que $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_1^*$ inferimos que $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \varphi^u$; como consequência da propriedade de relativização, válida em $\mathbb{L}$, temos que $\langle U^{|\mathfrak{D}|}\rangle_{\mathfrak{D}} \models_{\mathbb{L}} \varphi$. Procedendo de modo análogo com λ_2^*, concluímos que $\langle V^{\mathfrak{D}}\rangle_{\mathfrak{D}} \models_{\mathbb{L}} \neg\varphi$ e, portanto, existem Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ e $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\varphi$.

Voltemos nossa atenção para a P-parte de $\mathfrak{D}$: como podemos escolher $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D}$, concluímos que $P^{|\mathfrak{D}|}$ é um conjunto de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$. Do fato que $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_3^* \wedge \lambda_4^* \wedge \lambda_5^*$, aos isomorfismos parciais $p' \in P^{|\mathfrak{D}|}$ corresponderão, por $G^{|\mathfrak{D}|}$, isomorfismos parciais p entre $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}$ e $\mathfrak{B}|_{\Sigma_0}$, para algum Σ_0 finito contido em Σ. Vamos, agora, considerar um subconjunto $J = \{p \mid \text{para algum } n,\ I^{|\mathfrak{D}|}(f^n c)^{|\mathfrak{D}|}p\}$ destes isomorfismos parciais e analisar três de suas propriedades:

- Como $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_{11}^*$, concluimos que $J \neq \emptyset$;
- Se $p \in J$, então para algum n temos $I^{|\mathfrak{D}|}(f^n c)^{|\mathfrak{D}|}p$ e se $a \in |\mathfrak{A}| = U^{|\mathfrak{D}|}$, em virtude de $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_{12}^*$, existe um q tal que $I^{|\mathfrak{D}|}(f^{n+1}c)^{|\mathfrak{D}|}q$. Logo, $q \in J$, $q \supset p$ e $a \in dom(q)$ e, consequentemente, J tem a “propriedade do vai”.
- De modo análogo, se $p \in J$, então para algum n temos $I^{|\mathfrak{D}|}(f^n c)^{|\mathfrak{D}|}p$ e se $b \in |\mathfrak{B}| = V^{|\mathfrak{D}|}$, em virtude de $\mathfrak{D} \models_{\mathbb{L}} \lambda_{13}^*$, existe um q tal que $I^{|\mathfrak{D}|}(f^{n+1}c)^{|\mathfrak{D}|}q$. Logo, $q \in J$, $q \supset p$ e $b \in img(q)$ e, consequentemente, J tem a “propriedade do vem”.

Logo, J estabelece que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são parcialmente isomorfas. Vamos agora explorar a hipótese de que $\mathbb{L}$ possui a propriedade de Löwenheim-Skolem.

Por hipótese, temos que o campo da relação $<^{|\mathfrak{D}|}$ é infinito, o que pode ser capturado pela sequência infinita de fórmulas $fc < c$, $ffc < fc$, $fffc < ffc$, ... Infelizmente, essa abordagem não nos permite aplicar a propriedade de Löwenheim-Skolem, uma vez que a mesma é enunciada para sentença e não conjunto de sentenças. Uma maneira de contornar esse problema é mais uma vez estender a linguagem, de Σ para Σ', através da inclusão do símbolo de predicado unário Q tal que *Qx se, e somente se, x é elemento de Q*. Assim, a sequência de fórmulas $fc < c$, $ffc < fc$,... pode ser interpretada como uma única Σ'-fórmula ψ:

$$\psi \text{ é } Qc \wedge \forall x(Qx \to (fx < x \wedge Qfx));$$

cuja interpretação intuitiva é "c é um elemento de Q, todo elemento de Q contém seu predecessor imediato e todo predecessor imediato de um elemento de Q é elemento de Q".

Agora, podemos adaptar a Σ-estrutura $\mathfrak{D}$ para uma Σ'-estrutura $\mathfrak{E}$ de tal modo que os símbolos de Σ sejam interpretados em $\mathfrak{E}$ da mesma forma que o eram em $\mathfrak{D}$ e o símbolo Q seja interpretado como o conjunto $Q^{|\mathfrak{E}|} = \{(f^n c)^{\mathfrak{E}} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Desse modo, $\mathfrak{E}|_{\Sigma} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{E} \models_{\mathbb{L}} \psi$ e $\mathfrak{E} \models_{\mathbb{L}} \lambda^*$, para todo $\lambda^* \in \Lambda^*$.

Com isso, $\mathfrak{E} \models_{\mathbb{L}} \lambda \wedge \psi$ e, portanto, pela propriedade de Löwenheim-Skolem, existe uma Σ'-estrutura $\mathfrak{F}$ que é modelo contável da sentença $\lambda_1^* \wedge \cdots \wedge \lambda_{14}^* \wedge \psi$.

Consequentemente, podemos tomar $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{F}$ que são modelos de $\Lambda*$. Como $|\mathfrak{F}|$ é enumerável, $|\mathfrak{A}|'$ e $|\mathfrak{B}|'$ são enumeráveis e $\mathfrak{A}'|_{\Sigma_0} \overset{m}{\cong} \mathfrak{B}'|_{\Sigma_0}$. Portanto, a Proposição 3.2.5 nos garante que $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$. ■

Observaçao 3.3.2 Pela construção do modelo $\mathfrak{C}$ de Λ é imediato que, para todo $m \in \mathbb{N}$, o conjunto $W^{|\mathfrak{C}|}$ possui $m + 1$ elementos.

3.4 Primeiro teorema de Lindström e outras caracterizações

Em 1969 Lindström inaugurou um novo e fecundo campo de investigação em lógica, a teoria abstrata de modelos, cujo escopo reside no estudo de propriedades modelo teóricas de extensões da lógica de primeira ordem. Nesta seção apresentaremos o primeiro teorema de Lindström e mais três dessas caracterizações: o segundo teorema de Lindström a caracterização de Karp e a caracterização de Robinson.

Teorema 3.4.1 (Primeiro Teorema de Lindström) *Não existe uma lógica abstrata regular com maior poder expressivo do que a lógica de primeira ordem que seja $\aleph_0$-compacta e na qual valha a propriedade de Löwenheim-Skolem.*

Prova. O argumento será por redução ao absurdo: suponha que $\mathbb{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$ é uma lógica abstrata regular munida das propriedades da Compacidade e Löwenheim-Skolem e mais expressiva do que a lógica de primeira ordem. Logo, existe uma sentença $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ que não é equivalente a alguma sentença de primeira ordem. Da hipótese que $\mathbb{L}$ é regular, podemos considerar Σ relacional e, uma vez que $\mathbb{L}$ é compacta, pelo Teorema 3.1.1 podemos tomar uma assinatura finita Σ_0 tal que, para todas Σ-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$,

$$\text{se } \mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \cong \mathfrak{B}|_{\Sigma_0}, \text{ então } (\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi \text{ se, e somente se, } \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi).$$

Consequentemente, a tese do Teorema 3.3.1 é falsa; assim, pela Observação 3.3.2 e, pela contrapositiva do Teorema 3.3.1, para toda sentença $\lambda^* \in \Lambda^* \subseteq \mathrm{L}^{\Sigma}$ temos que:

(a) em todo modelo $\mathfrak{C}$ de Λ^* o conjunto $W^{|\mathfrak{C}|}$ é finito e não vazio;

(b) para todo $m \geq 1$ existe um modelo $\mathfrak{C}$ de Λ^* tal que $W^{|\mathfrak{C}|}$ possui exatamente $m + 1$ elementos.

Entretanto, consideremos a sentença φ que formaliza a expressão "W contém, no mínimo, n elementos" e o conjunto $\Gamma \subseteq \mathrm{L}^{\Sigma}$ de Σ-sentenças tal que

$$\Gamma = \Lambda \cup \{\varphi\}.$$

Por (b), todo subconjunto de Γ tem modelo; por (a), Γ não é satisfatível em $\mathfrak{C}$, pois em um modelo $\mathfrak{C}$ de Γ devemos ter $\mathbb{N} \subseteq W^{|\mathfrak{C}|}$. Logo, $\mathbb{L}$ possui um conjunto de sentenças em que não vale a compacidade, absurdo. ■

Apresentaremos agora os principais conceitos necessários a formulação do segundo teorema de Lindström.

Definição 3.4.2 Uma lógica $\mathbb{L} = (\mathrm{L}^{\Sigma}, \models_{\mathbb{L}})$ é *efetiva* quando satisfaz as condições:

(a) Se a linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathbb{L}$ é decidível, então o conjunto de sentenças L^{Σ} é decidível;

(b) Para toda $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ há um $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, com Σ_0 finita tal que $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma_0}$.

Em outras palavras, a condição (a) estabelece que sempre que há um procedimento mecânico que verifica se um símbolo s pertence ou não à linguagem L, há também um procedimento que verifica se uma certa concatenação S de símbolos de L pertence ou não a L^{Σ}. Por outro lado, (b) assevera que em cada sentença de $\mathbb{L}$ há a ocorrência de apenas finitos símbolos.

Teorema 3.4.3 *A lógica de primeira ordem é efetiva.*

Prova. Um esboço do procedimento pode ser descrito do seguinte modo: dada uma fórmula φ e um símbolo $\mathfrak{s}$, analisamos a complexidade de φ.

- Se φ é atômica, então é finita; assim, basta verificar se $\mathfrak{s}$ está dentre os símbolos de φ.
- Se φ é $\neg\psi$ e s é $\neg$, então $\mathfrak{s}$ ocorre em φ; caso contrário, verificamos se $\mathfrak{s}$ ocorre em ψ;
- Se φ é $\psi \vee \sigma$ e s é $\vee$, então $\mathfrak{s}$ ocorre em φ; caso contrário, verificamos se $\mathfrak{s}$ ocorre em ψ ou em σ;
- Se φ é $\exists x\psi$ e $\mathfrak{s}$ é $\exists$ ou x, então $\mathfrak{s}$ ocorre em φ; caso contrário, verificamos se $\mathfrak{s}$ ocorre em ψ.

Como cada uma dessas verificações é feita acerca de um conjunto finito de símbolos, então temos um procedimento que se encerra após uma quantidade finita de etapas. Ainda, como sentenças são casos particulares de fórmulas, a condição (a) é satisfeita. Além disso, dada qualquer linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$, numa sentença dessa linguagem há a ocorrência de apenas um conjunto finito de símbolos que ocorre na fórmula e, portanto, a clausura (b) é satisfeita. ■

Definição 3.4.4 *Uma lógica* $\mathbb{L}$ *é* efetivamente regular *se, e somente se,* $\mathbb{L}$ *é efetiva e* $\mathbb{L}$ *é regular.*

Claramente, a lógica de primeira ordem é efetivamente regular. Vamos agora estabelecer um critério de comparação entre as lógicas efetivas.

Definição 3.4.5 Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ duas lógicas efetivas.

(a) A *lógica* $\mathbb{L}'$ *é ao menos tão efetiva quanto a lógica* $\mathbb{L}$ quando, existe uma função recursiva $h : \mathrm{L}^{\Sigma} \to \mathrm{L}'^{\Sigma}$ tal que toda estrutura que é modelo de $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ é também modelo de $h(\varphi)$. Denotamos que a lógica $\mathbb{L}'$ é ao menos tão expressiva quanto $\mathbb{L}$ por $\mathbb{L} \sqsubseteq_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}'$.

(b) Duas lógicas são *equivalentemente efetivas* quando, $\mathbb{L} \sqsubseteq_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}'$ e $\mathbb{L}' \sqsubseteq_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}$. Denotamos que duas lógicas são equivalentemente efetivas por $\mathbb{L} \sim_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}$.

(c) A *lógica* $\mathbb{L}'$ *é estritamente mais efetiva do que a lógica* $\mathbb{L}$ quando $\mathbb{L} \sqsubseteq_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}'$ mas não é o caso que $\mathbb{L} \sim_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}$. Denotamos que $\mathbb{L}'$ é estritamente mais efetiva do que $\mathbb{L}$ por $\mathbb{L} \sqsubset_{\mathrm{ef}} \mathbb{L}'$.

Teorema 3.4.6 *O conjunto das sentenças válidas em uma lógica de primeira ordem é enumerável.*

Prova. Vamos estabelecer uma enumeração para as fórmulas de uma linguagem de primeira ordem. Inicialmente, ordenamos os símbolos de uma linguagem de primeira ordem L do seguinte modo: L= $(\equiv, \neg, \vee, \exists, x_1, c_1, P_1, f_1, x_2, c_2, P_2, f_2, ...)$, onde x_i, c_i, P_i e f_i são, respectivamente, as variáveis e os símbolos de constantes, predicados e funções. Agora, codificamos os símbolos de L pela função $\triangle : \mathrm{L} \to \mathbb{N}$ tal que $\triangle(\equiv) = 2$, $\triangle(\vee) = 3$, $\triangle(\exists) = 5$, $\triangle(\neg) = 7$, $\triangle(x_i) = 11^{(i+1)}$, $\triangle(c_i) = 13^{(i+1)}$, $\triangle(P_i) = 17^{(i+1)}$ e $\triangle(f_i) = 19^{(i+1)}$.

Codificados os símbolos, temos condições de codificar os termos, o que será feito por uma função ∇ de domínio nos termos da lógica de primeira ordem e contradomínio $\mathbb{N}$.

- Se t é x_i, então $\nabla(t_i) = \triangle(x_i)$;
- Se t é c_i, então $\nabla(c_i) = \triangle(c_i)$;
- Se t é $f_i x_1, ..., x_n$, então $\nabla(t) = 2^{\triangle(f_i)} \cdot 3^{\nabla(t_1)} \cdots k^{\nabla(t_n)}$, em que k é o $(n+1)$-ésimo número primo.

Agora, estamos em condições de codificar as fórmulas pela função $\# : \mathrm{L}^{\Sigma} \to \mathbb{N}$ dada por:

- Se φ é a fórmula atômica $t_1 \equiv t_2$, então $\#(\varphi) = 2^{\nabla(t_1)} \cdot 3^{\triangle(\equiv)} \cdot 5^{\nabla(t_2)}$; se φ é $R_i t_1 ... t_n$, então $\#(\varphi) = 2^{\triangle(R_i)} \cdot 3^{\nabla(t_1)} \cdots k^{\nabla(t_n)}$, sendo que k é o $(n+1)$-ésimo número primo.

- Se φ é $\neg\psi$, então $\#(\varphi) = 2^{\triangle(\neg)} \cdot 3^{\#(\psi)}$.

- Se φ é $\psi \vee \sigma$, então $\#(\varphi) = 2^{\#(\psi)} \cdot 3^{\triangle(\vee)} \cdot 5^{\#(\sigma)}$.

- Se φ é $\exists x\psi$, então $\#(\varphi) = 2^{\triangle(\exists)} \cdot 3^{\triangle(x_i)} \cdot 5^{\#(\psi)}$.

Deste modo, codificamos cada uma das fórmulas da linguagem de primeira ordem e, portanto, podemos enumerar estas fórmulas de acordo com a ordem crescente dos códigos. Além disso, a forma de codificação deixa latente que fórmulas distintas são codificadas por naturais distintos.

Como as sentenças são casos particulares de fórmulas e o conjunto de fórmulas é enumerável, concluímos que o conjunto de sentenças também é enumerável. Em especial, o conjunto das sentenças válidas é enumerável. ■

Teorema 3.4.7 (Segundo Teorema de Lindström) *Não existe lógica efetivamente regular mais expressiva do que a lógica de primeira ordem que satisfaça a Propriedade de Löwenheim-Skolem e na qual o conjunto de sentenças válidas é enumerável.*

Prova. Em Ebbinghaus, Flum e Thomas (1994), página 272, parágrafo 4. ■

Definição 3.4.8 Um lógica $\mathbb{L}$ possui a *propriedade de Karp* quando a existência de um isomorfismo parcial entre duas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ é condição suficiente à equivalência elementar entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

A propriedade de Karp é mais fraca do que a propriedade de Löwenheim-Skolem no seguinte sentido: toda lógica que possui a propriedade de Löwenheim-Skolem possui a propriedade de Karp, embora a recíproca seja falsa. Por exemplo, em Flum (1985), Proposição 2.1.7 (b) é estabelecido que uma lógica $\mathbb{L}$ possui a propriedade de Löwenheim-Skolem quando goza das propriedades de Karp e Interpolação.

Teorema 3.4.9 *Não existe lógica abstrata com maior poder expressivo que a lógica de primeira ordem e que satisfaça as propriedades de substituição, Karp e compacidade enumerável.*

Prova. Em Flum (1985), página 91, Teorema 2.1.1. ■

Definição 3.4.10 Sejam $\mathbb{L}$ uma lógica abstrata, Γ, Γ_1 e Γ_2 três conjuntos de sentenças, $\mathcal{S}$ o conjunto de símbolos que ocorrem nas fórmulas de Γ, $\mathcal{S}_1$ o conjunto de símbolos que ocorrem nas fórmulas de Γ_1, $\mathcal{S}_2$ o conjunto de símbolos que ocorrem nas fórmulas de Γ_2 e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Nestas condições, $\mathbb{L}$ possui a *propriedade de Robinson* quando:

Se Γ é completo, $\Gamma \cup \Gamma_1$ é satisfatível e $\Gamma \cup \Gamma_2$ é satisfatível, então $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é satisfatível.

A propriedade de Robinson é muito forte; por exemplo, em uma lógica regular de linguagem finita $\mathbb{L}$, a propriedade de Robinson é condição suficiente à compacidade de $\mathbb{L}$, embora a recíproca seja falsa. A demonstração desse fato pode ser vista em Feferman e Barwise,[8], página 721, Teorema 1.3.

Teorema 3.4.11 *Não existe lógica abstrata com maior poder expressivo que a lógica de primeira ordem que goze das propriedades de Löwenheim-Skolem e de Robinson.*

Prova. Em Feferman e Barwise (1985), página 94, Teorema 2.1.6. ■

Capítulo 4

Uma Versão Modal do Teorema de Lindström

A versão modal do Teorema de Lindström que apresentaremos assevera que a lógica modal, cuja linguagem é munida de um único operador primitivo unário, é maximal com relação às propriedades de compacidade e bissimulação. Os conceitos e resultados serão apresentados de acordo com o seguinte roteiro:

- Na primeira seção padronizamos a notação e apresentamos os conceitos básicos de linguagem modal, estruturas modais, submodelo gerado, modelo enraizado, grau de uma fórmula e altura de um modelo.

- Em seguida, apresentamos os conceitos de homomorfismo limitado sobrejetivo e de bissimulação; ainda, mostramos que o primeiro é condição suficiente para o segundo que, por sua vez, é suficiente à preservação da validade modal. Em seguida, argumentamos que a noção de bissimulação é muito forte para os nossos propósitos e a enfraquecemos, introduzindo o conceito de n-bissimulação. A ideia aqui é análoga àquela desenvolvida no Capítulo 3, onde a noção de isomorfismo era muito forte e a enfraquecemos com o conceito de m-isomorfismo.

- Na terceira seção definimos árvores, modelos baseados em árvores e apresentamos um método canônico de converter um modelo enraizado qualquer em um modelo baseado em árvore. Tal método preserva a relação de satisfatibilidade.

- Por fim, definimos as lógicas modais abstratas e apresentamos dois exemplos de sistemas comumente aceitos como "lógica modal", um que satisfaz essa definição e, outro sistema, que não a satisfaz. Ainda, mostramos que não existe uma lógica modal abstrata que estenda a lógica modal básica e na qual valham, simultaneamente, as noções de bissimulação e gradação. Por fim, citamos a argumentação desenvolvida por van Benthem, [22], que assevera não existir uma lógica modal abstrata mais expressiva do que a lógica modal básica na qual valham, simultaneamente, as propriedades de bissimulação e $\aleph_0$-compacidade.

4.1 Linguagens e Estruturas Modais

Uma *assinatura modal* τ é um par (O, ρ), em que O é um conjunto e ρ é uma função que a cada elemento de O associa um número inteiro positivo e, quando O for finito, diremos que a assinatura modal é *finita*. Os elementos de O são os *operadores modais* e serão denotados por $\triangle$, com ou sem subíndice; $\rho(\triangle)$ indica a aridade do operador modal $\triangle$. Quando for necessário usaremos uma notação com duplo índice, em que $\triangle_i^j$ denota o i-ésimo operador modal de aridade j, com $i \geqslant 1$ e $j > 1$. Quando a aridade do operador modal for 1, ele será denotado por $\lozenge$, com ou sem subíndices. Por fim, quando nos referirmos a um único operador modal e sua aridade estiver clara pelo contexto, omitiremos quaisquer índices; por exemplo, em vez de $\triangle_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ escreveremos, simplesmente, $\triangle(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Nas considerações de caráter geral, consideraremos que a aridade dos operadores é conhecida e não faremos distinção entre O e τ. Além disso, quando O for finito, o escreveremos simplesmente listando seus elementos: $\tau = (\triangle_1, ..., \triangle_n)$.

Uma *linguagem modal* $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ é o conjunto $\{\tau, \Phi, \bot, \neg, \vee\}$, em que τ é uma assinatura modal e Φ é um conjunto, cujos elementos são denominados *letras proposicionais* e denotados por p, q e r, com ou sem subíndices; $\bot, \neg$ e $\vee$ são, respectivamente, um símbolo de constante, um operador unário e um operador binário, cujas interpretações pretendidadas são, respectivamente, falsidade, negação e disjunção. Quando τ possui um único operador unário a linguagem modal daí oriunda é uma *linguagem modal básica* e, em virtude da distinção entre as linguagens modais ocorrer apenas quanto a τ e Φ, diremos que uma linguagem modal é, simplesmente, um par (τ, Φ). A partir de uma linguagem modal construímos as fórmulas modais.

Definição 4.1.1 Dada uma linguagem modal (τ, Φ), as (τ, Φ)-*fórmulas modais* são construídas através da aplicação das seguintes regras:

(a) A constante $\bot$ é uma (τ, Φ)-fórmula modal, bem como os membros de Φ;

(b) Se φ e ψ são (τ, Φ)-fórmulas modais, também o são $\neg\varphi$ e $\varphi \vee \psi$;

(c) Se $\varphi_1, ..., \varphi_n$ são (τ, Φ)-fórmulas modais e $\triangle^n \in \tau$, então $\triangle^n(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ é uma (τ, Φ)-fórmula modal.

Quando a linguagem modal estiver clara pelo contexto as (τ, Φ)-fórmulas modais serão ditas, simplesmente, *fórmulas modais* ou, ainda, *fórmulas*; o conjunto de todas as (τ, Φ)-fórmulas modais será denotado $Fml(\tau, \Phi)$. A fórmula φ é uma *letra proposicional modal* ou, simplesmente, *letra proposicional*, quando $\varphi \in \Phi$. A *complexidade* de uma fórmula modal é o número de símbolos, repetidos ou não, que ocorre na mesma.

Como é usual, usaremos parenteses para ordenar a maneira como as fórmulas são construídas e consideraremos, como regras de omissão de parenteses, as mesmas do Capítulo 1; além disso, consideraremos que $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ são abreviações, respectivamente, de $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\neg\varphi \vee \psi$ e $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Inspirados na leitura de que a abreviação de $\neg\exists x\neg\varphi$ por $\forall x\varphi$ caracteriza os quantificadores $\exists$ e $\forall$ como *duais*, estabeleceremos que cada operador modal possui seu dual: $\Box$ é o dual de $\Diamond$ e $\Box\varphi$ abrevia a fórmula $\neg\Diamond\neg\varphi$ [1]; por sua vez, para $n > 1$, $\triangledown^n$ é o dual de $\triangle^n$ e $\triangledown^n(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ abrevia a fórmula $\neg\triangle^n(\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n)$.

Vale a pena ressaltar que, em virtude da inexistência de quantificadores e variáveis nas linguagens modais, as noções de fórmula e sentença coincidem; neste capítulo iremos nos referir exclusivamente às primeiras.

Exemplo 4.1.2 Para as fórmulas construídas a partir da linguagem modal básica existem diferentes interpretações pretendidas:

- $\Diamond$ é o operador de possibilidade e seu dual, o operador de necessidade. Assim, $\Diamond\varphi$ formaliza a expressão "é possivelmente o caso que φ", enquanto $\Box\varphi$ formaliza "é necessariamente o caso que φ". Procedendo da mesma forma, $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ e $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ formalizam, respectivamente, "o que é necessário é possível" e "o que é possível é necessariamente possível".

- Na lógica modal epistêmica $\Box$ é o operador modal de conhecimento e $\Box\varphi$ formaliza a expressão "o agente conhece φ". Dessa forma, $\Box\varphi \to \varphi$ e $\varphi \to \Box\varphi$ formalizam, respectivamente, "se o agente conhece φ, então é o caso que φ" e "se é o caso φ, então o agente conhece φ".

- Na lógica da provabilidade $\Box$ é o operador modal de provabilidade e $\Box\varphi$ é interpretado como "prova-se em uma teoria que φ". Um exemplo comum nas lógicas munidas deste operador é a fórmula $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Exemplo 4.1.3 A linguagem modal temporal possui a assinatura modal $\tau_t = \{\Diamond_P, \Diamond_F\}$, sendo que as fórmulas $\Diamond_P\varphi$ e $\Diamond_F\varphi$ têm interpretação pretendida, respectivamente, "φ foi verdadeira em algum momento *P*assado" e "φ será verdadeira em algum instante *F*uturo".

Uma *estrutura modal* $\mathfrak{A}$ é uma tripla $(W, \mathcal{R}, \vartheta)$, em que W é um conjunto não vazio, denominado *universo* da estrutura e cujos elementos são os *pontos* ou *mundos* da estrutura, $\mathcal{R}$ é uma família de relações n-árias ($n \geq 1$) sobre W e ϑ é uma função, denominada *valoração*.

Quando w for um elemento do universo W da estrutura $\mathfrak{A}$ diremos, indistintamente, que w é *mundo de* W ou que w é um *mundo de* $\mathfrak{A}$. Em geral, escreveremos a família $\mathcal{R}$ listando todos seus elementos, isto é, $\mathcal{R} = \{R_1^1, ..., R_k^n, ..., R_1^m, ..., R_m^n\}$, em que R_i^j denota a i-ésima relação de aridade j e, quando estiver claro pelo contexto, os índices serão omitidos. Denotaremos que $(u_1, ..., u_n) \in R^n$, $n > 1$, tanto por $Ru_1...u_n$ quanto $u_1Ru_2...u_n$.

[1] Após definirmos a semântica para a lógica modal, mostraremos no Exemplo 4.1.8 que esta definição de dual é adequada, no sentido que uma fórmula é verdadeira se, e somente se, seu dual também o é.

O papel pretendido às estruturas modais é análogo a aquele desempenhado pelas estruturas dos capítulos anteriores, isto é, estabelecer uma semântica às fórmulas construídas a partir de alguma linguagem modal.

Definição 4.1.4 Uma (τ, Φ)-*estrutura modal* $\mathfrak{A}_{(\tau,\Phi)}$ é a tripla $(W, \mathcal{R}_\tau, \vartheta_\Phi)$ em que:

(a) (τ, Φ) é uma linguagem modal e W é o universo da estrutura;

(b) $\mathcal{R}_\tau$ é uma coleção de relações sobre W tal que, a cada $n \geq 1$ e cada operador modal n-ário $\triangle$ em τ, corresponde uma relação $R_\triangle^{n+1}$ em $\mathcal{R}_\tau$;

(c) $\vartheta_\Phi : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ é uma valoração, que associa a cada fórmula atômica $p \in \Phi$ um conjunto de mundos $\vartheta(p)$.

Quando não houver possibilidade de confusão quanto à linguagem modal escreveremos simplesmente $\mathfrak{A}$ em vez de $\mathfrak{A}_{(\tau,\Phi)}$ e consideraremos as expressões (τ, Φ)-*modelo* e *modelo* como sinônimos de (τ, Φ)-estrutura e estrutura, respectivamente.

A interpretação pretendida à valoração é que $\vartheta(p)$ indique os mundos da estrutura em que a letra proposicional p é verdadeira. Cada relação $R_\triangle$ é a *relação de acessibilidade* entre os mundos da estrutura. Quando $\Phi = \emptyset$, a (τ, Φ)-estrutura modal coincide com as estruturas relacionais dos capítulos anteriores e é denominada, no contexto modal de *frame*. Desse modo, constatamos que as estruturas relacionais consideradas, por exemplo, nas lógicas abstratas $\mathbb{L}_\text{I}$, $\mathbb{L}_{Q_1}$ e $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ são casos particulares de estruturas modais. Mais que isso: toda estrutura relacional de primeira ordem é uma estrutura modal, embora a recíproca não seja verdadeira.

Quando $\mathcal{L}$ é uma linguagem qualquer que contém uma linguagem modal e $\mathfrak{A}$ uma estrutura modal, o conceito de $\mathcal{L}$-modelo é adaptado para abarcar as tais estruturas.

Será muito útil às considerações que iremos tecer nas próximas seções o esboço gráfico de uma estrutura modal. Com isso, as relações de aridade $n + 1$ serão representadas por setas com n linhas, sendo que linhas distintas representam relações distintas. Por exemplo, $w \xrightarrow{R} v$, $w \overset{S}{\dashrightarrow} v$ e $w \overset{T}{\Longrightarrow} v \overset{T}{\Longrightarrow} u$ representam, respectivamente, Rwv, Swv e $Twvu$. Quando a relação estiver clara pelo contexto escrevemos apenas $w \longrightarrow v$. Representaremos que a letra proposicional p é verdadeira no mundo w por w^p.

Exemplo 4.1.5 Um exemplo de estrutura para a linguagem modal básica do Exemplo 4.1.2 é $\mathfrak{A} = (\{w, v\}, \{(w, w), (w, v)\}, \{(p, w), (p, v)\})$. Um outro exemplo, mais radical, é $\mathfrak{B} = \big(\{w\}, \emptyset, \emptyset\big)$.

Exemplo 4.1.6 Um modelo para a linguagem modal temporal cuja assinatura foi descrita no Exemplo 4.1.3 é $\mathfrak{A}_t = (W, R_{\Diamond_P}, R_{\Diamond_F}, \vartheta\}$, em que W e ϑ são quaisquer, mas as relações preservam a propriedade da bidirecionalidade, em que para todo w e v em W, $wR_{\Diamond_P}v$ se, e somente se, $vR_{\Diamond_F}w$. Tal exigência é posta para que as propriedades intuitivas básicas acerca da noção ordinária de tempo sejam preservadas mas é, em geral, insuficiente. Por exemplo, uma propriedade adicional que deve-se impor aos modelos temporais é a transitividade.

Estamos agora em condições de fixar a semântica para uma linguagem modal.

Definição 4.1.7 Sejam (τ, Φ) uma linguagem modal e $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ um (τ, Φ)-modelo. A relação *"a (τ, Φ)-fórmula modal φ é verdadeira no mundo w de $\mathfrak{A}$"*, denotada $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$, é definida por indução na complexidade de φ:

(a) Nunca é o caso que $(\mathfrak{A}, w) \models \bot$;

(b) Se φ é a letra proposicional p, então $(\mathfrak{A}, w) \models p$ se, e somente se, $w \in \vartheta(p)$;

(c) Se φ é $\neg\psi$, então $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, não é o caso que $(\mathfrak{A}, w) \models \psi$;

(d) Se φ é $\psi \vee \gamma$, então $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}, w) \models \psi$ ou $(\mathfrak{A}, w) \models \gamma$;

(e) Se φ é $\triangle(\psi_1, ..., \psi_n)$, então $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, para algum $v_1, ..., v_n$ em W com $R_\triangle w v_1 ... v_n$, temos que $(\mathfrak{A}, v_i) \models \psi_i$, para todo $i = 1, ..., n$.

Quando não é o caso de uma fórmula ser verdadeira em um mundo w de um modelo, ela é *falsa* neste mundo do modelo. Uma fórmula é *verdadeira em um modelo* quando é verdadeira em todos os mundos do modelo e é *verdadeira*, ou *válida*, quando é verdadeira em todos os modelos. Por fim, um conjunto Γ de fórmulas é verdadeiro em um mundo w de um modelo $\mathfrak{A}$ quando, para toda fórmula γ em Γ, temos $(\mathfrak{A}, w) \models \gamma$; denotamos esta situação por $(\mathfrak{A}, w) \models \Gamma$. Analogamente, definimos quando o conjunto Γ é *verdadeiro no modelo* e quando é *verdadeiro*, ou *válido*. Duas fórmulas φ e ψ são *logicamente equivalentes* quando, para todo modelo $\mathfrak{A}$ e todo w de $\mathfrak{A}$, temos que $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}, w) \models \psi$.

No caso particular da linguagem modal básica, $(\mathfrak{A}, w) \models \Diamond\varphi$ se, e somente se, para algum $v \in W$ com wRv, $(\mathfrak{A}, w \models \varphi)$. Por sua vez, a veracidade de uma fórmula com o operador $\Box$ em um mundo w de uma estrutura é $(\mathfrak{A}, w) \models \Box\varphi$ se, e somente se, para todo $v \in W$ tal que wRv, vale $(\mathfrak{A}, v) \models \varphi$.

Exemplo 4.1.8 Consideremos o modelo para a linguagem modal básica $\mathfrak{A} = (W, R, \vartheta)$ em que $W = \{w, v\}$, $R = \{(w, v)\}$ e, para toda letra proposicional p, $\vartheta(p) = v$.

- $\Box p \to p$ é falsa no mundo w de $\mathfrak{A}$. De fato, para todo u em $\mathfrak{A}$ tal que wRu, temos $(\mathfrak{A}, u) \models p$ e, portanto, $(\mathfrak{A}, w) \models \Box p$. Mas não é o caso que $(\mathfrak{A}, w) \models p$. Logo, não é o caso que $(\mathfrak{A}, w) \models \Box p \to p$.

- $p \to \Box p$ é verdadeira no mundo w de $\mathfrak{A}$. De fato, como não é o caso que $(\mathfrak{A}, w) \models p$, trivialmente temos que $(\mathfrak{A}, w) \models p \to \Box p$.

- A fórmula $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$ é válida. De fato, qualquer que seja a estrutura $\mathfrak{A} = (W, R, \vartheta)$ para uma linguagem modal básica e qualquer mundo w de $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, w) \models \Diamond\varphi &\Leftrightarrow \text{para algum } v \text{ em } \mathfrak{A} \text{ tal que } wRv,\ (\mathfrak{A}, v) \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{não é o caso, para todo } v \text{ em } \mathfrak{A} \text{ tq. } wRv,\ \text{não ocorre } (\mathfrak{A}, v) \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{não é o caso que para todo } v \text{ em } \mathfrak{A} \text{ tq. } wRv,\ \text{ocorre } (\mathfrak{A}, v) \models \neg\varphi \\
&\Leftrightarrow \text{não é o caso que } (\mathfrak{A}, w) \models \Box\neg\varphi \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, w) \models \neg\Box\neg\varphi.
\end{aligned}$$

Definição 4.1.9 Dado um (τ, Φ)-modelo $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$, o (τ, Φ)-modelo $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ é *submodelo gerado* de $\mathfrak{A}$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) O universo de $\mathfrak{A}'$ é subconjunto do universo de $\mathfrak{A}$;

(b) Para toda relação n-ária R' em $\mathcal{R}'$, existe uma relação n-ária R em $\mathcal{R}$ tal que $R' = R \cap (W')^n$;

(c) ϑ' é uma restrição de ϑ em $\mathfrak{A}'$, isto é, para cada letra proposicional p, $\vartheta'(p) = \vartheta(p) \upharpoonright W'$;

(d) Para todo $\triangle \in \tau$ e todo $w \in W'$, se $w \in W$ e $R_{\triangle}wv_1...v_n$, então $v_1, ..., v_n \in W'$.

Quando X é um subconjunto do universo de $\mathfrak{A}$, o *submodelo de* $\mathfrak{A}$ *gerado por* X é o menor submodelo de $\mathfrak{A}$ que contém X. Um modelo é *enraizado* quando é submodelo gerado por um conjunto unitário $\{w\}$ e, nestas condições, w é a *raiz* do modelo enraizado.

Observemos que a clausula (d) da definição acima assevera, essencialmente, que as relações do submodelo são fechadas com relação ao modelo original, isto é, se um mundo w está no domínio de uma relação no modelo original *e* no domínio do submodelo, então todos os mundos que se relacionam com w no modelo original também se relacionam com w no submodelo.

O último conceito que será apresentado nessa seção é o de *grau* de uma fórmula, cujo papel é destacar como um mundo no qual a fórmula é verdadeira se relaciona com os demais mundos da estrutura; basicamente, uma fórmula de grau n, satisfatível em um mundo w de um modelo $\mathfrak{A}$, examina quais são os mundos acessíveis a partir do mundo em análise, w, através das relações em $\mathfrak{A}$. Nesse sentido, a fórmula $\Diamond\psi$ deve ter grau superior a ψ, pois quando são avaliadas em $(\mathfrak{A}, w)$, a primeira se verifica se há uma relação binária adequada "a mais" do que a primeira. Posto de outra forma, a inspeção nas regras de formação de fórmulas e na definição de satisfatibilidade em um modelo nos indica que uma fórmula poderá examinar mais mundos quanto maior for o número de operadores modais "aninhados". A próxima definição coloca essas ideias em termos precisos.

Definição 4.1.10 O *grau-modal de uma* (τ, Φ)*-fórmula* φ é a função $\mathfrak{gr} : (\tau, \Phi) \to \mathbb{N}$, definida por indução na complexidade de φ:

(a) Se φ é $\bot$ ou uma letra proposicional p, então $\mathfrak{gr}(\varphi) = 0$;

(b) Se φ é $\neg\psi$, então $\mathfrak{gr}(\varphi) = \mathfrak{gr}(\psi)$;

(c) Se φ é $\psi \vee \gamma$, então $\mathfrak{gr}(\varphi) =$ máximo $\{\mathfrak{gr}(\psi), \mathfrak{gr}(\gamma)\}$;

(d) Se φ é $\triangle(\psi_1, ..., \psi_n)$, então $\mathfrak{gr}(\varphi) = 1 +$ máximo $\{\mathfrak{gr}(\psi_1), ..., \mathfrak{gr}(\psi_n)\}$.

A próxima proposição relaciona o conceito de grau de uma fórmula com linguagem modal e a relação de satisfatibilidade.

Proposição 4.1.11 *Assinatura modal finita e conjunto de letras proposicionais finito são condições suficientes para que, a menos de equivalência lógica, o conjunto de fórmulas modais contenha apenas um número finito de fórmulas de grau no máximo n, para todo n.*

Prova. A prova é por indução no grau máximo k das fórmulas: se $k = 0$ é imediato, pois por hipótese há apenas finitas letras proposicionais e, portanto, finitas fórmulas de grau 0. Como HI, supomos que existam apenas fórmulas de grau máximo k. Para o passo de indução, consideramos as fórmulas φ de grau máximo $k+1$ e, por definição de grau, φ é $\triangle(\psi_1, ..., \psi_m)$, sendo que para cada i, $\mathfrak{gr}(\psi_i) \leq k$ e, para pelo menos um i, $\mathfrak{gr}(\psi_i) = k$. Pela HI há apenas finitas ψ_i e, portanto, para cada $\triangle^m \in \tau$ apenas finitas $\triangle^m(\psi_1, ..., \psi_m)$, a menos de equivalência lógica, o que conclui a prova. ■

Corolário 4.1.12 *Assinatura modal finita τ e conjunto de letras proposicionais finito Φ são condições suficientes para que o conjunto de todas as (τ, Φ)-fórmulas satisfeitas no mundo w de um modelo $\mathfrak{A}$ seja equivalente a uma única fórmula, para todo n, w e $\mathfrak{A}$.*

Prova. Sejam ψ a (τ, Φ)-fórmula que procuramos e Γ um conjunto de fórmulas de grau no máximo n. Pela Proposição 4.1.11, se $(\mathfrak{A}, w) \models \Gamma$, então Γ é finito e podemos considerar $\Gamma = \{\psi_1, ...\psi_m\}$; agora, basta estabelecer que ψ é $\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m$ e, portanto, $(\mathfrak{A}, w) \models \Gamma$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}, w) \models \psi$. ■

4.2 Morfismos e Bissimulações

Nesta seção estabeleceremos condições para que duas estruturas modais preservem a relação de satisfatibilidade modal; começaremos com os morfismos limitados sobrejetivos.

Definição 4.2.1 Sejam $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ dois (τ, Φ)-modelos. Um *morfismo limitado* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$ é uma função $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ que satisfaz as condições:

(a) Se p é uma letra proposicional, então $w \in \vartheta(p)$ se, e somente se, $f(w) \in \vartheta'(p)$;

(b) Para todo $\triangle \in \tau$, $R_\triangle \in \mathcal{R}$ e $R'_\triangle \in \mathcal{R}'$, se $R_\triangle w v_1 ... v_n$, então $R'_\triangle f(w) f(v_1) ... f(v_n)$;

(c) Se $R'_\triangle f(w) v'_1 ... v'_n$, então existem $v_1, ..., v_n$ tais que $R_\triangle w v_1 ... v_n$ e $f(v_i) = v'_i$, para $i = 1, ..., n$.

Quando o morfismo limitado f é uma função sobrejetiva, trata-se de um *morfismo limitado sobrejetivo*.

A primeira condição diz que ambos os modelos devem concordar quanto às letras proposicionais e, a segunda, que as relações são bem comportadas com relação aos morfismos limitados; a última propriedade é conhecida como *propriedade do vem*.

Exemplo 4.2.2 Existe um morfismo limitado sobrejetor da estrutura $\mathfrak{B}_1 = (B, T, \Theta)$ em $\mathfrak{B}_2 = (\mathbb{N}, <, \vartheta)$. Essas estruturas são tais que B é o conjunto das sequências finitas de *zeros* e *uns*, T é uma relação binária em B tal que $\alpha T \beta$ se, e somente se, α é segmento inicial próprio de β. $\mathfrak{B}$ é a estrutura estritamente ordenada dos números naturais em que toda letra proposicional é verdadeira nos mundos pares e só nestes.

Por definição $b \in B$ se, e somente se, $b = (b_1, ..., b_n)$ e $b_i = 0$ ou $b_i = 1$; definimos Θ de modo que p é verdadeira em toda sequência de comprimento ímpar, isto é, $\Theta(p) = \{(b_1, ..., b_{2m+1}) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que a função $f : B \to \mathbb{N}$ tal que $(b_1, ..., b_{2m+1}) \mapsto 2m$ é um morfismo limitado sobrejetivo.

De fato, f é sobrejetivo, pois dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência w, exclusivamente de zeros ou uns e com comprimento $n + 1$ tal que $f(w) = n$. Vamos verificar as demais condições: (i) $w \in \Theta(p) \Leftrightarrow w = (b_1, ..., b_{2m+1}) \Leftrightarrow f(w) = 2m,\ m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(w) \in \vartheta(p)$; (ii) $wRv \Rightarrow v = w\sigma,\ \sigma = (b_i, b_{i+1}, ..., b_{i+k}),\ k \neq 0 \Rightarrow w = (b_1, ..., b_n)$ e $v = (b_1, ..., b_n, b_{n+1}, ..., b_{n+k})$, $k, n \geq 1 \Rightarrow f(w) = n - 1$ e $f(v) = n + k - 1 \Rightarrow f(w) < f(v)$; (iii) $f(w) < m \Rightarrow$ para todo $w = (b_1, ..., b_n)$ existe um $v = (b'_1, ..., b'_{m+1})$ tal que $m > n$ e $b'_i = b_i$ para $i \leq n \Rightarrow$ existe um v tal que wRv e $f(v) = m$.

Estamos agora em condições de definir o conceito que se mostrará central às lógicas modais.

Definição 4.2.3 Uma *bissimulação* entre dois (τ, Φ)-modelos $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ é uma relação binária $Z \subseteq W \times W'$ que satisfaz as seguintes condições:

(a) wZv se, e somente se, w e v satisfazem as mesmas letras proposicionais;

(b) Quando wZw' e $R_\triangle wv_1...v_n$, existem $v'_1, ..., v'_n$ em W' tais que $R'_\triangle w'v'_1...v'_n$ e $v_iZv'_i$, $i \leq n$;

(c) Quando wZw' e $R'_\triangle w'v'_1...v'_n$, existem $v_1, ..., v_n$ em W tq. $R_\triangle v_1...v_n$ e $v_iZv'_i$, para $i \leq n$.

Duas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são *bissimilares* quando existe uma bissimulação Z entre elas, o que é denotado por $\mathfrak{A} \leftrightarrows_z \mathfrak{B}$. Os mundos w e w', respectivamente de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}'$, são *mundos bissimilares* quando existe uma bissimulação Z entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tal que wZw'; nestas condições, dizemos também que os mundos w e w' são *conectados* por Z, o que é denotado por $(\mathfrak{A}, w) \leftrightarrows_Z (\mathfrak{B}, w')$.

A existência de uma bissimulação entre dois modelos da linguagem modal básica indica, de um ponto de vista intuitivo, que é possível "completar o quadrado" através das "propriedades de vai-e-vem". Abaixo, o "completamento" é representado pelas linhas pontilhadas.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, dotted, "Z"] & v' \\ w \arrow[u, "R"] \arrow[r, "Z"'] & w' \arrow[u, dotted, "R'"'] \end{tikzcd}$$

Figura 4.2.1 (a)

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, dotted, "Z"] & v' \\ w \arrow[u, dotted, "R"] \arrow[r, "Z"'] & w' \arrow[u, "R'"'] \end{tikzcd}$$

Figura 4.2.1 (b)

A próxima proposição relaciona morfismos limitados sobrejetivos e bissimilaridade.

Proposição 4.2.4 *A existência de um morfismo limitado sobrejetivo é condição suficiente à existência de uma bissimulação entre dois modelos.*

Prova. Sejam $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ dois (τ, Φ)-modelos e f um morfismo limitado sobrejetivo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$. Definimos o conjunto $Z = \{(w, w') \mid w \in W \text{ e } w' = f(w)\}$. Mostraremos que Z é uma bissimulação.

É imediato que $Z \subseteq W \times W'$; por f temos que $w \in \vartheta(p)$ se, e somente se, $f(w) \in \vartheta'(p)$ e, portanto, dois mundos que se relacionam por Z satisfazem as mesmas letras proposicionais. Vamos verificar que Z satisfaz as propriedades do vai e do vem:

- (vai) wZw' e $R_\triangle wv_1...v_n \overset{\mathrm{f,\,Z}}{\Rightarrow} wZf(w)$ e $R_\triangle f(w)f(v_1)...f(v_n) \overset{\mathrm{Z}}{\Rightarrow}$ existem $v'_1, ..., v'_n$ em W' tais que $R'_\triangle w'v'_1...v'_n$ e $v_iZv'_i$, para $i = 1, ..., n$;
- (vem) wZw' e $R'_\triangle w'v'_1...v'_n \overset{\mathrm{Z}}{\Rightarrow} wZf(w)$ e $R'_\triangle f(w)v'_1...v'_n \overset{\mathrm{f}}{\Rightarrow}$ existem $v_1, ..., v_n$ em W tais que $R_\triangle wv_1...v_n$ e $v'_i = f(v_i)$, para $i = 1, ..., n \Rightarrow$ existem $v_1, ..., v_n$ em W tais que $R_\triangle wv_1...v_n$ e $v_iZv'_i$, para $i = 1, ..., n$.

Logo, morfismos limitados sobrejetivos são suficientes à bissimulação. ■

Dados dois (τ, Φ)-modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, os mundos $w \in W$ e $w' \in W'$ são *modalmente equivalentes* quando, para todo $\varphi \in Fml(\tau, \Phi)$, $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{B}, v) \models \varphi$, o que denotamos por $(\mathfrak{A}, w) \equiv (\mathfrak{A}', w')$ ou, simplemesmente, $w \equiv w'$, se os modelos são fornecidos pelo contexto. Os modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são *modalmente equivalentes* quando, para todo w em $\mathfrak{A}$ e todo w' em $\mathfrak{A}'$, $w \equiv w'$.

A próxima proposição estabelece que fórmulas modais são invariantes por bissimulação.

Proposição 4.2.5 *A existência de uma bissimulação que conecte dois mundos é condição suficiente à equivalência modal entre estes mundos.*

Prova. Sejam $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ dois (τ, Φ)-modelos e Z uma bissimulação que conecta os mundos w de W e w' de W'. Provaremos, por indução na complexidade das (τ, Φ)-fórmulas φ, que $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}', w') \models \varphi$.

Passo base: o caso em que φ é $\perp$ é imediato; se φ é a letra proposicional p, então $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi \Leftrightarrow w \in \vartheta(p) \overset{\mathrm{Z}}{\Leftrightarrow} w' \in \vartheta'(p) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}', w') \models \varphi$.

Passo de indução: os casos em que φ é $\neg\psi$ ou $\psi \vee \gamma$ são imediatos a partir da hipótese de indução. Vamos nos concentrar no caso em que $1 \leq i \leq n$ e φ é $\triangle(\psi_1, ..., \psi_n)$: $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, w) \models \triangle(\psi_1, ..., \psi_n) \Leftrightarrow$ existem $v_1, ...v_n$ em W tais que $wR_\triangle v_1...v_n$ e $\mathfrak{A}, w \models \psi_i \overset{\mathrm{HI}}{\Leftrightarrow}$ existem $v_1, ..., v_n$ tais que $wR_\triangle v_1...v_n$ e $\mathfrak{A}', w' \models \psi_i \overset{\mathrm{Z}}{\Leftrightarrow}$ existem $v'_1, ..., v'_n$ tais que $w'R'_\triangle v'_1...v'_n$ e $(\mathfrak{A}', w') \models \psi_i \Leftrightarrow (\mathfrak{A}', w') \models \varphi$. ■

No Capítulo 3 vimos que a existência de um isomorfismo é condição suficiente à equivalencia elementar entre estruturas, embora a recíproca não seja verdadeira; para estabelecer condições necessárias e suficientes à equivalência elementar, enfraquecemos a noção de isomorfismo com a introdução dos m-isomorfismos e estabelecemos o resultado almejado. A situação aqui é análoga: uma bissimulação que conecte mundos é condição suficiente à equivalência modal entre os mundos, embora a recíproca não seja verdadeira (Corolário 4.2.13). A saída é enfraquecermos a noção de bissimulação através do conceito de n-bissimulação e enfraquercemos a equivalência modal entre mundos através da noção de n-equivalência modal. Com esses novos conceitos teremos condições de estabelecer condições, necessárias e suficientes, à equivalência modal entre mundos de um modelo.

Definição 4.2.6 Os mundos w e w', respectivamente das (τ, Φ)-estruturas $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{B} = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ são *n-bissimilares* quando existe uma sequência de bissimulações $Z_n \subseteq ... \subseteq Z_0$ tais que, para $n \geq i + 1$, valem as propriedades:

(a) wZ_nw' e, se vZ_0v', então v e v' satisfazem as mesmas letras proposicionais;

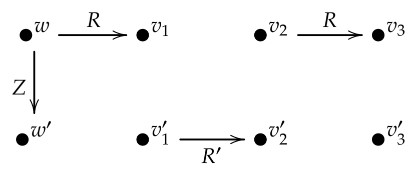
(b) Se $vZ_{i+1}v'$ e $R_\triangle vu_1...u_m$, então existem u'_1, ..., u'_m em W' tais que $R'_\triangle v'u'_1...u'_m$, $j \leq m$ e $u_jZ_iu'_j$;

(c) Se $vZ_{i+1}v'$ e $R'_\triangle u'_1...u'_m$, então existem u_1, ..., u_m em W tais que $R_\triangle vu_1...u_m$, $j \leq m$ e $u_jZ_iu'_j$.

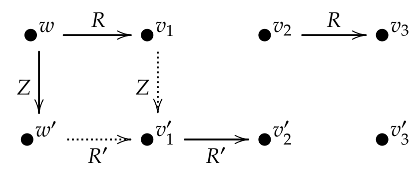
Denotamos que os mundos w e w' são n-bissimilares por $(\mathfrak{A}, w) \leftrightarrows_n (\mathfrak{A}', w')$ ou, simplesmente, $w \leftrightarrows_n w'$.

Quando consideramos modelos para a linguagem modal básica, mundos n-bissimilares indicam que " podemos fechar o quadrado" n vezes, como ilustrado no exemplo abaixo.

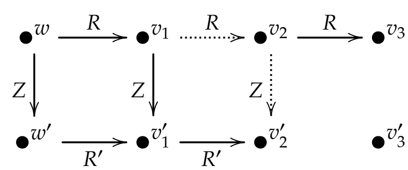
Exemplo 4.2.7 Suponha que seja dada uma representação parcial das estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, adaptadas à linguagem modal básica, e que $(\mathfrak{A}, w) \leftrightarrows_2 (\mathfrak{B}, w')$. Os mundos e relações do modelo $\mathfrak{A}$ estão representados na linha orizontal superior dos diagramas, enquanto os componentes de $\mathfrak{B}$ estão na horizontal inferior. O conjunto Φ é qualquer e todos seus membros são verdadeiros em todos os mundos de ambos os modelos. A partir da representação parcial inical e da suposição que são 2-bissimilares, podemos escrever Z_2, Z_1 e Z_0 completando o quadrado 3 vezes:



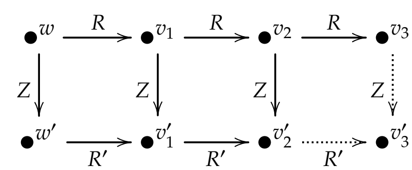
Representação parcial dos modelos



Z_2 ("Vai")



Z_1 ("Vem")

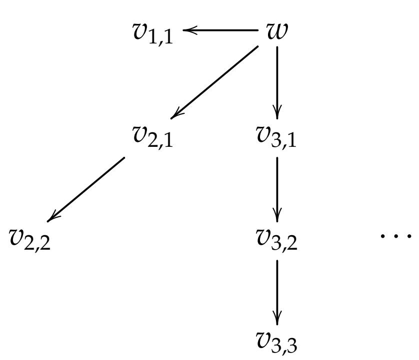


Z_0 ("Vai")

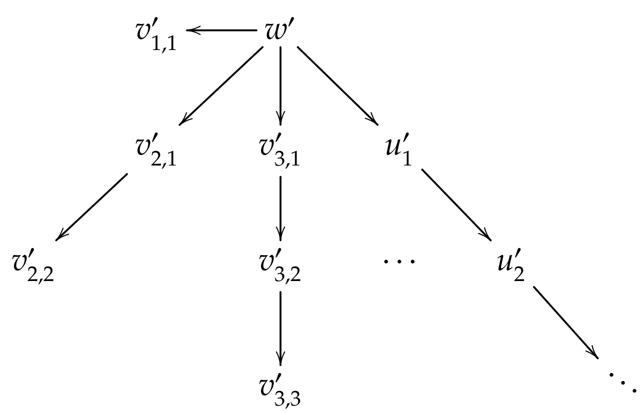
Figura 4.2.2

Anteriormente afirmamos que a noção de n-bissimilaridade entre modelos é mais fraca do que a de bissimilaridade. De fato, é claro que se dois modelos são bissimilares, então eles são n-bissimilares: basta considerarmos a sequência constante $Z_n \subseteq ... \subseteq Z_0$ em que, para todo i, $Z_i = Z$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 4.2.8 Consideremos as estruturas $\mathfrak{A} = (W, \mathcal{R}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (W', \mathcal{R}', \vartheta')$ em que todas as letras proposicionais são verdadeiras em todos os mundos de ambos os modelos. Tais estruturas estão representadas na Figura 4.2.3 e Figura 4.2.4, abaixo.



Estrutura $\mathfrak{A}$
Figura 4.2.3



Estrutura $\mathfrak{B}$
Figura 4.2.4

Observemos que, em $\mathfrak{A}$, cada "ramo" representa uma relação binária e, portanto, há infinitas relações, cada uma delas finita; por outro lado, em $\mathfrak{B}$ há infinitas relações binárias finitas e uma relação binária infinita. Deste modo, em $\mathfrak{A}$ temos que $wRv_{n,1}$ e $v_{n,1}Rv_{n,2}$ e ... e $v_{n,n-1}Rv_{n,n}$, qualquer que seja o n e, sem perda de generalidade, podemos supor n par.

Suponhamos que Z_n é uma n-bissimulação entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ e que w e w' são conectados por Z. Consequentemente, podemos aplicar a propriedade do vai-e-vem:

$$\begin{array}{cccc}
\text{(vai)} & wRv_{n,1} \text{ e } wZw' & \Rightarrow & v_{n,1}Zu_1 \text{ e } w'R'u' \\
\text{(vem)} & u_1Ru_2 \text{ e } v_{n,1}Zu_1' & \Rightarrow & v_{n,2}Zu_2 \text{ e } v_{n,1}Rv_{n,2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{(vai)} & v_{n,n-1}Rv_{n,n} \text{ e } v_{n,n-1}Zu_{n-1} & \Rightarrow & v_{n,n}Zu_n \text{ e } u_{n-1}R'u_n
\end{array}$$

Assim, após $\frac{n}{2}+1$ aplicações da regra do vai temos $v_{n,n}Zu_n$ e $u_{n-1}R'u_n$, mas não existe um $v_{n,n+1}$ em $\mathfrak{A}$ tal que $v_{n,n}Rv_{n,n+1}$. Logo, Z_n é uma n-bissimulação, mas não uma bissimulação.

A proposição a seguir mostra uma importante relação entre os conceitos de fórmula de grau n (finito) e estruturas n-bissimilares. Basicamente, estruturas n-bissimilares concordam em todas as fórmulas de grau menor ou igual a n.

Proposição 4.2.9 *Sejam (τ, Φ) uma linguagem modal finita, w e w' dois mundos, respectivamente, dos (τ, Φ)-modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. A existência de uma n-bissimulação entre w e w' é condição necessária e suficiente para que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ concordem em todas as (τ, Φ)-fórmulas de grau no máximo n.*

Prova. (Suficiência) A prova é por indução no grau máximo n. No passo base, $n = 0$ e, portanto, trata-se de $\perp$ e a conclusão é imediata, ou trata-se de uma letra proposicional p e, neste caso, $(\mathfrak{A}, w) \models p \Leftrightarrow w \in \vartheta(p) \overset{\text{biss}}{\Leftrightarrow} w' \in \vartheta'(p) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}', w') \models p$.

HI: se φ tem grau $k < n$ e $w \leftrightarroweq_n w'$, então $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}', w') \models \varphi$.

Passo de indução: suponha que φ é de grau $k+1$. Logo, φ é da forma $\triangle(\psi_1, ..., \psi_m)$, para todo $1 \leq i \leq m$, $gr(\psi_i) \leq k$ e para ao menos um $1 \leq j \leq m$, $gr(\psi_j) = k$. Assim,

$$\begin{array}{rcl}
(\mathfrak{A}, w) \models \triangle(\psi_1, ..., \psi_m) & \Leftrightarrow & \text{existem } v_1, ..., v_m \text{ em } W \text{ tais que } wR_\triangle v_1...v_m \text{ e } (\mathfrak{A}, w) \models \psi_j \\
& \overset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} & \text{existem } v_1, ..., v_m \text{ em } W \text{ tais que } wR_\triangle v_1...v_m \text{ e } (\mathfrak{A}', w') \models \psi_j \\
& \overset{\text{n-biss}}{\Leftrightarrow} & \text{existem } v_1', ..., v_m' \text{ em } W' \text{ tais que } wR_\triangle' v_1'...v_m' \text{ e } (\mathfrak{A}', w') \models \psi_j \\
& \Leftrightarrow & (\mathfrak{A}', w') \models \triangle(\psi_1, ..., \psi_m).
\end{array}$$

(Necessidade) Vamos mostrar para o caso em que $\tau = \{\Diamond\}$ e indicar como adaptar a prova para os demais casos; a ideia é provar que a relação "dois mundos concordam em todas as fórmulas de grau até n" é, ela própria, uma bissimulação, isto é, verificar que

$$Z_n = \{(w, w') \mid w \text{ e } w' \text{ concordam nas fórmulas de grau até } n\}$$

é uma n-bissimulação. As condições (i) e (ii) da definição de n-bissimulação são imediatas. A propriedade do vem mostraremos por redução ao absurdo.

Suponha que a "propriedade do vem" falha para Z_n, isto é, $vZ_{i+1}v'$, Rvu e que para todo u', não é o caso que $R'v'u'$ ou não é o caso que uZ_iu'.

Consideremos o conjunto $T' = \{u' \mid R'v'u'\}$. Asseguramos que T não é vazio; de fato, suponha que $(\mathfrak{A}, u) \models \psi$, sendo que ψ é uma fórmula de grau i. Como $(\mathfrak{A}, u) \models \psi$ e, por hipótese, Rvu, então $(\mathfrak{A}, u) \models \Diamond\psi$. A partir da hipótese $vZ_{i+1}v'$ concluímos que $(\mathfrak{A}, v) \models \Diamond\psi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}', v') \models \Diamond\psi$. Logo, existe algum u' tal que $R'v'u'$.

Assim, para todo u' não é o caso que uZ_iu'. Como τ e Φ são ambos finitos, podemos considerar o conjunto de todas as fórmulas de grau até i como equivalentes a uma única fórmula φ (de grau não maior que i) tal que u e u' discordam. Podemos então supor que $(\mathfrak{A}, u) \models \varphi$ e não é o caso que $(\mathfrak{A}', u') \models \varphi$. Assim, como Rvu e $R'v'u'$, $(\mathfrak{A}, u) \models \varphi$ e não é o caso que $(\mathfrak{A}', u') \models \varphi$, o que contraria a hipótese que $vZ_{i+1}v'$.

Para o caso de τ qualquer, basta corrigir a definição de T' para contemplar todas as relações nos modelos. A "propriedade do vem" em Z_n é verificada de modo análogo. ∎

Encerraremos esta seção com os conceitos de altura e restrição de um modelo.

Definição 4.2.10 Sejam (τ, Φ) uma linguagem modal em que todos os operadores modais são unários e $\mathfrak{A} = (W, R_1, R_2, ..., \vartheta)$ um (τ, Φ)-modelo enraizado. A *altura do mundo v de $\mathfrak{A}$* é:

(a) zero, quando v é a raiz;

(b) $n + 1$, quando a v não foi atribuída altura menor do que $n + 1$ e, para algum j, temos tanto R_juv quanto que altura de u é n.

A *altura de um modelo* $\mathfrak{A}$ é o maior n tal que n é altura de algum mundo de $\mathfrak{A}$, quando tal n existe; caso contrário, a altura de $\mathfrak{A}$ é infinita.

A ideia básica é: a raiz tem altura zero, os sucessores imediatos da raiz têm altura 1, os sucessores imediatos dos sucessores da raiz tem altura 2 e assim por diante. Podemos considerar então um modelo que tenha seus mundos limitados a uma altura k qualquer.

Definição 4.2.11 Sejam (τ, Φ) uma linguagem modal em que todos os operadores modais são unários e $\mathfrak{A} = (W, R_1, R_2, ..., \vartheta)$ um (τ, Φ)-modelo enraizado. A *restrição de $\mathfrak{A}$ ao número k* é denotado $[\mathfrak{A}|_k]$ e definido por $[\mathfrak{A}|_k] = (W_k, R_{1k}, ..., \vartheta_k)$, sendo que $W_k = \{v \in W \mid \text{altura}(v) \leq k\}$, $R_{ik} = R_i \cap (W_k \times W_k)$ e, para cada letra proposicional p, $\vartheta_k(p) = \vartheta(p) \cap W_k$.

Basicamente, a restrição de um modelo a um número k é um submodelo tal que todos seus mundos tem altura no máximo k.

Proposição 4.2.12 *Sejam τ uma assinatura modal munida apenas de operadores unários, $\mathfrak{A}$ um τ modelo enraizado, k um número natural qualquer e w um mundo qualquer de $[\mathfrak{A}|_k]$. Nestas condições, $([\mathfrak{A}|_k], w) \leftrightarroweq_l (\mathfrak{A}, w)$, sendo que $l = k -$ altura(w).*

Prova. Vamos considerar a seguinte relação: $Z_l = \{(w, w) \mid w \in [\mathfrak{A}|_k]\}$. A verificação que tal relação é uma l-bissimulação entre $\mathfrak{A}$ e $[\mathfrak{A}|_k]$ é direta: as condições (i) e (ii) são imediatas, enquanto a "propriedade do vai-e-vem" é verificada por indução na altura de w. ∎

O próximo corolário mostra que a recíproca da Proposição 4.2.5 é falsa.

Corolário 4.2.13 *Dois mundos n-equivalentes não necessariamente são n-bissimilares.*

Prova. Pela Proposição 4.2.12, quaisquer dois mundos de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são l-bissimilares, para um l adequado e, pela Proposição 4.2.9, satisfazem as mesmas fórmulas de grau até l. Mas, como mostramos no Exemplo 4.2.7, n-equivalência não implica em n-bissimilaridade. ∎

4.3 Árvores

Dados um conjunto não vazio W qualquer e uma relação binária R sobre W, o *fecho transitivo* $R^\star$ é a menor das relações binárias transitivas em W e que contém R, isto é, $R^\star = \cap\{R'\}$, em que $R \subseteq R'$ e R' é uma relação binária transitiva em W. Por sua vez, o *fecho reflexivo transitivo* $R^{\star\star}$ é a menor das relações binárias reflexivas e transitivas em W e que contém R, ou seja, $R^{\star\star} = \bigcap\{R''\}$, em que $R \subseteq R''$ e R'' é uma relação binária reflexiva e transitiva em W. De posse dessas noções, podemos definir uma estrutura muito útil às considerações acerca de modelos da linguagem modal básica, conhecida como árvore.

Definição 4.3.1 Uma *árvore* é um par (T, S), em que T é um conjunto não vazio e S é uma relação binária em T que satisfaz as propriedades:

(a) Existe um único $r \in T$ tal que todo $t \in T$ vale que $S^{\star\star}rt$;

(b) Para todo $t \in T$, $t \neq r$, existe um único $t' \in T$ tal que $St't$;

(c) Não existe um $t \in T$ tal que $S^\star tt$.

Os elemento de T são denominados *nós* e, quando tSu, t é o *S-predecessor* de u e u é o *S-sucessor* de t. Se a relação S da árvore estiver clara pelo contexto diremos simplesmente *sucessor* e *antecessor*.

As propriedades acima que definem uma árvore estabelecem que (a) r é a raiz da árvore, (b) que todo nó distinto da raiz tem um único predecessor e (c) que a árvore é acíclica, isto é, não é lícito que em S ocorra u_1Su_2 e u_2Su_3 e ... e u_nSu_1. Abaixo, a Figura 4.3.1 representa uma "não-árvore", enquanto a Figura 4.3.2 representa uma árvore.

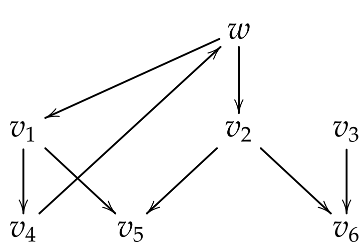


Figura 4.3.1

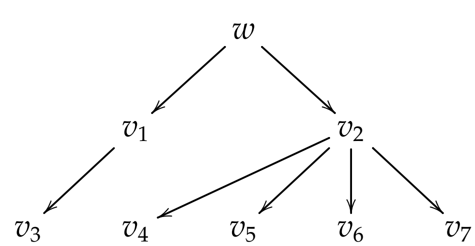


Figura 4.3.2

A estrutura representada na Figura 4.3.1 falha nas três condições de árvore, pois (a) existem duas duas "raízes", isto é, dois elementos, w e v_3, sem predecessor; (b) o "nó" v_5 possui dois predecessores, v_1 e v_2 e (c) existe um ciclo wv_1v_4w. A estrutura representada a direita satisfaz as três condições de árvore e tem como raiz w.

A partir de uma árvore podemos obter uma estrutura modal, bastando para isso dotar a árvore de uma valoração. Assim, se (T, S) é uma árvore, então $\mathfrak{A} = ((T, S), \vartheta) = (T, S, \vartheta)$ é uma estrutura modal. Nesta situação, dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma *estrutura baseada em árvore* ou que a estrutura modal $\mathfrak{A}$ possui uma *árvore subjacente*.

A prova de caracterização que visamos exige que consideremos estruturas que, intuitivamente se parecem com árvores, mas são mais ricas do que estas. Denominaremos estas “árvores encorpadas” de *estruturas tipo-árvore*, usando como sinônimo *modelos tipo-árvore*. Adotaremos aqui postura semelhante àquela adotada por Blackburn *et ali* em [3], página 6: “uma definição formal aqui causaria mais mal do que bem, mas no texto iremos indicar, sempre que uma estrutura for chamada de “tipo-árvore”, onde a árvore implícita pode ser encontrada”. No Exemplo 4.3.3 consideraremos em detalhe uma estrutura deste tipo.

A importância central dos modelos tipo-árvore reside no fato de que, a partir de qualquer modelo enraizado, podemos construir canonicamente um modelo do tipo-árvore que preserva a satisfatibilidade modal. Antes de provar essa asserção iremos discutir a estratégia de construção de tais modelos nos próximos dois exemplos, onde casos particulares do teorema geral são esmiuçados.

Exemplo 4.3.2 Consideremos a estrutura representada abaixo:

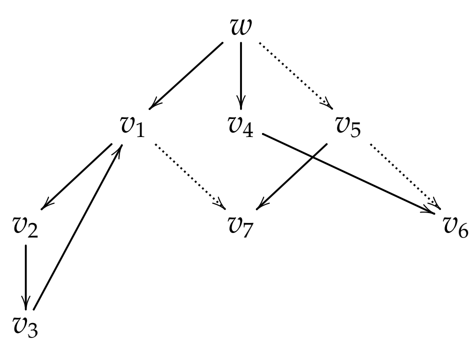


Figura 4.3.3

Podemos facilmente considerar este diagrama como uma estrutura adaptada à uma coleção de (τ, Φ)-fórmulas modais, sendo que $\tau = \{\Diamond_1, \Diamond_2\}$ e Φ qualquer. Para isso, tomamos a estrutura $\mathfrak{A} = (W, R_{\Diamond_1}, R_{\Diamond_2}, \vartheta\}$ em que $W = \{w, v_1, ..., v_7\}$, e as relações são $R_{\Diamond_1} = \{(w, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (w, v_4), (v_4, v_6), (v_5, v_7)\}$ e $R_{\Diamond_2} = \{(w, v_5), (v_1, v_7), (v_5, v_6)\}$, enquanto a valoração é $\vartheta(p) = W$, para todo $p \in \Phi$.

O ponto aqui é: como transformar a estrutura $\mathfrak{A}$ em um (τ, Φ)-modelo baseado em árvore $\mathfrak{B}$ tal que, toda (τ, Φ)-fórmula seja verdadeira em um mundo de $\mathfrak{A}$ se, e somente se, o for em um mundo correspondente de $\mathfrak{B}$.

A estratégia de construção do novo modelo, com árvore subjacente, é considerar cada mundo deste como um “caminho” no modelo antigo e estabelecer que dois mundos se relacionam no “novo” quando um é segmento inicial do outro. A ideia é representada na Figura 4.3.4:

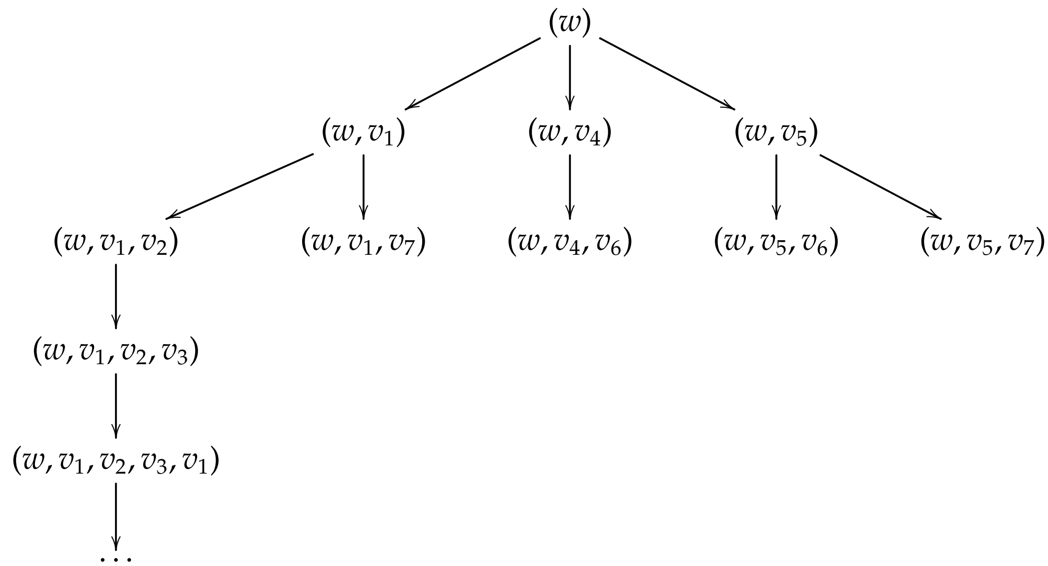


Figura 4.3.4

A partir da árvore representada na figura acima obtemos um (τ, Φ)-modelo $\mathfrak{A}'$ de modo análogo à obtenção de $\mathfrak{A}$ a partir da Figura 4.3.3. Tal modelo terá domínio infinito W', em que cada mundo é uma sequência de mundos de $\mathfrak{A}$, terá apenas uma relação binária R' e o par (W', R') é uma árvore. De modo mais preciso, consideremos o $\mathfrak{A}' = \{W', R', \vartheta'\}$ tal que, para $i = 1, 2$:

- Os elementos de W' são as sequências finitas $(w, u_1, ...u_n)$, $n \geq 0$, de mundos de W tais que existe um "caminho" em $\mathfrak{A}$, isto é, $wR_{\Diamond_i}u_1$ e $u_1R_{\Diamond_i}u_2$ e ... e $u_{(n-1)}R_{\Diamond_i}u_n$;

- $(w, u_1, ..., u_n)R'(w, v_1, ..., v_m)$ se, e somente se, $m = n + 1$, $u_i = v_i$ quando $i < m$ e $u_nR_{\Diamond_i}v_m$ vale em $\mathfrak{A}$;

- $(w, u_1, ..., u_n) \in \vartheta'(p)$ se, e somente se, $u_n \in \vartheta(p)$.

Falta estabelecermos que $\mathfrak{A}$ satisfaz em v_i exatamente as mesmas fórmulas que $\mathfrak{A}'$ satisfaz em $(w, v_1, ..., v_i)$ e, para isso, consideraremos a função $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ tal que $(w, v_1, ..., v_n) \mapsto v_n$. Vamos verificar que f é um morfismo limitado sobrejetivo:

- f é sobrejetiva. Seja v um mundo de $\mathfrak{A}$; há portanto duas possibilidades: (i) se $v = w$, como o domínio de $\mathfrak{A}'$ são as sequências finitas com primeiro elemento w, temos a sequência unitária (w) tal que $f((w)) = v$; (ii) se $v \neq w$, como $\mathfrak{A}$ tem raiz w, temos o caminho $wR_{\Diamond_i}u_1...R_{\Diamond_i}v$ e, por definição de W', temos também a sequência $(w, v_1, ..., v)$ cuja imagem por f é v.

- para $n \geq 0$, $(w, u_1, ..., u_n) \in \vartheta'(p) \Leftrightarrow u_n \in \vartheta(p) \Leftrightarrow f((w, u_1, ..., u_n)) \in \vartheta(p)$;

- $(w, u_1, ..., u_n)R'(w, v_1, ..., v_m) \Rightarrow f((w, u_1, ..., u_n))R_{\Diamond_i}f((w, v_1, ..., v_m)) \Rightarrow u_nR_{\Diamond_i}v_m$;

- Se $f((w, u_1, ..., u_n))R_{\Diamond_i}v$, então pela definição de R' existe a sequência $(w, u_1, ..., u_n, v)$ em $\mathfrak{A}'$ tal que $(w, u_1, ..., u_n)R'(w, u_1, ..., u_n, v)$ e, pela definição, $f((w, u_1, ..., u_n, v)) = v$.

Assim, em virtude da Proposição 4.2.4 os mundos w e w' são modalmente equivalentes.

No exemplo acima, consideramos o diagrama de uma estrutura enraizada munida de relações binárias e construímos, canonicamente, um modelo baseado em árvore. No próximo exemplo, partiremos de um diagrama com relações binárias e ternárias e construiremos uma estrutura tipo-árvore $\mathfrak{B} = (W', T', P, Q, R, \vartheta')$, em que W' é o domíno de $\mathfrak{B}$, T' é uma relação binária em W', o par (W', T') é uma árvore, P, Q e R são relações unárias em W.

Exemplo 4.3.3 Consideremos o modelo $\mathfrak{A} = (\{w, v_1, v_2, ..., v_7\}, \{R, S\}, \vartheta)$ com raiz w tais que $R = \{(w, v_1), (w, v_2), (v_2, v_5)\}$ e $S = \{(w, v_2, v_3), (v_1, v_4, v_5), (v_2, v_6, v_7)\}$ e ϑ é qualquer. A figura abaixo esboça uma tal estrutura.

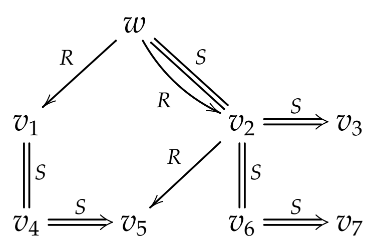


Figura 4.3.5

Para construirmos um modelo tipo-árvore $\mathfrak{B}$ a partir de $\mathfrak{A}$ procedemos como no exemplo anterior, porém com um cuidado a mais: precisamos rastrear a "origem" dos mundos de $\mathfrak{A}$, o que será feito através dos predicados unários P, Q e R, em que $R(w, v_1, ..., v_n)$ vale se, e somente se, $n = 0$, $P(w, v_1, ..., v_n)$ vale em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $v_{n-1}Rv_n$ ou wRv_1, e $Q(w, v_1, ..., v_n)$ vale em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, $Qwv_{n-1}v_n$ ou $Qv_{n-2}v_{n-1}v_n$.

O diagrama abaixo ilustra como os mundos desse novo modelo são construídos, bem como a relação entre eles.

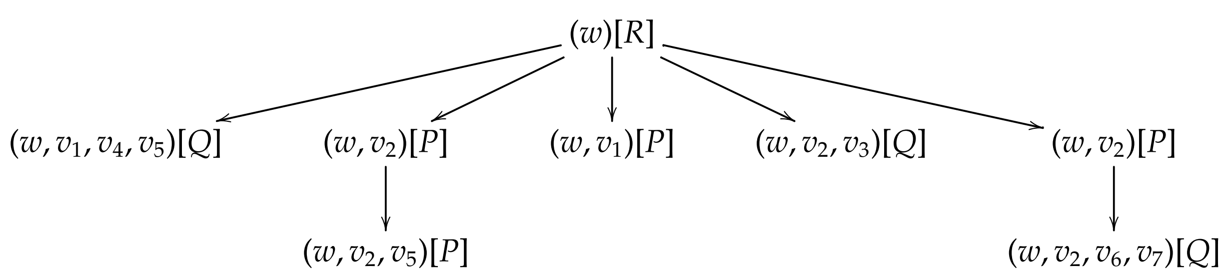


Figura 4.3.6

Por exemplo, $(w, v_2)[P]$ indica que construímos o mundo (w, v_2) a partir de dois mundos w e v_2, que se relacionavam através de uma relação binária, o que é capturado por $[P]$. Por outro lado, $(w, v_2, v_6, v_7)[Q]$ indica que os mundos v_2, v_6 e v_7 se relacionavam, nesta ordem, através de uma relação ternária, capturada por $[Q]$. Com isso $\mathfrak{B} = (W', T', P, Q, \vartheta')$ é um modelo tipo-árvore, $W' = P \cup Q \cup R$ e (W', T') é a árvore subjacente à $\mathfrak{B}$. Os exemplos discutidos motivam o teorema seguinte, bem como sua prova.

Proposição 4.3.4 *Seja (τ, Φ) uma linguagem modal em que τ é finita. Para todo modelo enraizado $\mathfrak{A}$ existe um modelo tipo árvore $\mathfrak{B}$, tal que toda fórmula satisfatível em $\mathfrak{A}$ é satisfatível em $\mathfrak{B}$.*

Prova. Como τ é finita, podemos considerar $\tau = \{\triangle^1_{1_1}, ..., \triangle^1_{n_1}, ..., \triangle^m_{1_m}, ..., \triangle^m_{n_m}\}$ e tomaremos w como a raiz de $\mathfrak{A}$. Para cada $1 \leq i \leq m$ introduzimos um predicado unário P_i tal que: (i) se $i = 1$, então $P_1(z)$ vale em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, z é a sequência unitária (w); (ii) se $i > 1$, então $P_i(w, v_1, ..., v_n)$ vale em $\mathfrak{B}$ se, e somente se, o segmento final de comprimento i é elemento de uma relação R^i_j em $\mathfrak{A}$. Com esses predicados, rastreamos as relações de $\mathfrak{A}$ que dão origem aos mundos de $\mathfrak{B}$. Assim, $(w, v_1, ..., v_n) \in P_3$ se, e somente se, existe uma relação ternária R em $\mathfrak{A}$ tal que $Rv_{n-2}v_{n-1}v_n$, se $n > 2$ e Rwv_1v_2, se $n = 2$.

O modelo $\mathfrak{B}$ será construído canonicamente do seguinte modo:

- $W' = \bigcup_i P_i$;
- Sejam u e v elementos de W' tais que $u = (u_1, ..., u_m)$ e $v = (v_1, ..., v_m)$. Então, uTv se, e somente se,
$$\begin{cases} u \in P_1 \text{ e } v \in P_i \text{ e } v_{n-(i-1)} = u \\ \text{ou} \\ u \in P_2 \text{ e } v \in P_i \text{ e } v_{n-(i-1)} = u_m \end{cases}$$
- ϑ' é tal que $(u_1, ..., u_m) \in \vartheta(p)$ se, e somente se, $u_m \in \vartheta(p)$.

Agora, consideramos a função $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tal que

$$(w, v_1, ..., v_n) \mapsto \begin{cases} w, & \text{quando } (w, v_1, ..., v_n) \in P_1 \\ (v_{n-(i-1)}, ..., v_{n-(i-i)}), & \text{quando } (w, v_1, ..., v_n) \in P_i \end{cases}$$

Como f assim definida é um morfismo limitado sobrejetivo[2] e a Proposição 4.2.4 garante que $(\mathfrak{A}, w)$ e $(\mathfrak{B}, (w))$ são modalmente equivalentes. ■

Definição 4.3.5 Seja $\mathfrak{A}$ uma (τ, Φ)-estrutura. A *gradação de um mundo u de $\mathfrak{A}$* é a cardinalidade do conjunto $\{\overline{w} \in \mathfrak{A} \mid \text{para algum } R \text{ e algum } i > 1,\ u = v_i \text{ e } R(v_1, ..., v_i, ..., v_n)\}$, em que $\overline{w}$ é uma sequência de elementos de $\mathfrak{A}$. Quando a gradação de um mundo w em uma estrutura $\mathfrak{A}$ for um natural finito m, diremos, simplesmente, que a *gradação de w é m.*

[2] A prova desse fato é análoga àquela apresentada no Exemplo 4.3.2 e por isso foi omitida.

A gradação de um mundo em uma estrutura indica, basicamente, o número de vezes em que o mundo ocorre em uma relação, mas não como primeiro elemento do argumento. A próxima proposição relaciona a gradação de um mundo e estruturas tipo-árvore.

Corolário 4.3.6 *Seja τ uma assinatura modal finita. Para todo modelo enraizado $\mathfrak{A}$ existe um modelo $\mathfrak{B}$, tal que a raiz possui gradação zero e todos os demais mundos possuem gradação no máximo 1.*

Prova. Dado um modelo enraizado $\mathfrak{A}$, construímos um modelo tipo-árvore $\mathfrak{B}$ pelo método canônico; logo, a raiz da árvore implícita possui gradação zero e qualquer outro mundo possui gradação no máximo 1 pois, caso contrário, teria dois antecessores, o que contraria o conceito de árvore. ■

4.4 Lógica Modal Abstrata e Teorema Modal de Lindström

Inspirados pela definição de lógica abstrata apresentada no Capítulo 1, podemos formular uma definição de lógica modal abstrata como um par, formado por um conjunto[3] e uma relação binária, definida como uma subcoleção do produto cartesiano entre uma classe de estruturas e esse conjunto. Um primeiro ponto a ser notado é que a classe de estruturas que comporá o domínio da relação não é a classe das estruturas de primeira ordem e nem mesmo a classe das estruturas modais como vimos até aqui, mas sim a classe das *estruturas-apontadas* modais.

Uma *estrutura-apontada modal* ou *modelo-apontado modal* $[\mathfrak{A}, w]$ é a quadrupla $(W, \mathcal{R}, \vartheta, w)$, em que W é um conjunto não vazio, $\mathcal{R}$ é uma coleção de relações sobre W, ϑ uma função e w um elemento do conjunto W. A introdução destes modelos à primeira vista parece arbitrária, mas há um motivo fundamental através do qual tal postura se justifica: permite-nos definir a relação de satisfatibilidade em um contexto geral, abstrato, sem necessidade de referência direta a mundos da estrutura. Todos os conceitos anteriormente definidos para modelos modais se adaptam, de modo imediato, aos modelos-apontados modais. Em especial, para uma linguagem modal "concreta" (τ, Φ), uma fórmula φ dessa linguagem e uma (τ, Φ)-estrutura apontada $[\mathfrak{A}, w]$, vale a relaçao $[\mathfrak{A}, w] \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}, w) \models \varphi$ vale.

Definição 4.4.1 Uma *lógica modal abstrata* $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ é um par $(\mathrm{L}_{\mathrm{M}}, \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}})$ que satisfaz as seguintes condições:

(a) L_{M} é a imagem de uma função da classe dos conjuntos $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$. Os elementos de L_{M} são as *fórmulas modais abstratas* e, a cada fórmula modal abstrata φ está associado o conjunto finito $\mathrm{L}_{\mathrm{M}}(\varphi^{\tau}_{\Phi})$, denominado *linguagem modal abstrata de* φ . $\models_{\mathbb{L}\mathbb{M}}$ é uma relação binária entre a classe das estruturas modais-apontadas $\mathcal{K}$ e as fórmulas

[3] Possivelmente uma classe própria embora, em geral nos casos concretos, se trate de um conjunto.

modais abstratas, isto é, $\models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \subseteq \mathcal{K} \times \mathrm{L_M}$. As fórmulas modais abstratas também serão denominadas $\mathbb{L}_\mathbb{M}$-fórmulas;

(b) Para uma linguagem $\mathcal{L}$ e um $\mathcal{L}$-modelo-apontado $[\mathfrak{A}, w]$, a relação $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ se verifica, ou não, quando $\mathrm{L_M}(\varphi^\tau_\Phi) \subseteq \mathcal{L}$; caso contrario, a relação é indefinida;

(c) Se $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ e $[\mathfrak{A}, w]$ é um reduto de $[\mathfrak{B}, w]$ para a $\mathrm{L_M}(\varphi^\tau_\Phi)$, então $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$;

(d) Se $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ e $[\mathfrak{A}, w]$ é bissimilar a $[\mathfrak{B}, w]$, então $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$.

Usaremos também *sistema semântico modal* e *lógica* $\mathbb{L}_\mathbb{M}$ como sinônimos de lógica modal abstrata.

A propriedade (a) é denominada *propriedade da ocorrência*, enquanto (c) e (d) são, respectivamente, as propriedades do *reduto* e da *bissimilaridade*. Comparando as definições de lógica abstrata do Capítulo 1 e esta, de lógica modal abstrata, notamos que um aspecto fundamental da "modalidade" de uma lógica é caracterizado pela bissimulação.

Exemplo 4.4.2 Se consideramos (τ, Φ) uma linguagem modal básica, $\mathbb{L}_{\mathbb{M}0} = Form(\tau, \Phi)$ e a relação $\models_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}0}}$ como estabelecida na Definição 4.1.7, então o par $\mathbb{L}_{\mathbb{M}0} = (\mathrm{L_M}, \models_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}0}})$ é uma lógica modal abstrata, denominda *lógica modal básica.*

Exemplo 4.4.3 A lógica modal *temporal* $\mathbb{L}_\mathbb{T}$ é um exemplo típico de lógica modal que escapa à definição de lógica modal abstrata. A assinatura modal de $\mathbb{L}_\mathbb{T}$ foi dada no Exemplo 4.1.3 e a classe dos modelos no Exemplo 4.1.6; agora, consideremos as estruturas $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <^\mathbb{Z}, >^\mathbb{Z}, \vartheta)$ e $\mathfrak{A}' = (\mathbb{Z}_+, <^{\mathbb{Z}_+}, >^{\mathbb{Z}_+}, \vartheta'\}$, em que a segunda é o submodelo da primeria, gerado por $\{0\}$ Por fim, tomemos $Z \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ tal que $Z = \{(x, y) \mid x = y\}$.

Afirmamos que Z é uma bissimulação. De fato, como ϑ' é restrição de ϑ, a primeira propriedade de bissimulação se verifica trivialmente. A "propriedade do vai" também se verifica de modo imediato: se xZy e $x <^{\mathbb{Z}_+} x'$, então existe um y' (o próprio y) tal que $x' <^\mathbb{Z} y'$ e yZy'. A "propriedade do vem" pode ser verificada do mesmo modo.

Entretanto, suponha que ϑ é tal que, para todo $p \in \Phi$, $x \in \vartheta(p)$ se, e somente se, x é par. Assim, existe um $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x < 0$ e $[\mathfrak{A}, x] \models p$ embora não exista um $y \in \mathbb{N}$ tal que $y < 0$ e $[\mathfrak{A}, y] \models p$. Com isso, concluímos que $[\mathfrak{A}, 0] \models \Diamond_P p$, mas não é o caso que $[\mathfrak{A}', 0] \models \Diamond_P p$ e a condição de bissimilaridade da lógica modal abstrata não se verifica.

Uma lógica modal abstrata $\mathbb{L}_\mathbb{M}$ é *fechada para a negação* quando, para toda $\mathbb{L}_\mathbb{M}$-fórmula φ existe uma $\mathbb{L}_\mathbb{M}$-fórmula ψ tal que, para todo modelo $[\mathfrak{A}, w]$, vale $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ se, e somente se, não é o caso que $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$. A fórmulula ψ é a *negação* de φ e é denotada por $\neg\varphi$.

Exemplo 4.4.4 Claramente, a lógica modal básica é fechada para a negação.

Vamos adaptar a noção de extensão de um sistema semântico para o caso dos modais.

Definição 4.4.5 Uma lógica modal abstrata $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}' = (\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}, \models_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}'})$ *estende* a lógica modal abstrata $\mathbb{L}_{\mathbb{M}} = (\mathrm{L}_{\mathrm{M}}, \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}})$ quando, para toda $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$-fórmula φ existe uma $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}'$-fórmula ψ tal que, para todo modelo $[\mathfrak{A}, w]$, vale $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ se, e somente se, vale $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}'} \psi$. Dois modelos $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, w]$ são $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$-*equivalentes* quando, para toda $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$-fórmula, vale $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ se, e somente se, vale $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$.

Vamos, agora, generalizar a noção de grau de uma fórmula de modo a contemplar as fórmulas modais abstratas.

Definição 4.4.6 Uma lógica modal abstrata $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ é munida da *noção de grau finito* quando existe uma função $gr_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}} : \mathrm{L}_{\mathrm{M}} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo modelo apontado $(\mathfrak{A}, w)$ e para toda $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathrm{M}}$ a seguinte condição é satisfeita: $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$ se, e somente se, $[(\mathfrak{A}, w)|_{gr_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}}}, w] \models_{\mathbb{L}\mathbb{M}} \varphi$.

A noção de grau finito é uma restrição forte sobre as lógicas modais abstratas, no sentido de que se uma lógica é munida de tal noção e fechada para negação, para que dois modelos sejam equivalentes basta que eles sejam n-equivalentes. A Proposição 4.4.8 estabelecerá esta ideia em termos precisos.

Caminharemos agora em passos largos em direção ao enunciado e prova da versão modal do Teorema de Lindström, que caracteriza a lógica modal básica como maximal em relação à noção de grau finito e bissimulação. Tal resultado é um dos louros obtdos por Maarten de Rijke em sua tese de doutorado, defendida em 1993. A prova que apresentaremos segue de perto a estratégia esboçada em [3].

Proposição 4.4.7 *Seja* (τ, Φ) *uma linguagem modal tal que* τ *é finito e* $[\mathfrak{A}, w]$ *e* $[\mathfrak{B}, v]$ *são dois* (τ, Φ) *modelos enraizados com raizes de gradação zero, todos os demais mundos possuem gradação no máximo 1 e altura destes modelos é no máximo n. Então* $n+1$*-equivalencia é condição suficiente à existência de uma bissimilaridade entre* $[\mathfrak{A}, w]$ *e* $[\mathfrak{B}, v]$.

Prova. Definamos a seguinte relação

$$Z = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \text{ possuem altura } m \text{ e } [\mathfrak{A}, x],\ [\mathfrak{B}, y] \text{ são } (n-m) \text{ equivalentes}\}$$

Claramente, para que Z esteja bem definida, devemos ter $m \leq n$. Mostraremos que Z é uma bissimulação entre $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, v]$. De fato, se xZy, então $[\mathfrak{A}, x]$ e $[\mathfrak{B}, y]$ concordam em todas as fórmulas de altura no máximo $n-m$ e, como $n-m \geq 0$, concordam em todas as fórmulas de altura maior ou igual a zero; consequentemente, x e y satisfazem exatamente as mesmas fórmulas proposicionais.

Para verificar a "propriedade do vai", consideremos a relação $R_{\triangle}$ em $\mathfrak{A}$ que interpreta $\triangle \in \tau$. Notemos que $n \geq m$ e os modelos $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, v]$ são $n+1$ equivalentes; consequentemente, $n-m \geq 1$ e como τ é finita, existem finitas fórmulas não equivalentes de grau maior ou igual a zero, isto é, de grau $n-m-1$.

Vamos supor que xZy e $R_{\triangle}xx_1...x_k$ e tomaremos ψ_i como a conjunção das fórmulas não equivalentes de grau no máximo $n-m-1$ e que são satisfeitas em x_i. Com isso,

$[\mathfrak{A}, x] \models \triangle(\psi_1, ..., \psi_k)$, $\triangle(\psi_1, ..., \psi_k)$ possui grau $n - m$ e, portanto, como xZy, concluímos que $[\mathfrak{B}, y] \models \triangle(\psi_1, ..., \psi_k)$. Logo, existem $y_1, ..., y_k$ em $\mathfrak{B}$ tais que $R'_{\triangle} y y_1 ... y_k$ e $[\mathfrak{B}, y] \models \psi_i$, para todo $i = 1, ..., k$.

Disto, e da hipótese de que todos mundos possuem gradação no máximo 1, $\mathfrak{altura}(x_i) = \mathfrak{altura}(y_i) = m+1$, $1 \leq i \leq k$ e $[\mathfrak{A}, x_i]$, $[\mathfrak{B}, y_i]$ são $(n-(m+1))$-equivalentes. Consequentemente, $[\mathfrak{A}, x_i] \leftrightarroweq [\mathfrak{B}, y_i]$, o que prova a "propriedade do vai".

A "propriedade do vem" é provada de modo análogo. ■

Antes de estabelecer o resultado central deste capítulo precisamos de mais um resultado:

Proposição 4.4.8 *Sejam $\mathbb{L}_{\mathbb{M}} = (L_M, \models_{\mathbb{LM}})$ uma lógica modal abstrata munida da noção de grau finito, fechada para a negação e φ uma fórmula de $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ tal que $gr_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}}(\varphi) = n$. Nestas condições, se dois modelos $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, w]$ são n-equivalentes, então $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{LM}} \varphi$ implica $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{LM}} \varphi$.*

Prova. Por redução ao absurdo, suponhamos que $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, w]$ são n-equivalentes mas $[\mathfrak{A}, w] \models_{\mathbb{LM}} \varphi$ enquanto $[\mathfrak{B}, w] \models_{\mathbb{LM}} \neg\varphi$. Pela propriedade da ocorrência para lógicas modais abstratas, podemos supor que a linguagem de $\mathcal{L}$ dos modelos é finita e igual a $L_M(\varphi^{\tau}_{\Phi})$; mais que isso, pelo Corolário 4.3.6 podemos supor que $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, w]$ são enraizados, que a raiz possui gradação zero e que os demais mundos deste modelo possuem gradação no máximo 1.

Assim, $[[\mathfrak{A}, w]|_n, w]$ e $[[\mathfrak{B}, w]|_n, w)]$ são n-equivalentes, mas $[[\mathfrak{B}, w]|_n, w] \models_{\mathbb{LM}} \neg\varphi$. Além disso, como tanto $[[\mathfrak{A}, w]|_n, w]$ quanto $[[\mathfrak{B}, w]|_n, w]$ são restrições, respectivamente, em $[\mathfrak{A}, w]$ e $[\mathfrak{B}, w]$ e ambos possuem raízes com gradação zero e demais mundos com gradação no máximo 1. Consequentemente, pela Proposição 4.4.7 tais modelos são bissimilares, o que é absurdo pois contraria a propriedade de bissimilaridade para lógicas modais abstratas. ■

Finalmente, estamos em condições de estabelecer a versão modal do Teorema de Lindström.

Teorema 4.4.9 *Não existe lógica modal abstrata munida da noção de grau finito mais expressiva que a lógica modal básica.*

Prova. Sejam $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ uma extensão da lógica modal básica $\mathbb{L}_{\mathbb{M}_0}$ e φ uma fórmula de $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$. Encontraremos uma fórmula ψ de $\mathbb{L}_{\mathbb{M}_0}$ tal que φ e ψ são modalmente equivalentes.

Pelas propriedades da ocorrência e reduto das lógicas modais abstratas, podemos restringir nossa análise à linguagens finitas. Além disso, φ é modalmente equivalente a alguma fórmula da lógica modal básica se, e somente se, é equivalente a uma fórmula de um certo grau. Suponhamos que $gr_{\mathbb{L}_{\mathbb{M}}}(\varphi) = n$; pela Proposição 4.1.11 há apenas um número finito de fórmulas modais básicas não equivalentes com grau no máximo n. Destas, vamos agrupar aquelas que são de grau n no conjunto Γ_n.

Vamos agora nos concentrar nos modelos que concordam em todas as fórmulas de Γ_n: a relação "satisfazer as mesmas fórmulas em Γ_n" é uma relação de equivalência na classe dos modelos de $\mathbb{L}_{\mathbb{M}_\mathbb{O}}$ e, como $\mathbb{L}_\mathbb{M}$ estende $\mathbb{L}_{\mathbb{M}_\mathbb{O}}$, é uma relação de equivalência na classe dos modelos de $\mathbb{L}_\mathbb{M}$. Como Γ_n é finito, há apenas um número finito de tais classes e podemos escolher $[\mathfrak{A}_1, w_1], ..., [\mathfrak{A}_m, w_m]$ como os elementos representativos de cada classe. Finalmente, para cada $1 \leq i \leq m$ consideramos a fórmula ψ_i tal que $\psi_i = \{\bigwedge \gamma_k \mid \gamma_k \in \Gamma_n$ e $[\mathfrak{A}_i, w_i] \models_{\mathbb{LMO}} \gamma_k\}$. Com isso, φ é equivalente a $\bigvee\{\psi_i \mid [\mathfrak{A}_i, w_i] \models_{\mathbb{LM}} \varphi\}$.

Do exposto acima podemos afirmar que, se dois modelos concordam em todas as fórmulas de Γ_n, então eles concordam em φ. Mas isso é precisamente a hipótese da Proposição 4.4.8, e, portanto, tais fórmulas são equivalentes. ∎

A versão modal do Teorema de Lindström apresentada nesse último resultado pode ser "melhorada", no sentido de torná-la mais parecida com a formulação padrão do teorema para a lógica de primeira ordem; isso é feito por van Benthem em [22].

Van Benthem primeiro restringe a noção de lógica modal abstrata que apresentamos aqui, impondo mais uma condição, que as fórmulas de uma lógica abstrata $\mathbb{L}_\mathbb{M}$ satisfaçam uma propriedade de relativização, isto é, que para toda $\mathbb{L}_\mathbb{M}$-fórmula φ e toda *nova* fórmula proposicional p exista uma $\mathbb{L}_\mathbb{M}$-fórmula $Rel(\varphi, p)$ que será verdadeira em um modelo $[\mathfrak{A}, w]$ se, e somente se, φ for verdadeira em $[\mathfrak{A}|_p, w]$[4]. Em seguida, mostra que esta propriedade de relativização e compacidade são condições suficientes à noção de grau finito em uma lógica modal abstrata, o que justifica a formulção da seguinte versão modal do Teorema de Lindström: *não existe lógica modal abstrata mais expressiva do que a lógica modal básica na qual valham, simultaneamente, a propriedade da relativização e compacidade*.

[4] O modelo $[\mathfrak{A}|_p, w]$ é o submodelo de $[\mathfrak{A}, w]$ cujo universo é composto pelos mundos de $[\mathfrak{A}, w]$ que satisfazem p.

Capítulo 5

Considerações Finais

Nestas considerações finais indicaremos duas frentes de estudo e reflexão que devem ser desenvolvidas futuramente, como continuidade dos pontos aqui expostos.

Lógica Abstrata

A concepção de lógica abstrata que consideramos neste trabalho é deveras geral e pode ser restringida em diversas direções, sendo usual encontrarmos exposições sobre os teoremas de Lindström, como por exemplo em [4], [8] e [15], com condições adicionais àquelas descritas na Definição 1.2.1; uma restrição comum aos três trabalhos citados é a propriedade do renomeamento.

Dadas duas assinaturas Σ e Σ', um renomeamento é uma função bijetiva $\mathfrak{r} : \Sigma \to \Sigma'$ que associa símbolos de mesma natureza, isto é, associa símbolos de predicado em Σ a símbolos de predicado de mesma aridade em Σ', símbolos de função a símbolos função de mesma aridade e símbolos de constante a símbolos de constante. Dada uma Σ-estrutura $\mathfrak{A}$, podemos estabelecer uma Σ'-estrutura "renomeada" $\mathfrak{A}^{\mathfrak{r}}$ e, para isto, basta considerarmos $|\mathfrak{A}^{\mathfrak{r}}| = |\mathfrak{A}|$ e $(\mathfrak{r}(s))^{\mathfrak{A}^{\mathfrak{r}}} = s^{\mathfrak{A}}$, para todo símbolo s em Σ.

> **Propriedade do renomeamento** Uma lógica abstrata $\mathbb{L}$ possui a *propriedade do renomeamento* quando, dado um renomeamento $\mathfrak{r} : \Sigma \to \Sigma'$, para toda sentença $\varphi \in L^{\Sigma}$ existe uma sentença $\varphi^{\mathfrak{r}} \in L^{\Sigma'}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{r}} \models \varphi^{\mathfrak{r}}$.

A propriedade do renomeamento estabelece algo relativamente "trivial" acerca de uma lógica abstrata: se algo é verdadeiro em uma estrutura acerca de um predicado, função ou constante, também o será quando consideramos interpretações adequadas destes elementos, e reciprocamente. Esta propriedade também explicita uma característica essencial da lógica, sua independência quanto aos elementos componentes não lógicos, isto é, quanto aos elementos da assinatura. Assim, se algo é válido quanto a uma constante, não é relevante qual o símbolo da constante; a única questão relevante é como se dá a interpretação do símbolo.

Ainda, ao admitirmos que um sistema semântico regular $\mathbb{L}$ possui a propriedade do renomeamento, herdamos algumas vantagens técnicas com relação à demonstração do primeiro teorema de Lindström, vantagens estas relativas aos desenvolvimentos apresentados nas seções dois e três do Capitulo 3.

Embora o renomeamento seja uma propriedade natural de sistemas semânticos, optamos por não incorporá-la à exposição, pois entendemos que o renomeamento é muito restritivo; por exemplo, se acrescentamos esta propriedade à Definição 1.2.1, a lógica proposicional clássica e a lógica-ω [1] escapam à definição de lógica abstrata[2].

Outras propriedades bastante presentes nos trabalhos citados, [8] e [15], são aquelas que garantem que um sistema lógico $\mathbb{L}$ estende $\mathbb{L}_{\text{I}}$ como, por exemplo, as propriedades booleana, atomicidade e instanciação:

> **Atomicidade** Para toda Σ e toda $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathrm{I}}^{\Sigma}$, φ atômica, existe uma ψ em L^{Σ} tal que $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ é Σ-estrutura e $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}_{\mathrm{I}}} \varphi\} = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B}$ é Σ-estrutura e $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi\}$.
>
> **Instanciação** Quando c é símbolo de constante em Σ, para qualquer $\varphi \in \mathrm{L}^{\Sigma}$ existe uma $\psi \in \mathrm{L}^{\Sigma-\{c\}}$ tal que para toda $(\Sigma - \{c\})$-estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \psi$ se, e somente se, $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi$, para algum $a \in |\mathfrak{A}|$.

Não incluímos estas propriedades de fechamento com relação ao sistema $\mathbb{L}_{\text{I}}$ pois, embora não considerados em nossa exposição, a caracterização *à la* Lindström de sistemas semânticos menos expressivos do que $\mathbb{L}_{\text{I}}$ produz resultados interessantes, além de apresentar dificuldades próprias e interessantes questões em aberto como, por exemplo, as presentes no trabalho de Väänänen & Garcia-Matos, [23] e em van Benthem, [22].

Por exemplo, Väänänen & Garcia-Matos, [23], apresentam uma definição de lógica abstrata análoga à Definição 1.2.1, mas que permite classificar sistemas semânticos menos expressivos do que $\mathbb{L}_{\text{I}}$ em *clássicos* ou *não clássicos*. Esta é uma abordagem que pretendemos estudar em detalhe e verificar quais sistemas de lógicas não clássicas usuais da literatura contemporânea podem ser analisados sob este prisma semântico.

Concepções de Lógica

Uma concepção usual e comum de lógica é aquela que a considera como "ciência do raciocínio". De acordo com essa concepção, o papel predominante da lógica dedutiva, por exemplo, é legislar acerca da correção dos métodos de dedução e coibir que sejam obtidas consequências falsas a partir de premissas verdadeiras. Outra forma de analisar a lógica dedutiva é através de seus três componentes básicos: linguagem, sintaxe (aparato dedutivo) e semântica. A linguagem está intimamente associada ao poder expressivo da lógica, que por sua vez corresponde às expressões formais construíveis a partir dos

[1] A lógica-ω é uma lógica abstrata cuja assinatura tem um único símbolo de predicado binário e cujas estruturas são isomorfas a estruturas de ordem dos números naturais.

[2] Isso pode ser contornado, mas ao custo de um novo aparato técnico. Vide Ebbinghaus, [5], Seção 2.6.

símbolos da linguagem, enquanto a sintaxe considera em grande medida as regras de dedução, isto é, formas lícitas de inferir novas fórmulas (teoremas) a partir de outras (premissas); por fim, à semântica cabe a tarefa de atribuir significado, ou seja, estabelecer quais expressões formais são expressões verdadeiras e expressões válidas.

Aparentemente não há consenso, entre os lógicos, quanto à característica da lógica que deve ser considerada como fundamental. Um lógico preocupado com questões relativas à teoria da computação e informação poderá defender que a linguagem é o componente essencial da lógica; por outro lado, há também aqueles que, como Wolenski, [25], página 21, asseveram ser "the main aim of logical theory is to codify the rules of deductive proofs". Há, ainda, os logicos que, assim como Barwise, [1], página 4, defendem que "a logic consists of a collection of mathematical structures, a collection of formal expressions and a relation of satisfaction between the two ", o que evidência o caráter semântico atribuído à lógica.

Uma forma de integrar as concepções semântica e sintática de lógica é através do teorema da completude semântica, ou seja, considerar como lógica apenas os sistemas formais em que a coleção dos teoremas coincide com a coleção das expressões válidas. Tal postura, embora parcialmente "conciliadora", traz consigo uma série de inconvenientes, dentre os quais destacamos o fato de muitas lógicas não serem munidas de teoremas de completude semântica e, mesmo em sistemas dotados de tal propriedade, a compatibilização entre semântica e sintaxe pode enfrentar problemas. Um exemplo típico é a lógica de primeira ordem, cujo teorema da completude estabelece a interação entre semântica e sintaxe, porém de forma plena: de um lado, o aparato dedutivo é construtivo e, por outro lado, as estruturas semânticas são intrinsicamente não construtivas. Por exemplo, o conjunto de teoremas da lógica de primeira ordem é recursivamente enumerável, enquanto a construção de modelos para estes teoremas envolve usualmente provas por indução transfinitas; um exemplo típico é a extensão de teorias consistentes através do teorema de Lindenbaum.

Ainda quanto à completude semântica de um sistema, uma comparação entre lógica de primeira ordem, lógicas infinitárias e lógicas com quantificadores de Mostowski nos permite defender a tese de que há teoremas de completude com naturezas distintas, no seguinte sentido: na lógica de primeira ordem, os teoremas da $\aleph_0$-compacidade e de Löwenheim-Skolem são consequências triviais do teorema da completude. Por outro lado, Keisler, [12], e Karp, [11], fornecem, respectivamente, um sistema de axiomas e regras que permitem estabelecer um teorema de completude às lógicas infinitárias $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ e $\mathbb{L}_{Q_1}$. No entanto, como vimos, estas lógicas ou não são $\aleph_0$-compactas ou não satisfazem a propriedade de Löwenheim-Skolem.

Assim, embora a lógica tenha um importante papel de "mediadora" nas ciências dedutivas em geral, parece-nos de maior interesse estudar suas características e propriedades intrínsecas. Esta, em nossa opinião, é a postura adotada por Lindström ao estabelecer uma definição geral de lógica que seja capaz de encapsular as propriedades comuns a diversas lógicas e que se mostra útil à prova de teoremas sobre a lógica, teoremas estes mediados pelas propriedades básicas dos sistemas lógicos.

Isto exposto, uma questão que se impõe é discutir em que sentido esta caracterização semântica, proposta por Lindström, pode ser estendida à considerações sintáticas. Parece-nos que um passo nesse sentido pode ser dado observando-se a caracterização de lógica dada por Tarski, [21], através dos operadores de consequência. Outro ponto de inegável interesse é analisar como considerações que caracterizam lógica apenas através de suas propriedades interagem com as concepções antagônicas de lógica: a bem conhecida tese de Quine, em que lógica é a lógica de primeira ordem, *versus* a visão defendida por Barwise, [1], página 5, que assevera " as logicians we do a disservice to our subject by convincing others that logic is first-order logic..."

Estas são questões sobre as quais pretendemos amadurecer as ideias, procurando ampliar o escopo de nosso entendimento sobre lógica, paralelamente às atividades do doutorado. Este trabalho de amadurecimento poderá ser bem sucedido e produzir um bom desfecho aos trabalhos iniciados com esta Dissertação de Mestrado, caso desenvolvamos uma interpretação própria sobre estas questões.

Referências Bibliográficas

[1] Barwise, J. Model-theoretic logics: Background and aims. In *Model-Theoretic Logics*, S. Feferman and J. Barwise, Eds., Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1985, ch. I, pp. 1–24.

[2] Bell, J. L., and Slomson, A. B. *Models and ultraproducts: an introduction*. North-Holland, Amsterdam; London, 1669.

[3] Blackburn, P., de Rijke, M., and Venema, Y. *Modal Logic*, vol. 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.

[4] Chang, C. C., and Keisler, H. J. *Model Theory*, 3 ed. No. 73 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[5] Ebbinghaus, H. D. Extended logics: The general framework. In *Model-Theoretic Logics*, S. Feferman and J. Barwise, Eds., Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York, 1985, ch. II, pp. 25–76.

[6] Ebbinghaus, H. D., Flum, J., and Thomas, W. *Mathematical Logic*, 2º ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[7] Enderton, H. B. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, San Diego, 1972.

[8] Feferman, S., and Barwise, J., Eds. *Model-Theoretic Logics*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York, 1985.

[9] Freire, R. d. A. *Os fundamentos do pensamento matemático no século XX e a relevância fundacional da teoria de modelos*. PhD thesis, UNICAMP, 2009.

[10] Hodges, W. *A shorter model theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[11] Karp, C. *Languages with expressions of infinit lenght*. North-Holland, Amsterdam, 1964.

[12] Keisler, H. J. Logic with the quantifier "there exists uncountbly many". *Annal of mathematical logic 1* (1970), 1–93.

[13] Keisler, J. *Model theory for infinitary logic : logic with countable conjunctions and finite quantifiers*. North-Holland, Amsterdan, 1971.

[14] Lindström, P. First-order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria 32* (1966), 186–196.

[15] Lindström, P. On extensions of elementary logic. *Theoria 35* (1969), 1–11.

[16] Lindström, P. Prologue. In *Quantifiers. Logic, models and computation*, M. Krynicki, M. Mostowski, and L. W. Szczerba, Eds., Synthese library. Kluver-Academic, Dordrecht, 1995, ch. Prologue, pp. 21–24.

[17] Lindström, P. *Aspects of Incompleteness*. Association for Simbolic Logic, 2003.

[18] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall, London, 1997.

[19] Mostowski, A. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae 44* (1957), 12–36.

[20] Shapiro, S. *Foundations whitout foundationalism. A case for second-order logic*. Clarendon Press, Oxford, 1991.

[21] Tarski, A. *Fundamental concepts of the methodology of deductive sciences*. Dover, New York, 1930.

[22] van Benthem, J. A new modal Lindström theorem. *Logica Universalis 1* (2007), 125–138.

[23] Väänänen, J., and Garcia-Matos, M. Abstract model theory as a framework for universal logic. *Logica Universalis 1* (2005), 19–33.

[24] Väänänen, J., and Westerståhl, D. In memorian: Per Lindström (obtuary). *Theoria* (2010).

[25] Wolenski, J. Logical consequence and the limits of first-order logic. *Studies in logic, grammar and rhetoric* (2001).

Índice Remissivo