UNICAMP

JOSÉ PORTUGAL DOS SANTOS RAMOS

MÉTODO E CIÊNCIA EM DESCARTES

CAMPINAS

2013

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

JOSÉ PORTUGAL DOS SANTOS RAMOS

MÉTODO E CIÊNCIA EM DESCARTES

ORIENTADORA: FÁTIMA REGINA RODRIGUES ÉVORA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, para obtenção do Título de Doutor em Filosofia

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO José Portugal dos Santos Ramos, E ORIENTADO PELA PROFA. DRA. Fátima Regina Rodrigues Évora.
CPG, _____/_____/______

CAMPINAS
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
SANDRA APARECIDA PEREIRA-CRB8/7432 - BIBLIOTECA DO IFCH
UNICAMP

R147m

Ramos, José Portugal dos Santos, 1983-
Método e ciência em Descartes / José Portugal dos Santos Ramos. -- Campinas, SP : [s.n.], 2012

Orientador: Fátima Regina Rodrigues Évora
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Descartes, René, 1596-1650. 2. Matemática – Filosofia. 2. Ciência - Filosofia. 3. Justificação. I. Évora, Fátima Regina Rodrigues, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

<u>Informações para Biblioteca Digital</u>

Título em Inglês: Method and science in Descartes
Palavras-chave em inglês:
Mathematics - Philosophy
Science - Philosophy
Justification
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora:
Fátima Regina Rodrigues Évora [Orientador]
Márcio Augusto Damin Custódio
Enéias Júnior Forlin
Cristiano Novaes de Rezende
Érico Andrade Marques de Oliveira
Data da defesa: 05-02-2013
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em 5 de fevereiro de 2013, considerou o candidato JOSÉ PORTUGAL DOS SANTOS RAMOS aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Profa. Dra. Fátima Regina Rodrigues Évora

Prof. Dr. Márcio Augusto Damin Custódio

Prof. Dr. Érico Andrade Marques de Oliveira

Prof. Dr. Cristiano Novaes de Rezende

Prof. Dr. Enéias Júnior Forlin

A Nossa Senhora de Fátima

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha orientadora, Profª. Drª. Fátima Regina Rodrigues Évora pela atenção, dedicação e cuidado na orientação da pesquisa. Ao Prof. Dr. Márcio Augusto Damin Custódio, que me indicou ainda durante o Mestrado em Filosofia a leitura da *Geometria*, da *Dióptrica* e dos *Meteoros*. Ao Prof. Dr. José Meirinhos pela supervisão realizada no estágio de doutorado sanduíche na Universidade do Porto/ Portugal. Aos professores membros da banca da defesa. Ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas/ UNICAMP. As funcionárias da secretaria do IFCH Maria Rita Gândara Santos e Sonia Beatriz Miranda Cardoso. A CAPES pelo incentivo à Pesquisa. Aos meus amigos e participantes do Grupo de Estudos sobre a História da Filosofia da Natureza, a minha família e a Deus.

"*A matemática adequa o espírito a reconhecer a verdade, porque é na matemática que se podem encontrar os exemplos do raciocínio correto que de modo algum encontramos alhures. Dessa maneira, aquele que conseguiu acostumar o espírito ao raciocínio matemático tê-lo-á bem preparado para a investigação de todas as outras verdades, uma vez que o raciocínio é o mesmo em qualquer assunto em que se busca a verdade*".

Descartes (*AT*, *V*, *177*)

Resumo

O propósito desta tese é explicar o método cartesiano por meio da lógica matemática que opera a sua constituição. Defende-se nesta pesquisa que, a partir dessa explicação do método, Descartes encontra meios que viabilizam a orientação de suas experimentações científicas. As experimentações científicas são iniciadas, então, quando Descartes encontra previamente uma determinada demonstração geométrica e visa, a partir desta, justificar os resultados da reconstrução de um fenômeno físico. No entanto, tal reconstrução requer outros meios da aplicação do método, pois neste momento trata-se da investigação de objetos que compõem um fenômeno físico. Nesta perspectiva, a aplicação do método de Descartes prescreve dois procedimentos de investigação científica, a saber, os procedimentos de redução e reconstrução. Sustenta-se nesta pesquisa que esses procedimentos requerem objetos manipuláveis que possibilitem, por meio do uso de suposições e analogias, a justificação experimental dos efeitos observados nos objetos físicos (ou seja, do fenômeno físico investigado). As obras de Descartes utilizadas nesta pesquisa são o *Discurso do método* e *Ensaios complementares*: A *Geometria*, a *Dióptrica*, os *Meteoros*, e ainda as *Regras para orientação do espírito*.

Summary

This thesis aims to explain the cartesian method through the mathematical logic which operates its constitution. It is defended in this thesis that, in this explanation of the method, Descartes finds geometric demonstrations that can guide his scientific experimentations. The scientific experimentations are started, so, when Descartes previously finds a particular geometrical demonstration and aims, through such demonstration, to justify the results of the reconstruction of physical phenomenon. However, such a reconstruction requires other means of the method's application, because in this moment it treats on the investigation of objects which compose a physical phenomenon. At this prospect, the application of Descartes' method prescribes two procedures of scientific enquiry, to wit, the ones of reduction and reconstruction. It is maintained in this thesis that such procedures require controllable objects which make possible, through suppositions and analogies, the experimental justification of the effects observed in the physics objects (i. e., as an investigated physical phenomenon). The works of Descartes used here are the *Discourse on the Method* and *Complementary Essays*: *Geometry*, *Dioptrics*, *Meteors*, and also *Rules for the Direction of the Mind*.

SUMÁRIO

CAPÍTULO III

INTRODUÇÃO

A presente tese tem por objetivo explicar o método cartesiano mediante a lógica matemática que o constitui e o opera. Defende-se nesta pesquisa que, a partir desse método, Descartes encontra meios que viabilizam as orientações das suas experimentações científicas.

O papel do método na ciência de Descartes é um dos objetos de investigação para os quais convergem os interesses de pesquisa dos historiadores da filosofia. Esse tema merece cuidadosa atenção, na medida em que se pretende compreender a diferenciação epistemológica entre (1) a exatidão matemática das operações do método e (2) o caráter persuasivo das justificações científicas de Descartes.

Historiadores da filosofia, destacando-se, sobretudo, Jullien, Vuillemin, Costabel, Tournadre, Milhoud, Garber e Shea, expõem diversas maneiras pelas quais Descartes haveria descrito suas demonstrações geométricas e praticado ciência, mas sem explicar de maneira explícita o modo como Descartes constituiu, a partir desses mesmos raciocínios matemáticos, o método que cultiva a razão e orienta as suas experimentações científicas. Assume-se, assim, uma carência historiográfica de elucidar o *modus operandi* do método e de compreender os limites de seu papel nas experimentações científicas de Descartes. Talvez, por isso, a implicação mais relevante que surja das interpretações dos historiadores da filosofia seja a ausência de esclarecimentos a respeito de uma possível diferenciação que deve haver entre: (1) a exigência de uma exatidão matemática operacionalizada pelos raciocínios do método e (2) os meios de orientação do método aplicados à prática científica de Descartes. Assinala-se, pois, que essa possível dificuldade de interpretação possa residir no próprio interior das suas obras. Isso porque Descartes, por um lado, concebe dois estatutos de conhecimento quando trata de dois tipos distintos de objetos, a saber, os objetos matemáticos e os objetos físicos, os quais requerem modos diferenciados de investigação, mas, cabe assinalar que, por outro lado, ele jamais explicitou a diferença conceitual das respectivas maneiras de investigá-los. Sustenta-se que, embora não se encontrem nas obras de Descartes os conceitos “representação matemática”, “procedimento científico” e “justificação experimental” se faz necessário estabelecê-los nesta pesquisa para que se possa esclarecer a diferenciação epistemológica que há entre (1) as vias matemáticas do método e (2) os procedimentos que investigam apenas os objetos físicos.

O *modus operandi* e os meios de orientação pelos quais se pretende explicar o método de Descartes são oriundos dos raciocínios de ordem e medida. Tais raciocínios são propostos por Descartes em sua obra *Regras para orientação do Espírito*, mais especificamente, na regra IV. Nesta regra, ele alega que os raciocínios de ordem e medida são concebidos a partir da *Mathesis universalis*, e que determinados vestígios dessa "Disciplina geral" já eram conhecidos por Pappus (análise geométrica) e por Diofanto (Aritmética), embora esses matemáticos não tivessem concebido o "verdadeiro método" que operava tais raciocínios.[1] Alega também que alguns matemáticos da sua época tentaram ressuscitar essa "Disciplina" a partir do que designaram como Álgebra, mas recomenda: "apenas que a desvencilhemos dos diversos sinais e dos inexplicáveis cálculos que a sobrecarregam, de maneira que já não lhe falte o grau de nitidez que presumo encontrar-se no verdadeiro método".[2] Em seguida, ele relata que a Música, a Óptica, a Mecânica e algumas outras ciências particulares fazem parte das Matemáticas e, diante disso, assume que não é suficiente compreender a etimologia da palavra, pois, tendo o nome de *Mathesis* somente o sentido de Disciplina, as ciências particulares citadas não teriam menos direito do que a Geometria a serem nomeadas de Matemáticas. Refletindo sobre tais questões, surgiu-lhe atribuir à *Mathesis* apenas aquilo em que se reporta a ordem e a medida, portanto, sem levar em consideração se é em números, em figuras, em sons, ou em quaisquer outros objetos em que se possam reportar tais raciocínios. Diante disso, Descartes conclui que essa "Disciplina" possibilitaria a universalização de todos os conhecimentos que se reportam a ordem e a medida. [3]

No decorrer das *Regras para orientação do Espírito*, Descartes restabelece os raciocínios de ordem e medida da *Mathesis universalis* mediante o *modus operandi* do método que inventara e de sua aplicação às ciências particulares. [4] Isso o levou a não mais utilizar o conceito de *Mathesis universalis*, mas apenas o de método. Parece que essa opção de Descartes dá-se em virtude de sua cautela em querer indicar uma possível diferenciação entre (1) a exigência matemática do *modus operandi* que constitui o método (2) e os meios de orientação do método aplicados exclusivamente às ciências particulares.

---

[1] Cf. *Regulae* (AT, X, 376). *Mathesis universalis* designa uma Disciplina geral porque trata de todos os conhecimentos que se reportam à ordem e à medida. Há na história da filosofia diversas interpretações a respeito da concepção da *Mathesis universalis* exposta por Descartes nas *Regras*, destacando-se as de Schuster, Jullien, Garber e, sobretudo, a pesquisa pionéira de Werber exposta na sua obra *La constitution de texte des Regulae*. A concepção do "verdadeiro método" é anunciada por Descartes no *Discurso.* Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17).
[2] *Regulae* (AT, X, 377).
[3] Cf. *Regulae* (AT, X, 377-378).
[4] Cf. *Regulae* (AT, X, 379).

O *modus operandi* do método cartesiano contempla a sistematização dos raciocínios de ordem e medida. Os raciocínios de ordem dizem respeito a preceitos lógicos, dentre os quais, destacam-se, as vias demonstrativas de análise e síntese. Os raciocínios de medida tratam de termos aritméticos aplicados ao entendimento de objetos geométricos e algébricos.

A via demonstrativa de análise prescreve que as causas são descobertas de modo lógico, correspondente e decorrente dos efeitos.[5] Nesta perspectiva, o processo lógico é operado por uma série de intuições,[6] constituindo o encadeamento do efeito (o efeito aqui é uma figura geométrica) à causa (a causa aqui é um cálculo algébrico que corresponde a um lugar ou propriedade geométrica).[7] Assim, a via demonstrativa de análise mostra a Descartes a operação lógica que

---

[5] De acordo com Descartes, o método consiste na ordem dos objetos sobre os quais incide o entedimento. Cf. *Regulae* (AT, X, 379). A ordem, portanto, viabiliza a Descartes a sistematização lógica do método. A via demonstrativa de análise mostra a Descartes o verdadeiro caminho pelo qual a coisa (objeto) é metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas. Descartes: "[...] A análise mostra a verdadeira via pela qual a coisa foi descoberta, metodicamente e como que *a priori*". Segue a versão original em latim: *Analysis veram viam ostendit per quam res methodice & tanquam a priori inventa est, adeo ut, si lector illam sequi velit atque ad omnia satis attendere, rem non minus persecte intelliget suamque reddet, quam si ipsemet illam invenisset*. *Secundae Responsiones* (AT, VII, 155). A tradução do latim para o francês de Clerselier corrobora: "A análise mostra a verdadeira via pela qual uma coisa foi metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas". *Secondes Reponses* (AT, IX, 121).

[6] Nas *Regras*, Descartes relata que o *método* fornece uma explicação perfeita do uso da intuição e do meio de encontrar deduções para chegar ao conhecimento de tudo o que lhe for possível, seja matematicamente, seja cientificamente. Cf. *Regulae* (AT, X, 372). Descartes explica o processo lógico que é operado por uma série de intuições do seguinte modo: "Por *intuição* entendo, não a convicção distorcida fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas a concepção do entendimento puro e atento: que é tão fácil e distinto que nenhuma dúvida nos fica acerca do que entendemos. [...] Se, por exemplo, pretendemos conceber essa consequência: 2 mais 2 são a mesma coisa que 3 mais 1, não somente se deve conceber por intuição que 2 mais 2 são 4, e que 3 mais 1 são também 4, mas também que estas duas últimas proposições têm como consequência necessária a terceria, apresentada em primeiro lugar" . Segue a versão original em latim: *Per intuitum intelligo, non fluctuantem sensuum fidem, vel male componentis imaginationis judicium fallax, sed mentis purae et attentae tam facilem distinctumque conceptum, ut de eo, quod intelligimus, nulla prorsus dubitatio relinquatur* [...] "*Nam, exempli gratia, sit haec consequentia: 2 & 2 efficiunt idem quod 3 &1, non modo intuendum est 2 & 2 efficere 4, & 3 & 1 efficere quoque 4, sed unsuper ex his duabus proporsitionibus tertiam illam necessario concludi*". *Regulae* (AT, X, 368-369).

[7] Nas *Regras*, Descartes explica as medidas matemáticas da seguinte maneira: "A Aritmética e a Geometria são muito mais certas do que quaisquer outras disciplinas, pois são as únicas a versar sobre um objeto tão puro e simples. [...] Logo, a Aritmética e a Geometria são as mais simples e as mais evidentes de todas as disciplinas, pois têm um objeto tal qual o exigimos [...]. De fato, constatamos que os antigos geômetras utilizaram uma espécie de análise que estendiam a solução à todos os problemas matemáticos, se bem que dela tenham privado a posteridade. E agora florece um gênero de Aritmética, a que designam como Álgebra, que permite fazer com os números o que os antigos faziam apenas com as figuras. Essas duas disciplinas nada mais são senão frutos espontâneos dos raciocínios do nosso método, e não me espanto de que seja nessas artes, cujos objetos são muitos simples, que eles cresceram até agora com mais felicidade do que nas outras, em que maiores obstáculos comumente os sufocam, mas em que, não obstante, tomando um cuidado extremo em cultivá-los, nós os faremos infalivelmente alcançar uma perfeita maturidade. [...] Não me satisfaria se meus raciocínios apenas atendessem a explicação dos vãos problemas que servem comumente de jogos para os calculadores ou para os geômetras em seus lazeres [...].Segue a versão original em latim: *Arithmetica & Geometria caeteris disciplinis longe certiores exsistant: quia scilicet hae solae circa obejctum ita purum & simplex* [...]. *Sunt igitur omnium maxime faciles & perspicuae, habentque objectum quale*

cultiva a razão e, a partir disso, evidencia-lhe quais são os lugares e propriedades da figura geométrica que têm inteligibilidade algébrica.

A via demonstrativa de síntese, ao inverso da análise, prescreve que os efeitos provam as causas,[8] de modo que o processo lógico é agora operado por uma série de deduções, no qual parte-se da causa para o efeito. [9] Para isso é necessário estabelecer uma cadeia de deduções entre

---

requirimus [...]. *Satis enim adevertimus veteres geometras analysi quadam usos fuisse, quam ad omnium problematum resolutionem extendebant, licet eamdem posteris inviderint. Et jam viget Arithmeticae genus quoddam, quod Algebram vocant, ad id praestandum circa numerous, quod veteres circa figures faciebant. Atque haec duo nihil aliud sunt, quam spontaneae fruges ex ingenitis hujus methodi principijs natae, quas non miror circa harum artium simplicissima objecta felicius crevisse hactenus, quam in caeteris, ubi majora illas impedimenta solent suffocare; sed ubi tamen etiam, modo summa cura excolantur, haud dubie poterunt ad perfectam maturitatem perveniere.* [...] *neque enim magni facerem has regulas, si non sufficerent nisi ad inania problemata resolvenda, quibus logistae vel geometrae otiosi ludere consueverunt* [...]. *Regulae* (AT, X, 365-373).

[8]Em relação à via demonstrativa de síntese, Descartes relata que: "A síntese, ao inverso [ao inverso da análise], por uma via oposta e como que buscando *a posteriori* (embora a própria prova seja nesta talvez mais *a priori* que naquela) demonstra, na verdade claramente o que está contido em suas conclusões, e serve-se de uma longa série de definições, postulados, axiomas, teoremas e problemas". Segue a versão original em latim: *Synthesis è contra per viam oppositam & tanquam a posteriori quaesitam* (*etsi saepe ipsa probatio sit in hac magis a priori quam in illa*) *clare quidem id quod conclusum est demonstrat, utiturque longa definitionum, petitionum, axiomatum, theorematum, & problematum*. *Secundae Responsiones* (AT, VII, 156). A tradução do latim para o francês de Clerselier corrobora: "A síntese, ao contrário, mostra por uma via inteiramente diversa e como que examinando as causas por seus efeitos (embora a prova que contém seja talvez também dos efeitos pelas causas), demonstra, na verdade claramenteo que está contido em suas conclusões, e serve-se de uma longa série de definições, postulados, axiomas, teoremas e problemas". *Secondes Reponses* (AT, IX, 122).

[9]Descartes explica o processo lógico que é operado por uma série de deduções do seguinte modo: "Por *dedução* entendo o que *se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza*. Foi imperioso proceder assim, porque a maior parte das coisas é conhecida com certeza, embora não sejam em si evidentes, contanto que sejam deduzidas de princípios verdadeiros e previamente conhecidas, por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa. Não é de outro modo que conhecemos o vínculo que une o derradeiro anel de uma longa cadeia de razões ao primeiro, conquanto uma única e mesma concepçãosejam incapazes de nos fazer apreender intuitivamente todos os anéis intermediários que constituem esse vínculo: basta que tenhamos percorrido sucessivamente e que guardemos a lembrança de que cada um deles, desde o primeiro até o derradeiro, está conectado aos que estão mais próximos dele. Portanto, aqui distinguimos a intuição intelectual da dedução certa, em virtude de que, nesta, concebe-se uma espécie de sucessão, ao passo que naquela não ocorre o mesmo; ademais, a dedução não requer, como a intuição, uma evidência atual, mas, ao contrário, extrai de certa maneira sua certeza da memória. Disso resulta, pode-se dizer que as proposições que são a consequência imediata dos princípios são conhecidas de um ponto de vista diferente, ora por intuição, ora por dedução; quanto aos próprios princípios, eles são apenas conhecidos por intuição e, ao contrário, suas conclusões distantes apenas o são por dedução. [...] Proponha-se encontrar esses quatro termos continuamente proporcionais: 3, 6, 12, 24. Se dois deles forem fornecidos em sequência, ou seja, 3 e 6, ou 6 e 12, ou 12 e 24, será mais fácil encontrar os outros e então diremos que a proposição que deve ser encontrada é examinada diretamente. [...] Eu poderia ainda continuar desse modo e obter desse único exemplo muitas outras deduções: estas serão suficientes para que o leitor compreenda o que pretendo ao dizer que uma proposição é deduzida direta ou indiretamente, e penso que, partindo do que há de mais fácil e simples, podem-se conhecer muitas coisas mesmo em outras disciplinas, refletindo com atenção e dedicando-se às investigações com sagacidade". Segue a versão original em latim: [...] *Per deductione: per quam intelligimus illud omne quod ex quibusdam aliis certo cognitis necessario concluditur. Sed hoc ita faciendum fuit, quia plurimae res certo sciuntur, quamvis non ipsae sint evidentes, modo tantum a veris cognitisque principiis deducantur per continuum et nullibi interruptum cogitationis motum singula perspicue intuentis*: *non aliter quàm longae alicujus catenae extremum annulum com primo conecti cognoscimus, etiam uno eodemque oculorum intuitu non omnes intermedios, à quibus dependent illa connexio*, *contemplemur, modo illos perlustraverimus successive, & singulos proximos à primos ad ultimum adhaerere recordemur. Hic igitur mentis intuitum à deductione certa distinguimus ex eo, quod in hac motus*

os lugares e propriedades analiticamente descobertos e o efeito que prova essa cadeia dedutiva, a saber, uma demonstração geométrica. O estudo aprofundado dessa cadeia de deduções leva Descartes ainda a formular uma inovadora teoria das proporções.

Determinadas demonstrações geométricas – adquiridas metodicamente por ordem, pelas vias demonstrativas de análise e síntese articuladas às medidas geométricas, aritméticas e algébricas – servem como meio de orientação das investigações científicas de Descartes. Essa orientação revela o início da aplicação do método na ciência cartesiana.[10] Cabe, portanto, a um dos papeis do método encontrar demonstrações geométricas que sirvam como “representações matemáticas” dos fenômenos naturais.[11] Os experimentos científicos são iniciados, então, quando Descartes encontra previamente uma determinada demonstração geométrica e, a partir desta, visa justificar os resultados da reconstrução de um fenômeno físico. Nesta perspectiva, Descartes parece propor dois procedimentos de “investigação científica”, a saber, os procedimentos de redução e reconstrução. [12] Tais procedimentos requerem objetos manipuláveis que auxiliem,

---

sive successio quaedam concipiatur, in illo non item; & praeterea, quia ad hanc non necessaria est praesens evidentia, qualis ad intuitum, sed potiùs à memoria suam certitudinem quodammodo mutuatur. Ex quibus colligitur, dici posse illas quidem propositiones, quae ex primis principijs immediate concluduntur, sub diversa consideratione, modo per intuitum, modo per deductionem cognosci; ipsa autem prima principia, per intuitum tantùm; & contra remotas conclusiones, non nisi per deductionem. [...]*Vt ad invenienda haec quatuor continue proportionalia, 3, 6, 12, 24, si ex his supponantur duo consequenter, nempe 3 & 6, vel 6 & 12, vel 12 & 24, vt ex illis reliqua inveniantur, res erit factu facillima; tuncque propositionem inveniendam directe examinari dicemus. Et ita vlterius pergere possem, atque alia multa ex hoc vno exemplo deducere; sed ista sufficient, vt lector animadvertatat quid velim, cùm propositionem aliquam directe deduci dico* [...] *multa in alijs etiam disciplinis ab attente reflectentibus & sagaciter disquirentibus posse invenieri*. *Regulae* (AT, X, 369-387).

[10]Assinala-se, pois, que a demonstração geométrica, adquirida metodicamente, designa a causaque orienta a experimentação científica de Descartes. A partir disso, pode-se compreender o modo como a lógica matemática desenvolvida por Descartes nas *Regras* e, sobretudo, no *Discurso do método* e na *Geometria*, viabiliza a prática científica a partir da orientação dos raciocínios do método.

[11] Nota-se, portanto, que esse tipo de demonstração geométrica foi feita por Descartes com intuito de descrever determinados fenômenos naturais. Nas *Regras*, Descartes distingue uma (1) dedução metódica de uma (2) hipótese experimental. Descartes:“Há uma via dupla que nos conduz ao conhecimento das coisas, a saber, a da experiência e da dedução [...]. Segue: (1) “A Aritmética e a Geometria são muito mais certas do que quaisquer outras disciplinas: é que são as únicas a versar sobre um objeto tão simples que elas não têm de fazer, em absoluto, (2) nenhuma suposição que a experiência possa deixar duvidosa e são [a Aritmética e a Geometria] inteiramente constituídas de consequências que devem ser deduzidas [como por uma longa cadeia de intuições] racionalmente”.Segue a versão original em latim:*Nos duplici via ad cognitionem rerum devenire, per experientiam scilicet, vel deductionem*. [...] *Ex quibus evidenter colligitur, quare Arithmetica & Geometria caeteris disciplinis longe certiores exsistant: quia scilicet hae solae circa objectum ita purum & simplex versantur, vt nihil plane supponant, quod experientia reddiderit incertum, sed totae consistunt in consequentijs rationabiliter deducendis*. *Regulae* (AT, X, 364-365).

[12]A chave de interpretação desta pesquisa indica que Descartes constitui os procedimentos de redução e reconstrução a partir do estudo da curva anaclástica e da referência à necessidade de um uso peculiar de suposições e analogias para viabilizar a reprodução do movimento de refração da luz. Nas *Regras*, Descartes reduz o movimento de refração da luz à curva anaclástica: “na qual os raios paralelos se refrangem de tal modo que todos, depois da refração, tenham um único ponto de intersecção”. Em relação ao procedimento de reconstrução, Descartes relata que: “Dizemos que as naturezas designadas por nós de compostas nos são conhecidas por meio de experimentos ou

através do uso de suposições e analogias a "justificação experimental" dos efeitos observados no fenômeno físico (fenômeno natural). O procedimento de redução prescreve a identificação de causas que hipoteticamente originam as características do fenômeno examinado. Inversamente, o procedimento de reconstrução prescreve a reprodução dos efeitos que analogamente produzem as características do fenômeno examinado. As identificações de tais causas e as reproduções de tais efeitos devem possibilitar a "justificação experimental" do fenômeno físico investigado.

Deve-se assinalar que os termos "suposição" e "redução" são oriundos dos raciocínios lógico-matemáticos, visto que desde os antigos geômetras, por exemplo, a análise prescreve que se deve supor (hipoteticamente) já ter sido obtido o resultado procurado. [13] Para os antigos geômetras e, em especial, Pappus, o termo suposição se fundamenta em dois tipos de princípios admitidos nas demonstrações de geometria, a saber, os axiomas e os postulados. A partir disso, a suposição é designada pelos antigos geômetras como tudo o que se admite como verdadeiro. [14] Descartes, por sua vez, também usa como pressuposto da análise, suposições (hipóteses) ao dizer, por exemplo, que: "no caso em que se pretende resolver algum problema, se deve de modo prévio considerá-lo feito",[15] e, segue: "Primeiro suponho o problema resolvido [...]". [16] Além disso, ele usa o termo redução em sua análise algébrica da seguinte maneira: "[...] se pode sempre reduzir todas as quantidades desconhecidas a uma única quando o problema é construído a partir de círculos e linhas retas, ou ainda por secções cônicas [...]".[17] Diante disso, poder-se-ia, com razão, ainda indagar: afinal qual é a diferença entre (1) os raciocínios que constituem o método e (2) os raciocínios que possibilitam a sua aplicação no campo das investigações científicas, uma vez que no domínio das investigações matemáticas também se utilizam suposições e reduções? A resposta à mencionada indagação reside numa clara diferenciação entre dois tipos de estatutos de

---

porque nós mesmos a compomos". Segue as versões originais em latim: *in qua scilicet radii paralleli ita refringantur, ut omnes post refractionem se in uno puncto intersecent*. *Regulae* (AT, X, 394). *Quas compositas appelamos, à nobis cognosci, vel quia experimur quales sint, vel quia nos ipsi componimus* [...]. *Regulae* (AT, X, 442). Além disso, Garber também propõe tais procedimentos e os diferencia de análise e síntese. Cf. GARBER, 2004, p. 56. Nesta perspectiva, Costabel diferencia duas explicações de Descartes, a saber, (1) a explicação física da refração e (2) a explicação matemática da lei dos senos. Cf. COSTABEL, 1982, p. 57. E Tournadre alega que é necessário distinguir uma demonstração geométrica de uma justificação científica. Cf. TOURNADRE, 1982, p. 49.

[13] Vide Pappi Alexandrini. In: *Mathematicarum Collectionum*. Lib, VII. Cf. PAPPUS, 1982, p. 477-478. Segue uma breve exposição de Pappus por meio dos comentários de Smith: "Supomos em análise já ter sido obtido o resultado que se pretende e, considerando as consequências, recuamos até encontrar algum resultado já conhecido (dado na hipótese) ou algum princípio elementar (axioma ou postulado) da matemática. Cf. SMITH, 1925, p. 6.

[14] Para os antigos geômetras, por isso, caso se chegue "a algo que é admitido como falso, a coisa procurada também será falsa". Cf. PAPPUS, 1982, p. 477-478.

[15] *La Geometrie* (AT, VI, 372).

[16] *La Geometrie* (AT, VI, 382).

[17] *La Geometrie* (AT, VI, 374).

conhecimento (ou, estatutos de certezas), a saber, enquanto no domínio das investigações matemáticas a suposição diz respeito a tudo o que se admite como verdadeiro e, por isso, também a suposição é necessariamente verdadeira, no campo da investigação dos fenômenos naturais as suposições utilizadas por Descartes podem "não ser exatamente verdadeiras" [18], "porém, ainda assim, extraem muitas consequências certas e verdadeiras, pois guardam relações com diferentes observações". [19] De modo semelhante, a redução das quantidades prescreve uma rigorosa exatidão do raciocínio operacionalizado pela via analítica, ao passo que, o procedimento de redução aplicado aos fenômenos naturais apenas indica possíveis causas que os produziram. De fato, Descartes utiliza de modo bastante vago o termo método ao tratar de diferentes critérios de investigação e, talvez, por isso, sucedam tantas confusões nas interpretações historiográficas acerca do modo como ele concebe o método a partir de raciocínios lógico-matemáticos e o aplica apenas como meio para orientar a prática científica.

Defende-se, pois, nesta pesquisa que os procedimentos de redução e reconstrução seguem, de maneira respectiva, as mesmas orientações lógicas das vias demonstrativas de análise e síntese ou, em outras palavras, assim como na análise parte-se de um efeito a uma causa, na redução se inicia a investigação a partir de efeitos pelos quais se buscam as suas causas e, do mesmo modo, tal como na via demonstrativa sintética parte-se da causa para o efeito, no procedimento de reconstrução se inicia a investigação a partir das causas que devem produzir determinados efeitos. Estas orientações lógicas, portanto, também revelam os meios pelos quais ocorre a aplicação do método nas ciências particulares de Descartes. Cabe, todavia, novamente ressaltar que as vias demonstrativas do método se distinguem dos procedimentos da aplicação do método no que diz respeito ao estatuto do conhecimento atribuído aos diferentes objetos por ambos investigados. Os objetos investigados pelas vias demonstrativas de análise e síntese são, por exemplo, os objetos matemáticos, os quais Descartes pode estabelecer uma longa cadeia de deduções que lhe mostra uma certeza evidente das proposições examinadas, ao passo que, por meio dos procedimentos de aplicação do método às ciências, Descartes investiga apenas os objetos físicos (objetos que compõem os fenômenos naturais), pelos os quais ele apenas concebe um conhecimento persuasivo. Logo, as justificações dadas por Descartes nas ciências particulares, tais como na *Dióptrica* e nos *Meteoros* de 1637, são em última instância, tentativas

[18] *Correspondance* (AT, II, 142).
[19] *La Dioptrique* (AT, VI, 83).

de persuadir os leitores de que o *modus operandi* do seu método, desenvolvido na *Geometria* e anunciado no *Discurso do método* é mais adequado do que os demais, pois, lhe possibilita, por exemplo, orientar a investigação científica a partir de uma demonstração geométrica descoberta por uma certeza clara e evidente. Tal demonstração, portanto, lhe serve como uma "representação matemática da natureza", viabilizando-lhe, pois, orientar a reconstrução experimental do fenômeno físico investigado. Possivelmente, por isso, Descartes relata em uma carta o seguinte:

> […], por exemplo, na *Dióptrica* e nos *Meteoros* eu apenas procurei persuadir os leitores que o meu método era melhor que o usual, mas eu o concebi e provei na minha *Geometria.*[20]

E, em meados de maio de 1638, Descartes sustenta:

> Perguntas se considero que o que escrevi a respeito da refração é uma demonstração; penso que sim, ao menos na medida em que é possível fornecer uma demonstração nesses assuntos, sem antes haver demonstrado os princípios da Física pela Metafísica (algo que espero fazer algum dia, mas que não fiz até o presente momento), e na medida em que qualquer outra questão de Mecânica, Óptica, Astronomia ou de qualquer outra disciplina, que não seja puramente a Geometria ou a Aritmética, tenha sido alguma vez demonstrada. Mas, requerer de mim demonstrações geométricas em uma matéria que depende da Física é pretender que eu faça o impossível […].[21]

Assim, defende-se nesta pesquisa que a diferenciação epistemológica entre (1) a exigência matemática das demonstrações do método e (2) o caráter persuasivo das experimentações limita, em última instância, a aplicação do método a apenas orientar a prática científica de Descartes – isso no campo da investigação dos fenômenos naturais.

No processo da experimentação científica, exposto na *Dióptrica* e nos *Meteoros*, surge o possível problema da circularidade lógica. [22] Isso porque os lógicos da primeira metade do século XVII acusam o argumento cartesiano de presumir na causa a legitimidade da prova científica. Defende-se aqui, entretanto, que essa acusação é impertinente, na medida em que se compreendem os resultados da ciência cartesiana a partir da diferenciação epistemológica que delimita demonstrações ao método e justificações às ciências particulares. Defende-se ainda que a partir do *modus operandi* do método, Descartes encontra demonstrações geométricas que lhe

[20] *Correspondance* (AT, I, 478).
[21] *Correspondance* (AT, II, 141-142).
[22] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).

viabiliza orientar as suas experimentações científicas. Tais demonstrações geométricas, portanto, correspondem às causas que determinam a orientação da investigação científica. A demonstração geométrica que contempla a lei dos senos, por exemplo, ilustra essa designação de causa, pois deve permitir a Descartes justificar o movimento de refração da luz na *Dióptrica*. Todavia, a causa que determina a orientação dos experimentos não possui em si a legitimidade da prova científica, mas, ao contrário, essa causa apenas adquire legitimidade quando viabiliza a justificação experimental dos efeitos observados nos objetos do fenômeno físico. Logo, são os efeitos que justificam, por persuasão, a legitimidade da causa na ciência cartesiana. [23]

Utilizam-se como fontes primárias nesta pesquisa as *Regras para orientação do Espírito*, o *Discurso do método*, *A Geometria*, *A Dióptrica* e *Os Meteoros* pela edição publicada por Adam e Tannery, Volumes VI e X das *Obras de Descartes.* [24] A atenção à explicação do método de Descartes mediante o *modus operandi* e a sua aplicação à ciência justifica a ênfase de investigação em um período específico das obras de Descartes, a saber, dos anos de 1618-1619 até meados de 1640. Deve-se ressaltar que neste período, as cartas de Descartes tratam de problemas relativos ao *Discurso do método* e aos ensaios do método publicados em 1637. [25]

A opção pela demarcação temporal no uso das obras de Descartes é respaldada por uma possível diferenciação entre uma interpretação tradicional da ordem das razões realizada por Gueroult mediante a referência matemática de Euclides e propondo as *Meditações* (1641) como a obra que contempla a sistematização da ordem das razões, e uma interpretação da ordem das razões realizada a partir da matemática anunciada por Descartes em 1637, no *Discurso do método* e desenvolvida, sobretudo, na *Geometria*. Esta concepção da ordem das razões proposta por Descartes em 1637 é a que se defende nesta pesquisa. [26]

---

[23] Nota-se, portanto, que a justificação realizada na ciência cartesiana possibilita apenas um conhecimento persuasivo; isto porque, Descartes não pode identificar, por uma cadeia de deduções, todos os possíveis efeitos que são implicados na justificação do dado científico.

[24] As referências da pesquisa serão estabelecidas conforme o uso tradicional da se citar de Descartes, a saber, (AT, Volume, Página). DESCARTES, René. *Oeuvres de Descartes*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1996. 11 vol. Publiées par Charles Adam e Paul Tannery. Deve-se ressaltar que o volume X expõe o texto das *Regulae* e os volumes I e II expõem problemas relativos ao *Discurso do método* e aos ensaios publicados em 1637.

[25] Utilizar-se-á apenas de modo complementar os volumes III, VII, IV e IX de AT para tratar especificamente da concepção da "ordem das razões" de Descartes a partir da explicação proposta por Gueroult na obra *Descartes: Selon l`ordre des raisons*.

[26] Outros comentadores tradicionais da metafísica cartesiana, tais como Alquié e Gilson, serão utilizados na presente pesquisa, todavia, exclusivamente sob a perspectiva do método e da ciência de Descartes. Dentre os comentadores que pertencem à linha de pesquisa adotada nesta tese destacam-se, sobretudo, Costabel, Milhaud, Tournadre, Vuillemin, Jullien, Garber e Shea. Mas utilizar-se-á também nesta pesquisa Fichant, Allard, Cottingham, Philonenko, Rodis-Lewis, Marion, Bos, Kobayashi, Beyssade, Itard, Korteweg, Koyré, Loria, Boyer, Paty, Weber, Crapulli,

A presente tese é dividida em três capítulos. Nestes capítulos se pretende explicar a constituição e a aplicação do método proposto por Descartes no *Discurso* a partir da ordem das razões. Nesta obra, Descartes estabelece a ordem das razões por meio de preceitos lógicos concebidos pelas "longas cadeias de razões, tão simples e fáceis de conhecer, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às mais difíceis demonstrações".[27] Tais preceitos possibilitam ordenar e sistematizar, em uma longa cadeia de razões, os primeiros dados conhecidos por uma evidência matemática até a representação daqueles objetos que necessitam de uma justificação experimental. Eis os meios pelos quais Descartes pretendeu "bem conduzir a razão e procurar a verdade das ciências"[28]: (1) prescrevendo que nunca se deve aceitar nenhuma proposição como verdadeira sem o conhecimento de sua evidência; (2) determinando a necessidade de dividir cada uma das dificuldades que se examine em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para de modo mais simples resolvê-las; (3) propondo que se conduzam por ordem os raciocínios, começando pelos objetos simples e, por isso, mais fáceis de conhecer até o conhecimento dos mais compostos e, assim, conjecturando uma determinada ordem mesmo entre aqueles objetos que não se precedem naturalmente uns aos outros; (4) e, por fim, efetuando revisões gerais, para que não haja a mínima possibilidade de se está omitindo algum dado do exame.[29]

O primeiro capítulo tem três seções que expõem o método de Descartes a partir da lógica que opera os raciocínios de ordem e medida. Este capítulo tem por objetivo explicar o modo como a via da demonstração analítica articulada às medidas geométricas, aritméticas e algébricas operacionaliza uma lógica que cultiva a razão e possibilita a Descartes encontrar demonstrações geométricas aptas para a orientação das suas experimentações científicas. Tal explicação se dará a partir da exposição da teoria das proporções proposta por Descartes no *Discurso do método* e, sobretudo, desenvolvida na *Geometria*. No decorrer dessa explicação são expostas a resolução cartesiana do problema de Pappus e o modo como Descartes consagra o seu método mediante a

---

Gaukroger, Schuster, Smith, Mancosu, Duchesneau, Serfati, Clarke, Broncano, Ernest, Berkel, Duhamel, Hintikka, Remes e Heath.

[27] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).

[28] *Discours de la méthode* (AT, VI, 1).

[29] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19). Ao se referir aos preceitos lógicos, Descartes relata que: "Essas longas *cadeias de razões*, tão simples e fáceis de conhecer, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às mais difíceis demonstrações, levaram-me a conjecturar que todas as coisas que são passiveis do conhecimento humano *encadeiam-se* por *ordem* da mesma maneira". *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).

solução analítica de um clássico problema geométrico. A partir de tais resoluções é possível compreender a operacionalidade e a respectiva constituição do método cartesiano.

O objetivo da primeira seção é examinar a primeira etapa da resolução do problema de Pappus. Nesta etapa da resolução do problema de Pappus, Descartes determina a construção da figura geométrica a partir do comando de suas notações algébricas. Nesta perspectiva é possível compreender a maneira pela qual Descartes utiliza a lógica que opera a ordem e a medida dos raciocínios matemáticos mediante a opção que indica o início da resolução do problema de Pappus. Cabe assinalar que isso se dá ao mesmo tempo em que ele constitui o *modus operandi* do seu método.

O objetivo da segunda seção é examinar a segunda etapa da resolução do problema de Pappus. Nesta etapa, Descartes utiliza sua teoria das proporções para explicar como se deve solucionar o problema de Pappus. Essa teoria das proporções possibilita que a demonstração geométrica seja efetuada por meio de propriedades concebidas em figuras que têm evidência analítica. Diante disso é que Descartes inicia a resolução do problema de Pappus: mostrando quais são as construções geométricas, a saber, aquelas que podem ser demonstradas por meio de propriedades analíticas. Tais propriedades são oriundas da análise das seguintes figuras: retas, círculos, parábolas, elipses e hipérboles, e tais construções geométricas são, por exemplo, a concóide, a cissóide e as ovais. Construções que não se adéquam ao rigor de precisão e exatidão do raciocínio, Descartes as designa como mecânicas, como, por exemplo, as construções da espiral e da quadratriz.

O objetivo da terceira seção é examinar a diferenciação entre os raciocínios matemáticos do método de Descartes e o de Pappus. A partir desta diferenciação é possível compreender o modo como Descartes resolve o problema da intersecção da parábola e explica outros dois clássicos problemas geométricos, a saber, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Pretende-se, assim, elucidar o *modus operandi* do método de Descartes por meio da lógica que opera a ordem e a medida dos raciocínios matemáticos.

O segundo capítulo tem quatro seções que expõem a viabilização da aplicação do método cartesiano na ciência a partir da teoria das proporções e dos preceitos lógicos propostos por Descartes nas cartas datadas em meados de 1638 e no *Discurso do método*. Por meio desta exposição é estabelecida a ordem das razões que norteia a aplicação do método de Descartes.

O objetivo da primeira seção é examinar o modo como Descartes explica a descrição mecânica da roleta a partir da sua teoria das proporções. Essa descrição é importante porque permite a Descartes encontrar uma demonstração geométrica direcionada à explicação mecânica do movimento físico da roleta. Para efetuar essa descrição, primeiramente, ele evidencia quais são as propriedades da figura que possibilitam a demonstração geométrica. Em seguida, ele demonstra mediante a regularidade proporcional do movimento geométrico que a construção matemática da roleta é viável para a compreensão mecânica do seu movimento físico. A explicação da descrição da roleta, portanto, mostra a Descartes a maneira pela qual a sua teoria das proporções viabiliza a aplicação do método que inventara à ciência mecânica.

A segunda seção expõe o debate que Descartes realiza com os matemáticos do século XVII e a ordem das razões estabelecida pelos seus preceitos lógicos. Este debate é relevante porque demarca a diferenciação epistemológica entre a aplicação do método de Descartes nas ciências particulares e a concepção de uma matemática aplicada – adotada por seus opositores do século XVII – sobretudo, no que diz respeito ao cálculo dos máximos e mínimos de Fermat.

A terceira seção tem por objetivo explicar o modo como os preceitos lógicos, estabelecidos no *Discurso do método*, norteiam a aplicação do método na ciência cartesiana.

A quarta seção expõe indícios de uma possível diferenciação entre uma interpretação tradicional da ordem das razões, realizada por Gueroult através das *Meditações*, e a interpretação da ordem das razões descrita no *Discurso do método*. A exposição dessa possível diferenciação situa a presente pesquisa na história da filosofia ao mesmo tempo em que propõe uma posição historiográfica inovadora.

O terceiro capítulo tem três seções que expõem os resultados das ciências particulares de Descartes, mais especificamente, a partir da explicação de fenômenos ópticos, proposta na *Dióptrica*, e da descrição das cores do arco-íris, proposta nos *Meteoros*. Tal capítulo tem por objetivo esclarecer os meios pelos quais Descartes aplica o método que inventara.

A primeira seção do terceiro capítulo apresenta os aspectos gerais e o contexto em que as obras científicas, a saber, a *Dióptrica* e os *Meteoros* foram escritas por Descartes.

A segunda seção tem por objetivo explicar o modo como Descartes aplica o seu método a partir da demonstração geométrica da lei dos senos de *i* e *r*. Pretende-se, assim, esclarecer os meios pelos quais Descartes explica os movimentos de reflexão e refração da luz na *Dióptrica*.

A terceira seção tem por objetivo esclarecer o modo como Descartes descreve as cores do arco-íris. Tal explicação é a principal exemplificação da aplicação do método na ciência de Descartes. Pretende-se, assim, explicar os meios pelos quais Descartes examina nos *Meteoros*, o índice de reflexão e refração da luz através de diversas suposições, analogias e experiências que visam, em última instância, justificar o aparecimento e a respectiva localização das cores do arco-íris.

Embora não se encontrem nas obras de Descartes os conceitos "procedimento científico" e "justificação experimental" [30], sustenta-se nesta pesquisa que tais conceitos são plenamente consonantes, por exemplo, com o que Descartes pretendera explicar ao dizer que: "não foi possível mostrar efetivamente o método nos três ensaios [*A Geometria*, *A Dióptrica* e *Os Meteoros*] porque ele prescreve uma ordem de investigação [ordem das razões] que difere muito da que julguei apropriada para explicar",[31] mas, Descartes adverte: "chamo os *Ensaios* que vêm depois [do *Discurso do método*], de *Ensaios* deste método, porque pretendo estabelecer que as coisas que estes contenham, não podem ser encontradas sem o método [ou seja, sem os meios do método que orientam a prática científica, tal como, por exemplo, os procedimentos científicos de redução e reconstrução], e que através deles [dos Ensaios] podemos reconhecer o que o método vale"[32] e, que: "na *Dióptrica* e nos *Meteoros* eu apenas procurei persuadir [por justificações] as pessoas que o meu método era melhor que o usual, mas eu provei isso na *Geometria* [obra na qual Descartes concebe e prova os raciocínios do método]".[33]

Nas considerações finais é ressaltada a relevância filosófica desta pesquisa mediante a explicitação do modo como Descartes constitui e aplica o método que inventara. Nesta perspectiva são listadas as conclusões das justificações experimentais e os limites epistemológicos que podem ser admitidos na aplicação do método às ciências particulares de Descartes.

[30] Deve-se assinalar que a presente tese se insere em um modelo de pesquisa historiográfico (estruturalista) e que, embora os conceitos "procedimentos científicos" e "justificações experimentais" sejam oriundos de temas e debates da filosofia da ciência, aqui serão sustentados enquanto designações plenamente consonantes com o que Descartes propôs em suas obras.

[31] *Correspondance* (AT, I, 559-560).

[32] *Correspondance* (AT, I, 349).

[33] *Correspondance* (AT, I, 478).

CAPÍTULO I

A Geometria: o espírito lógico-matemático do método de Descartes

O presente capítulo tem por objetivo explicar a constituição do método cartesiano mediante a lógica matemática que opera os raciocínios de ordem e medida, apresentada por Descartes no *Discurso do método* e, sobretudo, desenvolvida na *Geometria*.

Este capítulo tem três seções que descrevem a lógica que opera os raciocínios de ordem e medida. Tal operacionalização é oriunda da formulação de notações algébricas e, dos meios pelos quais Descartes emprega essas notações para a resolução do problema de Pappus. O problema de Pappus, anunciado no Livro I da *Geometria* e solucionado no Livro II dessa obra é definido pela generalização de uma infinidade de novos tipos de curvas. Nesta medida, Descartes busca inicialmente encontrar o lugar para três ou quatro linhas retas. [34]

A Geometria [35] é um ensaio que esclarece a dimensão do espírito lógico-matemático do método de Descartes. [36] Embora seja um dos três ensaios que seguem o *Discurso do método*, a obra em muito se diferencia do texto do *Discurso*. Isso porque a exposição da *Geometria* é estabelecida apenas em articulações de questões matemáticas. Sustenta-se, pois, que a *Geometria*, a despeito de sua aridez argumentativa, revela como Descartes concebe o *modus operandi* do método que inventara a partir dos raciocínios de ordem e medida.

O presente capítulo expõe inicialmente a formulação da lógica matemática por meio dos raciocínios do método cartesiano. Nesta perspectiva, sustenta-se que a lógica matemática de Descartes é tomada como o modo de raciocínio que possibilita o acesso de juízos claros e evidentes. Descartes relata que os raciocínios matemáticos vão além daquilo que define o objeto

---

[34] Acrescenta-se que o problema de Pappus consiste na determinação de linhas curvas em que as distâncias de cada um dos seus pontos a algumas retas fixas mantém entre si relações constantes, sendo aquelas distâncias medidas sobre retas que formam com as retas fixas ângulos constantes. Diante disso, Pappus generalizou o problema para um número indeterminado de retas fixas. Descartes, por sua vez, propôs que se devesse reduzir esse problema a apenas duas retas fixas. Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 377). Milhaud relata que em 1588 apareceu a tradução da coleção de Pappus realizada por Commandino, de maneira um pouco desordenada, mas revelando como os problemas eram tratados pelos antigos e fornecendo diversas soluções matemáticas: a trisseção do ângulo, a construção de dois meios proporcionais, etc. E, dentre tais questões, encontrava-se o famoso problema de Pappus, que Descartes resolveria em 1637 na *Geometria*. Cf. MILHAUD, 1921, p. 45.

[35]A *Geometria* é um dos três ensaios que acompanham o *Discurso do método*. Segundo Cottingham: "A *Geometria* é constituída por três Livros\ Capítulos: o primeiro trata dos problemas que podem ser construídos apenas com o uso de *círculos* e *linhas retas*; o Livro II expõe a natureza das linhas curvas; e o terceiro, examina os sólidos e os hipersólidos". Cf. COTTINGHAM, 1993, p. 73.

[36] Na *Geometria*, Descartes explica a sua concepção de Matemática, anunciada desde as *Regras para orientação do Espírito*.

dos geômetras como postulados, axiomas e teoremas. Por isso, a aplicabilidade das operações matemáticas extrapola a natureza mesma do objeto dos geômetras. Isso porque é requisitada para o encadeamento do raciocínio a legitimidade desse objeto matemático.

O caminho percorrido para a "constituição lógica do método" [37] é realizado quando Descartes presume que os juízos são estabelecidos mediante encadeamentos analíticos.[38] Tal encadeamento prescreve que os efeitos sejam analisados por suas causas necessárias.

Descartes advoga que cada espírito funda em si a inteligibilidade dos juízos claros e evidentes. Diante disso, deve-se compreender o motivo que faz a subjetividade adquirir a certeza das proposições e, a partir desse desdobramento intelectual, o pressuposto que faz o entendimento constituir o método por meio de encadeamentos lógicos que operam os raciocínios de ordem e medida. Nesta perspectiva, Alquié expõe sumariamente a contextualização que insere a gênese da *Geometria* no esboço do projeto inicial da *Mathesis universalis* de Descartes. Relata Alquié: "Uma vez que Descartes está convencido de que a verdade é concebida pela intuição, [...] começa por se esforçar em descobrir um método que simplifique as regras matemáticas e liberte o espírito. Assim, Descartes aperfeiçoa o método das coordenadas e aplica-se a reformar todo o sistema das notações algébricas". [39]

---

[37] O tema da "constituição lógica do método cartesiano mediante a análise geométrica" é anunciada e tratada por Hintikka e Remes, no artigo traduzido para a língua portuguesa: "A análise geométrica e a lógica moderna". Cf. HINTIKKA & REMES, 1958, p. 28-47. Para Descartes, os raciocínios matemáticos perpassam necessariamente por um encadeamento lógico, em que todas as conclusões são necessariamente verdadeiras. Então, como afirma Beyssade: "As operações matemáticas ensinam a relação entre a descoberta de uma verdade indubitável e a formulação de um método [...]", pois: "É justamente o exercício da matemática que lhe dá o gosto da verdade, o desejo de encontrar a verdadeira filosofia [...] e, assim a vontade de construir uma nova filosofia, tendo a sua fonte a prática refletida na própria matemática. Quando Descartes cultiva a matemática, ele regozija-se, não apenas por descobrir as soluções de certos problemas, mas, sobretudo por estar perfeitamente assegurada a sua verdade, pois ele lhe compreende as razões. Esta alegria faz nascer em Descartes o desejo de estender essa certeza à totalidade do saber". BEYSSADE, 1989, p. 25-26.

[38] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17-18).

[39] ALQUIÉ, 1986,p. 35. Segundo Alquié: "[...] Descartes, de 1628 a 1637, consagra à suas obras cientificas. Convencido de que a verdade é adquirida pela intuição e que se trata, antes de tudo, de afastar o que obscurece esta última, começa por se esforçar em descobrir um método que simplifiquem a técnica e liberte o espírito. Pensa primeiro numa notação geométrica, que poderia ter-lhe aberto à via do cálculo infinitesimal, mas limitou-se a simplificar os sinais cóssicos, então em uso: sinais complexos, em geral tirados dos alfabetos grego e hebraico, e que embaraçavam o espírito do matemático. Descartes, que trabalhava nesta questão desde o inicio de suas investigações, não tarda a servir-se apenas das letras do alfabeto latino e dos sinais das quatro operações aritméticas. Designa primeiro as quantidades conhecidas pelas letras minúsculas e as quantidades desconhecidas pelas letras maiúsculas: em 1637, as maiúsculas serão substituídas pelas do alfabeto latino: x, y e z, e o sinal da raiz quadrada ou cúbica surge então. Do mesmo modo, inventa um método para baixar o grau das equações. Mas a sua grande descoberta, então, é a geometria analítica, aperfeiçoada em 1631, a propósito do problema de Pappus. A Geometria Analítica é, sem dúvida nenhuma, um dos frutos da preocupação principal de Descartes. Aspirando encontrar uma *ciência universal*, capaz de tratar das quantidades em geral, e sem se preocupar com a sua especificação, sem curar de saber se o que está a tratar, é figuras ou números, julga poder alargar o método algébrico a todas as ciências da quantidade. Mas não

A formulação de um sistema de notações algébrica permite a Descartes a busca do entendimento claro e evidente dos raciocínios matemáticos. Nesta perspectiva, ele constitui um método fundamentado em uma lógica matemática e o legitima mediante a resolução do famoso problema de Pappus. [40]

---

se julgue que pensasse em reduzir o espaço imaginado a uma realidade propriamente intelectual ou espiritual, cujo conhecimento já não apelaria para qualquer intuição de tipo sensível. Pretendi apenas, encontrar uma correspondência cômoda entre a equação e a curva geométrica. De resto, a palavra álgebra, não designava um ramo independente da matemática, mas um processo da aritmética deste tempo, que consistia em estabelecer que, a partir dos dados de um problema, uma equação que a quantidade incógnita satisfizesse. Este método matemático assemelha-se ao que, na Geometria grega, se chamava análise, e que consistia em construir uma linha desconhecida a partir de relações geométricas conhecidas. Por isso, longe de conferir à sua descoberta toda a importância que hoje lhe atribuímos, Descartes, vê nela uma simples apresentação algébrica da Geometria dos antigos. Com isso, a *Geometria*, de 1637 não será um Tratado sistematizado de Geometria Analítica, mas expõe um fundamento nuclear da filosofia de Descartes, ou seja, o método baseando em mecanismos puramente simples, estabelecidos nos raciocínios matemáticos." ALQUIÉ, 1986, p. 35-36. Tratar de uma ciência matemática requer a expressão de unidade por meio de um conceito de base que expresse a universalidade entre as diversas ciências matemáticas. Crapulli, relata como esse problema chega ao Renascimento, e como há um desenvolvimento progressivo das discussões matemáticas para se chegar à concepção de uma *Mathesis universalis*. Crapulli relata ainda que quando o conteúdo dessa ciência universal aparece determinado, tende a centrar-se sobre a teoria das relações/ proporções. Cf. CRAPULLI, 1969, p. 28.

[40] Segundo Costabel: "O sistema de notações algébricas constituído por Descartes tem como referência a matemática de Clavius". COSTABEL, 1982, p. 29. Milhaud acrescenta que: "É possível conjecturar que Descartes haveria adquirido as notações através das obras do Jesuíta Clavius, as quais deveriam fazer parte da biblioteca do Colégio jesuíta de La Flechè". MILHAUD, 1921, p.38. Outra característica relevante do sistema de notações cartesiano é o aparecimento do conceito de incógnito. Incógnito designa algo que exige resolução. Sabe-se, que Viète fornece grandes contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático, e, de modo peculiar, tais argumentações de Viète foram debatidos por Descartes numa carta enviada a Mersenne datada em meados de dezembro de 1637. Cf *Correspondance* (AT, I, 478-479). Assinala-se que 1637 é o ano da publicação da *Geometria*. Segundo Boyer, Viète foi um dos grandes contribuidores para elaboração da Álgebra moderna. Segundo esse comentador, não haveria grandes progressos na teoria da Álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a "coisa" numa equação com coeficientes numéricos específicos. Tinham sido desenvolvidos símbolos e abreviações para uma *incógnita* e suas *potências*, bem como para operações e a relação de igualdade. Desde os tempos de Euclides que as letras tinham sido usadas para representar grandezas, conhecidas ou desconhecidas, [...], todavia, Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra uma quantidade suposta desconhecida, ou intermediaria, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Ora, se Viète tivesse adotado outros símbolos existentes em seus dias, ele poderia ter escrito todas as equações quadráticas na forma única: $BA^2 + CA + D = 0$, onde A seria a *incógnita* e B, C e D seriam os parâmetros. Mas infelizmente Viète somente era moderno em alguns aspectos, ou seja, em outros era um antigo ou medieval. Sua *álgebra* é fundamentalmente sincopada e não simbólica, pois, embora Viète sensatamente adotasse os símbolos germânicos para adição e subtração e ainda mais sensatamente usasse símbolos diferentes para parâmetros e incógnitas, o resto de sua álgebra consistia de palavras e abreviações. [...] Outro caso é o exemplo em que Viète procurou outra palavra, e neste caso ele observou que em problemas envolvendo a "coisa" ou "*quantidade incógnita*", geralmente se procede do modo que Pappuse os antigos (Euclides, Apolônio etc.,...) haviam descrito como análise. Com isso, em vez de raciocinar a partir da hipótese que a incógnita foi dada, deduzia uma conclusão necessária da qual a incógnita possa ser determinada. Em símbolos modernos, se queremos resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$. Cf. BOYER, 1996, p. 208-209. Segundo Jullien, existiriam possíveis acusações de plágio de Descartes em relação à Viète. Cf. JULLIEN, 1996, p. 33. Entretanto, em uma carta datada em 1 de março de 1638, Descartes declara a Mydorge que: "meus cálculos são mais simples e mais cômodos que os de Viète" *Correspondance* (AT, II, 22). Allard relata que os primeiros aspectos do método de Descartes encontram-se ainda nos antigos geômetras, os quais utilizavam a análise para solução dos problemas. Os vestígios dessa análise aparecem, sobretudo, em Diofante e

1.1. A descoberta do método: primeira etapa da resolução do problema de Pappus

Pretende-se aqui examinar a primeira etapa da resolução cartesiana do problema de Pappus. Por meio da exposição desta etapa é explicado o *modus operandi* do método de Descartes. Para isso, primeiramente é exposta a concepção da lógica matemática de Descartes proposta no *Discurso do método*, o que possibilita compreender os raciocínios que articulam o *modus operandi* do seu método. Em seguida, são descritas as vias demonstrativas de análise e síntese de Pappus, as quais são restabelecidas por Descartes mediante o *modus operandi* do método que inventara. Na sequência, trata-se da articulação entre a Álgebra, a Aritmética e a Geométrica por meio do *modus operandi* do método de Descartes proposto, sobretudo, na *Geometria.* Por fim, expõem-se os passos que são decisivos para descrever a primeira etapa da resolução cartesiana do problema de Pappus.

1.2. A concepção lógico-matemática do método de Descartes

No *Discurso do método*, Descartes anuncia o propósito de constituir um método que contemple as vantagens da lógica [41] e das matemáticas da sua época: [42] "Estudara um pouco, quando jovem, entre as partes da filosofia, (1) a lógica, e, entre as matemáticas, (2) a análise dos geômetras e (3) a álgebra, três artes ou ciências que pareciam dever contribuir ao meu propósito".[43] Em relação à lógica, Descartes diz:

Pappus. Entretanto, esses matemáticos não haviam entendido o verdadeiro uso do método de análise. Cf. ALLARD, 1963, p. 41.

[41] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17-18). A vantagem da lógica diz respeito a formulações racionais de preceitos verdadeiros. Segundo Gilson, a lógica anunciada por Descartes é aquela ensinada nas Escolas (Escolástica), a saber, silogismos e outras instruções aristotélicas. Mas, Gilson acrescenta que Descartes considera as formas silogísticas supérfulas ou mesmo inúteis, pois, a partir delas, por exemplo, a validade destas formas é independente dos seus conteúdos e também porque se pode deduzir corretamente uma verdade previamente conhecida mediante premissas absurdas. Cf. GILSON, 1987, p. 183-814. Descartes trata detalhadamente deste assunto em uma carta enviada a Mersenne, datada de 18 de março de 1641.

[42] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17-18). De acordo com Gilson, os problemas tratados pela matemática da época de Descartes dizem respeito (1) à análise geométrica, mais especificamente, a análise proposta por Pappus e (2) a álgebra dos modernos, desenlvolvida a partir da aritmética de Diofanto. Cf. GILSON, 1987, p. 187-191.

[43] *Discours de la méthode* (AT, VI, 17). O propósito de Descartes é constituir um método. Gilson assinala que quando Descartes escreve os termos "arte" ou "ciência", pretende propor como inútil o problema secular: "*Utrum logica sit ars, aut scientia*?" Tal problema diz respeito, sobretudo, à diferença entre lógica e ciência realizada por Tomás de Aquino: "*ars lógica, id est scientia rationalis*". Cf. GILSON, 1987, p. 183.

> Mas, ao examiná-las, atentei que, quanto à lógica, seus silogismos e a maior parte de suas outras instruções servem mais para explicar aos outros as coisas que já se sabem, ou mesmo, como a arte de Lúlio, para falar sem discernimento daquelas que ignoram, do que para aprendê-las; e, embora ela contenha efetivamente preceitos muito verdadeiros e muito bons, existem misturados a eles, tantos outros que são nocivos ou supérfluos. [44]

Embora Descartes atribua à lógica da sua época "preceitos verdadeiros",[45] a critica por tratar apenas de objetos (ou coisas) que já se sabem e por não ensinar um meio pelo qual se cultiva a razão, isto é, um *modus operandi* da própria razão que lhe evidencie uma correspondência necessária entre diferentes objetos investigados. Esta correspondência deve lhe evidenciar, portanto, quais são os preceitos lógicos que constituirão o seu método. Para realizar esta

[44] *Discours de la méthode* (AT, VI, 17). Desde as *Regulae*, Descartes sustentava que as formas do silogismo não auxiliavam em nada a busca da verdade. Cf. *Regulae* (AT, X, 439-440). Segundo Jullien, a lógica da época de Descartes era uma disciplina autônoma e se caracterizava por "formas silogísticas". Cf. JULLIEN, 1996, p. 24-25. Em uma carta a Beeckman, datada em 1619, Descartes versa sobre a arte de Lúlio e, manifesta o seu interesse em constituir um método, isto é, uma ciência inovadora e admirável (*Scientiae mirabilis*) a partir dos objetos e raciocínios matemáticos. Descartes: "Digo-vos que o que advogo em meu pensamento, e não com isso, quero propor uma grande arte [*Artem Brevem*] tal como fez Lúlio [Lullij], mas sim, uma ciência [Scientiae] totalmente nova, que resolva de maneira sistemática qualquer tipo de problema que se possa formular para questões referentes a quantidades de qualquer gênero, isto é, continuas ou mesmo discretas, e para cada resolução, segundo sua natureza. Pois o mesmo que ocorre no caso da aritmética, em que alguns problemas podem ser resolvidos por meio de números racionais, outros mediante números irracionais, e outros que não podem resolver e somente nos cabe supor sua resolução, assim espero demonstrar que, quando as quantidades são contínuas, se pode resolver o problema mediante linhas retas ou circulares, e outros, que tão somente se resolvem através de linhas curvas elaboradas por um único movimento, curvas estas, que podem ser traçadas por intermédio de novos compassos, e que não são em minha opinião, menos confiáveis e geométricos que os ordinários a qual utilizamos para desenhar círculos. Finalmente, outros problemas somente podem ser resolvidos com linhas curvas geradas por movimentos distintos e não subordinados uns aos outros, e que com razão, os são tão somente imaginários, tal é o exemplo da quadratriz, representado, pois, uma dessas curvas. Com isso, não creio que se possa imaginar algo que não se possa resolver, ainda que seja apenas com linhas, contudo, espero demonstrar que problemas possam ser resolvidos e de que modo se dá tal procedimento. E isso tudo, ficará em cargo da verdadeira geometria. Segue a versão original latina: *Et certe, vt tibi nude aperiam quid moliar, non Lullij Artem brevem, sed scientiam penitus novam tradere cupio, quâ generaliter folvi poffint quaeftiones omnes, quae in quolibet genere quantitatis, tam contnuae quàm difcretae, poffunt proponi. Sed vnaquaeque iuxta fuam naturam: vt enim in Arithmeticâ quaedam quaeftiones numeris rationalibus abfolvuntur, aliae tantùm numeris surdis, aliae denique imaginari quidem possunt, sed non solvi: ita me demonstraturum spero, in quantitate continuâ, quaedam problemata absolvi posse cum solis lineis rectis vel circularibus; alia solvi non posse, nifi cum alijs lineis curvis, sed quae ex vnico motu oriuntur, ideoque per novos circinos duci poffunt, quos non minus certos existimo & Geometricos, quàm communis quo ducuntur circuli; alia denique folvi non posse, nisi per lineas curvas ex diverfis motibus fibi invicem non subordinatis generatas, quae certe imaginariae tantùm sunt: talis eft linea quadratrix, fatis vulgata. Et nihil imaginari posse exiftimo, quod faltem per tales lineas solvi non possit; sed spero fore vt demonstrem quales quaestiones solvi queant hoc vel illo modo & non altero: adeò vt pene nihil in Geometriâ superfit inveniendum*. DESCARTES & BEECKMAN (AT, X, 156-157).

[45] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17). De acordo com Gilson, os termos "instruções" e "preceitos" (do latim *praecepta*) são algumas regras lógicas estabelecidas para desenvolver o conteúdo de um conceito. Nesta perspectiva, ele expõe a seguinte defesa da lógica cartesiana contra a aristotélica feita por Claberg: "*Notum interim est, Logicae Peripateticae praecepta omnia et singula ad syllogismum tendere, non aliter atque omnes lineae ad centrum in aliquo circulo, sicut Johan. Wllius ex communi Peripateticorum sensu, logicae Peripateticae*". *Defensio cartesiana*, c. X, 2. In: GILSON, 1987, p. 183.

correspondência e encontrar tais preceitos, ele investiga o modo como a análise dos antigos geômetras e a álgebra dos modernos pode contribuir com o seu propósito:

> No que diz respeito à análise dos antigos e a álgebra dos modernos, além de se estenderem a matérias muito abstratas, e que não parecem inicialmente de nenhuma utilidade, a primeira está sempre tão restrita à consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar em demasia a imaginação; e quanto à última ficamos tão sujeitos a certas regras e a certos sinais, que dela se fez uma arte confusa e obscura que embaraça o espírito, ao invés de uma ciência que o cultive. Foi isto que me levou a pensar que cumpria procurar algum outro método que, compreendendo as vantagens destas três artes fossem isentos de seus defeitos. [46]

Nesta explicação, Descartes faz, primeiramente, referência à análise dos antigos geômetras,[47] mais especificamente, ao método de análise proposto por Pappus na obra *Coleção Matemática*,[48]com o intuito de rejeitar a "concepção elementar" das definições, postulados, axiomas (noções comuns) e teoremas, estabelecidos por Euclides nos *Elementos.* [49] Para os

---

[46]*Discours de la méthode* (AT, VI, 17-18).

[47] Segundo Jullien, os antigos geômetras a quem Descartes fez referência são aqueles que estão contemplados no período que vai de Euclides à Proclus. Cf. JULLIEN, 1996, p. 26.

[48] Ao longo da obra *The Method of Analysis*, Hintikka e Remes sustentam que o método de análise de Pappus é constituido de meneira complementar por uma etapa sintética e, por isso, eles designam-no como "método de análise e síntese". Cf. HINTIKKA & REMES, 1974.

[49]Concepção elementardiz respeito a "verdades primitivas" que não necessitam de nenhuma explicação ulterior, além de sua própria "auto evidência". Tal interpretação é sustentada por Tannery na obra *Géométrie Grecque*, sobretudo, no capítulo7 (TANNERY, 1887, p. 95-107), por Blanché (BLANCHÉ, 1966) e por Ernest (ERNEST, 1991). Segundo Heath, o Livro XIII dos *Elementos* de Euclides expõe as análises das cinco primeiras proposições, entretanto, sabe-se que este Livro trata de uma interpolação posterior a Euclides. Isto porque, Euclides elimina de seu texto qualquer menção de como as construções que exibe foram encontradas. Cf. HEATH, 1953, p. 442. Boyer: "Na maioria dos manuscritos dos *Elementos* de Euclides encontramos as dez pressuposições seguintes: Postulados; 1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto. 2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta. 3. Descrever um circulo com qualquer centro e qualquer raio. 4. Que todos os ângulos retos são iguais. 5. Que se uma reta cortando duas retas faz ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos. Noções comuns: 1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si. 2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais. 3. Se iguais são subtraídos de iguais, os retos são iguais. 4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra. 5. "O todo é maior que a parte." Neste sentido, os axiomas são proposições evidentes, que se admitem como verdadeiras, sem a exigência de uma explicação formal. Os postulados são proposições não demonstráveis, as quais são admitidas como o princípio elementar de um sistema lógico. Cf. BOYER, 1996, p. 72-73. Nas *Regulae* Descartes expõe a sua concepção: " Se deve referir as noções comuns, cuja aquelas que são como laços unidos entre si e a outras naturezas simples sobre cuja evidência se apoiam todas as conclusões dos raciocínios. São as seguintes: duas coisas idênticas a uma terceira são idênticas entre si; assim também, duas coisas que não podem relacionar-se com uma terceira do mesmo modo, tem também entre si alguma diferença, etc. E, além disso, estas noções comuns podem ser conhecidas, quer pelo entendimento puro, quer por meio do mesmo entendimento que intui as imagens de outros objetos matérias". *Regulae ad directionemingenii* (AT, X, 419-420). Segue o texto latino: *Huc etiam referendae sunt communes illae notiones, quae sunt veluti vincula quaedam ad alias naturas simplices inter se conjugendas, et quarum evidentia nititur quidquid ratiocinando concludimus; hae scilicet: quae sunt eadem uni tertio, sunt eadem inter se; item, quae ad idem tertium eodem modo*

antigos geômetras estes conceitos parecem designar verdades “auto evidentes” à compreensão dos objetos geométricos (figuras), tais como a definição de ponto, reta, etc., ou, ao postulado de que “todos os ângulos retos são iguais” etc.[50] Os antigos geômetras, portanto, efetuam o método de análise por meio de construções permitidas pelas definições, postulados, etc., a saber, instanciando, através de uma figura geométrica, os dados do problema proposto e passando a acrescentar a estes novos dados. Descartes, todavia, despreza a “concepção elementar” dos antigos por considerar ausente uma explicação ulterior, isto é, o modo pelo qual a razão chega a tal concepção.[51] Nesta perspectiva, Jullien[52] relata a seguinte posição de Descartes: (1) que a evidência da construção de uma figura geométrica deve satisfazer a um critério específico de análise e, a partir disso, (2) que a secção de uma figura deve estar segundo o produto dado; (3) que a determinação analítica dos pontos concernidos em uma propriedade fornece a solução de diversos problemas. Segundo Descartes, então, a evidência de um objeto geométrico não é concebida por definições, postulados etc., mas por um novo critério de análise, a saber, a análise que verifica uma correspondência necessária entre um objeto geométrico e outros objetos matemáticos. Logo, a evidência do objeto geométrico se dá pelo próprio *modus operandi* da razão. Os outros objetos matemáticos são os números algébricos, entretanto, ainda em sua explicação, Descartes sustenta que há também problemas com a álgebra dos modernos. [53] No início século XVII, a Álgebra era explicada por meio de cálculos demasiadamente abstratos, mas, diante do aspecto lógico de sua operacionalidade, Descartes dirige-lhe a atenção com o intuito de

---

referri non possunt, aliquid etiam inter se habent diversum, &c. Et quidem hae communes possunt vel ab intellectu puro cognosci, vel ab eodem imagines rerum materialium intuente. *Regulae ad directionemingenii* (AT, X, 419-420).

[50] Cf. BOYER, 1996, p. 72-73.

[51] Cabe ressaltar que Descartes despreza a concepção elementar dos antigos geômetras por tratar de “coisas que já se sabem”, isto quer dizer que, por exemplo, os axiomas (ou, noções comuns) para Descartes servem como princípios rudimentares da razão, isto é, como princípios analiticamente descobertos. Descartes trata especificamente deste assunto no artigo 49 dos *Princípios da Filosofia* (AT, VIII, 23-24) e na *Conversação com Burman* (AT, V, 146).

[52] Cf. JULLIEN, 1996, p. 27.

[53] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 20). Segundo Jullien, os algebristas modernos do século XV, como Regiomontanus, Luca Paccioli e Nicolas Chuquet ainda utilizavam regras de cálculos rudimentares. Seus sucessores do século XVI, sobretudo, Cardan, Tartaglia e Bombelli conseguiram o êxito de resolver as equações do terceiro e quarto grau. Entretanto, as notações ainda eram bastante confusas; e, coube a Descartes a realização de uma reforma estrutural na utilização da Álgebra a favor da Geometria. JULLIEN, 1996, p. 32-34. Itard acrescenta que: “Em meados de 1629, Descartes dispunha de uma notação algébrica que em seu conjunto é a mesma adotada nos dias atuais, uma adaptação daquela esboçada por Viète, como também de seu cálculo geométrico, onde as construções que correspondem às soluções das equações são colocadas no início da análise, o que opera uma mudança decisiva em relação a Viète. Então, as principais diferenças entre Descartes e Viète são: a escolha de uma unidade de comprimento, a adoção de uma linguagem puramente aritmética e a utilização sistemática de comprimentos retilíneos, isso porque Descartes determina as resoluções das equações no inicio da análise, já Viète determina no fim da análise as construções enquanto resultado efetivo”. ITARD, 1984, p. 273.

interpretar algebricamente as figuras geométricas. No *Discurso do método*, ele continua a sua explicação:

> Notei que, para conhecê-las, eu precisaria às vezes considerar cada uma em particular, e outras vezes somente decorá-las, ou compreender as várias ao mesmo tempo. Assim, pensei que, para melhor considerá-las em particular, teria de conjecturá-las como linhas, porque não havia nada mais simples e nem que pudesse conceber mais distintamente à minha imaginação e aos meus sentidos; mas, para reter e compreender as várias ao mesmo tempo, eu precisava explicá-las por alguns sinais, os mais curtos possíveis, e que, desse modo, aproveitando o melhor da análise geométrica e da álgebra, corrigiria todos os defeitos de uma pela outra. [54]

A partir desta explicação, Jullien[55] sustenta que: (1) Descartes acusa os calculadores modernos de usarem notações algébricas bastante confusas e, em seguida, opta por uma análise desvinculada da síntese; [56] (2) fornece diversos resultados que concernem à resolução das equações para a teoria do cálculo e das raízes; (3) descobre como é possível manipular as raízes dos quadrados e dos cubos, a saber, associando a largura, a superfície e o volume, e, assim constituindo três tipos de grandezas. Com isso, Descartes recoloca os problemas geométricos em uma linguagem de cálculo algébrico, ou, em outras palavras, equaciona todos os lugares (ou, propriedades) geométricos por meio de notações algébricas correspondentes. [57] Descartes, portanto, estabelece o seu critério de análise a partir da concepção que prescreve o encadeamento lógico do efeito (que é aqui uma figura geométrica) à sua causa necessária (que é aqui uma equação algébrica correspondente a um lugar ou propriedade geométrica). Assinala-se que essa análise possibilita, em última instância, a constituição de uma ciência por meio de parâmetros claros e evidentes, os

[54]*Discours de la méthode* (AT, VI, 20). Nesta perspctiva, Allard relata que é a partir da matemática, mais precisamente na análise dos antigos geômetras e na Álgebra dos modernos, que Descartes descobre a "expressão histórica" do "método da ciência universal". Cf. ALLARD, 1963, p. 42.

[55] Cf. JULLIEN, 1996, p. 33-34.

[56] Cf. JULLIEN, 1996, p. 33-34. Cf. JULLIEN, 1996, p. 33-34. Relembremos que ao longo da obra *The Method of Analysis*, Hintikka e Remes sustentam que o método de análise de Pappus é constituído de maneira necessária e complementar por uma etapa sintética e, por isso, eles designam-no como "método de análise e síntese". Cf. HINTIKKA & REMES, 1974, p. 17-18.

[57] Segundo Kobayashi: "Descartes propõe, em primeiro lugar, a rejeição da lei da homogeneidade. Deve-se ressaltar que essa lei dominava o pensamento matemático, desde a Antiguidade. Portanto, Descartes considera as diferentes espécies de grandezas, tais como a raiz, o quadrado, o cubo, etc... como não sendo mais do que as grandezas que constituem os termos da mesma proporção contínua. Em seguida, Descartes atribui uma linha ou uma superfície à unidade dessa proporção continua, o que irá, com razão, permitir a imaginação das diferentes espécies de grandezas, sob o mesmo modo duma linha. Em segundo lugar, Descartes considerara as operações algébricas, como casos particulares do cálculo decorrente da teoria das proporções". KOBAYASHI, 1993, p. 16.

quais têm como ponto de partida o próprio pensamento (ou seja, razão ou entendimento). [58] Descartes:

> [...] os objetos das matemáticas são notadamente diferentes, todavia, todos coincidem em apenas considerarem as diversas relações e proporções que entre eles se encontram. Diante disso, pensei que seria melhor examinar apenas essas proporções, conjecturando-as apenas nas disciplinas que servissem para tornar o seu conhecimento mais fácil, mesmo assim, sem os limitar de modo algum a essas disciplinas, com o intuito de poder melhor aplicá-las a todas as outras às quais conviesse. [59]

Para Descartes no caso em que se é solicitado resolver uma dada questão matemática, se deve primeiramente identificar uma construção geométrica mediante a proposição de uma equação

[58] Descartes explica em duas cartas o motivo pelo qual é fundado no pensamento, e não em outro princípio, a filosofia metafísica: (3) O primeiro princípio da sua filosofia é *Penso logo existo* [indaga de forma critica um interlocutor de Descartes a comparar com a prova fornecida pelo ato da respiração]. *Correspondance* (AT, I, 513). Todavia, analisemos quando se diz, por exemplo: (3) *Respiro, logo existo*. Ora, se queremos concluir a nossa existência pelo fato de a respiração não poder existir sem ela, não se conclui nada, porque seria preciso antes ter provado que é verdade que respiramos, e isso é impossível, se não tiver também provado que existimos. Mas, se queremos concluir a nossa existência pelos sentidos ou pela opinião que temos de que respiramos, de modo que, ainda que esta opinião não fosse verdadeira, julgássemos, todavia que era impossível que a tivesse, se não existíssemos, conclui-se muito bem; porque o pensamento de respirar se apresenta então ao meu espírito antes do da existência, e não podemos duvidar que o tenhamos enquanto o temos. E não é diferente dizer nesse sentido: *Respiro*, *logo existo*, do que: *Penso*, *logo existo*. E se analisamos esse encadeamento de razões, encontraremos que todas as outras preposições das quais podemos concluir: assim a nossa existência vêm dar a esta mesma; de forma que, por elas, não se prova a existência do corpo, ou seja, a de uma natureza que ocupa um espaço [...], mas apenas a do espírito, ou seja, de uma natureza que pensa; e se bem que possamos duvidar se não é uma mesma natureza que pensa e que ocupa espaço, quer dizer, que é ao mesmo tempo intelectual e corporal, mas que, todavia, não a conhecemos pelo caminho que propus, senão como puramente intelectual. Cf. *Correspondance* (AT, II, 37-38). Por fim, no *Discurso do método* Descartes corrobora essa concepção da seguinte forma: “E, notando que esta verdade – penso, logo existo – era tão firme e tão certa que todas as mais extravagantes suposições dos céticos não eram capazes de abalá-la, julguei que podia admiti-la sem escrúpulo como o primeiro princípio da filosofia que buscava” *Discours de la méthode* (AT, VI, 32). Nota-se, portanto, que o processo de duvidar que conduz à constituição do princípio metafísico de Descartes é, uma vez concluído, relegado a uma condição secundária. Para constituir o princípio metafísico, Descartes propõe-se a considerar tudo como duvidoso. Nesta perspectiva, a suspensão do juízo é necessariamente o *efeito* de um ser cuja *causa* é concebida com clareza e evidência. Desse modo, o próprio pensamento é descoberto analiticamente. Segundo Alquié: “É sabido que Descartes afirma frequentemente que o seu método é universal, que se aplica a todas as questões, incluindo as de metafísica. Mas, por outro lado, nas *Regulae*, a ligação do método cartesiano com uma ciência em especial, a ciência matemática, parece extremamente estrita, e é lícito perguntar se o método não será uma simples generalização da própria matemática. Será de acreditar que o método é verdadeiramente primordial e que a matemática constitui apenas uma das suas aplicações entre outras possíveis? Ou pelo contrário, que, saído da matemática, se limita a alargar com maior ou menor facilidade a todos os problemas alguns processos matemáticos? […] Na verdade, o método aconselhado por Descartes é muitas vezes mais flexível, e não se deve perder de vista que o caráter não acabado das *Regulae* é testemunho da impossibilidade em que seu autor se encontrou de resolver pelos mesmos processos todos os problemas. […] O seu desejo de atingir em toda parte a certeza leva-o, portanto, a considerar universal um método que, de fato, é de estilo matemático, e nunca foi aplicado de maneira rigorosa a não ser no domínio da quantidade”. AlQUIÉ, 1986, p. 22-24.

[59] *Discours de la méthode* (AT, VI, 20).

algébrica correspondente. Tal solução é concebida em função dos segmentos dados. [60] Em seguida, sem fazer qualquer distinção entre os segmentos dados e os desconhecidos, ele analisa o grau de dificuldade da questão apresentada, de modo a estabelecer relações e proporções entre os segmentos dados e os procurados. Nota-se, então, que do mesmo modo que Descartes recusa a concepção elementar da geometria, renega também a demasiada abstração algébrica dos calculadores, pois, o seu objetivo não é exclusivamente matemático, mas a formulação lógica do método que prescreva uma operacionalidade matemática exercida pelo entendimento, ou seja, pelo cultivo da razão. De outro modo, os antigos geômetras e os calculadores modernos apenas se preocupavam com a natureza cognoscível fornecida pela utilização particular do seu objeto de estudo. Eis o objetivo de Descartes:

> O que me contentava neste método era que por meio dele tinha a absoluta certeza de usar em tudo a minha razão […]; ademais notava, ao exercê-lo, que meu espírito se acostumava pouco a pouco a conceber mais nítida e evidentemente seus objetos; e que, não o tendo sujeitado a nenhuma disciplina particular, prometia-me aplicá-lo tão utilmente às dificuldades das outras ciências, tal como fizera às da Álgebra. [61]

O método é constituído, então, quando Descartes analisa os objetos geométricos (figuras) por meio de cálculos algébricos (notações algébricas correspondentes), concebendo, assim, uma operação da própria razão que a cultiva. A partir deste cultivo da razão, Descartes entende que a lógica do seu método é suficientemente fundamentada em poucos preceitos que requerem apenas as "longas cadeias de razões, tão simples e fáceis, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às suas mais difíceis demonstrações".[62] Para se esclarecer o desenvolvimento desta lógica matemática é necessário examinar a sua origem a partir do método de análise (e síntese) de Pappus e, em seguida, a sua sistematização mediante o uso da Geometria, da Aritmética e da Álgebra a favor da resolução do famoso problema de Pappus.

[60] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 20-21).
[61] *Discours de la méthode* (AT, VI, 21). Segundo Milhaud, os "cálculos algébricos" utilizados a partir da tradição aritmética de Diofanto são uma espécie de prolongamento da Aritmética, a partir dos quais as soluções das equações são dadas em valores calculáveis por meio de determinadas formulas. Já na tradição dos geômetras, são os comprimentos que se tornam necessários construir. Assim, as raízes da equação do segundo grau podem, por um lado, serem calculadas por uma sequência de operações. Para os gregos, podiam-se efetuar as sequências dos cálculos, o problema, portanto, é resolvido pela construção de dois comprimentos cujo se conhece a soma ou a diferença e o produto. Em particular, a raiz da equação $x=2a$ que resulta do problema da duplicação do quadrado, se obtém quando se calcula a raiz quadrada de 2. Cf. MILHAUD, 1921, p. 45.
[62] *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).

1.1.3. Método de análise (e síntese) em Pappus: origens do método de Descartes

O problema de Pappus é fundamental no desenvolvimento da *Geometria*; logo, é por meio deste exame que surgem as questões lógico-matemáticas – a classificação das curvas e as relações entre os graus de equações requisitadas nos pontos geométricos – que deverão ser solucionadas na empreitada de Descartes para a invenção do seu método. [63] Pappus descreve as vias demonstrativas de análise e síntese mediante a constituição do seu método matemático. [64] A análise em Pappus é subdividida em dois tipos, a saber, em uma *analise teorética* e em uma *análise de âmbito problemático.* [65]

Na *análise teorética* pretende-se estabelecer a veracidade de um teorema. Para isso é necessário supor a coisa procurada como existindo e sendo verdadeira. Na sequência passa-se em ordem pelas suas consequências, como se fossem verdadeiras e existentes até algo admitido. Então, se aquilo que fora admitido é verdadeiro, a coisa procurada é consequentemente também verdadeira e a prova será o reverso da análise. Porém, caso se chegue a algo que é admitido como falso, a coisa procurada também será falsa. [66] Já na *análise problemática* pretende-se determinar

---

[63] Numa carta enviada a Mersenne – datada em meados de 1632 – Descartes relata o modo como resolveu o problema de Pappus e revela que o seu método é superior a todos os demais. Cf. *Correspondance* (AT, I, 478). Optou-se nesta pesquisa por expor o método de análise (e síntese) de Pappus porque Descartes o anuncia em diveras oportunidades. Vide Descartes (AT, X, 373-376) e (AT, VI, 17-18).

[64] Numa perspectiva histórica da filosofia da matemática, Paty diz: "Em Leyde, no ano de 1631, Descartes tomou conhecimento do problema de Pappus através do orientalista J. Gool, ou Golius (1596-1667), recém-nomeado professor da Universidade, e que trazia do Oriente informações de manuscritos árabes, juntamente com o problema relativo aos segmentos de retas ligadas por relações de proporções. Descartes de posse deste material, o resolveu em algumas semanas, pela geometria algébrica, fornecendo então um dos primeiros exemplos de resolução puramente analítica de um problema de geometria." PATY, 1998, p. 9-57. A resolução lógica do problema de Pappus é manifesta nos procedimentos metódicos de análise e síntese. Segundo Boyer: "Há uma descrição completa do que se denominava para os antigos como o método de análise e de uma coleção de obras conhecida como *Tesouro da Análise*. Pappus descreve a análise como sendo um método de conceber como aceito o que se busca, e assim passar por suas consequências até alguma coisa que seja aceita como resultado da síntese. Dito de outra forma, Pappus observava na análise uma solução ao contrário, cujos passos deveriam ser percorridos de novo em sentido inverso para assim fornecer uma demonstração matematicamente válida. Se a análise levasse a alguma coisa impossível, o problema também seria impossível, pois uma conclusão falsa implica em uma premissa falsa. Como se segue, Pappus explica que o método de análise e síntese é usado pelos autores cujas obras constituem o autêntico *Tesouro da Análise*". BOYER, 1996, p. 128. Souza acrescenta que o método de análise de Pappus consistia em se supor demonstrado o teorema ou resolvido o problema e, em se investigar, a partir disso, etapas anteriores que eram prosseguidas até que fosse descoberta uma proposição anteriormente conhecida. A síntese constituía em um movimento progressivo, a partir dos dados até que se chegasse a estabelecer a demonstração do teorema ou a solução do problema. Cf. SOUZA, 1990, p. 67-83.

[65] A análise subdividia-se em uma transformação, que estava relacionada com a busca das condições para a solução de um problema geométrico e, em resolução, que estava relacionada com a legitimação das condições que foram previamente descobertas e estabelecida. Cf. BOYER, 1996, p. 128.

[66] Cf. PAPPUS, 1982, p. 477-478.

alguma quantidade desconhecida. Nesta perspectiva, se supõe a coisa procurada como sendo conhecida, e, assim, passa-se em ordem pelas suas consequências como se fossem verdadeiras até algo admitido. Se a coisa admitida é possível e pode ser realizada, a coisa desejada será também possível. Por isso, a prova é novamente o reverso da análise. [67] Contudo, ambas as explicações analíticas não comprovam o teorema, ou seja, não fornecem ao matemático a solução da questão apresentada. Por isso, torna-se necessário efetuar a via demonstrativa da síntese. A via sintética, portanto, é a que fornece a comprovação da questão apresentada. [68] Segue a exposição de Pappus:

> O denominado *Tesouro da Análise*, de meu filho Hermedoro, é, em suma, um corpo especial de doutrinas preparadas para a utilização daquelas que, após terem examinado os elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas *teoréticos* que lhe são propostos; e ele é útil somente para esse propósito. É resultado do trabalho de três homens: Euclides, o autor dos *Elementos*, Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo, que procedem pelo método de *análise* e *síntese*. A análise é a via que parte daquilo que é procurado – considerando como se fosse admitido – e segue, em ordem, por meio de suas derivações, até algo admitido na síntese. Na análise, supomos o que é procurado como previamente sido feito e investigamos aquilo do qual ele resulta e de novo qual é o antecedente deste último, até que, com o nosso passo para trás, alcancemos algo que já é conhecido e primeiro na ordem. A esta via chamamos de análise, por ser uma solução de trás para frente. Na síntese, por outro lado, requeremos como previamente realizado aquilo que na análise foi por último alcançado e, arranjado em sua ordem natural enquanto derivação o que antes era antecedente; e, encadeando-os uns aos outros, chegamos por fim à construção da coisa procurada. E assim a denominamos de *síntese*. Como se segue, a análise pode ser de dois tipos. Uma procura a verdade denominada *teorética*. A outra serve para produzir o que se almejava fazer. Essa é denominada *problemática*. No tipo de *análise teorética*, supomos a coisa procurada como existindo e sendo verdadeira, e então passamos em ordem pelas suas derivações/ consequências, como se fossem verdadeiras e existentes até algo admitido. Então, se aquilo que é admitido é verdadeiro, a coisa procurada é consequentemente também verdadeira e a prova será o reverso da análise. Porém, se chegarmos a algo que é admitido como falso, a coisa procurada também será falsa. No tipo de *análise problemática*, supomos a coisa almejada como sendo conhecida e então perpassamos em ordem, pelas suas derivações ou consequências como se fossem verdadeiras até algo admitido. Se a coisa admitida é possível e pode ser realizada, isto é, se ela for o que os matemáticos denominam dado, a coisa almejada será também possível. Com isso, novamente a prova será o reverso da análise. [69]

[67] Cf. PAPPUS, 1982, p. 477-478.

[68] Na síntese, a partir das condições descobertas e estabelecidas pela a análise, apresentava-se a prova do teorema, mediante uma sequência lógica necessária para a construção de figuras geométricas. Cf. BOYER, 1996, p. 128.

[69] PAPPUS, 1982, p. 477-478. Segue o texto latino: *Locus qui ἀναλυέμενος hoc est resolutus, o Hermodore fili, ut paucis comprehendam, est propria quaedam materia in eorum usum parata Qui, absolutis communibus elementis, in linearum construetione facultatem problematum quae proponuntur solvendorum, sihi comparare volunt estque ad*

É necessário examinar os raciocínios que constituem as vias demonstrativas de análise e síntese de Descartes a partir do método matemático de Pappus. [70] Nesta perspectiva, assinala-se que Descartes concebe o conceito de ordem e, assim, reformula a lógica a partir do método matemático de Pappus. [71]

De acordo com Descartes há apenas uma definição de análise, a saber, a via que prescreve a investigação do efeito para a causa.[72] Nesta perspectiva, a via demonstrativa de análise consiste exclusivamente em encadear proposições, começando com aquela que se pretende explicar e terminando com uma proposição conhecida, onde, a começar da primeira, cada proposição é a consequência necessária daquela que a segue. Disso resulta que a primeira proposição é

---

hoc solum ea disciplina utilis. Quae quidem tractrata a tribus viris. Euclide elementorum seriptore, Apollonio Pargaeo, Aristaeo maoire, procedit per resolutionuem et compositionem. Resolutio igitur est via ae ratio, qua a quaesito tamquam concesso per ea quae deinceps ronsequuntur perducimur ad id quod compositione conceditur. Nam in resolutione, id quod quaeritur tamquam factum supponentes, illud unde hoc contingit et rursus, quid illi antecesserit consideramus, donee ita regredientes in aliquid, quod iam cognitum sit vel in numero principiorum habeatur, incidimus, atque eiusmodi rationem, quoniam veluti retro sit solutio, ἀνάλυσιν vocamus. In compositione autem vicissim illud, quod in resolutione ultimum effecimus. Ulpole iam factum praemittentes eaque quae illie praecedunt secundum rei naturam sequentia collocantes et alterum alteri copulantes posimero constructionem quaesiti absolvimus, idque σίνθεσιν appellamus. Duo autem sunt resolutionis genera, quorum alterum. Quoniam in vero inquirendo versatur, θεωρηνιηόν sice speculatirum dicitur, alterum inveniendo proposito inservit ae προβλημαπιχίν vacatur. In speculativo igitur genere primum id quod quaeritur re vera ita se habere statuimus, tum per ea quae deiceps consequuntur, tanquam vera sint et per hypothesim firmata, ad aliquid concessum progredimur quod quidem si verum sit, verum eitiam erit id quod quaerimus et demonstratio vice versa resolutioni respondebit: contra si in aliquid quod falsum esse constat inciderimus, falsum etiam etiam erit id quod quaerimus. In problematico autem genere, cum id quod propositium est tamquam cognitum subiecimus, iam per ea quae deinceps conseuuntur, tamquam ver sint, ad aliquid concessum progredimur: quod concessum si fieri et suppeditari possit quod mathematici datum appellant, sieri etiam propositium poterit et rursus demonstratio vice versa resolutioni respondebit; *contra si in aliquid quod falsum esse constat inciderimus, itidem problema sieri non poterit*. Cf. GILSON, 1987, p.188 (apud: Pappi Alexandrini. *Mathematicarum Collectionum*. Lib, VII). Hintikka, Remes, Heath e Duhamel, autores que debatem o método de análise (e síntese) de Pappus, têm tradicionalmente procurado, em suas investigações, explicar se a análise consiste em extrair consequências lógicas do pressuposto inicial(o teorema que se pretende demonstrar) ou, ao contrário, se a análise procura remontá-lo à suas condições ou antecedentes e, com isso, determinar se a análise é descendente ou ascendente. Assinala-se, entretanto, que tais comentadores possuem interpretações diferentes, dentre as quais se destacam: (1) a interpretação que considera a análise como etapa dedutiva; (2) a interpretação que propõe a análise como etapa exclusivamente ascendente e não dedutiva; e (3) a interpretação que diferencia dois tipos diferentes de método em Pappus.

[70] De acordo com Hintikka e Remes, o método matemático de Pappus é constituído por duas vias lógicas, a saber, as vias de análise e síntese. Tais vias metódicas são indispensáveis para as resoluções dos problemas geométricos estabelecidos por Pappus. Cf. HINTIKKA & REMES, 1974, p. 17-18.

[71] Cottingham relata que: "O método cartesiano é utilizado para designar um ideal de um *método universal*, que possibilita uma ciência também universal, e, tem na Matemática o seu modelo na certeza dos argumentos". COTTINGHAM, 1993, p. 109.

[72] A via demonstrativa de análise mostra a Descartes o verdadeiro caminho pelo qual a coisa (objeto) é metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas. Descartes: "[...] A análise mostra a verdadeira via pela qual a coisa foi descoberta, metodicamente e como que *a priori*". *Secundae Responsiones* (AT, VII, 155). A tradução do latim para o francês de Clerselier corrobora: "A análise mostra a verdadeira via pela qual uma coisa foi metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas". *Secondes Reponses* (AT, IX, 121).

consequência da última e, portanto, logicamente correspondente a essa. No *Discurso do método*, Descartes prescreve os raciocínios desta via de demonstração ao sugerir que o leitor divida cada uma das dificuldades que examine em tantas parcelas que seja possível e necessário para melhor resolvê-las.[73]

Para Descartes a via demonstrativa sintética prescreve a investigação da causa para o efeito. Essa demonstração consiste no pressuposto de que a figura obtida satisfaz a todas as condições propostas, e, que segue o encadeamento lógico, ao reverso do que fora feito na análise.[74] Ora, após a determinação analítica dos lugares e propriedades da figura é ainda possível demonstrar que as condições intuitivamente postas são igualmente satisfeitas. Entretanto, para Descartes se pode omitir essa demonstração, pois, as condições para a comprovação da construção da figura já foram concebidas previamente pela análise. Diante disso, constata-se que para Descartes, diferentemente de Pappus, a via demonstrativa sintética não é o meio que fornece a comprovação do processo matemático, pois, uma vez feita a análise, a síntese torna-se trivial. Por isso, segundo Descartes, a demonstração sintética é apenas apta para convencer alguns leitores desatentos de que a determinação analítica de lugares (ou propriedades) geométricos é (1) suficiente para a construção de figuras mais complexas, ou, ainda (2) para a realização de demonstrações geométricas aptas às representações dos fenômenos físicos. Para tratar destes dois casos, Descartes estende às grandezas em geral a possibilidade de serem ordenadas e medidas, a saber, generalizando mediante o *modus operandi* do seu método os problemas geométricos dos antigos e recolocando essa generalização para a demonstração de construções geométricas mais complexas (ou seja, mais compostas): quer para a descrição do movimento de algumas curvas mecânicas (tal como a espiral logarítmica); quer para a demonstração geométrica da lei dos senos (lei que orienta a justificação experimental do movimento da luz e a identificação dos ângulos das cores do arco-íris). Também no *Discurso do método*, Descartes prescreve os raciocínios desta via de demonstração ao sugerir que o leitor conduza por ordem os raciocínios, começando pelos objetos simples até o conhecimento dos mais compostos e, assim, supondo uma determinada ordem mesmo entre aqueles objetos que não se precedem naturalmente uns aos outros.[75]

---

[73] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18).
[74] Descartes: "A síntese, ao contrário, mostra por uma via inteiramente diversa e como que examinando as causas por seus efeitos (embora a prova que contém seja talvez também dos efeitos pelas causas), demonstra, na verdade claramenteo que está contido em suas conclusões, e serve-se de uma longa série de definições, postulados, axiomas, teoremas e problemas". *Secondes Reponses* (AT, IX, 122).
[75] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).

1.4. Concepções de ordem e medida: constituição do método cartesiano

O *modus operandi* do método de Descartes é constituído por dois tipos de raciocínios, a saber, os raciocínios de ordem (lógica) e medida (matemáticas). [76] Os raciocínios de ordem e medida articulam entre si razões mutuamente necessárias para tratar da lógica que opera os termos e os objetos matemáticos. Então, são articulados, por um lado, os raciocínios de ordem: operando, sobretudo, as vias demonstrativas de análise e síntese; e, por outro lado, os raciocínios de medida: operando os objetos da Geometria e da Álgebra mediante os termos da Aritmética.

No início do Livro I da *Geometria*, Descartes alega que todos os problemas de Geometria podem ser propostos a determinados termos aritméticos e, em seguida, diz que todos os modos de usar os objetos das medidas aritméticas – as linhas geométricas e os números algébricos – são prescritos por cinco operações, a saber, a Adição, a Subtração, a Multiplicação, a Divisão e a Extração de raízes. [77] Tais operações, portanto, devem possibilitar o entendimento algébrico das linhas geométricas. Nesta medida, as operações aritméticas fornecem a Descartes raciocínios simples que viabilizam a correspondência entre objetos geométricos e números algébricos. Para Descartes, os termos aritméticos são conhecidos a partir de qualquer linha geométrica e podem

---

[76] Nas *Regras* (1621-1628), Descartes mostra a origem das concepções de ordem e medida: "[...] Deve haver uma Disciplina geral que explique tudo quanto se pode procurar referente à ordem e a medida, [...] esta Ciência é designada, não pelo vocábulo suposto, mas pelo vocábulo antigo e aceito pelo uso de *Mathesis universalis*, porque contém tudo o que contribui para que as outras ciências se chamem partes da Matemática. Quando a *Mathesis univeralis* suplanta em utilidade e em facilidade essas outras ciências que lhe são subordinadas, vê-se perfeitamente pelo fato dela se estender aos mesmos objetos que estas últimas e, além deles, a muitos outros; ainda pelo fato de suas dificuldades, se ela contém alguma, existirem também, as mesmas, nestas últimas ciências, com outras tantas mais provenientes de seus objetos específicos e que ela não tem. E, agora, uma vez que todos conhecem seu nome e compreendem seu objeto, mesmo sem lhe prestar atenção, por que motivo a maior parte dos homens aprofunda com esforço as outras disciplinas que delas dependem, e ninguém se preocupa em estudar ela própria? Isso me espanta certamente, se eu não soubesse que todos a consideram muito fácil e se eu não tivesse notado que o espírito humano deixa de lado o que acredita poder fazer facilmente e se lança logo para o que é novo e mais elevado". Segue o texto latino: "*debere scientiam, quae id omne explicet, quodcirca ordinem & mensuram* [...] *Eandemque, non ascititio vocabulo, sed jam veterato atque usu recepto, Mathesim universalem nominari, quoniam in hac continetur illud omne, propter quod aliae scientiae et Mathematicae partes appellantur. Quantum vero haec aliis sibi subditis et utilitate et facilitate antecellat, patet ex eo, quod ad eadem omnia, ad quae illae, et insuper ad alia multa extendatur, difficultatesque si quas contineat, eaedem etiam in illis existant, quibus insuper et aliae insunt ex particularibus objectis, quas haec non habet. Nunc vero, cum nomen ejus omnes norint, et, circa quid versetur, etiam non attendentes, intelligant: unde fit ut plerique disciplinas alias, quae ab ea dependent, laboriose perquirant, hanc autem ipsam nemo curet addiscere*? *Mirarer profecto, nisi scirem eam ab omnibus haberi facillimam, dudumque notavissem semper humana ingenia, praetermissis iis quae facile se putant* {*praestare*} *posse*, *protinus ad nova et grandiora festinare*. *Regulae* (AT, X, 378). E, em 1636, Descartesdeclara a Mersenne que pretendia colocar como título introdutório "*O Projeto de uma Ciência universal*" no *Discurso do método*. Cf. *Correspondance* (AT, I, 339). Sustenta-se, por isso, nesta pesquisa que as concepções de ordem e medida que constituem a *mathesis universalis* nas *Regras* ainda são utilizadas por Descartes em 1637.

[77] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 369).

ser estabelecidos mediante alguns símbolos. Segue a explicação matemática de Descartes que explicita a interpretação proposta nesta pesquisa. Para a construção de uma figura geométrica em que os pontos AB possam ser traçados é suficiente colocá-los para multiplicar os demais, os quais Descartes denomina BD e BC (ver figura 1). [78] Com isso, ele tem os pontos A e C para extrair os pontos DE em paralelo aos pontos AC. A partir destas medidas, ele concebe que BE é o produto da multiplicação. Ainda neste exemplo, Descartes relata que para dividir os pontos BE por BD é apenas necessário agregar E e D. Para isso, se deve traçar os pontos AC paralelos a DE, de tal modo que os pontos BC surjam como o resultado da divisão. Constata-se, assim, o início da formulação do *modus operandi* do método cartesiano por meio dos seguintes raciocínios das medidas aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

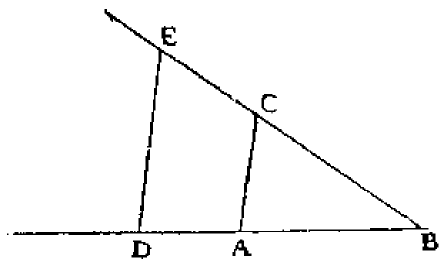


Figura 1 (AT,VI, 370)

Torna-se necessário agora examinar o modo como Descartes efetua a extração das raízes. Segundo Descartes, quando é requisitada a raiz quadrada dos pontos GH, se devem unir os pontos FG em linha reta, que expressa à unidade de medida (ver figura 2). [79] A divisão de FH em duas partes iguais pelo ponto K – tomando K como centro – determina o círculo FIH. Ao se extrair do ponto G, a linha reta com ângulos retos até I, se determina a medida GI como a raiz procurada.

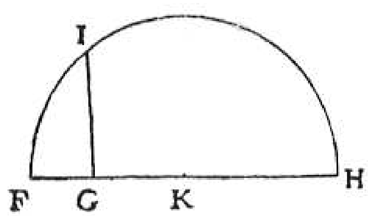


Figura 2 (AT,VI, 370)

[78] Cf. *La Geometrie* (AT,VI, 369).
[79] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 370).

Constata-se, assim, que Descartes rejeita a "concepção restritiva" da aritmética adotada pelos antigos geômetras, sobretudo, a de Euclides, que limitava calcular números determinados e interpretava, por exemplo, a multiplicação como um processo em que os produtos são de uma dimensão superior. As proposições aritméticas expostas nos Livros VII ao IX dos *Elemento*s de Euclides são formuladas em termos de segmentos de reta, não porque essa seja a forma de como os números são correspondidos, mas isso é o que eles são. [80] Diante disso, Descartes usa a álgebra com o intuito de reformular as antigas "notações aritméticas",[81] a saber, determinando a construção dos lugares (e propriedades) geométricos mediante uma correspondência numérica (análise algébrica).[82] Jullien [83] relata – se baseando na formulação cartesiana das notações algébricas – que para estabelecer a relação entre as equações algébricas e as linhas geométricas, não é necessário extrair as linhas, escrevendo-as no papel, mas é suficiente designar cada uma dessas linhas por uma única letra. Assim, por exemplo, para adicionar as linhas BD e GH, se designa a letra *a* e a outra *b*. Então, escrevendo as letras $a + b$ e $a - b$, indica-se que *a* é somado a *b* e *b* é subtraído de *a*. Já *ab* indica que *a* é multiplicado por *b*; e $\frac{a}{b}$ indica que *a* é dividido por *b*;

[80] Segundo Gaukroger a explicação mais marcante dessa ideia encontra-se no modo como os antigos geômetras, sobretudo, Euclides, efetuavam as operações aritméticas. Consideremos, por exemplo, o caso da multiplicação. Nela, multiplicam-se segmentos de reta por segmentos de reta. Se *a, b* e *c* forem segmentos de reta, então, $a \cdot b$ será um retângulo com lados de comprimentos *a* e *b*, enquanto $a \cdot b \cdot c$ será uma figura sólida de lados *a, b* e *c*. Embora lidemos com números abstratos, estamos sempre multiplicando números de algo por números de algo e, por conseguinte, há uma mudança dimensional na multiplicação, o que é indicado pelo fato de não podermos multiplicar mais de três números ao mesmo tempo, uma vez que o produto de três números (lineares) é um sólido, o que esgota o número de dimensões disponíveis. Por isso, essa concepção extraordinariamente restritiva do número encontrava a seguinte compreensão: a finalidade do exercício é calcular um determinado número ou construir uma determinada figura, respectivamente. Logo, para os antigos geômetras, o problema somente estava resolvido quando alguém conseguia calcular ou construir esse número ou essa figura determinada. Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

[81] De acordo com Klein, no final do período alexandrino, sobretudo, na *Arithmetica* de Diofanto, os autores começaram realmente empreender uma busca efetiva de problemas e soluções voltadas para as magnitudes em geral, todavia, essa busca jamais representou nada além de regras auxiliáres que constituem um estágio preliminar em se calcular um número determinado. Cf. KLEIN, 1986, p. 44.

[82] Nas *Regulae*, mais especificamente na regra XVI, Descartes rejeita explicitamente a concepção restritiva da aritmética dos antigos geômetras: "Convém observar que, enquanto os aritméticos costumam designar cada magnitude por uma pluralidade de unidades ou por um número, fazemos aqui uma abstração a partir dos próprios números, assim como fizemos antes uma abstração das figuras geométricas […]. Agimos, assim, não somente para evitar o tédio de um cálculo longo e supérflo, mas, sobretudo, para nos certificarmos de que as partes do problema continuem permanecendo evidente a razão, não sendo obscurecidas por números inúteis". Segue a versão original latina: "*Quae omnia vt clariùs intelligantur, primo advertendum est, Logistas consuevisse singulas magnitudines per plueres vnitates, sive per alequem numerum designare, nos autem hoc in loco non minùs abstrahere ad ipsis numeris , quàm paulò ante à figuras Geometricis* […]. *Quod agimus, tum vt longae & superfluae supputationis taedium vitemus, tum praecipuè, vt partes subjecti, quae ad difficultatis naturam pertinent, maneant semper distinctae, neque numeris inutilibus involvantur*". *Regulae* (AT, X, 455-456).

[83] Cf. JULLIEN, 1996, p. 70.

e *aa* indica o mesmo que a^2, ou seja, que *a* é multiplicado por si mesmo.[84] Como se segue, a^3 indica que *a* deve ser multiplicado outra vez por *aa*; e

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

é designado para extrair a raiz quadrada de $a^2 + b^2$; e,

$$\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$$

é designado para extrair a raiz cúbica de $a^3 - b^3 + abb$. Pelos termos a^2 ou b^3, ou, por expressões similares, Descartes determina ordinariamente apenas as linhas simples, as quais podem ser nomeadas: quadrados, cubos, etc., de modo que se empreguem sempre os termos designados na sua notação algébrica.[85] De acordo com Descartes, todas as partes de uma única linha devem ser expressas pelo mesmo número das suas dimensões, isto é, desde que a unidade não seja determinada pelas condições do problema. Com isso, a^3 contém tantas dimensões quanto *abb* ou b^3. Isso porque, ele concebe pela série de causalidade intuitiva que a^3 é o mesmo que *a* multiplicado três vezes. Por isso, estas são as partes componentes da linha que podem ser expressas assim:

$$\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}.$$ [86]

Deve-se requerer para extrair a raiz cúbica de *aabb – b*, a determinação da quantidade *aabb* dividida uma vez pela unidade e a outra pela quantidade *b*. Diante disso, se pode estabelecer: $AB = 1$, onde *AB* é igual a *1* e, da mesma maneira: $GH = a$ e $BD = b$, etc. Assim, no caso em que se deseja resolver qualquer problema é necessário apenas presumi-lo analiticamente como "já feito"[87] e atribuir termos a todas as linhas que são necessárias para construí-lo, isto é, tanto às que são conhecidas quanto às desconhecidas. Torna-se, por isso, viável determinar todos os demais termos que deste são derivados, pois, tais raciocínios são mutuamente dependentes. Desse modo, Descartes sugere que a solução do problema é concebida mediante o encadeamento analítico, ou seja, partindo de "um objeto já feito" (objeto geométrico) até uma equação correspondente (correspondência algébrica). Sustenta-se aqui que a atitude de Descartes pode ser compreendida como uma tentativa de generalizar os problemas dos antigos geômetras a uma linguagem de

---

[84] Cf. *La Geometrie*, (AT, VI, 371).
[85] Cf. *La Geometrie*, (AT, VI, 371).
[86] A escrita "√*C.n*", designa, na simbologia cartesiana, a raiz cúbica de *n*.
[87] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 372). Segundo Smith, a designação cartesiana "como já feito" remete diretamente a concepção de análise. Tal concepção tem origem nas seguintes considerações de Pappus: "Supomos na análise o resultado como já feito e, considerando as consequências, recuamos até encontrar algum resultado já conhecido ou algum princípio elementar da matemática". Cf. SMITH, 1925, op. cit., p. 6.

cálculo algébrico. Esta linguagem de cálculo traduz em termos simples do entendimento soluções às questões matemáticas apresentadas pelos antigos geômetras. Tal perspectiva contraria a seguinte interpretação proposta por Philonenko:[88] “Descartes comete o equívoco de conceber como simples, fatores matemáticos que são verdadeiramente complexos”. Descartes, contudo, parece sustentar que as intelecções simples são apenas aquelas que permitem ao matemático descobrir tudo o que é possível por meio de um contínuo e ininterrupto encadeamento de proposições, ou seja, por uma longa cadeia de intuições. Esta cadeia de intuições lhe viabiliza a descoberta analítica de lugares (e propriedades) geométricos, os quais permitem a explicação de construções mais complexas. Sustenta-se ainda que Descartes pretende explicar as intelecções mais complexas a partir de uma teoria das proporções que ele inventara. É necessário agora examinar a maneira que a Álgebra viabiliza a formulação da teoria das proporções de Descartes por meio de suas notações. Nesta perspectiva, Paty assinala que: “Embora Descartes tivesse a ideia dos fundamentos de sua Geometria desde o final de 1618, a sistematização de seu método analítico foi progressiva. [...]. Todavia, antes de 1629, Descartes dispunha de sua notação algébrica para a sistematização do seu método”. [89] Mas, é ao longo da *Geometria* que Descartes desenvolve de maneira rigorosa a sistematização do seu método, sobretudo, ao usar as notações algébricas que inventara. Tal sistematização ocorre pela designação de nomeações especificas para as linhas geométricas: tanto as linhas desconhecidas quanto às conhecidas. [90] Para isso, ele

---

[88] Nesta perspectiva, Philonenko indaga-se e reflete: “Geometria ou espírito de Geometria? Por um lado Descartes afirmava que toda a sua Física somente era geometria, e por outro, ele advogava razões para crer que as ciências, tal como a *Óptica* e a *Meteorologia*, recorrem a noções que não se reduzem às proporções abstratas sobre as quais trabalham a matemática universal. Desde logo, a matematização total da Física é impossível e ela o é por definição, pois desde que as matemáticas deixem de ser puras, requerem um dado a que se aplicam e que aceitam, sem poder justificá-lo [...]. Historicamente, foi o espírito de geometria que prevaleceu. A geometria propriamente dita não foi entendida, nem pelos seus admiradores e nem pelo seu autor. No século XVII, a geometria analítica pareceu apenas continuar, desenvolvendo o método dos lugares geométricos dos gregos, e Descartes renovou a geometria com a introdução da álgebra, eliminado os sinais cóssicos e agarrou-se mais ao principio retirado da resolução do problema de Pappus do que à simplicidade o autorizava a introduzir a escrita da matemática. O essencial em sua descoberta parecia-lhe uma escrita simplificada. *A Geometria* não recebeu, portanto, o acolhimento que merecia. Por um lado, existe a incompreensão própria de Descartes; por outro, ela é acompanhada pela do público e finalmente, mais uma vez constata-se que existiam demonstrações truncadas, inspiradas sem dúvida pelas razões que levaram Descartes a mutilar a exposição da *Dióptrica* e a esconder as diligências que o tinham levado à lei de refração. Mais tarde, a *Geometria* conheceu a sua verdadeira glória. Ao mesmo tempo, descobriu-se pela a análise dos documentos provenientes de Fermat que este não era estranho a geometria analítica”. PHILONENKO, 1996, p. 70-71. Com isso, novamente nos persuadimos com a leitura equivocada de Philonenko, ou seja, as interpretações que o comentador infere a respeito do objetivo de Descartes, não condizem fielmente com as pretensões de nosso autor. E inclusive Philonenko não explicita os possíveis equívocos de Física que Descartes houvera cometido.

[89] Cf. PATY, 1998, p. 9-57.

[90] A explanação desta questão é demonstrada na seção que expõe o seguinte: “Como se podem utilizar símbolos na geometria”. Nesta seção da *Geometria*, Descartes usa símbolos para constituição de sua *geometria analítica*, tais

considera que não há nenhuma distinção entre as linhas conhecidas e as desconhecidas. Deste encadeamento de raciocínios é concebido o problema solucionado por meio do entendimento de determinadas grandezas. A inteligibilidade destas grandezas é concebida mediante a operação matemática que as determinam por uma dada equação algébrica. Ora, uma vez que essa equação esboça a descrição de uma linguagem de cálculo, admite-se que as linhas conhecidas devem corresponder em número às linhas desconhecidas. Descartes pretende estabelecer, assim, as mutuas relações de dependência analítica mediante a diversificação das medidas matemáticas. Para tanto, Descartes diz:

> No caso em que se pretende resolver algum problema, se deve de modo prévio considerá-lo feito; e nomeio todas as linhas que parecem necessárias para construí-los, tanto às que são desconhecidas como às outras. Então, não fazendo nenhuma distinção entre as linhas conhecidas e as desconhecidas, nós resolvemos à dificuldade de todas as maneiras em que se mostrarem, ou seja, examinado a dificuldade do modo como aquelas linhas dependem mutuamente umas das outras, segundo a ordem que se pressente a mais natural, até que se tenha encontrado a maneira de expressar a mesma quantidade de dois modos diferentes, o que se denomina uma equação, pois o valor de uma dessas expressões deve ser igual ao da outra. E devem encontrar-se tantas dessas equações quantas as linhas desconhecidas. Se, apesar de não ter omitido nada do que se deseja no problema, o número de equações for menor que o de linhas desconhecidas, isso prova que o mesmo não está inteiramente determinado e desse modo se pode tomar a descrição das linhas conhecidas para todas aquelas cuja quais não correspondem a nenhuma equação. Depois disso, deve-se considerar o caso de o número de equações serem superior ao de linhas desconhecidas. Para isso, torna-se necessário recorrer, por ordem, em todas as equações excedentes, considerando-as isoladamente ou comparando-as com as outras, para explicar cada uma das linhas desconhecidas e lograr que, ao eliminá-las, não reste mais que apenas uma expressão igual a alguma outra que seja conhecida; ou ainda que o quadrado, ou o cubo, ou o quadrado do quadrado, ou o supersólido, ou o quadrado do cubo, etc. seja igual ao que resulta da adição ou subtração de outras duas ou mais quantidades, das quais uma seja conhecida, e as outras estejam compostas de algumas medidas proporcionais entre a unidade e esse quadrado ou cubo, ou quadrado do quadrado, etc.[91]

---

como: as seguintes letras para designar as grandezas conhecidas *a*, *b*, etc.., isto é, as primeiras letras do alfabeto, e, por conseguinte, as últimas letras para conferir as grandezas desconhecidas *x*, *y*, *z* etc.., juntamente a este aspecto procedimental, Descartes, postula símbolos para as operações aritméticas, tais como a soma, a subtração, a multiplicação, a divisão, a igualdade e a extração de raízes. Os exemplos foram extraídos de forma elementar da *La Geometrie*. Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 371-372). Nesse contexto, Paty relata que: "Descartes concebia seu trabalho matemático em geometria algébrica como ratificação da classificação dos antigos geômetras que não tinham álgebra e que consideravam o engendramento das curvas pelo movimento. Com isso, suas pesquisas pela análise eram facilitadas pelo uso de uma simbólica nova, clara e manipulável, que lhes permitia resolver rapidamente problemas complexos e atribuía o reconhecimento dos traços que remetem à classificação das curvas". PATY, 1998, p. 9-57.

[91] *La Geometrie* (AT,VI, 372-373). Van Schooten fornece dois problemas para ilustrar a mencionada afirmação. O primeiro é como segue: dado o segmento AB contendo qualquer ponto C, requer-se, para obter D sobre AB, que o

Descartes alega que se deve percorrer, por ordem, a cada uma das equações excedentes, quer considerando-as isoladamente, quer comparando-as com as outras com intuito de inteligir cada uma das linhas desconhecidas e conseguir que, ao eliminá-las, não reste mais que uma expressão igual a alguma outra que seja conhecida, a qual possibilite, por sua vez, inteligir a generalidade do problema posto. Diante disso é que Descartes constata que são reduzidas todas as possíveis equações derivadas de cada linha geométrica desconhecida mediante a formulação de uma única equação. Por isso, ele conclui que todas as quantidades desconhecidas podem ser expressas mediante uma única equação, isto é, desde que o problema possa ser construído por meio de círculos e de linhas retas, ou, por secções cônicas, ou ainda pelo nivelamento de alguma outra curva de grau menor do que o terceiro ou quarto.[92] Descartes:

> Multiplicando por outras conhecidas, o que escrevo desta maneira: $z = b$, ou $z^2 = - az + bb$, ou $z^3 = az^2 + bbz - c^3$, ou $z^4 = az^3 - c^3z + d^4$,etc. Ou seja: *z*, que tomo pela quantidade desconhecida, é igual a *b*; ou o quadrado de *z* é igual ao quadrado de *b* menos *a* multiplicado por *z*; ou o cubo de *z* é igual a *a* multiplicado pelo quadrado de *z* mais o quadrado de *b* multiplicado por z menos o cubo de *c*. Desse modo se pode sempre reduzir todas as quantidades desconhecidas a uma única quando o problema pode ser construído através de círculos e linhas retas, ou ainda por secções cônicas ou por alguma outra linha que não esteja composta em mais do que um ou dois graus.[93]

Segundo Gaukroger essa explicação foi uma abordagem inédita dada à questão apresentada. As equações algébricas com duas incógnitas, $F(x, y) = 0$, eram tradicionalmente consideradas indeterminadas, em virtude de que era impossível determinar as duas incógnitas a partir de uma equação desse gênero.[94] Tudo o que os antigos geômetras podiam fazer era substituir *x* por valores arbitrariamente escolhidos e, depois, resolver a equação para *y* com cada um desses valores, o que de modo algum era considerado uma "solução geral". A explicação cartesiana, entretanto, permite que esse processo seja transformado em uma "solução geral", a saber, tomando *x* como a abscissa de um ponto e *y* correspondendo à sua ordenada, podendo-se assim variar a incógnita *x*, de modo que a cada valor de *x* corresponda a um valor de *y* passível de ser

---

retângulo AD . DB seja igual ao quadrado construído sobre CD. Faz $AC = a$, $CB = b$ e $BD = x$ e tem-se $AD = a+b+x$ e $CD = b + x$, donde a equação $ax + bx \;\; x^2 = b^2 + 2bx + x^2$ cuja raiz é $x = \frac{b^2}{a-b}$. Cf. SMITH, 1925, op. cit., p. 9.

[92] Cf. *La Geometri*e (AT, VI, 373-374).

[93] *La Geometrie* (AT, VI, 374).

[94] Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

calculado mediante uma equação.[95] É, a partir destes raciocínios, que Descartes revela a sua verdadeira intenção:

> Todavia não me detenho a explicar isso com mais detalhe para não privar cada um do prazer de empreender isso pelos seus próprios esforços, nem impedir o cultivo da razão, o que em minha opinião é a principal utilidade que se pode obter deste método. Pois não me refiro a coisas tão difíceis que aqueles que sejam um pouco versados na geometria elementar e na álgebra e que apliquem com cuidado tudo o que está neste tratado, não possam encontrar. Por isso contentar-me-ei advertindo que, sempre que ao desenvolver estas equações, não se deve esquecer-se de efetuar todas as divisões, e desse modo se obterá infalivelmente os termos mais simples aos quais o problema pode ser proposto.[96]

E, no desdobramento desta explicação, ele mostra como se podem resolver metodicamente os problemas geométricos a partir dos objetos propostos pelos antigos geômetras: [97]

> Se este pode ser resolvido pela geometria ordinária, isto é, pelo uso de linhas retas e de círculos que seguem uma superfície plana, quando a última equação houver sido inteiramente desenvolvida, não ficará no final, mais do que um quadrado de uma quantidade desconhecida, igual ao que resulta da adição, ou da subtração, de sua raiz multiplicada por alguma outra quantidade conhecida, mais alguma outra quantidade também conhecida. [98]

Constata-se que esse argumento matemático de Descartes é proposto de modo diferente da matemática elementar dos antigos geômetras. Isso porque, a matemática cartesiana prossegue por encadeamentos analíticos. [99] Nesta perspectiva, são efetuados os passos para resolução dos

[95] Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

[96] *La Geometri*e (AT,VI, 374). Desde as *Regras,* Descartes assinalara: "Nós, procuramos desenvolver um conhecimento claro e evidentes dos objetos investigados. Os aritméticos, contudo, contentaram-se em apenas mostrar o resultado procurado, mesmo que não tivessem nenhuma apreensão de como ele decorreu dos dados fornecidos, quando, na verdade, é somente nesse tipo de apreensão que consiste o método". *Regulae* (AT, X, 458).

[97] No início da *Geometria*, mais especificamente, na advertência aos leitores, Descartes declara que: "Neste tratado receio não poder ser lido senão por aqueles que já conhecem o que está nos livros de geometria, pois que estes contêm verdades muito bem demonstradas, creio ser supérfulo repití-las, ainda que não tenha por isso deixado de utilizá-las. *La Geometrie,* (AT, VI, 368).

[98] *La Geometrie* (AT,VI, 374).

[99] A concepção de "resolução" prescreve a via analítica. De acordo com Gilson, a primeira versão da via analítica de Descartes é a própria regra analítica do método. Na segunda versão, Gilson propõe a via analítica de Descartes como pressuposto geométrico. Por fim, na terceira versão Gilson propõe a via analítica de Descartes por meio dos raciocínios da Geometria Analítica. Cf. GILSON, 1987, p. 189-190. Embora Gilson divida em três diferentes versões a concepção da via analítica de Descartes, nota-se, entretanto, que o mecanismo formal – como modelo de raciocínio – mantém-se regulado pelo sucessivo fluxo de pensamento que corrobora uma ideia (efeito) mediante o juízo de outra ideia da reflexão do pensamento (causa). Isso ocorre porque tais ideias possuem a mesma natureza cognoscível. Esta natureza cognoscível é concebida como um juízo imediato e necessário. Assim, os pressupostos geométricos ou mesmo os pressupostos da Geométrica Analítica de Descartes serão estabelecidos através da regra formal do procedimento analítico, ou seja, através da regra que expressa formalmente o entendimento dos efeitos pelas causas.

problemas geométricos da seguinte maneira: concebendo os lugares geométricos (efeito) mediante uma equação algébrica (causa). Neste contexto, sucede de maneira evidente a precisão e a exatidão do raciocínio matemático cartesiano mediante a lógica que o opera.

A lógica matemática de Descartes, portanto, traz a marca indelével de sua decisão filosófica por um método, que possibilite um conhecimento seguro, afirmando no mesmo momento em que começa a via demonstrativa de análise (ordem) os raciocínios que contemplam as operações da Aritmética e os objetos da Álgebra e da Geometria (medidas).

No capítulo da *Geometria* intitulado "como se resolvem",[100] Descartes pretende explicar como os problemas geométricos propostos pelos antigos geômetras podem ser solucionados por meio de elaborações geométricas bastante simplificadas, ou seja, a partir da regra de "resolução de régua e compasso". Nesta perspectiva, Descartes conduz a resolução da questão apresentada a uma única equação, de modo que, a equação seja do segundo grau e apenas contenha uma única incógnita. Para isso, ele escreve $z^2 = az + bb$ e, por conseguinte, constrói o triângulo retângulo NLM, com o lado LM igual a b mediante a raiz quadrada da quantidade conhecida bb; e faz o outro lado LN igual a $\frac{1}{2}a$, isto é, à metade da outra quantidade conhecida que foi multiplicada por z (ver figura 3). Esta quantidade é admitida por Descartes como a linha desconhecida.

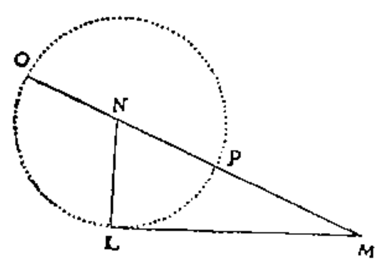


Figura 3 (AT,VI, 375)

Nesta perspectiva, Jullien [101] relata que Descartes concebe um cálculo algébrico (causa) para cada expressão geométrica dada (efeito). Diante disso, Descartes concebe a medida geométrica por meio da via analítica. De acordo com Descartes, o necessário para a resolução dos problemas matemáticos se traduz mediante o entendimento que concebe os objetos mais simples e

[100] *La Geometrie* (AT, VI, 374).
[101] Cf. JULLIEN, 1996, p. 80.

inteligíveis, uns pelos outros, de maneira intuitiva.[102] Com isso, a operação destes objetos possibilita ao pensamento equacionar a causa do problema em questão por meio de uma longa cadeia de intuições. Assim, se adquiri tudo o mais que se deseje saber a respeito do objeto em estudo. Isso porque a via que exerce a construção de um dado problema é empreendida analiticamente. Isso ocorre porque em cada passo da resolução é descoberta uma proposição previamente intuída, ou seja, conhecida com evidência. Então, por exemplo, caso o matemático elabore analiticamente a equação: $z^2 = az - BB$, pode, em seguida, efetuar mediante o raciocínio geométrico a construção do triângulo retângulo NLM, cujo lado LM é igual a b e a raiz quadrada da quantidade conhecida é bb (rever figura 4). Esta metade é multiplicada por z, pela qual se propõe como a linha desconhecida. Então, prolongando MN – que é à base deste triângulo até O – de maneira que NO seja igual à NL, admite-se, por conseguinte, que a linha OM é igual z. Portanto esta é a linha procurada.[103] Desse modo, se deve expressar: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

E no caso em que se tem: $yy = -ay + bb$, e se y é à quantidade que se deve encontrar, se torna necessário construir o mesmo triângulo retângulo NLM; e, da base MN se adquire NP igual à NL. Destarte, PM é a raiz procurada. [104] Do mesmo modo é calculado: $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

Mesmo no caso em que se tem: $x^4 = -ax^2 + b^2$. Então, PM é x^2; e, assim, se tem:

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

E no caso em que se tem: $z^2 = az - bb$ se faz NL igual a $\frac{1}{2}a$ e LM igual a b. Então, em vez de unir os pontos M e N, Descartes extrai MQR paralelo a LN. A partir do ponto N – que é o centro que descreve o círculo em L – ele corta MQR nos pontos Q e R e, propõe z como a linha

[102] Nas *Regras*, Descartes explica o processo lógico que é operado por uma série intuitiva do seguinte modo: “Por *intuição* entendo, não a convicção distorcida fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas a concepção do entendimento puro e atento”. Segue a versão original em latim: *Per intuitum intelligo, non fluctuantem sensuum fidem, vel male componentis imaginationis judicium fallax, sed mentis purae et attentae*. *Regulae* (AT, X, 368-369).

[103] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 375). Segundo Smith, Descartes, atendendo a que o segmento da tangente é meio proporcional entre o segmento da secante e sua parte externa, resulta que a potência do ponto M em relação à circunferência é igual a LM^2 : $OM.\ PM = LM^2$. Então, $z\,(z - a) = b^2$ ou $z^2 = az + b^2$. Mas $MN = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, donde $OM = s = MN + NO = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Descartes ignora a raiz negativa.Cf. SMITH, 1925, op. cit., p.13.

[104] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 375).

procurada (ver figura 4). [105] Assim, os pontos MQ ou SR podem ser expressos dos dois seguintes modos:

$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ e $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

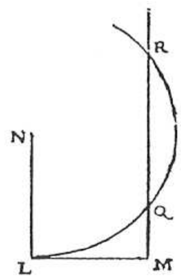


Figura 4 (AT, VI, 376)

Diante disso é que Descartes diferencia a sua análise daquela adotada pelos antigos geômetras. Segue Descartes: [106]

> [...] estas mesmas raízes podem ser encontradas por uma infinidade de outros meios, e somente indiquei aqui esses muito simples, a fim de mostrar que se podem construir todos os problemas de geometria ordinária, sem se fazer mais que aquele pouco que está compreendido nas quatro figuras que expliquei. Não creio que os antigos tenham da mesma maneira observado; pois em tal caso eles não haveriam escrito livros tão volumosos em que somente a ordem das proposições nos mostra que não possuíam o verdadeiro método para resolvê-las, mas que apenas recopilaram as que tinham resolvido. [107]

Segundo Descartes, a ordem das proposições exposta pelos antigos geômetras mostra que eles não possuíam o verdadeiro método para resolvê-las, mas apenas que recompilaram sinteticamente

---

[105] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 376).

[106] De acordo com Duhamel, o método de análise dos antigos geômetras consistia em estabelecer uma cadeia de proposições, começando com aquela que se pretendia demonstrar e terminando em uma proposição conhecida, onde, a começar da primeira, cada uma seria uma consequência necessária daquela que seguia. E se esta reciprocidade ocorre da primeira à última, e, por isso, se pode dizer que o método analítico dos antigos consista em estabelecer uma série de proposições em que a primeira é a proposição a ser demonstrada e onde a segunda se deduz da primeira, a terceira da segunda, e, assim por diante, até que se chegasse a uma proposição reconhecidamente verdadeira. Entretanto, o método de análise dos antigos geômetras – sobretudo o método analítico descrito por Pappus – apenas seria um movimento lógico ascendente em relação à síntese necessária e complementar. Isso significa que, embora análise seja dedutiva e descendente, na síntese o processo é iniciado pelo que por último foi alcançado na análise e, assim, a última proposição obtida na análise, passa a ser a primeira na ordem da síntese. Cf. DUHAMEL, 1885, p. 41-45. Já Heath expõe a ordem lógica do método analítico dos antigos geômetras da maneira a seguir. Requer-se provar que uma proposição A é verdadeira. Assume-se como hipótese, que A é verdadeira e, partindo disso, descobri-se que, se A for verdadeira, outra determinada proposição B é verdadeira, se B for verdadeira, então C, e assim por diante, até que se chegue a K admitida como verdadeira. O objetivo desse método analítico é possibilitar inferir, na ordem reversa, que, desde que K seja verdadeira, a proposição A originalmente assumida é verdadeira [...] Há, portanto, uma possibilidade de erro. Enquanto que B pode ser uma consequência necessária de A, pode ocorrer que A não seja uma consequência necessária de B, assim, para que a inferência reversa de que A é verdadeira a partir de K é necessário que cada passo possa ser incondicionalmente convertível. Cf. HEATH, 1956, p. 41.

[107] *La Geometrie* (AT,VI, 376-367).

as que já tinham resolvido.[108] Ora, como já foi dito, os antigos geômetras – e, em especial Pappus – haviam utilizado duas vias da argumentação lógico-matemática: a análise e a síntese. Para eles a análise consistia em regras que permitiam encontrar a solução para problemas, quer estabelecendo a veracidade de algum teorema (análise teorética) quer identificando alguma quantidade desconhecida (análise problemática). Mas tais regras tinham apenas um valor heurístico e, por isso, não determinavam uma comprovação. A síntese, então, mostrava como chegar a uma comprovação a partir de "princípios elementares". Assim, os antigos geômetras alegavam que a análise e a síntese eram vias indispensáveis da argumentação lógico-matemática; mas, assinalavam que a efetiva comprovação era realizada apenas no decorrer da síntese. Por isso, o encadeamento das proposições exposto pelos antigos geômetras era feito, sobretudo, sinteticamente. Descartes, todavia, rejeitou a síntese como via de descoberta. Demarca-se, assim, a diferenciação que Descartes assume em relação à concepção matemática dos antigos geômetras.

A relevância da análise, claramente dissociada da síntese, é um aspecto muito importante do *modus operandi* do método cartesiano, pois, evidencia a preponderância do papel da intuição na matemática de Descartes em detrimento do uso dos sentidos e da imaginação. Isso porque, a análise mostra a Descartes a verdadeira via pela qual o objeto é metodicamente descoberto, ao revelar como os efeitos dependem das causas. Assim, o uso da análise, ao contrário da síntese, mostra como resolver as questões matemáticas sem recorrer a qualquer espécie de certeza prévia, tal como se fazia na Geometria elementar dos antigos. É, por isso, que na *Geometria*, Descartes, embora apresente algumas demonstrações sintéticas ao tratar especificamente de resoluções mais complexas, tem por objetivo principal convidar o leitor a encontrar por si e seguindo a via analítica a solução de diversos problemas, sobretudo, quando expõe a sua resolução analítica do problema de Pappus. Descartes examina o mencionado problema com o intuito de explicar a articulação entre os raciocínios de ordem e medida. O exame do problema de Pappus, portanto, viabiliza a Descartes a explicação lógico-matemática do seu método.

Boyer relata que: "Pappus chegou bastante perto do princípio fundamental da Geometria Analítica. Isto porque, Pappus propôs pela primeira vez o problema generalizado que levava a uma infinidade de novos tipos de curvas. Nesta perspectiva, ele buscava o lugar para três ou

[108] É importante observar que a concepção do "verdadeiro método" é também anunciada por Descartes no *Discurso do método* da seguinte maneira: "Não quis rejeitar totalmente nenhuma das opiniões que outrora conseguiram insinuar-se em minha crença sem terem sido nela introduzidas pela razão, antes que tivesse empregado bastante tempo em projetar a obra que estava empreendendo [*A Geometria*], e em buscar o verdadeiro método para chegar ao conhecimento de todas as coisas de que meu espírito seria capaz". Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 17).

quatro retas". [109] Todavia, Pappus não foi adiante por considerar que todos os problemas seriam análogos para mais de quatro retas, pois, apenas percebeu que para seis retas no plano se constata que a curva é determinada pela condição do produto das distâncias. Então, segundo Pappus, as três retas estariam em uma razão fixa em relação às outras três retas dadas e, por isso, que para ele a curva é definida apenas pelo fato do sólido está em uma razão fixada para outro sólido. Pappus hesita em passar para os casos que envolvem mais do que seis retas. É, por isso, que, segundo ele, não há nada contido para mais do que três dimensões a ser examinado por meio da demonstração sintética. No entanto, Pappus viabiliza que o propósito cartesiano seja efetivado, a saber, em um empreendimento matemático que utilize a Álgebra a favor da Geometria. Isso ocorre porque Pappus transmite a Descartes as seguintes classificações: (1) que os problemas planos são resolvidos a partir de retas e círculos; (2) que os problemas sólidos são resolvidos mediante uma ou diversas secções cônicas; (3) que os problemas lineares são resolvidos por meio de linhas mais complexas. Neste enfoque, Jullien[110] acrescenta que o problema de Pappus é resolvido pela indicação de tais classificações e pela correspondência algébrica, quando proposto para quatro linhas retas, ou cinco, quando se considera apenas a primeira parte do problema.

Agora é necessário examinar os passos que Descartes percorre para resolução do problema de Pappus. Isto ocorre mediante os cálculos que expressam a concepção lógico-matemática do seu método. [111] Primeiramente, ele relata que se admite nas próprias palavras de Pappus que, depois desse matemático haver citado tudo o que havia sido escrito em Geometria pelos que o haviam precedido, nada mais faltaria a se resolver. [112] Descartes:

> Mas esse lugar de três ou quatro linhas, onde Apolônio disse, em seu Livro III, que nem mesmo Euclides tinha tratado inteiramente, como tampouco o fez qualquer outro, não teria conseguido determiná-lo nem adicionar nada ao que Euclides houvera escrito, apenas pelas [secções] cônicas, que foram demonstradas antes do tempo de Euclides, etc.[113]

---

[109] BOYER, 1996, p. 127-128.
[110] Cf. JULLIEN, 1996, p. 67-83.
[111] Numa carta enviada a Mersenne, datada de 5 de abril de 1632, Descartes relata o período que passou para resolver o problema de Pappus. Descartes: "Eu vos direi que empreguei apenas cinco ou seis semanas para encontrar a solução". *Correspondance* (AT, I, 244).
[112] Cf. *La Geometrie* (AT,VI, 377).
[113] Segue a exemplificação do *problema de Pappus* em latim: "*Quem autem dicit* [*Apollonius*] *in tertio libro loucm ad tres & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis quae Euclides scripfit, per ea tamtum conica quae vfque ad Euclidis tempora praemonftrata sunt, & c*" Cf. *La Geometrie* (AT,VI, 377).

Descartes propõe que seja apresentado ao matemático o número *n* de linhas retas. Em seguida, se deve, a partir de um determinado ponto, traçar linhas que formem ângulos. Se *n* é igual a três linhas retas, estas devem ser traçadas a partir de um mesmo ponto em direção de determinados ângulos, de modo que, a relação entre o retângulo formado por duas das retas confirme a proporção dada em relação ao quadrado da terceira. Em outras palavras:

> Esse lugar de três ou quatro linhas retas, a propósito do qual Apolônio se vangloria das suas descobertas, ainda que devesse estar reconhecendo o primeiro que a tratou, é o seguinte: Se, dadas as posições de três retas e traçando a partir de um ponto outras três retas que formem com aquelas ângulos dados e, se é dado à relação entre o retângulo formado por duas destas retas com o quadrado da outra, o ponto encontrar-se-á sobre um lugar sólido, dado em posição, isto é, sobre uma das três cônicas.[114]

Apresenta-se, assim, a problematização da questão proposta por Pappus. [115] Neste contexto, se requisita a resolução matemática do caso que contempla quatro linhas dadas. Descartes:

> Caso sejam quatro retas dadas, e se traçam outras quatro formando com aquelas ângulos dados, e se conhece a relação do retângulo de duas das linhas desenhadas com a das outras duas, então, da mesma maneira, o ponto será encontrado igualmente sobre uma secção cônica. Se as retas são apenas duas, está, pois, estabelecido que o lugar seja plano; porém, se é dado mais do que quatro, o lugar do ponto não é conhecido, assim chamam-se simplesmente linhas. Não está claro o que elas são, ou quais são as suas propriedades. Uma delas, não a primeira, mas a mais manifesta, tem sido examinada e isso tem sido provado ser útil. No entanto, estas são as proposições relativas a elas. Se de um ponto se traçam cinco retas dadas em posição, outras retas formam com elas ângulos dados, e ocorrer assim a relação entre o paralelepípedo retângulo sólido

[114] Segue a exemplificação do problema de Pappus por meio do texto latino: "*At locus ad tres & quatuor lineas, in quo magnifice fe iactat & oftentat, nulla habita gratia ei qui prius fcripferat,est huiufmodi. Si, positione datis tribus rectis lineis, ab vno & eodem puncto ad tres lineas in datis angulis rectae leneae ducantur, & data fit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquae, punctum contingit pofitione datum solidum locum, hoc est vnam ex tribus conicis sectionibus*" Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 377). No que diz respeito às regras matemáticas de Apolônio, a sua obra *As Cônicas* terá um papel muito importante na *Geometria* de Descartes. Sobre o ponto de vista da história da matemática, Boyer relata que as secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu o seu tratado sobre esse tipo de curvas geométricas. Pelo menos nesse intervalo as cônicas tinham sido descritas de maneira generalizante por Euclides em *Os Elementos*, contudo, *As cônicas* de Apolônio substituíram as de Euclides. Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio, aparentemente pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não seria necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que o cone não precisa ser reto, isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular – mas podendo ser também um cone obliquo ou escaleno. Finalmente, Apolônio trouxe as curvas antigas mais para perto do ponto de vista moderno, substituindo assim o *cone* de uma só falha por um duplo. Cf. BOYER. 1996, p. 99.

[115] Numa carta enviada a Mersenne – datada em 3 de maio de 1632 – Descartes afirma que resolveu o problema de Pappus a partir das secções cônicas e dos lugares sólidos, ou ainda utilizando graus mais compostos. Cf. *Correspondance* (AT, I, 245).

> formado por três das linhas e o paralelepípedo retângulo sólido formado por outras duas e por outra linha dada, encontrar-se-á o ponto sobre uma linha em posição. Se as linhas dadas forem seis, e se houver proporção entre o sólido formado por três das linhas dadas e o sólido formado pelas outras três, encontrar-se-á também o ponto sobre uma linha dada em posição. Mas, se forem mais de seis retas, que não se pode dizer que ocorre a proporção entre um objeto compreendido por quatro retas e outro formado pelas outras, pois não há nenhuma figura que esteja formado por mais de três dimensões. Todavia, os que antes de nós trataram deste assunto, acordaram que [a figura] que elas contêm não é compreensível de modo algum. No entanto, é admissível, por meio das relações compostas, enunciar e demonstrar de modo geral as proposições antes citadas e as que seguem. Eis a seguir como: Se, a partir de um ponto se traçam retas dadas em posição e outras retas formam com elas ângulos dados, há proporção composta de uma com uma das traçadas, da segunda com a segunda e da terceira com a terceira, e [assim] com as restantes linhas [retas] dadas, se forem sete. Se forem oito, da última com a última o ponto encontrar-se sobre as linhas que são dadas em posição. E, de modo similar para qualquer que seja o número [de retas] ímpar ou par, pois estas, como eu disse, correspondem em posição às quatro linhas. Portanto, ninguém no passado estabeleceu como se faz conhecer esta linha. [116]

A inovação de uma teoria das proporções, portanto, é determinante para a aquisição do primeiro passo para a resolução do problema de Pappus. Neste enfoque, ao tratar da teoria das proporções de Descartes, Vuillemin ressalta que: "Toda a *Geometria* de Descartes destina-se para a constituição de um método inovador, isto é, do método analítico e, não mais sintético. Diante disso é que Descartes determina a resolução do problema de Pappus".[117] Descartes:

[116] *La Geometrie* (AT,VI, 377-379). Segue a exposição do problema de Pappus: *Et, si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur, e rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit, similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantum, lócus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cógnitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum vnam, neque primam, & quae manifestissima videtur, compofuerunt oftendentes vtilem esse. Porpositiones autem ipfarum hae sunt: Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas quinque, ducantur rectae lineae in datis angulis, & data fit proportio folidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad folidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus & data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit porportio folidi tribus lineis contenti ad folidum quod tribus reliquis continetur, rurfus punctum contiget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere an data sit proportio cuiufpiam contenti quatuor lineis ad id quod relequis continetur, quoniam non eft aliquid contentum pluribus quam tribus dimenfionibus. Acquiefcunt autem his qui paulo ante tália interpretati sunt, neque vnum aliquo pacto comprehenfibile significantes quod his continetur. Licebit autem per coniunctas proportiones haec & dicere & demonftrare vniuerfe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto, ad pofitione datas rectas lineas, ducantur rectae lineae in datis angulis, & data sit proportion contuncta ex ea quam habet vna ductarum ad vnam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem: si vero octo, & reliqua ad reliquam : punctum continget positione datas lineas. Et similiter, quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum haec, vt dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita vt linea nota sit, &c.* *La Geometrie* (AT, VI, 377-379).

[117] VUILLEMIN, 1960, p. 99. Nesta obra, Vuillemin sustenta um papel da metafísica cartesiana em relação a uma preocupação de estender à *Mathesis universalis* a problemas que são de âmbito de uma análise metódica. Vuillemin:

> Dado três ou quatro ou mais números de linhas retas pela posição, se deve encontrar um ponto a partir do qual se possam traçar outras linhas retas, fazendo cada uma, um dado ângulo, com uma das anteriores, de modo que o retângulo formado por duas dessas assim traçadas desde o ponto tenha a proporção dada com o quadrado da terceira, se não há mais do que três; ou, se houver quatro, com o retângulo das duas outras; ou ainda, havendo cinco, que o paralelepípedo formado por três tenha uma dada proporção com o paralelepípedo das outras três. Ou se há seis, que o paralelepípedo composto por três tenha uma proporção dada com um paralelepípedo de três outros. Ou, havendo sete, tenha a proporção dada com o paralelepípedo formado por as duas que sobram e por outra linha dada. Ou se há oito, que o produto da multiplicação de quatro tenha uma proporção dada com o produto das outras quatro. E assim se pode estender este problema a todo número de linhas. […]; e Pappus relata que quando não há mais do que três ou quatro linha retas dadas, eles se encontram numas das três secções cônicas, mas ele não tratou de descriminá-la e nem de descrevê-la; nem explicar a linha onde os pontos devem encontrar-se quando o problema está proposto para um maior número de linhas. Apenas acrescenta que os antigos haviam imaginado uma, que mostravam ser útil, e ainda que parecesse a mais manifesta, não era, no entanto a primeira. Deu-me isto a ocasião para ensinar se, pelo método que me sirvo, se pode ir tão longe quanto eles foram. [118]

De acordo com Vuillemin,[119] o problema de Pappus é determinado pelo número de linhas que o matemático presumir. Além disso, sustenta-se aqui que os pontos procurados por Descartes devem ser encontrados a partir das secções cônicas (lugar sólido) ou a partir dos lugares planos (retas e círculos). Desse modo, apenas a geometria analítica das proporções permite fornecer a solução completa do problema de Pappus. Para a resolução do problema de Pappus é necessário traçar os pontos pelos quais as linhas dadas são paralelas. Na sequência, se examinam 5 ou 6, ou 7, ou 8 pontos. Todos esses pontos reencontraram-se em algumas dessas linhas, as quais não podem ser de um grau mais elevado do que as das secções cônicas, pois, para Descartes apenas os lugares abstraídos das secções cônicas podem fornecer a inteligibilidade do cálculo analítico apto para a resolução do problema de Pappus.[120] A partir disso é que ele examina os casos de 9 ou 10 ou 11 ou 12 pontos. Segue Descartes:

"a invenção da Geometria analítica parece secundária em relação à invenção de um método universal do pensamento: aquela que está implicada na análise das proporções". VUILLEMIN, 1960, p. 10.

118 *La Geometrie* (AT, VI, 399-380).

119 Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 100.

120 Segundo Jullien, as cônicas transmitidas por Apolônio a Descartes permitem a generalização dos problemas (e não a definição) mediante os lugares geométricos (secções e não figuras), cujo cálculo viabiliza a Descartes a solução do problema de Pappus. Cf. JULLIEN, 1996, p. 28. Gaukroger acrescenta que: "Era sabido na antiguidade que o lugar geométrico em cada caso é uma secção cônica passando por meio das intersecções das retas, mas nenhum procedimento geral para a resolução do problema foi desenvolvido. O tratamento de Descartes para a referida questão é algébrico e completamente geral, permitindo expressar as relações entre as retas usando apenas

> Entendi primeiramente que, colocado o problema para três, quatro ou cinco linhas, se podem sempre encontrar os pontos procurados pela geometria elementar, ou seja, apenas pelo uso da régua e do compasso; portanto, não necessário é fazer outra coisa que o já dito; exceto somente quando, forem cinco as linhas, sendo estas todas paralelas. Neste caso, como quando o problema se refere a 6, 7, 8 ou 9 linhas, podem sempre se encontrar os pontos buscados pela geometria dos sólidos, isto é, empregando alguma das três secções cônicas; exceto somente quando sendo 9 as linhas dadas, elas são todas paralelas. Neste caso, como para 10, 11, 12 ou 13 linhas, podem encontrar-se os pontos procurados por meio de uma linha curva que seja de um grau mais composto que as secções cônicas; exceto para 13 linhas, isto é, se estas forem todas paralelas. Neste caso e para o de 14, 15, 16 e 17 linhas será necessário empregar uma linha curva de grau ainda mais composto que a precedente; e assim até ao infinito. E assim encontrei deste modo que, quando não há mais que três ou quatro linhas dadas, os pontos buscados se encontram todos não somente em uma das três secções cônicas, mas por vezes na circunferência de um círculo ou em uma linha reta; que quando são 5, 6, 7 ou 8, todos os pontos se encontram em alguma das linhas que são de um grau mais composto que as secções cônicas; e assim é impossível imaginar alguma que não seja útil a este problema; mas, também podem, por exceção, encontrar-se numa secção cônica, ou em um círculo, ou em uma linha reta; se forem 9, 10, 11 ou 12, os pontos encontram-se numa linha que não pode ser senão composta de um grau mais que as precedentes e todas as que são de um grau maior, podem servir; e, assim até ao infinito. [121]

No decorrer do Livro I da *Geometria*,[122] Descartes efetua o passo seguinte para a resolução do problema de Pappus. Então, para o entendimento do caso em que n é igual a quatro, se devem construir as seguintes linhas retas AB, AD, EF e GH. [123] Ao determinar analiticamente as linhas de referência mediante o desígnio algébrico que comanda a escolha das construções

---

duas variáveis. O interesse de Descartes é mostrar como o problema, explicitamente resolvido para quatro retas, é teoricamente generalizável para n retas. Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

[121] *La Geometrie* (AT, VI, 380-381).

[122] Segundo Boyer: O Livro I da *Geometria* contém instruções detalhadas para resolução de equações quadráticas. Cf. BOYER, 1996, p. 232. Nesta mesma perspectiva, Paty afirma que: “No capítulo das inovações no seio da tradição, se pode seguramente inscrever a renovação da álgebra realizada por Descartes, marcada por suas próprias exigências, simplificando e racionalizando, as nomenclaturas inutilmente complicadas das anteriores, e formulando as regras que permitem efetuar operações sobre grandezas finitas, tanto as conhecidas quanto as desconhecidas, [...] introduzindo as novas notações para designar as grandezas, que lhe permitiam estabelecer facilmente a correspondência entre os problemas geométricos e a resolução das equações algébricas”. PATY, 1998, p. 9-57.

[123] Cf. *La Geometri*e (AT, VI, 381). Segundo Gaukroger, quatro linhas são apresentadas, e as tracejadas são as retas procuradas. Descartes toma AB e BC como as retas principais e passa a relacionar todas as demais com elas. Seus comprimentos são x e y, respectivamente; na realidade, AB é o eixo x e BC é o eixo y. A solução é encontrada da seguinte maneira: os ângulos do triângulo ABR são fornecidos, de maneira que se conhece a razão AB : BR. Se consideramos que essa razão é $z \setminus b$, constata-se que BR = $bx \setminus z$ e $CR = y + bx \setminus z$. Os ângulos do triângulo DRC também são conhecidos, representando a razão CR :CD como $z\setminus c$; donde CR = $y + bx \setminus z$ e CD = $cy \setminus z + bcx \setminus z^2$. Além disso, como as posições de AB, AD e EF são fixas, está dado, portanto, o comrpimento k de AE; portanto, EB = $k + x$. Os ângulos do triângulo ESB são também fornecidos; por conseguinte, também é a razão BE : BS. Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

geométricas, Descartes se diferencia dos antigos geômetras, pois, estes apenas anotavam as linhas de referência como partes exclusivas da figura geométrica. Descartes:

> A primeira e mais simples de todas, depois das secções cônicas, é a que pode ser descrita pela intersecção de uma parábola e de uma linha reta, da maneira que explicarei. De modo que penso ter satisfeito inteiramente o que Pappus nos diz ter sido procurado pelos antigos; tratarei de fornecer a demonstração em poucas palavras […]. Seja AB, AD, EF e GH, etc. várias linhas dadas em posição e deve encontrar-se um ponto, como C, do qual traçando outras linhas para as dadas, como CB, CD, CE e CH, de modo que os ângulos CBA, CDA, CFE, CHG, etc., sejam dados, e que o produto da multiplicação de uma parte destas linhas seja igual ao produto da multiplicação das outras; ou ainda que elas tenham outra proporção dada […]. [124]

Os antigos geômetras se procuravam em expressar o mais simples possível às resoluções das superfícies dadas na construção geométrica.[125] Nesta concepção geométrica, todas as linhas são identificadas do mesmo modo e, diante disso, se constata que uma solução simples apenas pode originar-se de uma percepção extraordinária da relação particular entre as superfícies ou, entre os volumes. Já Descartes transforma os números em uma quantidade mínima de linhas fixas,[126] e a partir da sua teoria das proporções, pressupõe como *modus operandi* dos raciocínios de ordem e medida que as quantidades geométricas (efeito) devam corresponder diretamente às quantidades algébricas (causa). Estas quantidades algébricas são expressas pelas as equações e, assim, os cálculos se repartem em variáveis dependentes e em variáveis independentes. Seguindo esse raciocínio da via demonstrativa analítica, Descartes aplica os cálculos algébricos para determinadas linhas geométricas, como, por exemplo, atribuindo para AB, à linha de referência analítica (ver figura 5). Esta linha de referência é denominada por ele x. Para os pontos CB, ele atribui à linha que é traçada a partir de uma possível localização de C que, por sua vez, corta a linha AB, com o ângulo dado. Diante disso, CB é designada por ele y. Em seguida, Descartes prolonga todas as outras linhas dadas até suas respectivas intersecções e eixos.[127] Obtém, assim,

---

[124] *La Geometrie* (AT, VI, 381-382).

[125] De acordo com Milhaud, os antigos geômetras haviam percebido que alguns problemas não podiam ser resolvidos com régua e compasso. Diante disso, eles faziam intervir as secções cônicas ou mesmo outras curvas, como a concóide. Cf. MILHAUD, 1921, p. 236.

[126] Segundo Jullien, Descartes desejava libertar a Geometria de uma percepção imaginária. Nota-se que a articulação do método cartesiano, presente, sobretudo no final do Livro I da Geometria, permite remodelar as figuras e, a partir das considerações das linhas, possibilita-se conhecê-las através das relações que são observadas nas proporções das linhas geométricas. Cf. JULLIEN, 1996, p. 37.

[127] Para Mancosu, a ideia de que não há proporção entre linhas retas e curvas, ou mesmo entre movimentos, é oriunda da Física de Aristóteles. Esse dogma aristotélico é vencido por Descartes mediante a formulação da teoria das proporções. Cf. MANCOSU, 1996, p. 64-85.

os pontos A, E, G sobre o eixo de x, e R, S, T sobre o eixo de y. Todos os ângulos do triângulo ARB são dados e, por isso, a proporção entre seus lados é do mesmo modo dada. Descartes:

> Primeiramente suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que se deve encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Seja designado x o segmento da linha AB compreendido entre os pontos A e B; e BC seja designado por y; e prolongam-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhe são paralelas; como se nota, elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção que há entre os lados AB e BB é também dada, e a indico como de z para b; de maneira que representado AB por x, RB será $\frac{bx}{z}$ e a linha total CR será $y + \frac{bx}{z}$, pois o ponto B fica entre C e R; se R ficara entre C e B seria $y \frac{bx}{z}$, e se C ficara entre B e R, CR seria CR= $-y + \frac{bx}{z}$. Do mesmo modo, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD, que indico como z a c, de modo que CR sendo $y + \frac{bx}{z}$, CD será $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$.[128]

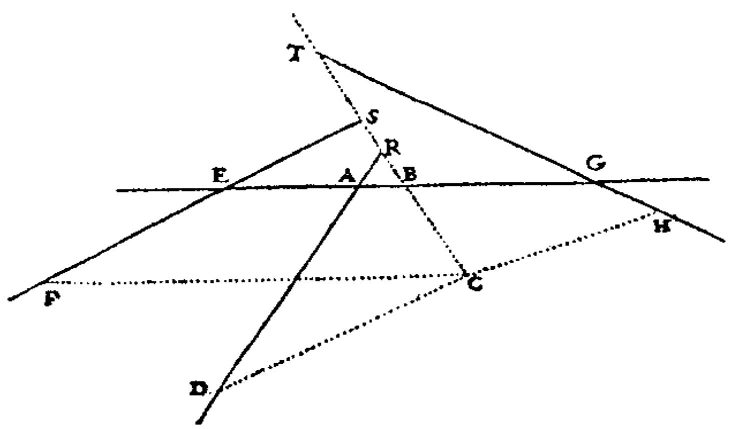


Figura 5 (AT,VI, 382)

Segue uma breve exposição realizada por Vuillemin para explicar o início da resolução cartesiana do problema de Pappus. Coloca-se: $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$. Tem-se: $\frac{x}{BR} = \frac{z}{b}$ e $BR = \frac{bx}{z}$

[128] *La Geometri*e (AT, VI, 382-383). Gaukroger afirma que se consideramos agora que essa razão é $z \setminus d$, obteremos BS = $(dk + dx) \setminus z$ e CS = $(zy + dk + dx) \setminus z$. Uma vez que os ângulos do triângulo FSC são fornecidos, a razão CS:CF é conhecida. Essa razão é $z \setminus e$, de modo obtemos CF = $(ezy + dek + dex) \setminus z^2$. No triangulo BGT é $z \setminus f$, teremos que BT = $(fl - fx) \setminus z$, e CT = $(zt + fl - x) \setminus z$; e, por último, se consideramos que CT:CH no triângulo TCH é $z \setminus g$, veremos que CH = $(gzy + fgl - fgx) \setminus z^2$. Cf. GAUKROGER, 1995, p. 91-114.

Como CR é igual a soma de BR e de BC, tem-se: CR= $y + \frac{bx}{z}$

Do mesmo modo, no triângulo DRC, os ângulos são dados e, por isso, se pode colocar: $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$.

E, por consequência: $CD = \frac{CR.c}{z} = \frac{c}{z}\left(y + \frac{bx}{z}\right) = \frac{c}{z}y + \frac{bc}{z^2}x$.[129] Segue Descartes:

> [...] como as linhas AB, AD e EF são dadas em posição, a distância que há entre os pontos A e E é também dada e, designando-a por *k*, ter-se-á EB igual a $k + x$; que seria $k - x$ se o ponto B ficasse entre E e A; e $-k + x$ se E ficasse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, estabelecendo que BE está para BS, assim como *z* está para *d*, tem-se: BS é igual a $\frac{dk + dx}{z}$ e a linha total CS é $\frac{zy + dk + dx}{z}$; mas este seria $\frac{zy - dk - dx}{z}$, se o ponto S ficasse entre B e C, este seria $\frac{-zy + dk + dx}{z}$. Além disso, os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e por tanto é dada proporção de CS para CF, que seria como *z* para *e*, e a linha $CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz}$. Do mesmo modo, AG, que designo *l* é dada e BG é $l - x$, pois que no triângulo BGT é também conhecida a proporção de BG:BT = z:f, teremos: $BT = \frac{fl - fx}{z}$ e $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$. Então, sendo a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como *z* para *g*, tem-se: $CH = \frac{+ gzy + fgl - fgx}{zz}$. Nota-se assim que qualquer que seja o número de linhas dadas, todas as linhas traçadas a partir de C, que formam ângulos dados, podem sempre expressar-se, cada uma por três termos, dos quais um é composto pela quantidade desconhecida *y* multiplicada ou dividida por alguma outra conhecida, e o outro, pela quantidade desconhecida *x*, também multiplicada ou dividida por alguma outra conhecida, e o terceiro termo, de uma quantidade conhecida. Excetua-se o caso de elas serem paralelas, quer à linha AB, em cujo caso o termo composto da quantidade *x* será nulo; quer à linha CB, e neste caso o termo composto da quantidade *y* será nulo; o que fica suficientemente claro para que não me detenha a explicar mais. E espero que a respeito dos sinais + e – que se unem a estes termos, podem ser mudados de todas as maneiras imagináveis. Nota-se também que, multiplicando várias destas linhas, uma pelas outras, as quantidades *x* e *y* que se encontram no produto, não podem ter cada uma mais que dimensões que de linhas tem esse produto. [130]

[129] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 102-103.
[130] *La Geometrie* (AT, VI, 383-385).

Ora, como AB, AD e EF são dados, a distância EA é igualmente dada. Seja $EA = k$. Caso se conjecture A no interior da linha EB, tem-se: $BE = k + x$, e os ângulos do triângulo ESB são dados. Pode-se colocar, portanto: $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$ ou $\frac{K+X}{BS} = \frac{z}{d}$. Logo: BS = $\frac{(K+X)\,d}{z}$

E, assim: CS = BS+BC = $\frac{(K+X)\,d}{z} + y = \frac{zy+dk+dx}{z}$

Do mesmo modo, os ângulos do triângulo FSC são dados, portanto:

$\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$ e $CF = \frac{CS\,.\,e}{z} = \frac{e}{z}\left(\frac{zy+dk+dx}{z}\right) = \frac{e}{z}y + \frac{de}{z^2}x + \frac{dek}{z^2}$

Como EA, AG é dado. Seja AG = 1. Logo BG =*l* – *x*. No triângulo BGT, os ângulos são dados, por isso: $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$ e BT = $\frac{f}{z}BG = \frac{f}{z}\,(l-x)$. Logo, $CT = BC + BT = y + \frac{fl}{z} - \frac{fx}{z}$. Com isso, a partir do triângulo TCH os ângulos são dados:

$\frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}$, $CH = \frac{g}{z}$, $CT = \frac{g}{z}\left(y + \frac{fl}{z} - \frac{fx}{z}\right) = \frac{g}{z}y - \frac{fg}{z^2}x + \frac{fgl}{z^2}$. [131]

A configuração matemática que determina para as duas linhas dadas à transcrição destas em símbolos – as quais são nomeadas de *x* e *y* – mostra como Descartes concebe o comprimento de outras linhas que são iniciadas em C. [132] Encontra-se, portanto, cada uma das linhas que se propõe para o problema de Pappus, a saber, CB, CD, CF e CH. Assim, torna-se necessário exprimir cada uma das linhas por três termos dos quais: o primeiro é constituído pela incógnita *y* e multiplicado ou dividido por qualquer outra que seja conhecida. No segundo termo a linha é composta pela incógnita *x*. Esta, por sua vez, é multiplicada ou dividida por qualquer outra que seja conhecida. E, no terceiro, identifica-se que a terceira linha expressa uma quantidade ou valor conhecido. Com isso, os sinais de adição e subtração – os quais se agregam aos termos numéricos – podem ser mudados de todas as maneiras possíveis. [133] E, assim, admite-se que os produtos destas linhas possuem tantas dimensões quantas são as linhas dadas. Dada essa definição analítica (ordem) para as linhas geométricas (medida), torna-se viável inteligir a classificação das curvas algébricas de Descartes. Viabiliza-se, assim, a identificação de cada uma das linhas pelas quais se compõe o problema de Pappus, a saber, CB, CD, CF, CH. Deve-se ressaltar ainda que tais linhas são concebidas analiticamente por uma expressão do tipo: ± Ay ± Bx ± C. Destarte é necessário que a primeira destas linhas requeira como equação $CB = y$, e que a quantidade incógnita esteja no

[131] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 103-104.
[132] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 385).
[133] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 385).

termo *x*.[134] Ver-se-á a seguir a exposição realizada por Vuillemin para explicar a conclusão da primeira etapa da resolução cartesiana do problema de Pappus. Dadas as três linhas: AB, AD, EF, por conseguinte, a construção do problema de Pappus requer a identificação do ponto C para que:

[1] $CB \,.\, CD = k_1 \,.\, CF^2$.

Com isso, K_1 é dada a partir da proporção. Para quatro linhas:

[2] $CB \,.\, CD = K_2 \,.\, CF \,.\, CH$.

Enfim, para cinco linhas (deve-se assinalar que HI é adicionada aos outros dados):

[3] $CB.\, CD.CF = k_3 \,.\, CH \,.\, CI \,.\, d$.

Onde *d* designa uma linha dada. Sendo assim, traduzindo analiticamente estas três condições, se obtém:

[1] $y\,(\pm Ay \pm Bx) = K_1\,(\pm A' y \pm B' x \pm C')^2$

[2] $y\,(\pm Ay \pm Bx) = K_2\,(\pm A' y \pm B' x \pm C') \,.\, (\pm A'' y \pm B'' x \pm C'')$

[3] $y\,(\pm Ay \pm Bx) \,.\, (\pm A' y \pm B' x \pm C') = K_3\,(\pm A'' y \pm B'' x \pm C'')\,(\pm A''' y \pm B'''x \pm C''')\, d$.

Dando valores convenientes aos coeficientes A, A´, A´´, ..., B, B´, B´´, ..., em *d*, obtém-se:

[1] $\alpha y^2 + \beta y + \gamma yx + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$.

[2] $\alpha' y^2 + \beta' y + \gamma' yx + \delta' x^2 + \varepsilon' x + \zeta' = 0$.

[3] $\alpha'' y^3 + \beta'' y^2 + \gamma'' y^2 x + \delta'' y + \varepsilon'' yx^2 + \zeta'' yx + n'' x^2 + \theta'' x + \iota'' = 0$.

Essas são as três equações indeterminadas. A primeira consiste em determinar *y*. Coloca-se CB para calcular *x*, e, por isso, a admite como a única variável. Nota-se, então, que é estabelecido o problema de Pappus ao inverso. Para cada valor que é possível fornecer a *y*, obtêm-se as equações: [1], [2] e [3] $x^2 = \pm ax \pm b^2$.

Constata-se, assim, que quando o problema é proposto até cinco linhas, a equação em *x* é do segundo grau.[135] Diante disso, é possível construir o lugar do ponto C com régua e compasso, a saber, seguindo uma análise aplicada aos problemas planos.[136] Quando há seis, sete, oito ou nove linhas, têm-se equações que requisitam no primeiro membro termos que não ultrapassam o segundo grau em *x* para seis linhas, o terceiro grau para sete e oito linhas, o quarto grau para 9 linhas e, no segundo membro é estabelecido termos que não ultrapassam o terceiro grau para seis e sete linhas e o quarto grau para oito e nove linhas. As equações resultantes em *x* – quando se houver atribuído um valor determinado para *y* – são reduzidas a dois tipos:

[134] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 104.
[135] Cf. *La Geometri*e (AT, VI, 385-386).
[136] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 105-106.

[4] $x^3 = \pm ax^2 \pm b^2x \pm c^3$

[5] $x^4 = \pm ax^3 \pm b^2x^2 \pm c^3x \pm d^4$

Assim, haverá dez, onze, doze ou treze linhas, onde se têm proporções que estão no primeiro membro com termos que não ultrapassam o quarto grau em *x* para dez linhas, o quinto grau para onze e doze, o sexto grau para treze; e no segundo membro com termos que não ultrapassam o quinto grau em *x* para dez e onze linhas e o sexto grau para doze e treze linhas. A partir de um valor determinado para *y*, se obtém dois tipos de equações:

[6] $x^5 = \pm ax^4 \pm b^2x^3 \pm c^3x^2 \pm d^4x \pm e^5$

[7] $x^6 = \pm ax^5 \pm b^2x \pm c^3x^3 \pm d^4 x^2 \pm e^5x \pm f^6$.[137]

Do mesmo modo, Descartes pode mostrar por uma razão equivalente que para 14, 15, 16 e 17 linhas, encontrasse ainda um novo gênero de curvas, correspondentes às equações do sétimo e do oitavo graus em *x.* Para a resolução do problema de Pappus, Descartes requer um valor arbitrário para *y* (o segmento BC) e, a partir desta medida, constrói o valor de *x*. Constata-se, pois, que o valor de *x* está em função do valor de *y*. [138] Assim, Descartes reconfigura o sistema das notações (a partir de *x* e *y*) mediante o *modus operandi* dos raciocínios de ordem e medida. É partir desta reconfiguração que Descartes adquire meios para encontrar a solução do problema de Pappus. [139]

---

[137] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 107-108. Por considerar que do ponto de vista da contemporaneidade, os cálculos fornecidos por Descartes na *Geometria* são pouco didáticos (vide BOYER, 1996, p. 231-234) optou-se no corpo do texto dessa pesquisa em se reconstituir arquitetonicamente tais cálculos por intermédio das indicações feitas por Vuillemin.

[138] Cf. *La Geometri*e (AT, VI, 386).

[139] Jullien fornece uma explicação contemporânea para a resolução do problema de Pappus. Segue a explicação. Sejam quatro retas D_1, D_2, D_3, D_4 dadas; um ponto C estando considerado, anota-se d_1, d_2, d_3, d_4, os comprimentos dos seguimentos juntam C a D_1 (respectivamente 2, 3 e 4), sob um ângulo dado. Deve-se fixar a relação do produto $d_1 \, . \, d_2$, ao produto $d_3 \, . \, d_4$. Ainda conforme a autor, para Descartes a resolução do problema admite duas partes distintas. A primeira requer que se encontre um ponto C correspondente à relação fixada. A segunda requer que seja determinada a linha onde se devem encontrar todos os pontos convenientes. É fornecido a exemplificação para a resolução utilizando-se quatro linhas. Se apenas três linhas são dadas, a relação fixada será de $d_1.d_2$ à $(d_3)^2$. Para cinco linhas, a relação será $d_1.d_2.d_3$ à $d_4.d_5.k$ (*k* seria uma linha dada, necessária para respeitar a lei dos homogêneos). Segundo Jullien, o problema de Pappus pode ser generalizado para *n* linhas, anotando a adaptação necessária quando *n* é impar. Uma das retas é tomada como eixo das abscissas, um ponto A é tomado como origem e uma direção determina as ordenadas. Um ponto C – solução do problema – será procurado. Acrescenta-se que esse ponto será a duas coordenadas $AB = x$ e $BC = y$ (BC é a primeira linha implicada na análise do problema). Descartes mostra então – com o auxílio de considerações simples, isto é, com o auxílio de linhas e ângulos dados e conhecidos – que todas as outras linhas consideradas no problema podem sempre ser expressas por três termos. Diante disso, a expressão algébrica de cada uma das linhas *di*, implicadas na análise do problema é do tipo ay+/–bx+/–c (onde *a*, *b* e *c* são conhecidas). Além disso, a primeira destas linhas ($BC = y$) não requer a incógnita *x*. Jullien se propõe a examinar a situação para o problema de Pappus quando se apresentam cinco linhas. Cf. JULLIEN, 1996, p. 81-83.

1.2. A Teoria das Proporções: segunda etapa da resolução do problema de Pappus

Na segunda etapa da resolução do problema de Pappus, Descartes utiliza a sua teoria das proporções visando explicar como se resolve o mencionado problema. Essa teoria das proporções prescreve que a demonstração geométrica seja efetuada por meio de propriedades concebidas pela análise algébrica. Diante disso é que Descartes inicia a resolução do problema de Pappus: identificando quais são as construções geométricas, isto é, aquelas que podem ser demonstradas por meio de lugares ou propriedades algébricas. Tais lugares e propriedades são oriundos da análise de retas, círculos, parábolas, elipses e hipérboles, e tais construções geométricas são, por exemplo, a concóide, a cissóide e as ovais. Construções que não se adéquam a precisão e a exatidão da razão, Descartes as designa como mecânicas, tais como, as construções da espiral e da quadratriz.

1.2.1. A resolução cartesiana do problema de Pappus

Ao término do Livro I da *Geometria*, se constata que a primeira parte da obra condiz mais para a exposição do problema de Pappus do que para a sua efetiva resolução matemática. Entretanto, deve-se ressaltar que, no Livro I, Descartes identifica dois quesitos que serão determinantes para a solução do problema, a saber, (1) o quesito que diz respeito aos fatores matemáticos da resolução e (2) o quesito que direciona o caminho necessário para a solução geométrica do problema. Para adquirir as respostas referentes aos quesitos 1 e 2 é necessário o respaldo do Livro II da *Geometria*. Descrever-se-á o caminho para a resolução da segunda etapa do problema de Pappus também a partir do auxílio das exposições e interpretações matemáticas propostas por Vuillemin[140] e por Jullien.[141]

Na segunda etapa da resolução do problema, Descartes propõe que se deve encontrar o lugar de todos os pontos, C, satisfazendo as condições de Pappus. Assinala-se que Descartes não designa um valor para y, pois, considera uma variável dependente. Ora, como na equação da primeira linha $BC = y$ não há um termo em x, se deduz que os resultados serão diferentes

[140] Vuillemin relata os requisitos da primeira etapa do problema de Pappus: “Encontrar a linha x e designando a y os valores dados”. VUILLEMIN, 1960, p. 108.
[141] Jullien ressalta que: “o problema de Pappus é absolutamente relevante para a matemática de Descartes”. JULLIEN, 1996, p. 97.

daqueles que estavam na primeira etapa da resolução do problema. É, por isso, que Descartes amplia o seu exame, a saber, distinguindo as curvas correspondentes às equações do segundo grau, ou seja, às equações da elipse, da hipérbole e da parábola. Descartes:

> [...] Para compreender em conjunto todas as curvas que são de uma mesma natureza, e distingui-las por ordem em certos gêneros, não há nada melhor que admitir que todos os pontos das que se podem designar geométricas, isto é, as que admitem alguma medida de precisão e exatidão, têm necessariamente alguma relação com todos os pontos de uma linha reta, que pode ser expressa por alguma equação, isto é, a mesma para todos os pontos. E que quando esta equação não é superior ao retângulo de duas quantidades indeterminadas, ou ao quadrado de apenas uma, a linha curva seria é do primeiro e mais simples gênero, pelo qual não há mais que o círculo, a parábola, a hipérbole e a elipse. Porém, quando a equação chega ao terceiro ou quarto grau, das duas ou de uma das duas quantidades indeterminadas, por conseguinte, se necessita duas para explicar a relação entre um ponto e outro, esta seria, portanto, do segundo gênero. E quando a equação chega à quinta ou sexta dimensão, ela é do terceiro; e assim para as outras até ao infinito. [...] Depois de ter reduzido todas as linhas curvas a determinados gêneros, torna-me fácil prosseguir a demonstração da resposta que forneci ao problema de Pappus. [142]

[142] *La Geometrie* (AT, VI, 392-393). Descartes oferece a seguinte explicação para a descrição de determinados gêneros de curvas geométricas: "Por exemplo, no caso em que se pretende saber de que gênero é a linha EC que imagino descrita pela intersecção da régua GL com a peça CNKL, cujo lado KN está prolongado indefinidamente para C, e que se movendo sobre o plano, em linha reta, de tal modo que seu lado KL se encontre sempre aplicado sobre alguma região da linha BA prolongado de um e outro lado, faz mover de modo circular a régua GL com o centro no ponto G, por estar vinculada de tal modo que passa sempre pelo ponto L. Opto por uma linha reta, como AB, para referir aos seus diversos pontos, isto é, todos os da linha curva EC; e nesta linha AB escolho um ponto, como o A, para começar por este ponto o cálculo. Digo que escolho este ou aquele porque sou livre para tomá-los como quiser: pois ainda que haja muitas maneiras de eleição para se fazer a equação mais curta e mais fácil, sempre, qualquer que seja a maneira como se as tomem, se pode fazer com que a linha apareça num mesmo gênero, como é fácil de demonstrar. Após isto, tomo qualquer ponto da curva, como por exemplo, o ponto C, sobre o qual imagino que o instrumento que serve para descrevê-lo está aplicado, e traço por este ponto C a linha CB paralela a GA; e posto que CB e BA são duas quantidades indeterminadas e desconhecidas, as designo, uma sendo y e a outra x. Porém, para encontrar a relação de ambas, considero também as quantidades conhecidas que determinam o traçado desta linha curva, tais como GA que denomino a; KL, que denomino b e NL paralela a GA, que denomino c. Com isso, digo: como LN está para LK ou c para b, assim CB ou seja y, está para BK que é, por conseguinte $\frac{b}{c}y$; e BL é $\frac{b}{c}y - b$; e AL é $x + \frac{b}{c}y - b$. Sendo assim, CB está para LB, ou y para $\frac{b}{c}y - b$, como a, ou GA, está para LA ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De maneira que multiplicando a segunda pela terceira se obtém: $\frac{ab}{c}y - ab$, que é igual a: $xy + \frac{b}{c}yy - by$, que resulta multiplicando a primeira pela última; e, assim a equação que se deve encontrar é: $yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$, pela qual se sabe que a linha EC é do primeiro gênero: pois, com efeito, não é outra senão uma hipérbole. E se, no instrumento que serve para traçá-la, em algum lugar da linha reta CNK, se utilize esta hipérbole ou alguma outra curva do primeiro gênero, para limitar a peça CNKL, a interseção do limite desta linha com a régua GL descreverá, em vez da hipérbole EC outra linha curva que será do segundo gênero. Se CNK é um círculo, em que L é seu centro, descrever-se-á a primeira *concóide* dos antigos; se for uma parábola, em que o diâmetro é KB, ter-se-á uma linha curva que digo ser a primeira e a mais simples para o problema de Pappus quando não há mais que cinco linhas retas dadas. Mas se, no lugar de uma dessas linhas curvas do primeiro gênero, fosse uma linha de segundo a que limita a peça CNKL, obter-se-ia dela uma do terceiro; ou se fosse uma de terceiro resultaria uma de quarto e assim até ao

Ao atribuir os gêneros às equações [1] e [2], constata-se que ambas contém os dois termos do segundo grau em *x* e em *y*, mas que, para cinco linhas, a equação [3] contém termos do segundo grau em *x* e do terceiro grau em *y*. [143] Necessitar-se-á, portanto, mudar os cálculos, a saber, excluindo do primeiro gênero a procura do lugar dos pontos C para cinco linhas. Assim, o caso das cinco linhas aparece no segundo gênero. Diante disso, se propõe nove linhas,[144] quando se deixa *y* indeterminada. E, o terceiro gênero fornecerá o caso em que o problema de Pappus comporta de nove a doze linhas; o quarto gênero, de treze a dezesseis linhas, etc. (ver tabela I).[145]

Genre des courbes selon Descartes / Degré (au sens actuel) des équations	Nombre des lignes données dans le problème de Pappus										
	3 et 4	5	6, 7 et 8	9	10, 11 et 12	13	14, 15 et 16	17	18, 19 et 20	21	22, 23 et 24
Équation à une inconnue en x, y étant fixée (équation donnant le segment AB $= x$ pour BC $= y$ supposée donnée).	I \ 2e	I \ 2e	II \ 3e et 4e	II \ 4e	III \ 5e et 6e	III \ 6e	IV \ 7e et 8e	IV \ 8e	V \ 9e et 10e	V \ 10e	VI \ 11e et 12e
Équation indéterminée à deux variables x et y, donnant le lieu géométrique de C.	I \ 2e	II \ 3e	II \ 4e	III \ 5e	III \ 6e	IV \ 7e	IV \ 8e	V \ 9e	V \ 10e	VI \ 11e	VI \ 12e

Tabela I (VUILLEMIN, 1960, p. 109)

infinito, como é bastante fácil de deduzir pelo cálculo. E de qualquer outra maneira que se possa imaginar o traçado de uma linha curva, sempre que seja do número das que eu denomino Geométricas, poder-se-á encontrar, invariavelmente, uma equação para determinar todos os pontos da mesma maneira. Seguindo o curso destes raciocínios, coloco as linhas curvas que elevam a equação até o quadrado do quadrado no mesmo gênero daquelas que não a elevam mais que o cubo; e aquelas cuja equação se eleva ao quadrado do cubo, no mesmo gênero daquelas cuja equação não chega não mais que ao supersólido; e assim para as outras. A razão disto é que há processos gerais para reduzir ao cubo todas as dificuldades que se traduzem pelo quadrado do quadrado; e ao supersólido todas as do quadrado do cubo; de maneira que não se devem considerá-las mais compostas. Porém é necessário observar que entre as linhas de cada gênero, ainda que a maior parte sejam igualmente compostas de modo que elas possam servir para determinar os mesmos pontos e construir os mesmos problemas, há sempre umas que são mais simples que outras e que não têm potências tão elevadas; como entre as do primeiro gênero, além da elipse, da hipérbole e da parábola, que são igualmente compostas, estando também compreendido o círculo, ainda que fosse manifestamente mais simples. E entre as de segundo gênero está a concóide vulgar que tem sua origem no círculo e há também algumas outras que, embora não possuam tanta extensão como a maioria das do mesmo gênero, não podem assim ser colocadas no primeiro". *La Geometrie* (AT, VI, 393-396).

[143] As equações são: [1] $\alpha y^2 + \beta y + \gamma yx + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$, [2] $\alpha' y^2 + \beta' y + \gamma' yx + \delta' x^2 + \varepsilon' x + \zeta' = 0$ e [3] $\alpha'' y^3 + \beta'' y^2 + \gamma'' y^2 x + \delta'' y + \varepsilon'' yx^2 + \zeta'' yx + n'' x^2 + \theta'' x + \iota'' = 0$.

[144] A partir da equação: [5] $x^4 = \pm ax^3 \pm b^2x^2 \pm c^3x \pm d^4$.

[145] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 109.

A demonstração pela qual Descartes soluciona o problema de Pappus – quando o problema contempla apenas três ou quatro linhas dadas – é a mais simples.[146] Calculam-se os valores de CB, CD, CF e CH. A condição do problema, para quatro linhas, implica que CB multiplicado por CF produz uma soma igual a CD multiplicado por CH. Para obter uma equação generalizante é necessário apenas substituir as mencionadas linhas pelas seguintes expressões analíticas:

$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)\, y - (dez^2 + cfgz - bcgz)\, xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$, cujas quais Descartes transforma, por uma opção conveniente do valor dos coeficientes na equação:

$y^2 = 2my - \frac{2n}{z} xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$, cujas raízes são:

$$y_{1,2} = m - \frac{nx}{z} \pm \sqrt{m^2 - \frac{2\,mnx}{z} + \frac{n^2 x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx}{ez^3 - cgz^2}}$$

Ou, por uma nova opção de coeficientes apropriados:

$y_{1,2} = m - \frac{n}{z} x \pm \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m} x^2}$. Esse é o valor de *BC*, obtido algebricamente. Na sequência, Descartes constrói o comprimento *BC* geometricamente (ver figura 6). E, constata, portanto, que: *BC* = *BK* – *LK* + *LC*, onde se tomam: *B* = *m* e *LK* = $\frac{n}{z} x$. Então:

$\mathrm{LC} = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m} x^2}$. [147]

[146] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 109. Boyer relata que: "Descartes ficou impressionado com a proeza de seu método no tratamento do problema do lugar das três e quatro linhas retas. [...] Descartes examinou com detalhes um lugar, e isso foi em conexão com o problema do lugar das três e quatro retas de Pappus, derivando a equação $y^2 = (-dekz^2 y + cfglzy - dez^2 xy - cfgzxy + bcgzxy + bcfglx - bcfgx^2) / ez^3 - cgz^2$. Essa é uma equação geral de uma cônica passando pela origem [...]. Descartes indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma *reta*, um *círculo*, uma *parábola*, uma *elipse*, ou uma *hipérbole*." Cf. BOYER, 1996, p. 233-236.

[147] Assinala-se que estes cálculos foram reproduzidos pelas indicações feitas por Vuillemin apenas com o intuito de tornar compreensível ao leitor contemporâneo a solução cartesiana do problema de Pappus. Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 109-110. Jullien, partindo também das indicações feitas por Vuillemin, fornece a seguinte explicação para a resolução da segunda etapa do problema de Pappus: "Descartes elabora uma versão geométrica do critério geral da ordem e da classificação das curvas. Não se dispõem apenas de métodos construtivos que provam a existência de um vasto conjunto de linhas curvas geométricas; não se dispõem apenas de um critério algébrico de ordem e de distinção neste vasto conjunto, mas se dispõem de um critério geométrico de ordem e de distinção. Assim, todas as curvas do primeiro gênero estão decerto associadas a um polinômio de segundo grau, mas, sobretudo ao problema de Pappus de 3 ou 4 linhas. As curvas do segundo gênero são do mesmo modo, associadas a um polinômio de terceiro ou 4 grau, mas sobretudo a um problema de Pappus onde há 5, 6, 7 ou 8 linhas, etc. Descartes não se contenta desta petição geral e, estuda a questão de 3 e 4 linhas. A opção das linhas conhecidas e desconhecidas, segundo o método das coordenadas, fornece uma equação geral no modo: $y = m - n/z\ .\ x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m} x^2}$ que exprime BC em função de AB. Esse argumento corresponde a passagem da consideração das curvas, construídas por pontos, a partir

Esta equação fornece a solução do caso das quatro linhas. Se os termos que compõe LC:

> [...] fossem nulos, esse ponto C se encontraria na linha reta IL; e se fossem tais que se pudesse extrair a raiz, isto é, que estando *mm* e $\frac{p}{m}x^2$ marcados com o mesmo sinal + , [ou –], *oo* fosse igual a *4pm*, ou que os termos *mm* e *ox*, ou *ox* e $\frac{p}{m}x^2$, fossem nulos, este ponto C se encontraria na outra linha reta que não seria mais difícil de encontrar do que IL. Mas quando isso não ocorre, este ponto C está sempre sobre uma das três secções cônicas, ou num círculo [...]. [148]

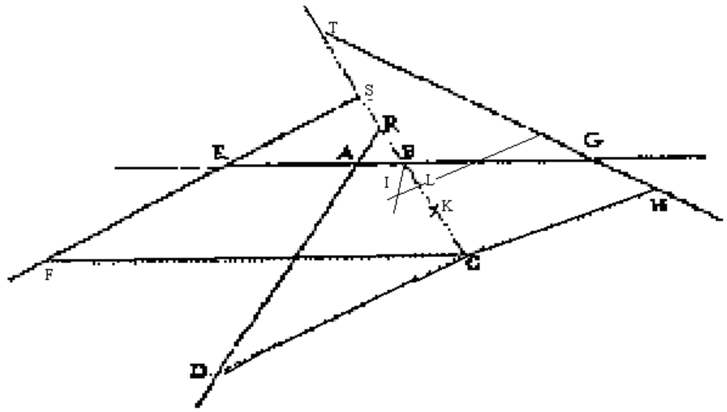


Figura 6 (VUILLEMIN, 1960, p. 111)

Constata-se que cada coluna da tabela que fornece como resolver o problema de Pappus corresponde a uma curva construída pela "figura instrumental" de Descartes (ver figura 7).

---

da consideração como lugar geométrico expresso por um polinômio em duas variáveis. Na primeira situação, as equações de duas incógnitas estariam reduzidas e ordenadas em *y*, de modo a fazer de *x* uma quantidade que pode ser fixada na quantidade de vezes se desejar. Qualquer que seja esse valor, poder-se-á encontrar as raízes correspondentes para *y*; poder-se-á ter assim a quantidade de pontos que se desejar. Este critério distingue justamente as curvas mecânicas, as quais não se podia conhecer com evidência. Trata-se de um critério geométrico-algébrico de construtibilidade das curvas. Diante disso, Descartes dedica-se ao estudo dos lugares, considerados em geral, segundo a estrutura do polinômio de duas variáveis. Esta construção não é mais conhecida por pontos, mas por elementos característicos. Assim, quando se trata de um círculo dever-se-á determinar o centro e o raio; quando se trata de uma hipérbole, dever-se-á determinar o centro e os eixos. Uma discussão dos diferentes casos permite a Descartes reconstruir quando o caso exigir um círculo ou uma das secções cônicas. Esta discussão mostra em todos os casos, que se devem construir curvas do primeiro gênero. A passagem técnica tem sem dúvida posto alguns problemas a Descartes, particularmente questões que dizem respeito ao primeiro Livro de Apolônio. Constata-se, assim, que as equações de um grau inferior ou igual ao segundo são resolvidas. Os problemas dos antigos de quatro linhas ou menos são expressos em equações deste gênero. Tais problemas são, por isso, inteiramente resolvidos. A antiga classificação dos lugares planos e sólidos é passível de substituição, a saber, por uma nova distinção: segundo a qual é possível descrever todas as curvas do primeiro gênero. O problema de Pappus é por isso conhecido através da generalização dos objetos da álgebra geométrica. Tais objetos são as curvas, cuja equação é um polinômio de grau *n*. A produção das expressões algébricas é generalizante e satisfatória, a partir do problema apresentado. A construtibilidade vem a ser conseguida para os polinômios do segundo grau. Desse modo, para o problema de Pappus compreendido para menos de seis linhas: a construtibilidade se faz através da régua e compasso". JULLIEN, 1996, p. 97-98.

[148] *La Geometrie* (AT, VI, 400-401).

Acrescenta-se ainda que cada uma das curvas dessa figura permite a construção que corresponde a um gênero determinado de curvas algébricas e, que esse aspecto, por sua vez, viabiliza a solução do problema de Pappus. Torna-se necessário agora examinar o modo como as considerações de Descartes a respeito dos raciocínios que fundamentam a construção da figura instrumental permitiram a demonstração do problema de Pappus.

A construção da figura instrumental dá-se quando Descartes constata que o movimento da figura geométrica é regular. Diante disso, viabiliza-se a explicação de que a geração das curvas simples (geração das curvas geométricas) consiste apenas em retas que percorrem de maneira concomitante uma mesma distância proporcional. É dada, por exemplo, a reta fixa *yz* e que *y* é o eixo. Assim, determina-se que a reta *yx* possa girar. Pelo movimento perpendicular a *yx*, constata-se uma reta fixa em BC e as suas paralelas DE e F (ver figura 7). De maneira perpendicular a *yz* estão às retas CD, EF, CH. A posição inicial *yx* coincide com *yz*. Ora, como *yx* gira num sentido da direita para a esquerda, a reta BC impulsiona a reta CD. Esta reta também gira e empurra a reta DE, e, assim, por diante (rever figura 7). [149] Com isso, todas as curvas descritas pelos movimentos dos pontos D, F, H, etc.,[150] são admitidas como geométricas. Deve-se assinalar que Descartes concebe a unificação de todas essas características – realizadas por meios geométricos – através de raciocínios analíticos, os quais sempre revelam uma determinada equação algébrica. Esta contextualização permite a classificação das curvas geométricas mediante a utilização da concepção de graus das equações. Descartes:

> Sejam as linhas AB, AD, AF, semelhantes, que suponho descritas com o auxílio do instrumento YZ, composto de várias réguas unidas de tal modo que aplicada a régua YZ sobre a linha AN se pode abrir ou fechar o ângulo XYZ, que quando está todo fechado, os pontos B, C, D, E, F, G, H, estão todos unidos ao ponto A; mas à medida que ele se abre, a regra BC, que faz o ângulo reto com XY no ponto B, empurra até Z a régua CD que desliza sobre YZ, formando sempre ângulos retos com ela; e CD empurra DE que desliza sobre YX, mantendo-se paralela a BC; DE empurra a EF; EF empurra a FG; esta, GH; e podem se imaginar-se uma infinidade de outras que se empurram sucessivamente do mesmo modo, umas formam sempre os mesmos ângulos com YX, e as outras com YZ. Desse modo, à medida que se abre o ângulo XYZ, o ponto B descreve a linha AB, que é um círculo; e os outros pontos D, F, H, que correspondem às intersecções das outras réguas, descrevem as linhas curvas AD, AF, AH, das quais as últimas são, por conseguinte, mais compostas que a primeira, e esta, mais que o círculo. Porém, não vejo o que possa impedir que se conceba de modo claro e distinto o traçado desta primeira, como o do círculo ou pelo menos

[149] Cf. *La Geometri*e (AT, VI, 391).
[150] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 391-392).

> com as secções cônicas; nem o que possa impedir que se conceba a segunda, e a terceira, e todas as outras que possam descrever tão bem como a primeira; nem, por conseguinte, que não se admitam todas, do mesmo modo, para servir às especulações da Geometria. [151]

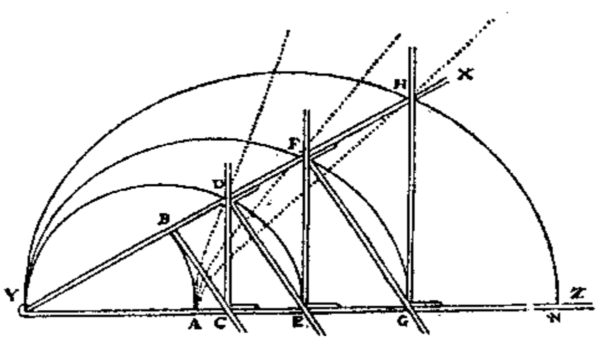


Figura 7 (AT,VI, 391)

O critério analítico de construtibilidade é essencial para toda a geometria de Descartes.[152] Isso porque, tal critério fundamenta os raciocínios que constituíram a aplicação da teoria das proporções. De acordo com Jullien,[153] o movimento regular da figura instrumental de Descartes ocorre mediante a proporção entre duas grandezas fixas. Acrescenta também que tais grandezas são analiticamente descobertas. Neste enfoque, Descartes utiliza determinados gêneros analíticos para classificação das curvas geométricas.[154] Deve-se ressaltar ainda que essa utilização permitiu a demonstração do problema de Pappus no Livro II da *Geometria* (ver figura 8). Segue Descartes:

> As demonstrações de tudo que expliquei são muito evidentes, pois componho o produto com as quantidades que foram designadas para o *latus rectum*, o *latus traversum* e para o segmento do diâmetro NL, ou OP. Segundo os teoremas 11, 12 e 13 do primeiro livro de Apolônio, encontram-se os mesmos termos de que está expresso o quadrado da linha CP ou CL que é uma ordenada deste diâmetro. [...] E no caso em que se deseja explicar todas as quantidades dadas mediante os números, colocando, por exemplo: EA = 3, AG = 5, AB = BR , BS = $\frac{1}{2}$ BE, GB = BT, CD = $\frac{3}{2}$ CR, CF = 2CS, CH = $\frac{3}{2}$ CT. Onde o ângulo ABR é de 60 graus, e enfim, que o retângulo dos dois, de CB e CF seja igual ao retângulo de CD e CH. Pois é necessário ter todos estes dados para que o problema seja inteiramente determinado. E conjecturando agora $AB = x$ e $CB = y$, encontra-se

[151] *La Geometrie* (AT, VI, 392).

[152] Um aspecto matemático muito relevante no contexto da *Geometria* de 1637 é o fato da curva poder ser descrita mediante uma equação algébrica que identifique todos os seus pontos àqueles de uma reta dada. Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 392). Serfati sustenta que o critério da construtibilidade das curvas concebido através de instrumentos proporcionais permanece importante para toda a *Geometria*; razão pela qual Descartes não o abandona, mesmo quando pode tratar todos os problemas por expedientes puramente algébricos. Cf. SERFATI, 1993, p. 197-230.

[153] Cf. JULLIEN, 1996, p. 91.

[154] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 404).

pela mesma maneira outrora explicada: $yy = 2y - xy + 5x - xx$ e $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$. Donde BK deve ser igual a 1, KL será a metade da KI; posto que o ângulo IKL ou ABR seja de 60 graus, e KIL, que é a metade de KIB ou IKL é de 30 graus, ILK é reto. E uma vez que IK ou AB é designado x, KL é $\frac{1}{2}x$, e IL é $x \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$; e a quantidade que foi designada por z é 1, a designada a é $\sqrt{\frac{3}{4}}$; a m é 1; a o é 4, e a p é $\frac{3}{4}$, de maneira que se tem $\sqrt{\frac{16}{3}}$ para IM e $\sqrt{\frac{19}{3}}$ para NM e uma vez que aam que é $\frac{3}{4}$, é aqui igual a pzz, e que o ângulo ILC é reto, segue-se que a linha curva NC é um círculo. E assim se podem examinar facilmente todos os outros casos da mesma maneira. [155]

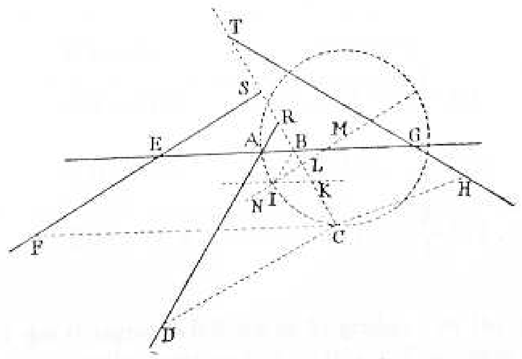


Figura 8 (AT,VI, 404)

Constata-se que Descartes prossegue propondo a resolução do problema de Pappus nos termos dos antigos geômetras, ou seja, por meio de uma teoria das proporções. Admite-se, entretanto, que a teoria das proporções cartesiana requer o *modus operandi* de um método inovador, isto é, um método que contemple o pleno cultivo da razão mediante a proeza da invenção analítica.

1.2.2. A teoria das proporções de Descartes

A teoria das proporções de Descartes é a sistematização matemática do *modus operandi* do seu método. Tal teoria, portanto, permite a Descartes a demonstração analítica ou sintética do movimento de figuras a partir de determinados lugares e propriedades geométricas previamente conhecidas por uma análise especificamente algébrica. Descartes:

[155] *La Geometrie* (AT,VI, 404-406). Para uma melhor compreensão dos cálculos veja a exposição completa destes na *Geometria*. Vide *La Geometrie* (AT,VI, 404-406). Os termos latinos *latus rectum* e *latus traversum* designam respectivamente: lado reto e o lado transversal. Descartes relata a Mersenne – numa carta datada em meados de 1637 – que: “Falo que, o que vos apresento no Livro II da *Geometria*, no que diz respeito à *natureza*, às *propriedades* das linhas curvas e, sobretudo, à maneira de *analisá-las*, estar, ao que me parece, tão além da geometria elementar quanto a retórica de Cícero está para o abc das crianças”. *Correspondance* (AT, I, 479).

> Os antigos distinguiram bem que entre os problemas de Geometria, uns são planos, outros sólidos e outros lineares. Isso quer dizer que uns podem ser construídos sem traçar mais que linhas retas e círculos, enquanto que outros não podem sê-lo se não se empregar pelo menos alguma secção cônica; e outros, por fim, apenas empregando alguma linha mais composta. Mas não deixa de entranhar-se que, apesar disso, não tenha conseguido distinguir diversos graus entre as linhas mais compostas, e não compreender porque as denominaram mecânicas de preferência a geométricas; pois dizer que a causa é ter de servir-se de alguma máquina para traçá-las tornaria necessário incluir também nelas os círculos e as retas, uma vez que para traçá-las sobre o papel se requer um compasso e uma régua, que podem também ser consideradas máquinas. Mas tão pouco se deve a que os instrumentos que servem para traçá-las, por serem mais complicados que a régua e o compasso, sejam menos exatos, pois seria necessário por esta razão eliminá-los da mecânica, onde a exatidão dos trabalhos que produz é mais necessária que em Geometria, donde apenas é a exatidão do raciocínio o que se busca, e que pode, sem dúvida, ser tão perfeito com respeito a estas linhas, como a respeito das outras. [.] É certo que eles não admitiram inteiramente as secções cônicas em sua Geometria, e eu não tratarei de alterar os nomes que foram aprovados pelo uso; porém, é muito claro, me parece, que tomando, como se sabe, por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não se devem excluir as linhas por mais compostas que sejam, enquanto se possa imaginá-las descritas por um movimento continuo, ou por vários movimentos regulares que se sucedem, e que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato de sua medida. Mas talvez o que tenha impedido aos antigos geômetras de admitir aquelas linhas que eram mais compostas que as secções cônicas, foram considerar, em primeiro lugar, a espiral, a quadratriz e outras semelhantes, que apenas pertencem verdadeiramente, às mecânicas e não ao número das que penso admitir aqui, em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que se possa medir exatamente. E no caso daqueles que examinaram a *cissóide* e a *concóide* e outras poucas outras, como não estudaram com profundidade as suas propriedades, não lhes deram mais importância que às primeiras. Ou ainda, vendo eles o pouco que conheciam sobre as secções cônicas e o muito que ainda faltava conhecer sobre o que se pode fazer com a régua e o compasso, os quais eles ignoravam, por crer que não deviam adentrar em matérias mais difíceis. Mas, como espero que no futuro, os que tenham habilidade para servir-se do cálculo geométrico aqui proposto, não terão motivo para deter-se em problemas planos ou sólidos; assim acredito que é indicado que os convide a realizar outras investigações onde não lhes faltará nunca um exercício.[156]

Nesta explicação, Descartes estabelece a gênese do Livro II da *Geometria*: a ordem dos problemas e de suas respectivas soluções. Primeiramente, Descartes identifica quais são os problemas de Geometria, a saber, os problemas planos, sólidos e lineares. Na sequência, ele

[156] *La Geometrie* (AT, VI, 388-390).

distingue dois tipos de construções, a saber, as construções geométricas e as construções mecânicas. No desdobramento deste raciocínio, Descartes identifica os lugares geométricos a partir da análise de retas, círculos e das secções cônicas: parábola, hipérbole e elipse. Para ele, esses lugares são concebidos algebricamente, o que lhe evidencia a exatidão da razão. A partir da inteligibilidade algébrica destes lugares geométricos, ele explica a determinação de propriedades analíticas mediante as construções da concóide e explica a identificação dos pontos por meio da construção das ovais. Assinala-se, que tais construções são efetuadas por movimentos regulares, revelando, assim, a aplicação da sua teoria das proporções. Todavia, as construções mecânicas, tais como a espiral e a quadratriz, são propostas por Descartes de maneira diferente, pois elas requerem o uso da imaginação ao prescrevem um movimento infinito. Diante disso, ele constata que uma plena investigação analítica é comprometida, mas admite a possibilidade de mensurar, em alguns casos, uma regularidade constante em tal movimento mediante os raciocínios de sua teoria das proporções.

1.2.3. A explicação dos problemas de Geometria

Descartes explica os problemas de Geometria mediante a análise dos lugares planos e sólidos. Para isso, ele utiliza o primeiro gênero das linhas curvas, o que lhe permite determinar propriedades e pontos oriundos da análise algébrica de retas, círculos e das secções cônicas. Isso mostra que a inteligibilidade dos problemas de Geometria é concebida pelo critério de construtibilidade fundamentado em uma razão analítica. Cabe ressaltar ainda que tais propriedades e pontos possibilitam a Descartes determinar movimentos mais compostos, tais como na resolução dos problemas lineares. Descartes:

> Como as equações que não chegam mais que ao quadrado [...], não apenas o problema dos antigos, com 3 ou 4 linhas, está aqui inteiramente concluído, senão também todo aquele que pertence ao que eles chamavam de composição dos lugares sólidos, e, por conseguinte também aos lugares planos, em virtude destes se compreenderem nos sólidos. Tais lugares não são outra coisa que os que resultam quando, tratando de encontrar algum ponto a que falta uma condição para estar complemente determinado, assim como ocorre no exemplo, em que todos os pontos de uma mesma linha podem ser tomados pelo que se busca. E se esta linha é reta ou circular, denominamos de um lugar plano. Mas se é uma parábola ou uma hipérbole, ou uma elipse, denominamos um lugar sólido. [...] E se a linha que determina o ponto buscado é de um grau mais composto

> que as secções cônicas, pode-se designar, de igual modo, como um lugar supersólido; e, assim para os outros. Se faltarem duas condições para determinação do ponto, o lugar sobre o qual se encontra é uma superfície, que pode ser, como anteriormente, ou plana, ou esférica ou ainda mais composta [complexa].[157]

1.2.4. A determinação cartesiana da normal

Descartes estabelece um critério de construtibilidade fundamentado em sua teoria das proporções que permita identificar os pontos de uma curva geométrica mais composta mediante a determinação de propriedades analíticas, a saber, a determinação da normal em cada ponto de uma curva. A normal, portanto, é a linha perpendicular na tangente da curva. Descartes:

> [...] Quando podemos traçar linhas retas que as cortam em ângulos retos [normais], e nos pontos em que se encontra com aquelas com as quais se formam os ângulos que se deseja mensurar, ou, o que aqui tomo como igual, naquelas que cortam seus contingentes [tangentes], a grandeza desses ângulos não é mais difícil de encontrar que aqueles que estivessem compreendidos entre duas linhas retas. Creio com isso, ter fornecido aqui, tudo o que se requer para as propriedades das linhas curvas, quando haja exposto a maneira geral de traçar linhas retas que as cortem em ângulos retos nos pontos que delas se escolham.[158]

Descartes expõe o cálculo das normais – e da tangente – por meio de curvas que requerem uma equação algébrica. Segue a exposição realizada por Jullien do modo pelo qual Descartes efetua a via demonstrativa de análise e determina a normal como a linha perpendicular na tangente da curva. Seja a curva CE e CP a normal procurada. CM, que cumpre o papel de x, é a perpendicular abaixada sobre o eixo de y (ver figura 9).

Colocam-se:

$MA = y$, $MC = x$, $PC = s$, $PA = v$, $PM = v - y$.

Tem-se assim: $PC^2 = MC^2 + MP^2$, seja, $s^2 = x^2 + (v - y)^2$,

donde se obtém: $(y - v)^2 = s^2 - x^2$.[159]

[157] *La Geometrie* (AT, VI, 406-407). Deve-se assinalar que os problemas lineares contemplam diversos tipos de construções. Dentre tais construções, destacam-se, as construções “geométricas” e “mecânicas”.
[158] *La Geometrie* (AT,VI, 413). Cabe assinalar que o ângulo entre duas curvas é definido como o ângulo das normais às curvas no ponto de intersecção.
[159] Cf. JULLIEN, 1996, p. 102.

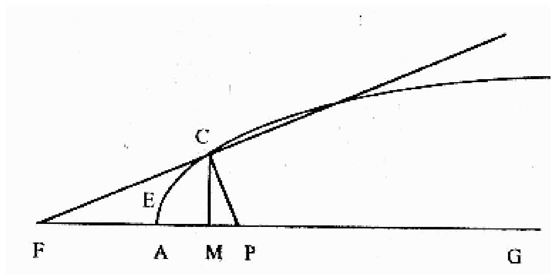


Figura 9 (JULLIEN, 1996, p. 102)

A equação da curva, acrescentada a precedente, constitui um sistema no qual *y* e *x* são as coordenadas do ponto C, e, *s* e *v* os parâmetros que determinam a normal procurada. Elimina-se *x* no sistema e obtém-se um polinômio em *y*. Se a equação da curva é de um grau *n*, então o polinômio em *y* é de grau *2n.* [160] A normal CP pode ser, então, considerada como o raio do círculo de centro P (ver figura 10), tangente à curva e cujo cálculo precedente fornece uma equação algébrica.

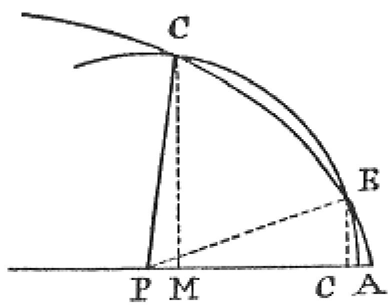


Figura 10 (JULLIEN, 1996, p. 103)

Ora, se P está um pouco mais próximo ou mais afastado (rever figura 10), o círculo não é mais tangente, mas corta a curva em dois pontos (tais como C e E na figura 10). [161] Assim, ter-se-ão duas soluções, a saber, em MA e QA. Neste caso em que estas duas soluções são idênticas se constata que o polinômio em *y*, quando o problema é resolvido, isto é, quando o círculo é tangente a curva, requer uma dupla raiz em *yo* (ordenada do ponto onde se procura a normal), e, por isso divisível por $(y - yo)^2$. A identificação dos coeficientes entre dois polinômios $(2n + 1)$ fornece as equações necessárias para encontrar os parâmetros *v* e *s.*[162] Sustenta-se, portanto, que a

[160] Cf. JULLIEN, 1996, p. 102.
[161] Cf. JULLIEN, 1996, p. 102-103.
[162] Segundo Jullien, o método das tangentes foi determinante para o desenvolvimento da matemática no século XVII. Na França, dois autores propuseram – na mesma época de Descartes – um método para descrever as tangentes,

determinação da normal como uma linha perpendicular na tangente da curva é um meio suficientemente adequado para se realizar demonstrações geométricas de diversos problemas lineares, pois, tal determinação viabiliza a Descartes identificar outras propriedades, as quais dependem do comando da normal. Este critério de construtibilidade possibilita a identificação das propriedades de algumas construções que têm movimentos mais compostos.

Constata-se, assim, que no Livro II da *Geometria*, indo além do tratamento dado ao problema de Pappus, Descartes propõe que as propriedades das curvas geométricas dependem apenas dos ângulos que elas formam com outras linhas. Segundo ele, quando se consegue identificar a relação entre todos os pontos de uma curva e todos os pontos de uma reta, sob a forma de uma equação algébrica, se torna factível descobrir a relação entre os pontos da curva e todas as outras linhas e pontos dados e, a partir dessas relações, descobrir os diâmetros, eixos, centros e outras linhas (e, pontos) com que cada curva tenha alguma relação. O objetivo é, então, escolher as proporções que forem mais simples, as quais possam manter com as outras, tais, como as expressas por equações de suas tangentes, normais, etc. Diante disso ele constata que qualquer propriedade que uma curva possa ter, depende exclusivamente do ângulo que ela forma com outras linhas. [163] Scott faz os seguintes comentários a respeito das propriedades analíticas concebidas por Descartes:

---

tratam-se de Roberval e Fermat. A versão de Roberval situava-se num outro campo de investigação (a respeito da composição dos movimentos) e, por isso, não suscitou grandes polêmicas com Descartes. A versão do método de Fermat requisitava intervir nas equações quantidades extremamente pequenas, nomeadas e, que na etapa final do cálculo, podiam ser negligenciadas. Esta espécie de passagem limite, que era acompanhada de uma relação, não podia satisfazer àquela ordem metódica de Descartes. Por isso houve uma grande polêmica entre estes filósofos. Cf. JULLIEN, 1996, p. 104. Nesta perspectiva, Smith relata a seguinte consideração: "Pode-se utilizar o método para traçar por um ponto dado a normal a uma curva, ou a tangente que passe por um ponto exterior à curva, ou descobrir pontos de inflexão, *máximos* e *mínimos* [...]. Como exemplificação, determina-se um ponto de inflexão numa parábola cúbica de equação $y^3=a^2x$. Seja D um ponto de inflexão, e $CD = y$, $AC=x$, $PA=s$ e $AE=r$. Como o triângulo PAE é semelhante ao triângulo PCD, tem-se $y:(x + s) = r:s$, donde $x = (sy – rs)/r$. Substituindo na equação da curva, temos: $y^3 – a^2sy/r + a^2s = 0$. Sendo D é um ponto de inflexão, há três pontos da secção coincidentes. Comparando a equação com $y^3 – 3ey^2 + 3e^2y – e^3 = 0$ conclui-se que $3e^2 = 0$ e $e = 0$. Mas como $e=y$, tem-se que $y = 0$. Portanto o ponto de inflexão é (0,0). Comaprando com o método de Fermat [...] para traçar as tangentes, tira-se pelo ponto O exterior, uma tangente à parábola BD; tem-se CD:DI maior que $BC^2:OI^2$ pela natureza da curva. E, da semelhança de triângulos, $BC^2:OI^2 = CE^2:IE^2$. Então, CD:DI maior que $CE^2:IE^2$. Se $CE = a$, $CI = e$ e $CD = d$, obtém-se: $DI = d– e$, e $d/8d – e9$ maior que $a^2/(a – e)^2$; donde de^2-2ade maior que $-a^2$ e ou de $– 2ad$ maior que $– a^2$. Ora se BO for tangente à curva, os pontos O e B coincidem, de $– 2ad = – a^2$, e, então, $– 2ad = – a^2$ e $a = 2d$. Isto é, CE = 2CD". SMITH, 1925, op. cit., p. 112.

[163] Na obra *History of Analytic Geometry*, Boyer relata que Descartes tinha toda a razão ao dizer que o problema de encontrar a normal (ou a tangente) a uma curva era de grande importância. Por exemplo, ele encontra a normal de uma curva algébrica em um ponto fixo P da curva, tomando um segundo ponto variável e, em seguida, descobre a equação do círculo que tem por centro o eixo de coordenadas AG e passa por P e Q. Depois, considerando o descriminante da equação que determina as intersecções o círculo com a curva como sendo igual a zero, nota que é

> O ângulo formado pela intersecção de duas curvas não é mais difícil de medir que o ângulo entre duas retas, desde que seja possível traçar uma reta que forme um ângulo reto com cada umas delas, no ponto em que são cortada uma pela outra. Assim, se pudermos descobrir um raciocínio para traçar uma linha reta em ângulos retos com uma curva, em qualquer ponto arbitrariamente escolhido, teremos feito tudo o que é preciso para iniciar o estudo das propriedades das curvas. [164]

Este estudo permite a Descartes determinar a normal de uma curva em um ponto desta. Provido desse raciocínio matemático, Descartes volta a sua investigação para uma classe de curvas, sendo uma das curvas mais fácil de construir, a saber, a construção da concóide e a outra mais difícil, a saber, a construção das ovais, as quais considera como um desdobramento das elipses e hipérboles. Para tal empreitada ele utiliza o que às vezes denominou como "raciocínio inverso das tangentes", ou seja, em vez de partir da curva para a tangente, ele parte da tangente para a curva. [165]

1.2.5. A explicação cartesiana da concóide

Um exemplo da aplicação do critério de construtibilidade cartesiano é a explicação do movimento da concóide. A partir da determinação da normal, Descartes mostra que tal construção dá-se por vários movimentos regulares que se sucedem, em que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem, e que por este meio é possível obter um conhecimento exato da medida geométrica. Descartes:

> Seja por exemplo, os pontos DC a primeira concóide dos antigos, em que A é o polo e BH a reta; de modo que todas as linhas retas que vão de A e estão compreendidas entre a curva CD e a reta BH, como DB e CE, são iguais; e se quisesse encontrar a linha CG a que corta no ponto C em ângulo reto (ver figura 11). Buscando sobre a linha BH o ponto por onde aquela linha CG deve passar, segundo o método explicado, poder-se-ia cair em um cálculo tão ou maior que os precedentes. E, no entanto a construção que se deduzira é bastante simples.

possível encontrar o centro do círculo no qual Q coincide com P. Uma vez dispondo deste centro, Descartes descobre que a tangente e a normal da curva é concebida por uma operação simples. Cf. BOYER, 1996, p. 232.

[164] SCOTT, 1952, p. 114.

[165] Numa carta de junho de 1638, Descartes intitula o seguinte comentário: "como se deve modificar o método de Fermat para conseguir definitivamente a construção da tangente" e a resposta é pelo: "raciocínio inverso das tangentes", em vez de partir da curva para a tangente, se deve partir da tangente para a curva. A tangente, assim, colocada, viabiliza a Descartes aplicar o método que inventara, a saber, realizando demonstrações geométricas consonantes com a sua teoria das proporções. Cf. *Correspondance* (AT, II, 171).

> Pois não se deve tomar mais na linha reta CA, CF igual à CH que é perpendicular sobre HB: logo do ponto F traçar FG paralela a BA e igual a EA, com o que se obtém o ponto G pelo qual deve passar CG, a linha procurada [166].

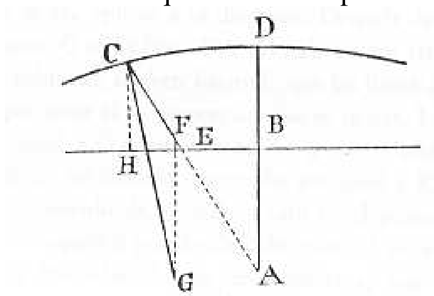


Figura 11 (AT,VI, 423)

Constata-se, assim, que a construção da concóide dá-se mediante o comando de uma propriedade analítica, a saber, a normal, o que viabiliza a Descartes identificar todos os pontos desta curva. Esse aspecto da construção é suficiente para que Descartes considere a concóide uma curva construída a partir dos critérios de sua teoria das proporções. [167]

1.2.6. Construção por pontos: demonstrações geométricas aplicadas a Óptica

Outro exemplo da aplicação do critério de construtibilidade é proposto por Descartes na *Geometria*: "a construção por pontos". Os pontos que comandam o início deste tipo de construção pertencem a lugares geométricos que têm inteligibilidade analítica (algébrica), a saber, a reta, a elipse, a hipérbole. Tal construção é aceita quando, por exemplo, as partes complementares dos fios de ariadne estão retilíneas e cujas relações podem ser inteiramente conhecidas. Descartes:

---

[166] *La Geometrie* (AT, VI, 423-424).

[167] Vuillemin acrescenta que a construção da concóide prescreve um critério de construtibilidade semelhante ao da cissóide, mas, diferente do critério da ciclóide. Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 152. Vuillemin relata ainda que a construção da ciclóide é extremamente relevante para a explicação do movimento mecânico em Descartes. Isso porque, segundo ele, Descartes inicia a construção da ciclóide a partir de uma propriedade analítica. Tal propriedade é relevante porque se trata de uma normal. O raciocínio de Descartes consiste em considerar que todo movimento finito pode ser decomposto em deslocamentos sucessivos – decompondo-se uma curva em uma infinidade de arcos – e, em seguida, observar cada um destes deslocamentos elementares como correspondentes a uma rotação elementar em qualquer ponto sobre o plano. A normal que serve de eixo de rotação tem por comprimento: $\sqrt{2ay}$; esse comprimento decresce cada vez mais ao arredor de A, embora a normal se incline cada vez mais sobre o eixo de *x*, as tangentes nas duas extremidades do arco são perpendiculares a Ox; o mesmo eixo por comprimento 2*a* e, por isso, é paralelo ao eixo de *y*. Desse modo, tais centros de rotação com um eixo variável entre *o* e *2a* servem como substitutos na construção normais e das tangentes, isto é, quando se passa de curvas algébricas àquelas que seriam denominadas transcendentais. Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 67-68.

E tão pouco se deve rejeitar o artifício em que se emprega um fio, ou uma corda dobrada, para determinar a igualdade ou a diferença de duas ou mais retas que possam ser traçadas de cada ponto da curva que se busca para certos pontos ou sobre certas linhas, com certos ângulos, assim como realizamos na *Dióptrica* para explicar a elipse e a hipérbole. Pois ainda quando não possa admitir-se em geometria certas linhas que parecem cordas, isto é, embora pareçam como retas, ou como curvas, em virtude da proporção que exista entre as retas e as curvas não ser conhecida, nem creio que possa sê-lo pelos homens, não podemos disso concluir que seja exato e preciso. No entanto, ainda que não se empregue cordas nestas construções, mas que para determinar linhas retas cujo comprimento se conhece perfeitamente, nem por isso há que rejeitá-las.[168]

A admissão do critério de construtibilidade por pontos permite também a Descartes desenvolver quatro tipos de ovais,[169] os quais possibilitam-lhe aplicar a sua teoria das proporções à Óptica.

A construção das ovais é realizada quando Descartes se dedica a mostrar a utilidade da aplicabilidade do seu método no campo da investigação Óptica. [170] Ressalta-se ainda que as ovais

---

[168] *La Geometrie* (AT, VI, 412).

[169] Alquié relata que Descartes examina no fragmento X do *Excerpta Mathematica* a famosa resolução do caso das ovais a partir dos fundamentos da sua teoria das proporções Cf. ALQUIÉ, 1986, p. 21.Segue o texto latino: (X) OVALES OPTICAE QVATVOR. (I) *Datis punctis, A, B, C, in rectâ lineâ, invenire lineam curvam cujus vertex A, axis AB, & quae ita sit incurvata, vt radij à puncto B venientes, postquam in illâ passi erunt refractionem, pergant vlterius, tanquam si venissent ex puncto C, vel contra. Sumo N punctum medium inter B & C, sitque NA=a, & NB=b, CE+BE=2a – 2y, & DA=x, sintque x & y duae quantitates indeterminatae, quarum alterutra, manens indeterminata, designabit omnia puncta lineae curvae, & altera determinabitur ex modo quo describi debet linea curva. Qui modus vt inveniatur, quaero imprimis punctum F, à quo vt centro concipio describi circulum qui tangit curvam in puncto E; deinde dico lineam BE ductam per FC esse ad CE ductam per BF vt < HF ad FG, sive vt > inclinatio radij refracti in vno medio transparenti ad ejusdem inelinationem in alio. BD=a – b – x, vel √ . xx + aa + bb – 2ax + 2bx – 2ab., CD=a+b – x, vel√ . xx + aa +bb – 2ax – 2bx +2ab., BE=yy – 2ay + aa +bx – ab/ a – y, CE=yy – yy – 2ay + aa – bx + ab/ a – y, & DE=√. y^4 – 4ay^3 + 5aa; – bb; –xx; <+2ax>} yy ; + 2axx – 4aax + 2abb – 2a^3}y ; – aaxx + bbxx – 2abbx + 2ax^3/yy – 2ay + aa [. Fiat nunc NF = c & FE = d : quae duae c & d inveniendae sunt ex eo, quòd aequatio, quam producit triangulum rectangulum FDE, cujus latera sunt determinata, debeat aequari huic: xx – 2ex + ee, faciendo solùm differentiam =x, & simul e = x FD = a – c – x, vel √. Xx +aa + cc – 2ax + 20x – 2ac.* (2) *Datis punctis: CA ∞ 5, BA ∞ I, & AR ∞ 5, imagineris describi curvam AE à fune affixo foco C & transeunte à C ad E, ad B, & à B redeunte ad E, ac [ver figura 32] deide se extendente in infinitum versus H, adeo vt longior fiat prout aperitur angulus ERC. Erit semper: ER=5+7y, EB=1+5y, EC=5 – 3y, DA=2yy+5y, DE=√ . – 4y^4 – 20y^3 +4yy + 20y; & deinde si fiat FA=29y+10/4y+5, <à> centro F circulus descriptus per E tanget datam curvam; &, si ducatur FC=– 9y+15/4y+5 per ER=5+7y, productum erit ad FR= 49y+35/4y+5, ductum per CE=5 – 3y, vt 3 ad 7. Ergo, si curva EA contineat solidum corpus transparens, in quo refractio fiat vt 3 ad 7, omnes radij à puncto R venientes tendent versus C post refractionem.* (3) *Sit nunc AC = a & AR = a, AB = b, BE =b +y; erit: Re=2by/a + y + a, & CE=2by/a – y + a, AD=2byy/aa +y, DE=√ . – 4bb/a^4 . y^4.– 4b/aa . y^3 + 4bb/aa . yy + 4by, FA= 4bby+2baa+aay/4by+aa, &CF per ER est ad FR per CE, vt a – 2b ad 2b. .(4) Sit nunc AR= a, AB =b< AC =c, BE=b +y:ER=3ay–cy+4by+aa+ac/a+c, CE=+ay – 3cy + 4by+ac+cc/a+c, DA=4ayy–4cyy+8byy+3aay+3ccy–2acy+4aby–4cby/aa+2ac+cc,FA=4aab+4abb 4abbc+4bcc+aay+8aby+16bby+2acy+ccy – 8bcy/3aa+3cc – 2ac+4ab – 4bc+8ay+16by –8cy. Excerpta Mathematica* (AT, X, 310-313).

[170] De acordo com Rabuel, as questões que requerem explicações das ovais são as seguintes: "(1) A reflexão e a refração da luz; (2) a descrição de quatro espécies de ovais; (3) suas propriedades em relação a reflexão e a refração da luz e a demonstração destas propriedades; (4) Quais as propriedades, o círculo, a parábola, a elipse e a hipérbole

de Descartes possuem a propriedade de fazer com que os raios de luz convergam a um único ponto.

No Livro II da *Geometria*, Descartes relata a existência de linhas curvas que têm diversas propriedades analiticamente inteligíveis. [171] Diante disso, Descartes sustenta que é possível explicar quatro tipos de ovais que são aplicáveis a Catóptrica e a Dióptrica.[172]

Descartes expõe o primeiro modo para construir a figura de Óptica da seguinte maneira: primeiramente, são traçadas as linhas retas FA e AR (ver figura 12).[173] Em seguida, deve-se tomar, de modo arbitrário, em uma dessas linhas o ponto F, isto é, relativamente distanciado do ponto A.[174] Do ponto F como centro, deve-se escrever o círculo que passa pelo ponto 5, do qual é adquirida a linha reta 5 6. A linha 5 6 corta a outra linha no ponto 6, de modo que a linha A6 seja menor que A5 em uma dada proporção.[175] Essa proporção irá mensurar as refrações: esse é o objetivo pelo qual se deseja aplicar na Óptica a teoria das proporções. Diante disso, deve-se determinar o ponto G na linha FA, ou seja, no lado em que está o ponto 5. [176]

---

têm relação com a reflexão e a refração da luz; (5) a figura que é necessário fornecer aos materiais afim de que eles reunissem em um ponto dado os raios que vêm de um outro ponto dado". Cf. RABUEL, 1730, p. 337.

[171] Segundo Boyer: "O Livro II da *Geometria* contém também muitos aspectos sobre as ovais de Descartes, que seriam muito úteis a Óptica, sendo, pois, obtidas na generalização do método de jardineiro de construir uma elipse por meio de barbantes. Por exemplo, se D_1e D_2 são as distâncias de um ponto variável P a dois pontos fixos F_1 e F_2 respectivamente, e se m e n são inteiros positivos e K é qualquer constante positiva, então o lugar de P, tal que $mD_1 + nD_2 = K$ é agora chamado uma oval de Descartes; [...] e, assim se percebe que seu método podia ser estendido a todas as curvas que poderiam ser concebidas como geradas pelo movimento regular dos pontos de um corpo no espaço geométrico tridimensional" Cf. BOYER, 1996, p. 237.

[172] Mersenne fornece em sua obra *La Vérité dês Sciences* a explicação dos conceitos de Catóptrica e Dióptrica. Catóptrica é a parte da Óptica que trata da reflexão. Com origem no termo grego *opsis* (visão) e o prefixo *kata* (para baixo), isto é, refletido. Opõe-se a Dióptrica, que *di,* forma do prefixo *dia* - usada antes de vogal - significa "através de", donde di-óptica, parte da Óptica que trata da refração, ou seja, da observação que é realizada através de meios transparentes. Cf. MERSENNE, 1625, p. 229-230. Lenobleacrescenta que os temas da Catóptrica e da Dióptrica fizeram parte de grandes debates no círculo de Mersenne no início do século XVII, destacando-se, sobretudo, os nomes de Descartes, Roberval e Fermat. Cf. LENOBLE, 1971, p. 442.

[173] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 424).

[174] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 424-425).

[175]Bos oferece um resumo explicativo da descrição do primeiro oval de Descartes. Consideram-se duas linhas que se cortam segundo um ângulo dado em A. Demarca-se a razão de AF a AG. Marca-se em outra linha AR=AG. A oval é construída como se segue: toma-se um ponto arbitrário K de AG. Desenha-se um círculo cujo centro seja F de raio FK. Desenha-se a perpendicular KL a AR (donde *AL /AK =AF/AG*, uma vez que os triângulos ALK e ARG são similares). Desenha-se um círculo cujo centro seja de raio RL. Os pontos Me N dos dois círculos estão na oval. Repetindo a construção a partir de outros pontos K de AG, se podem obter arbitrariamente quantos se deseje. Cf. BOS, 1981, p. 295-338.

[176] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 424-425).

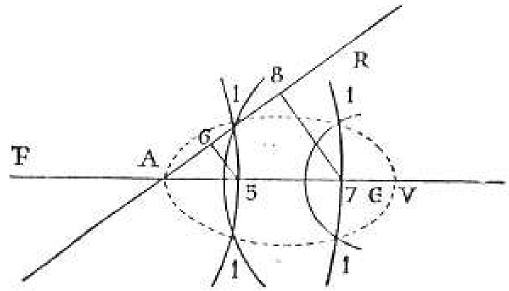


FIGURA 12 (AT,VI, 424)

Assim, se deve determinar que as linhas AF e GA tenham entre si a proporção desejada. Faz-se RA igual à GA na linha A6. Na linha A6 com o centro em G é escrito o *círculo* cujo raio é igual a R6. Esse círculo cortará o outro de um lado e de outro no ponto 1. Portanto, esse círculo é aquele por onde se inscreve a primeira das ovais. [177] De acordo com Descartes, com o centro em F, escreve-se o círculo que passa pelo ponto 7.[178] Então, traçando a linha reta 78 paralela a 56, do centro em G, deve-se escrever outro círculo cujo raio é igual à linha R8. Esse círculo corta o que passa pelo ponto 7 no ponto 1; portanto, é outro da mesma oval.[179] E, assim encontram-se tantos outros como se deseja ao se traçar outras linhas paralelas a 78 e outros círculosde centros F e G.

De acordo com Descartes, para a descrição da segunda oval é necessário colocar no lugar de AR, do outro lado do ponto A, AS igual a GA (ver figura 13). Assim, o raio do círculo descrito do centro G corta o raio descrito do centro F. Esse passa pelo ponto 5. Portanto, o ponto 5 é igual à linha S6. Mas o ponto 5 pode ser também igual a S8, isto é, caso seja necessário cortar o que passa pelo ponto 7. Através do ponto 7, os círculos se cruzam nos pontos marcados 2, 2. Tais pontos são dessa segunda oval, ou seja, *A2x*.

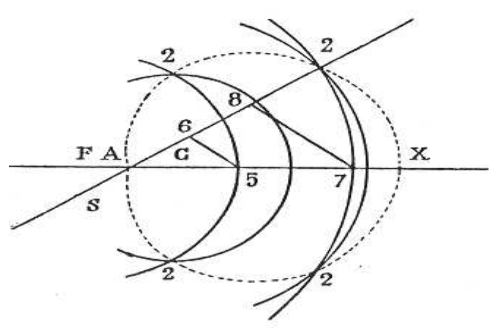


FIGURA 13 (AT,VI, 426)

[177] Seja O´ o ponto onde convergem todos os raios emitidos por O Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 425).
[178] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 425).
[179] *La Geometrie* (AT, VI, 426).

Segundo Descartes, para a descrição da terceira e quarta oval (ver figura 14), [180] é suficiente colocar no lugar da linha AG, AH do outro lado do ponto A, ou seja, no mesmo local no qual está o ponto F.

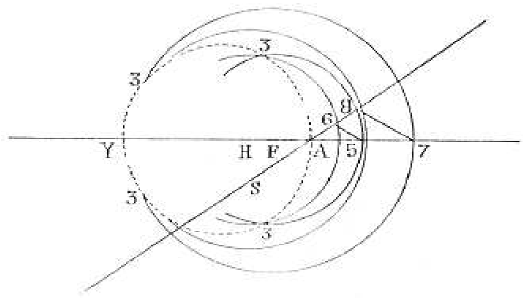


FIGURA 14 (AT,VI, 427)

Nota-se que a linha AH deve ser maior que AF. [181] Desse modo, o ponto F encontra-se onde está o ponto A, ou seja, no traço de todas as demais ovais (rever figura 14). Em seguida, das linhas AR e AS, deve-se traçar a terceira oval A3Y. Essa terceira oval é descrita em um círculo de centro H cujo raio é igual a S6. A terceira oval corta no ponto 3 o centro F que passa o ponto 5. Tal oval corta também o outro círculo cujo raio é igual a S8. Esse raio corta o que passa pelo ponto 7 no ponto marcado 3. [182]

Para a última oval, devem-se escrever círculos do centro H cujos raios são iguais às linhas R6 e R8. Essas linhas cortam os outros círculos nos pontos marcados 4 (ver figura 15).

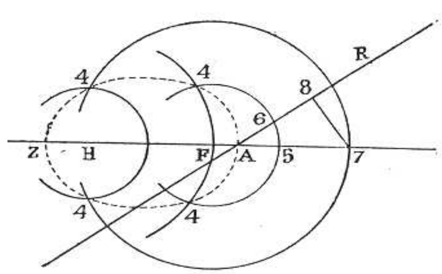


FIGURA 15 (AT,VI, 427)

De acordo com Descartes, pode-se ainda encontrar uma infinidade de outras maneiras para descrever essas mesmas ovais. Então, por exemplo, pode-se traçar a primeira oval AV quando se conjetura as linhas FA e AG iguais, isto é, na possibilidade em que se divide a linha FG pelo

[180] *La Geometrie* (AT, VI, 427).
[181] *La Geometrie* (AT, VI, 427).
[182] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 426-427).

ponto L (ver figura 16), de modo que FL esteja para LG, como A5 está para A6. Ou seja, que essas medidas tenham a proporção que mede as refrações. [183]

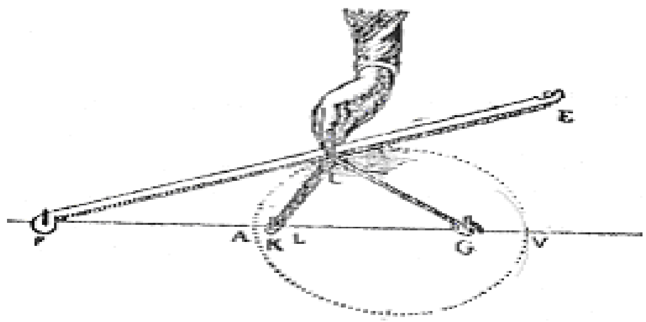


FIGURA 16 (AT,VI, 428)

Ora, havendo dividido AL em duas partes iguais pelo ponto K, faz-se girar a régua ao redor do ponto F. Então, tirando com o dedo C a corda EC que, por sua vez, está fixada no extremo dessa régua em E, replica-se de C até K, e de K até C, e de C até G na outra ponta onde está fixada. Com isso, a longitude dessa corda está formada pelas linhas GA mais AL mais FE menos AF.[184] É, portanto, o movimento do ponto C que descreve a oval através da imitação do que é estabelecido na *Dióptrica* por Descartes. [185]

Sabe-se que para realizar a fabricação de lentes, Descartes empreendeu o estudo do fio de ariadne desenvolvido a partir da metodologia de jardineiros e o estudo de quatro gêneros de ovais.[186] Tais estudos forneceram o primeiro exemplo de curva definida e analisada por equações algébricas, permitindo assim, identificar a proporção de pontos regulares, para o caso das propriedades das ovais; e, identificar a proporção pelo uso de cordas, para o caso das propriedades da hipérbole e da elipse, tal como Descartes fizera na *Dióptrica*.

[183] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 427-428).
[184] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 428).
[185] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 428).
[186] No Discurso VIII da *Dióptrica* Descartes relata que: "[...] Se eu não posso ser claro e inteligível para as pessoas, pelo fato que é uma matéria de Geometria um pouco difícil, tentarei pelo menos sê-lo o suficiente para aqueles que tenham aprendido os primeiros elementos desta ciência; e, de início, afim de não deixá-los em suspense, lhes direi que todas as figuras que aqui mencionei, não estarão compostas mais que de elipses ou hipérboles e de círculos ou de linhas retas. A elipse, ou a oval é uma linha curva que os matemáticos se habituaram a nos expor cortando um cone ou cilindro e que algumas vezes eu também vi ser utilizado por jardineiros nos compartimentos de suas flores, onde eles a utilizam de uma maneira que é verdadeiramente bem grosseira e pouco exata, mas que faz, me parece, compreender melhor a sua natureza que a seção de um cone ou de cilindro.[...] Hipérbole é também uma linha curva que os matemáticos explicam pela seção de um cone, como a elipse. Mas, afim de vos fazer concebê-la melhor, introduzirei ainda aqui um jardineiro que se utiliza de alguns meios para ornamentar um bordado de flores na terra". *La Dioptrique* (AT,VI, 165-176).

A exposição das propriedades ópticas da hipérbole, da elipse ou, os pontos das ovais exige previamente uma concepção algébrica para a determinação da tangente a um ponto de uma curva. Assim, a estratégia seguida por Descartes, consiste, primeiro, em encontrar a normal a uma curva em um determinado ponto: a tangente procurada é, portanto, a ortogonal a esta naquele ponto.

Descartes, em seguida, propõe que a tangente a uma curva geométrica em um ponto possa ser considerada a posição limite de uma secante da curva; secante que, por sua vez, pode ser vista como a corda da circunferência que intersecciona a curva em dois pontos distintos. Quando a reta é tangente, o círculo também é tangente à curva no mesmo ponto; portanto, as duas intersecções com a curva são reunidas em um único ponto.

No Discurso VIII da *Dióptrica*, Descartes exemplifica como a identificação de determinadas propriedades da elipse e da hipérbole servem para realizar as construções por cordas. Para obter uma propriedade da elipse, os dois cabos da corda BHI são entrelaçados a partir das estacas H e I. A corda é esticada por meio de B, movendo-se ao redor de H e I. Obtém-se assim, uma elipse, cujos focos são I e H. Descartes:

> Os jardineiros cravam no solo duas estacas, como, por exemplo, uma no ponto H e a outra no ponto I, e tendo colocado unidas duas extremidades de uma corda, eles a passam em torno delas, de modo que os senhores veem em BHI. Depois, colocando a extremidade de um dedo nesta corda, eles a conduzem em torno destas duas estacas, as deixando sempre com força igual, a fim de segurar ou manter igualmente e de descrever desse modo sobre a terra a linha curva DBK que é uma elipse.[187]

Para obter uma propriedade da hipérbole, se deve girar uma régua ao redor de I. Quando a régua gira ao redor de I, com B fixo na régua e HB tenso, B descreve uma propriedade da hipérbole cujos focos são I e H. Descartes:

> O jardineiro introduziu novamente suas duas estacas nos pontos H e I e tendo atado na extremidade de uma longa régua a extremidade de uma corda um pouco mais curta, [...] na qual ele fez entrar a estaca I e uma borracha na outra extremidade desta corda, que ele passou na estaca H. Depois, colocando o dedo no ponto X, onde elas estão atadas uma a outra, ele a cola de lá até a D. Entretanto, segurando sempre a corda, e colada contra a régua desde o ponto X [...] esta régua pode girar em torno da estaca I, na medida em que ele abaixa seu dedo, descreve sobre a terra a linha curva XBD, que é uma propriedade de uma hipérbole. [188]

[187] *La Dioptrique* (AT, VI, 166). Ver figura na *Dióptrica*. In: *La Dioptrique* (AT, VI, 166).
[188] *La Dioptrique* (AT, VI, 176). Ver figura na *Dióptrica*. In: *La Dioptrique* (AT, VI, 176).

Defende-se nesta pesquisa que os pontos das ovais pertencentes a reta, a hipérbole e a elipse ou, ainda as propriedades oriundas da análise da elipse e da hipérbole, possibilitam a Descartes justificar o movimento de reflexão e refração da luz na *Dióptrica*.[189]

1.2.7. As curvas mecânicas

Os problemas lineares dizem respeito a diversas construções matemáticas, tais como as construções da cissóide, da concóide, da espiral e da quadratriz. [190] Os antigos geômetras identificaram essas construções em um mesmo bloco de classificação, entretanto, Descartes fez distinção entre aquelas que as designou de geométricas, como a cissóide e a concóide, e as outras que as designou de mecânicas, tais como a espiral e a quadratriz.[191]

No Livro II da *Geometria*, Descartes estabelece quais são os problemas lineares, e a partir disso, demarca a diferenciação que há entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Descartes entende "por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não é".[192]

Segundo Descartes, o que possivelmente impediu os antigos geômetras em admitirem as linhas que eram mais compostas que as secções cônicas: "[...] foi considerar, em primeiro lugar, a espiral, a quadratriz e outras curvas semelhantes, as quais apenas pertencem verdadeiramente às

[189] É interessante observar que na *Geometria*, Descartes expõe a demonstração de duas propriedades das ovais, pelas quais se pode determinar a lei dos senos. Nesta perspectiva, o estudo cartesiano das ovais visa explorar algebricamente uma propriedade para tratar da curva e da lei dos senos no que concerne a refração e, a proporção dos ângulos no que diz respeito a reflexão. A partir de determinadas propriedades cônicas são explicadas a reflexão e a refração da luz.

[190] Segundo Boyer: "Se deve notar que a classificação cartesiana dos problemas geométricos incluía alguns dos que Pappus anotara sob nome de lineares. Ao introduzir as novas curvas de que necessitavam para as construções geométricas além do quarto grau, Descartes acrescentara aos axiomas usuais da geometria ordinária mais um axioma. Este fato em si, não difere muito do que os antigos tinham realizado em sua geração cinemática de curvas como a quadratriz, a cissóide, a concóide e a espiral, mas ao passo que os antigos tinham agrupado todas elas, Descartes fez distinções cuidadosas entre aquelas, como a cissóide e a concóide, que designou de algébricas, e as outras como a espiral e a quadratriz, que hoje são chamadas transcendentes. Ao primeiro tipo, Descartes deu reconhecimento geométrico total, junto com a reta, o círculo e as cônicas, chamando todas elas de "curvas geométricas"; o segundo tipo ele excluiu totalmente da geometria, estigmatizando-as como "curvas mecânicas". Cf. BOYER, 1996, p. 235.

[191] Boyer relata ainda a exclusão por parte de Descartes das figuras mecânicas da seguinte maneira: "Para essa decisão, Descartes toma por pressuposto a exatidão do raciocínio matemático. Assim, as curvas mecânicas deveriam ser concebidas, como descritas por dois movimentos separados, cuja relação não admitiria uma determinação exata - tal como a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo no caso dos movimentos que descrevem a quadratriz e a espiral. Em outras palavras, Descartes, considerava as curvas algébricas como descritas exatamente, e as transcendentes (expressão proposta por Leibniz) como descritas inexatamente [...]". Cf. BOYER. 1996, p. 235.

[192] *La Geometrie* (AT, VI, 389).

mecânicas [...] em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que se possa medir exatamente”. [193] Segue Descartes:

> Devo assinalar também que há uma grande diferença entre esta maneira de encontrar vários pontos para traçar uma linha curva [por exemplo, a cissóide e a concóide] e a que se emprega para a espiral e suas semelhantes [por exemplo, a quadratriz] pois, para esta última, não se obtém indiferentemente todos os seus pontos, mas apenas aqueles que podem ser determinados por um processo mais simples que o requerido para formulá-la; assim, pois, não se encontra nenhum dos seus pontos, isto é, dos que lhe são próprios. [194]

Vuillemin, todavia, defende uma importante diferenciação epistemológica entre “curva mecânica” e “movimento mecânico”. Segundo Vuillemin, Descartes, assim como Arquimedes, consegue compreender o movimento mecânico da espiral por meio dos cálculos dos logarítmos. Segue a exposição feita por Vuillemin para tratar deste assunto. Arquimedes define a espiral como “o lugar de um ponto que se move com uma velocidade radial uniforme no comprimento de uma meia volta”. Constata-se, pois, que essa curva roda em um movimento uniforme em torno de sua extremidade fixa. [195] A propósito da construção da tangente, a espiral de Arquimedes requer não apenas a ideia de uma construção cinemática da curva, mas também, o teorema da composição das velocidades que seguem a diagonal do paralelogramo. Arquimedes, assim, determina a tangente da espiral $\rho = \alpha\theta$, calculando a direção instantânea do movimento do ponto P, pela qual essa curva é traçada (ver figura 17). O movimento de P pode ser decomposto em dois movimentos. O primeiro movimento constitui a velocidade radial V_r da grandeza constante, pela qual é dirigida ao longo da linha OP. O segundo movimento constitui a direção perpendicular da

[193] *La Geometrie* (AT, VI, 390).
[194] *La Geometrie* (AT, VI, 411-412).
[195] No *Excerpta Mathematica*, Descartes distitui a construção cinemática do esperial como possibilidade de uma figura instrumental que permitisse calcular as reflexões e refrações. Descartes: “*Pro 5 capite, línea est spiralis, & primò quidem versus A curvatur, deinde versus B, nec vtilis est refractioni, sed irregulari reflexioni tantùm; imo clauditur*. *Excerpta Mathematica* (AT, X, 321). Segundo Boyer: “O espiral de Arquimedes é definido como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio, ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse gira uniformemente em torno de sua origem. Como se segue, nas coordenadas polares a equação seria de $r = a\ \theta$. Dada tal espiral, a trissecção do ângulo ocorre da seguinte forma; O ângulo é posto de modo que seu vértice e o primeiro lado coincidam com o ponto inicial. O da espiral e a posição inicial AO da semi-reta. O segmento OP, onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral, será então dividido em terços pelos pontos R e S. Com isso, são traçados círculos com O como centro e raios OR e OS. Se tais círculos cortam o espiral nos pontos U e V, as retas OU e OV trissectam o ângulo AOP. Num caso que pelo ponto P trace-se a tangente à espiral POR e se supõe que ela corte no ponto Q a reta por O que é perpendicular a OP, então, concebe Arquimedes o segmento de reta OQ – designado como subtangente polar para o ponto P – que tem como comprimento igual ao lado do arco circular PS com centro em O e raio OP que é cortado pela semi-reta inicial polar e pela semi-reta do raio vetor OP”. Cf. BOYER, 1996, p. 87.

linha OP. Tal grandeza é dada pelo produto variável V_e da distância OP a partir da velocidade uniforme da rotação. Quando as velocidades e a distância OP são dadas é construído o paralelogramo das velocidades, e, diante disso é determinado a tangente TP na direção que expressa a velocidade. [196]

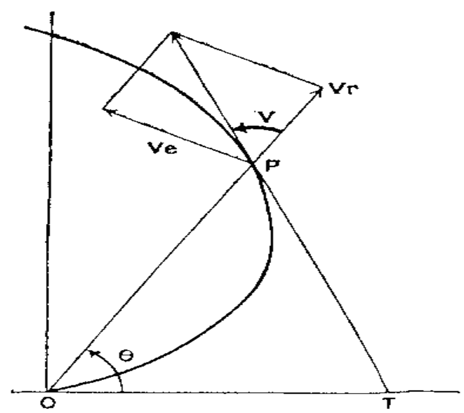


Figura 17 (VUILLEMIN, 1960, p. 39)

A construção de Descartes e, que também se encontra em Torricelli, prescreve três questões, a saber, [197]: (1) o modo dessa exposição em um primeiro momento não é mais que a generalização da formulação de Arquimedes. [198] (2) Coordenando os polos, a equação da espiral logarítmica expressa: $\rho = a\lambda\theta$, pela qual também é expressa: $\rho = ae\gamma\theta$.[199] (3) Para obter esta última expressão é suficiente calcular $\lambda = e\gamma$. A partir destas três determinações é possível conceber a quantidade que representa o raio uniforme quando esse se volta do ângulo uniforme com o crescimento

[196] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 38-39.
[197] Segundo Boyer, Torricelli pode ter derivado sua concepção para "composição de movimentos" de Arquimedes ou de Descartes. Como se segue, Torricelli estudou espiral de vários tipos, ao passo de descobrir a retificação da espiral logarítmica. Como se sabe, havia neste tempo – em meados de 1630 a 1640 – uma notável unidade de interesses matemáticos na intercomunicação através de Mersenne. Os problemas envolvendo infinitésimos eram de longe os mais populares e que agitavam o despertar dos pensadores da época. No De *Dimensione Parabolae*, por exemplo, Torricelli forneceu vinte e uma demonstrações a respeito da quadratura da parábola, usando métodos com o uso de indivisíveis e de exaustão mais ou menos em igual número. Um na primeira categórica é quase idêntico à quadratura mecânica concebida por Arquimedes em seu método, presumivelmente não existente; então, como se poderia prever, um na segunda categoria é praticamente o dado no tratado de Arquimedes Sobre a quadratura da parábola, bem divulgada no século XVII. Cf. BOYER, 1996, p. 245-246. Serfati oferece o seguinte modelo de geração da espiral: Uma semi-reta gira em torno de um ponto O com uma velocidade angular constante. De outra parte, de um círculo variável, mas sempre de centro O, constata-se que seu raio cresce com uma velocidade constante. No instante t, círculo e reta se cortam em um ponto F (t) cujo lugar é denominado de Espiral por Arquimedes. Nota-se que essa curva é composta por dois tipos de movimentos, a saber, um movimento circular e outro movimento retilíneo. Cf. SERFATI, 1993, p. 197-230.
[198] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 40.
[199] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 40.

correspondente à taxa logarítmica uniforme. [200] Inicialmente coloca-se e^{γ} representando o resultado da rotação do raio uniforme através da taxa logarítmica uniforme. Na sequência identifica-se que o ângulo percorrido é igual a γ. O resultado da rotação uniforme determina a taxa logarítmica γ. Nota-se, assim, que a circunferência (por $\gamma = o$) e a reta (por $\gamma = \alpha$) são os casos particulares dessa curva. O cálculo do ângulo V faz o raio vetor com uma propriedade analítica, a saber, a tangente. Tal propriedade mostra que neste ângulo há um valor constante. Nota-se, portanto, a equação:

$$tg\ V = \rho/\rho' = ae\gamma\theta/d/d\theta\ .\ (ae\gamma\theta) = ae\gamma\theta\ /\ ae\gamma\theta\ .\ \gamma = 1\ /\ \gamma = \text{constante.}$$ [201]

Constata-se que a quantidade correspondente dentro da espiral de Arquimedes é igual ao ângulo variável. Por isso, Descartes admite que os valores da velocidade relativa e da velocidade da movimentação que correspondem àquelas que determinaram o paralelogramo das velocidades dentro da espiral aritmética de Arquimedes são constituídos dentro da espiral mecânica. Ressalta ainda que essa demonstração decorre do cálculo da tangente (cálculo que requisita uma equação algébrica). Para isso, Descartes formulara a seguinte equação:

$$V_r = b\rho = \frac{d\rho}{dt} \text{ e } V_e = \rho\omega, \text{ com } \omega = \frac{d\theta}{dt} = c\ (\theta = ct).$$

Com isso: $V_r = b$, e $V_e = \rho\omega$.

Apenas falta integrar a primeira dessas quantidades para encontrar a equação polar da curva. A construção cinemática da espiral de Descartes é definida pelo lugar de um ponto que se move sobre um raio vetorial através de uma velocidade proporcional à distância do polo ($V_r = b\rho$), ou seja, o raio vetorial é envolvido a partir de uma rotação angular uniforme (ω) em torno de um destes pontos identificados como polos. [202]

Numa carta enviada a Morin, datada em 12 de setembro de 1638, Descartes identifica as duas principais propriedades da espiral logarítimica. Descartes:

---

[200] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 40.
[201] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 40.
[202] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 40-41.

> Mas, essa espiral tem diversas propriedades que a tornam facilmente reconhecidas. Ora, se A é o centro da terra e que ANBCD é a espiral, havendo tirado as linhas retas AB, AC, AD, e semelhantes, tem-se a mesma proporção entre a curva ANB e a reta AB, que entre a curva ANBC e a reta AC, ou ANBCD e AD, e, assim as outras. E caso se obtenha as tangentes DE, CF, GB etc, os ângulos ADE, ACF, ABD etc, serão iguais. [203]

Constata-se, assim, que a partir da determinação das tangentes, Descartes identifica, por um lado, que a espiral é angular e, por outro, que o arco desta curva é proporcional ao raio, de tal modo que, o crescimento na direção da curva e o crescimento na direção do raio estão dentro de uma relação constante. Vuillemin sustenta, então, que toda progressão geométrica é suficiente para caracterizar a espiral logarítmica de Descartes. Caso se examine esse espiral em um raio passando para o polo, isto é, com os comprimentos OA, OB, OC, OD, constata-se a seguinte progressão geométrica:

$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD}\,\mu$ (ver figura 18).[204]

Disso conclui-se que os comprimentos incluídos dentro de um mesmo raio, isto é, entre as espirais sucessivas, formam uma progressão geométrica de mesma padronização, ou seja, na mesma razão que determina:

$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{CD} \ldots = \mu.$ [205]

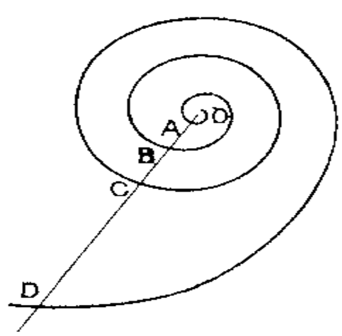


Figura 18 (VUILLEMIN, 1960, p. 41)

[203] *Correspondance* (AT, II, 360-361).
[204] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 41.
[205] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 41.

Assim como a espiral, Descartes exclui a construção da quadratriz como um critério que prescreve a exatidão e a precisão da razão e, por isso, a designa como uma curva a mecânica (a quadratriz é uma curva que designa a quadratura do círculo ou, em outras palavras, sendo dada a medida da circunferência, requisita-se que se encontre o seu diâmetro). [206] Vuillemin acrescenta ainda que, embora, Descartes designe essa curva como mecânica, é capaz de compreender – de maneira semelhante à explicação do movimento da espiral logarítmica — o seu movimento mecânico.[207] Ora, nota-se, portanto, que há uma diferenciação entre a designação de curva mecânica e a compreensão do movimento mecânico, a saber, (1) curva mecânica é aquela que não detém em si o critério de razão da análise algébrica, ao passo que, (2) movimento mecânico é admitido em curvas mecânicas nas quais são determinadas propriedades analíticas que possibilitam a compreensão do seu movimento.

---

[206] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 146-147.

[207] Em uma carta datada em 1638, ao expor a Mersenne quais são os gêneros de problemas que devem ser excluídos da geometria, ele julga de maneira contundente que a quadratura do círculo é impossível: "Mas, quanto às questões de geometria que eles vos prometem me propor, as quais não conseguem solucionar e crêem não poder serem resolvidas pelo meu método, eu penso que me encontro em uma posição desvantajosa. Com efeito, primeiramente, é contra o estilo dos geômetras propor as outras questões que eles mesmos não podem resolver. Depois, há as que são impossíveis, como a quadratura do círculo etc., há outras que, embora sejam possíveis, estendem-se, contudo, para além dos limites que coloquei, não porque exigem outras regras ou mais espírito, mas porque é preciso mais trabalho [...] ". *Correspondance* (AT, II, 90-91). Segue a exposição da explicação da quadratura do círculo no texto latino original do *Excerpta Mathemetica*: Para quadrar o círculo, nada encontro de mais apto do que, sendo dado um quadrado *bf*, juntar o retângulo *cg*, delimitado pelas linhas *ac* e *cb*, igual à quarta parte do quadrado *bf*; e, em seguida, juntar o retângulo *dh*, formado pelos segmentos *da*, *dc*, igual à quarta parte do precedente; e, da mesma maneira, juntar o retângulo *ei* e outros infinitos até atingir o ponto *x*. Todos eles juntos comporão a terça parte do quadrado *bf*. E esta linha *ax* será o diâmetro do círculo, cuja circunferência é igual ao perímetro desse quadrado *bf*. Por outro lado, *ac* é o diâmetro do círculo inscrito no octógono isoperimétrico ao quadrado *bf*, *ad* é o diâmetro do círculo inscrito na figura de 16 lados e *ae*, o diâmetro inscrito na figura de 32 lados, isoperimétrico ao quadrado *bf*; e assim ao infinito *Excerpta Mathemetica* (AT, X, p. 304-305). Segue a versão original latina (VI) *Circvli Qvadratio*. Ad *quadrandum circulumnihil aptius invenio, quàm si dato quadrato bf adjungatur rectangulum cg comprehensum sub lineis ac & cb, quod sit aequale quarte parti quadrati bf; item rectangulum dh, factum ex lineis da, dc, aequale quartae parti praecedentis; & eodem modo rectangulum ei*, *atque alia infinita vsque ad x*: *quae omnia simul.aequabuntur tertiae parti quadrati bf. Et haec linea ax erit diameter circuli, cujus circumferentia aequalis est circumferentiae hujus quadrati bf: est autem ac diamter circuli octogono, quadrato bf isoperimetro, inscripti; ad diameter circuli inscripti figurae 16 laterum, ae diameter inscripti figurae 32 laterum*, *quadrato b isoperimetrae*;*& sic in infinitum. Excerpta Mathematica* (AT, X, 304-305). O problema que Descartes afirma ter resolvido não é, rigorosamente, aquele da quadratura do círculo. Nota-se, entretanto, que Descartes dá ao fragmento o título: *Circulo quadratio* (quadratura do círculo). A equivalência entre os dois resultados pode ser estabelecida sobre a base da primeira proposição do tratado arquimediano da *Medida do círculo*, conhecido entre os matemáticos do século XVII: Todo círculo equivale em área ao triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio e o outro é igual ao perímetro circunferência. Cf. Arquimedes, 1960, p. 127. Uma vez estabelecida essa equivalência, se conhecermos o raio de um círculo dado e a medida da circunferência, podemos construir uma figura retilínea de área igual àquela do círculo. E, como o fragmento de Descartes presume que se saiba a medida do raio (ou do diâmetro), a partir daquela da circunferência, a quadratura do círculo pode ser, por conseguinte, resolvida. Entretanto, nenhuma indicação no texto torna explícita a relação entre a construção dos retângulos, cujas áreas estão em sucessão geométrica. Cf. CRIPPA, 2010, p. 597-621.

Torna-se necessário examinar uma possível interpretação cartesiana do modo como Pappus explica a quadratriz a partir do quadrado OADE. Tal interpretação é também realizada por meio dos comentários feitos por Vuillemin. Segue Vuillemin: propondo O como centro, Pappus traça um quatro do círculo de raio OA (ver figura 19).[208] Supõe que o raio OA gira por meio de um movimento uniforme em volta de O e que, durante esse mesmo tempo, a reta AD se move paralelamente a OE em um movimento igualmente uniforme em direção a AO. No início AD estará na posição AD e OA na posição AO. A chegada AD e OA estará simultaneamente na posição OE.

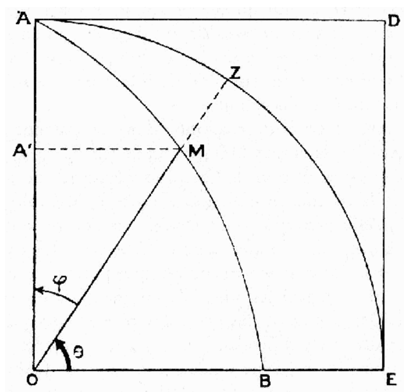


Figura 19 (VUILLEMIN, 1960, p. 146)

Seja φ o ângulo AOZ e M a intersecção do raio OZ e da curva quadratriz obtida por um movimento composto (problema linear). Poder-se-á construir pelos pontos a curva que é engendrada na divisão de uma parte OA e do outro ângulo EOA em duas partes iguais. A equação da curva é igualmente fornecida pela relação do ângulo $EOA = \frac{\pi}{2}$. Essa relação está para cada ponto M obtido para a construção, a saber, dividido em tantas quantas partes que o segmento de retas OA. Tem-se: $\pi/2/\theta = AO/OA' = OA/OM \, . \, sin\ \theta$

Coloca-se pela convenção: OA=1 e caso se considere o ângulo φ = MOA, chega-se: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$:

$\frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{OA - OA'} = \frac{\varphi}{1 - OA'}$. Observa-se OA' como incógnita y, função da variável independente $x = A'M$. Tem-se, assim: $\frac{x}{y} = \frac{A'M}{OA'} = \frac{OM \sin \varphi}{OM \cos \varphi} = tg\ \varphi$ e $\frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{1 - y}$

[208] Cf. VUILLEMIN, 1960, p.147. Mancosu ressalta ainda que em meados da primeira metade do século XVII, o problema de saber se a quadratura do círculo é possível - isto é, se é possível construir, com métodos geométricos, um quadrado com área igual à de um círculo dado - permaneceu um problema aberto na agenda dos matemáticos. Cf. MANCOSU, 1996, p. 79.

Donde se obtém: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y$

e

$x = y\ tg\ \varphi = y\ tg\ (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y) = y\ cotg\ (\frac{\pi}{2}y)$

Sabe-se que *tg u/ u* tende a 1 quando *u* tende a zero: [209] *tg u — u* ($u \to 0$), então:

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}$$

Essa expressão tende a $\frac{2}{\pi}$ quando *y* tende a zero. Logo: OB = $\frac{2}{\pi}$ é a expressão matemática pela qual se pode adquirir a determinação de π. [210] Ao examinar o critério de construtibilidade da quadratriz de Pappus, Descartes, não identifica o ponto de intersecção entre essa curva e uma reta, como, por exemplo, os pontos pertencentes a reta, a hipérbole e a elipse, quando ele tratou

---

[209] Cf. VUILLEMIN, 1960, p.147.

[210] O problema da quadratura do círculo foi formulado inicialmente por tem Menaecmus e Dinóstrato. Segundo Boyer, para Dinóstrato, a quadratura do círculo tornou-se uma questão simples quando foi observada uma notável propriedade da extremidade *Q* da trissectriz de Hípias. Se a equação da trissectriz $\pi\ r$ sen $\theta = 2a\theta$ onde *a* é o lado do quadrado ABCD associado à curva, então o limite de *r* quando θ tende a zero é de 2a / π. Como se segue, a demonstração tal como é concebida por Pappus e provavelmente devida a Dinóstrato, baseia-se unicamente em considerações de uma geometria elementar. Com isso, o teorema de Dinóstrato versa que o lado *a* é a medida proporcional entre segmentos *DQ* e o arco do quarto de círculo *AC*, isto é, *AC / AB = AB / DQ*. Ao passo que segundo Boyer: "Ao se utilizar uma demonstração ou prova indireta tipicamente grega se estabelece o teorema por distinção das alternativas. Então, supondo primeiro que *AC / AB = AB / DR* onde *DR > DQ*. Então seja *S* a interseção do círculo de centro *D* e raio *DR* com a trissectriz e *T* a interseção do mesmo círculo com o lado *AD* do quadrado. De *S* se baixaria a perpendicular *SU* ao lado *CD*. Dinóstrato sabia que os arcos do círculo correspondentes são proporcionais aos raios, logo *AC / AB = TR / DR*; e como por hipóteses *AC / AB = AB / DR*, resulta que *TR = AB*. Mas pela propriedade que define a trissectriz e assim se sabe que *TR / SR = AB / SU*. Logo, como TR = AB, deve seguir-se que SR = SU, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular seria mais curta que qualquer outro segmento ou a curva indo de *S* à reta *DC*. Portanto o quarto termo *DR* na proporção *AC / AB = AB / DR* não pode ser maior que *DQ*. De maneira semelhante se *prova* ou demonstra que essa quarta proporcional não pode ser menor que *DQ*; portanto o teorema de Dinóstrato estaria provado, isto é, *AC / AB = AB / QD*. Dado o ponto Q de interseção da trissectriz com DC, se obtém, pois, uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular AC. Por uma construção geométrica simples do quarto termo numa proporção se pode, com efeito, facilmente traçar um segmento de reta *b* de compriemnto igual a AC. O retângulo que tem um lado *2b* e *a* como o outro lado , se obtém a área exatamente igual à do círculo com raio *a*; constrói-se facilmente um quadrado de área igual à do retângulo, tomando como lado do quadrado a média geométrica dos lados do retângulo. Como Dinóstrato provou a que a trissectriz de Hípias serve para quadrar o círculo denomina-se comumente de quadratriz. Como se segue, desde os geômetras gregos que esse tipo de construção violava as regas da geometria, isto é, em construções que apenas advogavam círculos e retas". BOYER, 1996, p. 66-67. Serfati oferece o seguinte modelo de geração da quadratriz: Do ponto H_1 é descrito um movimento retilíneo uniforme em um lado vertical do quadrado. Do ponto H_2 é descrito o movimento uniforme em 1/4 do círculo de centro O, de modo que os dois pontos originem-se ao mesmo tempo do ponto C e chegam conjuntamente no ponto B. A cada instante t, a intersecção do raio OH_2 (t) e da paralela partem de H_1 (t) ao lado horizontal do quadrado. Com isso, designa-se o ponto F(t), cujo ponto determina a quadratriz de Hippias. Esta curva surge por isso a partir de dois tipos de movimento uniforme, a saber, um movimento circular e um movimento retilíneo. Cf. SERFATI, 1993, 197-230.

das ovais (enquanto curva geométrica). Neste último caso, em especial, observa-se que cada ponto do lugar é obtido como intersecção entre duas curvas geométricas, por sua vez, determinadas pela aplicação de uma sequência finita de construções exatas. Numa carta datada de 13 de novembro de 1629, Descartes sustenta a ininteligibilidade da quadratriz:

> A invenção do Senhor Gaudey é muito boa, isto é, em uma viabilidade prática. […] A linha hélice que vós não nomeastes e que não é uma linha aceita na Geometria, mais do que aquela que é designada *quadratriz*, porque ela serve para quadrar o círculo e, igualmente, para dividir o ângulo em todos os tipos de partes iguais tanto quanto aquela, e tem muitas outras utilidades que podereis ver nos *Elementos* de Euclides, comentados por Clavius. Ora, embora possamos encontrar uma infinidade de pontos por onde passa a hélice e a quadratriz, mesmo assim, não se pode encontrar geometricamente nenhum dos pontos que sejam necessários para os efeitos tanto de uma quanto da outra [...].[211]

Ainda nesta carta, Descartes alega que o ponto que fornece o diâmetro do círculo ao quadrado dado na explicação de Clavius não é determinado, logo, tampouco o ponto de intersecção entre a quadratriz e a base na construção dada por Clavius é exatamente determinada. Deve-se relembrar

---

[211] *Correspondance* (AT, I, 70-71). As curvas que Descartes admite como geométricas são aquelas que permitem ser construídas por pontos, de modo que, qualquer ponto desta curva possa ser construída através da mesma realização. Esta concepção de Descartes se torna mais clara, quando ele trata especificamente do caso das ovais, construção esta, que a expõe na *Geometria*, em uma elaboração por pontos, que se evidência em oposição, fundamentalmente com a qual Clavius esboça para a quadratriz. Clavius: "Descreverei a curva quadratriz geometricamente dessa maneira: seja o arco BD dividido em várias partes iguais, e um dos dois outros lados AD, BC no mesmo número de partes iguais. Essa divisão será mais simples, se for primeiramente bissectado, a saber, seja o arco DB, seja um dos dois lados AD, BC, e, em seguida, cada parte for novamente bissectada e, assim, posteriormente tanto quanto se desejar". CLAVIUS, 1604, p. 321. As intersecções dos segmentos traçados desse modo formarão um conjunto de pontos pertencentes a uma quadratriz. Ora, na passagem citada, Clavius propõe uma construçaõ da quadratriz mais precisa e mais geométrica que a apresentada por Pappus na *Collectio*. Segundo Rodis-Lewis, os jesuítas do colégio La Flechè ensinaram matemáticas ao estilo escolástico desta área do saber, em outras palavras, a matemática de Clavius. Cf. RODIS-LEWIS, 1995, p. 49. A matemática utilizada por Clavius não requisita a álgebra em favor da construção geométrica, pois o jesuíta não tinha posse de um método analítico, e, diante disso, apenas utilizava procedimentos silogísticos – ao modo aristotélico – da categoria da quantidade. No que diz respeito a divisão doângulo em partes iguais, Milhaud relata que Descartes anuncia em 26 de março de 1619, quatro inovadoras demonstrações, a partir do uso do compasso. Tratava-se, primordialmente, do famoso problema da divisão de um ângulo em três partes iguais, ou mesmo de um número qualquer de partes iguais; depois dos três tipos de equações cúbicas, cada uma com toda a variedade de sinais que se pode comportar, isto é, em treze casos distintos para as equações comuns, a saber, entre *z* e OX+ ON, entre *z*e OX – ON, entre *z* e ON – OX. Observa-se que Descartes emprega as notações cóssicas. Tais notações eram usadas, sobretudo, na matemática alemã do século XVI e do começo do século XVII. É possível assinalar que Descartes haveria adquirido as notações por meio das obras do Jesuíta Clavius, que deveria fazer parte da biblioteca dos Jesuítas de La Flechè. É um sistema de notações onde – como em Diophante – uma característica especial designa cada uma das três primeiras potencias da incógnita e da raiz. N é a raiz, a coisa (cosa para Viète), *z* designa o quadrado e π o cubo, *zz* a quarta potência, etc. A letra O introduzida por Descartes designa um coeficiente qualquer Em seguida, Descartes emprega as notações nos treze casos distinguidos por ele: $x^3 = \pm px \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm qx \pm r$. De onde é necessário os três tipos obtidos com todos os sinais – no secundo membro. Um ângulo é facilmente dividido em três partes iguais por um compasso. Faz-se com que os três ângulos formados resultem sempre iguais, isto é, seja qual for a abertura do compasso. Cf. MILHAUD, 1921, p. 38-40.

que (1) segundo Descartes, caso um ponto que pertença a um lugar seja construído pela intersecção entre duas curvas mediante um ponto arbitrariamente escolhido, ele poderá ser determinado a um ponto arbitrariamente escolhido; e (2) se os pontos de um lugar são construídos por ponto a ponto, então eles são exatamente determinados. Estes dois critérios gerais de construtibilidade são, pois, os meios pelos quais Descartes chega à designação de "figura geométrica" e a determinação de "propriedades analíticas" mediante a compreensão do movimento mecânico estabelecido em algumas curvas. Em uma carta datada de 31 de março 1638, ao expor a Mersenne quais são os gêneros de problemas que devem ser excluídos da Geometria, Descartes diz:

> Mas, quanto às questões de Geometria que eles vos prometem me propor, as quais não conseguem solucionar e acreditam não poder ser resolvidas pelo meu método, eu penso que me encontro em uma posição desvantajosa. De fato, primeiramente, é contra o estilo dos geômetras propor aos outros questões que eles mesmos não podem resolver. Depois, há as que são impossíveis, como a quadratura do círculo etc., há outras que, embora sejam possíveis, estendem-se, contudo, para além dos limites que coloquei, não porque exigem outras regras ou mais espírito, mas porque é preciso mais trabalho.[212]

Defende-se nesta pesquisa que, para Descartes as curvas geométricas devem ser proporcionalmente estabelecidas por meio de movimentos regulares. Tal proporção é adquirida pela legitimidade racional da análise algébrica. Esse é o principal critério de diferenciação entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Entretanto, se faz necessário diferenciar as seguintes designações (1) curva mecânica e (2) movimento mecânico. Isso porque (1) curva mecânica é aquela que não detém em si o critério de razão da análise algébrica, ao passo que, (2) movimento mecânico é admitido em curvas (figuras) mecânicas em que são projetadas propriedades analíticas, as quais viabilizam a compreensão do seu movimento. Esse é, pois, o exemplo do movimento mecânico da espiral e da ciclóide – a ciclóide é designada também como roleta, quando Descartes trata de máquinas mecânicas –, isso porque, Descartes constata que a determinação da normal e da tangente (propriedades analíticas) a uma curva em um ponto é atribuída ao conhecimento da proporção que mostra o movimento destas mencionadas curvas mecânicas.

[212] *Correspondance* (AT, II, 90-91).

1.3. A nova geometria de Descartes: álgebra dos comprimentos

O Livro III da *Geometria* é primordialmente algébrico. Neste Livro, Descartes pretende fornecer as regras para conhecer a natureza da solução das equações, as quais devem ser reportadas às construções geométricas. Tais considerações resultam em uma inovadora teoria das equações algébricas. Acrescenta-se que através do Livro III da *Geometria*, Descartes trata a resolução dos problemas sólidos e dos problemas hipersólidos. Nesta perspectiva é estabelecida a solução das equações, das raízes e das relações entre os coeficientes. Diante disso, sustenta-se aqui que Descartes propõe que uma equação pode ter tantas raízes quanto dimensões tem o grau da equação.

1.3.1. Regras das equações algébricas

No Livro III da *Geometria*, Descartes estabelece seis regras para a resolução das equações. A seguir são expostas as mencionadas regras por meio das indicações feitas por Jullien.
(1) O grau da equação – tratando-se, pois, da dimensão – fornece o número possível de suas raízes. Estas raízes podem ser verdadeiras, isto é, positivas ou, mesmo falsas, caso ocorra uma anulação na quantidade mensurada. Um polinômio tem, por isso, *n* raízes.[213] Assim:
$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120=0$. Admite-se, portanto, três raízes verdadeiras, a saber, 2, 3 e 4, mas também uma raiz falsa, ou seja, 5. Descartes:

> Mas, constata-se frequentemente que algumas destas raízes são falsas ou menores que zero [negativas]; como quando se supõe que x designa uma quantidade por defeito que, sendo 5, se traduz por $x + 5 = 0$, e que multiplicada por $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, dará: $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, equação na qual há quatro raízes, a saber: três verdadeiras que são 2, 3 e 4 e uma falsa, que é 5. [214]

(2) Um polinômio tendo ∞ para raiz é fatorável por $(x - \alpha)$.

(3) O polinômio precedente pode ser dividido por (x – 2), (x – 3), (x – 4) e (x + 5).

(4) Os números de raízes falsas e verdadeiras podem ser descobertos sem que as mesmas sejam conhecidas. Isso ocorre por meio do auxílio da regra das mudanças do sinal dos coeficientes. Um polinômio, portanto, é ordenado segundo as potências decrescentes da incógnita. Descartes:

---

[213] Cf. JULLIEN, 1996, p. 115.
[214] *La Geometrie* (AT, VI, 445). Nesta perspectiva, Smith relata que: “Se $x = -5$, -5 é a falta ou defeito de 5, isto é, o resto, quando 5 é subtraído de zero”. SMITH, 1925, op. cit., p. 159.

> Também se conhece deste modo quantas raízes verdadeiras e quantas falsas, pode haver em cada equação. A saber: podem existir tantas verdadeiras quantas vezes os sinais + e – se encontrem trocados; e tantas falsas quantas vezes se encontrem dois sinais + ou dois sinais – seguidos. Assim, na última, depois de + x^4 segue – $4x^3$, há uma mudança de sinal de + para –; e depois de – *19xx* segue-se + *106x* e depois de + *106x* vem – 120, o que corresponde a outras duas mudanças, donde se deduz que há três raízes verdadeiras; e uma falsa, em virtude dos dois sinais – seguidos que antecedem – $4x^3$e *19xx.*[215]

(5) Uma equação pode ser modificada, simplificada, por uma mudança de uma variável do tipo $y = x + \alpha$. A equação $P_n(x) = 0$ é substituída pelo sistema $P'_n\,(y) = 0$ *e* $y = x + \alpha$. A equação pode, portanto ser modificada por uma mudança variável do tipo $y = ax$.

(6) Estas mudanças permitem as transformações que auxiliam a fatoração e, por isso, a resolução. Assim é possível obter um polinômio pelo qual o segundo termo desaparece. Logo, a equação $y^4 + 16y^3+71y^2 - 4y - 420=0$ pode fornecer originar o sistema: $z^4 - 25z^2 - 60z - 36=0$ *e* $z = y + 4$.[216] Segundo Jullien, outra questão é que Descartes consegue obter as frações e os radicais. Esta equação permite também situar o domínio das raízes verdadeiras. A equação: $x^3 - x^2\sqrt{3} + (26/27) \,.\, x - 8/27\sqrt{3} = 0$ é transformada em $y = x\sqrt{3}$ e $y^3 - 3y^2 + (26/9) \,.\, y - 8/9=0$, a equação é ainda transformada em $z = 3$ *e* $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$, cujas raízes são 2, 3 e 4; donde tira-se, pelos valores de x, $2 \,.\, \sqrt{3}/9$, $\sqrt{3}/3$ *e* $4 \,.\, (\sqrt{3}/9)$. Tais regras são utilizadas para tratar da resolução das equações do terceiro e quarto grau. Ora, se a equação é cúbica do tipo P_3 (x) = 0, e que após feita as diversas transformações sugeridas inicialmente, obtém-se um valor ∞ tal que $P_3(\alpha) = 0$. Em seguida, então, é possível dividir a equação cúbica por $(x - \alpha)$ e, obter uma equação do segundo grau que, seguramente, caracterize o problema como plano. Quando por meio da equação identifica-se o grau, pode-se provar que o problema é sólido. Descartes: "E, por conseguinte, não é inútil tentar construí-lo sem empregar mais que círculos e linhas retas, tal como se empregassem secções cônicas para construir aqueles que apenas requerem círculos [...]".[217] É necessário examinar a divisão de um polinômio por um grau inferior. O procedimento é similar tendo uma equação de quatro dimensões. Procura-se diminuir o grau na divisão por uma forma do tipo (x – ∞). Se isso for possível, torna-se evidente o caso precedente das equações cúbicas, senão, tornar-se-á necessário procurar a fatoração nos dois polinômios do segundo grau. Após ter

[215] *La Geometrie* (AT, VI, 446).

[216] Cf. JULLIEN, 1996, p. 115. Por considerar, do ponto de vista da contemporaneidade, pouco didático os cálculos fornecidos por Descartes que contemplam as seis regras das equações algébricas optou-se no corpo do texto dessa pesquisa em reproduzi-los sistematicamente por intermédio das indicações feitas por Jullien.

[217] *La Geometrie* (AT, VI,457).

transformado o polinômio – ao eliminar o segundo termo – dever-se-á procurar a forma de dois polinômios. Seja uma equação do quarto grau na forma: $x^4 + px^2 - qx + r = 0$. Procuram-se dois polinômios do tipo $x^2 + yx + z$ e $x^2 - yx + v$, cujo produto é igual ao polinômio do início. O problema é transformado e o procedimento de identificação dos coeficientes fica em evidência, de tal modo que y, z e v tornam-se as incógnitas de um sistema de equações. Nota-se ainda que as mais elevadas destas equações é do sexto grau em y. A equação é cúbica em y^2: $y^6 + 2py^4 + y^2 (p^2 - 4r) - q^2 = 0$. O conhecimento de y revela os raciocínios examinados e, assim, permite a descoberta das raízes do polinômio. Constata-se, também que a exposição do número de raízes, ou seja, da redução das equações, permite a classificação dos problemas, a saber, em problemas planos e sólidos. A partir da formulação das regras das equações, Descartes expõe a resolução analítica de um clássico problema geométrico. Constata-se, pois, que o *modus operandi* dessa resolução cartesiana é determinantemente diferente daquela adotada por Pappus. [218] Descartes:

> Para que se possa conhecer melhor a utilidade desta regra é necessário que a aplique a algum problema. Por exemplo, dado o quadrado AD e a linha BN, prolonga-se o lado AC até E, de modo que EF, traçada de E até B seja igual a NB. Sabe-se de Pappus que, tendo primeiro prolongado BD até G, de modo que DG seja igual a DN, e tendo descrito um círculo de diâmetro BG, no caso em que se prolonga a linha reta AC, ela encontrará a circunferência deste círculo no ponto que se buscava, E. Mas, para os que não conhecem esta construção, ela seria bastante difícil de encontrar, e procurando-a pelo método aqui proposto, não haveria que se tomar nunca DG como a quantidade desconhecida, mas CF ou FD, em virtude de serem elas as que conduzem mais facilmente à equação; e então se encontraria uma que não seria fácil de se constituir sem a regra que fora aqui explicada. Pois, colocando a por BC ou CD, c por EF, e x por DE, se tem CF = $a - x$, e como CF, ou $a - x$, está para FE, ou c, como FD, ou x, está para BF, que, por conseguinte, é $\frac{cx}{a-x}$. Logo no triângulo retângulo BDF, cujos lados são x e o outro a, a soma dos seus quadrados, que é $xx + aa$ é igual ao quadrado da base que é $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$; de modo que multiplicando os dois membros por $xx - 2ax + aa$, se encontra a equação: $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3 x + a^4 = ccxx$ [...].E sabe-se por estas regras precedentes que a sua raiz, que é o comprimento da linha DF, é: $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$. No caso em que se coloca BF, ou CE ou BE como a quantidade desconhecida, se chega a uma equação do quarto grau, mas que seria mais fácil de resolver e que se obteria mais simplesmente; pelo contrário, se a quantidade desconhecida fosse DG,

[218] A prova fornecida por Pappus é iniciada por uma elaborada prova do lema: dado o quadrado ABCD, e um ponto E sobre a reta AC, traça-se por E a perpendicular EG a BE que encontra BD em G, sendo F o ponto de intersecção de BE com CD. Então, $CD^2 + FE^2 = DG^2$. Procede depois como segue: pela construção dada no problema, $DN^2 = BD^2 + BN^2$. Pelo lema, $DG^2 = CD^2 + FE^2$. Por construção, BD = CD e DG = DN. Portanto, FE = BN. Cf. SMITH, 1925, op. cit., p.188.

teríamos em chegar a equação, mas sua resolução seria muito simples. Exponho isso para isso para advertir que, quando o problema proposto não é sólido, se ao resolvê-lo por um método se chega a uma equação muito complicada, pode geralmente resultar uma mais simples buscando-a por outro. Poderia ainda adiantar diversas regras para resolver as equações que chegam ao cubo e ao quadrado, mas, estas seriam supérfluas, pois quando os problemas são planos, se pode sempre encontrar a construção pelas regras aqui apresentadas.[219]

Torna-se necessário examinar a resolução do problema geométrico fornecido por Pappus. Seja o quadrado AD e a linha BN. Prolonga-se o lado AC até E, de modo que EF, traçada de E até B seja igual a NB (ver figura 20). Constata-se que a construção de Pappus é correta e, prova que o problema é plano, entretanto, para os matemáticos que não a conheciam, tal resolução tornar-se-ia bastante difícil de encontrar. Descartes, por sua vez, mostra que por seu método opta-se por uma quantidade desconhecida e, que essa opção pode de maneira rigorosa representar as equações obtidas. Nesta perspectiva, Descartes sugere que colocando a = BD, c = EF e x = DF como quantidade incógnita, a equação é: $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)\,x - 2a^3\,x + a^4 = 0.$ [220]

---

[219]*La Geometrie* (AT, VI, 461-463). Vuillemin expõe a construção de Pappus. Segundo Vuillemin, se trata de construir, por régua e compasso, a solução: $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$. Segundo Vuillemin, Descartes inicia a construção por meio dos resultados da construção sintética de Pappus. Seja o quadrado dado, de lado BD e seja BN, dado. É necessário, sobre o prolongamento CD do lado do quadrado oposto a BD, encontrar um ponto E, de modo que o lado CD determine sobre a reta EB um segmento igual a a linha dada BN. Agrega-se N e D e se escreve sobre o prolongamento de BD um comprimento DG = DN. Traça-se a circunferência de diâmetro BG. Essa circunferência corta em E o prolongamento do lado oposto a BD. Faz-se BE, que corta CD em F. E, portanto, é o ponto procurado. Primeiramente, o ângulo BEG é reto, sustentado pelo diâmetro BG. Assim: $DN^2 = DG^2 = BN^2 + BD^2$. Os triângulos semelhantes ECF e EHG (sendo os ângulos HEG = FEC, os lados de seus ângulos são respectivamente retangulares). Portanto, têm-se: CF/HG = CE/EH e HG = CF . EH/CE. Pelos triângulos semelhantes ECF e BDF, obtém-se: CF/FD = CE/BD e BD = CD = EH. Logo: CE = CF.BD/FD = CF.BD/HG, e HG = FD. Em seguida, calcula-se: $DG^2 = (DH+HG)^2 = (CE+HG)^2 = CE^2 + HG^2 + 2.\,CE.HG = CE^2+HG^2+2.CE.CF.EH/CE = CE^2+FD^2+2.CF.CD = CE^2 + (CD-CF)^2 + 2.CF.CD = (CE^2+CF^2) + CD^2 = FE^2+ CD^2$. No caso em que é comparada a expressão de DG^2 com a primeria expressão obtida, constata-se que: FE=BN. A correspondência analítica da construção do problema de Pappus é a seguinte: Seja DF = x e BD = a. Se tem: CF = $a - x$; CF/FE = FD/BF, ou $a - x / c = x$/BF, isto é, $BF=cx/a - x$. Mas, $BF^2 = x^2 + a^2$. Logo: $x^2 + a^2 = c^2x^2/x^2 - 2ax+a^2$. Na multiplicação dos dois membros por $(x^2 - 2ax+a^2)$, obtém-se a equação ordenada por reportar a x: $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)\,x^2 - 2a^3x + a^4 =0$, e, DF = $x = 1/2a + \sqrt{1/4a^2} + 1/4c^2\ \sqrt{1/4c^2} - 1/2a^2 + 1/2a\sqrt{a^2+c^2}$. Como se segue, Descartes procede, sobre a mesma construção pela opção incógnita: (1) Se coloca, então: $BF = x$. Se tem: EB/EG=EH/HG, com EB=c+x, EG=BF=x. Seja HG=FD=d. Sem tem: c+x/x=a/d, e, $d^2=x^2 - a^2$; $(c+x)^2/x^2 = a^2/x^2 - a^2$, ou: $x^4 + 2cx^3 + (c^2 - 2a^2)\,x^2 - 2a^2cx - a^2c^2=0$. Logo BF é a solução. (2) Se coloca então: CE = x. Se tem: CE/FC = x/FC = EH/HG = a/FD; x/FC = a/ a – FC, e, $x^2=c^2 - FC^2$. Destas duas equações onde se concebe na substituição de FC, esse valor: $x^4 + 2ax^3+(2a^2- c^2)\,x^2 - 2ac^2x-a^2c^2=0$. Logo CE é a solução. (3) Se coloca então: BE=X: $BE^2=EH^2+BH^2$, ou, $x^2=a^2+(a+DH)^2=2a^2+2a.CE+CE^2$; CE/FE=BD/BF, ou, CE = ac/ x–. Destas duas equações, obtém-se: $x^4 - 2cx^3 + (c^2 - 2a^2)\,x^2 + 2a^2cx - a^2c^2 = 0$. Logo BE é a solução. (4) Se coloca, enfim, $DG = x$. Este caso Descartes resolve da seguinte maneira: DG = DN = x; $DG^2 = BN^2 + BD^2$. Portanto: $x^2 = c^2 + a^2$. A dificuldade segundo Descartes é que a Geometria analítica deve encontrar a demonstração de Pappus para resolver a equação. Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 167-170.

[220] Cf. JULLIEN, 1996, p. 115.

Segundo Jullien, a raiz da expressão é nomeada construtível a partir da régua e compasso:[221]

$$DF = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$$

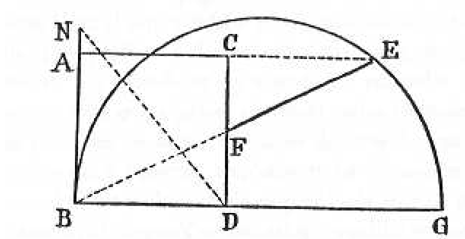


Figura 20 (AT,VI, 462)

Constata-se, assim, que o domínio matemático das regras das equações algébricas é extremamente laborado por Descartes. Para tratar as regras das equações algébricas, Jullien relata que o princípio cartesiano é simples, a saber, seja um polinômio P_n, de grau *n*. Em seguida, devem-se encontrar os polinômios em $Q_{n´}$e $R_{n´´}$, com $n´+ n´´= n$. Esse raciocínio pressupõe o estudo dos polinômios de graus inferiores e a classificação dos problemas que resultam em dos tipos de fatorações possíveis. [222] Entretanto, Descartes omite tais demonstrações com o intuito de que o leitor da *Geometria* consiga por si próprio – ao desenvolver tais construções matemáticas – entender o modo como é articulado o seu método matemático. Descartes:

> Por último, omito aqui fornecer as demonstrações da maior parte do que disse, por me terem parecido tão fáceis que, para quem se dê a tarefa de examiná-las metodicamente, elas se apresentarão por si mesmas; e, portanto, será mais útil aprendê-las deste modo que as lendo. [223]

1.3.2. A explicação cartesiana da intersecção da parábola

A classificação das equações é desenvolvida por Descartes por meio de construções geométricas. Para isso, ele alega que todo problema sólido tem uma equação cujas raízes são encontradas em uma das secções cônicas, ou em retas ou em círculos. Dentre as secções cônicas, Descartes opta pela parábola (para classificar as regras das equações) por considerar a sua causa mais simples. Descartes:

[221] Cf. JULLIEN, 1996, p. 115.
[222] Cf. JULLIEN, 1996, p. 115.
[223] *La Geometrie* (AT, VI,464).

> Uma vez assegurado que o problema proposto é um sólido, quer porque a sua equação chega ao quadrado do quadrado, ou não atinge mais que o cubo, podemos sempre encontrar a raiz por meio de uma das três secções cônicas, ou ainda por alguma parte de umas delas, por menor que seja, sem, na construção, empregar mais que linhas retas e círculos. Mas me contento neste momento a apenas fornecer uma regra geral para as encontrar todas por meio de uma parábola, pois a causa desta é de certo modo a mais simples. [224]

A equação da parábola é proposta da maneira mais simples possível: $z^4 = apz^2 + qz + r$, para a quarta dimensão ou: $z^3 = pz + q$, para a terceira dimensão. O sinal dos coeficientes depende da orientação dos comprimentos representados. Os diversos casos vão, por isso, ser reportados ao estudo da intersecção de uma parábola. [225] Considerando-se, então, a equação:

$$z^4 - pz^2 + qz - r = 0$$

Pode-se conjecturar que p e r são as quantidades positivas, q uma quantidade designada por um sinal negativo e que a equação possua duas raízes. Os outros casos são obtidos de maneira exatamente semelhante. Optando-se por uma quantidade a = 1, de modo que se possa igualmente escrever: $z^4 = apz^2 - a^2qz + a^3r$

Conjecturando-se a parábola nos pontos FAG, em que o *latus rectum* (distância entre o centro e a diretriz) é igual a: $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ (ver figura 21) constata-se, pois, que KG é a raiz positiva e LF a raiz negativa. A partir de C é situada à distância $\frac{a}{4} = \frac{1}{4}$ sobre o eixo da direção AC, e, assim, adquire-se: $CC' = \frac{1}{4}$ e $C'D = \frac{p}{2}$

Com isso, descobre-se que as propriedades da parábola se reportam a tangente AZ e seu eixo a AX. Por isso é necessário calcular: $AK = KG^2 = z^2 \,.\, 2 \,.\, \frac{a}{2} = z^2$

$AK - AC - CC' - C'D = DK = z^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$ e $DK^2 = z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}$

Em D é necessário demarcar a perpendicular ED em relação ao eixo AX. Logo, $ED = \frac{q}{2}$

Prolonga-se GK para constituir o retângulo EDKM. Então: $GM = z + \frac{1}{2}q$,

---

[224] *La Geometrie* (AT, VI,464).

[225] Jullien relata que: "Seja uma parábola de ápice A, de eixo (AC) e de parâmetro 1. Traça-se um ponto D sobre o eixo, de tal modo que AD=1\2 (*p+1*). Opta-se por uma direção positiva, perpendicular ao eixo, e seguindo essa direção traça-se a partir de D, o segmento DE, de tal modo que DE=*1*\2*q*. A intersecção deste círculo e desta parábola determina os pontos cuja ordenada é a raiz da equação". JULLIEN, 1996, p. 117.

$GM^2 = z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2$

$GE^2 = GM^2 + EM^2 = GM^2 + DK^2 = z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$

De outro modo: $EA^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right) 2 + \left(\frac{1}{2}\right) 2 = \frac{1}{4} + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$

Sobre o prolongamento de EA e a partir desta direção se obtêm: $AS = a = I$; portanto, através da direção inversa de A, obtém-se: $AR = r$. Deve-se traçar a circunferência do diâmetro RS. Nesta perspectiva, se demarca em A a perpendicular ES; portanto, no exterior da parábola. Corta-se a circunferência no ponto H. Então, obtém-se: $HA^2 = AS \,.\, AR = r$

e $EH^2 = HA^2 + EA^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$

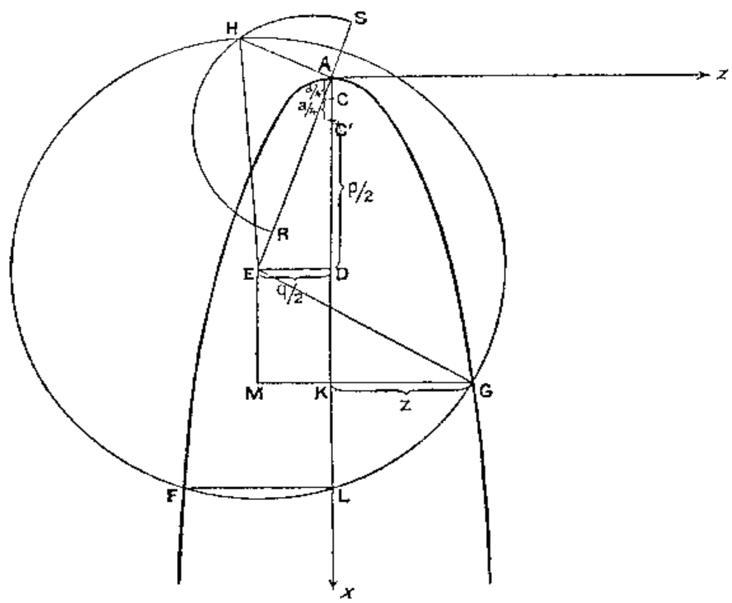


Figura 21(VUILLEMIN, 1960, p. 173)

Ao traçar a circunferência do raio EH, se corta a parábola no ponto G da abscissa z, e, assim, se constata simultaneamente EH = EG. Desse modo, a equação da parábola é a mesma que a do círculo: [226] $z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + r$

ou:

$z^4 - pz^2 + qz - r = 0.$

[226] Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 172-173.

1.3.3. A explicação cartesiana da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo

De acordo com Shea, os antigos geômetras deixaram à posteridade três celebres problemas, a saber, (1) a duplicação do cubo, (2) a trissecção do ângulo e a (3) quadratura do círculo. Nesta perspectiva, Shea, assinala que quando Descartes tinha apenas vinte e dois anos de idade, encontrou a solução dos dois primeiros problemas a partir do método que inventara.[227]

Segundo Shea, [228] Hipócrates de Chios – um contemporâneo de Platão – propôs que a solução para a duplicação do cubo consistia em encontrar duas medidas proporcionais entre o comprimento do cubo e o dobro deste comprimento. Então, se a é igual ao comprimento do cubo, a^3 é igual ao cubo, $2a^3$ é igual a dimensão do cubo procurado, x é igual a primeira medida proporcional, y é igual a segunda medida proporcional, então: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, e, pelas razões compostas: $\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a}$, $\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{2a}$, $x^3 = 2a^3$.

De acordo com Shea, no caso em que é identificada duas medidas proporcionais, x e y, entre a e $2a$, viabiliza-se dobrar o cubo a^3. A partir dessa consideração, diversas soluções foram propostas na antiguidade e, Pappus, no século IV, expôs uma resposta em sua *Mathematicae Collectiones* que pode ter sido lida por Descartes. Todavia, a melhor solução dos antigos é a de Ératostene – um matemático do século III a.c. – a quem Descartes tomou emprestado o termo mensurável para designar um instrumento de compassos que inventara. Segundo Shea, o instrumento de mensurabilidade de Ératostene é constituído por três triângulos retangulares AMF, MNG e NQH removíveis, os quais são postos entre duas réguas paralelas AX e EY, ligadas por AE para formar um quadrado (ver figura 22). O interior destas réguas permitem os triângulos deslizarem uns sobre os outros: [229]

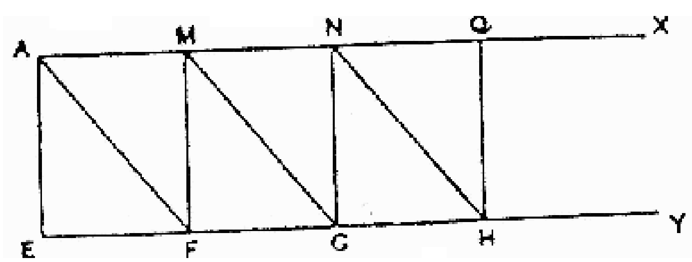


Figura 22 (SHEA, 1997, p. 531-549)

[227] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.
[228] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.
[229] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.

Procuram-se, assim, os meios proporcionais entre as duas linhas, *a* e *b*, a saber, ajustando o mensurável com intuito de que $AE = a$. Na posição inicial, os triângulos AMF, MNG e NQH estão lado à lado. Inscrevendo o ponto D sobre o lado QH, de tal modo que $DH = b$ (ver figura 23). Deslizando o triângulo MNG sobre o triângulo AMF e o triângulo NQH sobre MNG de tal modo que NQH se encontre agora em N`QH e MNG em M´NG. Em seguida se deve traçar uma linha, ligando A e D, e cortando MF em B, NG em C, e EY em K.[230]

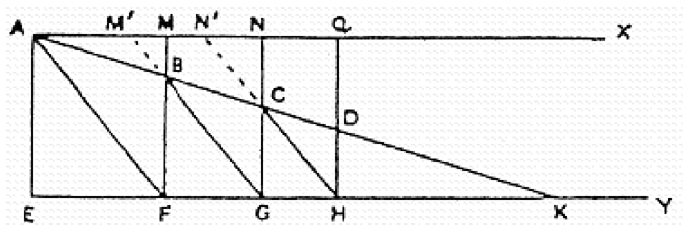


Figura 23 (SHEA, 1997, p. 531-549)

As medidas BF e CG são, por isso, os dois meios proporcionais que se devem encontrar entre as linhas dadas, a saber, *a* (= *AE*) e *b* (= *DH*).

A prova, que é simples, reside sobre a seguinte constatação: os triângulos AEK, BFK e CGK são semelhantes, portanto: $\frac{EK}{KP} = \frac{AK}{KB} = \frac{FK}{KG}$

e:

$\frac{EK}{KP} = \frac{AE}{BF}$ e, ainda:

$\frac{FK}{KG} = \frac{BF}{CG}$, de onde: $\frac{AE}{BF} = \frac{BF}{CG}$

e, do mesmo modo: $\frac{BF}{CG} = \frac{CG}{DH}$.

Assim: AE, BF, CG e DH estão em proporção contínua e BF e CG são as duas medidas proporcionais. [231] Diante disso, Shea acrescenta que embora Descartes se inspire nos triângulos removíveis de Ératostene, em muito se diferencia deste antigo geômetra, ao modificar profundamente a estrutura proposta. [232] Nesta perspectiva é que Shea remonta o percurso realizado por Descartes para elaborar o “instrumento mensurável”. Para isso, veja o que o próprio Descartes diz no Livro III da *Geometria*:

> Não creio, por exemplo, que haja algum modo mais fácil de encontrar quaisquer meios proporcionais que se desejem, nem cuja demonstração seja mais evidente,

[230]Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.
[231]Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.
[232]Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.

que empregar as linhas curvas que se traçam com o instrumento XYZ, explicado anteriormente (ver figura 24). Assim, querendo encontrar dois meios proporcionais entre YA e YE, é suficiente traçar um círculo cujo diâmetro seja YE; e como este círculo corta a curva AD no ponto D, YD é então um dos meios proporcionais procurados. A demonstração torna-se muito clara e evidente, assim que o instrumento for aplicado sobre a linha YD; pois como YA, ou YB que lhe é igual, está para YC assim como YC está para YD, ou YD está para YE. Do mesmo modo, para encontrar quatro medidas proporcionais entre YA e YG, ou para encontrar seis entre YA e YN, é suficiente traçar o círculo YFG, que cortando AF no ponto F determina a linha reta YF, que é uma destes quatros proporcionais; ou o círculo YHN, que cortando AH no ponto H, determina YH, uma das seis proporcionais; e assim para as outras. Mas, como a linha curva AD é da segunda classe, e se pode encontrar medidas proporcionais mediante as secções cônicas, que são do primeiro; e também como se pode encontrar quatro ou seis medidas proporcionais por meio das linhas que não são de uma classe tão elevada como o são AF e AH, seria um erro empregá-las em Geometria. E é um erro também, por outro lado, trabalhar inutilmente querendo construir algum problema mediante uma classe de linhas mais simples do que sua natureza permite. [233]

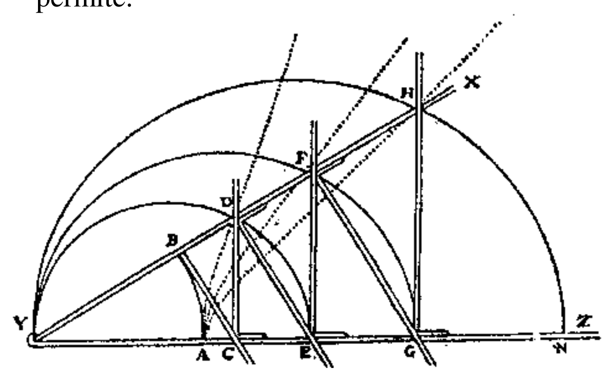


Figura 24 (AT,VI, 443)

Nota-se, primeiramente que as réguas não são mais dispostas em quadrados, mas em um compasso XYZ. [234] A régua BC é fixada sobre a reta XY. Nesta reta a régua forma um ângulo reto. A partir da reta BG sucedem uma série de movimentos dos esquadros na forma de L. Constata-se também que DE e FG formam igualmente um ângulo reto com XY, enquanto que CD, EF e GH formam um ângulo reto com YZ. Descartes entende que todos esses esquadros podem deslizar no interior da reta do compasso. É assim que quando se abre o compasso,

[233]*La Geometrie* (AT,VI, 442-444). Jullien relata que o *mesolabum* ou *instrumento de proporções* foi conhecido e exposto por Descartes nas *Cogitationes privatae* (1619-1620). Nas *Cogitationes Privatae*, o instrumento permite a construção da raiz da equação cúbica: $x^3 = x + 2$. Esta importante solução é, entretanto particular. Descartes não pode generalizar o resultado a equação $x^3 = ax + b$. O principio de funcionamento deste instrumento é claramente identificado: trata-se de inserir meios proporcionais entre duas grandezas fixas. Este instrumento tem três funções que permeiam o pensamento geométrico cartesiano. A primeira função permite a intersecção e a construção de meios proporcionais entre grandezas. A segunda função fornece a resolução das equações. A terceira função prescreve uma ordem de composição das curvas, conhecida pela inteligibilidade da construção geométrica. Cf. JULLIEN, 1996, p. 90-92.

[234]Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 442).

constata-se que, BC empurra DC ao longo de YZ, DC empurra, por sua vez, DE ao longo de XY e, assim, sucessivamente.

Descartes descreve as curvas do "instrumento mensurável" com base em seus cálculos algébricos. Tal descrição leva-lhe a considerar o "instrumento mensurável" como um "verdadeiro instrumento de proporções" (ver figura 25). Descartes consagra, assim, a resolução da duplicação do cubo a partir da identificação de dois meios proporcionais:

> No caso em que se quer, seguindo esta regra, encontrar dois meios proporcionais entre as linhas a e q, sabe-se que designando z a uma delas teremos: $a / z = z$ está para zz/a, e zz/a e zz/a à z^3/aa, de modo que haja a equação entre q e z^3/aa, e designadamente: $z^3 = **aaq$. E estando a parábola FGA traçada com a parte de seu eixo AC que é $\frac{1}{2}a$, a metade de seu *latus rectum*, deve pelo ponto C, tirar a perpendicular CE, igual a $\frac{1}{2}q$, e do centro E, por A, descrevendo o círculo AF, encontra-se FL e LA, para os meios proporcionais procuradas. [235]

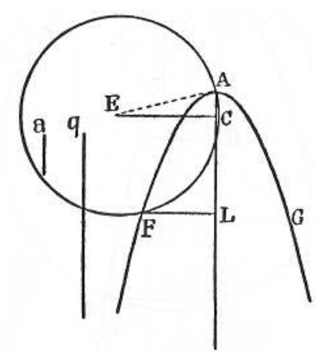


Figura 25 (AT,VI, 469)

Admite-se, assim, que o instrumento de Ératostene ficara largamente ultrapassado: o jovem Descartes havia superado o antigo geômetra. [236]

De acordo com Shea, Descartes não se contentou em duplicar o cubo e, diante disso, se dispôs a resolver o segundo problema: a trissecção do ângulo. [237] Descartes encontrou a solução entre 20 e 26 de março de 1619, data que informa a Beeckman sobre o seu sucesso. Como o primeiro compasso para produzir os meios proporcionais, o novo instrumento é fácil de construir e manejar. As quatro retas, AB, AC, AD e AE, podem girar em A (ver figura 26). Os pontos F, I, K e L são equidistantes de A, por isso: AF = AI = AK = AL. As varas FG, GK, IH, e LH, de

[235] *La Geometrie* (AT, VI, 469-470).
[236] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549. Shea segue nestes comentários os argumentos de Descartes estabelecidos nas *Cogitationes Privatae*. Vide *Cogitationes Privatae* (AT, X, 240-241).
[237] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.

mesmo comprimento que AF, são ligadas aos pontos F, I, K e L em volta dos quais as varas podem virar. Estas varas são dispostas assim, de modo que G possa deslizar ao longo da reta AC e H ao longo da reta AD. [238]

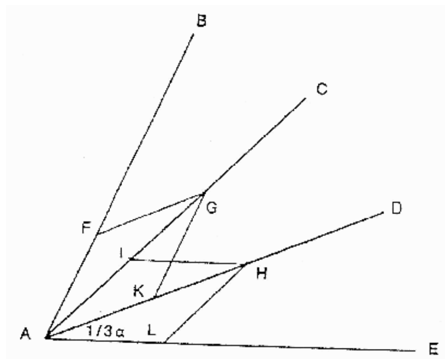


Figura 26 (SHEA, 1997, p. 531-549)

Para trissecar um ângulo dado α, deve-se abrir o compasso até que o ângulo BAE = α. Uma vez que os triângulos AFG, AKG, AIH e ALH são sempre iguais, os ângulos correspondentes FAC, GAD e DAE o são iguais, seja qualquer o comprimento do ângulo BAE (ver figura 27). A trissecção do ângulo é certificada de uma grande simplicidade, em virtude da aplicação do novo compasso. [239] Diante disso, Descartes propõe uma variante: traça-se a curva MN que é produzida pela abertura do compasso. Do ponto F, deve-se traçar um circulo de raio AF, que corta esta curva em G. Em seguida, torna-se necessário tomar A e G, que dividirá o ângulo BAE na relação 2:1. O ângulo FAC será então 1:3 do ângulo BAE.

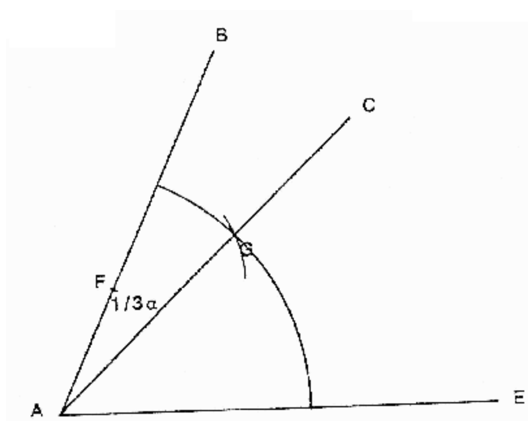


Figura 27 (SHEA, 1997, p. 531-549)

[238] Descartes descreve nas *Cogitationes Privatae* a demonstração da trissecção do ângulo. Primeiramente, Descartes determina *nα* igual à *af*. Diante disso, constata que ao redor do ponto *n,* sendo traçada a parte do círculo *θδο*, demonstra-se que *nθ* é exatamente igual a *fg*. Desse modo, Descartes afirma que a linha *αδ* divide o ângulo em três partes iguais.Cf. *Cogitationes Privatae* (AT, X, 241).
[239] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.

Descartes acrescenta que a adição de uma ou de várias outras réguas permite dividir o ângulo em quatro partes ou, em quantas partes se desejar. Se o primeiro instrumento era capaz de engendrar uma infinidade de meios proporcionais, o segundo é designado como uma autêntica máquina de divisões. [240] Descartes consagra, assim, a resolução da trissecção do ângulo no Livro III da *Geometria*. [241] Segue Descartes:

> Do mesmo modo, no caso em que se deseja dividir o ângulo NOP [ver figura 28], ou o arco ou a parte do círculo NQTP, em três partes iguais, fazendo NO = 1 para o raio do círculo e $NP = q$ para a corda do arco dado, e $NQ = z$ para a corda da terça parte deste arco, teremos a equação: $z^3 = *3z - q$; pois tendo traçado as linhas NQ, OQ, OT e fazendo QS paralela a TO, vemos que, NO está para NQ, como NQ a QR, e QR a RS; de modo que NO sendo 1 e NQ sendo z, QR é zz, e RS é z^3. E como falta tão somente RS, ou z^3, para que a linha NP, que é q, seja tripla de NQ, ou z, se obtém assim; $q = 3z - z^3$ ou $z^3 = * 3z - q$. Traçada a parábola FAG, e sendo CA = $\frac{1}{2}$ a metade do seu *latus rectum*, se tomarmos $CD = \frac{3}{2}$ e a perpendicular DE = $\frac{1}{2}q$, e se do centro E, pelo ponto A, descrevemos o círculo FAgG, ele corta a parábola nos três pontos F, g, G, sem contar o ponto A que é o vértice. Isto mostra que a equação tem três raízes, a saber, as duas GK e gk que são verdadeiras e uma terceira falsa, que é FL. E das duas verdadeiras é gK a menor, ou seja, a que deve ser tomada para a linha procurada NQ. Pois a outra GK é igual à NV, a corda da terça parte do arco NVP, que com o outro arco NQP completa o círculo. E a falsa, FL, é igual à soma destas duas, QN e NV […]. [242]

---

[240] Cf. SHEA, 1997, p. 531-549.

[241] Cf. *La Geometrie* (AT,VI, 470).

[242] *La Geometrie* (AT,VI, 470). Vuillemin relata para a construção da trissecção do ângulo que a formação da equação é a seguinte: seja os ângulos NOQ = QOT = TOP. Traça-se a paralela QS de raio TO. O ângulo QNS = QNP intercepta o mesmo arco QP. O ângulo de centro POQ = 2 NO intercepta o mesmo arco. Logo: QNS = NOQ. Para a construção, o ângulo SQR é igual ao ângulo QOT. De outro modo, QRS = 2dr – (SQR+QRS) = 2 dr – (QNS+QRS) = NQR. Os três triângulos (ONQ), (NQR) e (QRS) são, por isso, semelhantes. O primeiro dentre tais triângulos é isósceles. Os dois outros são também: NO/NQ = NQ/QR = QR/RS. Essa é uma ilustração geométrica de uma proporção dupla e continua. Coloca-se: NO = 1, NQ = z e NP = q. Tem-se: QR = z^2 e SR = z^3. Mas: NP = (NR+MP) + RM = 2 NR+MR, uma vez que os triângulos (ONQ) e (OPT) são iguais, e do mesmo modo (PMT) com (NRQ). Além disso, (NQR) é isósceles e SQ estaria, pela construção, paralela a MT: NR=NQ e QT=SM. Logo: NP=2 NQ+SM – SR=2NQ+QT – SR=3 NQ – SR e: $q=3z - z^3$ ou: $z^3=3z - q$. Conjectura-se construída a parábola FAgG, na distância entre o ponto C e o cume é igual a metade do raio do círculo O, tomado como unidade. AC=NO/2=1/2. A partir de C sobre o eixo da parábola e na mesma direção, obtém-se: CD = 3/2 e AD = 2. Todos os pontos da parábola são verificados: $z^2=x$. Do ponto E tomado como centro, traça-se a circunferência de raio EA. O ponto mais elevado *g* é que determina por sua intersecção com a parte positiva da parábola é o ponto procurado e que se deve calcular: kg = z = NQ. Fazendo o retângulo kDES, tem: $Eg^2 = ES^2 + Sg^2 = kD^2 + (z+1/2.\ q)^2 = (AD - Ak)^2 + (z+1/2.q)^2 = (2 - z^2)^2 +(z+1/2.q)^2 = z^4 - 3z^2+qz+1/4.q^2+4$. De outra parte: $Eg^2 = EA^2 = AD^2 + ED^2 = 4+1/4.q^2$. Logo: $z^4 - 3z^2+qz+1/4.q^2+4=4+1/q^2$ ou, $z(z^3 - 3z+q) = 0$. A equação do quarto grau reduzível ao terceiro grau (pela raiz z=0, correspondente ao ponto A), et: $z^3=3z - q$. Quanto às relações recíprocas entre as três raízes $kg = z$, $KG = y$ e $FL = v$, são descritas da seguinte maneira: $Eg^2 = z^4 - 3 . z^2 + qz + q^2 / 4 + 4$. Do mesmo modo: $EG^2 = (ES_1)^2 + S_1G^2 = (y^2 - 2)^2 + (y + q / 2)^2 = y^4 - 3 . y^2 + qy + q^2 / 4 + 4$. E: $EF^2 = ES_2 + S_2F^2 = (v^2 - 2)^2 + (v - q / 2)^2 = v^4 - 3 . v^2 - qv + q^2 / 4 + 4$. Ora: $Eg = EG = EF = EA$. Com isso: $Eg^2 = EG^2 = EF^2 = EA^2 = AD^2 + ED^2 = q^2 / 4 + 4$. De tal sorte que as três igualdades precedentes se reduzam as seguintes: $4 . z^2 = z^4 + qz + z^2 + [q^2 / 4 + 4 - Eg^2] = z^4 + qz + z^2$,ou: $4 = z^3 + q + z / z$, e do mesmo modo: $4 = y^3 + q + y / y$ e $4 = v^3 - q + v / v$. De onde se obtém: $z^3 + q + z / z = y^3 + q +y / y$, ou $z^3 . y - y^3 . z = qz - qy$, e $q =z^2 . y + y^2$. E do mesmo modo: $z^3 + q + z / z = v^3 - q + v / v$, ou $v^3 . z - vz^3 = vq + qz$

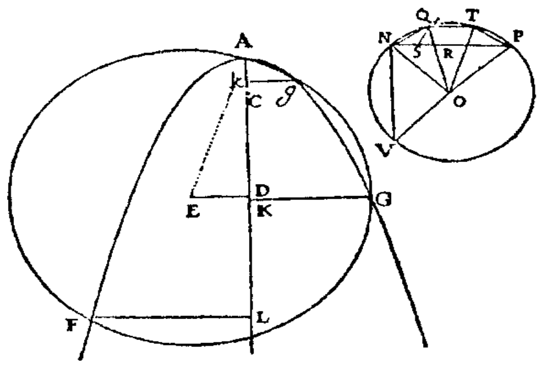


Figura 28 (AT,VI, 470-471)

Constata-se, assim, que a resolução cartesiana da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo segue o mesmo parâmetro de raciocínio que constitui a teoria das proporções de Descartes. Admite-se, portanto, que quando Descartes se propôs a fornecer explicações a tais problemas geométricos, pretendia, sobretudo, evidenciar a proeza da invenção do seu método em detrimento das exigências especulativas contempladas nas resoluções dos problemas matemáticos dos antigos geômetras. Diante disso, sustenta-se aqui que Descartes consolida o *modus operandi* do método que inventara a partir de uma lógica matemática que cultiva a razão, o que lhe viabiliza orientar às suas investigações científicas. Por isso, Descartes conclui:

> Mas não é minha finalidade escrever um grande livro. [...] Ao propor a uma única construção todos os problemas de uma classe, constatou-se que, eu ao mesmo tempo concebi um método de os transformarem em uma infinidade de outros e resolvi por esse mesmo método cada um em um número infinito de diversas maneiras; além disso, construindo todos os problemas planos pelo corte de um círculo ou por uma linha reta, e todos os problemas que são sólidos pelo corte de um círculo por uma parábola; e, finalmente, todos que são de um grau mais complexo cortando um círculo por uma curva com um grau mais elevado do que a parábola, seguindo o mesmo método para construir todos os problemas, mais e mais complexos, etc,. No exemplo de uma progressão matemática, sempre que os primeiros dois ou três termos são dados, será fácil encontrar o seu resultado. Eu espero que a posteridade me julgue amavelmente, não apenas a respeito das coisas que eu expliquei, mas também a respeito daquelas que eu omiti intencionalmente para deixar a outro o prazer da invenção. [243]

$e\ q = v^2 . z - vz^2$. Logo: $z^2 . y + y^2 . z = v^2 . z - vz^2$, $(v^2 - y^2) . z = z^2 . (v + y)$, $z = v - y$, ou $v = z + y$, ou geometricamente:$FL = KG + kg$. [...] Como, nota-se na ultima equação: $z^3 = pz - q$ é o caso geral que corresponde a $v^3 = 3v - q$. Para resolver esta equação geral, Ferrari, começa propondo o resultado: $v = z + y$. Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 176-178.

[243] *La Geometrie* (A T,VI,485). É interessante observar que na obra *Sur l´ontologie grise de Descartes*, Marion alega que a ciência produtora de universal certeza, chama-lhe Descartes: *Mathesis universalis* (a partir da matematicidade, não matemática das matemáticas) ou método geral (a partir da produção da certeza). Ora, acontece que a

Nesta conclusão, Descartes convida o leitor da *Geometria* a inteligir a lógica que opera o método que inventara e a descobrir, por si próprio, as soluções dos problemas matemáticos. O prazer da invenção é, portanto, a característica epistemológica mais relevante do *modus operandi* do método cartesiano, pois evidencia a verdadeira intenção dos raciocínios matemáticos de Descartes, a saber, o cultivo da razão e, consequentemente, a sua regulamentação por meio de parâmetros precisos e exatos.

apresentação que Descartes faz na regra IV encerra uma surpreendente semelhança com alguns textos de Aristóteles. Por exemplo, os *Analíticos* apresentam um tipo de demonstração que abstrai de certas matérias a seguinte concepção: "que a proporção possa também converter-se em números, linhas sólidos ou tempos, e isso não impede que o mostremos numa só demonstração válida para todos": A *teoria das proporções* (exemplo privilegiado do método, nas *Regulae*) e que esta teoria pode desenvolver-se em perfeita independência dos objetos particulares da sua universal validade, isso porque, ela admite a universalidade. Aqui, isso é exposto universalmente, porque não é enquanto linhas, ou números, mas na medida em que têm o que é conjecturado que tenham universalmente nelas. Mas surpreendentemente, para Marion, nem por isso Aristóteles conclui que a ciência das proporções se possa qualificar de universal, mas, ao contrário, deixa-a num rigoroso anonimato. No entanto, para Descartes parece evidente que a teoria das proporções abre caminho a um modo de ciência universal; mas alguns antes de Descartes já o tinham compreendido, e, por que o silencia? Segundo Marion, porque Aristóteles se fundamentava na impossibilidade de uma denominação para justificar essa lacuna teórica. Cf. MARION, 1975, p. 62.

CAPÍTULO II

Corpus científico cartesiano

Nas cartas datadas de 1 de março, 27 de maio, 27 de julho, 23 de agosto e 11 de outubro de 1638, Descartes tem por objetivo explicar a determinação de propriedades analíticas com base em sua teoria das proporções, e, a partir disso, combater as críticas feitas por Fermat (e outros autores) em relação à legitimidade da aplicação de suas demonstrações geométricas nas ciências.

Desde meados de maio de 1637, Fermat teve conhecimento dos conteúdos da *Dióptrica* de Descartes. Tratando especificamente da refração, Fermat declara duvidar "se a inclinação para o movimento deve seguir as leis do próprio movimento" [244] e, assim, recusa-se a admitir o raciocínio de Descartes como uma "prova legítima"; pois não consegue compreender em tais explicações a diferenciação entre o que é Matemática e o que é Física. [245] Quando Descartes recebeu essa crítica, alegou que Fermat deveria ter lido antes a sua *Geometria*. Nesta perspectiva, Descartes envia a Mersenne a sua defesa, para que essa seja comunicada a Fermat. Todavia, mesmo ainda antes de ter lido a *Geometria*, Fermat rebate essa defesa ao identificar vários equívocos acerca da determinação dos ângulos de reflexão e refração, e alegando que poderia encontrar a resolução de tais problemas a partir da determinação das tangentes de todas as linhas.[246] Descartes tem notícia dessa nova crítica de Fermat, e relata a Mersenne que a solução desse matemático compara-se às comédias italianas. [247] Em seguida, Descartes pormenoriza a Huygens uma crítica a Fermat, apontando no argumento de Fermat o grave problema lógico do paralogismo. [248] No decorrer desse debate, seguem-se longas cartas a Mersenne, as quais tratam de questões matemáticas que mereciam um estudo específico. Dentre essas questões, destaca-se a crítica que Descartes faz à defesa do escrito de Fermat sobre as tangentes, realizada por Roberval e Étienne Pascal. [249] Como desdobramento dessa crítica, Descartes explica a aquisição da tangente por meio de sua teoria das proporções. Na descrição do movimento mecânico da roleta, Descartes, por exemplo, mostra a eficácia da sua teoria das proporções.

[244] *Correspondance* (AT, I, 357-358).
[245] Cf. *Correspondance* (AT, I, 357-358).
[246] Cf. *Correspondance* (AT, I, 464- 474).
[247] Cf. *Correspondance* (AT, I, 478- 481).
[248] Cf. *Correspondance* (AT, II, 49). É interessante notar que no *Discurso* Descartes alega que há homens que cometem paralogismos mesmo nos mais simples raciocínios matemáticos. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 32).
[249] Cf. *Correspondance* (AT, II, 11-12).

2.1. O meio matemático que viabiliza a aplicação do método

Pretende-se agora examinar o modo como Descartes, a partir da sua teoria das proporções, explica a descrição do movimento mecânico da roleta. É, pois, o que permite a Descartes encontrar uma demonstração geométrica direcionada à explicação do movimento mecânico da roleta. Para realizar essa descrição, primeiramente, ele evidencia quais são as propriedades desta curva que possibilitam uma demonstração geométrica. Em seguida, ele demonstra – por meio da regularidade proporcional do movimento geométrico – que a construção matemática da roleta é viável para a compreensão mecânica do seu movimento. A explicação da descrição mecânica da roleta, portanto, mostra a Descartes que a sua teoria das proporções é o meio matemático que viabiliza a aplicação do método nas ciências.

Na carta datada de 27 de maio de 1638, Descartes tem por objetivo examinar a possibilidade de a roleta ser descrita por movimento regulares mediante a inteligibilidade analítica concebida pelo cálculo algébrico da normal e pela medida da proporção geométrica da tangente. O movimento regular designa que a descrição é inteligível e, portanto, apta para aplicação à ciência mecânica. Segundo Descartes, a descrição da roleta consiste: "em demonstrar o espaço compreendido por uma linha curva, descrito por um ponto da circunferência de um círculo, quando este se move sobre um plano". [250]

Para tornar a descrição da roleta possível, Descartes, primeiramente, deve determinar uma propriedade analítica. Segue o modo como Descartes determina tal propriedade. Seja os pontos AC a reta do plano (ver figura 29), sendo os pontos ADC a linha curva elaborada e BD os pontos médios. [251] Então, a partir do ponto A, se deve traçar por meio de um ponto da circunferência – que insere os pontos STVX – o movimento da reta até o ponto C. Portanto, a distância entre os pontos AC é igual ao comprimento da circunferência. Então, a partir dos pontos A e C, Descartes dividi a linha reta em diversos pontos: B, G, H, N, O, P, Q, etc. Assim se torna claro para ele que B e D são os pontos perpendiculares; logo, BD é igual ao diâmetro do círculo. Diante disso, Descartes determina a normal na roleta passando por um ponto de contato do círculo. A partir desta propriedade analítica (algébrica), ele designa que a área do triângulo retilíneo dos pontos ADC é o dobro da área do círculo. Após essa explicação é necessário

[250] Cf. *Correspondance* (AT, II, 135).
[251] Cf. *Correspondance* (AT, II, 135).

determinar em E o ponto de intersecção do círculo com a curva. Diante disso, ele constata o círculo no ponto G e admite F como o ponto procurado. Isso porque a medida do ponto G lhe permite analisar o ponto procurado. A partir desta medida, Descartes constata também que o círculo é identificado na base H e os dois triângulos retilíneos são identificados nos pontos AED e DFC. Tais pontos são concebidos de maneira evidente porque são iguais ao quadrado STVX inscritos no círculo. [252]

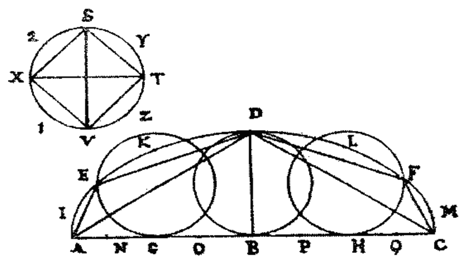


Figura 29 (AT, II, 136)

E, da mesma maneira, colocando os pontos I, K, L, M para aqueles onde o círculo toca a curva, quando ele toca sua base nos pontos N, O, P, Q, se constata que os quatro triângulos retilíneos estabelecidos nos pontos AIE, EKD, DLF e FMC são iguais aos quatro triângulos isósceles inscritos no círculo, SYT, TZV, V1X, X2S, e que os oito triângulos, inscritos na curva sobre a base destes quatro, são iguais aos oito inscritos no círculo, e, assim ao infinito. Donde se constata também que toda a área dos dois segmentos da curva, que têm por bases as linhas retas AD e DC é igual à área do círculo e, por conseguinte, que toda a área contemplada entre a curva ADC e a reta dos pontos AC é tripla à do círculo. A partir dessa medida, Descartes constata que a roleta tem uma propriedade analítica, o que lhe permite demonstrar a regularidade do movimento desta curva. Isso porque, ele identifica previamente uma equação algébrica da normal (a partir do ponto de intersecção do círculo na curva). Após determinar a normal na roleta mediante o ponto de contato do círculo na curva é necessário explicar como a roleta é demonstrada por movimentos regulares a partir da teoria das proporções de Descartes. Ressalta-se ainda que é a partir desta explicação que Descartes faz oposição a Fermat e aos seus defensores, sobretudo, quando ele trata a respeito da aquisição e da aplicação da tangente. [253]

[252] Cf. *Correspondance* (AT, II, 136).

[253] Segundo Jullien o método das tangentes foi determinante para o desenvolvimento da Matemática no século XVII. Na França, dois autores propuseram – na mesma época de Descartes – um método para descrever as tangentes, são eles Roberval e Fermat. Cf. JULLIEN, 1996, p. 104. Nesta perspectiva, Smith acrescenta que: “Pode-se utilizar o

Na carta enviada a Mersenne datada de 27 de julho de 1638, Descartes explica como é descrita a demonstração sintética do movimento da roleta. Isso ocorre porque é necessário esclarecer a regularidade da construção por meio da viabilização do método. [254] Descartes relata nesta carta que é necessário primeiramente identificar os pontos AKFGC (ver figura 30). Tal identificação expressa à metade da linha curva descrita mediante o ponto *a* da roleta *anopbz*. Na sequência, Descartes deduz que a roleta *anopbz* move-se no percurso da linha descrita nos pontos AB. Tais pontos são iguais à metade da circunferência do círculo. Logo, a medida dos pontos CB é igual ao diâmetro. Em seguida, Descartes traça a reta nos pontos AC e, assim, constata por outra dedução que as retas encontram-se nos pontos OE e DF. De acordo com Descartes, tais retas dividem os pontos AB e CB em partes iguais. [255] Diante disso, ele identifica que o ponto *o* da roleta é encontrado no ponto O da linha AB. Descartes constata também que o centro *e* é encontrado sobre o ponto E, ou AC e DF, uma vez que $CD = \frac{1}{2}$ de CB, e DE é igual à metade de BA, isto é, BO. Por isso, Descartes determina sobre EF, o raio $ea = EF$ e, assim, constata que AO é igual a $\frac{1}{4}$ da circunferência da roleta. Além disso, ele constata que os ângulos determinados nos pontos *aeo* e FEO são retos. Logo $AE = EC$.

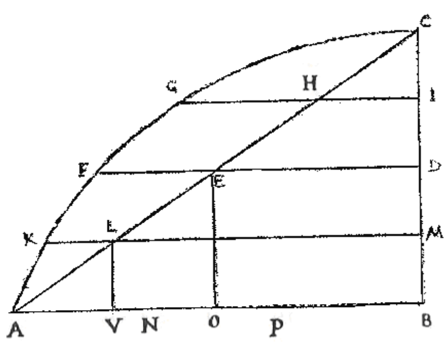


Figura 30 (AT, II, 258)

Então, seguindo essa via metódica do pensamento, se deve a partir dos pontos N e P, constatar em cada lado e na mesma distância de *O*, os pontos *n* e *p*. Diante disso, Descartes descreve o arco: $na = pb$. Assim como: $NA = PB$. Com isso, segundo Descartes é necessário traçar os diâmetros *ne* e *pe* com as perpendiculares *ay* e *ax.* [256] Diante disso, ele constata que a via sintética

---

método para traçar por um ponto dado a normal a uma curva, ou a tangente que passe por um ponto exterior à curva, ou descobrir pontos de inflexão, *máximos* e *mínimos* [...].” SMITH, 1925, op. cit., p. 112.

[254] *Carta* de Desscartes a Mersenne. Cf. *Correspondance* (AT, II, 253-277).

[255] Cf. *Correspondance* Cf. (AT, II, 257).

[256] Cf. *Correspondance* (AT, II, 258).

permite a operação de uma cadeia de deduções por meio das relações/ proporções matemáticas. Essa cadeia de deduções viabiliza a Descartes conceber o ponto *n* da roleta sobre o ponto N na reta AB. Por isso, o ponto em *a* é encontrado em K. Disto é deduzido que dos pontos K e M haverá uma linha paralela em relação à BA. Portanto: $KM = NB + ay$ e $MD = ye$. [257] Do mesmo modo, Descartes considera o ponto *p* a partir do ponto P na reta AB.[258] Para essa explicação, ele descreve o seguinte esclarecimento matemático: como o ponto *a* está em *G* e $GI = PB + ax$ e $ID = xe$, se constata que $GI + KM = AB + az$. Uma vez que $ax + ay = az$ e $NB + PB = AB$, se constata que $NA = PB$ (ver figura 31). Como se segue, $LM + HI = AB$; pois $MB = CI$. Isto resulta na paralela à MB. Calcula-se: LV = CI e $HI = AV$.

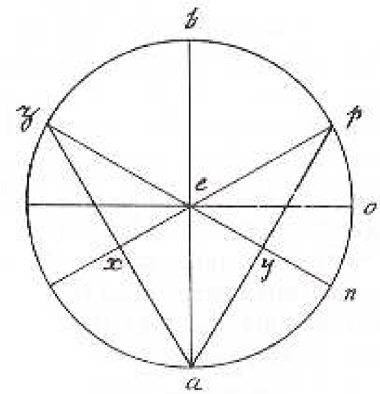


Figura 31 (AT, II, 259)

Portanto, os triângulos identificados nos pontos AVL e HIC são semelhantes. Essa medida permite a Descartes examinar o semelhante segundo a fórmula calculável da identidade. Assim, obtém-se: $LM = VB$. Ora, como $LM + HI = AB$ e $KM + GI = AB + az$, segue-se que $KL+GH = az$; pois *az* é identificado na mesma distância de *e*; da mesma maneira que KL e GH são identificados na mesma distância de FE. E porque os pontos N e P foram admitidos aleatoriamente a partir de uma mesma distância de O, se torna evidente que os pontos KL e GH estejam na mesma distância dos pontos que condizem a FE. Desse modo é válida a construção para todo par de retas traçadas entre a reta AC e a curva AFC, isto é, desde que sejam paralelas aos pontos FE. Isso porque tais pontos são determinados a partir da proporção geométrica. Com isso, constata-se que todo par de retas é igual à reta inscrita da roleta, isto é, estando cada uma destas retas tão distantes dos pontos FE quão essa reta está do centro em E.[259]

[257] Cf. *Correspondance* (AT, II, 258-259).
[258] Cf. *Correspondance* (AT, II, 259).
[259] Cf. *Correspondance* (AT, II, 259- 260).

Descartes[260] ainda relata que é necessário traçar sobre a reta $\alpha\beta\varphi\omega$, o semicírculo $\alpha\delta\beta$, igual à metade da roleta. Na figura $\varphi\gamma\chi\psi\omega$ cuja parte $\varphi\gamma\chi\theta\varepsilon$ é igual à FGCHE e a outra parte $\varepsilon\theta\chi\psi\omega$ é igual à ELAKF. De acordo com Descartes é necessário ainda que as bases e as alturas destas figuras sejam proporcionais; assim como todo par de segmentos de reta seja paralela à base. Com isso, se constata que a área da figura $\varphi\chi\omega$ é igual à do semicírculo $\alpha\delta\beta$, pois as duas figuras possuem áreas proporcionais. Estas figuras têm a mesma base e a mesma altura em cujas retas paralelas e equidistantes – em relação à base – são interiores a cada uma delas. Logo, são estabelecidas igualmente. Todavia, para Descartes essa expressão matemática pode não ser facilmente entendida, e, em virtude disso, é necessária ainda uma demonstração sintética. Diante disso, ele diz que traçando as retas δa, $\delta\beta$ $x\varphi$, $x\omega$ (ver figura 32), se constata que, os triângulos $\varphi x\omega$ e $a\delta\beta$ são proporcionais, pois, se nota que estes triângulos têm a mesma base e a mesma altura. [261]

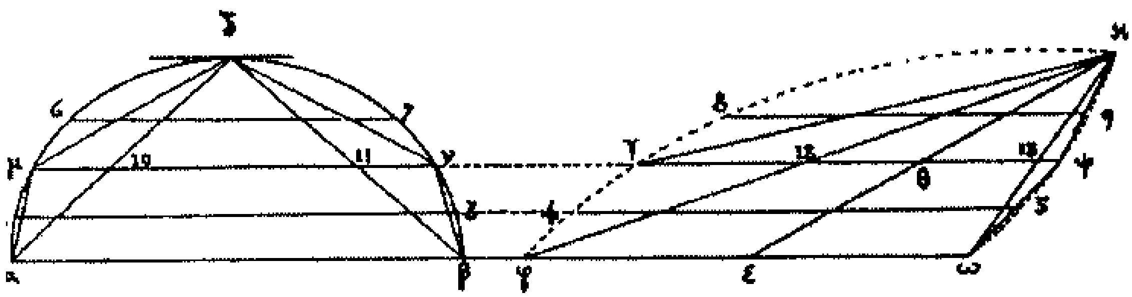


Figura 32 (AT, II, 261)

Com isso, Descartes designa o mesmo para os triângulos $\gamma\chi\varphi$ e $\psi\chi\omega$. Para tanto, ele traça as retas: μa, $\mu\delta$, $\upsilon\delta$, $\upsilon\beta$, $\gamma\chi$, $\gamma\varphi$, $\psi\chi$ e $\psi\omega$.

Estas retas somadas são iguais aos triângulos $\mu\delta\alpha$ e $\upsilon\delta\beta$. Calcula-se: $\varphi\omega = a\beta$, $12\ 13 = 10\ 11$.

Calcula-se: $\gamma\psi = \mu\upsilon$. Disto se constata que as bases dos triângulos $\gamma\chi\varphi$ e $\psi\chi\omega$ são iguais às dos triângulos $\mu\delta\beta$ e $\upsilon\delta\beta$, pois, $\varphi\omega$ é proporcional a $a\beta$ e $12\ 13$ é também proporcional a $10\ 11$; e porque $\gamma\psi$ são iguais a $\mu\upsilon$, 12γ mais 13ψ que são as bases dos triângulos $\gamma\chi\varphi$ e $\psi\chi\omega$, são iguais $\mu 10$ mais 11υ, que são as bases dos triângulos $\mu\delta\alpha$ e $\upsilon\delta\beta$. Descartes constata que estes 4 triângulos têm a mesma altura. O mesmo raciocínio é aplicado aos outros triângulos inscritos a partir dos pontos 4, 5, 8, 9 etc., e dos pontos 2, 3, 6, 7, etc [262]. Com isso, os triângulos da primeira

[260] Cf. *Correspondance* (AT, II, 260).
[261] Cf. *Correspondance* (AT, II, 260).
[262] Cf. *Correspondance* (AT, II, 261-262).

figura são iguais aos triângulos da segunda figura. Desse modo, a figura *φγχψω* é igual ao semicírculo *αδβ*. Ora, uma vez que o espaço é contemplado entre a reta AC e a curva AKFGC, constata-se que o espaço AFCB é o triplo do semicírculo; pois, o triângulo retilíneo é igual ao círculo inteiro [263]. Tal procedimento é empregado quando a reta AB é diferente, de maneira que o espaço compreendido entre a reta AC e a curva AFC não deixe de ser igual à metade do círculo cujo diâmetro é BC (ver figura 33). Embora a grandeza da reta contemplada nos pontos AB seja diferente, se constata de maneira semelhante que a demonstração continua a ser determinada da mesma maneira que as de outrora.

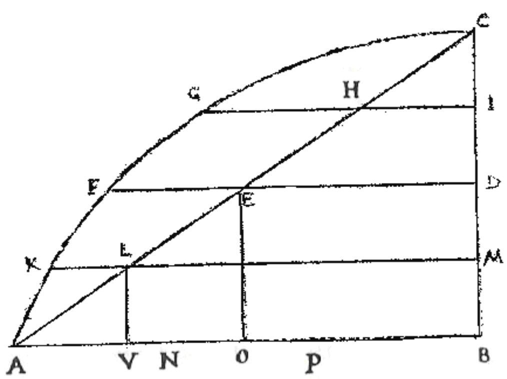


Figura 33 (AT, II, 263)

Descartes relata em uma carta datada em 23 de agosto de 1638 que se deve rolar um polígono retilíneo sobre uma linha reta. [264] A curva descrita por um dos seus pontos, qualquer que seja, será constituído de várias partes de círculos, e as tangentes de todos os pontos de cada uma das partes dos círculos cortarão em ângulos retos as linhas retiradas destes pontos em direção ao qual o polígono terá sua base descrita. Ora, mesmo considerando a roleta circular como um polígono que tem uma "infinidade lados", Descartes alega que esta curva tem um tipo de propriedade que permite a descrição do seu movimento mecânico, a saber, que as tangentes (que é um tipo de propriedade analítica) de cada um dos seus pontos – que estão na curva que ela descreve – devem cortar em ângulos retos as linhas retiradas destes pontos. Logo, os pontos identificados na curva descrita são determinados mediante as tangentes. Tal determinação é feita a partir da teoria das proporções e, diante disso, na carta datada de 11 de outubro de 1638, Descartes conclui:

[263] Cf. *Correspondance* (AT, II, 262).
[264] *Correspondance* (AT, II, 308-338).

> Fermat, por exemplo, também encontrou as tangentes da roleta [...]; mas se a explicação *analítica* e *sintética* o desagrada – motivo do porque ele não a expora – eu bem poderia ver tal explicação, para saber por que viés ele a rejeitou. [...] Eu nunca mudei o *medium* [meio] de minha demonstração da roleta, pois ela consiste na igualdade dos triângulos inscritos [...]; cabe assinalar que eu encontrei primeiramente mediante a análise; e, então, notando que ele não soube entender o cálculo, expliquei sinteticamente. Por isso, ele deve se envergonhar de ter negado a minha primeira explicação, isto é, por não saber calcular os triângulos inscritos na roleta e no círculo. Ele deve ter vergonha também de se vangloriar de que tem um *medium* [meio] para encontrar as tangentes da roleta, aplicando-o a todos os casos. [265]

Constata-se que nas cartas datadas de 1638 – as quais tratam da descrição do movimento da roleta –, Descartes tem por objetivo explicar a concepção inteligível do movimento da roleta mediante a determinação de propriedades algébricas (analíticas), e, a partir disso, expor o meio pelo qual é possível fazer uma demonstração geométrica do movimento mecânico desta curva, a saber, a sua teoria das proporções. Logo, a teoria das proporções mostra a Descartes o meio (*medium*) que permite a sistematização entre a determinação de propriedades analíticas (a normal e a tangente) e a demonstração sintética do movimento da roleta, destinada àqueles que “não souberam entender a verdadeira dimensão do cálculo analítico”. Cabe assinalar que tal demonstração ocorre mediante a identificação de movimentos regulares da curva descrita, os quais viabilizam a Descartes aplicar os raciocínios do seu método a partir de uma representação geométrica deste movimento. Nesta perspectiva, Descartes faz oposição às críticas que Fermat fez ao meio matemático que inventara e ao seu desdobramento exposto através dos resultados da *Dióptrica.*[266] Isso porque, Descartes não compreende como alguém pode refutar demonstrações tão bem fundamentadas, utilizando-se de argumentos demasiadamente frágeis e especulativos.

[265] Cf. *Correspondance* (AT, II, 394-400). De acordo com Jullien, a versão de Roberval situava-se num outro campo de investigação (a respeito da composição dos movimentos) e, por isso, não suscitou grandes polêmicas com Descartes. A versão do método de Fermat requisitava intervir nas equações extremamente pequenas, nomeadas *e*, que na etapa final do cálculo, podiam ser negligenciadas. Esta espécie de passagem limite, que era acompanhada de uma relação, não podia satisfazer àquela ordem metódica de Descartes. Por isso houve uma grande polêmica entre estes filósofos. Cf. JULLIEN, 1996, p. 104.

[266] No que diz respeito à objeção feita por Descartes a critica de Fermat, que versa sobre o desdobramento do cálculo da tangente na exposição dos resultados da *Dióptrica,* Descartes faz as seguintes considerações em uma carta datada de 27 de julho de 1638: “Por último, se a bola que está no ponto B é movida por duas forças iguais, cuja uma a leva de B em direção a D, e a outra de B em direção a C, ela deve mover-se em direção a I, de modo que o ângulo GBI seja igual à IBD; e que estando movida de B em direção a N e em direção a I, ela deve ir em direção a L que divide o ângulo NBI em duas partes iguais; estas premissas são verdadeiras, mas elas não contêm nada ao que respeita às refrações, as quais não são causadas por duas forças iguais que a bola, mas sim pelo encontro oblíquo da superfície; e, assim eu não sei por que lógica ele pretende interferir que o que eu escrevi não tenha sido verdadeiro”.

2.2. Concepção matemática do método de Descartes: debate no círculo de Mersenne

Tratar-se-á aqui do debate que Descartes realiza com os matemáticos do século XVII. Tal debate é relevante porque demarca a principal diferenciação epistemológica entre a aplicação do método de Descartes e a concepção de uma matemática aplicada – esta, no caso, adotada por seus opositores do século XVII, sobretudo, quando se trata do cálculo dos máximos e mínimos de Fermat. Após a exposição do debate, é explicado o modo como os "preceitos lógicos" conferem "ordem das razões" à aplicação do método cartesiano nas ciências particulares.

Na carta datada de 11 de outubro de 1638, Descartes evidencia o meio pelo qual utiliza para encontrar a tangente mediante uma construção geométrica. Tal meio se refere à sua teoria das proporções (teoria concebida pela sistematização dos raciocínios de ordem e medida). Numa outra carta, Mersenne faz críticas a Descartes ao alegar que a determinação da tangente havia sido descrita de maneira mais didática por Fermart e Roberval.[267] Pretende-se agora esclarecer a

---

Correspondance (AT, II, 264). Esse relato de Descartes indica que Fermat não havia compreendido a diferença que há entre o cálculo que prescreve a demonstração da lei dos senos e a efetiva justificação científica do movimento de refração da luz. Tal diferenciação requer o esclarecimento da distinção entre o campo de investigação da matemática (objetos simples) e o da física (objetos naturais). A investigação matemática trata especificamente de como a lei é descoberta e demonstrada geometricamente. De maneira diferente, a investigação física pretende apenas justificar por meio de hipóteses, analogias e experimentos, a representação matemática do fenômeno físico.

[267] Nesta perspectiva, Mersenne no Livro VI do *Harmonie Universelle,* relata que: "Forneço nesta obra o procedimento geométrico que constrói as *medidas proporcionais* que são baseadas na natureza da parábola. Este procedimento fora descoberto por um dos melhores espíritos e cuja modéstia é tão grande que não deseja que se publique o seu nome". MERSENNE, 1636, p. 407. No *Harmonicorum Intrumentorum* Lib. IV,Prop. II, (*Harmonicorum Intrumentorum*, Paris: 1636, p.146-147). Mersenne expõe o método de Descartes da seguinte maneira: deve-se construir a parte AD da parábola cujo vértice A e o local do foco O em um quarto das linhas dadas, então sendo a linha m, por exemplo. Toma-se como eixo da parábola $BA = 1/2m$, e a partir de B se constrói $BC=1/2n$, perpendicular ao eixo. Desse modo com o centro em C, se constrói o círculo de raio AC que corta a parábola em D, e assim se desenha DI perpendicular ao eixo. Portanto DI será a maior configuração das medidas proporcionais, e AI a menor. Donde se espera a demonstração acompanhada muitas de outras explicações por parte do inventor. Todavia, Mersenne expõe o método com o qual fora aceito a demonstração que Descartes não fornecera, a saber, a prova ou demonstração de Roberval. Esta demonstração é explicada da seguinte maneira: Seja m, n as duas longitudes dadas entre as quais se devem fazer duas medidas proporcionais. Então se constrói AE = m e EH = n, perpendicular a AE. Divide-se AE pela metade em B, e se empreende BC=1/2EH perpendicular a AB. Com o centro em C, se traça um círculo de raio AC que passará pelo ponto H e E uma vez que AC = CH=CE. Com AE como eixo e A como vértice, se desenha a parábola AGD com AE como *latus rectum* que corta o círculo nos pontos G e D. Sendo assim se desenha DI perpendicular ao prolongamento de AE. Então DI e AI serão as duas medidas proporcionais. Sendo a prova expressa assim: $AE/DI = DI/AI = AI/EH$. MERSENNE, 1636, p. 655-657. Lenoble acrescenta que quando se trata do debate a respeito do *Discurso do método*, no início do século XVII, diversos pensadores manifestaram suas opiniões. Desde 1623, por exemplo, Mersenne tinha a ideia de que o sistema de astronomia é o modelo de máquinas mecânicas. Em 1624, Mersenne escreveu que não se podia ver a quantidade, a figura, a luz ou a cor das coisas. Em 1625, Mersenne define a Matemática como a ciência capaz de definir as condições da certeza. Nesta perspectiva, ele investiga questões matemáticas por cerca de dois anos, com o intuito de restituir a análise dos antigos geômetras. Nesse contexto, os seus primeiros contatos com Descartes datam de 1623, os quais foram determinates aos estudos matemáticos de Descartes. LENOBLE, 1971, p. 314- 315.

relevância epistemológica do debate que se originou de tais críticas mediante as explicações matemáticas dos mencionados autores (Descartes, Fermat, Roberval e outros matemáticos) que investigam a matemática e a filosofia da natureza no século XVII.

A resposta à crítica de Mersenne – nesta resposta Descartes critica o cálculo dos máximos e mínimos a partir do modo como Fermat determina a tangente – [268] é estabelecida em duas partes distintas. Tal resposta é relatada nas cartas datadas de 1 de março e 11 de outubro de 1638. Segue o debate que Descartes realiza com alguns matemáticos e físicos do século XVII. Assinala-se, pois, que a exposição de tal debate é realizada a partir das indicações feitas por Milhaud. Segundo Milhaud, na primeira parte da crítica, Descartes examina inicialmente a seguinte explicação das tangentes de Fermat: seja a parábola BDN, de maneira que a tangente seja construída mediante um traço do ponto D até ao ponto B. A partir desta medida, se constata que BE encontra o eixo em E. [269] O ponto *O* da tangente, portanto, é exterior a parábola. BC e OI são as coordenadas dos pontos B e O; logo, tem-se: $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$

[268] Fermat concebe o "cálculo dos máximos e mínimos" mediante a observação, de que em uma situação de máximo e mínimo, no alto de uma montanha ou no fundo de um vale, por exemplo, há um pequeno desvio no trajeto de um objeto e, segundo ele, isso não afeta significativamente seu comprimento. Por meio de uma generalização matemática dessa ideia física (utilizando a construção da tangente), a determinação de um máximo ou de um mínimo é realizada pelo exame do que ocorre quando a quantidade considerada A sofre uma pequena variação, ou seja, quando se soma a ela uma quantidade muito pequena *e*. Substitui-se, então, a quantidade A por A+ *e* nas expressões consideradas. Em seguida, desprezam-se os termos em que essa quantidade infinitesimal aparece em potência mais elevada, por serem muito pequenos, restando apenas os termos lineares em *e*. As expressões remanescentes, obtidas com a imposição de que a variação em torno de um valor máximo ou mínimo deve ser nula, fornecem as condições para existência do máximo ou do mínimo. Na sua dedução, Fermat, exibe, inicialmente, um exemplo mais simples, com valores particulares, para a propagação da luz, a saber, de um meio a outro. Ele mostra, com isso, que a imposição de um tempo mínimo leva a um processo refrativo na superfície de separação entre os meios. A luz, para minimizar o tempo, busca percorrer um percurso maior no meio menos denso, no qual tem maior velocidade. Inversamente, busca percorrer uma distância menor no meio mais denso. O percurso real apontado por Fermat diz respeito à articulação entre a necessidade do trajeto total percorrido ser o menor possível e essa tendência de aproveitar ao máximo o meio no qual a luz se move mais rapidamente. A partir desses pressupostos físicos, Fermat obtém a explicação da lei dos senos. Descartes, entretanto, se recusa a atribuir valor de verdade a explicação de Fermat. A crítica de Descartes diz respeito à incompreensão dos seus interlocutores, mais particularmente a de Femrat, em relação ao *modus operandi* da sua análise. Neste enfoque são seguidos os passos de Milhaud. Cf. MILHAUD, 1921, p. 150-155. Descartes relata a Mersenne numa carta datada em 29 de junho de 1638 os equívocos dos *De maximis* da óptica de Pierre Fermat. Cf. *Correspondance* (AT, II, 174- 196). Consultado por Mersenne, Fermat identifica dois possíves erros na *Dióptrica* de Descartes. Primeiramente, Fermat não se convence que a inclinação ao movimento que Descartes acredita poder explicar os ângulos de incidência e refração. As razões fornecidas por Fermat não se opõe radicalmente as de Descartes, entretanto, Descartes haveria cometido um erro ao compreender que o movimento da luz seria instatâneo e que a luz seria mais rápida na água do que no ar. Em setembro de 1637, Fermat redigiu suas considerações a Mersenne. Segundo Mersenne, Roberval demonstrou, primeiramente, que a área da roleta é tripla em relação à do círculo, quando o plano é igula à circunferência da roleta e, depois, estabeleceu a proporção, no caso do plano ser diferente.

[269] Cf. *Correspondance* (AT, II, 6).

Por meio dos triângulos semelhantes, se constata que $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE}$

Designando as dimensões CD e CE por D e A, obtém-se: CI = E. Logo: $\frac{D}{D-E} > \frac{A^2}{(A-E)^2}$

ou $D(A - E^2) > A^2 (D - E)$.

São igualados, assim, os dois membros das desigualdades. Por isso, é suprimido o termo comum $D \,.\, A^2$, donde é necessário dividir os demais termos restantes por E, e, assim, obtém-se: $D \,.\, E - 2A \,.\, D + A^2 = 0$. Pode-se fazer o seguinte: $E = 0$, $A = 2D$. Isto irá fixar o valor da subjacente A. A partir desse exame, Descartes pretende mostrar que o método geral do máximo e mínimo– quando aplicado ao problema da tangente à parábola – não auxilia em nada a encontrar a tangente, logo, de maneira contraria ao que afirmava Fermat. Retomando a figura e as anotações deste, Descartes procura a distância máxima que pode haver do ponto E até a parábola (ver figura 34). [270] Esta regra, todavia, é incorreta para Descartes.

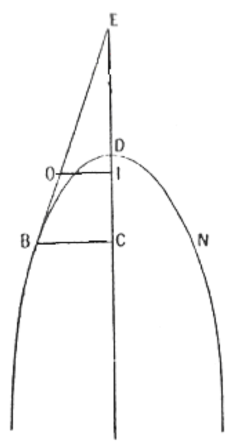


Figura 34 (MILHAUD, 1921, p. 150)

Então, se deve partir de onde se $BE = A^2 + B^2$, pois quando EC torna-se A + E, consequentemente, DC torna-se $D + E$. E como o lado reto (*latus rectum*) da parábola é $\frac{B^2}{D}$, por conseguinte, B² torna-se igual a: $(D + E) \,.\, \frac{B^2}{D}$ Portanto A^2 torna-se $(A + E)^2$. Encontra-se por esse segmento de reta ao quadrado de BE a expressão: $(A + E)^2 + \frac{B^2D + B^2E}{D}$. No caso em que é igualado à primeira, obtém-se: $A^2 + B^2 = A^2 + 2AE + E^2 + \frac{B^2 + B^2E}{D}$

[270] Cf. MILHAUD, 1921, p. 150.

ou

$2AE + E^2 + \frac{B^2E}{D} = 0$. Ou, enfim, após a divisão por E e por $E = 0$, tem-se: $2A + \frac{B^2}{D} = 0$. [271]

Na segunda parte da crítica, Descartes examina o raciocínio de Fermat através da construção da tangente à parábola e, em seguida, explica que esse raciocínio apenas é válido para a construção da parábola, ou seja, inviável para a construção da elipse e da hipérbole. Esse fato revela que o método não é admitido a partir dos raciocínios matemáticos propostos por Fermat.

Para Descartes a relação das abscissas dos pontos B e O deve ser superior ao quadrado das ordenadas e, por isso, não é possível determinar a tangente nas outras secções do cone. Diante disso é necessário reconhecer que a primeira vertente desta explicação não é favorável a Descartes. Nesta perspectiva, Milhaud questiona-se: "Por meio de que aberração Descartes pode entender a questão posta desse modo, isto é, se levarmos em consideração apenas seus últimos comentários: que a relação entre o quadrado das ordenadas e das abscissas – que caracterizam a parábola – constituem a desigualdade que serve como ponto de partida para a construção de Fermat". [272] Poderia ser por meio do raciocínio do geômetra de Toulouse, a relação geral a ser utilizada em todos os casos; e, portanto não importando a curva realizada? Segue Milhaud: "Quanto à primeira carta, perdida, mas cujo conteúdo é presumido pelo que Descartes diz a Mydorges em 1º de março de 1638 que: Etienne Pascal e Roberval teriam insistido nesse mesmo erro". De acordo com Milhaud, dividindo as páginas em duas colunas, Descartes reproduz, em um lado, a demonstração de Fermat para a tangente da parábola e, no outro lado, explica a mesma tangente da parábola descrita algebricamente em relação a construção da elipse e da hipérbole, de maneira a conduzir o cálculo ao absurdo. Tal explicação – que o cálculo é conduzido ao absurdo – é anunciada por Roberval. [273]

Quanto à primeira parte da crítica (do debate), Descartes solicita explicações a respeito da possibilidade de Fermat definir a tangente em B, isto é, não pelo fato de que EB seja um comprimento máximo ou mínimo, mas pelo fato de que sobre EB, o ponto B é aquele que a quantidade algébrica passa por um mínimo.[274] É o que dirão pela segunda vez os defensores de Fermat. Isto ocorre depois da resposta de Descartes a Mydorge. Neste contexto, Roberval retoma os mesmos argumentos apresentados pela primeira vez por Pascal (em meados de abril 1638).

[271] Cf. MILHAUD, 1921, p. 151.
[272] Cf. MILHAUD, 1921, p. 152.
[273] Cf.MILHAUD, 1921, p. 152.
[274] Cf. MILHAUD, 1921, p. 152.

Todavia, segundo Milhaud, tais argumentos estariam equivocados e, em verdade, como relata Desargues a Mersenne, ao declarar que isso é um absurdo *a priori*; posto que atravessasse por meio de retas máximas ou mínimas dentre as que vão do ponto E até a parábola. Estes matemáticos têm razão em não aceitar que a tangente B na parábola possa ser determinada pela procura de uma corda de comprimento máximo ou mínimo EB. Esta explicação é fornecida por Descartes por meio do cálculo que demonstra tal inutilidade. Milhaud alega que nem os matemáticos, nem Desargues e nem o próprio Descartes, parecem perceber a verdadeira razão pela qual a aplicação que Descartes faz do método de Fermat leva ao absurdo. Pois, invocar simplesmente, como faz Roberval, que as cordas levadas de E até a parábola cresçam indefinidamente, para rejeitar o máximo ou mínimo EB, não é em absoluto nada mais exato do que a hipótese, admitida sem discussão por Descartes, que prescreve que a tangente EB é necessariamente a maior das retas que vão de E até a parábola. Desse modo, quando Desargues concebe que, a propósito das cordas passando por B, pode-se falar de várias maneiras de máxima ou mínima, dará razão a Descartes, sem perceber que este afirma que o método de Fermat é incompreensível quando é necessário construir a tangente. Todavia, Descartes não explica com detalhes esta descrição matemática; mas em todo caso, o estranho resultado obtido por Descartes, a saber, aplicando rigorosamente o método de *maximis* e *minimis* na procura do máximo e do mínimo de EB, dá-se quando se deseja mostrar como é corrigido o raciocínio que o conduziu ao absurdo. Contudo, segundo Milhaud, Descartes não percebe que, em vez de corrigir o método de Fermat, apenas corrige o seu próprio erro. Isso ocorre porque Descartes empreende um cálculo para uma matemática que o mesmo não desejara. Ora, mas o que trata esse raciocínio matemático de Descartes? [275] Segundo Milhaud, trata, manifestamente, de encontrar as retas máximas e mínimas partindo do ponto E até a parábola (ver figura 35). Isto porque se EB fosse uma das normais, saber-se-ia de maneira evidente, que a subnormal CE é igual ao parâmetro do valor constante da razão: $\frac{BC^2}{2DC}$

[275] Cf. MILHAUD, 1921, p. 153.

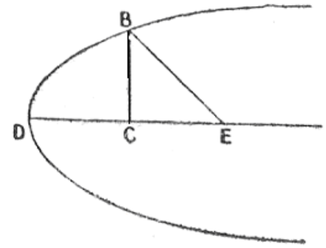


Figura 35 (MILHAUD, 1921, p. 153)

Nas anotações de Fermat e de Descartes, o ponto A é igual a $\frac{BC^2}{2D}$. Este resultado absurdo do cálculo de Descartes depende da posição do ponto E em relação ao ponto D. Destarte é necessário colocar o ponto B, em relação ao eixo, para obter uma segunda solução. Caso se note que a convergência simultânea das quantidades B e D exclui a terceira solução ED, constata-se que a aplicação realizada por Descartes do método de Fermat – relativo à construção das normais através de linhas máximas traçadas de E – procede-se perfeitamente. Com isso, segundo Milhaud,[276] Descartes explicava o valor do seu método, enquanto acreditava demonstrar a inexatidão do método proposto por Fermat. E o que é estranho que Etienne Pascal e Roberval não tenham percebido o objetivo do método cartesiano. Torna-se necessário examinar a correção realizada por Descartes (Sendo a Hardy que Descartes mostraria). [277] Numa carta de junho de 1638, Descartes intitula o seguinte comentário: “como se deve modificar o método de Fermat para conseguir definitivamente a determinação da tangente”. [278] Descartes toma como exemplo uma parábola cúbica, mas este raciocínio pode igualmente ser realizado a partir de uma parábola simples. A mudança determinante é que a progressão E ou CF (ver figura 36) [279] dada a incógnita A ou EC é aquela que corresponde ao segundo ponto de encontro de EB com a

[276] Cf. MILHAUD, 1921, p. 153.
[277] Cf. *Correspondance* (AT, II, 171-173). Neste contexto, Descartes afirma que o ponto E – ponto principal para resolução da tangente – é descoberto analiticamente. *Correspondance* Cf. (AT, II, 171-173). De acordo com Roberval: “em qualquer espécie de linhas curvas, a tangente em qualquer de seus pontos é a linha da direção do movimento que o móvel que a descreve realiza nesse ponto. De tal modo que, constituindo os movimentos de diversos modos e obtendo o conhecimento da direção do movimento composto em qualuqer um dos pontos de uma linha curva, conheceremos desse mesmo modo sua tangente”. ROBERVAL, 1693, p. 70. O problema apontado por Descartes a esse modo de se conhecer a tangente proposto por Roberval é que tal *modus operandi* não deixa claro a composição de movimentos que possa ser exatamente compreendida. Pode-se, pois, considerar três tipos diferentes de composições de movimentos a partir das considerações de Roberval, a saber, (1) um ponto está sujeito a um movimento composto se se desloca em relação a um sistema de referência que, por sua vez, se desloca em relação a outro sistema de referência; (2) um ponto está sujeito a um movimento composto se for o ponto de interscção de duas curvas inflexíveis; (3) um ponto está sujeito a um movimento composto se se desloca na medida em que suas respectivas distâncias de dois polos fixosalteram-se ao mesmo tempo.
[278]*Correspondance* Cf. (AT, II, 171).
[279] Cf. MILHAUD, 1921, p. 154.

parábola. Nesse enfoque, Descartes toma duas incógnitas em vez de uma, a saber, A e E; e, coloca provisoriamente a relação arbitrária entre as ordenadas BC e DF, de maneira a escrever tantas equações quanto incógnitas. Assim, se constitui o sistema da coordenada analítica que determina E = 0. Como os pontos E, B e D estão em linha reta, admite-se que colocando E = 0, passa-se da secante para a tangente. Todavia, porque Descartes não admite que o problema seja outro e que o método legitimo não é mais o de Fermat? Isso porque, se constata que a reta EB não é a maior linha traçada de E até a curva, mas sim o limite de uma secante cujos dois pontos de encontro com a curva tendem a combinar-se. [280]

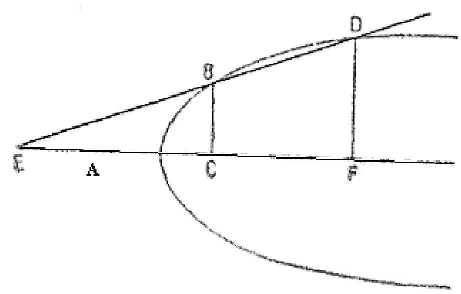


Figura 36 (MILHAUD, 1921, p. 154)

Descartes, assim, acredita corrigir o método matemático de Fermat, resolvendo por outro caminho o problema e de maneira absolutamente correta, mas completamente diferente do modo que Fermat explicara. Isso porque o que legitima Descartes não é meramente o resultado da identificação da tangente, mas o método de descoberta/invenção, ou seja, a maneira pela qual ele encontra o resultado. [281] Em outras palavras, Descartes pretende encontrar a tangente apenas mediante a análise algébrica da figura geométrica, pois, de maneira inversa, isto é, pela via sintética ou por outra via qualquer, não se encadeia a ordem das proposições pela qual uma propriedade (a tangente) é verdadeiramente descoberta. A tangente, assim, descoberta, viabiliza a Descartes aplicar o método que inventara, a saber, realizando demonstrações geométricas consonantes com a sua teoria das proporções, tal como, por exemplo, quando ele demonstrara o movimento regular da roleta. Demarca-se, assim, a diferenciação epistemológica entre a aplicação do método de Descartes à ciência e a concepção de uma matemática aplicada, adotada por seus opositores do século XVII, sobretudo, no que diz respeito aos cálculos dos máximos e mínimos de Fermat.

[280] Cf. MILHAUD, 1921, p. 154.
[281] Cf. MILHAUD, 1921, p. 155.

2.3. Da demonstração geométrica à justificação experimental

Pretende-se aqui esclarecer os raciocínios pelos quais Descartes pretende aplicar o método que inventara por meio dos preceitos lógicos. Partindo de uma demonstração geométrica, Descartes busca justificar a reprodução de determinados fenômenos físicos por intermédio de diversas hipóteses, analogias e experimentos. No *Discurso do método*, ele diz:

> Se alguns assuntos de que tratei no começo da *Dióptrica* e dos *Meteoros* de início mostrarem-se estranhos porque as designo como suposições [hipóteses] e não pareço estar disposto a prová-las, que tenham paciência de ler tudo com atenção e, assim, espero que fiquem satisfeitos. [282]

Para tornar os leitores dos ensaios de 1637 satisfeitos (persuadidos) da eficácia do seu método, Descartes parte, por ordem, de uma proposição conhecida com evidência e, a partir desta, encadeia outras com o intuito de justificar a reprodução de um fenômeno físico. Tal encadeamento segue a ordem dos preceitos lógicos, os quais são o "pano de fundo" da "ordem das razões". Diante disso, Descartes visa realizar as suas experimentações científicas através dos meios de orientação do método que inventara da seguinte maneira: (1) prescrevendo que nunca se deve aceitar nenhuma proposição como verdadeira sem o conhecimento de sua *evidência*; [283] (2) determinando a necessidade de dividir cada uma das dificuldades que se examine em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para de modo mais simples *resolvê-las*; [284] (3) propondo que se conduzam por *ordem* os raciocínios, começando pelos objetos simples e, por isso, mais fáceis de conhecer até o conhecimento dos mais *compostos* e, assim, supondo uma determinada *ordem* mesmo entre aqueles objetos que não se precedem naturalmente uns aos outros; [285] (4) e, por fim, efetuando *enumerações completas* e *revisões gerais*, para que não haja a mínima possibilidade de se está omitindo algum dado do exame.[286] Os preceitos lógicos são,

---

[282] *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).
[283] Preceito da evidência. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18).
[284] Preceito da análise. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18). Assinala-se que o conceito resolução prescreve, desde os antigos geômetras, a via de descoberta analítica. (Vide ALLARD, 1963, p. 44).
[285] Preceito da síntese. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19). Assinala-se que o conceito composição prescreve, desde os antigos geômetras, a via de descoberta sintética. (Vide ALLARD, 1963, p. 44).
[286] Preceito da revisão geral. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 19). Descartes relata no *Discurso do método* que: "Primeiramente, procurei *descobrir* os *princípios* ou *causas* primordiais de tudo que existe ou pode existir no Mundo. Depois disso, examinei quais eram os primeiros e mais comuns *efeitos* que se podiam *deduzir* dessas *causas* [...]. Após isso, quando quis empreender as *experiências* mais *particulares*, tantas e tão diversas se me apresentaram,

assim, estabelecidos por meio de uma “longa cadeia de razões que os geômetras se servem para chegar às suas mais difíceis demonstrações”. [287] Tal aspecto matemático dos preceitos possibilita uma rigorosa articulação lógica entre os dados concebidos metodicamente e as justificações apresentadas nas ciências particulares de Descartes. A partir da utilização dos preceitos lógicos, como “pano de fundo” da “ordem das razões”, Descartes rejeita a possibilidade de haver qualquer tipo de circularidade no seu argumento científico; pois, o resultado do exame científico é adquirido a partir da justificação experimental, isto é, através da reprodução dos efeitos do fenômeno natural.[288] Logo, a causa descoberta analiticamente não possui previamente a prova do dado científico. Descartes:

> Pois me parece que as razões cientificas se encadeiam de tal modo que, assim como as últimas são provadas pelas primeiras, que são suas causas, essas primeiras o são reciprocamente pelas últimas, que são seus efeitos. E não se deve imaginar que nisto cometo o erro que os lógicos chamam de círculo. [289]

Na sequência deste argumento, Descartes relata que: “[...] pois, como a experiência torna indubitável a maior parte desses efeitos, as causas de que os deduzo não servem tanto para prová-los quanto para explicá-los; mas, ao contrário, as causas é que são provadas por eles [pelos efeitos]”. [290] Com isso, a experiência torna possível a justificação do dado científico. Nesta perspectiva, a série de deduções prescreve que as proposições sejam ordenadas da causa (demonstração geométrica) até à justificação dos efeitos naturais (reprodução dos fenômenos físicos). Logo, o que Descartes pretende na prática das ciências particulares não é admitir o surgimento de algo que lhe seja evidente através do resultado da experiência, mas, apenas verificar, por meio da ordem das razões, se a demonstração geométrica (concebida de modo evidente) possibilita a justificação experimental dos efeitos observados na natureza.

---

que não acreditei ser possível ao espírito humano distinguir as formas ou espécies de corpos existentes […] nem, por conseguinte, torná-las por nós utilizáveis, a não ser *que se chegue às causas pelos efeitos* e que se *utilizem muitas experiências*. [...] *Mas devo confessar que a potência da natureza é tão ampla e tão vasta, e esses princípios tão simples e tão inteligíveis, que não noto quase nenhum efeito particular que de início eu não saiba que pode ser deduzido desses princípios de muitas maneiras diferentes, e que minha maior dificuldade é, geralmente, mostrar de qual dessas maneiras os efeitos são deduzidos deles*”. (GRIFO NOSSO). *Discours de la méthode* (AT, VI, 63-64).

[287] *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).

[288] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).

[289] *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).

[290] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).

A concepção da ordem das razões é amplamente debatida no seio da tradição historiográfica contemporânea, sobretudo, a partir dos comentários de Gueroult expostos na obra *Descartes Selon L'Ordre des Raisons.*[291] Nesta obra, Gueroult sustenta que, nas *Meditações*, Descartes resolve o problema da fundamentação das "ciências particulares" e, por isso, alega que qualquer tentativa de buscar nas obras matemáticas ou científicas (como, por exemplo, a *Geometria*, a *Dióptrica* e os *Meteoros*) ou mesmo nas cartas, explicações que ultrapassassem a fundamentação feita nas *Meditações*, deve ser rejeitada. Assim, as fundamentações esboçadas anteriormente, como as que se encontram no *Discurso do método* e nos ensaios do método de 1637, não são decisivas, pois, a "ordem das razões" e o "verdadeiro método" são apenas propostos nas *Meditações* e nos *Princípios da Filosofia*. Gueroult: "[…] Ora, se a *ordem analítica* é a única a buscar a demonstração válida da filosofia, se apenas as *Meditações*, que *se desenvolvem rigorosamente segundo esta ordem*," [292] então, é esta a obra que permite compreender infalivelmente o conjunto da doutrina. [293] E segue: "Descartes opõe a *Dióptrica* e os *Meteoros*, que demonstram as causas por meio da explicação de que essas causas trazem aos efeitos, os quais são certos, ao *verdadeiro método* (que será o dos *Princípios*), onde essas causas serão deduzidas das verdades primeiras (concebidas anteriormente nas *Meditações*). Eis porque, apesar da demonstração pelos efeitos, essas [causas] serão designadas ainda de suposições".[294] A interpretação da ordem das razões apresentada nesta pesquisa é distinta da posição gueroultiana, mas conserva o caráter historiográfico e a defesa de que a filosofia de Descartes deve ser compreendida a partir de um "sistema fechado". [295]

---

[291] Alquié se insere também no seio desta tradição, pois, levanta a questão da "ordem das razões" cartesiana logo na introdução da sua obra *Descartes*. Cf. ALQUIÉ,1986, p. 7.
[292] GUEROULT, volume 1, 1968, p. 25.
[293] Cf. GUEROULT, volume 1, 1968, p. 25.
[294] GUEROULT, vol. 2, 1968, p. 10, nota 15.
[295] GUEROULT, vol. 2, 1968, p. 10, nota 15. Segundo Gueroult o interesse da interpretação historiográfica é o de procurar estabelecer que nenhuma filosofia escapa a uma *regra de sistematização* que a constitui inteiramente, e que é possível descobrir o conjunto dessas regras em um princípio que funda a sua unidade. Assim, o leque de todas as possibilidades estruturais da filosofia se abre a partir de um único ponto. Por isso, ele conclui que não há a filosofia, mas filosofias que, *fechadasem si mesmas*, se apresentam separadamente como sendo toda a ciência. Portanto, há tantas ciências especiais quanto há filosofias diferentes, e, consequentemente, não há uma lógica de toda a filosofia, mas tantas lógicas quantas houver filosofias. A determinação dessas lógicas e dessas estruturas próprias a cada sistema exclui a instituição de uma lógica transcendental. Toda filosofia deve organizar o conjunto sob um princípio de totalidade que, por não poder estar contido em nenhum dado, é necessariamente *a priori*. Assim, a sistematização parte do princípio *a priori* em direção ao diverso das coisas. Então, a *sistematização racional* não é apenas aquilo pelo qual uma filosofia se constrói, assegura a coerência de seus diferentes temas, aperfeiçoa sua demonstração graças a seus recortes, mas aquilo pelo qual conquista uma realidade e se constitui como objeto. […] Nenhuma filosofia ou interpretação filosófica, por mais hostil que se declare em relação ao sistema, pode lhe escapar, a menos que renuncie a seu estatuto de filosofia e se degrade em opinião". Cf. GUEROULT, 2007, p. 235-246.

2.4. Estatuto matemático da ordem das razões no sistema filosófico de Descartes

Na obra *Descartes Selon L'Ordre des Raisons*, Gueroult interpreta o método cartesiano a partir de uma concepção da ordem das razões fundamentada na geometria elementar, proposta por Euclides nos *Elementos*, e prescreve as *Meditações* como a obra onde Descartes desenvolve de maneira mais rigorosa a "ordem analítica". [296]

Gueroult [297] propõe que o método cartesiano é oriundo da articulação de alguns procedimentos simples, os quais são desenvolvidos conforme uma única "ordem das razões" e, diante da verdade, em um saber absolutamente certo, originalmente presente na unicidade da *sapientia humana*, que contempla todas as ciências "*omnes inter se conjunctae et a se invicem dependentes*" e, permanecendo sempre una e idêntica, por mais diversos que sejam os objetos aos quais se aplica "não recebe deles mais modificações do que a luz do Sol da variedade das coisas que ilumina". [298] De acordo com Gueroult, [299] a ordem do método de Descartes apenas pode constituir-se cientificamente em um mesmo bloco de certeza e, por meio da indivisibilidade da verdade. Diante disso, ele defende que os raciocínios do método de Descartes se estabelecem como as demonstrações da geometria elementar de Euclides. Segundo Gueroult, a ordem do método (ou, das razões) de Descartes deve, então, romper com a habitual fratura das obras tradicionais, notadamente aquelas inspiradas pela doxografia, que dividem-se em capítulos e, que esgotam cada qual a matéria de uma questão, simplesmente justapostas segundo uma ordem ritual que nada tem de necessária. [300] Gueroult sustenta sua interpretação a partir do relato de Descartes descrito em uma carta datada em meados de 1640:

> É de notar, em tudo o que escrevi que não sigo a *ordem das matérias*, mas somente a *ordem das razões*. Isto porque não pretendo dizer em um mesmo local tudo o que pertence a uma matéria, pois me seria impossível prová-lo adequadamente, havendo para isso algumas razões que devem ser tiradas de questões mais distantes que outras; porém, raciocinando por *ordem* a *facilioribus ad difficiliora*, deduzo o que posso, ora para uma matéria, ora para outra — o que é, em minha opinião, o caminho [verdadeiro método] para adequadamente encontrar e explicar a verdade. Quanto à ordem das matérias, ela apenas é

[296] Diferentemente de Gueroult, Alquié interpreta o método cartesiano a partir da identificação de duas distintas ordens das razões, as quais são estabelecidas mediante os desdobramentos filosóficos de Descartes, a saber, (1) uma ordem temporal que segue a história e os fatos da vida de Descartes e (2) uma ordem que segue um sistema lógico. Cf. ALQUIÉ,1986 , p. 7-13.
[297] GUEROULT, vol. 1, 1968, p. 17-19.
[298] *Regulae* (AT, X, 360).
[299] GUEROULT, 1968 , p. 17-19.
[300] Segundo Gueroult o modelo que Descartes segue é o *Elementos* de Euclides. GUEROULT, vol. 1, 1968 , p. 20.

> adequada para aquelas em que todas as razões estão soltas e podem referir-se tanto a uma dificuldade quanto a outra. [301]

Constata-se, assim, que a ordem das razões proposta por Descartes opõe-se radicalmente à ordem das matérias, não apenas porque não é a mesma, pois, é necessária ao invés de ser convencional, mas, sobretudo, porque dissocia cada uma das matérias que se encontrava considerada separadamente como um todo. [302] A partir da explicação de Descartes exposta na carta, Gueroult[303] relata que a filosofia cartesiana desenvolve-se como uma "Geometria pura", abstraindo toda a sua certeza do "encadeamento interno de suas razões", sem nenhuma referência à realidade exterior e, por isso, invocar a experiência segundo o uso vulgar (isto é, contra essa ordem das razões) é tão desprovido de racionalidade quanto querer refutar as verdades demonstradas na geometria euclidiana. [304] Assim, a posição gueroultiana da "ordem das razões" prescreve que o conjunto das leis fundamentais da física cartesiana é formado pelos axiomas da geometria euclidiana, as quais podem ser formuladas em termos de "noções geométricas elementares" e "demonstradas metafisicamente". Nesta perspectiva, Gueroult propõe que o processo científico cartesiano é iniciado pela "descoberta analítica das causas" e, apenas após essa aquisição, se torna viável a "utilização da experiência". Acrescenta-se, pois, que para ele, a experiência deve dissipar o caráter meramente especulativo das hipóteses científicas a partir da ordem das razões, na medida em que revela a aplicabilidade de suas consequências, deduzidas pelo entendimento, mediante a descrição dos fenômenos naturais. Em seguida, ele assinala que a metafísica (ou, filosofia primeira) é o meio pelo qual a ordem das razões sistematiza a filosofia de Descartes. Isso porque, para ele é apenas nas *Meditações* que Descartes desenvolve rigorosamente a "ordem analítica", o que permitiria compreender toda a articulação do "sistema filosófico cartesiano".[305]Nota-se, pois, que Gueroult demarca a ordem das razões cartesiana a

---

[301] *Correspondance* (AT,III, 266-267).

[302] Cf. GUEROULT, vol. 1, 1968, p. 19-20.

[303] Cf. GUEROULT, volume 1, 1968, p. 22.

[304] De acordo com Guerlout, Descartes distingue duas ordens: "Descartes, é verdade, distingue duas ordens — a ordem sintética e a ordem analítica —, e, conforme tratar-se de uma ou de outra, situa as mesma doutrinas em lugares diferentes. No *Discurso do Método* e nas *Meditações*, onde a ordem é analítica, o lugar da prova ontológica, por exemplo, não é o mesmo que na exposição geométrica das *Segundas Respostas*, ou a que é exposta nos *Princípios*, onde a ordem é sintética. Das duas ordens, qual deve decidir? O próprio Descartes nos diz: é a ordem analítica. A demonstração sintética, com efeito, não é a verdadeira via, mesmo em geometria, pois, ainda que ela arranque o melhor consentimento de um leitor, por mais obstinado e opinante que possa ser, ela não ensina o método pelo qual a coisa foi inventada; em metafísica, onde as noções primeiras, por conta de seu desacordo com os sentidos, não podem ser facilmente recebidas, ela é particularmente inadequada". GUEROULT, volume 1, 1968, p. 22-23.

[305] Gueroult afirma que: "Disso resulta que toda a interpretação da metafísica cartesiana deve repousar, antes de tudo, sobre o pequeno tratado das *Meditações*. Não que esse tratado contenha toda a matéria da filosofia, mas porque essa

partir da concepção de uma "rigorosa ordem analítica" e, mais especificamente, aquela que é desenvolvida a partir de raciocínios oriundos da Geometria elementar de Euclides. Ora, mas como Gueroult entende a concepção de uma análise geométrica em Descartes? Segundo Gueroult: "*As Seis Meditações* não passam de réplica metafísica dos *Quinze Livros dos Elementos* de Euclides". [306] E segue: "As demonstrações de Descartes sempre procedem no espírito que anima Euclides, Apolônio e Arquimedes [antigos geômetras]; elas somente podem ser entendidas por aqueles que compreenderam o sentido das demonstrações matemáticas".[307] E acrescenta: "Se as noções de que as *Meditações* tratam pudesse, tal como os conceitos da Geometria, apoiar-se sobre a imaginação, em vez de serem contrariadas por elas, as *Seis Meditações* não seria outra coisa que os *Livros* de Euclides". [308] Gueroult entende, portanto, que

---

obra comporta os elementos essenciais apresentados segundo sua verdadeira justificação. Essa observação comporta uma tripla consequência. Primeiramente, as *Objeções* e *Respostas*, as correspondências e as exposições sintéticas, não se constituem senão, aos olhos de Descartes, de esclarecimentos ou complementos que não poderiam jamais servir para enfraquecer, menos ainda pra contradizer, a doutrina das *Meditações*. As *Meditações* são constantemente invocadas por Descartes, seja como breviário, seja como introdução necessária e verdadeiramente demonstrativa de sua filosofia. Em segundo lugar, as teorias metafísicas que Descartes não julgou necessário expor em suas *Meditações* são consideradas por ele, quaisquer que possam ser os interesses e a profundidade delas, como não pertencendo aos principais pontos de sua doutrina, mas as suas implicações ulteriores ou aos seus prolongamentos. Elas não estão em meio às condições indispensáveis à sua demonstração certa e à sua estrutura fundamental. Esta preocupação com a ordem explicaria porque uma doutrina tão cativante quanto aquela das verdades eternas não figura nas *Meditações*, nem em qualquer dos outros tratados, mesmo que em 1630 Descartes anunciasse a Mersenne sua intenção de expô-la em sua Física. [...] A terceira conseqüência é que, se a ordem analítica é a única a buscar a demonstração válida da filosofia, se apenas as *Meditações*, que se desenvolvem rigorosamente segundo esta ordem, permite compreender infalivelmente o conjunto da doutrina, então, não há outro método para compreender as *Meditações*". GUEROULT, volume 1, 1968, p. 23-25.

[306] Cf. GUEROULT, volume 2, 1968, p. 288.

[307] Cf. GUEROULT, volume 2, 1968, p. 288. É importante observar que Gueroult sustenta a sua tese por meio de um argumento de Descartes, exposto nas respostas às Quintas Objeções, que apenas opta pelos raciocínios matemáticos de Euclides, Apolônio e Arquimedes em detrimentos daqueles raciocínios fudamentalmente aristotélicos utilizados pela Filosofia da Escola. Cf. *Sur Les Cinquiemés Objections* (AT, IX, 210-211).

[308] Cf. GUEROULT, volume 2, 1968, p. 288. Numa nota de roda pé Gueroult relata que Descartes teria tido "nas mãos, desde o Colégio La Flèche", a edição dos *Elementos* de Euclides, feita por Clavius. Cf. GUEROULT, volume 2, 1968, p. 288. Ora, mas é bem possível que a inutilidade da síntese para Descartes como via de descoberta possa ter sido acentuada justamente pelos comentários de Clavius a Euclides, mais precisamente, na sua tentativa de interpretar a análise em termos silogísticos. Segundo Sasaki, a Álgebra de Clavius foi possivelmente o ponto de partida de Descartes nesta área de investigação, como fica evidenciado na utilização de rudimentos da notação cóssica de Clavius. Acrescenta que a Álgebra de Clavius procede sinteticamente, embora, apenas na primeira proposição do livro 1 de Euclides, uma análise é apresentada. Entretanto, não se trata de uma análise que se encontra em Pappus, ou mesmo, do tipo da que Descartes estava tentando reconstruir, mas de uma análise aristotélica. O que Clavius faz é apenas decompor o problema anunciado (a construção de um triângulo equilátero sobre uma dada linha finita) em três silogismos. Em seguida, ele diz que todas as demais proposições matemáticas podem ser analisadas de maneira similar, mas que os matemáticos deviam se dar ao trabalho de fornecer essas análises, pois, a demonstração não o exige estritamente e pode prosseguir com mais simplicidade sem elas. Tal análise é meramente um exercício de tradução de proposições geométricas sob a forma silogística. Cf. SASAKI, 2003, p. 45-76. A reconstrução da geometria em termos silogísticos faria dela uma empreitada rigorosamente aristotélica, perdendo-se o objetivo de reformular o conhecimento nos moldes da matemática. Não se deve surpreender, portanto que Descartes rejeitasse

o “método analítico” utilizado por Descartes é concebido a partir das demonstrações geométricas feitas por Euclides, as quais são apresentadas na obra *Elementos*, mas ele jamais expôs como se operaria tal “método analítico”. Possivelmente seguindo as indicações de Gueroul, Allard relata que talvez a solução cartesiana de um problema do lugar geométrico seja oriunda dos comentários feitos por Clavius na obra *Euclidis Elementorum*, os quais Descartes tivera acesso no Colégio La Flechè. A partir desta referência, Allard parece alegar que Descartes assumira o “método de análise (e síntese) euclidiano” proposto por Clavius. A seguir são expostos os comentários de Clavius estabelecidos na obra *Euclidis Elementorum* a partir das indicações feitas por Allard na obra *Le Mathématisme de Descartes*. [309]

O problema: encontrar o círculo que passa por A, B e C, três pontos sobre um plano.
Solução do problema:

1. *Análise* ou *Resolução*[310] (descoberta da solução)

Supõe-se o problema resolvido. Com esse intuito é preciso apenas encontrar as condições conhecidas e desconhecidas que determinam a solução do problema. Por *definição*, o círculo é um lugar geométrico (sobre um plano), equidistante de um ponto fixo, o centro. Supondo o problema resolvido, se faz necessário que o centro O do círculo conhecido seja igual à distância de A, B e C. Consideram-se, em seguida, as consequências que decorrem desta suposição. Para isso, se deve – quando a solução é possível – dividir o problema em questão em problemas mais simples, como é aqui o caso. Então, tomando os pontos A e B, o centro O equidistante de A e B, por conseguinte, será necessariamente sobre OP, a mediatriz de AB. Do mesmo modo, se pode compreender que o centro do círculo conhecido será equidistante de B e C, e, por consequência, será situado sobre OP', a mediatriz de BC. Progride-se assim até a obtenção da resposta desejada.

2. *Síntese* ou *Composição*[311] (demonstração que a solução encontrada é a solução procurada)

---

tão decididamente o antigo valor da síntese e, consequentemente, às exposições e demonstrações estéreis dos antigos geômetras, dentre eles, Euclides.

[309] Cf. AllARD, 1963, p. 44-48.

[310] É interessante notar que o conceito *resolução* aparece no segundo preceito lógico de Descartes. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18).

[311] E que o conceito *composição*aparece no terceiro preceito lógico. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18).

A análise conduziu a descoberta da solução. Já a partir da síntese poder-se-á demonstrar que o ponto O é o centro do círculo. Deve-se assinalar que esta demonstração já fora implicada na análise, ou, em outras palavras, a síntese é comandada pela análise.

Prova: O círculo cujo centro é o ponto O e o raio OA passa pelos pontos A, B e C.

No triângulo AOB, OA = OB (triângulo isóscele).

No triângulo BOC, OB = OC (mesmo raio).

Logo, AO = OB = OC, (duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre elas).

Este método de análise (e síntese) compreende necessariamente duas etapas complementares que procedem de maneira inversa, uma da outra, a saber, "a análise permite a descoberta da solução do problema posto, e a síntese, por sua vez, permite a solução tornar inteligível o problema resolvido". Então, a ordem seguida é a seguinte: "(1) do complexo ao simples, do problema condicionado à descoberta da condição desconhecida: (2) do simples ao composto, a condição agora conhecida fornece inteligibilidade ao problema proposto". A partir de um problema onde há obrigatoriamente obscuridade, se deve descobrir a fonte de inteligibilidade que fornece clareza ao problema. Mas Allard assinala que Descartes usa a álgebra dos modernos mediante este mesmo método e da seguinte maneira: supõe-se o problema resolvido. Isto porque, se representa as quantidades desconhecidas por símbolos, a partir dos quais se formula o problema sob a forma de equações algébricas. Em seguida, se considera as consequências que decorrem desta conjectura, a saber, simplificando as equações com o intuito de encontrar a solução do problema proposto. A solução constitui a resposta procurada. Eis, portanto, o papel da análise cartesiana: "verificar os resultados obtidos e interpretar a solução". Do ponto de vista estritamente algébrico, esta última etapa, alega Allard: "a síntese ou composição, tem menos importância em virtude da reciprocidade das equações". Entretanto, os limites dessa importância e a relevância lógica da reciprocidade das equações algébricas não são esclarecidos por Allard. Todavia, como sustentam Jullien, Vuillemin e diversos historiadores da matemática: a exposição matemática do método utilizado por Euclides nos *Elementos* é, primordialmente, sintética. [312] Ora, de que modo então, Gueroult pode sustentar que o método analítico utilizado por Descartes é concebido a partir da

[312] Cf. JULLIEN, 1996, p. 28 &Cf. VUILLEMIN, 1960, p. 100-101. Os hitoriadores da matemática são Boyer e Heath. Segundo Heath, Euclides elimina do seu texto toda e qualquer menção à maneira como as construções foram descobertas ou inventadas, pois, Euclides, limita-se a executar consruções das quais ele sabe primitivamente que levam à solução dos problemas ou à provas procuradas. Cf. HEATH, 1953, p. 442.

geometria elementar de Euclides? Segue alguns esclarecimentos que Descartes faz a respeito desse assunto através de suas obras e cartas. Nas *Regras*, Descartes diz:

> Os antigos geômetras utilizaram uma espécie de análise que estendiam à solução de todos os problemas, *se bem que dela tenham privado a posteridade*. E agora floresce um gênero de Aritmética, a que chamam Álgebra, que permite fazer com os números o que os antigos faziam com as figuras. Essas duas coisas nada mais é senão frutos espontâneos dos princípios do nosso método, e não me espanto de que seja nessas artes, cujos objetos são muito simples, que eles cresceram até agora com mais facilidade do que nas outras, em que maiores obstáculos comumente os sufocam, mas em que, não obstante, tomando um cuidado extremo em cultivá-los, nós o faremos infalivelmente alcançar uma plena maturidade. […] E, por certo, parece-me que alguns aspectos do método ainda aparecem em Diofanto e, sobretudo, em Pappus, que, sem serem dos primeiros anos, viveram, porém numerosos séculos antes de nosso tempo. [313]

No *Discurso do método*, ele diz:

> Comprazia-me, sobretudo, com as matemáticas, em virtude da certeza e da evidência de suas razões; mas não percebia ainda o seu verdadeiro uso e, pensando, que somente serviam para as ciências mecânicas, espantava-me de que, sendo tão firmes e tão sólidos os seus fundamentos, nada de mais elevado se tivesse construído sobre eles. [314]

E, sustenta:

> Não quis começar a rejeitar totalmente nenhuma das opiniões que outrora conseguiram insinuar-se em minha crença sem terem sido nela introduzidas pela

[313] Segue a versão original latina: "*Satis enim advertimus veteres Geometras aanalysi quâdam vsos suisse, quam ad omnium problematum resolutioem exten debant, licet eamdem posteris inviderint. Et jam viget Arithmeticae genus quoddam, quod Algebram vocant, ad id praestandum circa numeros, quod veteres circa figuras faciebant. Atque haec duo nihil aliud sunt, quàm spontaneae fruges ex ingenitis hujus methodi principijs natae, quas non miror circa harum artium simplicissima objecta feliciùs crevisse hactenus, quàm in caeteris, vbi majora illas impedimenta solent suffocare; sed vbi tamen etiam, modò summâ curâ excolantur, haud dubiè poterunt ad perfectam maturitatem pervenere.[...] Et quidem hujus verae Matheseos vestigia quaedem adhuc apparere mihi videntur in Pappo & Diophanto, qui, licet non primâ aetate, multis tamen saeculis ante haec tempora vixerunt*". *Regulae* (AT, X, 373-376). Ainda em relação ao "verdadeiro método", Descartes dizia ironicamente: "eu acredito, então, que os próprios autores o fizeram desaparecer com uma espécie de ardil censurável". *Regulae* (AT, X, 373). Nota-se, pois, que a referência do método de análise de Descartes não é o de Euclides, mas, alguns aspectos do método de Diofanto e, mais especificamente, do método de análise de Pappus. Entretanto, ressalta-se que, ainda assim são apenas "alguns aspectos", pois, a via demonstrativa da análise cartesiana possui em sua natureza operacionalidades muito peculiares, sobretudo, a exigência da exatidão concebida pela correspondência entre objetos geométricos e algébricos. No artigo*The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of Descartes work in algebra*, Gaukroger sustenta que o papel da Álgebra no sistema filosófico e matemático de Descartes é a de uma *técnica de resolução de problemas geométricos*, identificada por Descartes com *antiga arte da análise*. A técnica algébrica funciona explicando as incógnitas em termos dos dados conhecidos, constituindo um simbolismo que lhes permitia serem ordenadas em equações que vinculariam os dados conhecidos às incógnitas de maneira sistemática. Essa técnica tinha imensas vantagens sobre as provas geométricas tradicionais naquela época, e Descartes entendia que a explicação algébrica revelava de um modo completamente inovador os passos implicados na resolução dos problemas geométricos. Cf. GAUKROGER, 1992, p. 91-114.

[314] *Discours de la méthode* (AT, VI, 07).

> razão, antes que tivesse empregado bastante tempo em projetar a obra que estava empreendendo, e em buscar o verdadeiro método para chegar ao conhecimento de todas as coisas de que meu espírito seria capaz. Estudara um pouco, quando jovem, entre as partes da filosofia, a lógica, e, entre as matemáticas, a análise dos geômetras e a álgebra, três artes ou ciências que deviam contribuir com o meu propósito. No que diz respeito à análise dos antigos e a álgebra dos modernos, além de se estenderem a matérias muito abstratas, e que não parecem inicialmente de nenhuma utilidade, a primeira está sempre tão restrita à consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar em demasia a imaginação; [...]. Foi isto que me levou a pensar que cumpria procurar algum outro método que, compreendendo as vantagens destas três artes [a lógica, a análise dos geômetras e a álgebra], fossem isentos de seus defeitos.[315]

Numa carta enviada a Mersenne, datada ainda em meados de 1637 (época da publicação do *Discurso do método* e da *Geometria*), Descartes alega:

> Falo que, o que vos apresento no Livro II da Geometria, no que diz respeito à natureza, às propriedades das linhas curvas e, sobretudo, à maneira de analisá-las, estar, ao que me parece, tão além da geometria elementar quanto à retórica de Cícero está para o abc das crianças. [316]

Por volta de 1642, Descartes conclui esse assunto nas *Segundas Respostas*:

> Os antigos Geômetras tinham o costume de se servir *apenas* da *síntese* nos seus escritos, não porque ignorassem por completo a *análise*, mas, em minha opinião, porque a tinham em tal grande apreço que *a reservavam para si mesmos, como um segredo precioso*. [317]

Por fim, em uma carta datada de 02 de outubro de 1646 (após a publicação das *Meditações*), Pell relatara a Cavendish que, depois de assistir a uma palestra sua, Descartes foi a sua casa, onde tivera a oportunidade de debater a respeito de diversos temas matemáticos. Nesta oportunidade, Descartes lhe comunicara que estudou pouquíssimo Euclides e que considerava as suas demonstrações supérfluas, acreditando que pôde reinterpretá-las mediante a *análise* de *cálculos algébricos*. [318] Diante de tais evidências, sustenta-se nesta pesquisa que a análise utilizada por Descartes não tem como referência à análise de Euclides, mas, conserva "alguns aspectos" do método de alguns outros antigos geômetras, tais como o de Diofanto e, mais especificamente, o

[315] *Discours de la méthode* (AT, VI, 17-18).
[316] *Correspondance* (AT, I, 479).
[317] *Secondes Reponses* (AT, IX, 122).
[318] *Correspondance* (AT, VII, 156).

método de Pappus. [319] No entanto, ressalta-se ainda que sejam apenas "alguns aspectos", pois a "verdadeira via de análise cartesiana" possui em sua operacionalidade características muito peculiares, sobretudo, a exigência de uma exatidão lógica operacionalizada pela correspondência de diferentes objetos matemáticos, a saber, os objetos geométricos e os objetos algébricos. Tal característica é suficiente para revelar que o modo de descoberta da via analítica cartesiana, em muito se diferencia do método da geometria elementar de Euclides, o que mostra que Gueroult defendeu a sua tese de maneira equivocada. [320] Além de se equivocar quanto à origem e a concepção do método de Descartes, Gueroult possivelmente confunde-se, ao tomar "ordem analítica" como sinônimo de "encadeamentos de proposições que seguem a prescrição da via demonstrativa de análise" e, certamente, por isso, interpreta o método e a ordem das razões propostos por Descartes de maneira também equivocada. Segue o modo como a partir das obras de Descartes se podem sustentar tais críticas e propor uma nova interpretação historiográfica ao sistema filosófico cartesiano. Nas *Regras*, Descartes diz:

> O método consiste na ordem e na disposição dos objetos sobre os quais se deve fazer incidir a penetração da razão para descobrir alguma verdade. Nós lhe ficaremos fiéis, se encadearmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras à proposições mais simples, e, em seguida, se, partindo da intuição daquelas que são as mais simples de todas, procurarmos elevar-nos pelas mesmas etapas ao conhecimento das demais. [321]

Mas, Descartes adverte que:

> Mas, talvez a ordem que se exige aqui é tão obscura e complicada que não está no poder de todos reconhecerem qual ela é. […] Por isso, se deve observar com cuidado o que será exposto na explicação seguinte. [322]

[319] Cf. *Regulae* (AT, X, 376).

[320] Schuster sustenta que há diferenciação entre o método da geometria elementar de Euclides e o modo de descoberta analítico (algébrico) exercido na matemática de Descartes. Após expor e examinar a solução de um mesmo problema, primeiramente, por meio do método geométrico de Euclides e, em seguida, por meio da resolução algébrica de Descartes, Schuster concluiu que a notação algébrica cartesiana registra e permite que se apreenda com exatidão a longa cadeia de razões implicada na descoberta da solução, ao passo que, a solução geométrica euclidiana resulta em um diagrama complexo, que registra, mas não revela os passos implicados na resolução analítica da dificuldade. Cf. SCHUSTER, 1977, vol. 2, p. 492-493.

[321] Segue a versão original latina: "*Tota methodus consiste in ordine & dispositione eorum ad quae mentis acies est convertenda, vt aliquam veritatem inveniamus. Atque hanc exactè servabimus, si propositiones involutas & obscuras ad simpliciores gradatim reducamus, & deinde ex omnium simplissimarum intuitu ad aliarum omnium cognitionem per eosdem gradus ascendere tentemus*." Cf. *Regulae* (AT, X, 379).

[322] Segue a versão original latina: "*Sed quia saepe ordo, qui hic desideratur, adeò obscurus est & intricatus, vt qualis sit non omnes possint agnoscere, vix possunt satis cavere ne aberrent, nisi diligenter observent quae in sequnti propositione exponentu*r". Cf. *Regulae* (AT, X, 380).

Talvez, por isso, Gueroult confunda “ordem das razões” com “demonstração analítica”. Segue Descartes:

> Para distinguir os objetos mais simples daqueles que são complicados e pôr em ordem em sua investigação, cumpre, em cada cadeia de objetos em que deduzimos diretamente algumas verdades [ou seja, por intuição], umas das outras, observar o que é mais simples e como dele se distancia, mais ou menos, ou igualmente, dos demais. […] Cabe assinalar que consideramos aqui cadeias de coisas [ou objetos] por não conhecer a natureza mesma delas. Para diversos Filósofos, a causa e o efeito são coisas correlativas, ao passo que aqui, procurando o que é um efeito, cumpre antes conhecer a causa e não inversamente. [323]

Estas regras formam para Descartes: “Um preceito da ordem e fornecem sua explicação”. Ora, no *Discurso do método*, Descartes anuncia que os “preceitos lógicos” constituem as “longas cadeias de razões, tão simples e fáceis, de que os geômetras se servem para chegar às suas mais difíceis demonstrações” e, conclui que estas cadeias de razões:[324]

> Levaram-me a conjecturar que todas as coisas [ou, objetos] que podem cair sob o conhecimento dos homens encadeiam-se da mesma maneira, e que, com o único requisito de observarmos a ordem necessária para deduzi-las, umas das outras, não haverá nenhuma tão afastada que não possamos chegar a ela e nem tão escondida que não a descubramos […]. [325]

---

[323] Segue a versão original latina: “*Ad res simplicissimas ab involutis distinguendas & ordine persequendas, oporte in vnaquâque rerum serie, in quâ aliquot veritates vnas ex alijs directè deduximus, observare quid sit maximè simplex, & quomodo ab hoc caetera omnia magis, vel minùs, vel aequaliter removeantur* […] *monet enim res omnes per quasdam series posse disponi, non quidem in quatum ad aliquod genus entis referuntur, sicut illas Philosophi in categorias suas diviserunt, sed in quantum vnae ex alijs cognosci possunt* […]”. Cf. *Regulae* (AT, X, 381).

[324] Parece que aqui Decartes está reformulando o conceito tradicional de ordem mediante apenas as relações de implicação lógica. Tal concepção de ordem, portanto, prescreve sequencias de proposições geradas pela análise, como geradas pela síntese. Alquiè sustenta que um dos preceitos essenciais da lógica cartesiana é o de “conduzir” os pensamentos por “ordem”. [...] Por isso, segundo Alquiè a maioria dos comentadores, considerando o segredo da ordem, propuseram a filosofia cartesiana como um sistema que se desenvolve de acordo comum à lógica rigorosa. No entanto, diz Alquié, “o próprio Descartes parece advertir-nos contra tal maneira de concebermos a sua filosofia”. Em primeiro lugar, a ordem lógica dos seus pensamentos não é tão constante como se imagina: é o caso do *método*. Cf. ALQUIÉ, 1986, p. 7-9. Já para Gueroult o geômetra considera “separadamente, indo do simples ao complexo, as propriedades dos objetos matemáticos, para integrá-las pouco a pouco à sua ciência na forma de proposições demonstradas”. GUEROULT, volume 2, 1968, p. 289. Segundo diversos historiadores da matemática, destacando-se, Boyer, Hintikka, Remes e Heath, o método de Euclides é operado por contrução e provas. A construção começa a partir de teoremas (a demonstrar), pela instanciação do enunciado do teorema, e, no caso de problemas (a resolver), pela instanciação dos dados do problema e da sua incógnita, e continua pela transformação desses dados por meio dos postulados. Logo, a construção euclidiana, não vai do simples ao complexo. De fato, Euclides prova primeiro as proposições mais simples, mas isso não diz respeito à estrutura interna das provas utilizadas, nem caracteriza a via demonstrativa de análise. Já a análise em Descartes começa por um dado complexo (efeito que corresponde a uma propriedade ou lugar geométrico) e visa encontrar a sua causa algébrica correspondente (equação algébrica). Já a síntese faz o percusso inverso no encadeamento das proposições. Logo, o método de prova de Euclides não labora com o conceito de simplicidade, pois, tal conceito não é definido nem pela análise do complexo em partes simples, nem pela síntese do complexo a partir do simples.

[325] *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).

Defende-se, então, nesta pesquisa que, a "ordem das razões" concebida e empreendida por Descartes é constituída por preceitos lógicos oriundos das "longas cadeias de razões, tão simples e fáceis, de que os geômetras se servem para chegar às suas mais difíceis demonstrações". Como se sabe, as longas cadeias de razões (ordem das razões) que Descartes menciona no *Discurso do método* se referem também ao "método de análise (e síntese)" dos antigos geômetras, portanto, Gueroult se equivoca ao distinguir duas ordens no sistema filosófico de Descartes, a saber, "a ordem analítica e a ordem sintética"; quando, de fato há apenas uma ordem (das razões) que, por sua vez, prescreve duas vias demonstrativas, a saber, as vias de análise e síntese. Eis o esclarecimento que o próprio Descartes faz a respeito deste assunto:

> No que se refere ao modo de escrever dos geômetras, eu distingo duas coisas, a saber, a ordem e maneira de demonstrar. A ordem consiste apenas em que as coisas propostas primeiro devem ser conhecidas sem o auxílio das seguintes. E que as seguintes devem ser dispostas de tal maneira que sejam demonstradas apenas pelas coisas que as precedem. […] Já a maneira de demonstrar é dupla: uma se faz por análise, e a outra por síntese. [326]

Segue Descartes: "A análise mostra a verdadeira via pela qual a coisa foi descoberta, metodicamente e como que *a priori"*. [327] Agora segue a tradução do latim para o francês feita por Clerselier: "A análise mostra a verdadeira via pela qual uma coisa foi metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas".[328] E, em relação a síntese, Descartes diz:

> A síntese, ao inverso [da análise], por uma via oposta e como que buscando *a posteriori* (embora a própria prova seja nesta talvez mais *a priori* que naquela) demonstra, na verdade claramente o que está contido em suas conclusões, e serve-se de uma longa série de definições, postulados, axiomas, teoremas e problemas .[329]

Agora segue a tradução feita do latim para o francês de Clerselier:

---

[326]*Secondes Responses* (AT, IX, 121). De acordo com Descartes, o método consiste na ordem dos objetos sobre os quais incide o entedimento. Cf. *Regulae* (AT, X, 379).

[327]*Secundae Responsiones* (AT, VII, 155). Segue a versão original em latim: *Analysis veram viam ostendit per quam res methodice & tanquam a priori inventa est, adeo ut, si lector illam sequi velit atque ad omnia satis attendere, rem non minus persecte intelliget suamque reddet, quam si ipsemet illam invenisset*. *Secundae Responsiones* (AT, VII, 155).

[328]*Secondes Reponses* (AT, IX, 121).

[329]*Secundae Responsiones* (AT, VII, 156). Segue a versão original em latim: *Synthesis è contra per viam oppositam & tanquam a posteriori quaesitam (etsi saepe ipsa probatio sit in hac magis a priori quam in illa) clare quidem id quod conclusum est demonstrat, utiturque longa definitionum, petitionum, axiomatum, theorematum, & problematum*. *Secundae Responsiones* (AT, VII, 156).

> A síntese, ao contrário, mostra por um caminho inteiramente diverso e como que examinando as causas por seus efeitos (embora a prova que contém seja talvez também dos efeitos pelas causas), demonstra, na verdade claramente o que está contido em suas conclusões, e serve-se de uma longa série de definições, postulados, axiomas e teoremas. [330]

Para Gueroult, as "justificações profundas" do sistema filosófico de Descartes apenas podem ser dadas pela "ordem analítica" e, somente, a partir das *Meditações*. Já a "ordem sintética" serve apenas para oferecer esclarecimentos complementares. Gueroult: "A

---

[330]*Secondes Reponses* (AT, IX, 122). Seguindo as indicações de Alquié (ALQUIÉ, 1987, p. 582), Loparic afirma na obra *Descartes Heurístico* que, o relato de Descartes, exposto na *Secundae Responsiones* e as respectivas traduções feitas por Clerselier não podem ser compatibilizados, quer tomemos os termos *a priori* e a *posteriori*. Segundo Alquié, afirma Lorapric, "o próprio Clerselier teria escolhido o argumento que diz respeito à direção da argumentação (se esta parte das causas ou dos efeitos)". De acordo com essa acepção, a análise "revela a partir dos efeitos na direção das causas", ou seja, na análise se argumenta a partir dos efeitos na direção das causas, *a posteriori*. Mas isso é um contrassenso, sustenta Alquié, e não uma tradução do latim que diz que a análise opera "como que *a priori*" Cf. ALQUIÉ, 1987, p. 582. Loparic: "Da mesma maneira, se a síntese "examina as causas por seus efeitos", como quer a tradução, como entender o latim quando diz que ele vai por uma via "como que busca *a posteriori*"? Se supusermos propõe Loparic, que *a priori* e a *posteriori* significam momentos da construção da ciência, de acordo com o segundo sentido discriminado acima, o original latim passa a fazer sentido. Mas então prossegue Alquié, a tradução contém um contra-senso lógico. Em nenhum dos casos, conclui Alquié, é possível reconciliar o texto de Clerselier com o original de Descartes. Loparic acredita que a resposta para as perplexidades de Alquié pode ser encontrada à luz do relato pappusiano sobre o método de análise e síntese e das adaptações que este sofreu nas mãos de Descartes. Para isso, ele tenta entender a afirmação do original em latim de que a análise procede "como que *a priori*". Segundo ele, não é necessário supor, como Alquié, que Descartes estaria pensando na prioridade temporal da análise. Mas se pode dar ao termo "análise" o sentido tradicional a partir da descrição pappusiana. Descartes não parece fazer mais do que recordar Pappus quando diz que a análise problemática começa supondo a incógnita "como se fosse" dada (e, nesse sentido, *a priori*) e que a análise teórica trata o teorema a ser provado "como se fosse" verdadeiro (e, nesse sentido, *a priori*). Clerselier parece, todavia, interpretar o original de Descartes e, tal interpretação, é correta e esclarecedora. No que diz respeito a descrição sintética, diz Loparic "resta-nos compatibilizar o "como que buscando *a posteriori*" de Descartes e o "como que examinando as causas por seus efeitos" de clerselier. Descartes parece querer dizer que a síntese, sendo uma via oposta à análise, começa onde a análise termina, procedendo, nesse sentido, *a posteriori*. Mas ele sabe que a síntese apenas deve levar em conta proposições sobre verdadeiros princípios descobertos no termino da análise. Por isso, ele diz que procede "como" *a posteriori*. Essa interpretação é confirmada pela ressalva do parêntese que segue o texto latino: a prova na síntese é dita ser "amiúde mais *a priori*" que na análise. Aqui surge, entretanto, uma nova pergunta: como interpretar o comparativo "mais"? Ele implica, aparentemente, que a análise também utiliza elementos *a priori* e que possivelmente a síntese também se vale de elementos *a posteriori.* Segundo Pappus, a análise teórica de um teorema proposto que vai em busca das premissas que poderiam fundamentá-lo procede de duas maneiras: seja fazendo suposções das quais este poderia ser deduzido, seja efetivamente dele deduzindo consequências, na esperança de que as recíprocas sejam verdadeiras. No segundo caso, princípios *a priori* estabelecidos podem ser utilizados para facilitar as deduções. Por isso, a análise teórica não procede somente *a posteriori* (a partir do efeito, isto é, do teorema suposto como verdadeiro), mas também *a priori*, utilizando-se de axiomas e teoremas já conhecidos. […] "Voltemo-nos, finalmente, para o texto de Clerselier a fim de tentar explicar o que significa proceder "como que examinando as causas por seus efeitos". Não outra coisa, parece-nos, do que mostrar quais são os efeitos que delas se seguem. Esse exame não equivale, necessariamente, a uma tentativa de confirmação, porque as causas assim estudadas devem poder ser conhecidas diretamente. Isso explica o "como que". Resta interpretar a ressalva do parêntese: "(embora a prova que [a síntese] contém seja amiúde também dos efeitos pelas causas)". O uso típico da síntese não é o de "examinar" o que se segue das causas, mas o de partir de causas conhecidas para provar (*a priori*) a existência deste ou daquele efeito". Cf. LOPARIC, 1997, p. 143-149.

demonstração sintética não é, com efeito, a *verdadeira via* nem mesmo na geometria porque [...] ela não ensina o método pelo qual a coisa foi verdadeiramente inventada [descoberta]; na metafísica, onde as noções primeiras, em virtude do seu desacordo com os sentidos não podem ser facilmente aceitas, ela é, em particular inadequada".[331] Entretanto, diferentemente do argumento de Gueroult, Descartes não relata que as demonstrações sintéticas não oferecem as verdadeiras justificativas porque essa via não faz ver, ao mesmo tempo, como as provas foram encontradas, mas, que tais provas são capazes de "melhor arrancar o consentimento do leitor, por mais obstinado e opiniático que seja".[332] Descartes, contudo, entende que essas provas não fornecem a plena satisfação ao entendimento daqueles que desejam cultivar a razão. Cabe, todavia, assinalar que tal insatisfação não diz respeito ao âmbito demonstrativo das provas obtidas pela via sintética, mas ao ensejo de tornar os espíritos capazes de conceber um meio que cultive a razão.

Ora, o que Descartes propõe é a utilidade da aplicação das "demonstrações sintéticas" em virtude do progresso das ciências, todavia, tais demonstrações não servem para se conceber descobertas, mas sim expor de maneira não objetável os problemas previamente resolvidos ou descobertos pela via analítica. Para Descartes a via sintética, portanto, é apta, sobretudo "para apresentar o conjunto dos resultados previamente obtidos graças à via analítica de descoberta, de maneira que possa arrancar o melhor consentimento do leitor, por mais obstinado e opiniático que seja". [333] Então, caso se retome a posição proposta por Gueroult de que as "justificações profundas" do "sistema filosófico cartesiano" apenas podem ser dadas pela "ordem analítica" e, somente, a partir das *Meditações* [334] e que, por isso: "Descartes opõe a *Dióptrica* e os *Meteoros*, que demonstram as causas por meio da explicação de que essas causas trazem aos efeitos, os quais são certos, ao *verdadeiro método* (que será o dos *Princípios*), onde essas causas serão deduzidas das verdades primeiras (concebidas anteriormente nas *Meditações*). Eis porque, apesar da demonstração pelos efeitos, essas [causas] serão designadas ainda de suposições", [335] constatar-se-á mais um equívoco, pois Gueroult além de não explicitar o que é o "*verdadeiro método*", o que lhe obrigaria a dizer que tal método se encontra na *Geometria* de 1637 (e, não nos *Princípios*, e que é concebido na *Geometria* e não nas *Meditações*, embora as *Meditações* seja

[331] Cf. GUEROULT, volume 1, 1968, p. 22-23.
[332] *Secondes Responses* (AT, IX, 122).
[333] *Secondes Responses* (AT, IX, 121-122).
[334] Cf. GUEROULT, volume 1, 1968, p. 25.
[335] GUEROULT, vol. 2, 1968, p. 10, nota 15.

exposta mediante uma exposição analítica seguida pelo verdadeiro método) não compreende a real dimensão das demonstrações sintéticas fornecidas por Descartes, a saber, "apresentar o conjunto dos resultados previamente obtidos graças à via analítica de descoberta, de maneira que possa arrancar melhor o consentimento do leitor, por mais obstinado e opiniático que seja" e, diante disso, conseguir o progresso das ciências. Eis o que o próprio Descartes diz a respeito do método que inventara e de suas respectivas demonstrações:

> […], por exemplo, na *Dióptrica* e nos *Meteoros* eu apenas procurei persuadir os leitores que o meu método era melhor que o usual, mas eu provei isso na minha *Geometria*, pois, por meio do raciocínio exposto nesta obra, eu resolvi uma questão que, segundo Pappus, não pode ser resolvida por nenhum dos antigos geômetras. [336]

O método, portanto, é concebido mediante a resolução analítica do problema proposto por Pappus. E, no que se referem às demonstrações, Descartes diz:

> Pergunta se considero que o que escrevi a respeito da refração é uma demonstração; penso que sim, ao menos na medida em que é possível fornecer uma demonstração nesses assuntos, sem antes haver demonstrado os princípios da Física pela Metafísica (algo que espero fazer algum dia, mas que não fiz até o presente momento), e na medida em que qualquer outra questão de Mecânica, Óptica, Astronomia ou de qualquer outra matéria, que não seja puramente a Geometria ou a Aritmética, tenha sido alguma vez demonstrada. Mas, requerer de mim demonstrações geométricas em uma matéria que depende da Física é pretender que eu faça o impossível. E se chamam demonstrações somente às provas dos geômetras, então, teríamos que dizer que Arquimedes jamais fez demonstrações na Mecânica […] etc.…, e não é o que normalmente o que se diz. Em tais matérias nós nos sentimos satisfeitos se os autores, uma vez que pressupuseram algumas coisas que não são manifestamente contrárias à experiência, prosseguem de maneira consistente e não cometem nenhum erro lógico, ainda que suas suposições não sejam exatamente verdadeiras. [337]

Assim, o que Descartes alega é que todas as vezes que as experiências são orientadas de maneira consistente (ou seja, metodicamente) por uma demonstração geométrica, não haverá, pois, nenhum erro lógico, ainda que suas suposições não sejam exatamente verdadeiras.

Gueroult, portanto, está correto ao afirmar que as "justificações profundas" do sistema filosófico cartesiano apenas podem ser dadas pela via analítica, e, somente, a partir das *Meditações*, em virtude da análise ensinar a Descartes a verdadeira via pela qual a coisa é

[336] *Correspondance* (AT, I, 478).
[337] *Correspondance* (AT, II, 141-142).

metodicamente descoberta e as *Meditações* contemplar os princípios gerais da metafísica e da física cartesiana, entretanto, de maneira diferente de Gueroult, sustenta-se nesta pesquisa que a despeito do caráter persuasivo das justificações científicas apresentadas por Descartes nos seus ensaios científicos de 1637, as suas demonstrações geométricas explicitadas pela via sintética e constituídas metodicamente como "causas", não são efetivamente a mesma coisa e não se mantém como meras suposições mas, viabilizam mediante a ordem das razões a constatação de que as provas pelos efeitos são consonantes com tais demonstrações. [338]

Defende-se nesta pesquisa que a ordem das razões proposta por Descartes é oriunda dos preceitos lógicos expostos no *Discurso do método* e ressignificados na *Geometria*. Acrescenta-se, ainda que a ordem das razões possibilita a Descartes a sistematização entre uma demonstração geométrica e uma justificação científica. [339]

---

[338]Ainda na obra *Descartes Heurístico* Loparic relata que a descrição cartesiana do método combinado de análise e síntese pode ser entendida e compatibilizada *in Toto* à luz do que Pappus diz sobre esse método, mas ao mesmo tempo admite que haja uma diferença importante entre a síntese pappusiana e a cartesiana. Diz ele, "Em Pappus, que trabalha exclusivamente no domínio da matemática, a síntese sempre parte de preposições tidas como conhecidas de maneira mais evidente". E, em seguida, Loparic se equivoca ao dizer: "Isso não é mais verdade em Descartes. A síntese cartesiana não precisa partir sempre de proposições evidentes e pode também utilizar proposições meramente hipotéticas ou até mesmo reconhecidamente falsas. Exemplos de tais sínteses encontram-se na *Dióptrica*, nos *Meteoros* […], onde hipóteses apenas prováveis ou mesmo positivamente falsas são tomadas como pontos de partida da síntese. Isso significa que, em Descartes, uma prova sintética não equivale a uma demonstração". Cf. LOPARIC, 1997, p. 149. Ora, Loparic assim, como Battisti na obra *Método de análise em Descartes*, confundem o papel do método e, a sua respectiva aplicação às ciências particulares (tais como a *Dióptrica* e os *Meteoros*), com uma investigação experimental que prescreve não mais uma síntese neste momento do exame, mas procedimentos que viabilizam Descartes, a partir de hipóteses e analogias, a reconstrução dos efeitos que reproduzam as características do fenômeno físico investigado.

[339] Embora a tese defendida na presente pesquisa se aproxime mais da tese proposta por Loparic do que a de Gueroult, sobretudo, no que diz respeito à constituição lógico-matemático do "verdadeiro método" de Descartes, em muito diferencia da critica feita por Loparic ao método historiográfico empreendido por Gueroul. De acordo com Loparic: "Se as objeções contra Gueroult aqui apresentadas [na obra *Descartes Heurístico*] forem corrretas, não haverá como negar que o seu método historiográfico falhou em relação a questões essencias da filosofia cartesiana. A extensão dos mal-entendidos depõe, parece-me, contra a eficácia da historiografia em geral. A insistência em ler autores apenas internamente pode ter assim preço alto de mais". LOPARIC, 1997, p. 155. Ora, segundo Loparic, Gueroult, por exemplo, teria se equivocado quando propôs que Descartes procedera a partir do método analítico de Euclides por não ter lido outro autor, mais especificamente, Pappus. Loparic: "[...] depois de tudo o que dissemos sobre o método da geometria grega e a sua generalização feita por Descartes, não pode haver mais dúvida de que, nas *Meditações*, o fiósofo francês procede de maneira diferente da utilizada por Euclides nos seus *Elementos*. O primeiro serve-se do método de análise e dispensa a síntese (por trivial), enquanto o segundo utiliza a síntese e dispensa a análise (por querer apenas expor as verdades matemáticas elementares e não ensinar a maneira como elas foram ou poderiam ser descobertas). E esta não é a única divergência que temos com Gueroult em relação ao método cartesiano. Várias outras afirmações do historiógrafo estruturalista sobre o mesmo assunto apresentam dificuldades". LOPARIC, 1997, p. 149. Então, de maneira diferente da posição de Loparic, explicitou-se até o presente momento desta pesquisa que é possível compreender e interpretar o método de Descartes a partir do inteiror de suas obras e, assim, interpretar a sua filosofia a partir de um "sistema fechado".

CAPÍTULO III

Aplicação do método: o estatuto do conhecimento na ciência cartesiana

Sustenta-se nesta pesquisa que na *Dióptrica* e nos *Meteoros*, Descartes utiliza algumas demonstrações geométricas – metodicamente adquiridas por ordem pelas vias demonstrativas de análise e síntese articuladas às medidas geométricas, aritméticas e algébricas – visando orientar as suas experimentações científicas. Essa orientação revela o início da aplicação do método na ciência cartesiana. Cabe, portanto, a um dos papeis do método encontrar demonstrações geométricas que sirvam como representações matemáticas dos fenômenos naturais.

As experimentações científicas são iniciadas, então, na *Dióptrica* e nos *Meteoros* quando Descartes encontra previamente algumas demonstrações geométricas que contemplem a lei dos senos e, a partir destas, se possam justificar experimentalmente o movimento da luz e as cores do arco-íris. Para isso, Descartes propõe dois procedimentos de investigação científica, a saber, os procedimentos de redução e reconstrução. Tais procedimentos requerem objetos manipuláveis que auxiliem através do uso de suposições e analogias a justificação experimental dos efeitos contemplados nos objetos físicos. O procedimento de redução prescreve a identificação das causas que hipoteticamente originam as características do fenômeno examinado. Inversamente, o procedimento de reconstrução prescreve a reprodução dos efeitos que analogamente produzem as características do fenômeno examinado. As identificações de tais causas e as reproduções de tais efeitos devem possibilitar a justificação experimental do movimento da luz e das cores do arco-íris. Caber assinalar que os procedimentos de redução e reconstrução seguem, de maneira respectiva, a mesma orientação lógica das vias demonstrativas de análise e síntese. Portanto, essa orientação também revela os meios pelos quais ocorre a aplicação do método nas ciências particulares de Descartes.

Nos ensaios científicos que seguem o *Discurso do método*, Descartes, todavia, não expõe de maneira explícita os conteúdos da ordem de sua investigação. Por isso, então, expõem-se primeiramente nessa pesquisa a ordem das dificuldades pela qual Descartes pretendeu justificar o movimento de refração da luz na *Dióptrica* e buscou reproduzir as cores do arco-íris nos *Meteoros*. A mencionada ordem das dificuldades diz respeito à tentativa de Descartes de recolocar o objeto de estudo científico de uma maneira viável à sua justificação experimental, ou seja, a partir de uma demonstração geométrica previamente conhecida.

3.1. Ensaios científicos publicados em 1637

A *Dióptrica* e os *Meteoros* foram publicados em 1637. Sabe-se, pois, que desde o tempo de juventude, Descartes investigava questões de Óptica e de Meteorologia. Nas *Cogitationes Privatae* (1619-1621), por exemplo, há diversas referências a problemas de Óptica. Neste período, destaca-se, sobretudo, a regra VIII das *Regras* (1628), onde Descartes assinala a diferenciação que há entre a (1) concepção matemática dos ângulos de incidência e refração e a (2) justificação física da curva anaclástica.

Há outras fontes de investigação dos primeiros escritos da *Dióptrica* e dos *Meteoros*, a saber, as possíveis influências de pesquisas dos antecessores de Descartes e os diálogos que ele manteve, por intermédio de cartas, com alguns interlocutores da sua época.

As possíveis influências que Descartes teve para iniciar os trabalhos com Óptica e Meteorologia são atribuídas principalmente aos Manuais das Escolas e as notícias das pesquisas científicas de Kepler e Mydorge.

Os Manuais das Escolas utilizados nos grandes colégios da França na primeira metade do século XVII contemplavam textos aristotélicos, interpretados pelos *Comentarii Collegii Conimbricensis*, isto é, o Curso de filosofia peripatética estabelecido no Colégio de Coimbra a partir de 1592. Descartes teve contato com os Manuais das Escolas desde meados de 1610, quando iniciou seus estudos em La Flèche. A principal referência de Descartes deste período são os comentários de Clavius à Óptica e dos Conimbricenses aos *Meteoros* de Aristóteles. Assinala-se que foi a partir desses comentários que Descartes redigiu a *Dióptrica* os *Meteoros* de 1637. [340]

[340] De acordo com Rochemonteix, os manuais dos *Comentarii Collegii Conimbricensis* são autênticas doxografias. Se for certo que os professores do colégio La Flèche seguiam, para a redação dos cursos, os Manuais dos Conimbricensis, é legitimo, porém presumir que os alunos – entre eles o jovem Descartes – tiveram contato com teorias das estruturas da matéria. Além disso, conheciam algumas das teses de Averróis e Avicena, tinham noticias da Perspectiva de Witelo (1230-1275). Rochemonteix relata ainda as seguintes considerações a respeito do ensino em La Flèche: "Em Filosofia, a lição (*lectio*) não era mais que uma explicação escrita e ditada de Aristóteles ou de São Tomás de Aquino. Cada Professor tinha os seus cadernos, as suas teses que ditava aos seus alunos [...]. A lição era constituida de duas partes: uma, da exposição do texto de Aristóteles e a outra, importante, o profesor discutia o texto em uma série de questões (*quaestiones*), extraídas do autor e suscetíveis de diferentes interpretações. Proposta a questão, expurga-a com escrupulosa atenção, de todas as questões que ainda parecessem estranhas; divide-a, se o assunto o solicita, em diversos membros distintos; define em termos [...]; deduz as provas, cuja substância é resumida em um silogismo, que o professor desenvolve com ordem, provando alternativamente, a menor e a maior. Em seguida, finalmente viriam as objeções". ROCHEMONTEIX, 1889, p. 22-28. Gilson, ao tratar do estudo de Descartes em La Flèche, relata que os Conimbricenses designam *lumen* à *luz* dos corpos transparentes e *lux* aos corpos luminosos. Eis o argumento descrito no Manual dos Conimbrincenses: "*Quaeres tamen, quandoquidem ab his naturae discrimen sustulimus quonam pacto inter se distinguantur lux primaria et secundaria, lumen, radius, splendor* [...] *Deinde interdum primariam vocari quae per directum radium funditur. Secundariam, quae a latere*

Clavius propunha o estudo das matemáticas dos antigos geômetras – tais como Euclides, Apolônio e Pappus – e as suas respectivas aplicações à Óptica. [341] Contudo, deve-se ressaltar que para Clavius as matemáticas tinham apenas um status de ciência intermediaria. Então, invertendo a ordem seguida pelos Manuais das Escolas do século XVI e do início do século XVII – [342] os quais em geral abriam com um capítulo sobre a visão – Descartes aceita a abordagem Kepleriana e inicia a *Dióptrica* abordando aquilo que é passível de observação, mas, se diferencia de Kepler ao propor a possiblidade de realizar hipóteses que "não são exatamente verdadeiras" para compreensão do movimento da luz.

3.1. A Dióptrica de Descartes

A Dióptrica é constituída por três campos de investigação. Os conteúdos destes campos articulam-se na sistematização da ciência óptica de Descartes. [343] O primeiro campo de investigação trata a Óptica a partir de uma matemática aplicada. Este campo de investigação é estabelecido nos Discursos I e II da obra. O segundo campo teórico descreve os pressupostos da psicofisiologia de Descartes. Este campo teórico é estabelecido nos Discursos III, IV, V e VI da obra. Por fim, o terceiro campo, descreve o esboço da física de Descartes. Este campo teórico é descrito nos Discursos VII, VIII, IX e X da obra. Descartes resume a exposição destes campos teóricos da seguinte maneira:

---

extra radiorum incidentiam oblique spargitur. Item lumem dici prout est in medio; radium prout a lucido corpore secundum rectam lineam procedit; splendorem prout est lumen reflexum a corpore in quo recta porrigitur". CONIMBRICENSIS., De coelo, 2, 7, 9, 2. In: GILSON, 1913, p. 159-160.

[341] Segundo Gilson, Descartes teve uma grande influência das pesquisas de Clavius. GILSON, 1987, p. 181. Jullien acrescenta que para Clavius as matemáticas tinham um lugar intermediário entre a metafísica e as ciências da natureza. Cf. JULLIEN, 1996, p. 7. Por isso, nas cartas Descartes relata amplos sinais da hostilidade aos ensinamentos de Clavius, os quais despertavam entre os "pensadores da Escola" – particularmente na área da óptica, em que, como Descartes descreve a Huygens em 1642, "os escolásticos perseguiam suas ideias, tentando cortá-las pela raiz". *Correspondance* (AT, III, 523).

[342] Marion relata que os Manuais das Escolas eram constituídos por textos que se baseavam, sobretudo, em comentários filosóficos das obras de Aristóteles. Assinala ainda que o Manual Escolástico utilizado por Descartes foi primordialmente os Comentários dos Conimbricenses. Cf. MARION, 1975, p. 20.

[343] Segundo Koyré a *Dióptrica* é um dos três Ensaios científicos que foi publicado juntamente com o *Discurso do método*, Ensaio este que se traduz em um Tratado de Óptica, compreendendo nomeadamente uma teoria da refração da luz que, pela primeira vez, estabelecia a lei do seno, assim como um estudo de novos instrumentos. KOYRÉ, 1966, p. 11. Nesta perspectiva, Cottinngham afirma: "A Ótica, ou em tradução mais literal, *La Dioptrique*, é um dos três ensaios do método que Descartes publicou com o *Discurso do método*, em 1637. Este *Ensaio* é dividido em dez Capítulos/ Discursos, que lidam respectivamente com (1) a luz, (2) a refração, (3) o olho, (4) os sentidos em geral, (5) as imagens formadas no fundo do olho, (6) a visão, (7) os meios para aperfeiçoar a visão, (8) as formas dos corpos transparentes que refratam a luz, (9) a descrição das lunetas e por fim, (10) o método da elaboração das lentes". COTTINGHAM, 1993, p. 130.

> Começarei explicando o movimento da luz; então, depois, descrevendo brevemente as partes do olho, eu darei uma explicação detalhada de como é procedida a visão; e, após ter anotado todas as coisas que são capazes de fazer a visão mais perfeita, eu mostrarei como podem ser ajudadas pelas invenções cujas quais eu descreverei. [344]

A presente pesquisa é iniciada pela exposição do segundo campo teórico de investigação. Isso porque neste campo de investigação é apresentada a ordem das dificuldades que se depara o empreendimento cientifico cartesiano. Descartes relata na *Dióptrica* que a imagem formada no pensamento não é meramente o resultado da apreensão das coisas em si mesmas. Desse modo, ele exclui a possibilidade da apreensão dos objetos de natureza composta como um dado conhecido com evidência.

A luz é o principal objeto de estudo da ciência Óptica. Entretanto, para Descartes a luz é designada como um objeto de natureza composta. Nesta perspectiva, ressalta-se que o objeto conhecido com evidência e, por isso, que orienta a ciência cartesiana, não provém diretamente de algo similar que a visão leva ao cérebro. [345] A investigação direta da luz, portanto, não é o meio pelo qual Descartes empreende o seu estudo científico. [346]

---

[344] *La Dioptrique* (AT,VI, 82-83).

[345] No início da *Dióptrica*, Descartes versa sobre os sentidos, e, em especial, a respeito da visão: "Toda a conduta de nossa vida depende de nossos sentidos, e como a visão é o mais universal e o mais nobre dos sentidos, não resta a menor dúvida que as invenções que servem para aumentar seu poder estão entre as mais úteis que podem existir. E é difícil encontrar alguma que a aumente mais do que aquelas maravilhosas lunetas que, estando em uso há pouco tempo, nos têm revelado novos astros no céu e outros novos objetos acima da terra em maior número do que nós já havíamos visto antes. Assim, levando nossa visão muito mais longe do que poderia normalmente ir a imaginação de nossos pais, essas lunetas parecem ter aberto caminho para que nós alcancemos um conhecimento da natureza muito maior e mais perfeito do que eles possuíram. Mas, para vergonha de nossas ciências, essa invenção, tão útil e tão admirável, apenas foi primeiramente alcançada pela experiência e ao acaso. Há aproximadamente 30 anos, um homem chamado Jacques Metius, oriundo da cidade de Alkmar na Holanda, que nunca estudou, apesar de ter tido um pai e um irmão que fizeram das matemáticas suas profissões respectivas, mas que tinha particular prazer em manufaturar espelhos e vidros incandescentes, compondo-os mesmo durante o inverno com o gelo, assim como a experiência mostrou que pode ser feito, tendo nessa ocasião muitos vidros de diversas formas, experimentou, felizmente, olhar através de dois, dos quais um era um pouco mais espesso no meio do que nas extremidades, e o outro, ao contrário, era muito mais espesso nas extremidades do que no meio. Ele os colocou de uma maneira tão favorável nas extremidades de um tubo, de forma que se fez assim a primeira luneta que mencionamos anteriormente. E é somente sobre esse padrão, que todas as outras lunetas que nós vimos depois, foram fabricadas, sem que ninguém, que eu saiba, tenha determinado ainda as formas exatas que esses vidros devem ter. Isso porque, apesar de ter havido desde então um grande número de bons espíritos que trataram intensamente desse assunto e encontraram, na ocasião, muitas coisas na ótica que valem mais do que as que nos tinham deixado os antigos, todavia, pelo fato de as invenções um pouco difíceis não chegarem ao último grau de perfeição logo da primeira vez, restaram ainda muitas dificuldades nessa área para me fornecer assunto para escrever". *La Dioptrique* (AT,VI, 81-82)

[346] No *Tratado da luz* (ou, *O Mundo*), Descartes reafirma essa tese da seguinte maneira: "Propondo o exame da luz, quero advertir em primeiro lugar, que pode haver alguma diferença entre o sentimento que temos da luz, isto é, a ideia que se forma em nossa imaginação pela mediação de nossos olhos, e o que existe nos objetos que produz em nós esse sentimento, que em outras palavras, diz respeito o que há na claridade ou no sol que se chama com o nome

Ao longo da *Dióptrica*, Descartes explica como os objetos físicos são decodificados através do agente da observação. Isso ocorre apenas porque tais objetos movem-se – através do movimento local dos corpos – por meio dos corpos transparentes (meio diáfano) que estão entre os próprios objetos e o observador. Sendo, pois, do âmbito fisiológico essa explicação, Descartes afirma que: "Os nervos ópticos – estando ligados ao cérebro – se movem de diversas maneiras; e, desse modo, possibilitam na mesma medida o observador visualizar o objeto de modo diversificado".[347] Por isso, para Descartes, a visualização do objeto não está ligada apenas ao movimento que ocorre no interior dos olhos, mas também ao que se passa no interior das estruturas do cérebro. Assinala-se, pois, que a rejeição inicial de inteligibilidade dos objetos físicos não diminui o estatuto do conhecimento a uma mera aparência de um mundo fictício, mas, ao contrário, converge o intuito de Descartes à possibilidade de conceber a realidade por ordem e medida. Nesta perspectiva, Gueroult [348] assinala que Descartes considera todos os tipos de explicações físicas como consequência de uma "interpretação representacional".

Os Discursos I e II da *Dióptrica* expõem os meios pelos quais se viabiliza a ciência de Descartes examinar o objeto de estudo óptico. Nestes Discursos, Descartes relata que a natureza da luz não é passível de uma compreensão científica; isto porque, ele não possui meios adequados para investigá-la. Descartes afirma no início da *Dióptrica* que:

> [...] Não é necessário dizer qual é a natureza da luz, pois acredito que é suficiente servir-me de duas ou três analogias que auxiliem a descrevê-la […] e explicar todas as propriedades que conhecemos através da utilização da experiência; e, assim deduzir [por indução] todas as demais que possamos observar. Pois nesta questão me identifico aos astrônomos, os quais fazem diversas suposições incertas, porém, ainda assim, extraem muitas consequências certas e verdadeiras, pois guardam relações com diferentes observações. [349]

---

de luz. Pois, ainda que cada um se persuada de que as ideias que temos em nosso pensamento sejam inteiramente semelhantes aos objetos dos quais procedem, não vejo, todavia, nenhuma razão que nos assegure que seja assim, senão que, pelo contrario, observo em numerosas experiências que nos devem fazer duvidar da sensibilidade". *Le Monde* (AT, XI, 3-4). A solução para a explicação da luz é a seguinte: "Dessa forma as propriedades da luz são: (1) Se estende circularmente em todas as direções ao redor dos corpos luminosos; (2) E a qualquer distância; (3) e em um instante; (4) e normalmente em linhas retas que devem ser tomadas por raios de luz; (5) vários destes raios vindo de diversos pontos podem se reunir único ponto; (6) Ou procedendo de um ponto podem se dirigir a vários; (7) ou vindo de diversos pontos e fazendo diversos outros, podem passar por um único sem obstaculizar-se entre si, a saber, quando sua força é bastante desigual e a de uns é muito maior que a de outros; (9) e, finalmente, podem ser desviados por reflexão; (10) ou por refração; (11) e sua força pode aumentar; (12) ou diminuir segundo as diversas disposições ou qualidade da matéria que os recebe". *Le Monde* (AT, XI, 97-98).

[347] *La Dioptrque* (AT, VI, 126).

[348] Cf. GUEROULT, 1954, p. 1-37.

[349] *La Dioptrique* (AT, VI, 83). Ainda tratando a respeito da natureza da luz, Descartes relata numa carta a Mersenne (Carta a Mersenne, 27 de maio de 1638) que: "[...] O que pretendo ter demonstrado, no que refere à refração, não depende de modo algum da verdade sobre a natureza da luz, nem do fato de que ela se faça ou não em um instante,

Então, o que deve estar diante de Descartes é algo que lhe seja viável experimentalmente.[350] Por isso é que ele faz menção à utilização de diversos objetos manipuláveis que lhe possibilite, por meio de analogias, a justificação científica do fenômeno natural a partir da demonstração geométrica que contemple a lei dos senos. [351]

---

mas somente do fato de ser uma ação, como suponho, ou uma virtude que segue as mesmas leis que se procede no movimento local dos corpos, na forma pela qual esta se transmite de um lugar para a um outro, e se comunica pela mediação de um licor muito sutil que se encontra nos poros dos corpos transparentes" *Correspondance* (AT, II, 143). Kobayashi acrescenta que: "Na *Dióptrica*, para explicar o fenômeno da refração, Descartes propõe como modelo o movimento de uma bola. Isto parece, numa primeira compreensão, indicar que ele adota igualmente uma teoria corpuscular quanto a essa questão. Contudo, este ensaio óptico não tem por objetivo explicar a natureza da luz, mas apenas tratar da refração."KOBAYASHI, 1993, p.110. Duchesneau assinala ainda que na *Dióptrica*, Descartes suspende qualquer pesquisa que pretenda explicar diretamente a "natureza da luz". Cf. DUCHESNEAU, 2000 , p.63-90.

[350]Cf. *La Dioptrque* (AT,VI, 83). Nas *Regulae* Descartes ratifica essa atitude: "Com efeito, por exemplo, suponhamos que eu queira examinar se alguma potência natural pode, no mesmo instante, exercer-se num lugar afastado, atravessando todo o meio intermediário. Não é imediatamente para a potência magnética ou para a influência dos astros, nem sequer é para rapidez da ação da luz que voltarei minha atenção para procurar se por acaso tais ações são instantâneas, pois isso seria mais difícil de provar do que o que é o objeto de minha investigação; mas refletirei, ao contrario, no movimento local dos corpos, porque não pode haver nada em todo esse gênero que seja mais perceptível aos sentidos. E observarei, por exemplo, que uma pedra não pode passar instantaneamente de um lugar para o outro, porque é um corpo. Ao passo que uma potência semelhante àquela que move a pedra se comunica somente de uma maneira instantânea, se ela passa para o estado descoberto de um sujeito para o outro. Assim, imprimindo um movimento à extremidade de um bastão, por mais comprido que ele seja, concebo facilmente que a potência que serve para mover essa parte do bastão move necessariamente num único e mesmo instante todas as suas outras partes, porque ela se comunica ao estado descoberto, sem existir em algum corpo, por exemplo, uma pedra, que serviria para transportá-la. Igualmente, se quiser saber como uma única e mesma *causa simples*, pode produzir a um só tempo efeitos contrários, [...] considerarei uma balança, que tenha num único e mesmo instante, um dos pratos levantado e o outro abaixado pelo mesmo peso ". *Regulae ad directionem ingenii* (AT, X, 402- 403). Segue o texto latino: "*Nam, e. g., si velim examinare, utrum aliqua potentia naturalis possit eodem instanti transire ad locum distantem, et per totum medium, non statim ad magnetis vim, vel astrorum influxus, sed ne quidem ad illuminationis celeritatem mentem convertam, ut inquiram, utrum forte tales actiones fiant in instanti: hoc enim difficilius possem probare quam quod quaeritur; sed potius ad motus locales corporum reflectam, quia nihil in toto hoc genere magis sensibile esse potest, et advertam, lapidem quidem non posse in instanti ex uno loco ad alium pervenire, quia corpus est; potentiam vero, similem illi quae lapidem movet, nonnisi in instanti communicari, si ex uno subjecto ad aliud nuda perveniat. Verbi gr., si quantumvis longissimi baculi unam extremitatem moveam, facile concipio potentiam, per quam illa pars baculi movetur, uno et eodem instanti alias etiam omnes ejus partes necessario movere, quia tunc communicatur nuda, neque in aliquo corpore existit, vt in lapide a quo deferatur. Eodem modo, si agnoscere velim, quomodo ab una et eadem simplici causa contrarii simul effectus possint produci, non pharmaca a Medicis mutuabor, quae humores quosdam expellant, alios retineant; non de Luna hariolabor, illam per lumen calefacere, et refrigerare per qualitatem occultam; sed potius intuebor libram, in qua idem pondus uno et eodem instanti unam lancem elevat, dum aliam deprimit, et similia*". *Regulae ad directionem ingenii* (AT, X, 402- 403). Neste mesmo enfoque, e em particular ao último ponto das *Regulae*, Descartes relata numa carta datada em 12 de setembro de 1638, a Mersenne que: "[...] Não é de modo algum a diferença da velocidade [...] mas a diferença do espaço que faz com que dois pesos nas extremidades de uma balança se equilibrem em função de uma determinada proporção". *Correspondance* (AT, II, 435-436).

[351] Cf. *Correspondance* (AT, II, 362-373). Numa carta a Morin, datada de 12 de setembro de 1638, Descartes relata que: "Nas analogias que utilizo, comparo movimentos somente com outros movimentos, ou formas com outras formas, isto é, comparo coisas que são por demais diminutas para serem percebidas pelos sentidos com outras que podem por eles ser percebidas, sendo a diferença entre estas e aquelas a mesma que distingue um círculo grande de um pequeno. Afirmo, portanto, que analogias dessa espécie são as mais adequadas de que dispõe o entendimento humano para descobrir a certeza nos problemas da física." *Correspondance* (AT, II, 367-368).

As analogias que Descartes realiza na *Dióptrica* são oriundas das seguintes observações: o movimento local de uma bengala, o movimento do lograr de uvas e o movimento de uma bola arremessada por uma raquete. [352] Nesta pesquisa, sustenta-se que a partir da demonstração geométrica da lei dos senos de *i* e *r*, Descartes empreende tais analogias visando explicar a curva anaclástica, isto é, a forma de uma superfície de refração que reúne os raios de luz em único foco.

3.1.1. Interpretações historiográficas da Óptica de Descartes: Demonstração geométrica da lei dos senos e a justificação da refração da luz

Na carta datada de 13 de novembro de 1629, Descartes expõe uma demonstração geométrica, na qual é possível determinar uma propriedade analítica que viabilize a dedução da lei dos senos. Nesta carta, Descartes relata a Ferrier que a linha do quadrante seja AE (ver figura 37), e que o prisma de cristal aplicado sobre essa linha seja FGH, podendo ter qualquer tamanho, desde que a linha GH forme um ângulo reto com AE, para que o raio luminoso, atravessando a pínula I, siga diretamente até D e não seja refratado ao entrar na lente, mas somente ao sair dela, isto é, no ponto D. Após essas primeiras indicações, Descartes ressalta a Ferrier: "notai, então, a linha GDF, que representa a inclinação da lente na qual ocorre a refração, o ponto D, no qual ela é cortada pelo raio luminoso, e o ponto A, onde o raio luminoso IDA corta a linha do quadrante".[353] Diante disso, se pode conceber o ângulo ADF. Em seguida, a partir do ponto D, Descartes relata que se deve traçar outra linha DC, de modo que o ângulo FDC seja igual ao ângulo ADF e, consequentemente, de maneira a que o ângulo ADC seja o dobro do ângulo ADF. Descartes acrescenta a Ferrier que se pode, assim, identificar o ponto em que a linha DC corta o quadrante e, quando o identificar, se deverá traçar a linha CK, igual a CD, e a AL, igual a AD.[354] Após essa identificação, poder-se-á encontrar o ponto médio entre os pontos K e L, isto é, B. Dispondo dos três pontos, A, B e C, os quais indicam a proporção entre as linhas AB e BC, poder-se-á mediante essa proporção explicar as refrações. Para isso, se deve considerar que o raio ID se refrata em D e se dirige a A. Traça-se a linha DC, que corta o quadrante EA em C, de modo

[352] Marion assinala que o recurso metodológico das analogias/ comparações é o meio que Descartes utliza na *Dióptrica* para explicar o fenômeno óptico da refração da luz. Cf. MARION, 1975, p. 79.
[353] *Correspondance* (AT, I, 62).
[354] Cf. *Correspondance* (AT, I, 62-63).

que o ângulo CDF seja proporcional ao ângulo ADF. Logo: CK = CD e AL = AD. Assim, procura-se KL em B.

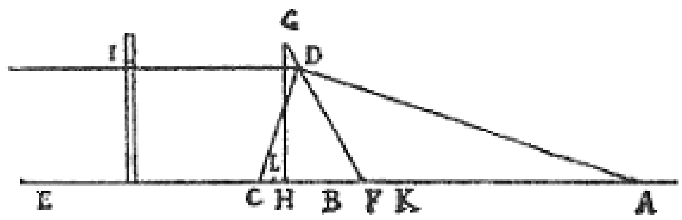


FIGURA 37 (AT, I, 63)

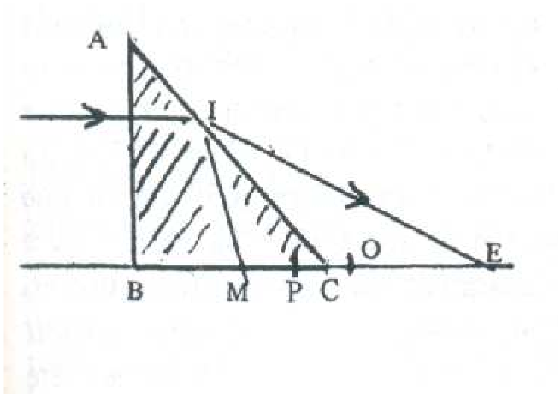
É possível a um leitor atento determinar uma propriedade analítica mediante a proporção identificada na construção da figura que Descartes enviou a Ferrier. Tal propriedade possibilita deduzir a lei dos senos de Descartes. Ao construir uma nova figura, Costabel relata que Descartes colocaria os pontos K e L na horizontal, de maneira que: MK= MI e EL = EI (ver figura 38.2), e declararia a Ferrier que o meio P de KL divide o segmento ME em uma proporção que não depende da natureza do vidro do triângulo ABC (ver figura 38.1).[355] Nota-se, pois, que sobre a figura enviada a Ferrier está ausente a normal em I, sobre a superfície do vidro AC, enquanto que essa normal é encontrada na figura de Mydorge (mas a normal não tem nenhuma funcionalidade) e é também encontrada na figura de Beeckman (onde a figura ocupa um papel fundamental, pois nela a refração é regulada pela relação entre os senos dos ângulos com a normal).[356] Restabelecendo essa propriedade analítica, ou seja, a normal ID – que Descartes não traçou na carta a Ferrier – é possível identificar os senos de *i* e *r* com essa normal (rever figura 38.2). [357] Identifica-se, portanto, que as distâncias de M e de E a ID, são expressas de duas maneiras:
DM sen i = MI sen r e *DE sen i = EI sen r*.

---

[355] O triângulo ABC encontra-se na figura de Mydorge (vide COSTABEL, 1982, p. 67), cujo qual viabiliza a construção em que Costabel explica a determinação da normal e a dedução dos senos (rever figura 38.1). É interessante também observar que na *Geometria*, Descartes explica a inteligibilidade analítica da normal do seguinte modo: “Conhecendo a relação que têm todos os pontos de uma linha curva com todos de uma linha reta é possível conceber a relação que eles têm com todos os outros pontos e linhas dadas; e, a partir disso, viabiliza-se conhecer outras linhas ou pontos que tenham com a linha curva as equações da normal”. *La Geometrie* (AT, VI, p. 413). A normal, portanto, possibilita a Descartes uma demonstração racionalmente legítima.
[356] Descartes em uma visita a Beeckman, em 8 de outubro de 1628, mostrou-lhe que a partir da demonstração geométrica pela qual enviaria a Ferrier era possível determinar a lei dos senos. Beeckman expôs essa explicação de Descartes da seguinte maneira: “Uma vez determinada a quantidade de refração para um ângulo, se pode deduzir o valor para os demais através da lei dos senos: como *ab* está para *hg*, ou *cd* está para *if*”. Segue a versão original latina: *Cognito uno angulo refractionis, deducit inde reliquos secundum angulorum sinus: ut enim, inquit, ab ita hg, ou cd ad if*”. DESCARTES E BEECKMAN (AT, X, p. 336).
[357] COSTABEL, 1982, p. 69. Assinala-se, pois, que Costabel, Shea e Schuster investigaram o modo como Descartes encontrou a demonstração geométrica que contempla a lei dos senos.

Logo:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{MI}{DM} = \frac{EI}{DE} = \frac{EI - MI}{EM}$$



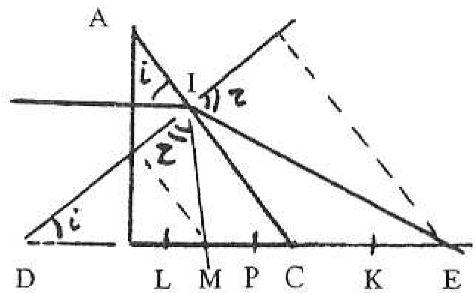


Figura 38.1 (COSTABEL, 1982, p. 67) **Figura 38.2** (COSTABEL, 1982, p. 69)

Mas pela rotação de EI e MI na horizontal em EL e MK, a diferença EI – MI é também a de EL e MK. Logo, constata-se igual à EP – MP. Na sequência, se identifica que P é o meio de KL. Restituindo o local dos senos em *n*, obtém-se: $EP - MP = \frac{1}{n}EM$, enquanto que $EP + MP = EM$. Resultado que a razão de EP a PM é de ($n+1$) a ($n-1$). [358]

Logo após conceber metodicamente a lei dos senos em meados do início da década de 1620,[359] Descartes pretende explicar a curva anaclástica nas *Regras para orientação do espírito*.[360] Para isso, ele utiliza o procedimento científico de redução, a saber, identificando hipoteticamente uma causa física (causa natural) que lhe possibilite a compreensão do movimento de refração da luz. Essa causa designa a "curva anaclástica", na qual "os raios paralelos se refratam de tal modo que todos, depois da refração, tenham um único ponto de intersecção". [361]

Historiadores da filosofia cartesiana, destacando-se, sobretudo, Garber, Costabel e Tournadre, interpretam de diversas maneiras os meios pelos quais Descartes concebe a lei dos senos, examinam a curva anaclástica e pretendem explicar o movimento de refração da luz

---

[358] Cf. COSTABEL, 1982, p. 68-69.

[359] *DM sen i = MI sen r* e *DE sen i = EI sen r*. Logo: *sen i / sen r = MI / DM = EI/DE = EI – MI / EM*. Cf. *Correspondance* (AT, I, 62-63).

[360] Descartes relata em uma carta datada de junho de 1632 que a sua explicação da refração da luz decorre de uma comparação entre os senos de *i* e *r*. Cf. *Correspondance* (AT, I, 255).

[361] Segue a versão original latina: *in qua scilicet radii paralleli ita refringantur, ut omnes post refractionem se in uno puncto intersecent*. *Regulae* (AT, X, 394).

descrito por Descartes na *Dióptrica*. Tais interpretações contribuem a presente pesquisa em virtude de tratarem de determinados procedimentos de investigação da ciência de Descartes, como, por exemplo, os procedimentos de redução e reconstrução; diferenciarem, por um lado, a demonstração matemática da lei dos senos e, por outro, a explicação da curva anaclástica, e exporem o modo como Descartes utiliza analogias ao explicar o movimento de refração da luz. Todavia, essas interpretações carecem explicitar a diferenciação epistemológica que há entre (1) a exigência de uma exatidão matemática operacionalizada pelos raciocínios do método e (2) os meios de orientação do método aplicados à prática científica de Descartes. Defende-se nesta pesquisa que é a partir dessa diferenciação que se pode esclarecer o modo pelo qual Descartes aplica os raciocínios do seu método ao explicar o movimento de refração da luz na *Dióptrica*. [362]

Gerber alega que o método de 1637 utilizado por Descartes na *Dióptrica* é precisamente aquele das *Regras para a orientação do espírito*, ou ao menos, aquele que constitui as últimas etapas dessa obra. Porém, Garber ressalta que desde 1637 e, certamente depois, esse método começou a mostrar limites. [363] Para Garber sustentar que o método de 1637 é fundamentalmente aquele das *Regras* e, para apoiar essa interpretação, foi necessário que ele primeiramente se dedicasse a um estudo minucioso das *Regras*. Segundo Garber [364], o método de Descartes tem duas etapas, a saber, "uma etapa redutiva, em que as proposições complicadas e obscuras são reduzidas a proposições mais simples e uma etapa construtiva (reconstrutiva), onde é possível regressar das proposições mais simples em direção às mais compostas". A partir dessa interpretação do método cartesiano, Garber examina minuciosamente os passos que Descartes realiza para explicar a curva anaclástica (ver tabela I):[365]

[362] Em uma carta datada de maio de 1638, Descartes relata que a sua explicação da refração da luz é oriunda de uma demonstração, mas exigir-lhe demonstrações geométricas em uma ciência que depende da física é querer que ele faça o impossível Cf. *Correspondance* (AT, II, 141-142). Além disso, nas *Regras para a orientação do espírito*, Descartes demarca a diferenciação que há entre (1) a demonstração matemática da lei dos senos e (2) a investigação da curva anaclástica. Cf. *Regulae* (AT, X, 393-394).

[363] Cf. GARBER, 2004, p. 54.

[364] Cf. GARBER, 2004, p. 118. Garber interpreta o método cartesianao a partir das seguintes considerações de Descartes expostas nas *Regras*: "Nós lhe ficaremos ciosamente fiéis, se reduzirmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras a proposições mais simples, e, em seguida, a partir da intuição daquelas que são as mais simples, procurarmos elevar-nos pelas mesmas ao conhecimento de todas as outras". Segue a versão original latina: *Atque hanc exacte servabimus, si propositiones involutas & obscuras ad simpliciores gradatim reducamus, & deinde ex omnium simplicissmarum intuitu ad aliarum omnium cognitionem per eosdem gradus ascendere tentemus*. *Regulae* (AT, X, 379). Garber ressalta que essas etapas de redução e composição não são as mesmas da análise e síntese. Cf. GARBER, 2004, p. 118.

[365] GARBER, 2004, p. 118. Essa tabela fornecida por Garber foi também investigada pela publicação original de língua inglesa. GARBER, 2001, p. 37.

Tableau 1. — *L'exemple de la ligne anaclastique*
(Règles pour la direction de l'esprit, Règle VIII*)*

Q1. Quelle est la forme d'une ligne (lentille) dans laquelle les rayons parallèles sont réfractés de telle sorte que tous aient un seul point d'intersection ?

Q2. Quelle est la relation entre l'angle d'incidence et l'angle de réfraction (c'est-à-dire la loi de la réfraction) ?

Q3. Comment la réfraction est-elle causée par la lumière passant d'un milieu dans un autre ?

Q4. Comment un rayon de lumière pénètre-t-il un corps transparent ?

Q5. Qu'est-ce que la lumière ?

Q6. Qu'est-ce qu'une puissance naturelle.

Intuition : une puissance naturelle est...

Construction : la construction consiste à parcourir cette série de questions de Q5 à Q1, déduisant la réponse à chaque question à partir de la réponse à la question précédente.

Garber estabelece seis questões que respondidas visam explicar a "curva anaclástica":

(Q1) Qual é a forma da linha com a qual os raios paralelos são refratados de maneira que após a refração tenham um único ponto de intersecção?

(Q2) Qual é a relação entre o ângulo de incidência e o ângulo de refração?

(isto é, a lei de refração)?

(Q3) Como a refração é causada pela luz ao passar de um meio para o outro?

(Q4) Como os raios de luz atravessam os corpos transparentes?

(Q5) O que é a luz?

(Q6) O que é uma potência natural?

Garber interpreta o método cartesiano a partir da exposição da curva anaclástica descrita na regra VIII das *Regras*. Eis a interpretação de Garber: [366] o problema que Descartes se propõe é a

[366] Cf. GARBER, 2004, p. 118-119. Segue o texto latino: *Si, verbi gratia, quaerat aliquis solius Mathematicae studiosus lineam illam, quam in Dioptrica anaclasticam vocant, in qua scilicet radii paralleli ita refringantur, ut omnes post refractionem se in uno puncto intersecent, facile quidem animadvertet, juxta regulas quintam et sextam, hujus lineae determinationem pendere a proportione, quam servant anguli refractionis ad angulos incidentiae; sed quia hujus indagandae non erit capax, cum non ad Mathesim pertineat, sed ad Physicam, hic sistere cogetur in limine, neque aliquid aget, si hanc cognitionem vel a Philosophis audire, vel ab experientia velit mutuari: peccaret enim in regulam tertiam. Ac praeterea haec propositio composita adhuc est et respectiva; atqui de rebus tantum pure simplicibus et absolutis experientiam certam haberi posse dicetur suo loco. Frustra etiam proportionem inter ejusmodi angulos aliquam supponet, quam omnium verissimam esse suspicabitur; tunc enim non amplius anaclasticam quaereret, sed tantum lineam, quae suppositionis suae rationem sequeretur. Si vero aliquis, non solius Mathematicae studiosus, sed qui, juxta regulam primam, de omnibus quae occurrunt veritatem quaerere cupiat, in eandem difficultatem inciderit, ulterius inveniet, hanc proportionem inter angulos incidentiae et refractionis pendere ab eorundem mutatione propter varietatem mediorum; rursum hanc mutationem pendere a modo, quo radius penetrat per totum diaphanum, atque hujus penetrationis cognitionem supponere illuminationis naturam etiam esse*

investigação da curva anaclástica, ou seja, a determinação da "forma com a qual os raios de luz paralelos são refratados de maneira que após a refração tenham um único ponto de intersecção". Descartes, então, observa – naquilo que parece ser a primeira etapa da redução – que a determinação da curva anaclástica depende da proporção que se observa nos ângulos de refração com os ângulos de incidência. Mas, para ele essa questão é ainda composta e relativa, isto é, insuficientemente simples e, por isso, torna-se necessário ir mais adiante à aplicação da redução do fenômeno. Diante disso, Descartes alegaria que se deve perguntar como ocorre que, a relação entre os ângulos de incidência e os ângulos de refração seja causada pela diversidade do meio. O ar e o recipiente que estão a sua volta, levanta a questão de saber como o raio penetra através de todo *corpo diáfano* (*meio onde a luz é propagada*). Para o conhecimento desta mencionada penetração, supõe-se que a natureza da ação da luz seja conhecida. Porém, para compreender a natureza da luz é necessário saber o que é uma potência natural (*potentia naturalis*). É nisto que termina a aplicação da redução. Quando chega esse momento da investigação, Garber afirma que: "Descartes concebe por uma intuição o que é uma potência natural, a saber, algo que se pode compreender através do movimento local dos corpos". Uma vez que se tem tal intuição é possível começar a etapa de construção e, assim, seguir na questão original. Isso implica que "se compreenda a natureza da ação da luz a partir da natureza de uma potência natural, isto é, que se compreenda o modo como os raios de luz penetram os corpos transparentes a partir da natureza da ação da luz e da relação que há entre o ângulo de refração e o ângulo de incidência". Uma vez que se saiba a relação que há entre o ângulo de incidência e o ângulo de refração é possível explicar a curva anaclástica nas *Regras* e, consequentemente, o movimento de refração da luz na *Dióptrica.*[367].

Já Costabel relata que o *Jornal Beeckman* fornece as explicações de Descartes referentes à lei dos senos, à curva anaclástica e ao movimento de refração da luz. [368] Eis os meios pelos quais Costabel expõe as mencionadas explicações de Descartes:

(1) Descartes examina as refrações através do auxílio de um triângulo cuja face apresentada a luz incidente é coberta por uma tela perfurada com um pequeno furo *o* (ver figura

---

cognitam; denique ad illuminationem intelligendam sciendum esse, quid sit generaliter potentia naturalis, quod ultimum est in tota hac serie maxime absolutum.Regulae (AT, X, 393-395).

[367] Cf. GARBER, 2004, p. 118-119.

[368] Cf. COSTABEL, 1982, p. 54. Deve-se assinalar que Costabel segue as referências do *Jornal de Beeckman* In: *Journal de Beeckman*, fol. 339, AT, X, 341-342.

39). [369] A experiência define o ponto *p* e, assim se possibilita medir a refração em relação à passagem do vidro para a água do raio incidente *Or*.

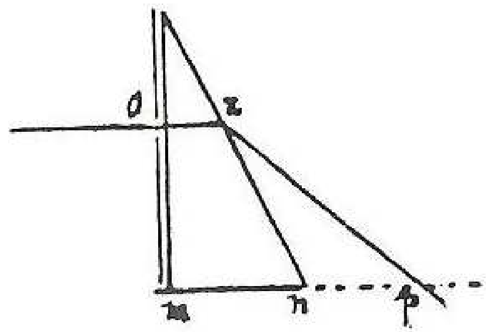


Figura 39 (COSTABEL, 1982, p. 55)

(2) Ao conhecer uma refração é possível conhecer todas as demais por uma lei, a saber, a lei dos senos. Mas essa lei "é apenas *justificada* através das considerações de uma *analogia estática*, mais especificamente, por meio da descrição de uma balança".

(3) Para o mesmo ponto *p*, Descartes declara poder determinar a partir da lei dos senos os diferentes pontos *r* correspondentes e tais pontos a uma hipérbole. Diante disso, Costabel conclui que Beeckman, entretanto, nota, em meados de fevereiro 1629, que Descartes deixou o (3) sem uma demonstração; e, assim, lhe sugeriu encontrar algo que careceria uma demonstração. Beeckman aponta aquela que encontrou e com a qual Descartes se mostrou satisfeito.

Na sequência, Costabel[370] relata queé necessário ainda examinar as dificuldades da história. Nesta perspectiva, identifica que em outubro de 1628, mais de dois anos depois, uma primeira intervenção que iria suscitar o entusiasmo de Mersenne, cominou na frustração de Descartes, pois ele ainda não tinha uma solução completa e satisfatória.

As bases sobre as quais sua doutrina estava fundada deveriam ainda ser bem postas em evidência. Segue Costabel:

(1) A refração depende apenas da natureza dos meios; portanto, a explicação experimental permite a Descartes apenas explorar "o fenômeno óptico". Tal explicação corresponde exatamente a uma oposição a Kepler, e, por isso, não há composição de duas causas, isto é, resistência direta + resistência devido a obliquidade.

[369] COSTABEL, 1982, p. 55.
[370] Cf. COSTABEL, 1982, p. 55-56.

(2) Quando a incidência varia, Descartes presume que a refração deve ser determinada a partir da lei dos senos, mas Descartes faz apenas uma "justificação curiosa" mediante uma "explicação estática" baseada em uma "analogia mecânica".

(3) A anaclástica pode ser construída ponto a ponto através das proporções da hipérbole, mas Descartes não explica essa demonstração.

Costabel [371] relata que é possível acrescentar à investigação de Descartes as indicações fornecidas por documentos posteriores. Por exemplo, em 2 de dezembro de 1635, Descartes descreve detalhadamente a Huygens as experiências realizada em meados de 1626-1627. Suas lembranças não são precisas quanto às datas, mas lembra-se com precisão que uma "lente hiperbólica" foi construída graças às contribuições de Mydorge (um importante geômetra) e a habilidade de Ferrier (um importante artesão mecânico). A obtenção desse "instrumento óptico" (ver figura 40), que deveria ter a forma côncava, fornecera, pois, o resultado esperado, a saber, "a curva anaclástica".

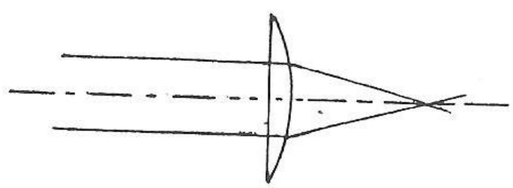


Figura 40 (COSTABEL, 1982, p. 56)

Para Costabel a primeira parte da regra VIII, descreve a curva anaclástica a partir dos debates que Descartes estava inserido. Nesta perspectiva, Costabel revela que Descartes fez parte do círculo de Mersenne e, por isso, teve notícias – desde a década de 1620 – das obras de Kepler (reflexões teóricas e experimentais)[372] e das obras Mydorge (contribuições referentes à

[371] Cf. COSTABEL, 1982, p. 55-56.

[372] Cf. COSTABEL, 1982, p. 56-57. De acordo com Schuster, Kepler demostra que o princípio da imagem falhava em alguns casos, como, por exemplo, quando os raios se aproximam da superfície em um ângulo bastante oblíquo. Kepler usa um artifício geométrico muito semelhante ao de Descartes. Todavia, há uma imensa difereça entre a geometria de Kepler e a maneira que Descartes demonstra, por exemplo, a lei dos senos. Descartes empreende a busca de uma razão constante, ou seja, procura encontrar um par de linhas geometricamente proporcionais que possibilite relacioná-las com os senos dos ângulos de incidência e refração. Segundo Schuster, Beeckman muito provavelmente mostrou a Descartes seus cadernos de apontamentos, os quais revelavam que, desde meados de 1628, vinha lendo criteriosamente os textos de astronomia de Kepler; e, assim procurando formular uma mecânica óptica. Num procedimento que lhe era comum, e que Descartes aprende com esse, Beeckaman detalhou o trabalho de Kepler, não com o intuito de questionar seus resultados, mas com o objetivo de reconstruir esses resultados sobre fundamentos mais seguros. Cf. SCHUSTER,1977, p. 304-354.

demonstração da hipérbole). [373] Neste contexto, a matemática de Mydorge contribuiu para o conhecimento por parte de Descartes das cônicas.

De acordo com Costabel, [374] a segunda parte da regra VIII demarca a intervenção de Descartes no assunto da curva anaclástica. Neste contexto, Descartes opõe-se a Kepler e pretende explicar a refração da luz por meio da lei dos senos; portanto, empreendendo passos semelhantes aos de Mydorge. [375] Costabel relata ainda que o plano da investigação que Descartes expõe na

---

[373] Cf. COSTABEL, 1982, p. 57. No artigo *Full circle: Cartesian dynamics, optics and the tennis ball model, 1628-33*, Schuster expõe uma possível contribuição que Descartes tivera referente à descoberta da hipérbole para descrição analítica da anaclástica. SCHUSTER, 2000, p. 258- 757. E, de maneira mais detalhada, relata na sua tese *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634* que "a preposição I da obra de Mydorge expõe que dado um raio incidente FE, refratado numa superfície ABE, e o raio refratado em EG, se conhece o ângulo de incidência CEF e o ângulo de refração GED, com os quais se podem descobrir a refração de qualquer outro raio incidente HE. Primeiro se descreve um semicírculo ABC com qualquer raio, exemplo em EB, e em torno de E, com a circunferência cortando EF em F e HE em H. Depois se traçaria IF paralelamente a AB. Partido de I, onde IF intersecta o semicírculo ACB, traça-se uma linha IG para baixo, paralelamente a CE. IG cortará EG no ponto G. Então, EG passa a funcionar como o raio do semicírculo LDZ, a ser traçado em terno de E. Neste contexto, abre-se caminho para se descobrir a refração buscada de HE. Com isso, traça-se HM, paralelamente a BA, e, partindo do ponto M, interseção de HM com o semicírculo ACB, faz-se uma linha paralela a CED. Essa linha paralela, MN, intersectará LDZ no ponto N. O raio refratado, que se deseja encontrar, será EM. A demonstração se baseia no princípio da proporção constante entre os raios de dois círculos desiguais e, a sua forma trigonométrica, equivale à prova de que $consec\ i/cosec\ r = r_1/r_2$". SCHUSTER,1977, p. 304-354.

[374] Cf. COSTABEL, 1982, p. 57.

[375] A reconstrução de Schuster para a descoberta da lei da *co-secante* para a refração da luz baseia-se em dois conhecidos princípios. O primeiro princípio propõe que se devem considerar dois meios ópticos separados pela superfície AOB, sendo, pois o meio inferior o mais denso. Para localizar a imagem do ponto E, é necessário estender o raio refratado OF até o meio inferior e marcar sua interseção com EG, a perpendicular que vai de E até a superfície AOB. O segundo princípio decorre de uma característica do refratômetro de Ptolomeu. Nesse contexto, Ptolomeu, compreende um disco de bronze ABCD, que tem um visor fixo em E e visores móveis em Z e H, ajustáveis ao longo da circunferência. Então, o disco é colocado na superfície da água, de modo que DEB acompanhe exatamente essa superfície. Ver-se pelo visor que ao longo de ZE num ângulo de incidência AEZ, e move-se H até coincidir com a linha da visão. O percurso do raio refratado que parte do objeto pontual H é então fornecido por ZE e EH. Neste enfoque, Schuster assinala que a trajetória postulada da descoberta da lei implicaria, portanto, os seguintes elementos: primeiro a suposição de que a regra da imagem é válida e reveladora do fenômeno da refração; segundo, a disposição dos dados empíricos em ângulos de incidência e de refração derivados de Ptolomeu através de Vitelion; terceiro, a aplicação da regra da imagem aos raios desenhados. A explicação de Mydorge, na Proposição I, é bastante compatível com o fato de ele haver descoberto à lei. Verifiquemos uma possível formulação para a lei dos senos nas explicações de Mydorge. As preposições II-V do relatório de Mydorge tratam sobre a teoria das lentes. A preposição II utiliza o modo da lei pautada na co-secante, embora a lei do seno fosse mais fácil de manipular. Todavia, em um corolário da preposição II, assim como na preposição V, Mydorge julga necessário passar da versão co-secante para a versão do seno. Para demonstrar que a hipérbole é uma superfície anaclástica, Moydorge tem que fazer a passagem da versão da co-secante para a do seno, não por alguma razão ligada a seu modo de conceber o percurso dos raios reais, pois o autor claramente considera que os percursos dos raios reais são captados nos raios constantes dos dois círculos desiguais, mas porque a geometria da demonstração requereria essa mudança de uma forma da relação para a sua forma trigonometricamente equivalente. Ademais, na proposição III (com referencia as hipérboles), o autor oferece uma prova sintética que é uma decorrência efetiva da preposição IV (com referencia a elipses). Entretanto, o modo como à versão do seno é constituída no relatório de Mydorge fornece uma impressão de que nela haja uma variante da forma essencial da lei, a versão da co-secante, sendo esta a que representaria o percurso dos raios reais. Como se segue, segundo Schuster, se a reconstrução proposta realmente capta os meios efetivos pelos quais a lei foi descoberta, então, pode-se indagar: por que Mydorge não menciona o princípio da

segunda parte da regra VIII pressupõe, no entanto, ultrapassada o estado em que a justificação da lei dos senos é situada em uma analogia estática; tal como era ainda no caso de 8 de outubro de 1628. [376] É provável que o entusiasmo de Descartes – em virtude de que Beeckman fornecera a demonstração da hipérbole para a descrição da curva anaclástica – marque o início da confiança na exatidão da lei dos senos. Costabel relata que o entusiasmo de Descartes se deve a tentativa de fornecer uma prova satisfatória e, por isso, ele esperava que a partir da aposta em concepções novas que estavam em curso (essas foram aquelas que conduziram Descartes na *Dióptrica* à analogia dinâmica) poderia resolver o problema matemático da anaclástica. Entretanto, segundo Costabel, [377] uma coisa é a demonstração da lei dos senos e outra é a explicação da curva anaclástica. Escrevendo, no fim da segunda parte de sua exposição da Regra VIII, que "não vê o que pode impedir de conseguir", Descartes revela que escreve em um momento onde ainda não tem o entendimento matemático da dificuldade. Descartes acredita que a demonstração realizada por Beeckman – a qual consiste em mostrar que uma hipérbole soluciona a questão – se transformará na demonstração mais geral em que apenas as secções cônicas realizam aquilo que se pretende.

Tournadre [378] questiona-se a respeito de se a explicação do movimento de refração da luz resulte efetivamente de uma demonstração *a priori* de Descartes. Para iniciar essa explicação, ele examina a "teoria cartesiana da analogia" descrita na regra XIV das *Regras*:

> Todo A é B, todo B é C, logo todo A é C, comparamos o que é procurado e o que é fornecido entre si, ou seja, A e C, do ponto de vista de que ambos são B. Mas porque previamente fizemos essa advertência, as formas do silogismo em nada nos ajudam a conceber a verdades das coisas; portanto, será vantajoso para o leitor, depois de ter completamente rejeitado, conceber todo o conhecimento que não se obtém por meio da intuição pura e simples de um objeto isolado como se obtendo pela comparação de dois ou vários objetos entre si. [...] Nota-se que as comparações são denominadas simples e manifestas somente em todos os casos em que o que se procura e o que é fornecido participam igualmente de uma certa natureza.[...] Assim deve-se transformar essas proporções de maneira que veja claramente a igualdade que há entre o que se procura e o que há de conhecido. [379]

imagem? Schuster afirma que uma vez anunciada a lei, em sua forma da co-secante, a lei ganha independência e pode ser considerada arbitrariamente. Cf. SCHUSTER, 1977, p. 304-354.

[376] Costabel afirma que o *Jornal Beeckman* fornece essa explicação na data de 8 de outubro de 1628. Cf.COSTABEL, 1982, p. 54.

[377] Cf. COSTABEL, 1982, p. 57.

[378] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 33.

[379] *Regulae* (AT, X, p. 439-440). Segue o texto original latino: *omne A est B, omne B est C, ergo omne A est C; comparantur inter se quaesitum et datum, nempe A et C, secundum hoc quod utrumque sit B, etc. Sed quia, ut jam*

Ao interpretar "a teoria cartesiana da analogia", Tournadre [380] relata que Descartes anuncia o modo como se deve proceder para explicar o movimento de refração da luz. Segue o argumento que Tournadre utiliza da *Dióptrica*:

> Ora, não tendo aqui outra ocasião de falar da luz, a não ser para explicar como seus raios entram no olho e como eles podem ser desviados por diversos corpos que eles encontram, não é necessário que eu empreenda a tarefa de dizer na verdade qual é sua natureza. Creio que bastará que eu me sirva de duas ou três comparações que ajudem a concebê-la do modo que me pareça mais cômodo para explicar todas aquelas suas propriedades que a experiência nos faz conhecer e para deduzir, em seguida, todas as outras que não podem ser tão facilmente notadas, imitando nisso os astrônomos que, apesar de suas suposições serem quase todas incertas ou falsas, pelo fato de se relacionarem com as diversas observações que eles fizeram, não deixam de tirar delas diversas consequências muito verdadeiras e muito seguras. [381]

A partir desta explicação – sobre o modo como os corpos transmitem o movimento ou a ação –; eis as considerações pelas quais Tournadre interpreta o movimento de refração da luz: (1) quando as várias bolas vêm de um mesmo lado, reencontram um corpo rígido onde a superfície é lisa e regular, na qual as bolas se refletem guardando entre elas a mesma distância e (2) uma bola encontra obliquamente a superfície de um corpo líquido e penetra em seu desvio. Diante disso, Tournadre[382] propõe que Descartes obtém, por analogia, a seguinte conclusão:

> Ora, é preciso pensar, do mesmo modo, que há corpos que, sendo encontrados pelos raios de luz, [...] há outros que os fazem refletir, uns na mesma ordem que os recebem, ou seja, aqueles que, tendo sua superfície toda polida, podem servir de espelhos, tanto planos quanto curvos, e outros confusamente em direção a vários lados. [...] Enfim, considerai que os raios também se desviam do mesmo modo como foi dito a respeito de uma bola, quando eles encontram obliquamente a superfície de um corpo transparente, pelo qual eles penetram mais ou menos facilmente, do que por aquele de onde eles vêm, e essa maneira de se desviar é denominada refração.[383]

Tournadre constata, assim, que a lei que determina o movimento da bola é conhecida previamente, e, em seguida atribuída para a explicação dos raios de luz. Porém, segundo

---

saepe monuimus, syllogismorum formae nihil juvant ad rerum veritatem percipiendam, proderit lectori si, illis plane rejectis, concipiat omnem omnino cognitionem, quae non habetur per simplicem et purum unius rei solutariae intuitum, haberi per comparationem duorum aut plurium inter se. [...] *Notandumque est, comparationes dici tantum simplices et apertas, quoties quaesitum et datum aequaliter participant quandam naturam* [...] *et praecipuam partem humanae industriae non in alio collocari, quam in proportionibus istis eo reducendis, ut aequalitas inter quaesitum, et aliquid quod sit cognitum, clare videatur. Regulae* (AT, X, 439-440)

[380] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 34.

[381] *La Dioptrique* (AT, VI, 83).

[382] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 35.

[383] *La Dioptrique* (AT, VI, 91-93).

Tournadre, o conhecimento do movimento dos raios de luz é decorrente da experiência, e, por isso, conclui que a partir de tais condições, a lei do movimento da luz não poderia ser deduzida; pois, se trata de um resultado arbitrário oriundo de uma atribuição generalizante. Essa operação é passível de uma aproximação do estilo "ecthétique"; pela qual a demonstração de uma determinada figura geométrica é aplicável a todas as figuras do mesmo gênero. Neste caso é necessário tomar por hipóteses as leis do movimento da bola, para assim concluir que aquilo que ocorre com a bola pode ser atribuído àquilo que ocorre com os raios de luz. Tournadre [384] acrescenta que a demonstração geométrica da lei de refração – concebida a partir da consideração das velocidades – deve ser uma explicação do mecanismo do fenômeno e uma justificação. Isso implica que a lei é conhecida previamente. Diante disso, essa demonstração permite estabelecer uma lei quantitativa, a saber, que o seno do ângulo de incidência é igual a do ângulo de refração. Por isso, o raio de luz é comparado com o movimento local de uma bola que atravessando o percurso AB, encontra em B uma tela BH e a atravessa de tal modo que sua velocidade é reduzida pela metade (ver figura 41). [385]

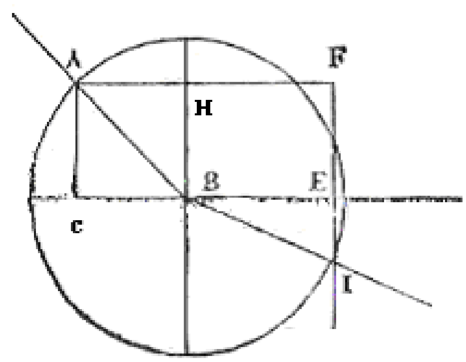


Figura 41 (TOURNADRE, 1982, p. 36)

O novo caminho BI é, por isso, percorrido duas vezes mais que o tempo que esteve em AB, a saber, seja o dobro de AH, isto é, HF. O ponto I é obtido pela intersecção da circunferência e da vertical FI, de tal modo que HF = 2AH. Constata-se, assim, que o seno do ângulo de refração é o dobro do seno do ângulo de incidência. A direção do raio refratado é, portanto, definida pela relação dos senos, que conserva um valor constante. Obtêm-se, assim, as seguintes considerações: (1) A hipótese: as leis do movimento da bola; (2) A transferência destas leis à

[384] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 35.
[385] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 36.

descrição dos raios de luz, e (3) a demonstração geométrica do mecanismo. Para Tournadre[386], tais considerações são consoantes com os meios pelos quais Descartes explica o fenômeno óptico. Entretanto, Tournadre[387] reconhece que essa analogia é diferente daquela aplicada ao conhecimento dos corpos, pois, Descartes não faz utilização da experiência, isto é, mesmo que suas hipóteses sejam uma dada experiência e, que essa, em última instância, possui apenas razões *a priori*.

Propõe-se nesta pesquisa que Descartes determina a demonstração geométrica que contempla a lei dos senos de modo diferente da explicação da curva anaclástica. Isso porque a lei dos senos é concebida por uma demonstração geométrica e, de outro modo, a curva anaclástica é definida pelo meio físico (meio natural). Diante disso, se faz necessário explicar a demonstração geométrica da lei dos senos e a descrição do movimento de refração da luz a partir da diferenciação entre as (1) vias matemáticas do método pelas quais se concebem demonstrações geométricas e os (2) procedimentos do método que investigam exclusivamente os objetos que compõe um fenômeno físico.

Primeiramente, Descartes concebe metodicamente quais são as propriedades geométricas que têm inteligibilidade analítica (isto é, propriedades geométricas que têm correspondência algébrica) e, nesse caso, mais especificamente, a normal. Em seguida, ele estabelece cadeias de deduções entre a causa analiticamente descoberta (a normal) e o efeito que prova essa cadeia dedutiva, ou seja, uma demonstração geométrica. Esta demonstração geométrica – adquirida por meio de sua teoria das proporções – lhe possibilita deduzir a lei dos senos. Logo, essa lei serve como meio de orientação para as suas experimentações científicas, as quais visam justificar o movimento de refração da luz. Tal orientação revela um meio da aplicação do método na ciência óptica de Descartes. As experimentações da ciência óptica são iniciadas, então, quando Descartes encontra a lei dos senos e, a partir desta lei, visa justificar a reconstrução do movimento de refração da luz. Tal reconstrução, todavia, requer outros meios de orientação do método, a saber, os procedimentos científicos de redução e reconstrução, pois agora se trata da investigação de objetos que compõem um fenômeno físico. O procedimento de redução prescreve a identificação da causa que hipoteticamente origina as características do movimento de refração da luz, a saber, a curva anaclástica, "na qual os raios paralelos que se refratam de tal modo que, após a refração,

[386] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 36.
[387] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 36.

tenham um único ponto de intersecção”. Inversamente, o procedimento de reconstrução prescreve a reprodução dos efeitos que produzem as características do movimento de refração da luz, a saber, “a relação entre os ângulos de incidência e refração a partir da diversidade do meio”. Ora, a diversidade do meio exige de Descartes que a reprodução do movimento de refração da luz anaclástica seja feita na *Dióptrica* por meio de diversas analogias dinâmicas, mesmo que em última instância, essas analogias sejam apenas hipotéticas. Tal movimento, portanto, deve ser justificado a partir da demonstração geométrica da lei dos senos de *i* e *r*.

Pretende-se agora defender a interpretação proposta nesta pesquisa por intermédio dos argumentos expostos por Descartes na *Dióptrica*. Nesta obra, Descartes pretende justificar o movimento da luz a partir da lei dos senos e através de diversas suposições, as quais devem possibilitar a reprodução, por analogia, do movimento dinâmico da refração da luz.

Deve-se assinalar que as suposições utilizadas por Descartes na *Dióptrica* não implicam que a lei dos senos seja destituída de certeza, mas, ao contrário, esse recurso possibilita o reencadeamento investigativo daquilo que não se apresenta como evidente. A flexibilidade dos procedimentos científicos impõe-se, assim, quando a rigorosa operacionalidade metódica dos raciocínios matemáticos – operações responsáveis pelo conhecimento evidente que determina a lei dos senos – torna-se inviável em decorrência da dificuldade dos objetos investigados. Assim, os procedimentos de redução e reconstrução exercem o papel de extenuar as dificuldades, redirecionando a ausência de ordem entre os objetos que fazem produzir os fenômenos naturais a uma cadeia de proposições cuja articulação é novamente estabelecida ao nível da razão.

Na primeira analogia realizada na *Dióptrica*, Descartes observa o movimento da bengala de um cego. [388] Nesta observação, Descartes relata que o cego colide a bengala – através da ação de diversos movimentos – nos obstáculos do percurso realizado, conseguindo, assim, identificá-

[388] Todavia, antes da observação do cego, Descartes relata de modo semelhante que: “E, com certeza, algumas vezes vos ocorreu de caminhar à noite sem tocha, por lugares um pouco difíceis, que era necessário o auxilio de uma bengala para vos conduzir. E os senhores puderam constatar que sentiram por meio da bengala, os diversos objetos que se encontravam em torno de vocês [...]. É verdade que este tipo de sentimento é um pouco confuso e obscuro, nestes que não utilizam a bengala frequentemente ou a usam pouco”. *La Dioptrique* (AT,VI, 83-84). Segundo Cottingham: “O uso de analogias, tais como o da bengala e a da fermentação das uvas, fazem parte do mecanismo com o qual Descartes utiliza para explicar a propagação da luz, sendo que tal fato torna-se bastante característico nos procedimentos pelo autor na apresentação de suas concepções cientificas [...]. Em cada caso, Descartes, lança mão de exemplos relativamente comuns e familiares, que retira das experiências cotidianas, e que passam, então, a sustentar a plausibilidade de explicações micromecânicas, por ele fornecida para um determinado fenômeno. Há que se dizer que, a despeito da feição empírica das analogias cientificas de Descartes, encontraremos muita pouca investigação empírica, isto é, no sentido moderno do termo, a fundamentar suas alegações de que os fenômenos da luz [...] se dão realmente de maneira análoga à dos modelos invocados.” COTTINGHAM, 1993, p. 19.

los (ver figura 42). Diante disso, os obstáculos são percebidos pelo cego no mesmo instante em que a extremidade da bengala colide nos obstáculos do percurso realizado. Nesse contexto ocorre hipoteticamente uma informação instantânea. Tal informação expressa à captação sensível enviada dos nervos até ao cérebro. [389] Descartes:

> [...] Considerando aqui, estes que nasceram cegos e se serviram da bengala durante toda sua vida, os senhores os acharão tão perfeito e tão exato que poderemos quase dizer que eles veem com suas mãos, ou que a bengala deles é o órgão do sexto sentido, que lhes foram dados pelo defeito da visão. Quero que tenham a ideia de que a luz, nos corpos que se denominam luminosos, não é se não um dado movimento ou uma ação muito veloz e viva que chega aos nossos olhos conduzida pelo ar e por outros corpos transparentes [diáfono], assim como o movimento ou a resistência dos corpos, com os quais encontra um cego por intermédio de sua mão ao manusear uma bengala. [390]

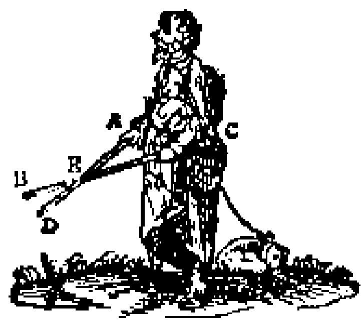


Figura 42 (AT, VI, 135)

Descartes relata que a única coisa que se transmite é o movimento e a resistência dos corpos. O cego, por exemplo, percebe as diferenças dos objetos de maneira quase tão plausível quanto qualquer pessoa que enxergue. Para Descartes a constatação da diferença entre os objetos, por parte do cego, se dá apenas pelo o modo com que a sua bengala os move ou encontra resistência. A conclusão de Descartes é adquirida pela compreensão de que a transmissão imediata do movimento dos corpos é proposta de maneira suficientemente adequada para explicar o movimento da luz. Então, seguindo esse raciocínio, ele propõe que a ação da luz é por analogia concebida através do movimento local dos corpos. Descartes:

---

[389] Descartes relata que: "Para essa situação, isto é, o lado pelo qual é colocado cada parte do objeto em relação ao nosso corpo, nós não perceberemos que por meio de nossos olhos do que por estado de nossas mãos; e seu conhecimento não depende de nenhuma imagem, nem de nenhuma ação que vem do objeto, mas somente da situação das pequenas partes do cérebro donde os nervos tem sua origem. Visto que esta situação se mudando tão pouco a cada vez que se muda esta dos membros onde estes nervos estão inseridos, é instituído da natureza para fazer, não somente que a alma conheça em qual local está cada parte do corpo que ela anima em relação a todas as outras, mas também que ela possa transferir de lá sua atenção a todos os locais contidos nas linhas retas que podemos imaginar serem traçados da extremidade de cada uma dessas partes e prolongadas ao infinito". *La Dioptrique* (AT, VI, 134-135).

[390] *La Dioptrique* (AT,VI, 88).

> O que vos impedirá de inicio de achar estranho, que esta luz possa estender seus raios em um instante, desde o Sol até nós: visto que vocês sabem que a ação onde nós movimentamos uma das extremidades da bengala, deve passar assim em um instante até a outra extremidade, e que ela deveria passar da mesma maneira, ainda que haja mais distância que há, desde a Terra até os céus. Vocês não acharam estranho também, que por seu meio nós possamos ver todas as cores; e mesmo vocês crerão talvez que estas cores não são outra coisa, nos corpos que nomeamos coloridos, que as diversas formas, donde esses corpos o recebem e os enviam ou as remetem contra nossos olhos; se vocês considerarem que as diferenças, que um cego nota entre as árvores, as pedras, a água e coisas parecidas, por intermédio de seu bastão ou bengala, não lhe parece menos que para nós estas entre o vermelho, o amarelo, o verde e todas as outras cores; e, todavia, estas diferenças não são outra coisa, em todos estes corpos, que as diversas maneiras de os mover, ou de resistir aos movimentos deste bastão ou bengala. Em seguida, do que os senhores terão ocasião de julgar, que não é necessário supor que possa qualquer coisa de material, desde os objetos até nossos olhos, para nos fazer ver as cores e a luz, nem mesmo que não há nada nestes objetos, que seja semelhante às ideias ou aos sentimentos que nós temos: tudo mesmo que sente um cego, que deve passar ao longo de sua bengala até a sua mão, e que a resistência ou o movimento destes corpos, que é a única causa das sensações que ele possui não é semelhante às ideias que ele concebe. E, por este meio, vosso espírito será liberado de todas estas pequenas imagens flutuantes pelo ar, nomeados de *espécies intencionais*, que trabalham tanto na imaginação dos filósofos. [391]

Ao rejeitar a tese escolástica das "espécies intencionais", Descartes pretende explicar a diferença dos objetos apenas pela resistência ou movimentos dos corpos. Ora, por exemplo, no caso em que o cego gira a mão de A para E, ou de C também para E, os nervos inseridos nesta mão produzem uma determinada mudança em seu cérebro, o que lhe possibilita conhecer não apenas o lugar A ou C, mas também todos os outros que estão na linha reta AE ou CE, de tal modo que sua mão pode conduzir a sua atenção até aos objetos B e D, e assim, determinar os locais onde eles se encontram (rever a figura 42). [392] Desse modo, o que Descartes concebe desta analogia é a concepção mecânica do movimento. [393] Constata-se que esse movimento mecânico é descrito

[391] *La Dioptrique* (AT, VI, 84-85). Os Conimbricensis, por exemplo, defendem a teoria das "*espécies intencionais*". Cf. GILSON, 1913, p. 97-98.
[392] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 135).
[393] Descartes segue reafirmando o argumento: "Vocês poderiam facilmente decidir a questão, que está entre eles, tocando o local donde vêm à ação que causa a sensação da visão: uma vez que como nosso cego pode sentir os corpos que estão em torno dele, não somente pela ação destes corpos, logo que ele se move contra seu bastão, mas também por esta de sua mão, logo que eles não fazem que lhe resistir; assim deve-se admitir ou reconhecer que os objetos da visão podem ser sentidos, não somente por meio da ação que estando neles, tende para os olhos, mas também por meio desta que estando nos olhos, tende para eles ou em direção a eles. Todavia, para que esta ação não seja outra coisa que a luz, deve-se notar que não tem que estes que podem ver durante as trevas da noite, como os gatos, nos olhos dos quais ela se acha; e que para o comum dos homens, eles não veem que pela ação que vêm dos objetos: uma vez que a experiência nos mostra que estes objetos devem ser luminosos ou iluminados para serem vistos, e não nossos olhos para os ver. Mas, para o que tem grande diferença entre o bastão deste cego e o ar onde os

geometricamente. Logo, se admite que o movimento físico é estabelecido através de uma representação matemática (demonstração geométrica). Segue Descartes:

> Podereis até facilmente decidir a questão que se dá entre eles, no que concerne ao local de onde vem a ação que causa a sensação da visão, uma vez que, como nosso cego pode sentir os corpos que estão em torno dele não somente pela ação destes corpos, quando eles se movem contra sua bengala, mas também pela ação de sua mão, quando eles apenas lhe resistem. Assim, deve-se admitir que os objetos da visão podem ser sentidos não somente por meio da ação que, estando neles, tende para os olhos, mas também por meio dessa que, estando nos olhos, tende em direção a eles. Todavia, para que essa ação não seja outra coisa senão a luz, deve-se notar que há aqueles que podem ver durante as trevas da noite, como os gatos, nos olhos dos quais ela se encontra; e que para a maioria dos homens, eles só veem pela ação que vem dos objetos, pois a experiência nos mostra que esses objetos devem ser luminosos ou iluminados para serem vistos, e não os nossos olhos para os vê-los. Mas, uma vez que há uma grande diferença entre a bengala desse cego e o ar ou os outros corpos transparentes, por intermédio dos quais nós vemos, é necessário, ainda, que eu me sirva aqui de outra analogia.[394]

No decorrer do exame desta primeira analogia, se constata a impossibilidade de se justificar o movimento de refração da luz a partir da lei dos senos. Isso porque, a reprodução feita mediante essa analogia não explica a transparência do ar e não mostra um movimento local dos corpos que justifique a adequação dos ângulos de incidência e refração da luz. Então, diante dessas implicações, as quais inviabilizam a justificação do fenômeno óptico, Descartes recorre a uma segunda analogia. Esta outra analogia deve possibilitar uma compreensão mais adequada da transparência do ar e de um movimento local dos corpos que justifique os ângulos de incidência e refração da luz.

Na segunda analogia, Descartes propõe a observação do movimento que ocorre na fermentação do vinho. Nesta analogia, Descartes pretende excluir os fatores incongruentes verificados na primeira analogia. Nesta perspectiva, Descartes supõe que as uvas sendo fermentadas em um barril, poderiam ser comparadas aos pequenos corpúsculos que

---

outros corpos transparentes, por intermédio dos quais nós vemos, faz com que eu me sirva ainda aqui de uma outra comparação". *La Dioptrique* (AT,VI, 85-86). Paty propõe que: "Retenhamos a ideia de instantaneidade, que está no centro da ideia de movimento em Descartes, mesmo que, por outro lado, Descartes não se preocupe expressamente em exprimir as leis do movimento em função do tempo". Continua Paty em outra passagem: "Descartes enuncia e frisa [...] a equivalência de todos os instantes, sendo, pois, a luz que lhe inspira essa ideia. Ele afirma que não existe propriedade do tempo, compreendendo-o no sentido que todas as partes da luz em todos os instantes sucessivos são dependentes dos precedentes, e essa dependência é constante de um instante ao outro, o que na nossa compreensão atual parece uma espécie de prefiguração da lei diferencial". Cf. PATY, 1998, p. 9-57.

[394] *La Dioptrique* (AT, VI, 85-86).

hipoteticamente formam o ar, e, por consequência, a todos os demais corpos transparentes. Em seguida, Descartes supõe que o movimento do líquido se dá em linhas retas (movimento retilíneo), e, diante disso, assume que o líquido desce de modo retilíneo através dos orifícios localizados no fundo do barril (ver figura 43). Descartes:

> Pensais em um barril de vinho em época de colheita, cheio até a borda, com uvas prensadas, e no fundo contendo dois orifícios, os quais denominaremos ponto A e ponto B, para cada um respectivamente, e que com isso, possa fluir o vinho, sem fermentar e podendo sempre fluir. Depois, pense que não existindo "vazio" na natureza, assim como quase todos os filósofos alegam, e, entretanto, tendo vários poros em todos os corpos que percebemos em torno de nós, assim que a experiência pode mostrar bem claramente; é necessário que estes poros sejam preenchidos de qualquer matéria bastante sutil, e bem fluida, que se estende sem interrupção desde os astros até nós. Ora, esta matéria sutil sendo comparada com o vinho deste recipiente, e as partes menos fluidas ou mais grosseiras, tanto de ar que de outros corpos transparentes, com as uvas que estão entre eles; vocês compreenderam facilmente que como as partes deste vinho, que são, por exemplo, parao ponto C, e onde tenderá a descer em linha reta pelo orifício A no mesmo instante [momento do movimento] em que este se abra, como também, tenderá a descer pelo orifício B [também no mesmo instante], enquanto que as partes que se localizam em D e E [pontos de outras localidades do vinho no barril] tenderam também a cair ao mesmo tempo pelos dos respectivos orifícios [A e B], isto é, sem que estes movimentos se esbarrem um nos outros, ou esbarrem na resistência dos cachos de uvas presentes no barril. Assim sendo, será incluído que os cachos se apoiem uns nos outros e não tendam a descer pelos orifícios A e B, pois por este somente desce o vinho, que se move de varias formas, donde os cachos os impõem pela pressão. Da mesma maneira, todas as partes da matéria sutil, que estejam a tocar na parte da borda do barril, e que esteja a nossa frente, tenderá a se mover em linha reta na apreensão dos nossos olhos, isto é, no mesmo instante em que abrimos o barril, na perspectiva de que estas partes não se esbarrem umas nas outras, como também sem que as esbarrem nas partes mais grossas dos corpos transparentes que estejam entre elas, assim como o ar que é quase sempre agitado por algum vento; seja que eles sejam sem movimento, como pode ser o vidro ou cristal. [395]

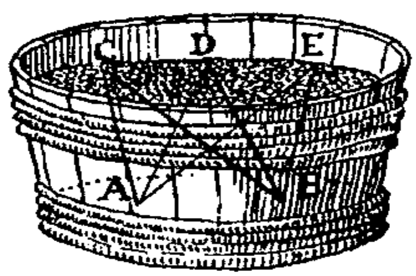


Figura 43 (AT,VI, 86)

[395] *La Dioptrique* (AT, VI, 86-87).

Descartes relata que as partes do fluido que estão em C, adquirem uma tendência instantânea a moverem-se pelos orifícios A e B. [396] Possivelmente ele presumiu que o fluido em C pode sair pelo orifício A ou B porque o movimento mais fácil é em linha reta. Além disso, Descartes supõe que os raios de luz não se interferem e, por isso, torna-se possível compará-los com as linhas retas. Logo, se constata que a preocupação de Descartes é explicar o movimento do vinho a partir de uma demonstração geométrica e, mais especificamente por meio de linhas retas. Na sequência do argumento, Descartes faz a seguinte diferenciação:

> [...] É necessário distinguir o movimento por um lado, e a ação ou tendência a se mover por outro. Pois a nós se torna fácil à compreensão de conceber que o vinho localizado no ponto C, tende a descer pelos orifícios A e B, isto é, ainda que não possa na realidade se deslocar para ambos os lados, ou seja, pontos ao mesmo tempo [orifícios A e B], e que tenda a descer exatamente em linha reta, por causa do impedimento real dos cachos de uva que estão entrelaçados [interpostos]. Da mesma forma, considerando que concebemos a luz de um corpo luminoso não sendo tanto seu movimento, nem mesmo sua ação, mas sim, o entendimento que concebemos, é fato de que os raios de luz, não são outra coisa, se não as linhas, pela qual sua ação tenda a se propagar. De modo, que tem uma infinidade de tais raios que vêm de todos os pontos dos corpos luminosos, em direção a todos os pontos destes que eles iluminam. Assim que vocês puderem imaginar uma infinidade de linhas retas, as quais seguem as ações, que vem de todos os pontos da superfície do vinho CDE, tendem em direção a A, e uma infinidade de outras, seguindo aquelas ações que vêm destes mesmos pontos, tendem também em direção a B, sem que umas impeçam as outras.[397]

A tendência a se mover do vinho é caracterizada por ser: (1) retilínea, (2) multidirecional, (3) instantânea e (4) que os raios de luz (ou linhas retas) não impedem o movimento entre si. Logo, admite-se que Descartes deve compreender o movimento da luz a partir de uma representação matemática do fenômeno físico examinado.

Feita a segunda analogia, Descartes identifica as duas principais características que se pode atribuir ao movimento da luz, a saber, a "instantaneidade" e a "retilineidade". Todavia, quando tais características são verificadas no movimento do vinho não explicam um determinado movimento local dos corpos que reproduza uma adequação dos ângulos de incidência e refração.

[396] Descartes: "[...] O peso relativo de cada corpo, ou seja, a força que é preciso empregar para impedir que ele desça quando se encontra em uma determinada posição, deve ser medido pelo o inicio do movimento que a força que o mantém deveria fazer, tanto para a altura como para segui-lo, caso ele descesse." *Correspondance* (AT, II, 229). Todavia, Descartes alerta que "[...] Contudo, a maneira de se calcular uma dada velocidade de queda, pressupõe algumas suposições, a saber, duas coisas que são certamente falas: que se pode encontrar um espaço totalmente vazio, e que o movimento, que ali se produz seja, no primeiro instante em que começa o mais tardio que se possa imaginar, e que irá sempre aumentando de igual modo" *Correspondance* (AT, I, 221-222).

[397] *La Dioptrique* (AT,VI, 88-89).

Além disso, Descartes constata que o líquido escuro da fermentação das uvas lhe impede de compreender a transparência do ar onde supostamente ocorre a propagação da luz. Então, diante dessas implicações – as quais inviabilizam a justificação do fenômeno óptico – Descartes recorre novamente à outra analogia. Esta terceira analogia deve possibilitar uma compreensão mais adequada da transparência do ar, das cores e de um determinado movimento local dos corpos que justifique o movimento de refração da luz.

Na terceira analogia, primeiramente, Descartes pretende compreender a transparência do ar e as cores dos objetos investigados (ver figura 44). Descartes:

> De resto, estes raios devem ser sempre imaginados assim, exatamente retos, logo que eles passam por apenas um corpo transparente, que é por todas as partes iguais a si mesmo: mas, logo que eles encontram alguns outros corpos, eles estão sujeitos a serem desviados por eles, ou amortizados, da mesma forma que é o movimento de uma bola, ou de uma pedra jogada no ar, por estes que ela encontra. [....] eu explico esta terceira comparação ao longo deste Discurso, isto é, ao considerar que os corpos, que podem assim ser encontrados por uma bola que passa no ar, são ou moles ou duros, ou líquidos; e que se eles são moles, eles param e amortizam de fato seu movimento: como logo que ela dá contra as telas, ou areia, ou argila; no lugar que eles são duros, eles a enviam de outro lado sem parar, e isto de diversos modos. Ou a superfície é toda igual e unida, ou desigual; e novamente sendo igual, ela ou é plana ou curva; e sendo desigual, ou sua desigualdade não consiste que ela é composta de várias partes diversamente curvas, onde cada uma é em si unida; ou bem que ela consiste em algo geral que tenha vários ângulos ou pontas ou partes mais duras uma que a outra, ou que se movem e com esta variedade que podem ser imaginadas de mil tipos. E se deve notar que a bola, além do seu movimento simples e comum, que a leva de um lugar a outro, podemos ainda ter uma segunda, que a faz girar em torno de seu centro, e que a velocidade desta pode ter várias proporções com aquela da outra. Ora, quando muitas bolas vêm do mesmo lado, encontram um corpo, cuja superfície é toda unida e igual, elas se refletem igualmente, e na mesma ordem, de tal modo que se esta superfície é toda plana, elas mantém entre elas a mesma distância, após tê-la encontrado, que elas tinham anteriormente; e se ela é curvada dentro ou fora, elas se aproximam ou se distanciam na mesma ordem uma das outras, mais ou menos na razão desta curvatura. Como vocês veem aqui as bolas A, B, C, que depois de haver encontradoas superfícies dos corpos D, E, F, se refletem em direção a G, H, I. E, se as bolas encontram uma superfície desigual, como L ou M, elas se refletem em direção a vários lados, cada uma segundo a situação do local daquela superfície que ela toca. E elas não mudam nada na maneira de seu movimento, logo que sua desigualdade não consiste que em que suas partes sejam curvadas diversamente.[398]

[398] *La Dioptrique* (AT, VI, 88-90).

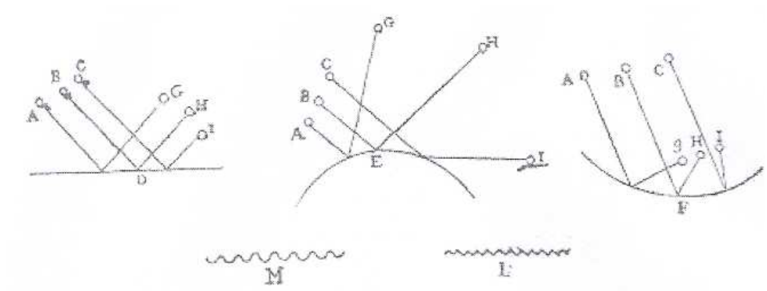


Figura 44 (AT, VI, 90)

Nesta explicação de Descartes, destacam-se algumas características dos objetos investigados, a saber, que a superfície da bola é rígida e regular, e que a velocidade da bola mantém-se constante, isto é, antes e depois da colisão da raquete. Além disso, Descartes faz uma diferenciação entre a força que impulsiona a bola e a posição da raquete que determina o percurso da bola. Assume-se, assim, que a determinação do movimento e a força pela qual a impulsiona são duas coisas distintas e, isso implica que a direção pode ser modificada sem que isso afete a velocidade. [399] Tais características, entretanto, apenas são identificadas por Descartes porque servem como meio de comparação com o movimento da luz, sobretudo, quando ele observa que a luz é refletida. Então, após essa comparação mais adequada dos objetos investigados, os quais revelam a transparência do ar e as cores, Descartes pretende explicar o movimento da reflexão da luz. Para isso, ele propõe novamente a observação do movimento de uma bola arrebatada por uma raquete. Descartes sugere ao leitor da *Dióptrica* que conjecture que uma bola segue na direção de A e colide na superfície CBE, mais especificamente em B, "o que interrompe a continuação de sua passagem e faz com que a bola seja desviada" (ver figura 45). [400] Descartes mostra, assim, que

[399] Descartes: "[...] Todas as potências naturais atuam, mais ou menos, consonantes ao objeto que está mais ou menos disposto a receber a sua ação. Com isso, tornar-se certo que, por exemplo, uma pedra não está igualmente disposta a receber um novo movimento ou um aumento de velocidade quando se move de forma muito depressa e quando se move muito lentamente." *Correspondance* (AT, I, 230). Descartes: "Perguntais por que eu vos falo que a velocidade é impressa pela gravidade como um no primeiro momento da queda e como dois no segundo momento [...]. Todavia, vos responderia sem ironia que não concebi desta forma; porém, que a velocidade se imprime pela gravidade como um no primeiro momento e novamente como um segundo momento pela mesma gravidade [...]. Contudo, um no primeiro momento e um no segundo momento fazem dois e um no terceiro fazem três, e assim a velocidade aumenta em proporção aritmética" *Correspondance* (AT, I, 89). Segundo, Cottingham: "Uma vez que a física cartesiana pretende explicar todos os fenômenos físicos utilizando somente a rigorosa noção geométrica de extensão e de seus modos correlatos, por conseguinte, admite-se que não há nela lugar para noções como potência, influência [...], se tomamos tais noções como indicativos de que a matéria possui qualidades dinâmicas intrínsecas ou poderes causais reais. [...] Apesar de Descartes tentar purgar sua própria física de todas essas noções, as vezes, Descartes incorre em um linguajar que parece atribuir aos objetos mais do que aquilo que pode ser extraído do conceito de matéria extensa em movimento". COTTINGHAM, 1993, p. 68.

[400] *La Dioptrique* (AT, VI, 93).

não é necessário levar em consideração o poder que mantém a bola em movimento depois que essa se distancia da raquete, mas é suficiente considerar que:

> A potência ou força, qualquer que seja que faz continuar o movimento dessa bola, é diferente daquela que a determina a mover-se mais para um lado do que para outro, do mesmo modo como é muito fácil conhecer em que consiste essa força pela qual ela foi impulsionada pela raquete, da qual depende seu movimento, e que essa mesma força teria podido fazê-la mover-se para qualquer outro lado, tão facilmente como para B, ao passo que é a posição dessa raquete que a determina a tender para B, sem que haja nenhuma mudança na força de seu movimento, pois essas são duas coisas diferentes. [401]

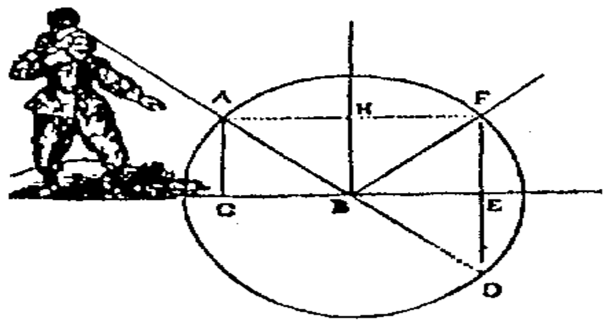


Figura 45 (AT,VI, 93)

Ora, se a força e a direção do movimento da bola fossem a mesma coisa, a bola deveria parar antes de mudar de direção, e, se parasse, seria necessária uma nova força para que ela tornasse a se mover. Mas essa nova força não é mencionada por Descartes. Logo, a força da bola não é afetada na colisão, mas apenas afetada a direção do movimento, que se modifica. Na sequência, Descartes mostra como a determinação do movimento da bola de A para B pode ser geometricamente representada em dois movimentos, a saber, um ao longo da linha AHF e o outro ao longo de AF para CE (ver figura 46). Uma vez que a colisão com a superfície somente pode deter o segundo movimento, assume-se, pois, que o primeiro movimento continua a atuar sem ser interrompido. Descartes:

[401] *La Dioptrique* (AT, VI, 94). Constata-se, pois, que (1) determinações diferentes podem ser relacionadas com a mesma velocidade e (2) a mesma determinação pode ser relacionada com velocidades diferentes. A primeira proposição propõe que duas determinações direccionalmente diferentes podem ter a mesma velocidade. Isso não se constitui como um problema, pois duas determinações são diferentes se diferirem em uma de suas duas características, a saber, quantidade e direção. Entretanto, como duas determinações apenas podem ser as mesmas se forem as mesmas em todas as características, parece haver um problema que requer uma explicação. Em uma carta datada de 27 de maio de 1638, Descartes esclarece a Mersenne essa explicação da seguinte maneira: “A palavra *instante* exclui apenas a *prioridade do tempo*, e assim não impede que cada uma das partes inferiores do raio não seja dependente de todas as superiores, do mesmo modo que o fim do movimento sucessivo dependa de todas as suas partes precedentes”. *Correspondance* (AT, II, 143).

> [...] Deve-se notar que a determinação de se mover para qualquer lado pode – assim como o movimento e em geral qualquer outro tipo de quantidade – ser dividida entre todas as partes, as quais podemos imaginar que ela seja composta; e pode-se facilmente pensar que aquela da bola que se move de A para B seja composta por duas outras, das quais uma a faz descer da linha AF para CE e a outra a faz ir ao mesmo tempo da esquerda AC para a direita FE. Isto de tal modo que essas duas juntas a conduzem até B, conforme a linha reta AB.[402]

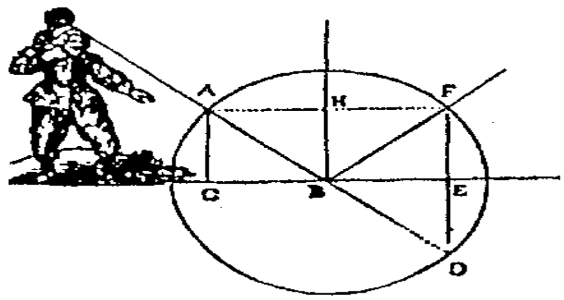


Figura 46 (AT,VI, 93)

Descartes mostra que, de todas as partes do movimento que se pode imaginar em AB, deve-se optar pela determinação AC, perpendicular a superfície, e AF, paralela a superfície.[403] Em seguida, Descartes relata que no momento do impacto, a superfície impede a primeira determinação, mas não a segunda determinação. Ele constata, portanto, que no movimento AC encontra-se um obstáculo, mas não na paralela AF. A partir disso, ele supõe que o movimento da luz segue o mesmo percurso que a bola faz através de um círculo com centro em B, e de raio AB. Ora, como a velocidade da bola não é alterada, Descartes alega que essa se move de B para o ponto F na circunferência do círculo, no mesmo instante em que chega a D, isto é, se não colidisse com a superfície que reflete (rever figura 46). Deve-se, então, escrever o ponto F a partir do pressuposto de que a determinação paralela não é modificada após o impacto. Diante disso, segundo Descartes, tornar-se-á necessário equidistar de H e cair na linha FD paralela a HB e AC. Quando Descartes escreve o raio do círculo, presume que a bola colide em B e segue a distância de B até F no mesmo instante que leva de A para B. Então: AB = BF. Descartes:

> Vedes, assim, facilmente como ocorre à reflexão, a saber, a partir de um ângulo que é sempre igual àquele que denominamos ângulo de incidência. Como um raio de luz, oriundo do ponto A, incide no ponto sobre a superfície do espelho CBE, e reflete-se para F, de tal modo que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência ABC. [404]

[402] *La Dioptrique* (AT, VI, 94-95).
[403] Constata-sse, assim, que para Descartes o significado do conceito de determinação corresponde apenas à velocidade do móvel ou a quantidade do movimento que contém tanto a força como a direção do movimento. Cf. *Correspondance* (AT, II, 143).
[404] *La Dioptrique* (AT, VI, 96).

Por isso, na figura em que Descartes demonstra essa construção geométrica se requisita o entendimento de que a componente paralela mantém-se proporcionalmente correspondente a velocidade (velocidade do movimento local da bola). Logo, esse aspecto "físico-matemático" permite a Descartes deduzir que o ângulo de reflexão é justificado a partir do seno do ângulo de *i*.

Após justificar o movimento de reflexão a partir do seno de *i*, Descartes pretende explicar o movimento de refração da luz através da mesma analogia, mas, fazendo uma suposição diferente, a saber, que a bola rompe e atravessa uma tela sutil (ver figura 47). Descartes:

> Trataremos agora da refração. Primeiramente suponhamos que uma bola arremessada de A para B, encontra no ponto B, não mais a superfície da terra, mais uma tela CBE, que seja tão frágil e destacada que esta bola tenha a força de rompê-la e de passar através da mesma, perdendo somente uma parte de sua velocidade, a saber, por exemplo, a metade [...]. Depois, tendo descrito do centro B o círculo AFD, e traçando ângulos retos sobre CBE às três linhas retas AC, HB, FE, de tal modo que tenha duas vezes a mesma distância entre FE e HB que entre HB e AC e nós veremos que essa bola deve tender para o ponto I. Já que ela perde a metade de sua velocidade, atravessando a tela CBE, ela deve empregar duas vezes o mesmo tempo para passar por baixo, de B até qualquer ponto da circunferência do círculo AFD, que ela fez por cima, a vir desde A até a B. E uma vez que ela não perde nada de toda a determinação que ela tinha em avançar para o lado direito, em duas vezes o mesmo tempo que ela dispôs a passar da linha AC até a HB, ela deve percorrer duas vezes o mesmo caminho para este mesmo lado, e, por conseguinte, chegar a qualquer ponto da linha reta FE, no mesmo instante que ela chega também a qualquer ponto da circunferência do círculo AFD. O que seria impossível, se ela não fosse para I, visto que é o único ponto por baixo da tela CBE, onde o circulo AFD e a linha reta FE se cortam.[405]

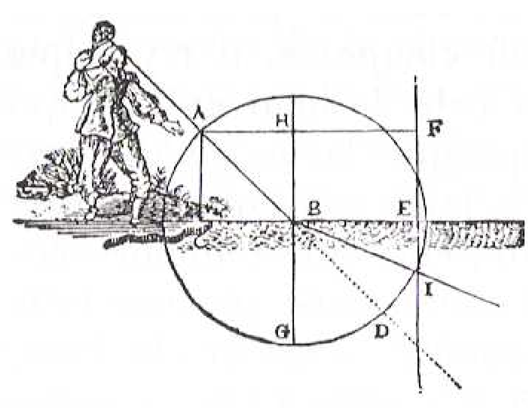


Figura 47 (AT,VI, 97)

De acordo com Descartes, a bola é arremessada em A na direção de B e, ao chegar à tela CBE, em B, perde a metade da velocidade. Para deduzir matematicamente e justificar fisicamente

[405] *La Dioptrique* (AT, VI, 96-98).

o percurso da bola, Descartes traça três linhas retas, AC, HB e FE, em ângulos retos com CBE, de tal maneira que a distância de FE a HB seja o dobro da distância de HB a AC, o que mostra que a bola tende para I. A razão dessa explicação é que a bola perde metade de sua velocidade ao atravessar a tela, devendo, assim, levar o dobro do tempo para atingir um ponto da circunferência abaixo de CBE.[406] Entretanto, Descartes assinala que a bola não perde a sua determinação. Então, levando o dobro do tempo de que precisou para ir de AC a HB, a bola percorrerá duas vezes essa distância, ou seja, de HB até FE, e I será o único ponto abaixo da tela em que ocorrerá uma intersecção de FE com o círculo. Diante dessa implicação, Descartes substitui a tela por água, pretendendo que a bola passe pelo ar de A para B e pela água de B para I (rever a figura 47). Descartes:

> Pensemos, agora, que a bola que vem de A para D encontra no ponto B, não mais uma tela, mas água cuja superfície CBE retira-lhe a metade de sua velocidade, como fazia aquela tela; e o restante do experimento sendo mantido como antes, assumo que essa bola deve passar de B em linha reta, não mais para D, mas para I. [407]

Todavia, quando Descartes observa diretamente os raios luminosos, os quais se deslocam de um meio menos denso para outro mais denso, [408] constata que o desvio se afasta da normal identificada na exposição anterior, mas se dirige à normal exposta nesta figura:

---

[406] Segundo Schuster: "Nós devemos observar que por volta de 1620 Descartes possuía algumas observações intrigantes sobre a dinâmica da luz, mas estas concepções não o direcionaram para a lei. De fato, elas constituíam um obstáculo para sua descoberta. Isso levará a conclusão concreta que duas premissas dinâmicas foram vistas e modeladas sobre o diagrama de Mydorge, e então Descartes percebeu que a geometria daquele diagrama clarificava e modificava suas noções dinâmicas ineficazes e precoces. [...] O estudo da *Dióptrica* revelou as duas premissas da dinâmica cartesiana. Essas descobertas proporcionaram perguntas e pontos de referência em torno dos quais a reconstrução foi desenvolvida. Nós podemos agora inverter o processo, usando a reconstrução do caminho das pesquisas óticas de Descartes com o intuito de jogar uma nova luz interpretativa no *status* do seu modelo da bola de tênis. […]. Qualquer um pelo menos familiarizado com a *Dióptrica* e que tenha seguido o argumento até agora, com certeza irá imaginar por que Descartes escolheu empregar o modelo da bola de tênis na primeira exposição pública da sua óptica. Nós vimos que a demonstração das leis da ótica a partir do modelo da bola de tênis fazem sentido apenas quando apoiados no conhecimento da dinâmica de Descartes. E, além do mais, descobrimos que os modelos cinemáticos da bola de tênis provavelmente não desempenharam nenhum papel na longa preparação da ótica física de Descartes desde 1620 até o *Regulae*". SCHUSTER, 2000, p. 258- 757. Para Shuster, se a sua reconstrução da explicação cartesiana do movimento da luz for aceita (tal reconstrução será exposta logo adiante) "ela parece implicar que Descartes cometeu um erro de cálculo na *Dióptrica* quando ele, de repente, escolheu usar um modelo cinemático para luz, e quase negligenciou completamente a possibilidade de proporcionar uma adequada e explícita dinâmica lógica, a qual poderia ligar à sua teoria real da luz como impulso mecânico". SCHUSTER, 2000, p. 258-757.

[407] *La Dioptrique* (AT, VI, 98).

[408] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 100-101).

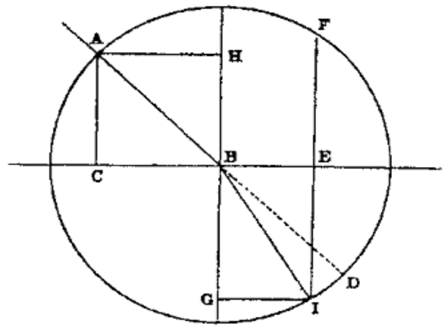


Figura 48 (AT,VI, 100)

Para justificar o movimento de refração da luz a partir desta normal, Descartes supõe que a bola torna a ser atingida pela raquete ao chegar em B, de modo que a sua força aumenta em $\frac{1}{3}$ (o que corresponde à maior facilidade com que a luz penetra em um meio mais denso) e passa a fazer em dois momentos a distância que outrora havia realizado em três:

> Produzirá o mesmo efeito se a bola encontrar no ponto B um corpo de tal natureza que ela passe através da superfície CBE, um terço mais facilmente do que pelo ar. Do que já demonstrei, segue-se claramente que, se descrevemos o círculo AD, como antes, e as linhas AC, HB e FE de tal modo que haja um terço a menos da distância entre FE e HB do que entre HB e AC, o ponto I, onde a linha reta FE e a circular AD se interceptam, designará o lugar para o qual essa bola, estando no ponto B, deve ser desviada. [409]

Ora, se o leitor da *Dióptrica* considerar que BE é igual a $\frac{2}{3}$ de BC, e traçar a perpendicular FE, que corta o círculo em I, obterá o percurso do raio refratado BI. A proporção que orienta o raciocínio de Descartes é, então: BC e BE. Como BC = AH e BE = GI (ver figura 49), logo, o seno de *i* é igual a $\frac{AH}{AB}$ e o seno de *r* é igual a $\frac{GI}{BI}$, donde AB = BI = 1. Tal proporção, portanto, expressa a Descartes a lei dos senos de *i* e *r*.

[409] *La Dioptrique* (AT, VI, 100). Descartes relata que: "Em um artigo que tem como sua introdução *Observo primeiro*, Fermat afirma que eu supus uma diferença entre determinação de mover e a velocidade, que elas não são encontradas agregadas e não podem ser diminuídas pela mesma causa, a saber; pela superfície CBE: o que é contrário ao que quero dizer e contrário à verdade; embora essa determinação não possa existir sem uma velocidade, não obstante, a mesma velocidade pode ter varias determinações e uma e mesma determinação pode ser relacionada com varias velocidades". *Correspondance* (AT, II, 17-18). Numa outra carta – datada em 29 de julho de 1640 – enviada a Mersenne, Descartes se refere a outra crítica que recebera de Bourdi. Nesta carta, Descartes relata que: "Com efeito, se deve observar que a colisão da bola com a superfície CBE divide a determinação em duas partes, mas não divide a força, nem isso é surpreendente, já que embora a força possa existir sem sua determinação, não obstante, a mesma determinação pode ser relacionada com uma força maior ou menor e a mesma força pode existir embora a determinação mude de uma maneira qualquer". *Correspondance* (AT, III, 113).

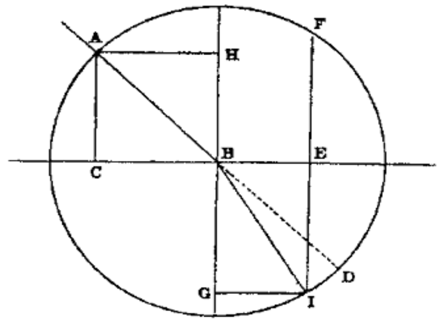


Figura 49 (AT,VI, 100)

Torna-se necessário esclarecer o modo como Descartes utiliza a lei dos senos mediante a reprodução do movimento de refração da luz. Descartes, por um lado, propõe que a componente horizontal do movimento da bola permanece inalterada, mas, ele alega também que há alteração nesse movimento quando a determinação faz com que a bola tende a mover-se para baixo. Por outro lado, Descartes relata que a dimensão da velocidade ocorre ao longo do percurso real da bola, que deve ocorrer na superfície CBE.[410] Neste contexto, ele segue propondo que a bola perde a metade de sua velocidade ao atravessar a superfície CBE e, assim, dirige-se para baixo de B, isto é, em direção a qualquer ponto do círculo AFD, devendo, então, empregar o dobro do tempo que levou de A para B. Para ser completamente coerente com a sua hipótese, Descartes deveria afirmar que a bola empregaria o dobro do tempo na descida para a direção de G, mais especificamente a algum ponto com B que fosse proporcional a HB, em vez da direção real BI.[411] Entretanto, sustenta-se nessa pesquisa que Descartes propôs uma explicação aparentemente desconsonante com a sua suposição porque conhecia previamente os senos de *i* e *r*,[412] os quais se

[410] Duchesneau relata ainda que a explicação cartesiana comporta dois pressupostos teóricos. O primeiro pressupõe que o movimento atual da luz, em sua velocidade, é aumentada ou diminuída na passagem de um meio à outro, isto é, de um fator constante que corresponde a relação destes meios: $v_r = nv_i$. O segundo pressuposto concerne a conservação da velocidade paralelamente a superfície de separação. Verifica-se a partir da equação: $v_i\ sen = v_r sen\ r$. É pela combinação das equações que se pode representar estes dois pressupostos, pelos quais obtém-se a lei de refração. Esta explicação dar conta de uma variedade de feitos adicionais, a saber, a refração para uma incidência a partir da normal, a rotação direcional indica que os raios de luz incidentes e refratados, e o caso da refração total. Cf. DUCHESNEAU, 2000, p. 63-90. Cottingham relata que: "Descartes expõe uma versão daquilo que nos nossos dias se conhece como a lei Snellius, segundo a qual o $sen\ i = n,\ sen\ r$, onde *i* é o ângulo de incidência*, r* o ângulo de refração e *n* a constante especifica do meio refrator. COTTINGHAM, 1993, p. 102.

[411] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 99-100).

[412]Embora Descartes não exponha de maneira explícita na *Dióptrica* a lei dos senos, isto é, a geometrização algébrica das proporções, admite-se, que a concepção matemática da lei dos senos é determinante para a reprodução do movimento de refração da luz. Talvez a implicação mais relevanteque surja dessa omissão de Descartes seja a acusação de plágio. Então, seguindo os comentários de Korteweg, indaga-se: "a acusação de plágio que Descartes sofreu é válida?" KORTEWEG, 1986, p. 489-501. Nesta perspectiva, Paty relata que: "[...] Independentemente de

impõem ao processo da justificação científica. Logo, o que Descartes expõe acerca de sua explicação do movimento de refração da luz não é um processo metódico de descoberta ou uma efetiva demonstração do fenômeno natural, mas apenas uma "justificação racional" que prove por persuasão uma lei matemática previamente conhecida. [413] Por isso, ele diz que: "Na *Dióptrica* [...] eu apenas procurei persuadir as pessoas que o meu método era melhor que o usual".[414]

Defendeu-se nesta pesquisa que a explicação do movimento de refração da luz é realizada por Descartes a partir dos raciocínios do método que inventara e dos seus procedimentos aplicados à orientação da prática científica. Eis o esquema que mostra essa explicação:

Snellius, Descartes descobrira por raciocínios teóricos a lei dos senos referente à refração dos raios de luz. Já Snellius obtivera esse mesmo resultado por intermédio da experiência publicada posteriormente na *Dióptrica*". Cf. PATY, 1998, p. 9-57. Por meio de dados históricos e, mais especificamente, por intermédio do Jornal Beeckman, Rodis-Lewis rejeita a acusação de plágio da lei dos senos. Rodis-Lewis relata que: "De fato, Snellius teria formulado antes de morrer, isto é, em 1626, e sem a ter publicado. Sê-lo-á em 1632 por um amigo de Descartes, a Golius. Mas desde a sua chegada aos Países Baixos, ou seja, no final de 1628, Descartes enunciou-a corretamente. E numa carta latina a Huyghens, de 1 de novembro de 1632, Golius sublinhará a diferença: o francês [Descartes] encontrou a lei dos senos pelos seus princípios e causas; o neerlandês [Snellius] pelos efeitos e suas observações. Por intermédio de Mydorge, Descartes havia estabelecido contato com o excelente artesão Ferrier, que, segundo as suas indicações cortou tão bem uma lente hiperbólica que se pôde verificar a convergência dos raios após terem atravessado o vidro da lente." RODIS-LEWIS, 1995, p. 97. Costabel relata que o conjunto das considerações que determinam a lei dos senos por Descartes é de uma simplicidade tal que não é possível, em instante algum, presumir qualquer dúvida da descoberta cartesiana. Costabel relata que a solução de Descartes avalia a razão constante, isto é, a característica do fenômeno como a razão das velocidades. Cf. COSTABEL, 1982, p. 68-75.

[413]Segundo Alquié, o recurso de hipóteses *ad hoc* e da experiência é prática corrente na ciência óptica de Descartes. Entretanto, o papel das hipóteses na ciência óptica de Descartes não é elevar a falsidade de uma proposição ao patamar de verdade, mas de superar os fenômenos observáveis a fim de reconstruí-los. Por isso não se trata de realizar aleatoriamente as hipóteses, mas de uma antecipação do pensamento face aos objetos sensíveis. Desse modo é possível o entendimento determinar, diante das várias possibilidades de interpretação, aquela mais plausível. Cf. ALQUIÉ, 2000, p. 273. Segundo Clarke, o método de Descartes é divido em uma etapa analítica e outra sintética. Clarke: "Na etapa analítica do método se aplica em primeiro lugar o caso de uma bola de tênis que se choca com uma superfície permeável. Suponhamos que a bola golpeia a superfície no ponto B da figura 1, e perde uma parte da sua velocidade, por exemplo, a metade. Em segundo lugar, suponhamos que podemos distinguir entre o movimento da bola e sua "determinação" para mover-se em uma direção mais que em outra" (AT, VI, 97). Disto se segue que todas estas determinações devem ser consideradas separadamente. A determinação da bola de mover-se da esquerda a direita não se dificulta pelo impacto contra a tela em B, enquanto sim, na sua determinação para mover-se na direção HB. E que a bola perde metade da sua velocidade no choque, necessitará do dobro do tempo para alcançar qualquer ponto da circunferência – D, por exemplo – do que emprega para recorrer de A a B. No dobro do tempo viajará duas vezes a distância da esquerda a direita, e que esta determinação de movimento não está dificultada. Portanto deverá mover-se até I, mais que até D, de onde BE = 2CB. A analogia entre a bola de tênis e o raio de luz proporciona a seguinte análise da refração ótica. Se *Vi* e *Vr* representam a velocidade do raio incidente e reflete respectivamente, então: *Vr = Kvi*. Donde a constante K é um meio no nosso exemplo. Do mesmo modo, em que a velocidade horizontal não se afeta pelo impacto, *Vi sen i = Vr sen r*. Portanto, $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = K$. Este enfoque explicativo, construtivo e experimental, é presumidamente o que Descartes quer dizer com "análise". Este implica deduções, mas deduções a partir de pressupostos e modelos entre outras coisas. Uma síntese consistiria meramente na reordenação das peças do quebra-cabeçaque tem saído da luz para proporcionar um argumento contínuo desde os pressupostos básicos até a descrição da explanação, isto é, a refração". CLARKE, 1982, p.174-176. Acrescenta-se aqui que Brocano tem uma interpretação muito semelhante a de Clarke, sobretudo, quando trata do método de análise e síntese aplicado à descrição dos fenômenos naturais.

[414]*Correspondance* (AT, I, 478).

1- Método

1.1. Descartes propõe na *Geometria* que conhecendo a relação que têm todos os pontos de uma linha curva com todos de uma linha reta é possível identificar a relação que eles têm com todos os outros pontos e linhas dadas e, a partir disso, é viável conhecer outras linhas ou pontos que tenham com a linha curva as equações da normal. Ele trata ainda de outras propriedades que podem ser atribuídas às linhas curvas, afirmando que elas não dependem mais que da grandeza dos ângulos que formam com outras linhas, o que permite traçar linhas retas que as cortem em ângulos retos, como, por exemplo, a normal nos pontos em que se encontra com aquelas nas quais se formam os ângulos que se deseja mensurar. [415] Desse modo, Descartes mostra como a partir da normal é possível realizar demonstrações sintéticas de diversas outras construções geométricas, dentre as quais, destaca-se aqui a demonstração geométrica em que se podem deduzir os senos de *i* e *r* ou, em outras palavras, os ângulos de incidência e refração.

1.2. Descartes espera que o leitor da *Dióptrica* determine a normal na figura geométrica e por meio da sua demonstração sintética, deduza os senos de *i* e *r*, tal como, por exemplo, seno de *i* é igual à $\frac{AH}{AB}$ e seno de *r* é igual à $\frac{GI}{BI}$, AB = BI= 1 (rever figura 49).

2- Aplicação do método

2.1. Início da aplicação do método: Descartes pretende orientar as suas experimentações científicas na *Dióptrica* a partir da lei dos senos de *i* e *r* (demonstração geométrica). [416]

2.2. Procedimento de redução: Nas *Regras para a orientação do espírito*, Descartes identifica uma causa física que lhe possibilite a compreensão do movimento de refração da luz, a saber, a curva anaclástica; “na qual os raios de luz paralelos se refratem de tal modo que todos, depois da refração, tenham um único ponto de intersecção”. [417]

2.3. Procedimento de reconstrução: Na *Dióptrica*, Descartes reproduz o movimento de refração da luz através de uma analogia que expressa o movimento dinâmico dos corpos, mais especificamente, a partir de uma bola arremessada por uma raquete. [418]

2.4. Conclusão da justificação experimental: Na *Dióptrica*, Descartes reproduz, por analogia o movimento de refração da luz e o justifica a partir da lei dos senos *i* e *r*.

[415] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 412-413).
[416] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 83-100).
[417] *Regulae* (AT, X, 393-394).
[418] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 98-100).

3.3. Os Meteoros de Descartes

Meteoros é uma obra que trata da investigação de fenômenos meteorológicos. Esta obra é divida em dez capítulos, mais especificamente, da seguinte maneira: (1) Da natureza dos corpos terrestres; (2) Dos vapores e das exalações; (3) Do sal; (4) Dos ventos; (5) Das nuvens; (6) Da neve, da chuva e do granizo; (7) Das tempestades, das faíscas e de todos os outros fogos que se iluminam no ar; (8) Do arco-íris; (9) Dos coronários; e, (10) Dos parélios. Nas páginas que Adam estabeleceu os *Meteoros*, relata com enfaze que Descartes recomeça nos *Meteoros* a investigação de um assunto que era tradicional na filosofia da segunda escolástica. Por exemplo, as leituras dos sumários dos *Meteoros* de Eustáquio, de Santo Paulo e, sobretudo, dos Conimbricenses relevam que Descartes redigiu a sua obra sobre Meteorologia pretendendo mostrar a superioridade de seu método em relação àquele adotado pelos filósofos das Escolas. Isso ocorre, mais especificamente, quando se trata da explicação de Descartes acerca das cores do arco-íris no capítulo VIII dos *Meteoros.* [419]A partir dessas e outras considerações, Gilson compara a ordem de exposição dos (1) *Comentários Conimbricenses aos Meteoros de Aristóteles* com a dos (2) *Meteoros* de Descartes. [420] Gilson expõe sumariamente essa comparação do seguinte modo: [421]

---

[419] Segundo Gilson, os Manuais da Escola eram baseados em comentários às obras de Aristóteles realizados, sobretudo, pelos Conimbrisenses. Nesta perspectiva, ele expõe o modo como os conimbrinsenses descrivam o arco-íris do seguinte modo: *"Meteora omnia pulchritudine vincit iris, quae conspicui arcus inflexione, et tot colorum pictura omnium in se oculos convertit". CONIMB., lib Meteor., 5, I. Acrescenta:"Ut ergo res planius intelligatur nonnualla animadvertenda erunt. Primum sit, ad generationem iridis concurrere Solem et nubem, illum ut causam efficientem collustrationis ac luminis quod in nubem facitur; hanc ut causam materialem et receptricem ejusdem luminis. Oportet vero nubem roridam esse, ac talem ut in aquam proxime solvi possit, partimque translucida sit, nimirum externa facie, qua nos respicit; sic enim facile injectum lumen imbibet; partim opaca videlicet a tergo, ut lumen repercutiat more speculi a quo imagines dissiliunt. Unde iris hunca in modum describi consuevit. Iris est arcus multicolor in nube rorida, opaca, et concova ex radiorum Solis oppositi reflexione apparens occulis spectantium.* [...] *Posse eodem tempore simul effici plures Irides; idque dupliciter: nimirum si atraque fiat directea Sole, verbi gratia, si Sol medium coeli teneat, nubes vero apta ad impressionem Iridis, sit altera a Occasum, altera ad Ortum; nihil enim impedit quominus valeat tunc Sol utramque radiis ferire… Alio modo possunt gigni simul plures Irides, videlicet in codem situ, id est ad Occasum vel Ortum, sed ita ut una fiat primum directe a Sole, secunda vero ex reflexione primae, ideoque secunda, quia causam minus potentem habet, debilior jam est. Quod si ex secunda oriatur tertia, ut interdum accidit, haec multo jam debilior existit, coloribus pene evanescentibus. Hujusce multiplicationis causa est quia contingit ad occidentem, verbi gratia, esse duplicem nubem rorida cum idonea materia ad exprimendum arcum. Quod si ex his alteram Sol ex opposito situ directe respiciat, in eam radios primo jacet et arcum pinget, ex quo fiet alter in vicina nube si haec ad illius repercussionem accipiendam disposita sit: quod similiter de tertia intelligendum erit.*[…] *Quod ad colores Iridis attinet, constat apparrere illos in nube ex lumine a Sole in eam transmisso et repulso ad aspectum nostrum varieque modificato. Idemque videre est cum aqua ex ore, levi aspergine in aerem Soli obversum diffunditur;apparent enim tunc in illo aere varii colores, quales in arcu fulgent… Caeterum tres praecipui colores in Iride notantur: puniceus, viridis, et purpureus ut tradit Aristoteles lib. 3, cap. 4 et 5; M. Albert. lib. 3, trac. 4, c. 14; Vitellio lib.* 10 *propos.* 67 *et alii. CONIMBRICENSIS., lib. Meteor, 5, 2.* GILSON, 1913, p. 27-28.

[420] Cf. GILSON, 1930, p. 103.

Tabela I

In lib. Meteorum. (Conimb.)	Les Météores (Descartes)
Tractatus I. Quaenam sit materia: (scil. vapores et exhalationes), quae causa efficiens meteor, impressionum. De locis in quibus elementariae impressiones contingunt. Quaedam apparentia quae portenta dicuntur.	Météores. Discours 2. Des vapeurs et des exhalaisons.
Tractatus II. De meteoris ignitis particulatim. De tonitru. De fulgure. De fulmine. De fulminum effectis.	Météores. Discours 7. Des tempêtes, de la foudre et de tous les autres feux qui s'allument en l'air.
Tractatus III. De cometis.	« Et pour que ce j'ai tache d'expliquer curieusement leur production et leur nature et que je ne crois point qu'elles appartiennent aux Météores (…)»
Tractatus IV. De spectris et imaginibus quae sub astris aliisve locis in sublimi apparent. De circulo lacteo, seu via lactea. De coloribus in aere apparentibus. De voragine, hiatu et area seu corona. De virgis et parheliis.	Sur la voie lactée , rien. Sur les couleurs que nons voyons dans l'air, Météores, Disc.9 (Des area seu corona). De parheliis (Disc. 10). De d'apparition de plusieurs soleis.
Tractatus V. De iride seu arcu coelesti.	Météores. Discours 8. De l'arc-en-ciel.
Tractatus VI. De ventis.	Météores. Discours 4. Des vents.
Tractatus VII. De aqueis concretionibus.	Météores. Discours 5. Des nues.
De nubibus et pluvia. De pluviis extraordinariis et prodigiosis. De presagiis temporum. De nebula seu caligine.De nive. De grandine. De glacie. De rore et pruina. De melle. Antiquorum saccharum non esse quidpiam e coelesti rore concretum ut quidam putant. De manna.	Météores. Discours 6. De la neige, de la pluie et de la grêle. Pour les puies extraordinaires, Discours 7. Les présages des temps, Discours 6.

A explicação sobre a produção das cores proposta por Descartes nos *Meteoros* se opõe à defesa de uma tradicional distinção das cores, a saber, aquela que prescreve a diferenciação entre as cores reais e as cores aparentes, sustentada, sobretudo, pelos Conimbricenses, que distinguiam,

[421] GILSON, 1930, p. 105-106. Gilson acrescenta que há diferenças entre as obras Meteorológicas de Descartes e a dos Conimbricenses. Gilson afirma ainda que a principal diferença é aquela que distingue a filosofia da Escola em relação à de Descartes, a saber, que os neo-escolásticos fundamentam-se nos quatro elementos da natureza e Descartes fundamenta suas explicações nas longas cadeias de razões matemáticas. Cf. GILSON, 1930, p. 109.

por exemplo, a “brancura real dos cisnes” do “negrume dos corvos”, tal como as cores “aparentes” das “transitórias” formadas no arco-íris. [422] Para Descartes, ao contrário: “[…] a verdadeira natureza das cores consiste apenas em sua aparência” e, sendo assim, “parece-me uma contradição dizer que elas são falsas e que aparecem”. A proposta cartesiana de que a “verdadeira natureza das cores” consiste apenas “em sua aparência” é decorrente da experiência que ele faz através da observação do “movimento da luz”; logo, a aparência das cores deve expressar apenas tipos de diferentes movimentos da luz em outras partículas (corpúsculos). Além disso, para Descartes não há nenhum motivo para que exista uma semelhança entre, por exemplo, a sensação da cor e aquilo que a realidade externa provoca através da sensação. Logo, a sensação da cor é apenas o resultado de movimentos locais produzidos nos órgãos sensoriais. Consequentemente, a distinção escolástica entre cores reais e cores aparentes é completamente rejeitada por Descartes. Por isso, na *Dióptrica* ele diz:

> É fácil verificar o seguinte pela experiência: pensando que existem corpos, que sendo encontrados pelos raios de luz, amortecem, tirando-lhes toda a força, a saber, aqueles que nós denominamos negros, os quais não têm outra cor senão a escuridão, e há outros que os fazem refletir, uns na mesma ordem que os recebem […]. Entre estes, mais uma vez, alguns fazem refletir esses raios sem provocar nenhuma outra mudança em sua ação, que nós denominamos brancos, e outros […] que são vermelhos, amarelos, azuis, ou de qualquer outra cor. Ora, eu penso poder determinar em que consiste a natureza de cada uma dessas cores, e devo a fazer ver pela experiência, mas isto ultrapassa os limites do assunto que trato aqui […]. [423]

E, a partir disso, Descartes trata nos *Meteoros*:

> Assim como não pode haver variações com estes movimentos além do que mencionei, do mesmo modo não encontramos nenhuma variação na experiência, nem nenhuma outra sensação destes movimentos além da cor. […] E eu não poderia apreciar a distinção dos filósofos quando dizem que algumas cores são verdadeiras, enquanto outras são falsas ou aparentes. Pois, sendo a sua verdadeira natureza apenas a de aparecer, acredito ser contraditório dizer que elas são falsas e aparecem. [424]

[422] Cf. SHEA, 1991, p. 211. Por exemplo, no Tratado III dos *comentários aos Meteoros de Aristóteles,* os Conimbricenses dizem em relação às cores: “Os cometas são de muitas e variadas cores (na verdade, não são verdadeiras porque não as tem, mas nesse caso só são fugazes e aparentes)”. Cf. *Conimbricensis*, 1593, p. 30.

[423] *Dioptrique* (AT, VI, 91-92). Segundo Clarke, o conceito de experiência não é unívoco em Descartes, nem tampouco reserva algum requisito especial para se fazer distinção entre experimentos científicos e qualquer outro procedimento empírico que possa ser classificado como experiência científica. Cf. CLARKE, 1982, p. 30.

[424] *Meteoros* (AT, VI, 334-335).

1. Interpretações acerca da explicação cartesiana das cores do arco-íris

Descartes relata em uma carta datada de 22 de fevereiro de 1638 que a exposição mais adequada da aplicação do seu método à prática científica é aquela que ele explica as cores do arco-íris no capítulo VIII dos *Meteoros.* [425] Historiadores da filosofia cartesiana, destacando-se, sobretudo, Garber, Milhaud e Tournadre, interpretam de diversas maneiras o modo como Descartes utiliza o seu método visando explicar as cores do arco-íris. Tais interpretações contribuem à presente pesquisa em virtude de tratarem o método de Descartes a partir dos preceitos lógicos, debaterem conceitos epistemológicos importantes, como, por exemplo, o conceito de justificação científica, e exporem o modo como Descartes determina uma demonstração geométrica viável para explicar as cores do arco-íris. Entretanto, defende-se aqui que as mencionadas interpretações carecem explicitar a diferenciação epistemológica que há entre (1) a exigência de uma exatidão matemática operacionalizada pelos raciocínios do método e (2) os meios de orientação do método aplicados à prática científica de Descartes. Sustenta-se nesta pesquisa que é a partir dessa diferenciação que se podem esclarecer os meios pelos quais Descartes aplica o seu método à ciência meteorológica visando explicar as cores do arco-íris.

Garber propõe que o método desenvolvido por Descartes nas *Regras* é o mesmo que se encontra no *Discurso do método*, mais especificamente, por meio dos quatro preceitos lógicos. Nesta perspectiva, Garber assinala que o segundo e o terceiro preceito correspondem às duas etapas do método cartesiano, a saber, as etapas de redução e construção. [426] Garber defende que o método exercido por Descartes nas obras de 1637 consiste mais em prática do que em teoria. A partir dessa interpretação do método de Descartes, Garber examina a explicação cartesiana do arco-íris, exposta no capítulo VIII dos *Meteoros*, com a intenção de compreender o modo como o método de Descartes é aplicado na prática científica. Eis as considerações pelas quais Garber inicialmente examina a explicação cartesiana das cores do arco-íris:

[425] Cf. *Correspondance* (AT, I, p. 559). Segundo Cottingham: “Os *Meteroros* são divididos em dez capítulos (Discursos). O primeiro fornece uma explicação geral sobre a natureza dos corpos terrestres, seguindo-se de capítulos sobre uma série de fenômenos meteorológicos, incluído vapores, exalações, ventos, nuvens, neve, chuva, granizo, tempestade, relâmpagos e, sobretudo, o ARCO-ÍRIS”. Os *Meteroros*, obra escrita em francês, foi um dos três ensaios publicados com o *Discurso do método* em 1637. Cf. COTTINGHAM, 1993, p. 118-119.

[426] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62. O segundo preceito lógico prescreve que seja necessário reduzir os objetos compostos em tantas parcelas quantas sejam possíveis e o terceiro preceito lógico prescreve que seja necessário guiar por ordem os pensamentos, isto é, partindo dos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para perpassar até a representação dos mais compostos; e, assim viabilizar alguma ordem até mesmo naqueles objetos que não se precedem naturalmente uns dos outros. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).

(1) Há uma articulação entre raciocínios e experiências realizada a partir de gotas de água e de um prisma que levam a Descartes à uma explicação das duas principias características do arco-íris: a identificação das cores e a constatação de duas regiões cromáticas diferentes.[427]

(2) A partir da experiência realizada através de um prisma, Descartes conclui que as cores são produzidas quando há refração da luz, a causa da cor, portanto, é a tendência da rotação durante a refração. [428]

(3) Por meio das observações feitas através de gotas de água e dos cálculos realizados a partir da refração, Descartes chega a conclusão de que os raios luminosos que atravessam a gota de água são de 42º à 52º. [429]

(4) A partir dessas duas experiências, Descartes obtém as cores do arco-íris, as quais consistem, em grosso modo, em duas regiões de cores produzidas pela refração e separadas por um intervalo de aproximadamente 10º. [430]

Baseando-se em tais considerações, Garber descreve o método de Descartes por meio de duas etapas, a saber, a "etapa redutiva" e a "etapa construtiva", as quais como assinala o próprio comentador, constituem a gênese das *Regras.* [431] De acordo com Garber, a aplicação destas etapas metódicas leva a Descartes à explicação das cores do arco-íris. A partir desta interpretação do método cartesiano, Garber propõe que a causa das cores do arco-íris é identificada mediante o procedimento de redução e a partir de uma intuição. Nesta perspectiva, Garber expõe os meios pelos quais Descartes identifica os objetos físicos que originam as cores deste mencionado fenômeno meteorológico. Garber, primeiramente, propõe que Descartes "concebe, por meio de uma intuição, a natureza da luz e o modo como esse objeto atravessa as diferentes matérias". Em seguida, ele relata que ao se fundamentar nos objetos físicos decorrentes da redução e na "admissão intuitiva da natureza da luz", Descartes pode "demonstrar pela etapa metódica de construção a reconstrução e a inteligibilidade do fenômeno meteorológico". E, então, apenas diante disso é que Descartes aplicaria a lei de refração para explicar as cores do arco-íris. Todavia, Garber não versa sobre os meios matemáticos pelos quais Descartes haveria concebido a lei de refração e equivocadamente alega que Descartes concebe a natureza da luz por meio de uma intuição ao invés de ser por analogia. Segue a interpretação proposta por Garber. De acordo

[427] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62.
[428] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62.
[429] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62.
[430] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62.
[431] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62.

com ele,[432] a etapa redutiva se estende de Q1 à Q5 (ver tabela 2), o que remete a questão originalmente proposta, a saber, qual é a causa do arco-íris. [433] Segundo Garber, as intuições que são o ponto de partida da dedução cartesiana, correspondem às intuições que dizem respeito a natureza da luz e a maneira pela qual ela atravessa os diferentes meios. Assinala Garber: "o importante é o caminho especifico que Descartes seguiu para passar da questão inicial à intuição, pois esse é o caminho que vai determinar o percurso a seguir na dedução". [434] Por isso, ele defende que Descartes começa por dividir a questão em outras duas: (1) uma questão que diz respeito a cor e a outra questão (2) que versa sobre a localização de duas regiões. Ora, uma vez adquirida a intuição, o caminho a seguir é relativamente claro: "Descartes utiliza das mesmas etapas que foram realizadas na redução, postas na ordem inversa, passando da intuição à resposta final em relação a questão originalmente proposta". Mas, ao contrário do que se procede na redução, as experiências e seus resultados parecem não respaldar nenhuma funcionalidade nesta parte da argumentação de Descartes. Isso porque, segundo Garber, o exemplo é certamente muito mais complexo que aquele da curva anaclástica, entretanto, tal exemplo parece ser bastante comum do ponto de vista da estrutura.

Antes de voltar ao tema principal, isto é, aos usos das experiências científicas nos argumentos expostos no capítulo VIII dos *Meteoros*, Garber pretende fornecer comentários acerca do tipo de dedução utilizada por Descartes. Nesta perspectiva, Garber [435] segue afirmando que o caso da linha anaclástica é uma questão definida pela forma de uma lente com determinadas propriedades, e que no caso da conclusão desta investigação é possível esperar uma resposta obtida dedutivamente a partir dos princípios fundamentais (ou, em última análise, a natureza de uma potência natural), segundo a qual uma lente com uma determinada forma tenha características especificas. Mas a situação no caso da explicação do arco-íris é um pouco diferente. O que se procura é a causa do arco-íris. A resposta a essa questão não é dedutiva, mas é revelada no curso de uma investigação dedutiva. A dedução mostra a Descartes como é possível passar da natureza da luz ao fenômeno do arco-íris; assim, o que é deduzido é apenas o fenômeno, ou seja, as tonalidades das cores do arco-íris. Contudo, segundo Garber, o caminho seguido por Descartes para deduzir o fenômeno, mostra que a causa das cores do arco-íris é a

[432] Cf. GARBER, 2004, p. 131. Esse argumentode Garber foi investigado também pela publicação original, em língua inglesa, a saber, *Descartes Embodied*. Cf. GARBER, 2001, p. 99.
[433] GARBER, 2004, p. 131.
[434] Cf. GARBER, 2004, p. 131.
[435] Cf. GARBER, 2004, p. 133.

passagem da luz de um meio à um outro, as rotações de diferentes velocidades que estão imprimidas pelas partículas da luz e o modo pelo qual a lei de refração faz convergir os raios de luz em dois distintos locais segundo ângulos específicos. Isso implica uma dedução, porém uma dedução de um gênero muito diferente do exemplo da curva anaclástica. Por isso, segundo Garber, torna-se pertinente perguntar se (1) Descartes pode verdadeiramente fornecer a exata sucessão das causas para a reprodução do arco-íris e (2) por oposição a uma possível sucessão que produziria as mesmas aparências. Garber [436] sustenta, pois, que Descartes mais tarde poderá ver um problema nessa questão levantada; entretanto, nos *Meteoros*, Descartes parece estar confiante de que o seu método é o mais adequado para satisfazer à necessidade das causas reais.

Garber [437] primeiramente parece defender que a experiência científica funciona apenas por meio do método, ao nível da etapa redutiva, onde na tentativa de passar de uma questão posta à intuição chega-se a resposta. E, na etapa inicial da investigação metódica, a experiência científica parece ter dois papeis, os quais não são possíveis separar. Primeiramente, a experiência auxilia a definir o fenômeno a partir do que é necessário deduzir. Esta aplicação da experiência não é atribuída para o caso da exemplificação da curva anaclástica, onde o problema é posto com suficiente precisão, porém, segundo Garber, a experiência tem um papel importante na explicação das cores do arco-íris. Isso porque é através da experiência que se verifica a identificação de dois arcos, os quais sempre se encontram em um determinado ângulo em relação aos raios de luz. Desse modo, a experiência científica esclarece a questão que deve ser em seguida abordada. É, pois, por intermédio da experiência científica que é possível compreender que a refração depende da passagem de um raio luminoso de um meio a outro e, assim, empreender a investigação dos raios de luz, dos meios, e examinar como a luz passa de um meio a outro, a fim de determinar a lei de refração. De maneira similar, Garber assinala que é por intermédio das experiências realizadas com o prisma ou triângulo de cristal que se pode saber que a reflexão não contribui à produção da cor, ao contrário da refração. Isso porque, Descartes sabe que as cores podem ser produzidas pela a refração da luz, o que torna necessário procurar a natureza das cores examinando "o que é a luz e como essa é modificada pela refração". Essa interpretação é proposta na tabela a seguir.

[436] Cf. GARBER, 2004, p. 133.
[437] Cf. GARBER, 2004, p. 133.

Tableau 2. — *Les « Météores », Discours VIII : l'exemple de l'arc-en-ciel*

Réduction :

Q1. — Quelle est la cause de l'arc-en-ciel (= deux régions de couleurs) ?

(Apparition uniquement en présence de gouttes d'eau, quelle qu'en soit la grandeur.)

Q2. — Qu'est-ce qui fait qu'apparaissent deux régions de couleur dans une goutte d'eau ?

Q2 *a.* — Qu'est-ce qui produit les deux « régions » ?	Q2 *b.* — Qu'est-ce qui produit la cou leur ?
(Deux combinaisons de réflexion et de réfraction, d'expériences faites sur une carafe d'eau.)	(Un flux de lumière restreint + une réfraction, sans courbe ni réflexion d'expériences faites sur le prisme.)
Q3 *a.* — Pourquoi les deux combinaisons de réflexion et de réfraction résultent-elles en deux « régions » totalement séparées ?	Q3 *b.* — Comment se fait-il que ce soit la *réfraction* qui, dans des conditions données, produit la couleur ?

Q4. — Comment la lumière traverse-t-elle les différents corps *(media)* ?

Q5. — Qu'est-ce que la lumière ?

Intuition : La nature de la lumière et la façon dont elle traverse les différents matières (cf. Q5 et Q4).

Reconstruction :

D1 *a.* — La loi de la réfraction.	D1 *b.* — Dans un flux de lumière restreint, le seul changement constaté en passant d'un *medium* à un autre est une tendance différentielle à la rotation
D2 *a.* — Après double réfraction ainsi qu'une (ou deux) réfraction(s), tous les rayons parallèles convergent dans deux flux à réseau séparé l'un de l'autre (cf. Q3 *a*). Il s'agirait de deux « régions » distinctes dans la goutte d'eau.	D2 *b.* — La couleur ne peut consister qu'en la tendance différentielle à la rotation qui se produit pendant la réfraction lors du passage d'un *medium* à un autre (cf. Q3 *b*).

D3. — Des rayons lumineux parallèles produisent deux régions distinctes de couleur sur une goutte sphérique d'eau (cf. Q2).

D4. — La lumière du soleil (= des rayons parallèles) produira, sur une région de gouttelettes d'eau, deux « régions » de couleurs, c'est-à-dire l'arc-en-ciel (cf. Q1)

De acordo com Garber [438] é primeiramente realizado o procedimento reducionista no experimento científico de Descartes. Ele [439] descreve esse procedimento reducionista para o exame das cores do arco-íris da seguinte maneira: (Q1) Qual é a causa do arco-íris (= duas regiões de cores?); (Q2) O que se verifica com o surgimento de duas regiões de cores a partir de uma gota de água; (Q2a) O que produz as duas regiões [Duas combinações de reflexão e refração numa experiência realizada em um recipiente com água] e (Q2b) O que produz a cor? [Um raio de luz + uma refração a partir de uma experiência realizada com um prisma]; (Q3a) Por que as duas combinações de reflexão e refração resultam em duas regiões totalmente separadas? (Q3b) Como se faz para que a refração produza a cor? (Q4) Como a luz atravessa os diferentes corpos? (Q5) O que é a luz? Intuição: versa sobre a natureza da luz e a forma como ela atravessa as diferentes matérias (Cf. Q5 e Q4). Reconstrução: (D1a) A lei de refração e (D1b) a partir de um feixe de luz passando por um meio (*medium*) e uma tendência diferencial a rotação. (D2a) Após a dupla refração, e, assim que ocorre uma ou duas refrações, todos os raios paralelos convergem para dois feixes separados (Cf. Q3a) e, desse modo, constata-se que há duas regiões distintas na gota de água e a cor não pode consistir na tendência diferencial da rotação que é produto da refração da passagem de um *medium* para outro; (D3) Os raios luminosos paralelos produzem duas regiões distintas de cores sobre uma gota esférica de água (Cf. Q2); (D4) A luz do sol (= dos raios paralelos) produz sobre uma região de gotículas de água duas regiões de cores, as quais são denominadas arco-íris (Cf. Q1).

Garber [440] conclui que é possível compreender o método de Descartes a partir da presunção de que a experiência cientifica não é destinada a substituir a dedução, mas é parte da etapa preliminar da dedução. A ciência meteorológica, portanto, explicita-se como uma "ciência dedutiva": porque o conhecimento da causa do arco-íris depende, em última instância, da dedução do fenômeno e, por isso, é necessário cumprir a experiência a partir de uma "intuição inicial". Nesta perspectiva, Garber alega que a experiência auxilia a cumprir "a etapa redutiva do método", e que essa sequência que conduz Descartes de uma questão posta a "uma intuição", auxilia também a conceber "a dedução". A cadeia dedutiva da ciência, portanto, procura pela via da razão a cadeia que conduz do mais fundamental ao menos fundamental. Tal cadeia é, pois,

---

[438] Cf. GARBER, 2004, p. 132.
[439] Cf. GARBER, 2004, p. 134.
[440] Cf. GARBER, 2004, p. 135.

ilustrada pelas conexões que "são possíveis encontrar na natureza". Logo, pode-se utilizar de tais experiências para determinar a cadeia de conexões.

Nota-se, pois, alguns possíveis equívocos na interpretação proposta por Garber. Embora, Garber tenha notado de maneira perspicaz que o segundo e o terceiro preceitos correspondem a dois procedimentos (etapas) do método cartesiano, a saber, os procedimentos de redução e construção (ou reconstrução), [441] e que "redução" e "construção" não são as mesmas coisas que análise e síntese, ele não percebe, todavia, que estas últimas vias são também pressupostas nos segundo e terceiro preceitos que Descartes expõe no *Discurso do método*. Ora, talvez, por isso, Garber confunda sistematicamente em sua interpretação acerca da descrição cartesiana das cores do arco-íris, certezas que são concebidas exclusivamente pelas vias demonstrativas de "análise" e "síntese" [442] com persuasões admitidas apenas pelo uso dos procedimentos de "redução" e "reconstrução". A partir disso, Garber também se equivoca a respeito do modo como Descartes utiliza "intuições" e "deduções" a partir dos raciocínios do seu método.[443] Sustenta-se nesta pesquisa que todas essas possíveis confusões e equívocos de Garber ocorrem em virtude dele não ter feito uma explícita distinção entre (1) os raciocínios que constituem o método (2) daqueles que apenas orientam a prática científica de Descartes.

[441] Cf. GARBER, 2004, p. 61-62. O segundo preceito lógico prescreve que seja necessário reduzir os objetos compostos em tantas parcelas quantas sejam possíveis e o terceiro preceito lógico prescreve que seja necessário guiar por ordem os pensamentos, isto é, partindo dos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para perpassar até a representação dos mais compostos; e, assim viabilizar alguma ordem até mesmo naqueles objetos que não se precedem naturalmente uns dos outros. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).

[442] Cf. GARBER, 2004, p. 56. Retoma esse assunto no capítulo intitulado Método, ordem e certeza. Cf. GARBER, 2004, p. 118. Talvez isso decorra do fato de que Garber não tenha investigado a *Geometria* de Descartes.

[443] Por exemplo, segundo Garber a intuição em Descartes diz respeito à natureza da luz e a forma como ela atravessa as diferentes matérias. Entretanto, nas *Regras*, Descartes explica o processo lógico que é operado por uma série intuitiva do seguinte modo: "Por *intuição* entendo, não a convicção distorcida fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas a concepção do entendimento puro e atento". Segue a versão original em latim: *Per intuitum intelligo, non fluctuantem sensuum fidem, vel male componentis imaginationis judicium fallax, sed mentis purae et attentae.Regulae* (AT, X, 368-369). Já em relação a dedução, Descartes diz: "Por *dedução* entendo o que *se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza*. Foi imperioso proceder assim, porque a maior parte das coisas é conhecida com certeza, embora não sejam em si evidentes, contanto que sejam deduzidas de princípios verdadeiros e previamente conhecidas, por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa.Segue a versão original em latim:*Per deductione: per quam intelligimus illud omne quod ex quibusdam aliis certo cognitis necessario concluditur. Sed hoc ita faciendum fuit, quia plurimae res certo sciuntur, quamvis non ipsae sint evidentes, modo tantum a veris cognitisque principiis deducantur per continuum et nullibi interruptum cogitationis motum singula perspicue intuentis*: *non aliter quàm longae alicujus catenae extremum annulum com primo conecti cognoscimus, etiam uno eodemque oculorum intuitu non omnes intermedios, à quibus dependent illa connexio*, *contemplemur, modo illos perlustraverimus successive, & singulos proximos à primos ad ultimum adhaerere recordemur.Regulae* (AT, X, 369-370).

Segundo Milhoud, no capítulo VIII dos *Meteoros*, Descartes relata que após encher com água um recipiente esférico de cristal e colocando o seu olho em E, constatou que (1) os raios luminosos vão na direção AB, (2) duas partes da bola D e E aparecem vermelhas e (3) os ângulos DE e K surgem a partir dos raios luminosos, respectivamente, em 42º e 52º (ver figura 50). A partir dessas primeiras constatações, Descartes identifica a ocorrência de dois tipos de círculos de cor vermelha, em ângulos sutilmente diferentes, e, observa, então, que as cores são menos intensas, onde os dois círculos aparecem. [444]

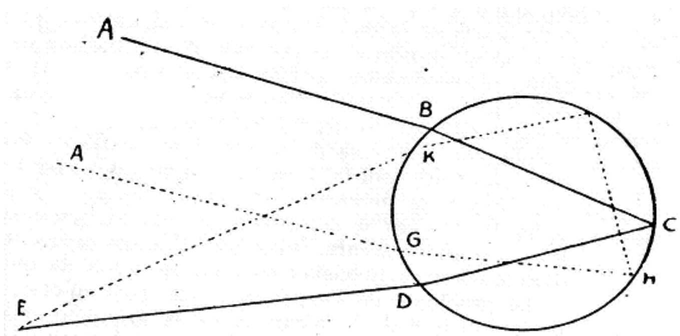


Figura 50 (MILHAUD, 1921, p.119)

Ao utilizar as anotações do seu estudo da refração e um prisma de cristal, Descartes mostra quais são as condições necessárias para a reprodução das cores do arco-íris. Nesta perspectiva, ele pretende compreender a razão do por que a partir dos ângulos de 42º e 52º surgem cores de intensidades diferentes. [445] Nesta empreitada, Descartes realiza um cálculo exclusivamente teórico acerca da direção dos raios luminosos. Neste cálculo, ele descreve a direção dos raios de maneira paralela em relação ao contorno de um círculo cujo prolongamento passa por diferentes pontos da divisão de um raio perpendicular à sua direção e em três partes iguais. Procurando para cada ângulo o raio que sai com o raio incidente, Descartes constata que no caso da reflexão interior deste ângulo há um *maximum*, enquanto que há um *minimum* para o caso de uma dupla reflexão. Os valores do máximo e do mínimo o conduz à medida do diâmetro do arco interior, 41graus e 47 minutos, e do diâmetro menor e exterior, 51 graus e 37 minutos. Constata-se, assim, que embora Milhaud forneça o rascunho de uma demonstração geométrica viável à explicação das cores do arco-íris, não esclarece em nenhum momento de sua explanação o papel do método na ciência meteorológica de Descartes.

[444] Cf. MILHOUD, 1921, p. 119.
[445] Cf. MILHOUD, 1921, p. 119.

Já para Tournadre, o método cartesiano é *a priori* e dedutivo, sendo, pois, esclarecido, sobretudo, no terceiro preceito lógico do *Discurso do método.* [446] A partir dessa interpretação do método cartesiano, Tournadre propõe que a explicação das cores do arco-íris realizada por Descartes é uma exemplificação do uso de analogias decorrente da aplicação do método à prática científica. Tal descrição é dividida em quatro etapas. A seguir são expostos os meios pelos quais Tournadre descreve as etapas do método cartesiano aplicado à ciência.

(1) Na primeira etapa são definidas as condições da experiência. Segundo Tournadre,[447] Descartes adequa o problema ao construir um dispositivo mais favorável à observação, de maneira a mostrar com clareza o fenômeno investigado. Com isso, Descartes observa que, o arco-íris pode surgir não apenas no céu, mas também no ar próximo ao observador, isto é, sempre que há uma certa quantidade de gotas de água iluminadas pelo Sol, como as que são observadas nas fontes artificiais. Diante de tais condições, Descartes pode concluir que é possível produzir uma enorme gota de água por meio do auxílio de um recipiente esférico e transparente preenchido com água.

(2) Na segunda etapa são indicadas as condições do aparecimento do fenômeno meteorológico. Segundo Tournadre,[448] o arco-íris é produzido por dois motivos, a saber, quando se verifica que o ângulo formado pela linha que liga o olho do observador à gota de água e quando se assume que a linha que liga esse olho ao centro do Sol faz um ângulo de 42º. Descartes, assim, constata o mesmo fenômeno quando o ângulo é formado pela linha que liga o outro ponto da bola ao olho, e quando a linha que liga esse olho ao centro do Sol faz um ângulo de 52º. Para um ângulo inferior a 42º ou superior a 52º, irão aparecer as outras cores no espectro.

(3) Na terceira etapa é exposta a explicação do fenômeno. Segundo Tournadre,[449] Descartes constata que os raios solares que vão em direção à gota de água, primeiramente se refratam depois se refletem para o interior da gota e, por fim, se refratam saindo da bola em direção ao olho do observador. É obtida, assim, a primeira parte do arco. Tal parte é identificada no ângulo de 42º da bola em relação ao Sol. Tournadre acrescenta que, em relação ao ângulo de 52º, Descartes observa uma primeira refração, duas reflexões interiores e uma secunda refração

[446] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 11. No terceiro preceito lógico, Descartes relata que: "[…] é necessário guiar por ordem os pensamentos, isto é, partindo dos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para perpassar até a representação dos mais compostos; e, assim viabilizar alguma ordem até mesmo naqueles objetos que não se precedem naturalmente uns dos outros. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).
[447] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 37.
[448] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 37-38.
[449] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 38.

quando os raios saem da bola para se determinarem em direção ao olho do observador. Descartes obtém, assim, a segunda parte do arco. Diante disso, Descartes mostra o mecanismo interior do fenômeno meteorológico.

Na quarta etapa é exposta a discussão do problema meteorológico. Em uma explicação de matemática – onde se trata de examinar as condições de possibilidade do problema – Descartes segue uma exposição precisa e completa. Segundo Tournadre, Descartes visa resolver a dificuldade ao procurar compreender como entre os outros raios que após duas refrações e uma ou duas reflexões, podem atingir o olho quando a bola segue em outra direção. Além disso, após ter se dado conta das cores do arco-íris, Descartes generaliza o experimento de maneira a compreender o aparecimento de todas as outras cores. Tournadre [450] alega, assim, que os raciocínios de Descartes propostos na física, como em seus princípios, tendem a se identificar com os da matemática. Diante disso, segundo o comentador, a aplicação do método dedutivo à física se torna integral, isto é, decorre da aplicação de um mecanismo metódico universal. Tournadre conclui, então, que Descartes propõe em toda iniciativa experimental três condições necessárias para a reprodução das cores do arco-íris, a saber, "a justificação racional", "a fundamentação dos princípios físicos" e a "adequação dos recursos experimentais". [451]

Defende-se nesta pesquisa que distinguir a (1) os raciocínios matemáticos do método dos (2) procedimentos do método que investigam exclusivamente os objetos físicos, esclarece os meios pelos quais Descartes explica as cores do arco-íris nos *Meteoros*. Sustenta-se, pois, que Descartes, primeiramente, concebe metodicamente quais são as propriedades geométricas que têm inteligibilidade analítica e, nesse caso, mais especificamente, a normal. Em seguida, propõe-se que ele estabelece cadeias de deduções entre a causa analiticamente descoberta (a normal) e o efeito que prova essa cadeia dedutiva, ou seja, uma demonstração geométrica. Tal demonstração geométrica – adquirida por meio de sua teoria das proporções – corresponde à lei dos senos. Esta demonstração geométrica colocada como "representação matemática" do "fenômeno natural", portanto, possibilita a Descartes ordenar a sua investigação em vista da medida dos corpos.

[450] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 41.
[451] Cf. TOURNADRE, 1982, p. 49. Tournadre sustenta sua interpretação a partir da carta datada de 27 de julho de 1638, que Descartes enviou a Mersenne. Nesta carta, Descartes declara que deixou de resolver questões de geometria abstrata, isto é, de questões que apenas servem para cultivar a razão; e, que a partir daquele momento, ele pretendia estudar outra espécie de geometria, pela qual se pudessem explicar diversos fenômenos naturias, como, por exemplo, as cores do arco-íris. Cf. *Correspondance* (AT, II, 268).

Expõe-se a seguir uma possível reconstituição do modo como Descartes haveria determinado metodicamente a lei dos senos mediante uma demonstração geométrica, feita especificamente para explicar a reflexão e a refração do movimento da luz em um prisma de cristal. Um raio AB penetra em um prisma HBP e emerge ao longo de BI (ver figura 51). [452] Para medir o ângulo de refração e de incidência em B, Descartes acrescenta CE, a normal em B, que é perpendicular a BP. [453] Para reconhecer que HI é o seno de *r* e que OI é o seno de *i* basta traçar HO e, uma vez que BH = BO, HO é paralela CE. AB é paralelo a HI, donde o ângulo ABC é igual ao ângulo OHI, e o ângulo EBI é igual ao ângulo BOH. Portanto, o ângulo HOI= $180^{o} - r$. Uma vez que a razão dos senos de dois ângulos internos de um triângulo é igual à razão dos lados opostos, $\frac{sen\ HOI}{sen\ OHI} = \frac{HI}{OI}$ ou $\frac{sen\ (180\ \text{graus} - r)}{sen\ r} = \frac{HI}{OI}$. Entretanto, *sen* $180^{o} - r$ é igual à *sen r*; e, assim: $\frac{sen\ i}{sen\ r} = \frac{HI}{OI}$. [454] Logo, a razão constante de refração em um prisma de cristal corresponde a razão entre o senos de *i* e *r*. Essa lei, portanto serve como meio de orientação das experimentações científicas de Descartes. Tal orientação é que revela o início da aplicação do método na ciência meteorológica de Descartes.

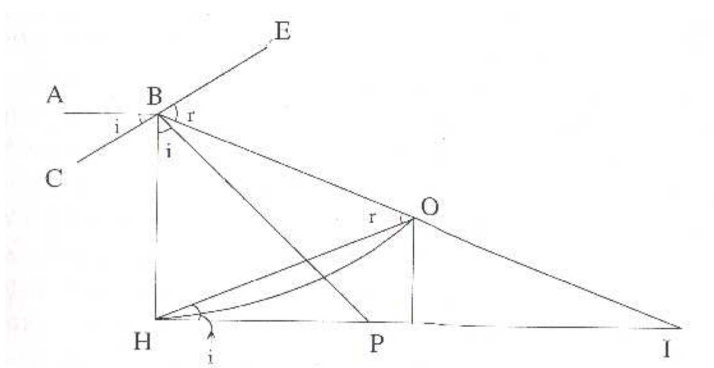


Figura 51 (SHEA, 1991, p. 156)

[452] Deve-se assinalar que é a partir de um prisma de cristal que Descartes reproduz as cores do arco-íris no capítulo VIII dos *Meteoros*.

[453] É interessante observar que de maneira semelhante, Descartes demonstra na *Geometria* a lei dos senos através da posição da normal nas ovais. No tópico da *Geometria* intitulado*a demonstração das propriedades das ovais referentes às reflexões e as refrações*, Descartes relata que: Mas é necessário que eu não omita a demonstração do que disse, e para isso, tomemos, por exemplo, qualquer ponto C na primeira propriedade da primeira oval: tracemos a reta CP normal à curva em C, o que é fácil pelo método que expliquei". *La Geometrie* (AT, VI, 431).

[454] Para essa explicação foram utilizados os cálculos fornecidos por Shea na sua obra *The Magic of Numbers and Motion*. Em relação a essa explicação, Shea relata que a demonstração geométrica feita por Descartes na carta datada de 13 de novembro de 1629, possibilita uma reconstituição plausível do modo como Descartes determinou a lei dos senos. Ele acrescenta, ainda, que a dedução de Descartes é exclusivamente geométrica, ou seja, não se baseia em qualquer lei física. Cf. SHEA, 1991, p.156-157. Assinala-se, todavia, que Descartes não deixou à posterioridade uma explicação explícita do modo como ele determinou a lei dos senos. Entretanto, há consenso entre os historiadores da filosofia de que Descartes havia determinado a lei dos senos desde meados de 1626.

As experimentações da ciência meteorológica são iniciadas, então, quando Descartes deduz a lei dos senos e, a partir disso, visa justificar as cores do arco-íris. Para tal justificação é necessário à aplicação do método através de outros meios de orientação, os quais possibilitem a investigação dos objetos físicos que compõem o arco-íris.

Pretende-se agora defender a interpretação proposta nesta pesquisa por meio dos argumentos que Descartes expõem no capítulo VIII dos *Meteoros*. Neste capítulo, Descartes busca justificar o aparecimento das cores do arco-íris a partir da lei dos senos de *i* e *r* e através de alguns experimentos científicos.

3.3. A justificação cartesiana do aparecimento das cores do arco-íris

Ao observar o arco-íris, Descartes supõe que esse fenômeno atmosférico surge mediante a ação dos raios de luz sobre as gotas de água suspensas no ar. Desse modo, Descartes constata que o arco-íris aparece tanto no céu quanto no ar próximo ao observador. Tal constatação é também observada por Descartes quando se realiza determinadas experiências em algumas fontes artificiais, isto é, desde que haja uma quantidade suficiente de gotas de água suspensas no ar sobre as quais incide os raios luminosos. Em tais observações, Descartes utiliza o procedimento de redução mediante a identificação dos objetos físicos que hipoteticamente originam o aparecimento das cores do arco-íris. Descartes:

> O arco-íris é uma das mais notáveis maravilhas da natureza e sua causa foi investigada com muita curiosidade em diversas épocas por grandes espíritos que, sendo sua causa tão pouco conhecida, não poderia optar por um assunto mais apropriado com o intuito de mostrar como através do método que emprego, tornar-se-á viável ascender a conhecimentos que não foram alcançados por aqueles cujos escritos estudamos. Primeiramente, ao ponderar que o arco-íris pode surgir não apenas no céu, mas também no ar próximo a nós, sempre que há certa quantidade de gotas de água iluminadas pelo sol, como os que vemos através das experiências nas fontes artificiais, pude concluir sem esforço que o fenômeno surge simplesmente do modo como os raios de luz atuam nas gotas, quebrando a luz em direção aos nossos olhos. [455]

[455] *Les Meteores* (AT,VI, 325). Numa carta enviada a Mersenne – datada em 8 de outubro de 1629 – Descartes relata que: "Me decidir escrever um pequeno *Tratado sobre Meteorologia*, que me dará a explicação das *cores* do *arco-íris*" (AT, I, 6). Segundo Cottingham a descrição do arco-íris, assim como as das suas cores, é adquirida através do cálculo e da confirmação experimental dos ângulos dos do arco-íris; fatos estes que aparecem no capítulo VIII dos *Meteoros*, publicado em 1637. Cf. COTTINGHAM, 1993, p. 22.

Nesta prévia observação das cores do arco-íris, Descartes identifica, por meio do procedimento de redução, os objetos físicos que hipoteticamente geram o fenômeno meteorológico, a saber, uma determinada quantidade de gotas de água suspensas no ar, nas quais incide os raios de luz.[456] Na sequência, Descartes requer mediante o procedimento de reconstrução outros objetos físicos que possibilitem a reprodução das cores do arco-íris.

Para a reprodução das cores do arco-íris, primeiramente, Descartes utiliza um recipiente esférico com água. Na utilização deste recipiente, ele observa, através dos ângulos concebidos pelos raios emergentes sobre a água, o aparecimento de dois locais com cores de distintas intensidades, os quais a partir de uma determinada demonstração geométrica (ver figura 52) devem permitir a justificação do aparecimento das cores do arco-íris. Descartes:

> Enchi com água um grande recipiente esférico e transparente, e supus que os raios do Sol veem do local do céu marcado como AFZ. Estando o meu olho no ponto E, quando eu coloco esse recipiente em direção a BCD, a parte dele em D me parece extremamente vermelha e incomparavelmente mais brilhante do que o resto. Quer eu me aproxime ou me afaste dele, quer o mova para direita ou para a esquerda, ou mesmo o gire em um círculo em torno de minha cabeça, desde que a linha DE forme sempre um ângulo de aproximadamente 42 graus com a linha EM, que convém imaginarmos que se estende do centro do olho até o centro do Sol, D aparece sempre igualmente vermelho. Todavia, tão logo aumento esse ângulo DEM, o vermelho desaparece. Quando o diminuo ligeiramente, esse ângulo não desaparece por completo de uma só vez, mas primeiro se divide em duas partes menos brilhantes, nas quais é possível ver o amarelo, o azul, e as outras cores (ver figura 52).[457]

---

[456] Segundo Broncano Descartes descreve o fenômeno do arco-íris a partir de uma representação matemática. Segue Broncano: "O método de análise dos fenômenos físicos não começa, como era de se esperar, em o grosseiro sensorialismo medieval, por uma descrição dos dados dos sentidos, mas sim por um "feito racional", isto é, por uma representação mental do fenômeno em questão, que no caso do arco-íris vai se converter em um modelo físico, a saber, em uma gota de água que reconstrói um pedaço artificial da natureza em que se pode estudar e repetir os fenômenos. [...] A construção de Descartes é física, e, é um desenho experimental, mas também e antes de tudo, é um modelo mental, no sentido de que consiste em uma representação sobre a que o sujeito pode atuar introduzindo variações em suas propriedades, decompondo-as, etc. Estas variações devem-se ao emprego de capacidades diferentes, por exemplo, as visuais, as lingüísticas, as matemáticas, as geométricas [...]. O importante é que o modelo define o espaço-problema, o espaço sobre o que se aplica a capacidade combinatória do sujeito e, assim, define as perguntas que se podem fazer e determina como será a forma da resposta. [...] A configuração inicial, exemplificando, é uma configuração de linhas aparentemente geométrica, porém em realidade física: tratamos com um fenômeno físico e mental, mas tem sido reduzido a um desenho experimental. Este dado é muito importante porque o espaço de possibilidades matemáticas é diferente do espaço de possibilidades físicas. A partir deste momento, Descartes vai concretizar ainda mais o problema.[...] A diferença é, como vamos ver imediatamente, que Descartes não é um empirista ingênuo. A ordem que está seguindo o raciocínio de Descartes é a partir da razão, de uma configuração geométrica, e remonta-se das análises às causas. Nesta análise, vimos desde os efeitos às causas, também desde as idéias complexas às simples". BRONCANO, 1997, p. 19-56.

[457] *Les Meteores* (AT,VI, 325-326).

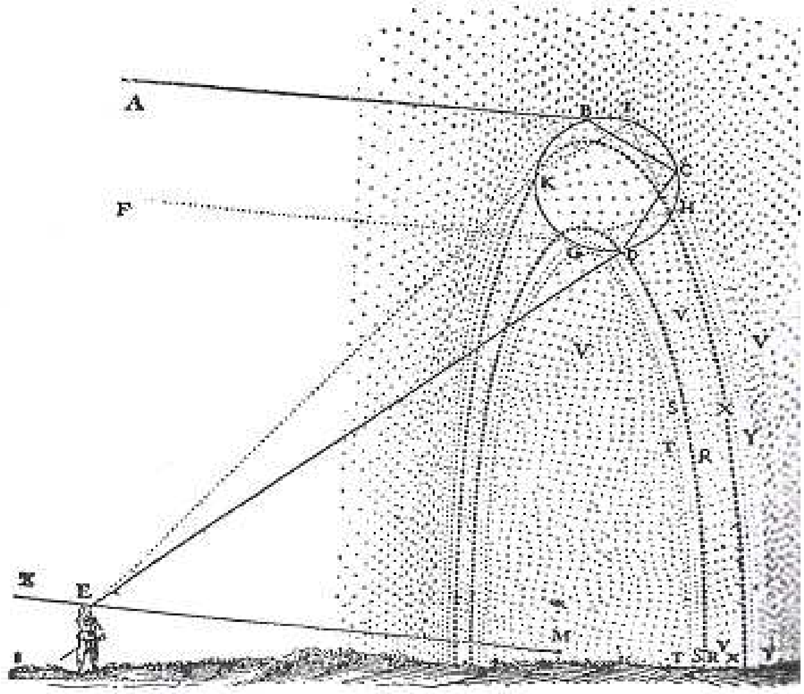


Figura 52 (AT, VI, 326)

Nessa explicação, Descartes usa uma demonstração geométrica, na qual o observador é identificado no ponto E, e que, o mesmo infere que os raios paralelos originados dos pontos AFZ são identificados no ângulo DEM. [458] De acordo com Descartes, esse ângulo é formado pelo raio luminoso oriundo dos pontos DE e pelo raio luminoso oriundo dos pontos EM, os quais aparecem em um ângulo de aproximadamente 42º (rever figura 52). [459] Na sequência, ele observa o aparecimento de uma forte tonalidade vermelha no ponto D, ou seja, no arco identificado no círculo BCD. Diante destas observações, decorrem três constatações: (1) que dentro desse arco de 42º predomina a cor vermelha; (2) que a partir da diminuição desse arco, as cores, depois do vermelho, vão perdendo a nitidez; (3) e que quanto maior ou menor o ângulo, as cores tendem a desaparecer completamente. [460] Acrescenta-se, pois, que quando Descartes move o recipiente esférico com água em direção à luz, ao diminuir sutilmente o ângulo que produz a tonalidade vermelha, aparecem as outras cores do arco-íris no arco menor. Diante disso, Descartes propõe observar com mais atenção esse arco de tonalidades menos intensas. [461] Descartes observa, então, que a tonalidade vermelha do arco menor é identificada predominantemente no ponto K, onde o

[458] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 326).
[459]*Les Meteores* (AT,VI, 326).
[460] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 326).
[461] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 326).

ângulo KEM corresponde a aproximadamente 52º. Todavia, Descartes verifica um arco menos intenso quando o ângulo é sutilmente aumentado, ao passo que, se esse for sutilmente diminuído, o vermelho e as demais cores que se observara outrora desaparecem (rever figura23). Descartes:

> Em seguida, olhando através do ponto marcado com a letra K na esfera, percebi que, formando o ângulo KEM com aproximadamente 52 graus, K também parecia ter a cor vermelha, mas não tão brilhante quanto em D; e que, tornando-o um pouco maior, surgiam outras cores mais fracas; mas que, ao produzi-lo um pouco menor ou muito maior, não aparecia mais nenhuma cor. Donde eu pude concluir muito distintamente que todo ar escuro de M, estando repleto de tais bolas, ou no local destas gotas de água, deve aparecer um ponto muito vermelho e muito brilhante em cada uma dessas gotas, cujas linhas traçadas em direção ao olho E constituem um ângulo de aproximadamente 42 graus com EM, como suponho ser o caso dos que estão marcados R; e que tais pontos, se observados todos juntos, sem que se veja de outra maneira o lugar onde se encontram, a não ser através do ângulo sob o qual elas se veem devem surgir como um círculo contínuo de cor vermelha; e que, devem existir mesmo assim pontos, naquelas que estão marcadas em S e T, cujas linhas traçadas em direção à E formam ângulos um pouco mais agudos com EM, que compõem os círculos de cores mais fracas, e que é nisso que consiste o primeiro e principal arco-íris; imediatamente, depois que o ângulo MEX sendo este de 52 graus, após aparecer um círculo vermelho de gotas marcando em X, e outros círculos de cores mais fracas nas gotas marcadas em Y, e que é nisso que consiste o segundo e menor arco-íris; e finalmente em todas as outras gotas marcadas V não devem aparecer nenhuma cor.[462]

Descartes verifica, pois, que em uma atmosfera repleta de gotas de chuva, aparecem pontos vermelhos em todas aquelas que formassem ângulos de 42º e 52º. A partir disso, ele constata que um arco-íris primário aparece em um ângulo de 42º, com vermelho na parte superior e violeta na parte inferior, e um arco-íris secundário aparece em um ângulo de 52º graus, através do recipiente esférico invertido. A partir dessas constatações, Descartes realiza mais uma observação com o intuito de justificar o aparecimento das cores do arco-íris (ver figura 53).[463] Descartes:

> Ao examinar mais particularmente no círculo BCD, o que fazia com que o ponto D, parecesse vermelho, fiz a suposição de que o motivo fosse os raios de sol que, vindos de A em direção à B, se curvam ao entrar na água no ponto B, e seguiam para C, de onde se refletiam em direção à E: Pois, caso eu pusesse um corpo opaco ou escuro em qualquer ponto das linhas AB, BC, CD, ou de DE, essa cor vermelha desaparecia, e mesmo quando eu recobria toda a bola, menos os pontos B e D, e colocava corpos escuros em todas as outras partes, se nada viesse impedir a ação dos raios ABCDE, esta não deixava de aparecer. Após este

[462] *Les Meteores* (AT,VI, 327-328).
[463] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 328).

> empreendimento, na busca de qual seria a causa do vermelho que surgia perto de K, supus que eram os raios que vinha de F em direção à G, onde eles se curvavam para H, e em H se refletiam em direção a I, e em I se refletiam de novo para K, e finalmente se curvavam no ponto K e tendiam para E. Com isso, o primeiro arco-íris é engendrado por raios que chegaram aos olhos, após duas refrações e uma reflexão e o segundo arco-íris, por outros raios que chegam até o arco-íris, após duas refrações e duas reflexões. Ora, mas permanecia a dificuldade principal, a saber, porque havendo vários outros raios que, após duas refrações e uma ou duas reflexões, ainda podem tender na direção do olho, quando essa bola estiver em outra situação; sendo, no entanto somente aqueles aos quais me referi que fazem surgir algumas cores. [464]

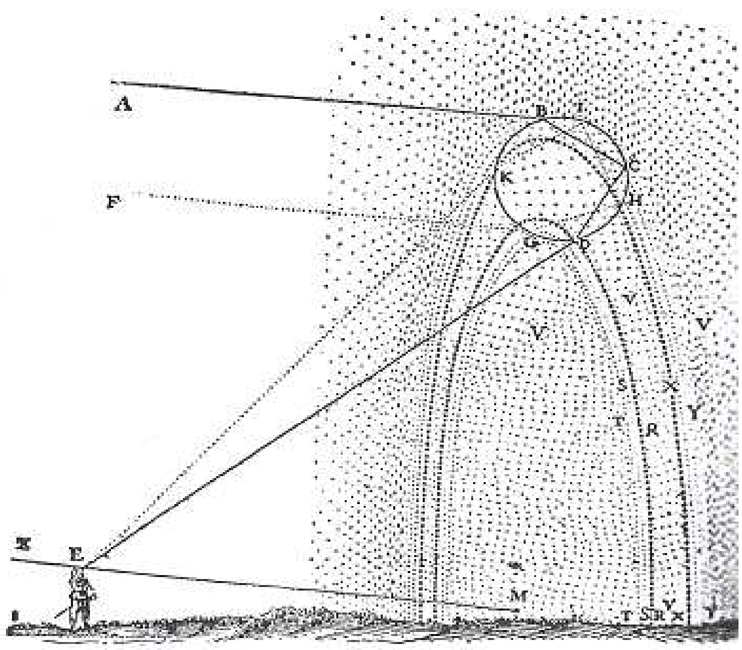


Figura 53 (AT, VI, 328)

Descartes pretende explicar o motivo que faz o arco-íris primário ser produzido em um ângulo de 42º, o secundário ser produzido em um ângulo de 52º e, sobretudo, o que determinaria tais ângulos. O motivo é, pois, a diferenciação entre o índice de refração na água em relação ao ar. É, em virtude desse índice de refração que um raio luminoso, proveniente do ar e penetrado na água com determinado ângulo de incidência, se inclina em um ângulo específico. Esse ângulo de refração unido às reflexões internas determina o ângulo em que as cores são observadas. A refração, portanto, é o dado mais significante desse experimento. Por isso, ele passa a se concentrar na observação da refração, mostrando, todavia, que não são necessárias superfícies

[464] *Les Meteores* (AT,VI, 328-329).

curvas, nem reflexões internas, nem tampouco diversas refrações para que o fenômeno possa ser reproduzido. [465] Diante disso, Descartes alega a necessidade de outro experimento que viabilize a justificação das cores do arco-íris. Descartes:

> Para solucionar esta dificuldade, eu olhei para ver se haveria algo mais, de modo que comparando este com o outro eu estivesse em uma posição melhor para calibrar a sua causa. Então, recordando que um prisma ou um triângulo de cristal fazem com que as cores similares estejam vistas, eu considerei uma delas tais como MNP, que tem duas superfícies, MN e NP, inclinando a outro ângulo em torno de 30° ou de 40°, de modo que se os raios do Sol estivessem transversalmente nos pontos ABC do sol em ângulos retos, ou quase em ângulos retos, de modo que não se submeta a nenhuma refração visível, mas, eles deveriam sofrer uma refração razoavelmente grande ao sair com NP. E quando eu cobri um destes, as duas superfícies com um corpo escuro, em que havia uma abertura estreita DE, em seguida eu observei que os raios, passando com esta abertura em fazer para o pano ou o papel branco FGH, pintam todas as cores do arco-íris neste; e isso, pinta sempre a cor vermelha em F, e azul ou em violeta no H. Disso eu aprendi primeiro, que as superfícies das gotas da água não necessitam serem curvados a fim de produzir estas cores, como aqueles deste cristal são complemente lisos. Nem o ângulo sob os quais aparecem tem a necessidade em ser de todo tamanho particular, para este poder ser mudado sem nenhuma mudança nele, e embora eu possa fazer os raios que viajam para F para dobrar mais ou menos do que aqueles que viajam para H, não obstante colorem-no sempre de vermelho, e aqueles que vão para H colorem-no sempre com a cor azul. Nem há uma reflexão necessária, mesmo porque não há nenhuma reflexão neste momento do exame, nem finalmente nós necessitamos de muitas refrações, porque há somente uma refração neste momento. Mas eu raciocinei que deve haver pelo menos uma refração; e, no fato, uma cujo efeito não foi destruído por outro contrário. Esta experiência mostra que as superfícies MN e NP devem estar paralelas, os raios, sendo conformados tanto quanto em um, porque podiam ser dobrados no outro, e assim não produziriam estas cores. Eu não duvidei que a luz não estivesse, porque sem ela nós não vemos nada. E, além disso, eu observei essa sombra, ou alguma limitação nesta luz, pois me correu necessário; para se nós removermos o corpo escuro de NP, as cores FGH cessam de aparecer; e se a abertura DE for feita grande bastante, o vermelho, alaranjado, e amarelo no alcance de F não mais seria por causa daquele do que o verde, o azul, e a violeta no H. Mas, todo o espaço extra em G entre o branco destas duas marcas. Após isto, eu tentei compreender por que essas cores são diferentes em H e em F, embora a refração, a sombra e a luz concorram nelas do mesmo modo.[466]

No segundo experimento, Descartes propõe a utilização de um prisma de cristal. Identificando, pois, MNP o prisma de cristal (ver figura 54), ele observa que quando o raio

[465] Nota-se, pois, que a experiência realizada a partir do procedimento de reconstrução permitiu a Descartes excluir o que era irrelevante para a reprodução das cores do arco-íris.
[466] *Les Meteores* (AT,VI, 329-331).

luminoso incide diretamente sobre a superfície MN – de modo que ainda não ocorresse nenhuma refração – e passa por uma abertura estreita, DE, em uma face NP, as cores aparecem na tela PHGF. A partir disso, Descartes constata que a cor vermelha aparece aproximadamente em F e a violeta em H. [467] É relevante assinalar que Descartes chega a essa constatação a partir da observação de uma única refração que somente ocorre quando o raio luminoso já entrou em DE. Ele observa também que é necessária uma determinada limitação da luz, pois, quando a abertura DE é demasiadamente alargada, as cores apenas aparecem nas extremidades e o centro permanece branco.

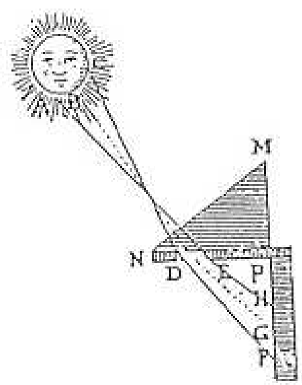


Figura 54 (AT, VI, 330).

Descartes pretende, pois, explicar o motivo que faz as cores serem produzidas na tela PHGF e "por que essas cores são diferentes em H e em F, embora a refração, a sombra e a luz ocorram nelas do mesmo modo".[468] Para explicar isso, ele invoca a sua concepção do "movimento local dos corpos".[469] Descartes, então, supõe que os corpúsculos esféricos que hipoteticamente formariam o ar têm apenas um movimento na direção de sua propagação, mas, ao incidirem obliquamente na superfície refratora, adquirem tendência a um movimento giratório. A partir

[467] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 330).
[468]*Les Meteores* (AT,VI, 331).
[469]Descartes: "E ao que concerne à natureza da luz, tal como eu descrevi na *Dióptrica*, é como a ação do movimento de uma determinada matéria muito sutil, cujas partes devem ser imaginadas como os pequenos corpúsculos esféricos que rolam nos poros de corpos terrestres; assim, eu compreendi que tais corpúsculos podem rolar de maneiras diferentes, dependendo das causas que os determinam; e que todas as refrações que ocorrem no mesmo modo lateral fazem com que os gire no mesmo sentido." *Les Meteores* (AT, VI, 331). Fichant afirma que, para Descartes, a identidade de sua Física com uma Geometria visa à explicação dos fenômenos da natureza, mas, que, por exemplo, a explicação do arco-íris, feita nos *Meteoros*, pressupõe algo totalmentee diferente da ultilização dos pressupostos adquiridos da Geometrai abstrata. Cf. FICHANT, 1988, p. 64. Todavia, Fichant desconhece ou se esquece de tratar de uma espécie de geometria que Descartes densenvolvera para explicar os fenômenos naturais, tal como, por exemplo, as cores do arco-íris nos *Meteoros*. Vide *Correspondance* (AT, II, 268). Vale recordar aqui que a concepção cartesiana da produção das cores elimina uma tradicional distinção entre as cores reais e as aparentes, proposta, por exemplo, pelos Conimbricenses.

dessa suposição, Descartes faz três importantes considerações, a saber, que (1) os corpúsculos esféricos giram na mesma direção, (2) que todos os corpúsculos podem girar em uma mesma velocidade ou, ainda que (3) os corpúsculos vizinhos podem acelerar ou retardar as suas rotações. Ora, o que produz as diferenças na velocidade apenas pode ser o contato com a sombra em D e E (ver figura 55). Isso porque, todos os corpúsculos têm, inicialmente, o mesmo movimento. Admitir a mudança de velocidade de rotação é importante porque permite a Descartes explicar as diferentes cores do arco-íris. Descartes:

> Mas quando não há nenhum corpúsculo notavelmente que se move significativamente mais rápido ou mais lento do que ela, sua rotação é aproximadamente igual a seu movimento retilíneo, visto que quando há algum em um lado que se move mais lentamente, e outro, no outro lado, que se move com facilidade ou mais rápido, como acontece quando está limitada pela sombra e se ilumina, a seguir quando encontra aquelas que se estão movendo mais lentamente no lado para que estejam rolando, como aqueles que compõem o raio EH, isto faz com que gire menos rapidamente do que se estivesse movendo-se em uma linha reta. E o oposto acontece quando o encontram no outro lado, como aqueles do raio DF. [470]

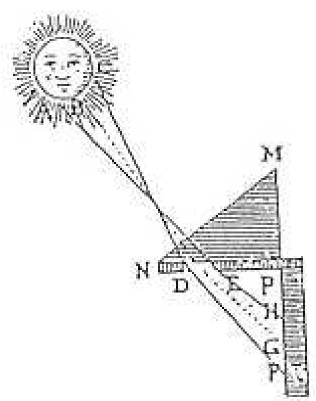


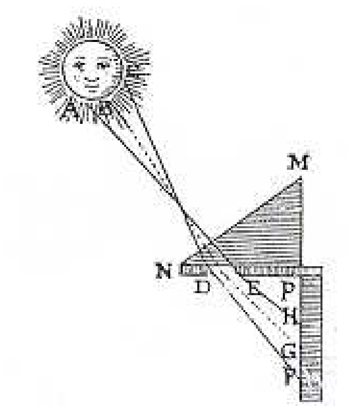
Figura 55 (AT,VI, 332)

Descartes constata, então, que os corpúsculos do raio EH se deparam com os corpúsculos que giram mais lentamente, o que retarda o seu próprio movimento. Constata também que os corpúsculos do raio DF se deparam com os outros que se movem mais depressa, o que acelera o seu movimento. Ainda utilizando esse experimento, Descartes faz outra suposição:

> Para melhor compreender isto, imaginemos que a esfera 1234 seja empurrada de V para X, de tal maneira que apenas se dirija em linha reta e que seus dois lados

[470] *Les Meteores* (AT,VI, 331-332).

1 e 3 desçam igualmente velozes até a superfície da água YY, onde o movimento do lado marcado com o 3, que a encontra em primeiro lugar, é retardado, enquanto aquele lado marcado com o 1 ainda continuaria. Isso causa que toda a esfera comece infalivelmente a girar segundo a ordem dos algarismos 123 (rever figura 55 e ver figura 56). [471]



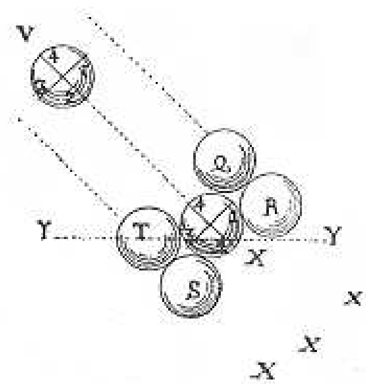


Figura 56 (AT,VI, 332)

A partir dessa suposição, Descartes identifica que um pequeno corpúsculo esférico 1234 – que é obliquamente empurrado de V para X, ou seja, do ar para água – adquire um movimento giratório ao atingir a superfície YY, pois, no primeiro instante, a parte 3 é retardada, enquanto que a parte 1 continua a se descolar sem ter sua velocidade reduzida. Por isso, Descartes alega que o corpúsculo deve girar seguindo a direção 1234. A rotação, portanto, ocorre como o resultado da passagem do corpúsculo de um meio a outro. Em seguida, Descartes busca explicar o modo como se produz as diferentes velocidades a partir de outra suposição. Descartes:

> Imaginemos, em seguida, que ele está ladeado de quatro outros corpúsculos esféricos Q, R,S,T em que os dois Q e R tendem, com mais força, que ele, a se mover para X. Os outros dois S e T tendem com menos força para X. Donde é evidente que Q, pressionando sua parte marcada com 1, e S, retendo aquela marcada com 3, aumentam seu giro, e que R e T não a influenciam em nada porque R tem a disposição de se mover para X com maior rapidez do que ele, e T não tem uma disposição de segui-lo com a mesma velocidade com que ele o precede. Isso explica à ação do raio DF. Mas se pelo contrário, se Q e R tenderem mais lentamente do que ele para X, S e T tenderá mais rapidamente, R empreende o movimento dessa parte que marcou em 1, e T da parte 3, sem as duas outras Q e S fazendo qualquer cor. Isto explica a ação do raio EH. Mas vale a pena anotar aquele desde que o corpúsculo esférico 1234 é complemente redondo, assim podendo facilmente acontecer que, quando fosse pressionado pelos dois corpúsculos esféricos R e T, estaria, pois girando, ou seja, girando em

[471] *Les Meteores* (AT,VI, 332).

> torno da linha central 42, para assim causar sua rotação. E, assim, mudando sua posição em um instante, gira subsequentemente depois dos números 321; para os dois corpúsculos esféricos R e T, que fizeram com que começasse a girar, fazê-lo continuar até que termine a metade do giro neste sentido, e então neles pode-se aumentar sua rotação em vez de retardá-la. Isso me permitiu resolver a dificuldade principal que eu tive nesta matéria. E parece-me que é coerente a suposição de que a natureza das cores que aparecem em F consiste apenas em que as partes da matéria sutil, que transmite a ação da luz, tendem a girar com maior do que a se mover em linha reta [...]. [472]

Descartes, então, propõe ao leitor dos *Meteoros* que imagine um corpúsculo esférico 1234, sendo, pois, cercado por outros quatro corpos similares, a saber, Q, R, S e T. Em seguida, ele admite quatro considerações, a saber, (1) que Q e R movem-se com mais força em direção a X do que 1234, enquanto S e T são retardados; (2) que Q e R aceleram 1234, pois seu movimento de translação age empurrando as partes 4 e 1; (3) que S e T, por outro lado, não tem nenhum efeito porque R tem uma disposição a se mover para X mais depressa do que é seguido por 1234; e, (4) que T não tem nenhuma disposição a seguir 1234 com a mesma velocidade com que 1234 procede. A partir dessas considerações, Descartes explica a ação do raio DF ou, em outras palavras, ele explica a produção do vermelho em F e do azul ou violeta em H. Descartes:

> [...] Aqueles que têm uma tendência muito mais forte de girar, produzem a cor vermelha, e aqueles que têm uma tendência menor a girar produzem a cor amarela. Ao contrário, a natureza das que vemos próximas de H consiste apenas em que essas pequenas partes não giram tão rapidamente quanto costumam fazê-lo, não havendo nenhum motivo especial que as impeça; de modo que o verde aparece quando elas giram um pouco mais lentamente, e o azul quando elas giram muito mais depressa. E geralmente, nas extremidades desse azul, mistura-se o encarnado que, acrescentando-lhe brilho e vivacidade, transforma-o em violeta ou em roxo. O que provém sem dúvida do fato de que a mesma causa, que costuma o giro das partes da matéria sutil, estando então suficientemente forte para fazer mudar a situação de algumas, deve aumentá-las nestas, enquanto o diminui nas outras. E, em tudo isso, a razão orienta tão adequadamente a experiência, que não creio ser possível, após ter conhecido ambas, duvidar de que a coisa não seja tal como acabo de explicá-la.[473]

Nesta explicação, Descartes busca compreender o motivo físico que faz surgir a cor vermelha. Ora, uma vez que a cor vermelha sempre aparece no ponto F, Descartes diz: “[...] Parece que é certa a suposição de que a natureza das cores que aparecem em F consiste apenas nas partes da

[472] *Les Meteores* (AT,VI, 333).
[473] *Les Meteores* (AT,VI, 333-334).

matéria sútil que transmitem a ação da luz".[474] E, na sequência, Descartes afirma que: "Entretanto, a natureza daquelas que são observadas em H, não consiste apenas no fato de que estas pequenas partes não giram tão rapidamente, quando não há nenhuma causa particular que as impede" [475]. Disso é possível concluir que:

> A natureza das cores que aparecem ao redor do ponto F não consiste senão no fato de que os corpúsculos da matéria sutil são, pois os responsáveis pela transmissão da ação dos raios luminosos, que tendem o movimento com mais rapidez do que a se mover em linha reta, de maneira que estas tendem a girar com maior rapidez produzindo a cor vermelha, enquanto que os corpúsculos que giram mais lentamente produzem o amarelo e outra cor próxima ao amarelo.[476]

Constata-se que a natureza das cores é adquirida por meio da representação geométrica do movimento local dos corpos ou, mais especificamente, por aquilo que é identificado em torno dos pontos F e H. Além disso, verifica-se que os corpúsculos da matéria sutil giram mais vagarosamente do que os que se movem em linha reta, de tal maneira que, a cor verde aparece quando o movimento de rotação é um pouco menor e a cor azul aparece quando o movimento é muito menor. Segue Descartes: "[...] de modo que o verde aparece quando giram apenas um pouco mais lentamente e o azul quando giram ainda mais lentamente". [477] Por isso, segundo Descartes pode suceder que nas extremidades da cor azul, apareçam as cores violeta ou roxo, em virtude do movimento de rotação ser retardado. Com isso, Descartes identifica as condições necessárias que originam o aparecimento das cores do arco-íris no prisma de cristal. Descartes, assim, constata que os diversos movimentos são estabelecidos matematicamente conforme cada cor é observada. Entretanto, Descartes suspeita que as cores que aparecem através do prisma podem não ser àquelas que se observa diretamente em um arco-íris, pois, o prisma requer sombras. Descartes:

> De maneira que, mesmo no caso do arco-íris, eu comecei a duvidar se as cores se produziam exatamente da mesma maneira que no prisma de cristal MNP. Pois, eu não notava alí nenhuma sombra que terminasse a luz e continuei sem compreender por que elas apenas apareciam sob determinados ângulos.

---

[474] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 333).
[475] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 334).
[476] *Les Meteores* (AT,VI, 334). Ainda em relação a natureza das cores, Descartes relata nos *Meteoros* que: "Para ser verdade que a sensação que nós temos da luz está causado pelo movimento ou pela inclinação do movimento de alguma matéria que toca em nossos olhos, como é indicado por muitas outras coisas, devemos, pois está certo que os movimentos diferentes desta matéria devem gerar sensações diferentes em nós. E porque estes movimentos não podem diferir à exceção na maneira que eu mencionei, pois nós não observamos nenhuma diferença nas sensações que temos deles à exceção de uma diferença na cor". *Les Meteores* (AT,VI, 334).
[477] *Les Meteores* (AT,VI, 334).

> Contudo, quando peguei a caneta e calculei minuciosamente todos os raios que incidem sobre os diversos pontos de uma gotícula de água, com o intuito de verificar sob quais ângulos eles chegariam aos nossos olhos, após duas refrações e uma ou duas reflexões, constatei que um número muito maior deles pode ser visto em ângulo de 41 a 42 graus do que em qualquer ângulo menor, e nenhum é visível em um ângulo maior. Depois também observei que, após duas reflexões e duas refrações, havia de maneira demasiada mais raios que vinham na direção dos olhos, isto é, em um ângulo entre 51 a 52 graus do que em qualquer ângulo maior; e que não havia nenhum que viesse em um menor. Desse modo, dos dois lados há uma sombra que bloqueia a luz que, depois de passar por uma infinidade de gotículas de chuva iluminadas pelo Sol, vem em direção aos olhos em um ângulo de 42 graus, ou um pouco menor, causando assim o arco-íris primário e mais importante. E existe outra que termina aquela que vem em um ângulo de 51 graus ou um pouco maior, causando, assim o arco-íris exterior. Isso demonstra que as cores desses arcos são produzidas pela mesma causa que aquelas que aparecem com a ajuda do prisma de cristal MNP. [478]

Assim, Descartes demonstra que as cores dos arcos são produzidas pela mesma causa que aquelas que apareciam com o auxílio do prisma de cristal MNP (ver figura 57). Isso porque ele constata que o raio do arco interno não é maior do que 42º e que o raio do arco exterior é de aproximadamente 51º a 52º. Na sequência, Descartes diz: "Mas de modo que aqueles que têm um conhecimento da matemática possam compreender se o cálculo que eu fiz destes raios sejam suficientes e exatos, porém ainda é necessário explicá-lo". [479]

---

[478] *Les Meteoros* (AT,VI, 336-337).

[479] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 337). No capítulo intitulado "Ensaios Metodológicos", da obra *Descartes´Philosophy of Science*, Clarke relata que existem problemas óbvios implicados na suposição de que a descrição que aparece no discurso VIII dos *Meteoros* represente fielmente o trabalho experimental que Descartes leva a cabo realmente. Ainda que este tema possa ser resolvido através de estudos históricos mais detalhados, está bastante claro que a *reconstrução* do *descobrimento* que Descartes faz, é um fiel exemplo do que quer dizer com o método do descobrimento que encontramos tanto encoberto como revelado na Parte II do *Discurso do método.* Isto quer dizer que podemos abandonar confiadamente a ideia de que o método cartesiano na física é não experimental ou inaceitavelmente *a priori*. Igualmente, nas provas geométricas introduzimos primeiro novas construções e obtemos conclusões a partir destas, e com estas conclusões, como base, surgem outras construções e deduções até que finalmente descobrimos a maneira de discorrer a partir do que é dado, aquilo que buscamos por meio de construções extras, e, do mesmo modo, na ciência física obtemos conclusões a partir do observado, e isto sugere novos experimentos e observações que geram novas conclusões. A introdução sistemática de pressupostos e modelos auxiliares que o emprego apropriado de provas experimentais em cada passo deste procedimento é o que Descartes quer dizer com "análise". A síntese, assim, é a tarefa mais simples de reescrever o descobrimento por analogia com as provas da geometria, de maneira que resulte explícito que o que se supõe inicialmente como hipótese fundamental, é a conexão "racional" entre os distintos passos do argumento resultante. Cf. CLARKE, 1982, p. 184-186. Entretanto, defende-se nesta pesquisa que a via analítica de descoberta não é empregada por Descartes diretamente nas provas experimentais, mas sim na descoberta de demonstrações geométricas que sirvam como meio de orientação das justificações experimentais.

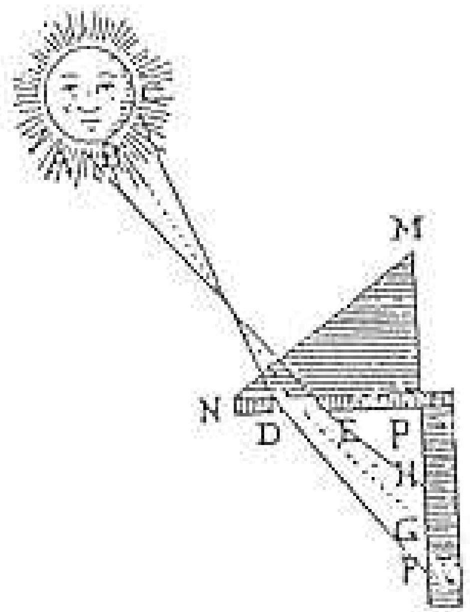


Figura 57 (AT,VI, 335)

A justificação das cores do arco-íris, então, é feita por Descartes a partir da lei dos senos e da seguinte maneira: seja AFD uma gota de água. [480] Descartes divide o meio-diâmetro CD ou AB em partes iguais aos raios que ele pretende calcular, possibilitando, assim, atribuir a mesma quantidade de luz às demais. [481] Em seguida, ele considera um desses raios em particular, por exemplo, EF, que, em vez de passar reto em direção a G, desvia-se para K, e se reflete de K para N. Nesta perspectiva, o raio vai em direção ao olho P ou, então, reflete-se mais uma vez de N para Q, e desse ponto volta em direção ao olho R (ver figura 58). Traçando CI a ângulos retos sobre FK, Descartes constata – conforme foi estabelecido na *Dióptrica* – que AE, ou HF e CI tem entre si a proporção pela qual é medida a refração na água. De modo que, se HF contém 8.000 partes, tais que AB contém 10.000 partes. Descartes admite, por conseguinte, que CI contém aproximadamente 5.984 partes. Logo, a refração é de 187 a 250. [482]

[480] Cf. *Les Meteores* (AT, VI, 337). Segundo Alquié: "Por isso o método se propõe simultaneamentente descobrir o simples, objeto da intuição [por exemplo, a lei dos senos], e dispô-lo segundo a ordem, pela qual poderemos elervar-mos, como que gradualmente, e de uma maneira racional, até ao conhecimento do complexo. Substituir o complexo que se apresenta, e se apresenta sem razão, numa espécie de experiência confusa, por um complexo ordenado e racionalmente reconstruído, é que é efetivamente constituir ciência". ALQUIÉ, 1986, p. 29.
[481] Cf. *Les Meteores* (AT, VI, 337).
[482] Cf. *Les Meteores* (AT, VI, 337).

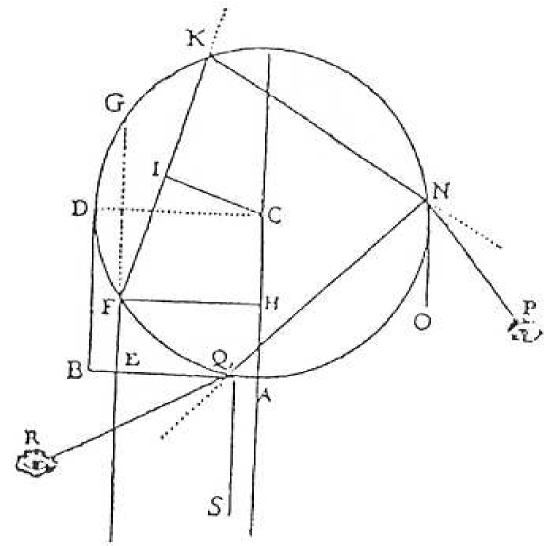


Figura 58 (AT,VI, 337)

Após identificar as duas linhas HF e CI, Descartes constata os dois arcos principais, a saber, FG – que é de 73 graus e 44 minutos – e FK – que é de 106.30. Em seguida, ele traça SQ paralela a EF, e, assim, calcula todos os outros raios paralelos à EF, os quais passam pelas divisões do diâmetro AB (ver tabela do Discurso VIII dos *Meteoros*): [483]

La ligne HF	La ligne CI	L'arc FG	L'arc FK	L'angle ONP	L'angle SQR
1000	748	168.30	171.25	5.40	165.45
2000	1496	156.55	162.48	11.19	151.29
3000	2244	145.4	154.4	17.56	136.8
4000	2992	132.50	154.10	22.30	122.4
5000	3740	120.	136.4	27.52	108.12
6000	4488	106.16	126.40	32.56	93.44
7000	5236	91.8	116.51	37.26	79.25
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
10000	7480	0.	83.10	13.40	69.30

(AT, VI, 338)

[483] Cf. *Les Meteores* (AT, VI, 337- 338).

Constata-se, pois, que os cálculos dependem do conhecimento do índice de refração, a saber, 250/187. A proporção FH e FC corresponde ao seno do ângulo de incidência i do raio EF. Por isso, conclui-se que quando FH é igual à zero, i também será zero. Considerando-se que o raio da gota tem 10.000 (FH = 10.000), quando FH for 10 mil, isto é, quando esse raio apenas encosta-se à gota, admite-se, por conseguinte, que o índice de incidência é de 90^{o}. Como se segue, Descartes observa que quando EF penetra na gota e é refratado em K, o raio pode emergir em K ou ser internamente refletido em K e, nesse caso, ser refratado em N para o olho em P, ou tornar a ser internamente refletido em Q e refratado para o olho em R. Descartes constata que o percurso FKNP – que produz o arco-íris primário – envolve uma reflexão e duas refrações. Constata também que o percurso FKNQR – que produz o arco-íris secundário – envolve duas refrações e duas reflexões. Por isso, Descartes deve determinar para o arco-íris primário o valor do ângulo ONP, e, para o arco-íris secundário, o ângulo SQR.[484] Descartes calcula o ângulo ONP para os valores de FH, que vão de 1.000 a 10.000.[485] Esse cálculo é possível porque, em F, o desvio d é igual a $i - r$ (ângulo de incidência menos o ângulo de refração), medido pelo ângulo GFK. Neste contexto, Descartes explica que o ângulo ONP aumenta rapidamente até 40.57 graus e diminui aproximadamente em torno do ângulo de 41 graus. Isso porque, segundo Descartes[486], há mais raios que fazem o ângulo ONP de aproximadamente 40 graus do que raios que o fazem menor. Por isso, Descartes identifica em K o desvio de $180^{o} - 2r$ e em N o desvio de $i - r$. Logo, o desvio total é de $180^{o} + 2i - 4r$. Então, a partir deste cálculo se obtém: FH = 8.000 (ver tabela a seguir). Logo, i corresponde a aproximadamente a 40^{o} 44'. Com isso, os cálculos demonstram que de qualquer ângulo de incidência do raio o ângulo é no máximo de 40^{o} 57'. Na sequência, Descartes mostra que HF equivale de 8.000 até 9.888. Neste contexto, Descartes constata que o ângulo é de aproximadamente 41^{o} 30'. Então, admitindo que 17'graus seja o raio aparente do Sol, encontram-se: o ângulo máximo do arco-íris interno localizado em 41^{o} 17' e o ângulo mínimo do arco-íris externo em 51^{o} 37'.[487]

[484] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 338).
[485] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 338).
[486] Cf. *Les Meteores* (AT,VI, 338-339).
[487] Cf. *Les Meteores* (AT, VI, 338-340). Assinala-se, pois, que os cálculos foram feitos através das indicações feitas por Boyer (BOYER, 1987, p. 212-218) e Shea (SHEA, 1991, p. 219-222). Segue Descartes: "[...] Não me foi difícil compreender porque o vermelho está do lado de fora do arco-íris interior, nem porque ele está do lado de dentro no exterior; pois a mesma causa que faz com que seja em direção à F, em vez de H, que ele apareça através do prisma de cristal MNP, faz com que, tendo-se o olho no lugar do pano branco FGH, olhando esse cristal, veremos nele o vermelho em sua parte mais espessa MP, e o azul perto de N, pois o raio tingido de vermelho que se dirige a F vem de C, que é a parte do Sol mais próxima à direção MP". *Les Meteores* (AT,VI,340-341).

La ligne HF	La ligne CI	L'arc FG	L'arc FK	L'angle ONP	L'angle SQR
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
8100	6058	71.48	105.25	40.58	64.37
8200	6133	69.50	104.20	41.10	63.10
8300	6208	67.48	103.14	41.20	62.54
8400	6283	65.44	102.9	41.26	61.43
8500	6358	63.34	101.2	41.30	60.32
8600	6432	61.22	99.56	41.30	58.26
8700	65.07	59.4	98.48	41.28	57.20
8800	6582	56.42	97.40	41.22	56.18
8900	6657	54.16	96.32	41.12	55.20
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
9100	6806	49.0	94.12	40.36	53.36
9200	6881	46.8	93.2	40.4	52.58
9300	6956	43.8	91.51	39.26	52.25
9400	7031	39.54	90.38	38.38	52.0
9500	7106	36.24	89.26	37.32	51.54
9600	7180	32.30	88.12	36.6	52.6
9700	7255	28.8	86.58	34.12	52.46
9800	7330	22.57	85.43	31.31	54.12

TABELA (AT, VI, 339)

Defendeu-se nesta pesquisa que a explicação das cores do arco-íris é realizada por Descartes a partir do método que inventara e através dos meios que orientam a prática científica. Eis o esquema que segue a ordem das razões cartesiana e que ratifica essa explicação:[488]

[488]O esquema que mostra a mencionada explicaçãoé fundamentado nos quatro preceitos lógicos que Descartes expôs no *Discurso do método*. Sustenta-se, portanto, que os preceitos lógicos conferem a Descartes a ordem das razões pela qual se viabiliza encontrar uma demonstração geométrica que seja suficientemente apta para orientar a justificação experimental das cores do arco-íris. Referindo-se aos preceitos lógicos, Descartes relata que: "Essas longas cadeias de razões, tão simples e fáceis de conhecer, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às mais difíceis demonstrações, levaram-me a conjecturar que todas as coisas que são passiveis do conhecimento humano encadeiam-se da mesma maneira" *Discours de la méthode* (AT, VI, 19). Por considerar que a explicação cartesiana das cores do arco-íris, exposta nos *Meteoros* é a exemplificação mais apropriada da instrumetalização do método Descartes, optou-se aqui por descrevê-la por intermédio do esquema que segue a ordem das razões proposta por Descartes em 1637. Segundo Alquié: "[…] intuição, dedução e ordem são noções inseparáveis. Sem intuição, a

1- Método

1.1. Preceito da evidência e o preceito da via analítica: [489] Descartes prescreve que apenas se deve começar uma investigação a partir de uma proposição conhecida com evidência, o que imediatamente se requisita intuir de maneira analítica. Por isso, ele propõe na *Geometria* que, conhecendo a relação que têm todos os pontos de uma linha curva com todos de uma linha reta, é possível identificar a relação que eles têm com todos os outros pontos e linhas dadas e, a partir disso, é viável conhecer outras linhas ou pontos que tenham com a linha curva (efeitos) as equações algébricas da normal (causas). A partir disso, ele trata ainda de outras propriedades que podem ser atribuídas às linhas curvas, afirmando que elas não dependem mais que da grandeza dos ângulos que formam com outras linhas, o que lhe permite traçar linhas retas que as cortem em ângulos retos, como, por exemplo, a normal nos pontos em que se encontra com aquelas nas quais se formam os ângulos que se deseja mensurar. [490] Desse modo, Descartes mostra como é possível a partir da normal realizar demonstrações sintéticas de diversas outras construções geométricas, dentre as quais, destaca-se aqui a demonstração da figura geométrica que revela os senos de *i* e *r* ou, em outras palavras, os ângulos de incidência e refração.

1.2. Preceito da via sintética e o preceito da revisão geral: [491] Descartes espera que o seu leitor determine a normal na figura geométrica (por exemplo, a figura 51), e por meio da sua demonstração sintética deduza os senos de *i* e *r*. Feito isto, prescreve que o leitor realize uma revisão geral dos cálculos, para que se evite possíveis erros decorrentes da possibilidade da falta de atenção. [492]

---

ordem nada seria, e permaneceria sem conteúdo. Sem a ordem, as intuições, apresentar-se-iam ao acaso, como experiências fragmentárias, e o seu conjunto não constituiria um saber. Por isso o método se propõe simultaneamentente descobrir o simples, objeto da intuição [por exemplo, a lei dos senos], e dispô-lo segundo a ordem, pela qual poderemos elervar-mos, como que gradualmente, e de uma maneira racional, até ao conhecimento do complexo [por exemplo, as cores do arco-íris]. Substituir o complexo que se apresenta, e se apresenta sem razão, numa espécie de experiência confusa, por um complexo ordenado e racionalmente reconstruído, é que é efetivamente constituir ciência para Descartes". ALQUIÉ, 1986, p. 29.

[489] Os preceitos da evidência e o da via analítica correspondem, respectivamente, aos raciocínios do primeiro e segundo preceitos. No primeiro preceito se requer que o conhecimento verdadeiro seja concebido apenas por evidência, o que prescreve imediatamente a via de descoberta analítica Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18).

[490] Cf. *La Geometrie* (AT, VI, 412-413).

[491] O preceito do *modus operandi* sintético e o preceito da revisão geral correspondem aos raciocínios do terceiro e quarto preceito lógico de Descartes. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).

[492] Os cálculos são realizados a partir de um prisma de cristal, cujo instrumento Descartes pretnde explicar as cores do arco-íris no capítulo VIII dos *Meteoros*. Shea relata em sua obra *The Magic of Numbers and Motion*, que a demonstração geométrica feita por Descartes na carta datada de 13 de novembro de 1629, possibilita uma reconstituição plausível do modo como Descartes deduziu a lei dos senos através de um prisma de cristal. Eis omodo como Shea reconstitui esse cálculo: um raio AB penetra em um prisma HBP e emerge ao longo de BI. Para medir o ângulo de refração e de incidência em B, Descartes acrescenta CE, a normal em B, que é perpendicular a BP. Para

2- Aplicação do método

2.1. Início da aplicação do método:[493] Descartes restabelece a ordem das razões, mas, dessa vez, a reinicia a partir de uma proposição conhecida com evidência, a saber, os senos de *i* e *r* (senos deduzidos na demonstração geométrica, tal como, por exemplo, na figura 51)[494] e, assim, visa orientar as suas experimentações científicas nos *Meteoros*.

2.2. Procedimento de redução (o mencionado procedimento segue o mesmo percurso lógico que é prescrito na via analítica, ou seja, no segundo preceito lógico): Nos *Meteoros*, Descartes, ao utilizar uma demonstração geométrica[495] como uma "representação do real", identifica na natureza possíveis causas físicas (objetos físicos) que lhe possibilite a compreensão do aparecimento das cores do arco-íris, a saber, o índice de refração que se observa em um prisma de cristal quando exposto às raios de luz. [496]

2.3. Procedimento de reconstrução (o mencionado procedimento segue o mesmo percurso lógico que é prescrito na via sintética, ou seja, no terceiro preceito lógico): Nos *Meteoros*, Descartes reproduz – ao utilizar a lei dos senos e um prisma de cristal – as cores do arco-íris através do percurso FKNP, que produz as cores do arco-íris primário ONP (envolvendo uma reflexão e duas refrações) e por meio do percurso FKNQR, que produz as cores do arco-íris secundário SQR (envolvendo duas refrações e duas reflexões). [497]

---

reconhecer que HI é o sen de *r* e que OI é o sen de *i* basta traçar HO e, uma vez que BH=BO, HO é paralela CE. AB é paralelo a HI, donde o ângulo ABC é igual ao ângulo OHI, e o ângulo EBI é igual ao ângulo BOH. Portanto, o ângulo HOI = $180^o - r$. Uma vez que a razão dos senos de dois ângulos internos de um triângulo é igual à razão dos lados opostos, *sen HOI/sen OHI = HI/OI*, ou *sen* ($180^o - r$) */sen r* = HI/OI. Entretanto, *sen* $180^o - r$ é igual à *sen r*; e, assim, *sen i/senr = HI/OI*. Logo, a razão constante de refração em um prisma de cristal corresponde a razão entre o senos de *i* e *r*. Cf. SHEA, 1991, p. 156-157. É interessante observar que de maneira semelhante, Descartes demonstra na *Geometria* a lei dos senos por meio da posição da normal às ovais. Na seção da *Geometria* intitulada "A demonstração das propriedades das ovais referentes às reflexões e as refrações", Descartes relata que: "Mas é necessário que não omita a demonstração do que disse, e para isso, tomemos, por exemplo, qualquer ponto C na primeira parte da primeira oval: tracemos a reta CP normal à curva em C, o que é fácil pelo método precedente". *La Geometrie* (AT, VI, 431).

[493] A aplicação do método se expressa, sobretudo, nos raciocínios do terceiro preceito lógico de Descartes, a saber, conduzindo por ordem os raciocínios, começando pelos objetos simples e, por isso, mais fáceis de conhecer até o conhecimento dos objetos compostos. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 18-19).

[494] Cf. *La Dioptrique* (AT, VI, 83-100).

[495] A partir desta demonstração geométrica é possível deduzir os senos de *i* e *r*.

[496] Cf. *Regulae* (AT, X, 393-394).

[497] Cf. *Les Meteoros* (AT, VI, 337-338).

2.4. Conclusão da justificação experimental:[498] Nos *Meteoros*, Descartes reproduz, por analogia, as cores do arco-íris e as justifica a partir da lei dos senos *i* e *r*. [499] Para isso, ele inicialmente calcula o ângulo ONP para os valores de FH, que vão de 1.000 a 10.000. Esse cálculo é possível porque, em F, o desvio *d* é igual a *i – r* (ângulo do seno de *i* menos o ângulo do seno de *r*), medido pelo ângulo GFK. A partir desse cálculo, Descartes mostra que o ângulo ONP aumenta rapidamente até 40.57 graus e diminui aproximadamente em torno do ângulo de 41 graus. Isso porque, segundo Descartes, há mais raios que fazem o ângulo ONP de aproximadamente 40 graus do que raios que o fazem menor. Por isso, Descartes identifica em K o desvio de $180^o - 2r$ e em N o desvio de $i - r$. Logo, o desvio total é de $180^o + 2i - 4r$. Então, a partir deste cálculo se obtém: FH= 8.000. Logo, *i* corresponde a aproximadamente a 40^o 44'. Com isso, os cálculos justificam experimentalmente a Descartes que o ângulo é no máximo de 40^o 57'e que HF equivale de 8.000 até 9.888. Então, supondo que 17' seja o raio do Sol, Descartes afirma que o ângulo máximo do arco-íris interno deve ser encontrado em 41^o 17', e o ângulo mínimo do externo, 51^o 37'. Ao término de tais cálculos e de tais verificações, Descartes usa o quarto preceito lógico, tanto na revisão dos cálculos quanto na revisão dos dados examinados com o intuito de efetuar "enumerações completas" para que não haja a mínima possibilidade de se omitir algum dado do exame. [500] Nota-se, portanto, que Descartes transfere os raciocínios do quarto preceito lógico à última etapa da aplicação do seu método na ciência meteorológica. A partir disso, Descartes justifica experimentalmente o aparecimento das cores do arco-íris na obra *Meteoros*.[501]

[498] A justificação científica segue os raciocínios do quarto preceito lógico de Descartes, a saber, propõe-se a necessidade de se efetuar enumerações completas e revisões gerais, para que não haja a mínima possibilidade de se está omitindo algum dado do exame. Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).
[499] Cf. *Les Meteoros* (AT, VI, 338-339).
[500] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 19).
[501] Os cálculos foram realizados a partir das indicações feitas por Shea na obra *The Magic of Numbers and Motion*. Cf. SHEA, 1991, p. 219-222.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese explicou o método cartesiano mediante a lógica matemática que o constitui e o opera. Defendeu-se nesta pesquisa que, a partir desse método, Descartes encontra meios que viabilizam as orientações das suas experimentações científicas.

O caminho percorrido para chegar ao objetivo da pesquisa foi primordialmente o de investigar o método cartesiano por meio do modo como Descartes concebe, por ordem, as vias demonstrativas de análise e síntese articuladas às medidas matemáticas.

Sustentou-se que Descartes expõe no *Discurso* os preceitos do seu método, mas que, com isso, ele apenas pretendeu tratar do método, ao invés de ensiná-lo. Nesta perspectiva, Descartes relata em uma carta enviada a Mersenne em meados de março de 1637 que:

> Não coloco o nome *Tratado do método*, mas sim *Discurso do método*, o que é o mesmo que *Prefácio* ou *Advertência sobre o método*, para mostrar que não tenho a intenção de ensiná-lo, mas somente de tratar do método. Pois, como se pode ver pelo que exponho nele consiste mais em prática que em teoria, e chamo os *Ensaios* que vêm depois, de *Ensaios* deste método, porque pretendo estabelecer que as coisas que estes contenham, não pudessem ser encontradas sem as bases teóricas do método, e que através deles podemos reconhecer o que o método vale. Assim como ensinarei alguma explicação de metafísica, de física [...] no *Discurso* para mostrar que o método estende-se a todos os tipos de disciplinas.[502]

Defendeu-se, nesta pesquisa que ao longo da *Geometria*, Descartes descobre efetivamente o método e o prova, sobretudo, a partir da resolução do problema de Pappus. Numa carta enviada a Mersenne em meados de 1637, Descartes relata a proeza da *Geometria*:

> Não sinto prazer em me vangloriar, mas desde que poucas pessoas possam entender a minha *Geometria*, e como o senhor deseja que eu externe a minha opinião sobre essa obra, afirmo que ela é mais do que eu poderia esperar; pois, por exemplo, na *Dióptrica* e nos *Meteoros* eu apenas procurei persuadir as pessoas que o meu método era melhor que o usual [método utilizado nas Escolas], mas eu provei isso na minha *Geometria*, pois por meio do raciocínio exposto nesta obra, eu resolvi um problema que, segundo Pappus, não pode ser resolvido por nenhum dos geômetras antigos. [503]

[502] *Correspondance* (AT, I, 349).
[503] *Correspondance* (AT, I, 478).

Ao longo do primeiro capítulo foram expostos os raciocínios de ordem e medida mediante as operações do método de Descartes. Este capítulo teve por objetivo explicar o modo como a via demonstrativa de análise articulada às medidas geométricas, aritméticas e algébricas operacionaliza uma lógica que cultiva a razão e viabiliza a Descartes encontrar demonstrações geométricas aptas para a orientação de suas experimentações científicas. Tal explicação foi realizada a partir da teoria das proporções anunciada por Descartes no *Discurso do método* e, desenvolvida, sobretudo, na *Geometria*. No decorrer dessa explicação foram expostas a resolução cartesiana do problema de Pappus e o modo como Descartes consagra o seu método mediante a solução analítica de um clássico problema geométrico fornecido por Pappus. A partir de tais resoluções foi possível compreender a operacionalidade e a respectiva constituição do método cartesiano.

A primeira seção do primeiro capítulo teve por objetivo explicar a resolução cartesiana da primeira etapa do problema de Pappus. Para isso, inicialmente, mostrou-se que Descartes foi levado a se perguntar de que maneira as operações aritméticas podem ser atribuídas às construções geométricas. Para tal resposta, revelou-se que ele fixa, primeiramente, uma unidade de medida, com o auxílio da qual chega às construções geométricas mediante as cinco operações aritméticas. Na sequência, mostrou-se que essa inovação cartesiana possibilita um sistema adotado para compreender os segmentos de reta. Diante disso, ressaltou-se, por exemplo, que as formulas adotada por Descartes viabilizam o aspecto moderno do sinal de igualdade e do símbolo √c, para designar a raiz cúbica. Mostrou-se, ainda, que Descartes expõe uma regra geral para resolver os problemas de geometria cujo aspecto determinante consiste na “suposição” de que “o problema está previamente resolvido”, o que revela o *modus operandi* da via demonstrativa de análise. Neste contexto, explicou-se o início da formulação do método cartesiano, a saber, por um lado, os raciocínios de ordem: operando os raciocínios da via demonstrativa de análise e, por outro lado, os raciocínios de medida: operando os termos da Aritmética a partir dos objetos da Álgebra e da Geometria. Identificou-se, em seguida, que após definir os problemas planos, Descartes expõe as soluções das equações algébricas de maneira completamente diferente daquela que é exposta nos *Elementos* de Euclides. Esse aspecto das soluções das equações revelou, sobretudo, que a matemática de Descartes é fundamentada em novas operações metódicas. Com base em tais considerações, tratou-se, finalmente, do modo pelo qual Descartes resolve o problema de Pappus. Sabe-se que tal problema consiste na procura de um lugar de um ponto em que os oblíquos levados sob os ângulos dados a um determinado número de retas formam um produto que esteja dado em relação constante com aqueles levados do mesmo modo a outras retas situadas no mesmo plano que os precedentes. A partir de uma breve exposição deste problema apresentada pelos comentários de Vuillemin, explicou-se que Descartes elabora um sistema de notações para resolvê-lo, o qual é constituído pelas coordenadas y e x. Com base no seu sistema de notações, Descartes requer um valor arbitrário para y e, por meio desta medida, identifica que é necessário construir geometricamente o valor de x. Determinando, então que o valor de x está em função do valor de y, Descartes constata que quando o problema de Pappus é proposto para quatro linhas dadas, o lugar geométrico que satisfaz a condição analítica pode ser tanto uma linha reta ou um círculo (lugar plano) quanto uma das três secções cônicas (lugar sólido). Nesta perspectiva, explicou-se como é determinado o primeiro gênero das linhas curvas correspondente a polinômios de grau dois e constituído pelas secções cônicas e pelo círculo. A partir de tais considerações, mostrou-se ainda o modo como Descartes reconfigura o sistema das notações (x e y) mediante os cálculos operacionalizados pelo *modus operendi* do método que inventara. Por meio desta reconfiguração, constatou-se que Descartes adquire um meio para encontrar a solução do problema de Pappus, a saber, uma teoria das proporções.

A segunda seção teve por objetivo explicar a resolução cartesiana da segunda etapa do problema de Pappus. Para isso, inicialmente, mostrou-se que Descartes efetua a enumeração dos casos em que a questão pode ser resolvida pela sua teoria das proporções, isto é, a partir da análise algébrica de retas e círculos, ou pelos cálculos algébricos da geometria dos sólidos, ou ainda, em casos mais específicos, com o auxilio de linhas curvas mais compostas. Assim, Descartes utiliza sua teoria das proporções para explicar como se deve solucionar o problema de Pappus e diversas outras construções geométricas. Essa teoria das proporções prescreve que a demonstração geométrica seja efetuada a partir de propriedades ou lugares concebidos em figuras que têm evidência analítica. Diante disso, mostrou-se por meio dos comentários de Vuillemin e Jullien, o modo como Descartes efetivamente soluciona a construção do problema de Pappus, dentre outras construções geométricas. Nesta perspectiva, mostrou-se quais são as construções geométricas, isto é, aquelas que podem ser demonstradas por meio de propriedades analíticas. Tais propriedades são oriundas da análise das seguintes figuras: retas, círculos, parábolas, elipses e hipérboles, e tais construções geométricas são, por exemplo, a concóide, a cissóide e as ovais. No que diz respeito às construções das ovais, ressaltou-se a relevância de tais figuras para o campo de investigação óptica de Descartes. Por fim, sustentou-se que as construções que não se adéquam à precisão e à exatidão da razão, Descartes as designa como mecânicas, como, por exemplo, a construção da espiral e da quadratriz. Por fim, assinalou-se a relevante diferenciação entre construção e movimento mecânico na matemática de Descartes.

A terceira seção expôs a diferenciação entre os raciocínios matemáticos do método de Descartes e de Pappus e, por conseguinte, a resolução cartesiana da intersecção da parábola, da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. Para isso, inicialmente, expuseram-se a partir, sobretudo, dos comentários de Jullien as regras cartesianas para conhecer a natureza da solução das equações, as quais são reportadas às construções geométricas. Estas regras resultam em um grupo preciso da teoria das equações algébricas de Descartes. Defendeu-se, assim, que Descartes constata que as curvas que se devem empregar para resolver uma determinada construção geométrica devem ser as mais simples possíveis, as quais são concebidas mediante uma equação algébrica correspondente. Nesta perspectiva, mostrou-se que Descartes constrói um instrumento de esquadros e, com isso, trata a resolução dos problemas sólidos e hipersólidos. A partir disso, descreveu-se a solução das equações, das raízes e as relações entre os coeficientes. Disso concluiu-se que para Descartes uma equação pode ter tantas raízes quanto dimensões tem o grau da equação. Com bases nestes pressupostos se explicou a diferenciação entre os raciocínios matemáticos do método de Descartes e os propostos por Pappus. Como se sabe, segundo Descartes, os antigos geômetras, dentre eles Pappus, não tinham um método suficientemente adequado para resolver os problemas tratados na matemática. Assim, identificou-se que o percurso do raciocínio analítico papussiano se dá por meio de raciocínios exclusivamente geométricos. Já Descartes determina a construção da figura geométrica a partir do comando de suas notações algébricas e, isso lhe mostra que a inteligibilidade da figura geométrica não requer o exame do que lhe segue ou o que dela provém (efeito), mas sim o exame do que lhe antecede logicamente (causa). A inteligibilidade da construção da figura geométrica, portanto, não implica a determinação de seus efeitos, tal como reivindicavam os antigos geômetras, mas da sua causa. Nesta perspectiva é possível compreender a maneira pela qual Descartes utiliza a lógica que opera a ordem e a medida dos raciocínios matemáticos mediante a opção que comanda o início da resolução do problema de Pappus. Por meio desta diferenciação foi possível ainda compreender o modo como Descartes resolve o problema da intersecção da parábola e explica outros dois clássicos problemas geométricos, a saber, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Neste contexto, utilizaram-se as indicações feitas por Shea com o intuito de tornar didáticos os cálculos de Descartes a um leitor contemporâneo. Tais considerações resultaram na conclusão de que Descartes pretendera estabelecer o *modus operandi* do seu método a partir da lógica que opera a ordem e a medida dos raciocínios matemáticos.

Por considerar que a exaustiva exposição dos cálculos matemáticos de Descartes evidenciam as operações que constituem o seu método, optou-se ao longo do primeiro capítulo por refazê-los através, sobretudo, das indicações feitas por Vuillemin, Jullien e Shea. Cabe, todavia, ressaltar que se acrescentou a tais indicações a relevância filosófica de esclarecer o modo como Descartes concebe a partir de suas demonstrações geométricas um meio matemático (teoria das proporções) que possibilite a orientação da prática científica.

O segundo capítulo expôs a viabilização da aplicação do método cartesiano por meio da teoria das proporções e dos preceitos lógicos propostos por Descartes nas cartas datadas em meados de 1638 e no *Discurso do método*. A partir desta exposição foi estabelecida a ordem das razões que norteia a aplicação do método de Descartes nas suas ciências particulares.

A primeira seção do segundo capítulo expôs o modo como Descartes explica a descrição mecânica da roleta a partir da sua teoria das proporções. Essa descrição é importante porque permitiu a Descartes encontrar uma demonstração geométrica direcionada à explicação mecânica do movimento físico da roleta. Para efetuar essa descrição, primeiramente, constatou-se que ele evidencia quais são as propriedades da figura que possibilitam a demonstração geométrica. Em seguida, mostrou-se que ele demonstra por meio da regularidade proporcional do movimento geométrico que a construção matemática da roleta é viável para a compreensão mecânica do seu movimento físico. A explicação da descrição da roleta, portanto, revela a Descartes a maneira pela qual a sua teoria das proporções viabiliza a aplicação do método que inventara.

Ainda no segundo capítulo foi exposto o debate que Descartes realizou com diversos matemáticos do século XVII a partir dos comentários de Milhaud e de algumas cartas datadas em meados de 1638. Este debate é relevante porque demarca a diferenciação epistemológica entre os raciocínios matemáticos do método de Descartes e a concepção de uma matemática aplicada, sobretudo, no que diz respeito ao cálculo dos máximos e mínimos de Fermat. A partir da exposição deste debate, concluiu-se que, enquanto Fermat e seus seguidores, tais como Pascal e Roberval dão ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas, o que lhe permite afirmar que o processo de determinação da tangente é semelhante ao seu método para máximos e mínimos, Descartes, por sua vez, limita-se a calcular as equações algébricas determinadas, o que lhe possibilita apenas determinar a tangente em casos muito particulares ou, em outras palavras, a partir das vias demonstrativas de análise e síntese. Isso porque Descartes assume como supremo objetivo encontrar nos raciocínios matemáticos do seu método um meio que cultive plenamente a razão, em detrimento da amplitude dos cálculos matemáticos tão estimados por seus contemporâneos.

O segundo capítulo também expôs o modo como os preceitos lógicos, oriundos dos raciocínios dos antigos geômetras e restabelecidos por Descartes no *Discurso do método*, conferem uma ordem das razões à orientação das investigações científicas de Descartes. Nesta perspectiva, sustentou-se que o primeiro preceito lógico prescreve a clara evidência das proposições examinadas, o que em Descartes imediatamente reclama a verdadeira via de descoberta, que, por sua vez, é estabelecida pelo segundo preceito lógico da ordem das razões, a saber, a via analítica. Tal via prescreve que o exame das proposições exige que se pergunte pelas suas causas. Logo, as proposições examinadas são, antes de tudo, efeitos. Ora, a pergunta pela causa é uma indagação que conduz Descartes de uma proposição dada (axiomaticamente instituída pelos antigos geômetras como efeito) a uma causa necessária. Então, uma vez concebida analiticamente a evidência de uma proposição, constatou-se que, em alguns casos, Descartes a demonstra mediante a via sintética, apenas com intuito de arrancar o melhor consentimento dos seus leitores, e, em detrimento da exigência imposta pelos antigos geômetras. Tal demonstração, por sua vez, prescreve, ao inverso da via analítica, o exame da causa para o efeito ou, por exemplo, parte-se de uma propriedade geométrica, analiticamente descoberta, para a construção de uma figura que tem propriedades mais compostas. Cabe assinalar que esta última demonstração diz respeito ao terceiro preceito lógico. Por fim, mostrou-se que Descartes reivindica ainda dos antigos geômetras um quarto preceito lógico que prescreva "enumerações completas" e "revisões gerais", para que não haja a mínima possibilidade de se está omitindo algum dado do exame. Com base nestes mencionados preceitos, sustentou-se que Descartes orienta os empreendimentos científicos através dos meios de orientação do seu método e, que a partir destes meios, ele rejeita a possibilidade de haver qualquer tipo de circularidade lógica no seu argumento científico.

Por fim, o segundo capítulo expôs a diferenciação entre uma interpretação tradicional da ordem das razões realizada por Gueroult através das *Meditações*, e a interpretação da ordem das razões que é aqui defendida, a saber, aquela que é descrita por Descartes no *Discurso do método* e tem no restabelecimento das longas cadeias de razões dos antigos geômetras os seus únicos preceitos lógicos. A exposição dessa diferenciação situou a presente pesquisa nos recentes debates da história da filosofia ao mesmo tempo em que propôs uma posição historiográfica inovadora, a saber, que a despeito do caráter persuasivo das justificações científicas apresentadas por Descartes nos seus ensaios científicos de 1637 – as quais Gueroult alega que não têm uma plena fundamentação, pois, ele defende que a "*ordem das razões*" e o "*verdadeiro método*" são apenas e tão somente ancorados nas *Meditações* e nos *Princípios da Filosofia* – sustentou-se nesta pesquisa que suas demonstrações geométricas explicitadas pela via sintética e constituídas metodicamente como "causas", não são efetivamente a mesma coisa e não se mantém como meras suposições, como afirma Gueroult, mas, viabilizam mediante a verdadeira ordem das razões a constatação de que as provas pelos efeitos são consonantes com tais demonstrações. Possivelmente a diferenciação dessas interpretações tenha como origem o equivoco de Gueroult em distinguir duas ordens no discurso filosófico de Descartes, a saber, "a ordem analítica e a ordem sintética", quando, de fato, há apenas uma ordem das razões que, por sua vez, prescreve duas vias demonstrativas, a saber, as vias de análise e síntese. Como desdobramento disso, sustentou-se, diferentemente de Gueroult que, embora a ordem das razões cartesiana tenha como referência os preceitos dos antigos geômetras, a sua maior autoridade não é Euclides, mas Pappus e, que há um significante restabelecimento destes preceitos por parte de Descartes, sobretudo, o de que a evidência das proposições examinadas não se encontra diretamente nos objetos investigados, mas na descoberta da sua causa lógica, o que viabiliza o cultivo da razão.

O terceiro capítulo expôs os resultados das ciências particulares de Descartes a partir da explicação de fenômenos ópticos, através da *Dióptrica*, e da descrição das cores do arco-íris, através dos *Meteoros*. Tal capítulo teve por objetivo esclarecer os meios pelos quais Descartes realiza a aplicação do seu método. Neste enfoque, sustentou-se que era esse o intuito de Descartes:

> […] não desejo mais investigar geometria. Resolvi, entretanto, somente abandonar a geometria abstrata, isto é, a investigação das questões que apenas servem para cultivar a razão; isto a fim de ter tanto mais oportunidade para exercitar outra espécie de geometria, que tem por objetivo explicar os fenômenos da natureza. [504]

[504] *Correspondance* (AT, II, 268).

Nota-se, portanto, que após cultivar a razão mediante os raciocínios da geometria abstrata, tais como aqueles que permitem descobrir analiticamente a solução do problema de Pappus e, sobretudo, aqueles que viabilizam determinar propriedades geométricas a partir das quais é possível demonstrar a construção (e o movimento) de figuras mais compostas, Descartes propõe-se laborar outra espécie de geometria. No que se refere mais particularmente a estas últimas construções, ele as recoloca como "representações da natureza", isto é, como modelo para explicar os fenômenos naturais. Para isso, ele busca exercitar o espírito com o intuito de elaborar demonstrações geométricas aptas à serventia de suas ciências particulares, notadamente, a *Dióptrica* e os *Meteoros*. O exemplo, por excelência, das referidas demonstrações são, portanto, as construções das figuras que possibilitam, a um leitor atento das obras científicas de Descartes, obter a justificação do movimento da luz a partir da identificação dos ângulos de incidência e refração na figura geométrica apresentada.

O terceiro capítulo teve início com uma breve apresentação dos aspectos gerais e o contexto em que as obras *Dióptrica* e *Meteoros* foram desenvolvidas e finalmente publicadas em 1637. Tal apresentação foi pertinente porque mostrou possíveis indícios do que Descartes tivera influência para escrever as suas obras científicas, tais como os comentários de Clavius e dos Conimbricenses, e as contribuições de Kepler e de Mydorge.

Após apresentar os aspectos gerais e o contexto em que as obras científicas foram desenvolvidas, foi exposto o modo como Descartes inicia a aplicação do método que inventara a partir da demonstração geométrica da lei dos senos na *Dióptrica*. Nesta perspectiva, foram descritas as formulações das leis de reflexão e refração por meio de diversas hipóteses e analogias cuja função principal consistira em justificar o movimento da luz a partir da demonstração geométrica que contempla a possibilidade de deduzir os ângulos de i e r. Diante disso, esclareceu-se que na figura geométrica a partir da qual Descartes pretende justificar o movimento da luz é requisitado o entendimento de que a componente paralela se mantém proporcionalmente análoga à velocidade, o que revela implicações no âmbito da explicação dinâmica da física cartesiana. Com base em tais descrições foi possível compreender a diferenciação epistemológica entre (1) uma demonstração geométrica, concebida por um raciocínio claro e evidente e (2) uma justificação experimental, que tem seu resultado limitado a um conhecimento persuasivo. A partir dessa diferenciação, sustentou-se nesta pesquisa que, apesar dos resultados da ciência óptica cartesiana se deter a um conhecimento persuasivo dos objetos investigados, por se requisitar hipóteses e analogias, Descartes não comete nenhum equivoco lógico, pois, por meio da utilização dos preceitos lógicos, ele rejeita a possibilidade de haver qualquer tipo de circularidade no seu argumento científico.[505] Isso porque, o resultado do seu exame científico é adquirido através de uma justificação experimental, isto é, a partir da reprodução dos efeitos do fenômeno natural.[506] Logo, a causa descoberta analiticamente não possui previamente a prova do dado científico. Nesta carta, por exemplo, Descartes explicitara a relevância epistemológica dessa diferenciação:

> Pergunta se considero que o que escrevi a respeito da refração é uma demonstração; penso que sim, ao menos na medida em que é possível fornecer uma demonstração nesses assuntos, sem antes haver demonstrado os princípios da Física pela Metafísica (algo que espero fazer algum dia, mas que não fiz até o presente momento), e na medida em que qualquer outra questão de Mecânica, Óptica, Astronomia ou de qualquer outra matéria, que não seja puramente a Geometria ou a Aritmética, tenha sido alguma vez demonstrada. *Mas*, *requerer de mim demonstrações geométricas em uma matéria que depende da Física é pretender que eu faça o impossível*. E se chamam demonstrações somente às provas dos geômetras, então, teríamos que dizer que Arquimedes jamais fez demonstrações na Mecânica, nem Vitelião na Óptica, nem Ptolomeu na Astronomia, etc.…, e não é normalmente o que se diz. Em tais matérias nós nos sentimos satisfeitos se os autores, uma vez que pressupõem certas coisas que não são manifestamente contrárias a experiência, prosseguem de maneira consistente e não cometem nenhum erro lógico, ainda que suas hipóteses não sejam exatamente verdadeiras. [507]

Como foi estabelecido nesta pesquisa, diversos historiadores da filosofia, dentre eles, Jullien, Vuillemin, Costabel, Tournadre, Milhoud, Garber e Shea, expuseram diversas maneiras pelas quais Descartes haveria descrito suas demonstrações geométricas e praticado ciência, mas não explicaram de maneira explícita o modo como Descartes constituiu, a partir desses mesmos raciocínios matemáticos, o método que cultiva a razão e orienta as suas experimentações científicas. Assumiu-se aqui, portanto, a carência historiográfica de se elucidar o *modus operandi* do método e de compreender os limites de seu papel nas experimentações científicas de Descartes. Diante disso defendeu-se que para se realizar tal elucidação é necessário levar em consideração a diferenciação de dois tipos distintos de objetos investigados por Descartes, a

[505] Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).
[506]Cf. *Discours de la méthode* (AT, VI, 76).
[507]*Correspondance* (AT, II, 141-142).

saber, os objetos matemáticos e os objetos físicos. Coube, todavia, assinalar que Descartes jamais explicitou a diferença conceitual das respectivas maneiras de investigá-los. Por isso, então, sustentou-se que, embora não se encontre nas obras de Descartes os conceitos "representação matemática", "procedimento científico" e "justificação experimental", se fez necessário estabelecê-los nesta pesquisa para que se pudesse compreender a diferenciação epistemológica que há entre a (1) a exigência dos raciocínios matemáticos do método e (2) os procedimentos que investigam exclusivamente os objetos físicos. Possivelmente a exemplificação mais sucinta realizada por Descartes dessa diferenciação epistemológica fora efetivada na sua descrição das cores do arco-íris, exposta nos *Meteoros* de 1637. Segue o que o próprio Descartes diz a respeito desse assunto:

> Devo dizer, inicialmente, que não foi meu propósito ensinar completamente o meu método em minha exposição, mas apenas dizer o bastante para mostrar que as novas concepções da *Dióptrica* e dos *Meteoros* não eram ideias ao acaso, e por isso pudesse valer a pena examiná-las. Não pude mostrar efetivamente o método nos três ensaios que publiquei, porque ele prescreve uma ordem de investigação que difere muito da que julguei apropriada para explicar. Todavia, forneci um exemplo sucinto dele em minha exemplificação do arco-íris e, se tiverdes o trabalho de relê-la, espero que ela vos satisfaça mais do que na primeira vez, a questão, afinal, é bastante difícil em si mesma. Anexei esses três ensaios [*A Geometria*, *A Dióptrica* e *Os Meteoros*] ao *Discurso* que os precede por estar convencido de que, se as pessoas os examinarem com critério e os compararem ao que foi anteriormente escrito sobre os temas, terão fundamento para considerar que o método adotado por mim não é oportunista e possivelmente seja mais adequado do que os demais. [508]

Por isso, nesta pesquisa sustentou-se que, Descartes apenas desenvolveu o método que inventara na *Geometria* mediante a resolução do problema de Pappus e o expusera no *Discurso do método* por meio dos preceitos lógicos. Isto porque, a sua "ordem das razões" exige que se inicie a investigação a partir do que é evidente o que imediatamente prescreve a via de descoberta analítica, cuja demonstração é operacionalizada apenas por objetos simples e, neste caso, em especial, por objetos matemáticos. Logo, os objetos físicos, os quais são requisitados na investigação da *Dióptrica* e dos *Meteoros*, não se adéquam naturalmente à ordem da investigação cartesiana, o que requer de Descartes readequá-los. Ora, sem a ordem, as intuições e as deduções, apresentar-se-iam ao acaso, como experiências fragmentárias, e o seu conjunto não constituiria um saber sistemático. Por isso o método se propõe simultaneamentente em descobrir o simples,

[508] *Correspondance* (AT, I, 559-560).

ora objeto da intuição, ora objeto da dedução, como, por exemplo, a lei dos senos, e dispô-lo, segundo a ordem, pela qual é possível que Descartes se eleve, como que gradualmente, até a justificação do complexo, tal como, por exemplo, a reprodução das cores do arco-íris. Substituir o complexo que se apresenta, e se apresenta sem ordem, numa espécie de observação confusa, por um complexo ordenado e metodicamente reconstruído, é que é efetivamente constituir ciência para Descartes. Com base nestes pressupostos da ordem das razões cartesiana se esclareceu o modo como Descartes aplica o método que inventara mediante a explicação quantitativa das cores do arco-íris. Pretenderam-se, assim, explicar os meios pelos quais Descartes examina nos *Meteoros*, o índice de reflexão e refração da luz através de diversas suposições, analogias e experimentações que visam justificar o aparecimento e a respectiva localização das cores do arco-íris. Através da reconstrução do arco-íris foi possível constatar que Descartes define as circunstâncias e os limites do aparecimento das cores deste fenômeno meteorológico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Obras de Descartes:

DESCARTES, René. *Oeuvres de Descartes.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin. 1996. 11 vol. Publiées par Charles Adam e Paul Tannery.

Traduções:

DESCARTES, René. *Discurso do método.* Tradução de Maria Ermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

__________________. *Regras para a Orientação do Espírito.* Tradução de Maria Ermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

Outras fontes:

ALLARD, Jean–Louis. *Le mathématisme de Descartes*. Ottawa: Ed. Ottawa, 1963.

ALQUIÉ, Ferdinand. *A Filosofia de Descartes*. Tradução de Rodrigues Martins. Lisboa: Editorial Presença, 1986.

__________________. *Oeuvres philosophiques de Descartes*, v. II. Paris: Garnier, 1987.

ARQUIMEDES. *Les oeuvres completes d´Archimède, suivies des comentaires d´Eutocius d´Ascalon*. Paris: Blanchard, 1960.

BATTISTI, Cesar. *O método de análise em Descartes: da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento*. Cascavel: Ed.unioeste, 2002.

BERKEL, Klass. Beeckman, Descartes et La Philosophie Physico-Mathématique. In: *Archives de Philosophie*, n. 46, p. 620-626, 1983.

BEYSSADE, Jean-Marie. *Études sur Descartes*. Paris: Éditions du Seuil, 2001.

BEYSSADE, Michelle. *Descartes*. Tradução de João Gama. Lisboa: Edições 70, 1989.

BLANCHÉ, R. *Axiomatics*. London: Routledge & Kegan Paul, 1966.

BOYER, Carl. *Historia da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

___________. *History of analytic geometry*. New Jersey: Princeton University Press, 1988.

___________. *The Rainbow: from myth to mathematics.* New Jersey: Princeton University Press, 1987.

BOS, H. J. M. On the representation of curves in Descartes, Géométrie. In: *Archive for history of exact sciences*. v. 24, n. 4, 1981, p. 295-338.

BRONCANO, Fernando. El orden de las cosas. In: *La Filosofia de Descartes y la fundanción del pensamineto moderno*. Salamanca: Sociedad Castellano-Leonesa de Filosofia, p. 19-56, 1997.

CONIMBRICENSIS. *Commentarii Collegi Conimbricensis Societatis Iesu: In Libros Meteorvs Aristotelis Stagiritae*. Lisboa: Simões Lopes, 1593.

COSTABEL, Pierre. *Démarches Originales de Descartes Savant*. Paris: Vrin, 1982.

________________. *Exercices pour les éléments des solides*. Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

COTTINGHAM, John. *Dicionário Descartes*. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1993.

CLARKE, Desmond. *Descartes' Philosophy of Sience.*Manchester: Manchester University Press, 1982.

CRAPULLI, Giovanni. *Introduzione a Descartes*. Roma: Ed. Laterza, 2001.

___________________. *Mathesis universalis: Genesi di un'idea nel XVI secolo*. Roma: Edizioni dell'Ateneo, 1969.

CRIPPA, Davide. A solução cartesiana da quadratura do círculo. In: *Scientiae studia*, v. 8, n. 4, pp. 597-621, 2010.

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE. *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.*Paris: Albert Blanchard, 1959.

DUCHESNEAU. François. Descartes et le modèle de la Science. In: *L´Esprit Cartésien*. Paris: Vrin, p. 63-90, 2000.

DUHAMEL, J.M.C. *Des méthodes dans les sciences de raisonements*. Paris: Gauthier-Villars, 1885.

ERNEST, Cronie. *The principal Works of Simon Stevin*. 5 vols. Amsterdã: Ed. D J Struik, 1955.

ERNEST, Paul. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press, 1991.

ÉVORA, Fátima. *A Revolução Copernicano-Galileana*: VolumeI. Astronomia e Cosmologia Pré-Galileana. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993.

________________. *A Revolução Copernicano-Galileana*: Volume II. A Revolução Galileana. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993.

FICHANT, Michel. *Science et Metétaphysique dans Descartes et Leibniz*. Paris: PUF, 1998.

ITARD, Jean. *Essais d'Historie des Mathématiques*. Paris: Ed. Blanchard, 1984.

GARBER, Daniel. *Corps Cartésiens: Descartes et la philosophie dans les Sciences*. Paris: Presses Universitaires de France, 2004.

_______________. *Descartes Embodied*. Chicago: Cambridge University Press, 2001.

_______________. *La physique métaphysique de Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1999.

_____________. Philosophers of Substance. *Archive for history of exact sciences*. Cambridge,v. 27, n.3, p. 421-427, 1996.

GAUKROGER, Stephen. The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of Descartes work in algebra. In: *The Cambridge Companion to Descartes*. Ed. John Cottingham. New York: Cambridge University Press, 1992, p. 91-114.

GILSON, Étienne. *Discours de la Méthode. Texte et Commentaire*. Paris: Vrin, 1987.

______________. *Étudees sur le rôle de la pensée medieval dans la formation du système cartésien.* Paris: vrin, 1951.

________________. *Index Scolastico-Cartésien*. Paris: Librairie Félix Alcan, 1913.

GUEROULT, Martial. *Descartes Selon L'Ordre des Raisons*, v. I. Paris: Aubier, 1968.

___________________. *Descartes Selon L'Ordre des Raisons,* v. II. Paris: Aubier, 1968.

___________________. Lógica, arquitetônica e estruturas constitutivas dos sistemas filosóficos. In:*Transformação/Ação: Revista de Filosofia/Universidade Estadual Paulista***.** Vol. 30, p. 235-246. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 2007.

_________________. Métaphysique et physique de la force chez Descartes et chez Malebranche. In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 59: 1-37, 1954.

HAMELIN, Octave. *Le systhème de Descartes*. Paris: Édité par L. Robin, 1911.

HEATH, T. L. *The Works of Arquimedes*. New York: Dover Publications, 1953.

_____________. *The thirteen books of Euclid´s elements*. New York: Dover Publications, 1956.
_____________. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications, 1981.

HINTIKKA, Jaakko & REMES, Unto. "A análise geométrica e a lógica moderna". In: *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, n. 4, pp. 28-47, 1958.

_________________________________. *The method of analysis*. Dordretch: Publishing Company, 1974.

JULLIEN, Vincent. *Descartes*, *La <<Géométrie>> De 1637*. Paris: Presses Universitaires de France, 1996.

KLEIN, Jacob. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover, 1968.

KOBAYASHI, Michio. *La philosophie naturelle de Descartes*. Paris: Vrin, 1993.

KOYRÉ, Alexandre. *Considerações sobre Descartes*. Lisboa: Editorial Presença,1992.

_________________. *Études galiléennes*. Paris: Hermann, 1966.

_________________. *Études newtoniennes*. Paris: Éditions Gallimard, 1968.

KORTEWEG, D.J. Descartes et les manuscrits de Snellius. *Revue de Metaphysique et de Morale*, v. 4, n.4, . 1986, p. 489-501.

LAPORTE, Jean. *Le racionalisme de Descartes.* Paris: Presses Universitaires de France, 1988.

LENOBLE, Robert. *Mersenne, ou, la naissance du Mécanisme*. Paris: Vrin, 1971.

LOPARIC, Zeljko. *Descartes heurístico*. Campinas: UNICAMP/ IFCH, 1997.

LORIA, G. Descartes géomètre. In: *Revue de métaphysique et morale*. Paris: Armand Colin, 1937, p. 199-220.

MANCOSU, Paolo. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York: Oxford University Press, 1996.

MARION, Jean-Luc. *Sur l´ontologie grise de Descartes*.Paris: Vrin, 1975.

________________. *Sur la théologie blache de Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1991.
MERSENNE. Marin. *Harmonie Universelle*. Paris: Sebastien Cramoisy, 1636.

MILHAUD, Gaston. *Descartes Savant.* Paris: Librairie Félix Alcan, 1921.

PAPPUS. *La collection mathématique*. Paris: Blanchard. 1982.

PATY, Michel. Mathesis universalis e inteligibilidade em Descartes. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, série 3, v. 8, n. 1, jan.-jun. p. 9-57, 1998.

PHILONENKO, Alexis. *Reler Descartes*. Tradução de Fernando Oliveira. Lisboa: Inst. Piaget, 1996.

RABUEL, C. *Commentaires sur la Géométrie de monsieur Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730.

RODIS-LEWIS, Geneviève. *Descartes: Biographie*. Paris: Calmann-Lévy, 1995.

ROCHEMONTEIX. *Un Collège de Jesuites aux XVII et au XVIII siècle: Le Collège Henri IV de la Flèche*. Le Mans, 1889, Volume IV.

SASAKI, Chikara. *Descartes` Mathematical Thought*. Netherlands: Publishers by Kluwer Academic, 2003.

SCHUSTER, John. *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634*, vol. 1. Ph.D.Thesis. Princeton University: Ann Arbour, 1977.

_______________. *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634***,** vol. 2. Ph.D.Thesis. Princeton University: Ann Arbour, 1977.

________________. Full circle: Cartesian dynamics, optics and the tennis ball model, 1628-33. p. 293. In: GAUKROGER, Stephen; SCHUSTER, John; SUTTON, John. *Descartes' Natural philosophy*. London: Routledge, 2000, p. 258- 757.

SCOTT, J. F. *The Scientific Work of René Descartes*. London: Taylor & Francis, 1952.

SERFATI, Michel**.** Les compas Cartésiens. *Archives de Philosophie*v. 56, n.3, jul.-sep., 1993, p. 197-230.

______________. *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*. Paris: APMEP, 1992.

SHEA, William. La science de Descartes. *Laval Théologique et Phlosophique*, 53, 3, oct. 1997, p. 531-549.

_____________. *The Magic of Numbers and Motion*. Canton: Science History Publications, 1991.

SMITH, David. *The geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications, 1954.

TANNERY. Paul. *Géométrie Grecque: Comment Son Histoire Nous Est Parvenue Et Ce Que Nous En Savons.* Paris: Gauthier-Villars, 1887.

TOURNADRE, Géraud. *L'orientation de la science cartésienne*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1982.

VIÈTE, Fraçois. Introduction to the analytical art. In: *Klein, Jacob. Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover, 1968.

_____________. *L' algebra nouvelle de M. Viète*. Trad. en françois par A. Vasset. Paris: Pierre Rocolet, 1630.

VUILLEMIN, Jules. *Mathématiques et Métaphysique Chez Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1960.

WEBER, J. P. *La Constituition du texte des Regulae*. Paris: Societé d'Édition d'Enseignement Supérieur, 1964.

_________. La méthode de Descartes d'après les Regulae. In: *Archives de Philosophie*, 35, p. 51-60. Paris, 1972.

_________ . Sur la composition de la Regula IV de Descartes. In: *Revue philosophique de la France et de l´étranger*, 154. Paris, 1964.

WILLIAMS, Bernard. *Descartes: the project of pure enquiry*. New York: Penguin Books, 1978.