

Tadeu Fernandes de Carvalho

Sobre o Cálculo Diferencial Paraconsistente
de da Costa

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia
do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, da
Universidade Estadual de Campinas, sob a
orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo
D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese defendida e aprovada pela Comissão
Julgadora em 30 / 06 / 2004.

BANCA

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (Suplente)

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves (Suplente)

Junho/2004

NIDADE 102
 CHAMADA IFCH/UNICAMP
C253D
 EX
 OMBO BC/ 60857
 ROC. 16-11-04
 C ☐ D ☒
 REÇO 11,00
 DATA 18-11-04
 CPD

Bibrid 331815

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

C253s Carvalho, Tadeu Fernandes de
 Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa /
 Tadeu Fernandes de Carvalho. - - Campinas, SP : [s. n.], 2004.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Costa, Newton C. A. da (Newton Carneiro Affonso da).
 2. Cálculo diferencial. 3. Análise matemática. 4. Lógica.
 4. Lógica simbólica e matemática. 5. Teoria dos conjuntos.
 I. D'Ottaviano, Ítala M. Loffredo (Ítala Maria Loffredo).
 II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e
 Ciências Humanas. III. Título.

Tadeu Fernandes de Carvalho

Sobre o Cálculo Diferencial Paraconsistente
de da Costa

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia
do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, da
Universidade Estadual de Campinas, sob a
orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo
D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese defendida e aprovada pela Comissão
Julgadora em 30 / 06 / 2004.

BANCA

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (Suplente)

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves (Suplente)

Junho/2004

À minha mulher, VANIA, e
aos meus filhos, ERICA e CESAR

Aos meus pais, JOÃO e MARIA.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, à minha mulher, Vânia, e aos meus filhos, Érica e César, que sempre se esforçaram para entender e tentar superar os sacrifícios impostos por este trabalho. Agradeço, principalmente, pela família maravilhosa que é, fundada na lealdade e no companheirismo .

Agradeço à Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano - professora e orientadora de primeira grandeza, exigente na mesma intensidade em que confia, gentil e dedicada -, pela paciência, atenção e sacrifícios pessoais dispensados a este projeto. Seu entusiasmo nutriu uma idéia, que se transforma, agora, neste primeiro fruto. Ter sido seu orientando foi um grande privilégio.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio, tanto pelas importantes indicações bibliográficas quanto por sugestões que resultaram no último capítulo da Tese, incluindo o Teorema de Transferência. Minha gratidão também ao Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli e ao Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa, pela leitura atenta do trabalho, e pelas sugestões apresentadas durante o Exame de Qualificação. Um agradecimento especial ao Prof. Hércules pelas sugestões relativas à formatação do texto e às referências bibliográficas.

Aos amigo Milton Augustinis de Castro, do CLE, sempre solícito e fraterno, e aos amigos do CEATEC / PUC-Campinas, Ronaldo Passini e todos os demais, que são muitos, minha amizade e carinho. Um agradecimento particular ao físico e poeta Maurício Ceolin, por sugestões e explicações relativas à física, em especial à física quântica, que foram úteis para a definição dos exemplos que apareceriam no final do Capítulo 2.

Meus agradecimentos à Profa. Dra. Eliana Marciela Marquetis, pelo valioso auxílio na normalização das referências bibliográficas, à Nilza Clarice Galindo, do Setor de Publicações do CLE, pela igualmente valiosa colaboração na

formatação da Tese, e ao funcionário Rogério Ribeiro, da Secretaria de Pós-Graduação do IFCH, pelo atendimento sempre eficiente e gentil.

Um agradecimento especial à PUC-Campinas pelo inestimável apoio, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Aos meus pais, mestres e amigos, João e Maria, por seu amor, renúncia e zelo, minha gratidão e amor eternos.

Sirva este trabalho, ainda que modesto, como expressão de gratidão - e saudade - aos professores Francisco Blasi, da PUC-Campinas, e Mário Sette e Michel Wrigley, do IFCH/CLE – Unicamp.

Durante a realização deste trabalho o autor contou com o suporte financeiro da Pontifícia Universidade Católica de Campinas.

SUMÁRIO

Introdução	7
Capítulo 1. Lógicas paraconsistentes e teorias paraconsistentes de conjuntos	23
1.1. Os cálculos paraconsistentes C_1 , C_1^* e $C_1^=$	25
1.1.1. O sistema C_1	25
1.1.2. Os sistemas C_n , $0 \leq n \leq \omega$	29
1.1.3. Os sistemas C_n^* , $0 \leq n \leq \omega$	32
1.1.4. Os sistemas $C_n^=$, $0 \leq n \leq \omega$	35
1.1.5. Semântica de valorações para C_1 e $C_1^=$	38
1.2. O sistema Zermelo-Fraenkel	44
1.3. Teorias paraconsistentes de conjuntos	49
1.1.1 Os operadores de descrição (ι) e de abstração ($\hat{}$)	49
1.3.2. A teoria NF_0	52
1.3.3. A teoria NF_1	57
1.3.4. A teoria CHU_0	60
1.3.5. A teoria CHU_1	62
Capítulo 2. Introdução ao cálculo diferencial paraconsistente de da Costa	68
2.1 O anel $\mathcal{A}$ dos números hiper-reais	71
2.2 O quase-anel $\mathcal{A}^*$	83
2.3 Um cálculo diferencial paraconsistente	90
2.3.1 Seqüências e hiperseqüências em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{A}^*$	101
2.3.2 Funções contínuas e funções paracontínuas em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{A}^*$	104
2.3.3 Diferenciabilidade em $\mathcal{A}$	109
2.3.4 Regras de derivação em $\mathcal{A}$	112

Capítulo 3. Superestruturas paraconsistentes e um Teorema de Transferência	138
3.1 Superestruturas	139
3.2 A superestrutura paraconsistente R e algumas de suas extensões	151
3.3. Um Teorema de Transferência	168
Considerações Finais	182
Referências	186

Ao Luar

Quando, à noite, o infinito se levanta
À luz do luar, pelos caminhos quedos
Minha tátil intensidade é tanta
Que eu sinto a alma do Cosmos nos meus dedos!

Quebro a custódia dos sentidos tredos
E a minha mão, dona, por fim, de quanta
Grandeza o Orbe estrangula em seus segredos,
Todas as coisas íntimas suplanta!

Penetro, agarro, ausculto, apreendo, invado,
Nos paroxismos da hiperestesia,
O Infinitésimo e o Indeterminado...

Transponho ousadamente o átomo rude
E, transmudado em rutilância fria,
Encho o espaço com a minha plenitude!

Augusto dos Anjos

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver alguns princípios básicos de um Cálculo Diferencial Paraconsistente. Como elementos motivadores para isso, apresentamos, na Introdução, alguns dados sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial, desde suas origens ao advento da análise não-standard, bem como relativos à história da lógica e à da teoria de conjuntos, focalizando os sistemas lógicos paraconsistentes e as teorias paraconsistentes de conjuntos.

Apresentamos, no Capítulo 1, propriedades básicas das hierarquias dos sistemas C_n , C_n^* e C_n^- , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, destacando o sistema C_1^- , e a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , de da Costa, respectivamente a lógica e a teoria de conjuntos subjacentes ao cálculo paraconsistente pretendido.

No Capítulo 2 apresentamos algumas propriedades clássicas do cálculo e das entidades infinitesimais, e esboçamos um cálculo diferencial paraconsistente, *à la* da Costa.

Finalmente, no Capítulo 3 descrevemos algumas propriedades básicas de superestruturas, e introduzimos o conceito de superestrutura paraconsistente, para obter um Teorema de Transferência, com o qual encerramos o presente trabalho.

Abstract

The aim of this work is to develop some basic principles of a Paraconsistent Differential Calculus. We present at the Introduction as motivation for this intent some notes about the history of differential calculus, from its birth to non-standard analysis's arrival, followed by some notes about the history of logic and set theory, focusing paraconsistent logical systems and paraconsistent set theories, introduced by Newton Carneiro Affonso da Costa.

We present at Chapter 1 some basic properties of da Costa's paraconsistent logics hierarchies C_n , C_n^* and C_n^- , $1 \leq n \leq \omega$, detaching C_1^- , and da Costa's paraconsistent system CHU_1 , once these are the intended Paraconsistent Calculus's logic and set theory.

In Chapter 2 we present some classic properties of the differential calculus and infinitesimal entities, and outline a paraconsistent differential calculus *a la* da Costa.

In Chapter 3 we describe basic properties on superstructures, and introduce paraconsistent superstructures, in order to obtain a Transfer Theorem, with which we end this work.

INTRODUÇÃO

*Ser ou não ser, eis a questão!*¹... síntese e essência das dúvidas de Hamlet!

Ser e não ser, eis a questão!... síntese e essência da contradição e da inconsistência?

A primeira sentença acima, naturalmente afim com toda sorte de dúvidas e incertezas, ilustra uma disjunção da forma $A \vee \neg A$ - onde A é uma fórmula qualquer e $\neg A$ a sua negação -, que corresponde ao *princípio do terceiro excluído* da lógica aristotélica. Lógica, em cujos fundamentos destaca-se, além do princípio do terceiro excluído, o *princípio da (não-) contradição*, que nega a possibilidade de serem simultaneamente válidas uma fórmula A e sua negação $\neg A$ - o que se expressa por $\neg(A \wedge \neg A)$.

A segunda sentença ilustra uma conjunção da forma $A \wedge \neg A$, que sugere a possibilidade da validade simultânea de uma fórmula A e de sua negação $\neg A$. O que não é, usualmente, desejável, posto que uma consequência imediata da validade de fórmulas contraditórias numa teoria qualquer, que tenha como lógica subjacente a lógica clássica do ponto de vista contemporâneo, é a sua trivialização – o que implica que todas as suas proposições são válidas.

Temos interesse no significado e consequências da validade (ou não) do princípio da (não-) contradição, no contexto da lógica, da matemática e das ciências dedutivas em geral. Neste trabalho, em particular, seu significado para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

¹ W. Shakespeare [1564, 1616], Hamlet (Shakespeare 1998).

Os princípios estabelecidos por Aristóteles para a lógica mantiveram-se aceitos, praticamente sem discussão, até o final do século XIX. A maior parte da contribuição relevante de Aristóteles para a lógica encontra-se na coleção de trabalhos conhecidos como **Organon**, mais especificamente nos **Analytica priora** e no **De interpretatione**.

A lógica aristotélica fundamenta-se em três princípios, conhecidos como três leis básicas do pensamento aristotélico: *princípio da identidade* - todo objeto é idêntico a si mesmo; *princípio da (não-) contradição* - uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e *princípio do terceiro excluído* - toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

Novos sistemas lógicos, ditos não-clássicos, surgem especialmente a partir do início do século XX, como resultado de investigações sobre a natureza e indiscutibilidade dos princípios aristotélicos. Destacam-se entre os principais sistemas heterodoxos de lógicas não-clássicas, alternativos à lógica clássica, os *sistemas paraconsistentes*, cujo fundador é Newton Carneiro Affonso da Costa.

As lógicas paraconsistentes são lógicas que podem ser utilizadas como lógicas subjacentes a teorias inconsistentes e não triviais, como é o caso das chamadas teorias paraconsistentes de conjuntos, criadas por da Costa.

Foi o contato com artigos de da Costa que nos motivou ao presente trabalho, no qual suas lógicas e teorias de conjuntos paraconsistentes servem de base para a construção de um *cálculo diferencial paraconsistente* - um cálculo que, espera-se, seja capaz de auxiliar no tratamento de problemas que, aparentemente, não possam ser resolvidos com o uso exclusivo das ferramentas oferecidas pelo cálculo diferencial clássico.

A dificuldade em identificar problemas gerais, ou específicos da matemática, que apresentem aspectos contraditórios interessantes, não deve inibir a busca por teorias lógicas e matemáticas alternativas, como é o caso do cálculo diferencial paraconsistente.

Mortensen, em **Mortensen 1995**, assim se manifesta sobre o *cálculo in-*

consistente por ele introduzido:

To repeat an earlier point, inconsistent calculus is not being recommended as superior or truer, though its nilpotent elements have some of the calculatory advantages of the SDG (Synthetic Differential Geometry). The aim is only to show that it exists, that inconsistency permits a reasonable amount of calculus without collapse, and hopefully that inconsistent theories can be of mathematical interest.

Fora do contexto puramente matemático, como é o caso da *física quântica*, há conjecturas que, em se confirmando, consideramos que dificilmente encontrarão no cálculo diferencial clássico o ferramental para o tratamento matemático exigido. Não é nova essa questão, como ilustra o trecho abaixo, transcrito de uma mensagem de Einstein, encaminhada ao Secretário da Royal Society, por ocasião do bicentenário da morte de Isaac Newton, e que pode ser lida em **Pais 1995**:

É apenas na Teoria Quântica que o Método Diferencial de Newton torna -se inadequado, e de fato, a causalidade falha. No entanto, o último veredicto ainda não foi pronunciado. Possa o espírito do método de Newton dar-nos o poder para restabelecemos a concordância entre a realidade física e a característica mais comum dos ensinamentos de Newton - a causalidade estrita.

Trata-se de uma alusão a diferenças fundamentais entre propriedades de objetos da física quântica e propriedades de objetos correspondentes da física clássica. A título de exemplo, sabe-se que é possível, no caso clássico, mas não é possível, no caso quântico, determinar-se, com precisão arbitrária, a posição e a velocidade de um objeto, num dado instante.

Apesar de não fazer parte dos nossos objetivos uma análise histórica do desenvolvimento do cálculo diferencial, apresentamos, a seguir, alguns dados históricos relevantes no contexto de nosso trabalho.

A noção de *infinitésimo*, que se relaciona diretamente com as proprieda-

des do *contínuo*², remonta à Grécia antiga, por volta do século V a. C. Está presente, por exemplo, na filosofia e na geometria dos Pitagóricos, de Anaxágoras de Clazomenae [499 a. C, 428 a. C], do filósofo atomista Demócrito de Abdera [460 a. C, 370 a. C] e de Aristóteles [384 a. C, 322 a. C]. Mas aparece, de forma mais explícita e relacionada com as propriedades do cálculo, em trabalhos de Eudoxo de Cnido [408 a. C, 355 a. C], Euclides de Alexandria [325 a. C, 265 a. C] e, principalmente, de Archimedes de Siracusa [287 a. C, 212 a. C] (ver Boyer 1974 e Lintz 1999).

Eudoxo, com base no lema

Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie,

desenvolve seu *método da exaustão*, através do qual mostra ser possível trabalhar de forma finita e precisa no cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Archimedes, cerca de um século depois, ao utilizá-lo em *O método* (Archimedes 1950)³, considerado o seu quarto trabalho (escrito na forma de carta a Eratóste-

² Referimo-nos, aqui, ao *contínuo matemático*, embora a noção de infinitésimo, ou quantidade infinitesimal, possa igualmente ser associada ao *contínuo físico* relativo ao espaço, tempo e movimento.

³ Archimedes, filho de Phidias, astrônomo e provável parente de Hierão II [275 a. C, 215 a. C], Rei de Siracusa (cidade-estado livre, situada na Sicília), é dono de uma biografia inacreditavelmente rica e apaixonante, à qual a obra *O Método* acrescenta episódios ao mesmo tempo épicos e ficcionais. Em 1906, em Constantinopla, o filólogo dinamarquês Johan L. Heiberg é convidado a analisar um palimpsesto contendo 174 páginas, descoberto em 1899 no monastério do Santo Sepulcro, em Jerusalém. Mesmo com os poucos recursos técnicos da época, consegue descobrir, sob inscrições de textos religiosos datadas do Século XIII da Era Cristã, transcrições de partes de diversos trabalhos de Archimedes, dentre as quais, da obra *O Método*, realizadas por volta do Século X, ou seja, cerca de três séculos antes. Desaparecido durante a Primeira Guerra Mundial, o livro reaparece por volta de 1930 em Paris, em uma coleção particular, desaparecendo novamente até quase o final dos anos 90. Sabe-se hoje que foi analisado por Constantine von Tischendorf, na biblioteca da casa Metochion, da Igreja do Santo Sepulcro, em 1846. Curiosamente, após sua morte, entre fragmentos de manuscritos integrantes de seu espólio vendidos à biblioteca da Universidade de Cambridge, encontrava-se uma folha do palimpsesto que examinara em 1846, e que, analisada por Nigel Wilson, do Lincoln College – Oxford em 1983, viria a ser confirmada como parte do palimpsesto analisado por Heiberg. Num, ao menos por ora, último, e literalmente falando, lance pitoresco envolvendo o precioso manuscrito, este é levado a leilão pela Casa Christie's em Nova York, em 29 de outubro de 1998. **Lote 1 - primeiro lance: \$480.000,00 ...** e após tão somente cinco minutos e dois milhões de dólares depois, para a insatisfação da Igreja Ortodoxa Grega de Jerusalém - que teve seu pedido de embargo do leilão rejeitado pela Corte de Nova York -, lá estava um notável pedaço da história arrematado por um milionário e posto sob os cuidados da *The Valters Art Gallery*, de Baltimore. Com a promessa de servir à comunidade científica após

nes), na ordem cronológica presumida do que conhecemos de sua obra, antecipa-se às idéias fundamentais da teoria de limites, diferenciação e integração que seriam desenvolvidas apenas a partir do final do século XVII.

Os infinitésimos aparecem no tratado **O método**, sem magnitude, uma vez que não são obtidos pela divisão de entes geométricos, e trilham, a partir daí, um longo e acidentado caminho, que inclui extensos períodos até de esquecimento na matemática. Podemos considerar os séculos XVI e XVII como períodos de grande interesse pelos infinitésimos, graças, em parte, aos trabalhos de físicos e astrônomos proeminentes, como o alemão Johannes Kepler [1571, 1630], o italiano Galileu Galilei [1564, 1642], e um de seus mais destacados discípulos - e sucessor na Universidade de Pisa -, Evangelista Torricelli [1608, 1647] (ver **Torricelli 1644**), que aplicaram, com relativo sucesso e rigor, o método infinitesimal à física e à matemática.

Kepler 1615, pp. 551-646, utiliza transformações geométricas e métodos infinitesimais no cálculo do volume de inúmeros sólidos de revolução, em particular, no cálculo do volume de tonéis de vinho. Suas falhas conceituais são compensadas pelo pioneirismo de suas idéias.

Galilei 1638 utiliza propriedades dos infinitésimos, inclusive algumas relacionadas com sua *ordem*, no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, como no movimento de projéteis e queda livre de corpos. Um dos resultados obtidos, por exemplo, é que *a área delimitada por uma curva dada pela velocidade de um móvel em função do tempo é a distância percorrida pelo mesmo, no intervalo de tempo considerado*. Em Galileu (ver **Galilei 1890-1909**) já encontramos a utilização do termo *indivisível*, porém seu uso mais extensivo ocorre com seu discípulo Bonaventura Cavalieri [1598, 1647]. Cavalieri, em **Cavalieri 1966** (tradução para o italiano da publicação original **Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota**, de 1635, e da edição póstuma, melhorada, de 1653), desenvolve, mesclando o método da exaustão e o método infinite-

o, certamente longo, período de tratamento ao qual deveria ser submetido, que ocorreria sob a chancela do Rochester Institute of Technology, ou da Johns Hopkins University.

(Veja <http://www.thewalters.org/archimedes/frame.html> - consulta realizada em dezembro/2003).

simal de Kepler, um novo processo para o cálculo de áreas e de volumes. Na edição original, possivelmente pela falta de recursos algébricos para generalizar seus resultados, incorre em falhas grosseiras, que acabam por eclipsar seus aspectos positivos, conforme comentários de **Baron 1969**, p.123. Motiva-se, no entanto, com as críticas recebidas e aprimora o seu método, que é reapresentado na edição póstuma de 1653. Por essa obra, uma das mais importantes publicações em integração geométrica do século XVII, Cavalieri pode ser considerado um dos mais representativos precursores do cálculo diferencial e integral⁴.

Torricelli, que até o início do século XX teve pouco de sua importante obra publicada, interpreta, com clareza, em **Torricelli 1644**, os conceitos de derivada e de integral, elucidando aspectos obscuros da obra de Cavalieri.

Podemos destacar ainda, entre os precursores do cálculo diferencial e integral, René Descartes [1596, 1650], Pierre Simon de Fermat [1601, 1655], e John Wallis [1616, 1703] (ver **Boyer 1974** e **Lintz 1999**).

Wallis, o mais eminente matemático inglês anterior a Isaac Newton, em 1655, aritmetiza, num certo sentido, os indivisíveis de Cavalieri (ver **Wallis 1693** e **Baron 1969**), substituindo as razões geométricas de Cavalieri por somas de séries de potências inteiras de números naturais; Fermat, em **Fermat 1679**⁵ (ver também **Fermat 1891-1922**), volume 2, introduz a representação gráfica de funções e estuda problemas de máximos e mínimos e de tangência; e Descartes, em **La géométrie** (ver **Descartes 1686**) - tratado que integra, praticamente como anexo, a obra **Descartes 1637**⁶ -, cria a *geometria analítica* e estuda, algebricamente, propriedades de funções, com o auxílio do cálculo.

⁴ **Baron 1969** apresenta uma comparação entre o método de integração com recursos geométricos de Cavalieri e a integração clássica.

⁵ Obra póstuma que reúne os manuscritos de Fermat, consistindo de dois volumes, editada por seu filho mais velho, Samuel de Fermat e concluída em 1679. O segundo volume contém, entre outros tratados importantes, **De maximis et minimis**, que trata, algebricamente, de problemas de máximos e mínimos.

⁶ **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences**. Plus **La dioptrique**, **Les météores** et **La géométrie**.

Mas a paternidade, propriamente, do cálculo, é dividida entre Isaac Newton [1642, 1727] e Gottfried Wilhelm Leibniz [1646, 1716].

Newton foi discípulo e sucessor de Barrow (ver **Barrow 1660**) em sua cátedra na Universidade de Cambridge. Motivado em suas pesquisas, na física e matemática, pela física de Aristóteles e pelo método axiomático de Euclides, foi também influenciado pelos trabalhos de Wallis, particularmente por **Wallis 1693**. Seus trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, na ordem de publicação, são **Philosophiae naturalis principia mathematica** (1687), **Optics** (1704), **Universal arithmetica** (1707), **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias** (1711), **Methodus differentialis** (1711), e **Methodus fluxionum et serierum infinitarum** (1736) (ver **Newton 1967-1981**).

Alguns de seus trabalhos são frutos da compilação de manuscritos antigos, que relutara em publicar assim que os produzira, como **Optics** (1704), escrito originalmente em inglês, que inclui, como apêndices, os tratados *Cubic curves*, *Quadrature and rectification of curves by the use of infinite series* e *Method of fluxiones*. Neste último, *Method of fluxiones*, são introduzidas as entidades denominadas *fluxões* e *fluentes*.

Outro exemplo é **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias 1711**, uma compilação de vários tratados, dos quais, para o cálculo diferencial e integral, o mais importante é **De analysi per aequationes numero terminorum infinitas**. Neste, Newton introduz a noção de *momento* de um *fluente*⁷.

Newton introduz, através dessas entidades, dois tipos clássicos de pro-

⁷ No *método das fluxões*, as quantidades infinitesimais são trabalhadas cinematicamente, de tal modo que as variações infinitesimais da variável *tempo* tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas.

As quantidades variáveis x recebem o nome de *fluentes*, e o conceito de *derivada* é obtido a partir da noção de *fluxão* $\dot{x}$ do *fluente* x : $\dot{x}$ é a fluxão do fluente x ; $\ddot{x}$ é a fluxão do fluente $\dot{x}$, etc, enquanto que inversamente, $\dot{x}$ é o fluente do qual x é a fluxão. O *momento* de um fluente x é definido como o acréscimo ocorrido em x em um período indefinidamente pequeno (o) de tempo, e denotado por $o\dot{x}$.

blemas do cálculo. O primeiro deles equivale a encontrar a fluxão associada a fluentes dados, a partir de relações conhecidas entre os mesmos, o que corresponde ao processo de *diferenciação* do cálculo usual. O segundo, um processo inverso do primeiro, equivale à determinação da relação entre as fluxões de dois fluentes, dada a equação que traduz a relação existente entre tais fluentes, o que corresponde ao processo de *integração* do cálculo usual.

Newton esperava, com o uso das fluxões e dos fluentes, dar mais consistência ao seu método infinitesimal, no que não foi totalmente bem sucedido. De fato, não conseguiria justificar satisfatoriamente o desaparecimento, em operações com *momentos dos fluentes*, de certas quantidades, ou incrementos, tacitamente considerados desprezíveis.

Vejamos um exemplo de uso desses conceitos por Newton.

Pretendendo relacionar a curva dada por $z = ax^m$ com a área delimitada pela mesma, e adotando para x o momento o , Newton, através de séries infinitas, obtém:

$$z + oy = ax^m + amx^{m-1}o + \frac{am(m-1)}{2!}x^{m-2}o^2 + \dots$$

Sendo $z = ax^m$, o não nulo, e assumindo que as potências de o maiores ou iguais a 2 podem ser desprezadas, obtém, operando convenientemente, $y = amx^{m-1}$. Mas o desaparecimento das potências maiores do que 2 de o não é adequadamente justificado.

Através do método similar dos fluentes e fluxões, em que, de forma análoga ao caso acima, há “acréscimos evanescentes” dos fluentes x , Newton obtém, a partir de $z + o\dot{y} = a(x + o\dot{x})^m$, o resultado $\dot{y} = amx^{m-1}\dot{x}$, ou, na linguagem que seria desenvolvida por Leibniz,

$$\frac{dy}{dt} = amx^{m-1} \frac{dx}{dt},$$

de onde, determinando a razão entre $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$, obtém o equivalente a $\frac{dy}{dx}$.

Paralela e independentemente de Newton - que, tendo postergado excessivamente a publicação de alguns de seus mais importantes trabalhos, teve prejudicada a defesa sobre a precedência de várias de suas descobertas -, Leibniz, por volta de 1673, em Paris, motivado por trabalhos de Descartes relativos à geometria analítica, e, principalmente, de Pascal, relativos ao método infinitesimal, ensaia os primeiros passos rumo à criação e formalização do cálculo.

Incentivado por Huygens, a quem apresenta suas primeiras descobertas, aprofunda seus conhecimentos matemáticos, considerados ainda precários à época, através de trabalhos de Nicholas Mercator [1620, 1687], John Wallis [1616, 1703], James Gregory [1638, 1675] e Henry Oldenburg [1618, 1677].

Através de Oldenburg, um dos matemáticos com os quais manteve correspondência, Leibniz, em 1676, viria a se comunicar com Isaac Newton - o que, conforme **Baron 1969**, seria de grande significado matemático e se incorporaria às controvérsias envolvendo seus nomes, acerca da paternidade do cálculo, pelos próximos 250 anos.

Em ***Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*** (Leibniz 1684, ver Leibniz 1983), sistematiza o cálculo diferencial, introduzindo a notação básica, que seria adotada em definitivo, como, por exemplo, dx para expressar a diferencial de x .

Em ***De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*** (Leibniz 1686, ver Leibniz 1983), sistematiza o cálculo integral, estabelecendo a notação básica definitiva para o mesmo, como a notação $\int x$, depois modificada para $\int x dx$, da integração usual.

Totalmente originais ou não, o fato é que as descobertas de Leibniz e as de Newton foram fundamentais para o desenvolvimento e consolidação do cálculo diferencial e integral. Dentre as diferenças fundamentais que podemos observar em seus trabalhos, destaca-se o caráter atribuído aos infinitesimos.

Newton utilizava os incrementos infinitesimais no cálculo diferencial, apelando para propriedades da dinâmica. Por valer-se da eliminação de diferenciais

de ordens superiores sem justificativa plausível, viria a ser duramente criticado, em especial pelo bispo anglicano George Berkeley [1685, 1753].

Berkeley 1734 (*The analyst*), mesmo não sendo a obra que concentra as discussões mais profundas sobre as inconsistências do método infinitesimal de Newton, é a mais citada, e, vista hoje com certa indulgência, mostra ter bem mais a oferecer do que a célebre caracterização dos infinitésimos como *ghosts of departed quantities*. A citação abaixo, que corresponde à íntegra do Item VI de **The analyst 2002** - edição eletrônica de David R. Wilkins (Universidade de Dublin) -, representa bem a tônica das críticas de Berkeley⁸.

VI. And yet in the *calulus differentialis*, which Method serves to all the same Intents and Ends with that of Fluxions, our modern Analysts are not content to consider only the Differences of finite Quantities: they also consider the Differences of those Differences, and the Differences of the Differences of the first Differences. And so on *ad infinitum*. That is, they consider Quantities infinitely less than the least discernible Quantity; and others infinitely less than those infinitely small ones; and still others infinitely less than the preceding infinitesimals, and so on without end or limit. Insomuch that we are to admit an infinite succession of infinitesimals, each infinitely less than the foregoing, and infinitely greater than the following. As there are first, second, third, fourth, fifth &c. Fluxions, so there are Differences, first, second, third, fourth, &c. in an infinite Progression towards nothing, which you still approach and never arrive at. And (which is most strange) although you should take a Million of Millions to the least given Quantity, it shall be never the bigger. For this is one of the modest *postulata* of our modern Mathematicians, and it is a corner-stone or Ground-work of their Speculations.

Publicado **The analyst**, não tardou para que simpatizantes da nova análise saíssem em defesa de Newton e de suas idéias, como James Jurin [1684, 1750], com **Jurin 1734 (*Geometry no friend to infidelity...*)** e **Jurin 1735 (*The minute mathematician...*)**, e Benjamin Robbins [1707, 1751], com **Robins 1735 (*A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios*)**.

⁸ Respeitamos, nessa citação, a grafia da fonte consultada.

As críticas, por outro lado, não impediam a divulgação dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Os matemáticos suíços Jacques Bernoulli [1654, 1705] e Jean Bernoulli [1667, 1748], irmãos, que mantiveram assídua correspondência com Leibniz⁹, foram os seus primeiros divulgadores (ver **Bernoulli 1744**). Jean foi professor do Marquês Guillaume F. A. de l'Hospital [1661, 1704], entre 1690 e 1692, a quem teria cedido, por via de um obscuro acordo, descobertas que seriam usadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal, de **de l'Hospital 1696** (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*). Apesar da pendência sobre a produção intelectual, a realidade é que **de l'Hospital 1696** dá o melhor tratamento, até então, ao carácter inconsistente das quantidades infinitesimais. Isto se revela na axiomatização utilizada, da qual destacamos as definições e postulados seguintes.

Definições

- *Quantidades variáveis são aquelas que aumentam ou diminuem continuamente, quantidades constantes são as que permanecem fixas enquanto as outras variam.*

- *A porção infinitamente pequena segundo a qual uma quantidade variável continuamente aumenta ou diminui, é chamada diferencial.*

Postulados

- *Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.*

- *Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento*

⁹ A denominação *cálculo integral*, sugerida por Jacques Bernoulli, foi acatada por Leibniz .

infinitesimal.

Contornando mais adequadamente o problema das inconsistências do infinitésimo, a formulação de de l'Hospital deixa clara a relação que existe entre a equação da reta tangente a uma curva dada por $y = f(x)$, num de seus pontos, e os incrementos infinitesimais considerados (dy e dx , segundo a notação introduzida por Leibniz).

Mas isso não seria suficiente para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para o cálculo diferencial e integral. É o que mostram matemáticos e filósofos da Academia Real de Ciências de Paris, cujas opiniões divergentes sobre o tema dariam início a um longo ciclo de discussões entre adeptos e contrários à nova teoria matemática de Newton e Leibniz. Destacam-se entre os seus simpatizantes, Pierre Varignon [1654, 1722] e Joseph Saurin [1659, 1737], e entre seus opositores, Michel Rolle [1652, 1719]. Foram estes os protagonistas dos maiores debates sobre o cálculo na Academia Real de Ciências de Paris, entre os anos de 1700 e 1706, como pudemos apreender em seminário conduzido por Eduardo Sebastiani Ferreira¹⁰, sob o título *Os três contra-exemplos de Rolle para o cálculo diferencial de l'Hospital*, promovido pelo Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) da Unicamp, em 03 de dezembro de 2003.

Varignon, por acreditar na existência real dos infinitésimos - ao que parece crendo ser esta também uma convicção de Leibniz -, apresentava uma defesa frágil contra os argumentos de Rolle, nos debates que travaram entre 1700 e 1701 (ver **Pin 1987** e **Joven 1997**).

Leibniz, manifestando-se junto à Academia de Paris, depois de um período um tanto longo de silêncio, declara sua descrença quanto à *extensão material dos infinitésimos*, ao considerá-los *ficções úteis*, capazes de justificar propriedades apenas de objetos com existência real. Isso desagrade bastante os adeptos de suas idéias que, como Varignon, nutriam a crença na existência real dos infi-

¹⁰ Eduardo Sebastiani Ferreira é internacionalmente reconhecido pelo pioneirismo de seus trabalhos em *Etnomatemática*, bem como por seus trabalhos em História da Matemática.

nitésimos. Os debates prosseguem, então, entre 1701 e 1706, envolvendo mais diretamente Saurin e Rolle, terminando apenas após a ação conciliatória de uma comissão especialmente criada para tal fim. Rolle e seus partidários saem satisfeitos da contenda, considerando que não havia justificativa rigorosa para a existência dos infinitésimos.

Formalmente, entretanto, nada chegou a ser apresentado que justificasse que o método infinitesimal não funcionava bem na prática, razão suficiente para que Leibniz e seus seguidores não se considerassem derrotados.

Joven 1997 comenta as discussões entre Rolle e Varignon, e apresenta respostas de Leibniz a ataques contra o que se considerava falta de *rigor* e *novidade* no trato com o infinito e com os infinitésimos e suas ordens.

Do mesmo modo, **Pin 1987** analisa as críticas históricas ao método das fluxões de Newton e, especialmente, às idéias de Leibniz, concluindo que a rejeição deste último vem, de certo modo, através de Abraham Robinson, em sua análise não standard:

El Análisis no-standard viene a otorgar razón a la intuición de Leibniz, a legitimar su instalación en la aporía y, al tiempo, redimile de ella, a procurar um modelo en el que dos magnitudes que difieren por una magnitud infinitamente pequena son - en el registro al menos, que interessaba a Leibniz - equiparables entre sí, sin que ello excluya a tal diferencia del concepto propio de magnitud (p.101).

Tendo o cálculo diferencial e integral sobrevivido às críticas e ataques iniciais, restava a tarefa de consolidá-lo, o que significava estabelecer princípios claros e rigorosos para justificar a existência e propriedades dos infinitésimos, sobre os quais fora edificado. Mas isso não seria conseguido, pelo menos no prazo desejado pelos matemáticos do século XVIII. Já com a teoria de limites despontando no horizonte matemático, Augustin-Louis Cauchy [1789, 1857] faria, sem sucesso, uma das últimas tentativas da época para conseguir esse intento,

tratando os infinitésimos não mais como quantidades fixas, mas como variáveis tendendo a um limite, particularmente a zero. Concentrando-se, então, na emergente teoria de limites, Cauchy, em **Cauchy 1821** e **Cauchy 1826/1829**, introduz importantes resultados sobre continuidade e convergência de funções, bem como sobre séries, diferenciação e integração, tornando-se, com isso, precursor do cálculo diferencial e integral moderno.

Mas os contornos definitivos desse cálculo seriam traçados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass [1815, 1897], com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy seriam sanados. Em particular, a Weierstrass são creditadas a definição rigorosa de limite através dos ε 's e δ 's, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins. A publicação de sua extensa obra, pela qual é considerado o pai da moderna análise, só é iniciada, no entanto, nos últimos anos de sua vida, mais precisamente em 1894. Entre os poucos artigos publicados em vida, destaca-se **Weierstrass 1854**, no qual introduz a teoria de *funções abelianas*. Foi através de cursos, basicamente, como os ministrados na Universidade de Berlim, nos períodos de 1859-1860 (*Introdução à análise*), e 1860-1861 (*Cálculo integral*), que divulgou grande parte de seus resultados inéditos sobre séries, funções periódicas, funções elípticas, funções abelianas, cálculo de variações, etc. Suas obras completas são editadas entre 1894 e 1927 (**Weierstrass 1894-1927**), com uma reedição em 1967.

Muitos outros grandes matemáticos, além dos anteriormente citados, haviam colaborado, e outros colaborariam ainda, de forma significativa, na construção, aperfeiçoamento e consolidação do cálculo diferencial e integral com base na teoria de limites, como Leonhard Euler [1707, 1783], Jean L. R. d'Alembert [1717, 1783], Carl Friedrich Gauss [1777, 1855], Bernard Placidus J. N. Bolzano [1781, 1848], Augustus De Morgan [1806, 1871], George Boole [1815, 1864], Leopold Kronecker [1823, 1891], Georg F. B. Riemann [1826, 1866], Julius W. R. Dedekind [1831, 1916], Georg Cantor [1845, 1918] e David Hilbert [1862, 1943], entre outros. Destacamos, entre estes, Cantor com sua teoria do infinito e resul-

tados sobre números ordinais e cardinais, indispensáveis tanto para a lógica quanto para a matemática contemporâneas (ver **Bocheński 1951 e 1961**, e **Boyer 1974**).

Porém, o retorno - definitivo, ao que parece -, dos infinitésimos ao cenário da matemática, dá-se com Abraham Robinson [1918, 1974], que em **Robinson 1996** (reedição revisada da primeira edição publicada em 1966) apresenta uma nova teoria para a análise matemática, baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos, à qual denomina *análise não-standard*. Conforme relata Luxemburg no prefácio de **Robinson 1996**, essa obra foi esboçada em 1960, tendo sido suas idéias iniciais apresentadas, em novembro do mesmo ano, em seminário realizado na Universidade de Princeton, Estados Unidos; depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, e posteriormente em **Robinson 1961 (Non-standard analysis, Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam)**.

A análise não standard, por ser construída sobre uma extensão do conjunto dos números reais, contendo elementos infinitesimais e elementos infinitos, pode ser considerada uma extensão da análise clássica.

Apresentamos algumas informações adicionais a respeito da análise não-standard de Robinson no início do Capítulo 2, onde introduzimos os fundamentos para um cálculo diferencial paraconsistente.

A lógica moderna inicia-se no século XVII, com Leibniz.

Em 1666, Leibniz escreve os tratados **Dissertatio de arte combinatoria** e **Calculus ratiocinator**, apresentando o projeto da construção de um sistema exato universal de notação, uma linguagem simbólica universal baseada em um alfabeto do pensamento, a *lingua characterica universalis*, que deveria ser como uma álgebra, e o projeto de construção de um “cálculo da razão”.

Apesar do programa de Leibniz, na forma por ele apresentada, não ser teoricamente exeqüível, seu **Calculus ratiocinator** constitui um importante precursor da metodologia da lógica contemporânea.

Não obstante tenha Leibniz exercido inegável influência sobre seus contemporâneos e sucessores, em particular, como vimos, com seus trabalhos em matemática, suas contribuições para a lógica permaneceram, em sua maior parte, não publicadas durante sua vida, tendo ficado praticamente desconhecidas até o início do século XX. Em 1903, Louis Couturat publicou a obra **Opuscules et fragments inédits de Leibniz** (ver Couturat 1903, Leibniz 1966 e Leibniz 1983).

Se esses trabalhos não tivessem permanecido quase desconhecidos por tanto tempo, Leibniz teria sido, também, ainda no século XVII, um dos responsáveis diretos pelo desenvolvimento da lógica contemporânea, que ocorreu a partir do início do século XX.

De acordo com da Costa 1992, o século XIX foi um dos períodos áureos da matemática, e muito influenciou a cultura e o pensamento em geral do século XX, tendo contribuído, direta ou indiretamente, para o surgimento da lógica matemática e, principalmente, das lógicas não-clássicas.

Os trabalhos de Boole e de De Morgan, influenciados por Leibniz, Boole 1958 (**An investigation of the laws of thought**, publicado originalmente em 1847)) e De Morgan 1847 (**Formal logic: or the calculus of inference, necessary and probable**), foram essenciais para o desenvolvimento da “álgebra das relações” de Charles S. Peirce [1839, 1914] e Ernst Schröder [1841, 1902], apesar de ainda não terem o necessário rigor e alcance para se constituírem num cálculo definitivo da lógica.

Os passos essenciais para a introdução do método logístico e da lógica matemática, porém, foram dados por Friedrich L. G. Frege [1848, 1925] – o verdadeiro fundador da lógica moderna –, com Frege 1977 (**Begriffsschrift**, publicado originalmente em 1879), juntamente com Bertrand Russell [1872, 1970] e Alfred N. Whitehead [1861, 1947], com Russell 1908 (**Mathematical logic as based on the theory of types**) e Whitehead & Russell 1910 - 1913 (**Principia mathematica**).

Seus trabalhos, juntamente com os trabalhos de Hugh McColl [1837,

1909], Jań Łukasiewicz [1878, 1956], Nicolaj A. Vasiliev [1880, 1940], Luitzen E. J. Brouwer [1881, 1966], Alfred Tarski [1902, 1983], Stanislaw Jaśkowski [1906, 1965], Kurt Gödel [1906, 1978], e, bem mais recentemente, de Newton Carneiro Affonso da Costa, foram fundamentais para que se alterasse o panorama da lógica e da matemática no século XX, com a formalização da lógica clássica e o advento e multiplicação das lógicas não-clássicas.

Frege, em **Begriffsschrift**, introduz os princípios que iriam delinear a doutrina logicista, que procura reduzir a aritmética à lógica. Nesse trabalho Frege apresenta o cálculo proposicional, pela primeira vez, na forma lógica moderna. No entanto, se consegue alcançar com sua linguagem, apoiada essencialmente em elementos da lógica clássica, o rigor que faltava a Cantor, falha na concepção de alguns princípios, como na do *princípio da compreensão* (do qual trataremos no Capítulo 1), que implicava uma importante inconsistência, descoberta por Russell, e conhecida como *Paradoxo de Russell* (ver **D'Ottaviano & Feitosa 2003**) .

Com os trabalhos de Frege, Cantor e Russell, principalmente, desencadeia-se a célebre *crise dos paradoxos*, entre o final do século XIX e o início do século XX, que leva os matemáticos a se conscientizarem sobre a necessidade de uma revisão cuidadosa dos fundamentos da matemática.

Russell e Whitehead, com **Principia mathematica**, consolidam a posição da corrente *logicista* - e formalizam, pela primeira vez, a lógica clássica, como proposta de solução para a chamada *crise dos fundamentos da matemática*, com enfoques distintos da corrente *formalista* de Hilbert e da corrente *intuicionista* de Brouwer.

A formalização da teoria de conjuntos de Cantor, com os trabalhos de Zermelo, Skolem, Fraenkel, von Neumann e Gödel, entre outros, também contribuiu fortemente para os fundamentos da matemática, via lógica clássica.

Alguns filósofos e matemáticos, entretanto, buscaram soluções fora do

contexto clássico.

Łukasiewicz, em Łukasiewicz 1910 (*O Zasadzie sprzeczności u Arystotelesa: studium krytyczne*)¹¹ e no artigo *Über der satz von widerspruch bei Aristoteles* (1910), discute sobre a posição central do princípio da (não-) contradição na lógica e discorre sobre a conveniência de uma revisão das leis básicas da lógica aristotélica (ver LeBlanc 2002). Introduz, posteriormente, em 1920, um cálculo proposicional trivalente ($\mathcal{L}_3$), que é generalizado para cálculos com uma quantidade finita qualquer de valores de verdade e, em 1922, para cálculos proposicionais com quantidades infinitas de valores de verdade (ver Łukasiewicz & Tarski 1930).

Jaśkowski, discípulo de Łukasiewicz, motivado por problemas diversos relativos a contradições, especialmente os concernentes às “convincing reasoning which nevertheless yield two contradictory conclusions”, constrói o primeiro sistema de lógica paraconsistente (D2) em Jaśkowski 1948 e Jaśkowski 1949, restrito, porém, ao caso proposicional (ver Jaśkowski 1969).

O sistema D_2 de Jaśkowski é conhecido como *lógica discussiva* ou *lógica discursiva* (ver D'Ottaviano 1992).

O brasileiro da Costa, porém, é considerado o verdadeiro fundador das lógicas paraconsistentes, assim como das teorias paraconsistentes de conjuntos. Arruda 1980b, da Costa & Marconi 1989, D'Ottaviano 1990 e 1992, D'Ottaviano & Epstein 1990, da Costa 1992, Carnielli 1992 e Pizzi 1992, constituem referências importantes que abordam, sob variados enfoques, o processo de criação e formalização das lógicas não-clássicas – é dada especial atenção à lógica discussiva de Jaśkowski e às teorias paraconsistentes introduzidas em da Costa 1963a, 1963b e 1974.

Não nos estendemos aqui sobre a lógica paraconsistente, fundamental para este nosso trabalho, porque os sistemas paraconsistentes relevantes para

¹¹ Sobre o princípio da contradição de Aristóteles: estudo crítico (1910).

nossos objetivos são introduzidos no corpo da Tese. Apresentamos, a seguir, o conceito de lógica paraconsistente.

Sejam T uma teoria (dedutiva) e L a lógica subjacente a T , cuja linguagem possui um símbolo de negação “ $\neg$ ”. A teoria T é *consistente* se não tiver como teoremas duas fórmulas da linguagem de L tais que uma seja a negação da outra, isto é, se não tiver teoremas contraditórios; caso contrário, T é *inconsistente*, isto é, encerra teoremas do tipo A e $\neg A$.

Portanto, se uma teoria T é inconsistente e em sua lógica subjacente são válidas as propriedades usuais da conjunção, então em T ocorrem contradições $A \wedge \neg A$ como teoremas, e reciprocamente.

Uma teoria T é *trivial* (ou *supercompleta*) se toda fórmula (ou toda sentença) de sua linguagem é teorema; caso contrário, T diz-se *não-trivial* (ou *não-supercompleta*).

Evidentemente, quando uma teoria T é trivial, ela é inconsistente. Na lógica clássica, e em outras lógicas, como a intuicionista, se T é inconsistente, então T é trivial.

Uma lógica é *paraconsistente* se pode servir de base para teorias inconsistentes, porém não triviais, que são ditas *teorias paraconsistentes*.

Um dos objetivos centrais da lógica paraconsistente consiste na investigação de teorias desse tipo.

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, num certo sentido, restrito. Podemos dizer, como **da Costa & Marconi 1989**, que se em um sistema lógico a força desse princípio é restrita, então o sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes. De fato, nas lógicas paraconsistentes, o princípio da (não-) contradição não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente, de uma fórmula e sua negação não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula.

Trabalhos de lógicos, matemáticos e filósofos de vários países, entre eles discípulos e colaboradores de da Costa - como Arruda, Chuaqui, Raggio e Sette

-, e o crescente interesse da comunidade científica internacional pelas lógicas não-clássicas, notadamente pelas lógicas paraconsistentes, têm contribuído para sua consolidação, bem como para o advento de novas teorias baseadas nessas lógicas - como cálculos diferenciais paraconsistentes -, e a expansão de seus campos de aplicação.

Para a obtenção dos resultados pretendidos nesta Tese, relativos ao cálculo diferencial paraconsistente, desenvolvido a partir de princípios estabelecidos por Leibniz e l'Hospital para os infinitésimos, utilizamos o formalismo lógico e conjuntista de da Costa, que inclui a construção de uma extensão algébrica $\mathcal{A}$ para o anel $\mathbb{R}$ dos números reais, denominada um *hiperanel*, com o acréscimo de elementos infinitesimais aos elementos de $\mathbb{R}$; e de uma outra extensão algébrica para $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}^*$, que denominamos um *quase anel*, incluindo, além dos elementos de $\mathcal{A}$, também elementos infinitos. Para a construção de superestruturas paraconsistentes sobre o hiperanel $\mathcal{A}$, e o quase anel $\mathcal{A}^*$ - requisitos essenciais para a introdução de um teorema de transferência entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente -, buscamos motivação na análise *não standard*¹², introduzida por **Robinson 1996** (reedição revisada da primeira edição, publicada em 1966), bem como em **Robinson & Zakon 1967** e **Stroyan & Luxemburg 1976**.

Assim estruturamos os capítulos deste trabalho.

No primeiro capítulo introduzimos os resultados básicos do cálculo paraconsistente de predicados de primeira ordem C_1^- , de da Costa, que nos interessa de forma especial, por ser a lógica subjacente à teoria paraconsistente de conjuntos, sobre a qual podemos construir o cálculo diferencial paraconsistente. Incluímos a axiomática da teoria clássica de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF), que é utilizada para a introdução das teorias de conjuntos NF de Quine, NF_1 de

¹² Em geral, utilizaremos as expressões *standard* e *não standard* sem maiores ressalvas, para nos referirmos à análise clássica usual e à análise de Robinson, respectivamente.

da Costa e CHU_0 de Church, a partir das quais é introduzido o sistema CHU_1 de da Costa, que constitui a teoria paraconsistente de conjuntos subjacente ao cálculo diferencial paraconsistente construído.

No segundo capítulo introduzimos as estruturas algébricas de hiperanel e quase-anel, necessárias para o cálculo paraconsistente, e construímos alguns de seus resultados básicos. Diversos teoremas importantes são demonstrados na linguagem dos infinitésimos, alguns clássicos e outros de natureza inconsistente. Encerramos o capítulo com duas aplicações práticas, a primeira de natureza clássica, baseada em problema sugerido por John L. Bell, em correspondência pessoal; a segunda de natureza paraconsistente, que desenvolvemos motivados pela “função delta” de Dirac.

Acrescentamos aos conceitos e resultados de da Costa alguns conceitos e resultados originais, incluindo alguns teoremas sobre infinitésimos e diferenciação.

No último capítulo analisamos certas extensões paraconsistentes do conjunto dos reais e extensões paraconsistentes de uma superestrutura clássica construída sobre o conjunto dos números reais, obtendo monomorfismos entre essas superestruturas. Finalmente, motivados por **Robinson & Zakon 1967**, obtemos um teorema de transferência entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente.

Nossa opção, como da Costa, por $C_1^=$ como lógica subjacente para o cálculo diferencial paraconsistente é bastante natural, visto ser a lógica subjacente à teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , também adotada como teoria paraconsistente de conjuntos subjacente à construção do cálculo diferencial que desenvolvemos. Isso não significa, no entanto, que não seja possível a adoção de uma outra lógica (ou outra teoria de conjuntos subjacente), como mostra **Mortensen 1995**, Capítulo 5, em que diferentes lógicas são utilizadas em abordagens não-clássicas do cálculo diferencial e integral.

Nas considerações finais, discutimos essa e algumas outras questões, que podem ser estudadas em trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

LÓGICAS PARACONSISTENTES E TEORIAS PARACONSISTENTES DE CONJUNTOS DE DA COSTA

As teorias paraconsistentes de conjuntos podem ser consideradas não apenas do ponto de vista teórico, para complementar certas lógicas paraconsistentes, mas também por suas possíveis aplicações, como em computação – talvez em criptografia quântica –, e em matemática – por exemplo, no cálculo diferencial e integral e, talvez, na teoria de probabilidade.

O objetivo deste capítulo consiste em apresentar a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , introduzida em **da Costa 1986** (ver **da Costa, Béziau & Bueno 1998**), que constitui a teoria de conjuntos subjacente ao cálculo diferencial paraconsistente que será desenvolvido nos próximos capítulos deste trabalho.

Convém ressaltar, inicialmente, que da Costa introduziu diversas teorias paraconsistentes de conjuntos, nas quais o Axioma esquema da Separação é formulado sem restrições.

De acordo com **Arruda 1980b**, dois problemas importantes são investigados com essas teorias paraconsistentes de conjuntos: propriedades de alguns conjuntos que não existem nas teorias usuais de conjuntos, mas cuja existência é possível nas teorias paraconsistentes; e a conjectura de que lógicas subjacentes mais fracas, num certo sentido, permitem a construção de teorias de conjuntos “existencialmente mais fortes” que as usuais, isto é, teorias que admitem pelo menos um conjunto que não existe nas teorias usuais.

Por exemplo, é possível que em uma teoria de conjuntos paraconsistente exista um conjunto de Russell: $r = \{x: x \notin x\}$. E, a partir de hipóteses bastante fracas, pode-se demonstrar que a união de r é idêntica à classe universal V ,

sendo natural que esta classe seja um conjunto, que é membro de si mesmo: $V \in V$.

A teoria CHU_1 , cujo cálculo de predicados subjacente é o sistema para-consistente de primeira ordem com igualdade $C_1^=$ de da Costa, foi motivada pela teoria clássica de conjuntos CHU, introduzida em **Church 1974** – teoria que estende, por sua vez, a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF).

A construção de CHU_1 , a partir de CHU, é análoga à construção, por **da Costa 1963a** (ver **da Costa 1993**), da teoria paraconsistente de conjuntos NF_1 a partir da teoria clássica de conjuntos NF, de **Quine 1937**.

O sistema CHU_1 , como veremos, é mais adequado que NF_1 para o desenvolvimento de teorias matemáticas não-clássicas.

Para a apresentação do sistema CHU_1 e para a caracterização de suas propriedades mais significativas, fazemos inicialmente uma análise sucinta das relações entre as teorias de conjuntos acima mencionadas.

Assim sendo, iniciamos este capítulo com a introdução das hierarquias de cálculos proposicionais e de predicados de **da Costa 1963a**: introduzimos o cálculo proposicional paraconsistente C_1 e a hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$; o cálculo de predicados de primeira ordem C_1^* e a hierarquia de cálculos de predicados C_n^* , $1 \leq n \leq \omega$; o cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade $C_1^=$ e a hierarquia de cálculos de predicados com igualdade $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$. São enunciados alguns resultados relevantes desses sistemas, de **da Costa 1963a** (ver **da Costa 1993**), **1963b**, **1964a**, **1964b** e **1974**, entre outros, importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Uma subseção é dedicada à semântica de valorações para os cálculos C_1 e $C_1^=$, introduzida por **da Costa & Alves 1976**, **Alves 1976** e **Arruda & da Costa 1977**.

Após uma breve revisão da axiomática da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, apresentamos, na Seção 3, também sucintamente, alguns dos principais resultados relativos ao sistema NF de Quine - aqui denominado NF_0 -, ao sistema NF_1 de **da Costa 1963a**, ao sistema CHU de Church - aqui denominado

CHU_0 -, para a introdução do sistema CHU_1 de da Costa.

1.1 Os Cálculos Paraconsistentes C_1 , C_1^* e $C_1^=$

As hierarquias de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n , de cálculos de predicados paraconsistentes C_n^* e de cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$ de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$, foram introduzidas em **da Costa 1963a** (ver **da Costa 1974 e 1993**). Esses sistemas são apresentados em uma série de artigos, a partir de 1963 (ver **Arruda 1980b e 1989**, **da Costa & Marconi 1989** e **D'Ottaviano 1990**).

Neste trabalho, pelas razões já expostas, concentramos nossa atenção no cálculo de predicados com igualdade $C_1^=$.

1.1.1 O sistema C_1

A *linguagem* do cálculo proposicional C_1 de da Costa (ver **da Costa 1963a, 1963b, 1974 e 1993**), que denotaremos por $\mathcal{L}_b$, tem como símbolos primitivos variáveis proposicionais e conectivos lógicos para a negação, conjunção, disjunção e condicional.

É o seguinte o alfabeto de $\mathcal{L}_b$:

- Uma família enumerável de variáveis proposicionais: $p_0, p_1, p_2, \dots$;
- Conectivos lógicos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) e $\rightarrow$ (implicação);
- Símbolos auxiliares: $(,)$.

As noções sintáticas de *fórmula*, *demonstração*, *teorema*, *dedução*, etc, assim como as convenções e notações são as usuais, como em **Kleene 1952**.

Usaremos as letras maiúsculas do alfabeto latino A, B, C,...(com ou sem

índices numéricos inferiores) como metavariáveis sobre fórmulas de $\mathcal{L}_0$.

Os operadores $\circ$, $\neg^*$, n , (n) , $\neg^{(n)}$ e $\leftrightarrow$ são introduzidos por definição.

Definição 1.1. $A^0 =_{\text{def}} \neg(A \wedge \neg A)$.

Definição 1.2. $\neg^* A =_{\text{def}} \neg A \wedge A^0$.

Definição 1.3. $A^n =_{\text{def}} A^{\circ \dots \circ}$ (n aplicações reiteradas do operador “ $\circ$ ” à fórmula A), $n \geq 1$.

Definição 1.4. $A^{(n)} =_{\text{def}} A^1 \wedge \dots \wedge A^n$, $n \geq 1$.

Definição 1.5. $\neg^{(n)} A =_{\text{def}} \neg A \wedge A^{(n)}$, $n \geq 1$.

Definição 1.6. $A \leftrightarrow B =_{\text{def}} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

De acordo com as Definições 1.3 e 1.4, temos que A^0 coincide com A^1 e com $A^{(1)}$.

A negação “ $\neg$ ” é a negação básica do sistema C_1 , usualmente denominada “negação fraca”. A negação “ $\neg^*$ ”, denominada “negação forte”, desempenha, nesse sistema, papel equivalente ao da negação clássica. Lê-se $\neg A$ como “negação de A ” ou “negação fraca de A ”, e $\neg^* A$ como “negação forte de A ”.

A fórmula A^0 é usualmente lida como “ A é bem comportada” ou “ A é uma fórmula regular”, e o operador “ $\circ$ ” é em geral denominado “operador bola”; e o símbolo $\leftrightarrow$ corresponde à equivalência usual.

Os axiomas e regras de dedução de C_1 são os seguintes:

Axioma 1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Axioma 2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

Axioma 3. $(A \wedge B) \rightarrow A$.

Axioma 4. $(A \wedge B) \rightarrow B$.

Axioma 5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$.

Axioma 6. $A \rightarrow (A \vee B)$.

Axioma 7. $B \rightarrow (A \vee B)$.

Axioma 8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$.

Axioma 9. $\neg\neg A \rightarrow A$.

Axioma 10. $A \vee \neg A$.

Axioma 11. $B^o \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$.

Axioma 12. $A^o \wedge B^o \rightarrow ((A \rightarrow B)^o \wedge (A \wedge B)^o \wedge (A \vee B)^o)$.

Regra 1.
$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad (\text{Modus Ponens - MP})$$

O Axioma 11 constitui uma versão do princípio da redução ao absurdo para as fórmulas bem comportadas de C_1 , e o Axioma 12 indica que o “bom comportamento” de A e B se propaga a $(A \# B)$, onde # é um dos conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ da linguagem $\mathcal{L}_b$.

Como é bem conhecido, a lógica proposicional clássica pode ser introduzida pelos Axiomas 1-9 e MP, acrescentando-se o Princípio da Redução ao Absurdo:

Axioma 10'. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.

A seguir, apresentamos alguns resultados conhecidos, relativos ao sistema C_1 .

Teorema 1.7. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Em C_1 , são demonstráveis todos os teoremas da lógica proposicional positiva clássica. $\square$

Teorema 1.8. (Metateorema da Dedução, da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Se Γ é um conjunto de fórmulas, então $\Gamma, A \vdash_{C_1} B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{C_1} A \rightarrow B$. Isto é,

$$\Gamma, A \vdash_{C_1} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_1} A \rightarrow B. \square$$

Teorema 1.9. (da Costa 1974)

Em C_1 , a negação $\neg^*$ tem todas as propriedades da negação clássica. $\square$

Pelo teorema anterior, todo esquema de fórmula que é teorema clássico, com a substituição da negação clássica pela negação $\neg^*$ é teorema em C_1 . E, nesse sentido, o cálculo proposicional clássico pode ser considerado um subsistema de C_1 .

Teorema 1.10. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Se acrescentarmos a C_1 o esquema $\neg(A \wedge \neg A)$ como novo axioma, obtemos o cálculo proposicional clássico C . $\square$

Teorema 1.11. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Em C_1 , se $\Gamma, A \vdash B^0$; $\Gamma, A \vdash B$ e $\Gamma, A \vdash \neg B$, então $\Gamma \vdash \neg A$. $\square$

Teorema 1.12. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Se Γ é um conjunto de fórmulas e $A_1, A_2, \dots, A_m$ são os componentes primos¹³ das fórmulas de $\Gamma \cup \{A\}$, então, $\Gamma \vdash_C A$ se, e somente se, $\Gamma, A_1^0, A_2^0, \dots, A_m^0 \vdash_{C_1} A$. $\square$

¹³ Isto é, as fórmulas A_i , $1 \leq i \leq m$, não são fórmulas do tipo $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$, $\neg B$.

1.1.2 Os sistemas C_n , $0 \leq n \leq \omega$

A hierarquia de cálculos proposicionais $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots, C_\omega$ pode ser construída a partir de C_1 .

O cálculo proposicional clássico, cuja linguagem denotaremos por L , pode ser considerado como o sistema C_0 (Kleene 1952) da hierarquia C_n , $0 \leq n \leq \omega$.

Para cada C_n , $1 \leq n \leq \omega$, o operador $\neg^{(n)}$ desempenha o papel da negação clássica, sendo que $\neg^{(1)}$ coincide com a negação $\neg^*$, de acordo com as Definições 1.2 e 1.5; A^n pode ser lida como “ A é uma fórmula com o operador bola reiterado n vezes”; $A^{(n)}$ é usualmente lida como “ A é uma fórmula bem comportada de grau n ”, ou “ A é uma fórmula regular de grau n ”.

Os *axiomas* de C_n , $1 < n < \omega$, são os axiomas de C_1 , substituindo-se os Axiomas 11 e 12 pelos seguintes:

Axioma 11’. $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$.

Axioma 12’. $A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)})$.

A *regra de dedução* de C_n , $1 < n < \omega$ é a Regra 1 (MP) de C_1 .

São os seguintes os *axiomas* e a *regra de dedução* do cálculo C_ω :

Axioma 1 — Axioma 10.

Regra 1 - Modus Ponens.

Os Teoremas 1.7 e 1.8 são demonstráveis (da Costa 1963a; ver da Costa 1993), para todo C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

O Teorema 1.9 é demonstrável (**da Costa 1974**) para cada C_n , $1 \leq n < \omega$, substituindo-se a negação $\neg^*$ pela negação $\neg^{(n)}$.

A seguir, enunciamos resultados relevantes, relativos à hierarquia C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 1.13. Em C_n , $1 \leq n < \omega$, os seguintes esquemas de fórmulas são teoremas:

- (i) $A \vee \neg^{(n)}A$
- (ii) $\neg^{(n)}\neg^{(n)}A \leftrightarrow A$
- (iii) $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- (iv) $(A^{(n)} \wedge B^{(n)} \wedge \neg(A \vee B)) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (v) $(A^{(n)} \wedge B^{(n)} \wedge \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (A \wedge \neg B)$
- (vi) $(A^{(n)} \wedge \neg A \wedge A) \rightarrow B$
- (vii) $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$
- (viii) A^{n+1}
- (ix) $A^{(n)} \rightarrow (\neg A)^{(n)}$
- (x) $A^{(n)} \rightarrow \neg(\neg A \wedge A)$
- (xi) $(A^{n-1} \wedge \neg A^{n-1})^{(n)}$
- (xii) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- (xiii) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (xiv) $A \vee (A \rightarrow B)$

Demonstração: Ver **Castro 2004**.

Definição 1.14. Dados dois sistemas S e S' , cuja linguagem é L_ω , S' é *estritamente mais forte* que S se, e somente se:

- (i) Para toda fórmula A de L_ω ,
 $\vdash_S A \Rightarrow \vdash_{S'} A$;

- (ii) Existe uma fórmula B de $\mathcal{L}_\omega$, tal que
 $\vdash_{S^*} B$ e $\nvdash_S B$.

Teorema 1.15. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Cada um dos cálculos da hierarquia C_n , $1 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais forte do que os cálculos que o sucedem na hierarquia. $\square$

Teorema 1.16. (da Costa 1974)

Os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são consistentes. $\square$

Teorema 1.17. (A. I. Arruda, de acordo com da Costa 1974, p. 501 e Arruda 1975a)

Os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, não são decidíveis por matrizes finitas. $\square$

Teorema 1.18. (Fidel 1977)

Os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são decidíveis.

Definição 1.19. Um sistema formal S é *finitamente trivializável* se, e somente se, existe uma fórmula da linguagem de S que, acrescentada ao mesmo como axioma, torna-o trivial; caso contrário, S é dito *infinitamente trivializável*.

Teorema 1.20. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são finitamente trivializáveis. $\square$

Teorema 1.21. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

O sistema C_ω é infinitamente trivializável. $\square$

Observação 1.22. O Teorema do *Replacement*¹⁴ (ou Teorema da Substitutividade de Equivalentes) não é válido, em geral, em C_n , $1 \leq n \leq \omega$ (Alves 1976).

Por exemplo:

$$(\neg A \wedge A) \leftrightarrow (A \wedge \neg A) \not\vdash_{C_1} \neg(\neg A \wedge A) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A)$$

$$(\neg A^{n-1} \wedge A^{n-1}) \leftrightarrow (A^{n-1} \wedge \neg A^{n-1}) \not\vdash_{C_1} \neg(\neg A^{n-1} \wedge A^{n-1})^{(n)} \leftrightarrow \neg(A^{n-1} \wedge \neg A^{n-1})^{(n)}$$

1.1.3 Os sistemas C_n^* , $0 \leq n \leq \omega$

De forma análoga à construção da hierarquia dos cálculos proposicionais paraconsistentes, pode-se construir a correspondente hierarquia dos cálculos de predicados (ou cálculos quantificacionais) C_n^* , $0 \leq n \leq \omega$, em que C_0^* é o cálculo de predicados clássico, e C_n^* é paraconsistente, para todo $1 \leq n \leq \omega$.

A linguagem dos cálculos de predicados paraconsistentes de primeira ordem C_n^* , $1 \leq n \leq \omega$, denotada por L_n^* , é uma extensão da linguagem L_n dos cálculos proposicionais paraconsistentes C_n correspondentes, $1 \leq n \leq \omega$.

I. Símbolos primitivos:

- Uma família enumerável de variáveis individuais, $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots$;
- Para cada m , $m > 0$, uma família enumerável de símbolos de predicados m -ários, $p^m, q^m, r^m, \dots$;
- Para cada m , $m > 0$, uma família enumerável de símbolos de funções m -ários, $f^m, g^m, \dots$.

Os símbolos de funções 0-ários são chamados constantes individuais, e

¹⁴ “Seja A uma fórmula do sistema formal S e A' obtida substituindo-se algumas ocorrências de B_1 , em A , por B_1' . Se $B_1 \leftrightarrow B_1'$, então $A \leftrightarrow A'$ é um teorema de S .”

denotados por $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots$;

- Conectivos lógicos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), e $\rightarrow$ (implicação);
- Quantificadores: $\forall$ (quantificador universal), e $\exists$ (quantificador existencial);
- Símbolos auxiliares: $(, ,)$.

II. As noções de *termo* e de *fórmula* são as usuais, de Kleene 1952:

II-i) Termos

II.i-a) Variáveis individuais $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ são termos.

II.i-b) Constantes individuais são termos.

II.i-c) Se $t_1, t_2, \dots, t_m$ são termos e f é um símbolo funcional m -ário, então $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ é um termo.

II.i-d) Um termo de $\mathcal{L}^*$ é qualquer uma de suas expressões que possa ser obtida exclusivamente por II.i-a,b,c.

II-ii) Fórmulas

II.ii-a) Se p^m é um símbolo de predicados m -ário de $\mathcal{L}^*$, $m > 0$, e $t_1, \dots, t_m$ são termos, então $p^m(t_1, \dots, t_m)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}^*$, dita *fórmula atômica*.

II.ii-b) Se A é uma fórmula, então $\neg A$ é fórmula.

II.ii-c) Se A e B são fórmulas, então $A \# B$ é fórmula, para $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

II.ii-d) Se $A(x)$ é uma fórmula e x é uma variável individual, então $\exists x A(x)$ e $\forall x A(x)$ são fórmulas.

II.ii-e) As expressões de $\mathcal{L}^*$ que são fórmulas são aquelas, e somente aquelas, obtidas por II.ii-a, b, c, d.

Observamos que os operadores de negação $\neg^*$ e $\neg^{(n)}$, os operadores “n” e “(n)” e o símbolo de equivalência “ $\leftrightarrow$ ” são introduzidos por definição, como em C_1 .

As noções de *fórmula sem variáveis* (ou *fórmula livre de variáveis*), *escopo* de um quantificador, *ocorrência livre* e *ocorrência ligada* de uma variável em uma fórmula, *fórmula aberta*, *fórmula fechada*, etc., assim como as notações e convenções, são as usuais, como em **Kleene 1952**.

Substituições de uma variável por um termo, ou de um termo por outro termo, numa fórmula, são definidas como usualmente. Designaremos por $t_x(t_1)$ o termo obtido, a partir do termo t , substituindo cada ocorrência da variável x pelo termo t_1 , e designaremos por $A_x(t_1)$ a fórmula obtida, a partir da fórmula A , substituindo cada ocorrência livre da variável x em A pelo termo t_1 (supondo-se que t_1 possa substituir x , isto é, que t_1 seja livre para x em $A(x)$).

Os *axiomas e regras de dedução* do sistema C_1^* são os de C_1 , acrescidos dos seguintes:

Axioma 13. $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$, com t livre para x em $A(x)$.

Axioma 14. $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$, com t livre para x em $A(x)$.

Axioma 15. $\forall x (A(x))^0 \rightarrow (\forall x A(x))^0$.

Axioma 16. $\forall x (A(x))^0 \rightarrow (\exists x A(x))^0$.

Axioma 17. Se A e B são duas fórmulas congruentes¹⁵, ou uma pode ser obtida da outra pela eliminação de quantificadores vácuos, então $A \leftrightarrow B$.

Regra 2.
$$\frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x B(x)}$$
, onde x não ocorre livre em A .

¹⁵ Conforme **Kleene 1952**, duas fórmulas são *congruentes* quando diferem apenas nas variáveis ligadas, estando essas variáveis ligadas aos quantificadores correspondentes.

Regra 3. $\frac{A(x) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B}$, onde x não ocorre livre em B .

Os *axiomas e regras de dedução* dos cálculos C_n^* , $1 < n < \omega$, são os de C_1^* , substituindo-se os Axiomas 15 e 16, para cada n , $1 \leq n < \omega$, por:

Axioma 15'. $\forall x (A(x))^{(n)} \rightarrow (\forall x A(x))^{(n)}$.

Axioma 16'. $\forall x (A(x))^{(n)} \rightarrow (\exists x A(x))^{(n)}$.

Os *axiomas e regras de dedução* do cálculo C_ω^* são os axiomas e regras de dedução do cálculo proposicional C_ω , acrescidos de:

Axioma 13, Axioma 14 e Axioma 17.

Regra 2.

Regra 3.

O cálculo de predicados clássico de primeira ordem, como sabemos, pode ser introduzido pelos Axiomas 1-9, 13, 14, 17 e as Regras 1, 2, 3, acrescentando-se o Princípio da Redução ao Absurdo: Axioma 10'.

Nesse sentido, o cálculo de predicados clássico pode ser considerado como o sistema C_0^* da hierarquia C_n^* , $0 \leq n \leq \omega$.

1.1.4 Os sistemas $C_n^=$, $0 \leq n \leq \omega$

Acrescentando-se à linguagem L^* dos sistemas quantificacionais C_n^* , $0 \leq n \leq \omega$, o símbolo de predicado binário de igualdade, $=$, obtemos a *linguagem* $L^=$ dos cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$, $0 \leq n \leq \omega$.

Na definição de *fórmula* de $L^=$ temos a cláusula adicional:

- Se t_1 e t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_0^=$.

Os *axiomas e regras de dedução* de $C_1^=$ são os de C_1^* , acrescentando-se os axiomas seguintes, com as variáveis sujeitas às restrições usuais:

Axioma 18. $\forall x (x = x)$.

Axioma 19. $x = y \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))$ (com y livre para x em $A(x)$).

Os *axiomas e regras* de $C_n^=$, $1 < n < \omega$, são os de C_n^* , $1 < n < \omega$, acrescentando-se os Axiomas 18 e 19.

Os *axiomas e regras* de $C_\omega^=$ são os de C_ω^* , acrescentando-se os Axiomas 18 e 19.

Enunciamos, a seguir, alguns resultados relativos ao cálculo $C_1^=$ e aos cálculos $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 1.23. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Os seguintes esquemas de fórmulas de $\mathcal{L}_0^=$ são teoremas de $C_1^=$:

- (i) $A \vee \neg^* A$;
- (ii) $\neg^* \neg^* A \leftrightarrow A$;
- (iii) $A \rightarrow (\neg^* A \rightarrow B)$;
- (iv) $(A \wedge \neg^* A) \rightarrow B$;
- (v) $A^{\circ\circ}$;
- (vi) $A^\circ \rightarrow (\neg A)^\circ$;

- (vii) $\exists x (A(x) \# B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \# \exists x B(x)$, com $\# \in \{\wedge, \vee\}$;
- (viii) $\forall x A(x) \# \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \# B(x))$, com $\# \in \{\wedge, \vee\}$;
- (ix) $\forall x(A(x))^{(1)} \vdash_{C_1} \neg \exists x \neg A(x) \leftrightarrow \forall x A(x)$;
- (x) $\forall x (A(x))^{(1)} \vdash_{C_1} \neg \forall x \neg A(x) \leftrightarrow \exists x A(x)$;
- (xi) $\forall x (A(x))^{(1)} \vdash_{C_1} \neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$;
- (xii) $\forall x (A(x))^{(1)} \vdash_{C_1} \exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$. $\square$

O Metateorema da Dedução é demonstrável (da Costa 1963a; ver da Costa 1993) para $C_1^=$, bem como para os sistemas $C_n^=$, $1 < n \leq \omega$.

Teorema 1.24. Metateorema da Dedução

Se Γ é um conjunto de fórmulas, então $\Gamma, A \vdash_{C_n} B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{C_n} A \rightarrow B$, $1 \leq n \leq \omega$. $\square$

Teorema 1.25. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Em $C_n^=$, $1 \leq n < \omega$, se $\Gamma, A \vdash B^{(n)}$; $\Gamma, A \vdash B$ e $\Gamma, A \vdash \neg B$, então $\Gamma \vdash \neg A$. $\square$

Teorema 1.26. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Se Γ é um conjunto de fórmulas e $A_1, A_2, \dots, A_m$ são os componentes quantificacionais primos das fórmulas de $\Gamma \cup \{A\}$, então, $\Gamma \vdash_{C_0} A$ se, e somente se, $\Gamma, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_m^{(n)} \vdash_{C_n} A$, para $1 \leq n < \omega$. $\square$

Teorema 1.27. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Cada um dos cálculos da hierarquia $C_n^=$, $0 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais forte do que os cálculos que o sucedem na hierarquia. $\square$

Teorema 1.28. (da Costa 1974)

Os sistemas $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, são consistentes. $\square$

Teorema 1.29. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Os sistemas $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, são indecidíveis. $\square$

Teorema 1.30. (da Costa 1963a; ver da Costa 1993)

Os sistemas $C_n^=$, $1 \leq n < \omega$, são finitamente trivializáveis; o sistema $C_\omega^=$ é infinitamente trivializável. $\square$

Cada um dos cálculos da hierarquia $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, é paraconsistente e constitui uma extensão conservativa de C_n^* , $1 \leq n \leq \omega$, que por sua vez é uma extensão conservativa de C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Apresentamos, na seção seguinte, uma semântica de valorações para os cálculos C_1 e $C_1^=$, que são os membros das hierarquias C_n e $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, que nos interessam.

1.1.5. Semântica de valorações para C_1 e $C_1^=$

Da Costa & Alves 1976 e Alves 1976 introduzem o conceito de valoração paraconsistente para o sistema C_1 , através de uma valoração bivalente, e um procedimento de decisão denominado de quase-matrizes. Desenvolvem uma semântica *à la* Henkin, e demonstram a correção e a completude de C_1 ; e pelo método de quase-matrizes demonstram a decidibilidade de C_1 . Alves 1976 e da Costa & Alves 1977 estendem a semântica de C_1 para os cálculos C_n , $1 < n < \omega$.

A definição de valoração paraconsistente para C_1 , introduzida por da Costa e Alves é a seguinte.

Definição 1.31. Uma C_1 – valoração é uma função do conjunto $\mathcal{F}$ de fórmulas

de C_1 em $\{0, 1\}$, isto é $v : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$, satisfazendo:

- (i) $v(A) = 0$ implica $v(\neg A) = 1$;
- (ii) $v(\neg\neg A) = 1$ implica $v(A) = 1$;
- (iii) $v(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$;
- (iv) $v(A \wedge B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = v(B) = 1$;
- (v) $v(A \rightarrow B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$;
- (vi) $v(B^\circ) = v(A \rightarrow B) = v(A \rightarrow \neg B) = 1$ implica $v(A) = 0$;
- (vii) $v(A^\circ) = v(B^\circ) = 1$ implica $v((A \# B)^\circ) = 1$, em que $\#$ é um dos conectivos binários $\vee$, $\rightarrow$ ou $\wedge$.

Da Costa & Alves 1977 apresenta uma generalização da semântica de da Costa e Alves (para C_1) para os cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$, e demonstra que os sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$, são corretos e completos, relativamente a essa semântica. Introduzem uma pequena alteração na formulação da quase-matriz, no caso da negação de uma fórmula A que tem valoração $v(A) = 1$.

Loparić & Alves 1980 modifica algumas das condições da definição de valoração paraconsistente de da Costa e Alves, e com um procedimento de decisão, via quase-matrizes, demonstra a correção, completude e decidibilidade dos sistemas C_n , $1 \leq n < \omega$.

Loparić 1986, baseado em **da Costa & Alves 1977**, introduz uma semântica para o sistema C_ω e prova a completude, a correção e a decidibilidade de C_ω (resultado apresentado em **Alves 1976**, p. 80-84).

Teorema 1.32. Os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são corretos, completos e decidíveis. $\square$

A definição de valoração paraconsistente de da Costa e Alves pode ser estendida para o cálculo de predicados paraconsistente $C_1^=$, de acordo com **Arruda & da Costa 1977**.

Seja $L^=$ a linguagem de $C_1^=$, e consideremos um conjunto D não-vazio tal que:

i) Para cada símbolo de predicado m -ário p^m de $L^=$, corresponde em D uma relação m -ária p_D^m , isto é, $p_D^m \subseteq D^m$;

ii) Para cada símbolo de função m -ário f^m de $L^=$, corresponde uma operação m -ária f_D^m em D , isto é, $f_D^m: D^m \rightarrow D$.

Definição 1.33. Uma *interpretação* i para a linguagem $L^=$ em D , como introduzido acima, é uma função do conjunto $C(L^=)$ das constantes de $L^=$ em D .

Observação. Dada uma interpretação $i: C(L^=) \rightarrow D$, nós a estendemos, tal que, para cada símbolo de função m -ário f^m de $L^=$,

$$i(f^m(t_1, \dots, t_m)) = f_D^m(i(t_1), \dots, i(t_m)).$$

Dado um conjunto D não vazio, conforme **Schoenfield 1967**, definimos a *linguagem diagrama* $L^=(D)$. Essa linguagem, além dos símbolos de $L^=$, contém uma constante para cada elemento (indivíduo) do universo D , constante essa que *nomeia* o indivíduo correspondente de D .

Considerando a linguagem diagrama $L^=(D)$ e uma interpretação $i: C(L^=) \rightarrow D$, **Arruda & da Costa 1977** define uma $C_1^=$ - valoração v , baseada na interpretação i . **Moura 1978** acrescenta uma cláusula a essa definição, especialmen-

te para fórmulas atômicas. Em **da Costa, Béziau & Bueno 1998**, Capítulo 3, onde uma teoria paraconsistente de modelos é esboçada, é apresentada uma definição de valoração para o cálculo $C_1^=$.

Definição 1.34. Dados um conjunto D não vazio e uma interpretação $i: C(L^= (D)) \rightarrow D$, uma $C_1^=$ - valoração de $L^= (D)$ é uma função v_D que associa, a cada sentença (fórmula fechada) de $L^= (D)$, o valor 0 ou o valor 1, satisfazendo as seguintes cláusulas:

- (i) Para cada constante $c \in C(L^=)$ existe um único nome b de $i(c) \in D$, tal que, para qualquer sentença $A(c)$ de $L^= (D)$, $v_D(A(c)) = v_D(A(b))$. Diz-se, então, que c denota b , segundo v_D ;
- (ii) Se a e b são nomes distintos, isto é, tais que $i(a) \neq i(b)$, então $v_D(a \neq b) = 1$;
- (iii) Se p^m é um símbolo de predicado m -ário de $L^=$, então $v_D(p^m(t_1, \dots, t_m)) = 1$ se, e somente se, $(i(t_1), \dots, i(t_m)) \in p_D^m$;
- (iv) Se $v_D(A) = 0$, então $v_D(\neg A) = 1$;
- (v) Se $v_D(\neg \neg A) = 1$, então $v_D(A) = 1$;
- (vi) $v_D(A \wedge B) = 1$ se, e somente se, $v_D(A) = 1$ e $v_D(B) = 1$;
- (vii) $v_D(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $v_D(A) = 1$ ou $v_D(B) = 1$;
- (viii) $v_D(A \rightarrow B) = 1$ se, e somente se, $v_D(A) = 0$ ou $v_D(B) = 1$;
- (ix) Se $v_D(B^o) = v_D(A \rightarrow B) = v_D(A \rightarrow \neg B) = 1$, então $v_D(\neg A) = 1$;
- (x) $v_D(A^o \wedge B^o) = 1 \Rightarrow v_D((A \rightarrow B)^o \wedge (A \wedge B)^o \wedge (A \vee B)^o) = 1$;
- (xi) v_D assume o valor 1 para todo axioma quantificacional ou de igualdade, no caso de $L^=$;

- (xii) $v_D(\forall x A(x)) = 1$ se, e somente se, para toda constante c de $\mathcal{L}^=(D)$, $v_D(A(c)) = 1$;
- (xiii) $v_D(\exists x A(x)) = 1$ se, e somente se, existe c , constante de $\mathcal{L}^=(D)$, tal que $v_D(A(c)) = 1$;
- (xiv) Se v_D confere o valor 1 às premissas de uma regra primitiva de dedução, então a conclusão também tem valor 1.

As noções de *fórmula fechada válida* segundo uma interpretação, *fórmula válida*, *conjunto trivial* de fórmulas, etc., são as usuais.

Com a semântica acima, demonstra-se a correção e a completude do sistema $C_1^=$ de da Costa.

Teorema 1.35. (Arruda & da Costa 1977)

O cálculo paraconsistente de predicados com igualdade $C_1^=$ é correto e completo. $\square$

Em $C_1^=$ não valem, em geral, algumas propriedades clássicas importantes.

Teorema 1.36. Os seguintes esquemas de fórmulas não são demonstráveis em C_n , $1 \leq n \leq \omega$:

- (i) $\neg(A \wedge \neg A)$;
- (ii) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$;
- (iii) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- (iv) $A \rightarrow \neg\neg A$;

- (v) $(A \vee \neg A)^{(n)}$
- (vi) $(A \wedge \neg A) \rightarrow B;$
- (vii) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B);$
- (viii) $\neg(\neg A \wedge A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A);$
- (ix) $\neg \exists x \neg A(x) \leftrightarrow \forall x A(x);$
- (x) $\neg \forall x \neg A(x) \leftrightarrow \exists x A(x);$
- (xi) $\neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x);$
- (xii) $\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x). \quad \square$

Marcos 1998 e Carnielli 1999 desenvolvem um outro tipo de semântica para os cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$, a *semântica de traduções possíveis*, concebidas por Carnielli, como generalização da noção formal de semântica, com ênfase especial para o caso do cálculo C_1 . As funções de tradução introduzidas por Carnielli e Marcos satisfazem as condições da definição de *tradução entre lógicas* introduzida por **da Silva, D'Ottaviano & Sette 1999**, da definição de tradução conservativa introduzida por **Feitosa & D'Ottaviano 2001**, e propriedades estudadas por **Feitosa 1997**.

Neste trabalho, adotamos a semântica de da Costa e Alves (**da Costa & Alves 1976 e Alves 1976**).

Resultados gerais relevantes sobre as hierarquias C_n e $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, podem ser encontrados em **Arruda 1980b**, **da Costa & Marconi 1989** e **D'Ottaviano 1990**.

Conforme **Béziau 1990 e 1993**, **Feitosa 1997**, **da Costa, Béziau & Bueno 1998** e **D'Ottaviano & Feitosa 2000**, a lógica clássica é tradutível no cálculo

lo C_1^- . Assim, se F é um teorema da lógica clássica, então F^* , obtido de F pela substituição da negação clássica, $\neg$, pela negação forte, $\neg^*$, é teorema de C_1^- . Do mesmo modo, se F é uma fórmula clássica, dedutível de um conjunto Γ de fórmulas na lógica clássica, então F^* é dedutível de Γ^* , em C_1^- , no sentido de **da Silva, D'Ottaviano & Sette 1999 e Feitosa & D'Ottaviano 2001**, sendo F^* e Γ^* obtidas de F e Γ , como no primeiro caso.

Um artigo recente sobre a lógica paraconsistente em geral é **Carnielli & Marcos 2002**, em que a noção de *consistência* é tratada sob nova abordagem, conferindo às noções de não-contraditoriedade e consistência, novos e interessantes enfoques.

1.2. O Sistema Zermelo-Fraenkel

A matemática, entre o final do século XIX e início do século XX, vivia um período de notáveis avanços em áreas como a análise, a geometria e a álgebra (ver **da Costa 1992**), quando teve seus fundamentos abalados com o aparecimento de diversos paradoxos semânticos e sintáticos. O *Paradoxo de Cantor* (1895), o *Paradoxo de Burali-Forti* (1897) e o *Paradoxo de Russell* (1902), entre outros, por sua relação com a recém criada teoria ingênua de conjuntos de Cantor, representaram um forte estímulo para a formalização da *teoria de conjuntos*.

Esse processo teve início com os trabalhos de Zermelo em 1908, a introdução da *teoria de tipos* de Russell, também em 1908 e os trabalhos de Whitehead e Russell (**Principia Mathematica**), além de trabalhos posteriores de Jens T. A. Skolem [1887-1963] e Adolf A. H. Fraenkel [1891-1965], entre outros.

O sistema de Zermelo foi introduzido em 1908 (ver **Zermelo 1908 e Zermelo 1967**, tradução para o inglês do trabalho original de 1908). Em 1922, Fraenkel introduz o Axioma da Substituição (ver **Fraenkel 1922 e Fraenkel 1967**,

tradução para o inglês do trabalho original de 1922).

A linguagem da teoria Zermelo-Fraenkel (ZF) é a linguagem $L^=$ de $C_0^=$, sua lógica subjacente, com um único símbolo primitivo adicional de predicado, o símbolo de predicado binário $\in$, que expressa a noção intuitiva de pertinência de conjuntos.

Apresentamos, a seguir, os *axiomas* da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, necessários para as teorias de conjuntos paraconsistentes que constam deste trabalho.

Axioma 1_{ZF}. *Axioma da Extensionalidade*

$$\forall x \forall y (\forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \rightarrow (x = y)).$$

Se dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos, então são iguais.

Axioma 2_{ZF}. *Axioma do Conjunto Vazio*

$$\exists x \neg \exists y (y \in x).$$

Existe um conjunto que não tem elementos, o *conjunto vazio*, que é único, e que é usualmente denotado por " $\emptyset$ ".

Axioma 3_{ZF}. *Axioma do Par*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w ((w \in z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))).$$

Se x e y são conjuntos, então existe um conjunto, único, cujos elementos são exatamente x e y , e que é usualmente denotado por $\{x, y\}$.

Axioma 4_{ZF}. *Axioma da União*

$$\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow \exists w ((w \in x) \wedge (z \in w))).$$

Se x é um conjunto, então existe um conjunto y , único, que tem como elementos todos os elementos de todos os elementos de x , e que é usualmente denotado por $\bigcup x$.

Axioma 5_{ZF}. *Axioma do Conjunto Potência*

$$\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \leftrightarrow (\forall w (w \in z) \rightarrow (w \in x))).$$

Se x é um conjunto qualquer, então existe um conjunto y , único, cujos elementos são todos os conjuntos constituídos por elementos de x , isto é, y é o conjunto formado por todos os subconjuntos de x , e que é usualmente denotado por $\wp(x)$.

Axioma 6_{ZF}. *Axioma do Infinito*

$$\exists x ((\emptyset \in x) \wedge \forall y ((y \in x) \rightarrow \cup\{y, \{y\}\} \in x)).$$

Existe um conjunto infinito.

Axioma 7_{ZF}. *Axioma da Regularidade*

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y ((y \in x) \wedge \forall z ((z \in x) \rightarrow \neg(z \in y)))).$$

Todo conjunto é *bem fundado*.

Axioma 8_{ZF}. *Axioma esquema da Substituição*

$$\forall z_1 \forall z_2 \dots \forall z_k (\forall x \exists! y P(x, y, \dot{z}) \rightarrow \forall u \exists v \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in u \wedge P_{x,y,\dot{z}}(s, r, \dot{z})))).$$

Se $P(x, y, \dot{z})$ é uma fórmula na qual x e y ocorrem livres, apresentando ou não variáveis livres $z_1, z_2, \dots, z_k$, sendo $P_{x,y,\dot{z}}(s, r, \dot{z})$ resultado da substituição de x e y respectivamente por s e r , em $P(x, y, \dot{z})$, então temos que toda instância do esquema acima é um axioma.

Axioma 9_{ZF}. *Axioma esquema da Separação (ou da Abstração)*

$$\forall z_1 \forall z_2 \dots \forall z_k (\forall u \exists v \forall r ((r \in v) \leftrightarrow ((r \in u) \wedge P_{x,z}(x, z)))),$$

Dados um conjunto u qualquer e uma condição (fórmula) $P(x, z)$, na qual x ocorre livre e $z_1, \dots, z_k$ ocorrem livres ou não, existe um conjunto v que tem como elementos precisamente os elementos de u que satisfazem a condição P .

A teoria de conjuntos **ZFC – Zermelo-Fraenkel com escolha**, é a teoria cujos axiomas são os Axiomas 1_{ZF} — 9_{ZF}, adicionando-se o *Axioma da Escolha*, enunciado a seguir.

Axioma da Escolha: Para toda família não vazia C de conjuntos não-vazios, existe uma função escolha, $f : C \rightarrow \bigcup C$, tal que, para todo $x \in C$, tem-se que $f(x) \in x$.

Existem diversas formulações mais fracas do Axioma da Escolha, adequadas a diferentes situações em que pode ser aplicado. Um tratamento detalhado dessa questão é apresentado por Omar de La Cruz e Carlos Di Prisco, em *Weak forms of the Axiom of Choice and partitions of infinite sets* (<http://math.purdue.edu/odlc/articles/weakac98>, 20/08/2002).

Duas importantes formas equivalentes ao Axioma da Escolha são as seguintes:

- *Princípio da boa ordem:* Todo conjunto pode ser bem ordenado.
- *Lema de Zorn:* Se x é um conjunto parcialmente ordenado e toda cadeia em x tem limite superior, então existe um elemento maximal nesse conjunto x .

Podemos encontrar, na matemática, inúmeros resultados que depen-

dem, ainda que implicitamente, do Axioma da Escolha. Vejamos, a título de ilustração, o exemplo a seguir (Hrbacek & Jech 1984), que diz respeito à caracterização da continuidade de uma função real f , num ponto a de $\mathbb{R}$, e tem relação com este nosso trabalho.

Como é conhecido, são equivalentes as seguintes condições, que caracterizam a continuidade de uma função real f , num ponto $a \in \mathbb{R}$:

- (i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ se, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, qualquer que seja x satisfazendo $|x - a| < \delta$;
- (ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para a , a sequência $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(a)$.

Na prova de que (ii) implica (i), há a necessidade do uso do Axioma da Escolha.

Negando (i), encontramos $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o δ considerado, existe x , com $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{k}$, podemos escolher x_k tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$. Com isso, determinamos as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, a primeira convergindo para a , e a segunda não convergindo para $f(a)$, o que representa uma negação de (ii). Logo, (ii) $\rightarrow$ (i). □

Concluimos esta seção com a *Hipótese do Contínuo*, formulada e conjecturada como verdadeira por Cantor, em 1884.

A Hipótese do Contínuo afirma que *não existe conjunto com cardinal en-*

te $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$, ou, de forma equivalente, que não há número cardinal k não-enumerável, tal que $k < 2^{\aleph_0}$.

Gödel, em 1939, provou a consistência da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha com ZF; e Cohen, em 1963, provou a independência de ambos em relação aos axiomas de ZF.

Como referência para o estudo da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, sugerimos **Halmos 1974**, **Hrbacek & Jech 1984** e **Di Prisco 1997**.

1.3. TEORIAS PARACONSISTENTES DE CONJUNTOS

Zermelo propôs seu sistema de axiomas para a teoria de conjuntos de acordo com a concepção axiomática de Hilbert, com a introdução de restrições no Axioma (esquema) da Separação. Nas teorias paraconsistentes de conjuntos procura-se, em geral, eliminar parcial ou totalmente as restrições impostas a esse axioma.

O objetivo desta seção é apresentar alguns conceitos e resultados das teorias paraconsistentes de conjuntos NF_1 e CHU_1 , teorias inconsistentes e aparentemente não triviais, introduzidas por **da Costa 1963a** e **da Costa 1986**, respectivamente, e motivadas pelas teorias clássicas de conjuntos NF (New Foundations) de **Quine 1937**, e CHU de **Church 1974**, respectivamente.

A teoria CHU_1 constitui a teoria de conjuntos subjacente ao cálculo diferencial que introduziremos no Capítulo 2.

1.3.1. Os operadores de descrição (ι) e de abstração ($\wedge$)

À linguagem L^- de C_0^- , com o símbolo adicional de predicado binário “ $\in$ ”, acrescentamos, por definição contextual à la Russell, os operadores ι (descriptor) e $\wedge$ (abstrator).

Nas definições a seguir, não tornamos explícitas as restrições usuais correspondentes.

Definição 1.37. *Operador ι de descrição (descriptor)*

$$(a) \ x = \iota y F(y) =_{\text{def}} \exists y (x = y \wedge F(y) \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y));$$

$$(b) \ \iota y F(y) = x =_{\text{def}} \exists y (y = x \wedge F(y) \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y));$$

$$(c) \ \iota y F(y) = \iota x G(x) =_{\text{def}} \exists y \exists x (y = x \wedge F(y) \wedge G(x) \wedge \\ \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y) \wedge \forall t (G(t) \rightarrow t = x));$$

$$(d) \ x \in \iota y F(y) =_{\text{def}} \exists y (x \in y \wedge F(y) \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y));$$

$$(e) \ \iota y F(y) \in x =_{\text{def}} \exists y (y \in x \wedge F(y) \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y));$$

$$(f) \ \iota y F(y) \in \iota x G(x) =_{\text{def}} \exists y \exists x (y \in x \wedge F(y) \wedge G(x) \wedge \\ \wedge \forall t (F(t) \rightarrow t = y) \wedge \forall t (G(t) \rightarrow t = x)).$$

Definição 1.38. *Operador $\hat{}$ de abstração (abstrator simples)*

$$\hat{x}F(x) =_{\text{def}} \iota y \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)).$$

Observação. O *classificador*, denotado por $\{x: F(x)\}$, tem definição idêntica à do abstrator:

$$\{x: F(x)\} =_{\text{def}} \hat{x}F(x).$$

Assim sendo, as duas expressões são sinônimas.

A variável y é considerada ligada em $\iota y F(y)$, sendo $F(y)$ dito o escopo

de ιy , assim como a variável x é considerada ligada em $\hat{x} F(x)$, sendo $F(x)$ dito o escopo de $\hat{x}$. Assim, não havendo em $F(y)$ variável livre distinta de y , ou em $F(x)$ variável livre distinta de x , temos que $\iota y F(y)$ e $\hat{x} F(x)$ não possuem variáveis livres; se existe em $F(y)$ uma variável livre x , distinta de y , então x é livre no termo $\iota y F(y)$, sendo válida observação análoga para uma variável y em $\hat{x} F(x)$.

Definição 1.39.

- (i) $\{x_1, x_2\} =_{\text{def}} \hat{x} (x = x_1 \vee x = x_2)$
- (ii) $\{x\} =_{\text{def}} \{x, x\}$
- (iii) $x \notin y =_{\text{def}} \neg(x \in y)$

Adotada uma determinada definição de n -upla ordenada, definimos o *abstrator relacional*.

Definição 1.40. Abstrator relacional

$$\hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) =_{\text{def}} \iota y \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (t = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \wedge F(x_1, x_2, \dots, x_n))).$$

Definição 1.41. $\exists! x F(x) =_{\text{def}} \exists x (F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow x = y)).$

Os teoremas, a seguir, podem ser consultados em **da Costa, Béziau & Bueno 1998**.

Teorema 1.42. $\exists \hat{x} F(x) \leftrightarrow \exists y (\forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)) \wedge \forall z (\forall x (x \in z \leftrightarrow F(x)) \rightarrow y = z)). \square$

Teorema 1.43. Em uma teoria na qual é válido o Axioma da Extensionalidade:

$$\exists x F(x) \leftrightarrow \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)). \quad \square$$

1.3.2. A Teoria de Conjuntos NF_0

A teoria de conjuntos NF de Quine, que chamamos NF_0 , pode ser considerada como uma combinação da teoria de tipos e da teoria de conjuntos. Sua denominação é extraída do título do artigo *New foundations for mathematical logic*, no qual foi introduzida por Quine, em 1937.

Um dos objetivos de Quine era estabelecer uma teoria de conjuntos, distinta da teoria ZF, livre dos paradoxos originais da teoria ingênua de Cantor.

A teoria NF trata de conjuntos, e nela existe o conjunto universal, ao contrário de ZF, na qual, como é sabido, não existe conjunto universal.

A lógica subjacente a NF é o cálculo clássico de predicados com igualdade C_0^- , e sua linguagem é a de ZF, com a introdução dos operadores ι e $\wedge$, por definição contextual, e do conceito de fórmula estratificada.

São dois os axiomas específicos de NF: o Axioma da Extensionalidade e uma versão modificada do Axioma (esquema) da Separação.

Definição 1.44. *Fórmula estratificada*

Uma fórmula F é dita *estratificada* se é possível atribuir a cada ocorrência de cada variável em F um índice inteiro, tal que:

a) Se x é uma variável e F' é uma fórmula que é parte de F , então a toda ocorrência de x que é livre em F' é atribuído o mesmo índice;

b) Se x é uma variável que ocorre livre em uma fórmula F' , então em cada ocorrência particular (se houver) de $\forall x F'(x)$ ou $\iota x F'(x)$ como uma parte de

F, à ocorrência de x explicitamente indicada no prefixo $\forall x$ ou ιx é atribuído o mesmo índice que às ocorrências livres de x naquela ocorrência particular de F';

c) Em cada ocorrência em F de uma parte da forma $(x \in y)$, $(\iota x F' \in y)$, $(x \in \iota y F'')$, ou $(\iota x F' \in \iota y F'')$ na qual x e y são variáveis e F' e F'' são fórmulas, o índice atribuído à ocorrência de y que é explicitamente indicada é exatamente uma unidade maior que o índice atribuído à ocorrência de x que é explicitamente indicada.

Axioma 1_{NF₀}. *Axioma da Extensionalidade (E)*

$$\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y.$$

Axioma 2_{NF₀}. *Axioma da Separação Estratificada (SE)*

$$\exists y \forall x ((x \in y) \leftrightarrow F(x)), \text{ onde } F \text{ é uma fórmula estratificada.}$$

Como a fórmula $x = x$ é estratificada, podemos definir em NF_0 o conjunto vazio e o conjunto universal.

Rosser 1953 introduz a teoria NF de Quine, considerando o descritor ι como um novo símbolo primitivo da linguagem $L^=$ e discute o significado da estratificação de fórmulas e da atribuição de índices às suas variáveis. Uma versão modificada de NF é introduzida por Rosser, com o acréscimo de um novo axioma, conhecido como *Axioma de Contagem*.

Forster 1995 (primeira edição em 1992) trata em geral de teorias de conjuntos com um conjunto universal, e dá especial atenção à teoria NF.

Apresentamos, a seguir, algumas definições e resultados importantes de NF_0 , indicando como referências, **Rosser 1953**, **Forster 1995** e **da Costa, Béziau & Bueno 1998**.

Definição 1.45.

- (i) $x \subseteq y =_{\text{def}} \forall t (t \in x \rightarrow t \in y)$;
- (ii) $\{x, y, z\} =_{\text{def}} \hat{v} (v = x \vee v = y \vee v = z)$;
- (iii) $V =_{\text{def}} \hat{x} (x = x)$;
- (iv) $\Lambda =_{\text{def}} \hat{x} (x \neq x)$;
- (v) $x \cup y =_{\text{def}} \hat{v} (v \in x \vee v \in y)$;
- (vi) $x \cap y =_{\text{def}} \hat{v} (v \in x \wedge v \in y)$;
- (vii) $\bar{x} =_{\text{def}} \hat{v} (v \notin x)$;
- (viii) $x - y =_{\text{def}} x \cap \bar{y}$;
- (ix) $m + n =_{\text{def}} \hat{x} \exists y \exists z (y \in m \wedge z \in n \wedge y \cap z = \Lambda \wedge y \cup z = x)$;
- (x) $0 =_{\text{def}} \{ \Lambda \}$;
- (xi) $1 =_{\text{def}} \hat{x} \exists y (x = \{y\})$;
- (xii) $2 =_{\text{def}} 1 + 1$;
- (xiii) $3 =_{\text{def}} 2 + 1$;
- (xiv) $N_n =_{\text{def}} \hat{z} \forall x ((0 \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y + 1 \in x)) \rightarrow z \in x)$;
- (xv) $m < n =_{\text{def}} \exists z (z \in N_n \wedge n = m + z + 1)$;
- (xvi) $m \leq n =_{\text{def}} m < n \vee m = n$;
- (xvii) $m > n =_{\text{def}} n < m$;
- (xviii) $m \geq n =_{\text{def}} n \leq m$;

$$(xix) \quad \langle x, y \rangle =_{\text{def}} \{\{x\}, \{x, y\}\}^{16};$$

$$(xx) \quad \text{Rel}(x) =_{\text{def}} \forall z (z \in x \rightarrow \exists y \exists t (z = \langle y, t \rangle)).$$

Teorema 1.46. São demonstráveis em NF_0 :

- (i) $x \subseteq x$;
- (ii) $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y$;
- (iii) $x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$;
- (iv) $x \subseteq V$;
- (v) $\Lambda \subseteq x$;
- (vi) $\Lambda \neq V$;
- (vii) $\exists \hat{x} F(x)$, se $F(x)$ for estratificada;
- (viii) $\exists \hat{x} F(x) \rightarrow \forall y ((y = \hat{x} F(x)) \leftrightarrow \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)))$;
- (ix) $\exists \hat{x} (x = x)$;
- (x) $\exists V$;
- (xi) $\exists \hat{x} (x \neq x)$;
- (xii) $\exists \Lambda$;
- (xiii) $\forall x \forall y \exists \hat{t} (t \in x \vee t \in y)$;
- (xiv) $\forall x \forall y \exists \hat{t} (t \in x \wedge t \in y)$;
- (xv) $\exists \{x, y\}$;
- (xvi) $\forall y \exists \hat{x} (x \notin y)$;

¹⁶ Definição de par ordenado de Kuratowski, adotada por Rosser 1953 – não coincide com a definição original de Quine 1937.

(xvii) $\exists \bar{x}$;

(xviii) $\forall x (x = x \leftrightarrow x \in V)$;

(xix) $\forall x (x \neq x \leftrightarrow x \in \Lambda)$. $\square$

Em geral, podem ser introduzidas em NF_0 as definições usuais da teoria ZF, bem como podem ser demonstradas as relações usuais da teoria das álgebras de Boole.

Teorema 1.47. $\vdash_{NF_0} \exists x (x \text{ é infinito})$. $\square$

O sistema NF_0 possui certas características originais. Como a classe V de todos os conjuntos é um conjunto, o conjunto das partes de V é um subconjunto de V e, portanto, o Teorema de Cantor não é válido em geral, não ocorrendo em NF_0 o Paradoxo de Cantor; porém, o teorema permanece válido para os chamados conjuntos cantorianos - conjuntos A tais que $\# A = \# \overline{\wp_1(A)}$, em que $\wp_1(A)$ representa o conjunto das partes de A com exatamente um elemento cada (ver **Rosser 1953**).

Specker, em 1953, mostrou que o Axioma da Escolha, em sua formulação usual, é incompatível com NF_0 . Entretanto, aparentemente, certas formas fracas desse axioma não causam dificuldades, sendo possível, com sua inclusão no sistema, desenvolver boa parte da matemática tradicional (ver **Rosser 1953**).

Entre os subsistemas de NF_0 , um dos mais interessantes, introduzido por Jensen, em 1969, é o sistema NFU - *New Foundations with Urelements* -, que é consistente e compatível com o Axioma da Escolha (ver **Forster 1995**).

Concluimos esta seção observando que, em vez de C_0^- , poderíamos ter empregado o cálculo de descrições D_0 de da Costa, em cuja linguagem o símbo-

lo de descritor τ é introduzido como símbolo primitivo, como lógica subjacente de NF_0 .

Não entraremos em maiores detalhes, pois os operadores de descrição e de abstração, τ e $\wedge$, podem sempre ser definidos contextualmente quando não pertencem à linguagem da teoria de conjuntos, e do ponto de vista da consistência, tanto faz usar $C_0^=$ ou D_0 como lógica subjacente de NF_0 .

1.3.3. A Teoria Paraconsistente de Conjuntos NF_1 ¹⁷

A hierarquia de teoria de conjuntos paraconsistentes NF_n , $1 \leq n \leq \omega$, foi introduzida por **da Costa 1963a** (ver **da Costa 1993**), tendo como lógica subjacente os correspondentes sistemas da hierarquia $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$.

Da Costa 1964c, 1965, 1967, 1971 e 1974; Arruda & da Costa 1964; e Arruda 1964, 1970a, 1970b, 1975b e 1980a estudam os sistemas NF_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Neste trabalho, interessa-nos apresentar alguns resultados relativos à teoria NF_1 .

A teoria paraconsistente de conjuntos NF_1 é introduzida substituindo-se, em NF_0 , $C_0^=$ por $C_1^=$, e fortalecendo-se o Axioma da Separação (ver **da Costa, Béziau & Bueno 1998**).

Assim, a lógica subjacente à teoria de conjuntos NF_1 é a lógica paraconsistente $C_1^=$ e seus axiomas específicos são os seguintes:

Axioma 1_{NF_1} . Axioma da Extensionalidade (E)

Idêntico ao de NF_0 .

¹⁷ A partir desta subseção substituiremos, sempre que conveniente, as expressões “se, e somente se”, e “se..., então” da metalinguagem, pelos meta-símbolos “ $\Leftrightarrow$ ” e “ $\Rightarrow$ ”.

Axioma 2_{NF1}. *Axioma da Separação Estratificada (SE)*

Idêntico ao de NF₀.

Axioma 3_{NF1}. *Axioma da Separação Paraconsistente (SP)*

$$\exists y \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in y \leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observamos que o Axioma da Separação Paraconsistente de da Costa é formulado sem qualquer restrição.

O axioma SP assegura a existência, em NF₁, das relações de Russell.

Teorema 1.48. Em NF₁ é demonstrável:

$$\exists \hat{y} \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in y \leftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \notin x_i), \text{ com } 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

Denotando-se por $r_{n,i}$ o conjunto do teorema acima, temos os resultados seguintes, observando-se que no caso em que $n = i = 1$, denotando-se $r_{1,1}$ por r , temos a formulação usual do Paradoxo de Russell.

Teorema 1.49. Em NF₁ são demonstráveis:

- (i) $r_{n,i} \in r_{n,i} \leftrightarrow r_{n,i} \notin r_{n,i}$
- (ii) $r_{n,i} \in r_{n,i} \wedge r_{n,i} \notin r_{n,i}$
- (iii) $r \in r \leftrightarrow r \notin r$, com $r = r_{1,1}$
- (iv) $r \in r \wedge r \notin r. \quad \square$

Teorema 1.50. NF₁ é inconsistente. $\square$

Como no caso de sistemas apresentados anteriormente, qualquer demonstração em NF₀ continua válida em NF₁ se substituirmos a negação de NF₀ pela negação $\neg^*$.

Teorema 1.51. NF_1 pode ser considerado, em certo sentido, como uma extensão de NF_0 . $\square$

Motivado por **Arruda 1985, da Costa 1986** demonstra o resultado seguinte.

Teorema 1.52. A teoria NF_1 é não-trivial se, e somente se, NF_0 é consistente. $\square$

Temos, portanto, que a teoria de conjuntos NF_1 de da Costa – bem como as teorias NF_i , para $1 < i \leq \omega$ -, é inconsistente e aparentemente não-trivial.

Observamos que, nas teorias paraconsistentes de conjuntos, definições envolvendo símbolos de negação ocorrem usualmente aos pares - uma encerrando a negação fraca, $\neg$, e outra a negação forte, $\neg^*$.

Convencionalmente, utilizaremos o asterisco para o segundo tipo de definição. Exemplo:

- (i) $x \notin y =_{\text{def}} \neg(x \in y)$
- (ii) $x \notin^* y =_{\text{def}} \neg^*(x \in y)$
- (iii) $\emptyset =_{\text{def}} \{x: \neg(x = x)\}$ (ou $\emptyset =_{\text{def}} \{x: x \neq x\}$)
- (iv) $\emptyset^* =_{\text{def}} \{x: \neg^*(x = x)\}$ (ou $\emptyset^* =_{\text{def}} \{x: x \neq^* x\}$).

Assim, nas teorias paraconsistentes de conjuntos das quais trataremos, com exceção das construídas sobre $C_\omega^=$, existem dois conjuntos vazios, e não apenas um.

Notemos, porém, que a noção de conjunto vazio é independente da ambivalência das definições de $\emptyset$ e $\emptyset^*$, uma vez que “ x é não-vazio” pode ser expresso pela fórmula “ $\exists y (y \in x)$ ”.

1.3.4. A Teoria de Conjuntos CHU_0

Para construir uma teoria de conjuntos que compatibilize os traços relevantes da teoria ZF – que não possui conjunto universal –, com a existência de um conjunto universal, **Church 1974** introduz, sob o título *Set theory with universal set*, uma teoria de conjuntos que chamamos CHU_0 .

A linguagem de CHU_0 é a linguagem $L^=$ de ZF, sendo que o símbolo do descritor pode ser introduzido contextualmente, ou como símbolo primitivo da linguagem $L^=$ estendida.

Apresentamos, a seguir, algumas definições básicas de CHU_0 .

Definições 1.53.

- (i) $\bar{x} =_{\text{def}} \{y: \neg(y \in x)\};$
- (ii) $1^{\circ}x =_{\text{def}} \{x\};$
- (iii) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} =_{\text{def}} \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\};$
- (iv) $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle =_{\text{def}}$ n-upla ordenada de Kuratowski;
- (v) $\Sigma^{\circ}x =_{\text{def}} 1u \forall y (y \in u \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge y \in z));$
- (vi) $\Pi^{\circ}x =_{\text{def}} 1u \forall y (y \in u \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow y \in z));$
- (vii) $\wp^{\circ}(x) =_{\text{def}} \{y: y \subseteq x\};$
- (viii) $\text{trans}(x) =_{\text{def}} \forall y (y \in x \rightarrow y \subseteq x)$ (x é um conjunto transitivo);
- (ix) $\text{con}(x) =_{\text{def}} \forall u \forall v ((u \in x \wedge v \in x) \rightarrow (u \in v \vee v \in u \vee u = v))$ (x é um conjunto conexo, em relação à pertinência);
- (x) $\text{wf}(x) =_{\text{def}} x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in x \rightarrow y \cap z = \emptyset))$ (x é um conjunto bem-fundado, em relação à pertinência);

(xi) $\text{ord}(x) =_{\text{def}} \text{trans}(x) \wedge \text{con}(x) \wedge \text{wf}(x)$ (x é um ordinal).

São os seguintes os axiomas de CHU_0 , observando-se que o Axioma da Extensionalidade, Axioma do Par e Axioma da União coincidem com os respectivos axiomas de ZF.

Axioma 1_{CHU0}. *Axioma da Extensionalidade*

$$\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z.$$

Axioma 2_{CHU0}. *Axioma do Par*

$$\exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow (x = y \vee x = z)).$$

Axioma 3_{CHU0}. *Axioma da União*

$$\exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \exists y (y \in z \wedge x \in y)).$$

Axioma 4_{CHU0}. *Axioma da Intersecção*

$$\exists v (v \in z) \rightarrow \exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow \forall y (y \in z \rightarrow x \in y)).$$

Axioma 5_{CHU0}. *Axioma do Infinito*

$$\exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow x \text{ é ordinal finito}).$$

Axioma 6_{CHU0}. *Axioma da Escolha*

$$x \neq \emptyset \rightarrow x \text{ possui função-escolha.}$$

Axioma 7_{CHU0}. *Axioma da Separação*

$$\text{wf}(v) \rightarrow \exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow ((x \in v) \wedge F(x))).$$

Axioma 8_{CHU0}. *Axioma da Substituição*

$$(\forall x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge F(x, z) \rightarrow y = z) \wedge \forall x \forall y \forall z (F(x, z) \wedge F(y, z) \rightarrow x =$$

$$y) \wedge \forall y (y \in t \leftrightarrow \exists x F(x, y)) \wedge wf(t)) \rightarrow \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \exists y F(x, y)).$$

Axioma 9_{CHU₀}. *Axioma do Conjunto Potência*

$$wf(v) \rightarrow \exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow x \subseteq v).$$

Axioma 10_{CHU₀}. *Axioma do Complemento*

$$\exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow x \notin z).$$

Observação. Denominamos *conjunto regular* a todo conjunto x tal que $wf(x)$.

Teorema 1.54. Em CHU_0 existe o conjunto universal V e o conjunto vazio $\emptyset$:

$$a) \vdash_{CHU_0} x \cup \bar{x} = V.$$

$$b) \vdash_{CHU_0} x \cap \bar{x} = \emptyset. \quad \square$$

Teorema 1.55. $\vdash_{CHU_0} V \in V. \quad \square$

Teorema 1.56. (Church 1974)

Se a teoria ZF é consistente, então CHU_0 é consistente. $\square$

Teorema 1.57. (Fraenkel & Bar-Hillel 1958)

Se CHU_0 é consistente, então ZF é consistente. $\square$

Os conjuntos regulares de CHU_0 formam um “modelo” de ZF; logo, o que se pode fazer em ZF, pode ser feito em CHU_0 (ver **da Costa, Béziau & Bueno 1998**).

1.3.5. A Teoria Paraconsistente de Conjuntos CHU_1

A teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , aparentemente não trivial, foi introduzida por **da Costa 1986**, a partir da teoria CHU_0 , de forma semelhante à qual NF_1 foi obtida a partir de NF_0 . Sua lógica subjacente, como no caso de

NF_1 , é o cálculo de predicados de primeira ordem $C_1^=$ de da Costa.

Os axiomas da teoria CHU_1 são os mesmos de CHU_0 , nos quais a negação $\neg$ é substituída pela negação forte $\neg^*$ de $C_1^=$, acrescidos de um axioma que assegura a existência do *complemento fraco* e um axioma que assegura a existência das relações de Russell, como ocorre em NF_1 :

Axioma 11_{CHU1}. *Axioma do complemento fraco*

$$\exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow x \notin z)$$

Axioma 12_{CHU1}. *Axioma da Separação Paraconsistente (SP)*

$$\exists y \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in y \leftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \notin x_i); \text{ onde } 1 \leq n \leq \omega.$$

Em CHU_1 temos, portanto, dois complementos para cada conjunto x :

- $\bar{x} =_{\text{def}} \{y: y \notin x\}$ (*complemento, complemento relativo, ou complemento fraco de um conjunto x*)

e

- $\bar{x}^* =_{\text{def}} \{y: y \notin^* x\}$ (*complemento forte de um conjunto x*).

Algumas propriedades dos conjuntos complementares fraco e forte, relativamente a intervalos reais, aparecem no Capítulo 2 - Seção 2.3.

Da mesma forma que, em CHU_1 , temos dois complementos para um conjunto qualquer, podemos definir a diferença de dois conjuntos quaisquer, de duas formas distintas.

- $x - y =_{\text{def}} x \cap \bar{y}$ (*diferença, diferença fraca, ou diferença relativa entre x e y*)

e

- $x -^* y =_{\text{def}} x \cap \bar{y}^*$ (*diferença forte entre x e y*)

O teorema seguinte expressa uma das principais propriedades de CHU_1 , válida também em NF_1 .

Teorema 1.58. CHU_1 é inconsistente (mas aparentemente não-trivial).

Demonstração

Em CHU_1 , deriva-se o Paradoxo de Russell. □

Teorema 1.59. (da Costa 1986)

CHU_0 é consistente se, e somente se, CHU_1 é não-trivial. □

Dada uma demonstração em CHU_0 , substituindo-se as negações que ocorrem em suas fórmulas pela negação forte $\neg^*$, obtém-se uma demonstração em CHU_1 .

Teorema 1.60. CHU_0 está “contido” em CHU_1 . □

Com o resultado acima, CHU_1 é um sistema muito forte, que, em certo sentido, contém CHU_0 e, portanto, também ZF.

Utilizando-se propriedades da lógica $C_1^=$, demonstra-se o resultado a seguir, que nos dá uma importante característica de NF_1 e CHU_1 .

Teorema 1.61. Em NF_1 e CHU_1 é demonstrável:

$$\forall x \forall y (\neg^* (x \notin y) \vee (x \in y \wedge x \notin y) \vee (x \notin^* y)). \quad \square$$

O Teorema 1.61 estabelece as relações possíveis entre dois conjuntos quaisquer, x e y , em NF_1 e em CHU_1 , sobre as quais podemos assim nos expressar:

- (i) x pertence a y ;
- (ii) x pertence a y e x não pertence a y ;
- (iii) x não pertence a y , no sentido clássico.

Conforme da Costa, Béziau & Bueno 1998, p. 55, a situação (ii) pode ser interpretada como uma indeterminação - difusa, como ocorre na *lógica difusa*, ou análoga a um terceiro valor de verdade de alguma lógica trivalente.

Teorema 1.62. Em NF_1 e CHU_1 são demonstráveis:

- a) $(x \in y)^0 \rightarrow ((x \in y) \wedge \neg^*(x \notin y)) \vee ((x \notin y) \wedge (x \notin^* y)).$
- b) $(x \in y)^0 \rightarrow ((x \notin y) \leftrightarrow (x \notin^* y)).$

Os teoremas de Gödel, Church e Tarski podem ser adaptados às teorias NF_1 e CHU_1 , bem como a muitos outros sistemas paraconsistentes (ver da Costa 1971).

Teorema 1.63. Em NF_1 e CHU_1 são demonstráveis:

- (i) $\forall x \exists y (x \neq^* y);$
- (ii) $\exists x \exists y (x \neq^* y);$
- (iii) $\neg^* \forall x \forall y (x = y);$
- (iv) $x \neq^* x \rightarrow F;$
- (v) $\forall x \forall y (x = y)^0 \rightarrow \neg^* \exists x (x \neq x);$
- (vi) $(x = x)^0 \rightarrow \neg^* (x \neq x);$
- (vii) $(x = y)^0 \wedge \neg(x = y)^0 \rightarrow F;$
- (viii) $\forall x \forall y (x = y)^0 \rightarrow \neg^* \exists x \exists y (x = y \wedge x \neq y);$
- (ix) $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge x_1 \in V \wedge x_2 \in V \wedge \dots \wedge x_n \in V). \quad \square$

Teorema 1.64. (Devido a Weithyser, ver da Costa & Béziau 1998)

Em NF_1 e CHU_1 são demonstráveis:

- (i) $\exists x \exists y (x = y)^0;$
- (ii) $\forall x \exists y (x = y)^0. \quad \square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades interessantes dos conjuntos de Russell, nas teorias NF_1 e CHU_1 . Recordamos que r equivale ao conjunto $r_{1,1}$.

Teorema 1.65. (Arruda 1980a).

$$\dots \subseteq \wp(\wp(r)) \subseteq \wp(r) \subseteq r. \quad \square$$

Teorema 1.66. (Arruda & Batens 1982)

$$\forall x (\{\{x, r\}\} \in r). \quad \square$$

Teorema 1.67. (Arruda & Batens 1982)

$$\cup r = V. \quad \square$$

Corolário 1.68. Em NF_1 , r não é cantoriano. $\square$

Teorema 1.69. $\cup r_{n,i} = V. \quad \square$

Observação. Como, para todo x , $\{\{x, r\}\} \in r$, pode-se introduzir uma nova relação de pertinência em CHU_1 do modo a seguir.

$$\{\{x, r\}\} \overline{\in} \{\{y, r\}\} =_{\text{def}} x \in y.$$

Assim, conforme da Costa, Béziau & Bueno 1998, r pode ser considerado uma espécie de “modelo interno”, contendo, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, os ordinais e os cardinais - todos construídos com o uso da negação forte -, do que podemos inferir que se trata de um conjunto extremamente grande.

Teorema 1.70. r é infinito. $\square$

Definindo-se adequadamente *cardinal fortemente inacessível*, temos:

Teorema 1.71. O cardinal de $\aleph_1$ é fortemente inacessível. $\square$

Devido ao Teorema 1.60, podem ser desenvolvidas em CHU_1 (e também em NF_1), como em CHU_0 e em NF_0 , as teorias dos ordinais e dos cardinais.

Por outro lado, como o Axioma da Escolha é incompatível com NF_0 , isso também ocorre com NF_1 , o que redundaria em sua inadequação, em termos gerais, para o desenvolvimento de teorias matemáticas. E, sendo o Axioma da Escolha independente dos demais axiomas de CHU_0 , temos que esse axioma é, também, um axioma independente de CHU_1 , o que possibilita a melhor adequação desse sistema para o desenvolvimento de teorias matemáticas.

Observamos que, de acordo com **da Costa 1986**, podemos construir uma hierarquia de teorias de conjuntos CHU_n , $1 \leq n \leq \omega$, cujas lógicas subjacentes são os correspondentes sistemas C_n^ω , $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa – cada uma dessas teorias contendo a teoria CHU_0 .

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL PARA- CONSISTENTE DE DA COSTA

A *análise não-standard*¹⁸, introduzida por Abraham Robinson (ver **Robinson 1996**), pode ser considerada, sob certo ponto de vista, como uma extensão ou como uma alternativa à análise matemática clássica.

Originalmente publicada como artigo nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam*, em 1961, sob o título *Non-Standard Analysis*, essa obra é editada como livro em 1966 e, após ser revisada por Robinson em 1973, tem sua segunda edição lançada em 1974 - versão que é reeditada em 1996 (ver **Robinson 1996**).

O tratamento dispensado por Robinson às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa, segundo **Stroyan & Luxemburg 1976**, as idéias originais de Leibniz.

A lógica subjacente à análise não-standard de Robinson é uma lógica de ordem superior, com uma semântica (estruturas) não-standard¹⁹. São introduzidas por Robinson, na construção de sua análise, extensões do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais, denotadas por ${}^*\mathbb{R}$ e ${}^*\mathbb{N}$, respectivamente, e denominadas conjunto dos números hiper-reais e conjunto dos números hipernaturais (ou hiperinteiros positivos).

A análise não-standard de Robinson propicia um método alternativo, rigoroso e fecundo para a manipulação dos infinitésimos e dos infinitos.

¹⁸ A denominação *análise não-standard* deve-se, segundo Robinson, principalmente ao fato dessa teoria envolver modelos não-standard da aritmética.

¹⁹ Como referência para teoria de modelos, ver **Chang & Keisler 1992**.

A própria análise infinitesimal clássica nos garante um tratamento rigoroso dos infinitésimos e dos infinitos, interpretando-os como funções apropriadas que tendem para zero ou para o infinito, respectivamente.

Há, entretanto, reconstruções paraconsistentes do cálculo, que refletem bem certos aspectos teóricos e aplicados do cálculo clássico, como em **Mortensen 1990** (ver **da Costa, Béziau & Bueno 1998**).

Nessa outra perspectiva, da Costa propõe um cálculo diferencial paraconsistente, como uma das várias teorias inconsistentes, mas não-triviais, que podem ser desenvolvidas com o uso da lógica paraconsistente e da teoria paraconsistente de conjuntos, satisfazendo o assim denominado *Princípio de l'Hospital* (ver **da Costa 1996**):

*On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même...*²⁰

Procuramos desenvolver, neste capítulo, o cálculo diferencial paraconsistente esboçado por da Costa.

Para isso, tendo como teoria de conjuntos subjacente a teoria clássica ZF, a seguir, nos domínios da matemática tradicional, construímos duas estruturas algébricas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$, que são extensões do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais - $\mathcal{A}$ é um anel, e $\mathcal{A}^*$ um *quase-anel*, assim denominado pelo fato de sua estrutura lembrar um anel, embora suas operações não sejam definidas globalmente, mas apenas de modo parcial. Os elementos de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{A}^*$ serão denominados números hiper-reais, reais generalizados, ou, simplesmente, g-reais, dentre os quais incluem-se os números reais usuais - $\mathbb{R} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

²⁰ Simplificadamente: “duas quantidades finitas que diferem por uma quantidade infinitamente pequena, são iguais”.

Veremos que $\mathbb{N}$ constitui um contínuo não-arquimediano, sem números infinitos, e $\mathbb{N}^*$ também constitui um contínuo não-arquimediano com infinitésimos e infinitos. Além disso, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ não são linearmente ordenadas pela relação $<$.

De acordo com da Costa (ver **da Costa, Béziau & Bueno 1998**, p.91), sob certos aspectos, uma análise infinitesimal fundada em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, mesmo estritamente consistente, remete-nos às idéias dos pioneiros do cálculo, como Newton, Leibniz, os Bernoulli, de l'Hospital, etc. Incorpora, talvez, algumas das intuições de Cauchy, apresenta estruturas que têm entre suas motivações a idéia de Skolem de representar números infinitos por sucessões ou funções divergentes, e possui conexões com os trabalhos de **Schmieden & Laugwitz 1959**, e **Laugwitz 1961a** e **1961b**. Com isso, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ podem ser tomadas como base para uma sistematização da análise clássica tradicional com infinitésimos e infinitos. Neste trabalho, porém, não trataremos dessa questão.

Para o desenvolvimento de um cálculo diferencial paraconsistente satisfazendo o Princípio de l'Hospital, adotamos como teoria de conjuntos subjacente a teoria CHU_1 de da Costa, com sua lógica subjacente $C_1^=$, como introduzido por da Costa e Dória em *Novos fundamentos para o cálculo diferencial*, pré-publicação de 1990 (**da Costa & Dória 1990**), por da Costa em *Paraconsistent Mathematics*, pré-publicação de 1996 (**da Costa 1996**); e como em **da Costa, Béziau & Bueno 1998** e **da Costa 2000**.

Aplicações do cálculo diferencial paraconsistente, ilustrando como, sob determinados aspectos, pode ser considerado como uma extensão do cálculo clássico, são apresentadas no final deste capítulo.

Com o propósito de facilitar a compreensão e o manuseio das fórmulas, evitamos escrevê-las com o uso dos símbolos de descrição e de abstração.

2.1. O anel $\mathcal{A}$ dos números hiper-reais.

Nesta seção estendemos o anel $\mathbb{R}$ dos números reais ao hiperanel $\mathcal{A}$ dos números hiper-reais, através da introdução das variáveis infinitesimais e dos infinitésimos.

Sejam $I, I \subseteq \mathbb{R}$, um intervalo real fixado e $a, a \in I$, um elemento do interior de I .

Definição 2.1. *Variável infinitesimal*

Fixados o intervalo real I e o ponto a pertencente ao interior de I , definimos uma *variável infinitesimal* como uma função real $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^{21}.$$

Com o conjunto das variáveis infinitesimais, que denotaremos por $\mathcal{O}$, podemos definir o conjunto dos números hiper-reais.

Exemplos. É fácil ver, fixados um intervalo real I e um ponto a do interior de I , que $f(x) = x - a$ e $f(x) = (ax^2)^{1/3} - a$ são variáveis infinitesimais.

Nos dois casos, a função $f(x)$ *tende a zero* quando a variável x *tende ao ponto* a .

Definição 2.2. *Conjunto dos números hiper-reais*

Fixado o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$, o *conjunto dos números hiper-reais*, denotado por $\mathcal{A}$, é assim definido:

$$\mathcal{A} =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : r \in \mathbb{R} \text{ e } f \in \mathcal{O} \}.$$

²¹ Igualmente podem ser usados limites laterais na definição das variáveis infinitesimais, observando-se que o conceito de limite aqui utilizado é o clássico.

Os números do conjunto $\mathcal{A}$ são também chamados *números reais generalizados*, ou, simplesmente, *g-reais*.

Observação. Poderíamos denotar o conjunto $\mathcal{A}$ dos números hiper-reais, acima introduzido, por $\mathcal{A}(I,a)$. Entretanto, considerando que o intervalo I e seu ponto interior a estão fixados, simplificamos a representação desse conjunto, denotando-o por $\mathcal{A}$.

Definição 2.3. *Infinitésimo*

Chama-se *infinitésimo* a todo número hiper-real da forma $\langle 0, f \rangle$, em que f é uma variável infinitesimal.

Observações.

- Para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto de hiper-reais da forma $\langle r, f \rangle$ é dito *mônada* de r , o que denotamos por $[r]$.

A mônada do zero, em particular, é o conjunto constituído pelos infinitésimos.

- Observamos que cada número $r \in \mathbb{R}$ pode ser identificado com o hiper-real da forma $\langle r, 0 \rangle$, dito um *número real standard*.

- Como a função identicamente nula $f(x) = 0$ pode ser considerada uma variável infinitesimal, então o número real 0, identificado com o hiper-real $\langle 0, 0 \rangle$, pode ser considerado um infinitésimo.

Definição 2.4. A *igualdade*, ou *identidade*, de dois números hiper-reais de $\mathcal{A}$, $\langle r, f \rangle$ e $\langle s, g \rangle$, denotada por "=", é assim definida:

$$\langle r, f \rangle = \langle s, g \rangle \text{ se, e somente se, } r = s \text{ e } f = g.$$

Definição 2.5. A *adição* (+) e a *multiplicação* (×) de dois números hiper-reais de $\mathcal{H}$, são definidas por:

$$(i) \quad \langle r, f \rangle + \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle r + s, f + g \rangle;$$

$$(ii) \quad \langle r, f \rangle \times \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle rs, rg + fs + fg \rangle.$$

Utilizamos a notação “+”, na definição anterior, tanto para representar a soma de dois números hiper-reais quanto para representar a soma de suas partes, reais ou infinitesimais. Quanto à multiplicação, utilizamos a notação “×” para o caso de dois números hiper-reais, e um ponto, normalmente omitido, para o caso de dois números reais, ou duas funções reais, ou ainda um número real e uma função real.

Observação. De acordo com a Definição 2.5, $\langle r, f \rangle = \langle r, 0 \rangle + \langle 0, f \rangle$, ou simplesmente $r + \varepsilon$, em que r denota o hiper-real $\langle r, 0 \rangle$, e ε denota o infinitésimo $\langle 0, f \rangle$. Assim, todo número hiper-real $\langle r, f \rangle$ pode ser visto como a soma de um número real standard com um infinitésimo:

$$\langle r, f \rangle = r + \varepsilon.$$

Definição 2.6. O *oposto* de um número hiper-real qualquer $\langle r, f \rangle$, que denotamos por $-\langle r, f \rangle$, é definido por:

$$-\langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle -r, -f \rangle.$$

Definição 2.7. A *subtração* (−) de dois números hiper-reais de $\mathcal{H}$ é assim definida:

$$\langle r, f \rangle - \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle r, f \rangle + (-\langle s, g \rangle) = \langle r - s, f - g \rangle.$$

Teorema 2.8. $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, com as operações “+” e “ $\cdot$ ” acima definidas e os elementos “0” e “1” representando, respectivamente, o hiper-real nulo $\langle 0, 0 \rangle$ e o hiper-real $\langle 1, 0 \rangle$, é um anel comutativo com unidade.

Demonstração

a) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ é um grupo comutativo.

a₁) Podemos verificar que a relação de igualdade e a adição de $\mathbb{R}$ estão bem definidas:

- $\langle r, f \rangle = \langle s, g \rangle \Leftrightarrow r = s$ e $f = g$, em que $r = s$ é uma igualdade em $\mathbb{R}$, e $f = g$ é uma igualdade de funções definidas num intervalo real I , com valores em $\mathbb{R}$, convergindo para 0 em $a \in I$.

- Na soma de dois números hiper-reais, $\langle r, f \rangle$ e $\langle s, g \rangle$, $r + s$ é um número real standard, uma vez que r e s são números reais standard, e $f + g$ é uma função real definida no intervalo real I , satisfazendo $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = 0$, uma vez que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

a₂) Propriedades da adição que caracterizam um grupo comutativo.

- Associatividade da adição:

A propriedade associativa é válida para $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, em decorrência da estrutura de corpo de $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ e de $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, este último o corpo das funções reais $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\lim_{x \rightarrow a \in I} f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} (\langle r, f \rangle + \langle s, g \rangle) + \langle t, h \rangle &=_{\text{def}} \langle r + s, f + g \rangle + \langle t, h \rangle \\ &=_{\text{def}} \langle (r + s) + t, (f + g) + h \rangle = \langle r + (s + t), f + (g + h) \rangle \end{aligned}$$

$$=_{\text{def}} \langle r, f \rangle + \langle s + t, g + h \rangle =_{\text{def}} \langle r, f \rangle + (\langle s, g \rangle + \langle t, h \rangle).$$

- Comutatividade da adição:

A comutatividade em $\mathcal{H}$ é, igualmente, decorrência imediata da comutatividade da adição de números reais e da adição de funções reais:

$$\langle r, f \rangle + \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle r + s, f + g \rangle = \langle s + r, g + f \rangle =_{\text{def}} \langle s, g \rangle + \langle r, f \rangle,$$

em que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g + f)(x) = 0.$$

- Existência de Elemento Neutro.

O elemento neutro da adição existe, e corresponde ao par $\langle 0, 0 \rangle$, composto, respectivamente, pelo número real zero e pela função constante zero, isto é, $0: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Usando as propriedades da soma de números reais e soma de funções reais, temos:

$$\langle 0, 0 \rangle + \langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle 0 + r, 0 + f \rangle = \langle r, f \rangle$$

e

$$\langle r, f \rangle + \langle 0, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle r + 0, f + 0 \rangle = \langle r, f \rangle.$$

Logo, $\langle 0, 0 \rangle$ é elemento neutro de $\langle \mathcal{H}, + \rangle$.

- Existência de elemento simétrico.

Todo número hiper-real possui um elemento simétrico (oposto).

Pela Definição 2.5 temos que $\langle r, f \rangle + \langle -r, -f \rangle =_{\text{def}} \langle r + (-r), f + (-f) \rangle = \langle 0, 0 \rangle$, e, analogamente, $\langle -r, -f \rangle + \langle r, f \rangle = \langle 0, 0 \rangle$.

Portanto, $\langle \mathcal{H}, + \rangle$ é um grupo comutativo.

b) Vamos mostrar agora que $\langle \mathcal{H}, \times \rangle$ é um semi-grupo comutativo.

b₁) Inicialmente verificamos que a operação “ $\times$ ” está bem definida.

Dado o produto $\langle r, f \rangle \times \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle rs, rg + fs + fg \rangle$, temos que rs é um número real standard, e rg , fs e fg são funções reais definidas em I , resultantes do produto de uma função de $\mathcal{O}$ por um número real standard, nos casos de rg e fs , e do produto de duas funções reais de $\mathcal{O}$, no caso de fg .

Observemos, agora, que

$$\lim_{x \rightarrow a} (rg)(x) = r \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ 0 \in R}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (fs)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (sf)(x) = s \left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ 0 \in R}} f(x) \right] = s0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ 0 \in R}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ 0 \in R}} g(x) = 0.$$

Além disso, $rg + fs + fg$ também é uma função de I em R , com

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (rg + fs + fg)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (rg(x) + f(x)s + f(x)g(x)) = \\ &= r \lim_{x \rightarrow a} g(x) + s \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \end{aligned}$$

Logo, a multiplicação $\times$ está bem definida.

b₂) Propriedades da multiplicação que caracterizam um semi-grupo comutativo.

• Associatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned} \langle r, f \rangle \times (\langle s, g \rangle \times \langle t, h \rangle) &=_{\text{def}} \langle r, f \rangle \times \langle st, sh + gt + gh \rangle \\ &=_{\text{def}} \langle r(st), r(sh + gt + gh) + f(st) + f(sh + gt + gh) \rangle \\ &= \langle rst, (rsh) + (rgt + fst + fgt) + (rgh + fsh + fgh) \rangle \\ &= \langle (rs)t, (rs)h + (rg + fs + fg)t + (rg + fs + fg)h \rangle \\ &=_{\text{def}} \langle rs, rg + fs + fg \rangle \times \langle t, h \rangle =_{\text{def}} (\langle r, f \rangle \times \langle s, g \rangle) \times \langle t, h \rangle. \end{aligned}$$

Logo, a multiplicação de hiper-reais é associativa.

- Comutatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned}\langle r, f \rangle \times \langle s, g \rangle &=_{\text{def}} \langle rs, rg + fs + fg \rangle \\ &= \langle sr, sf + gr + gf \rangle = \langle s, g \rangle \times \langle r, f \rangle.\end{aligned}$$

Logo, a multiplicação $\times$ é comutativa em $\mathcal{H}$.

- Existência de Elemento Neutro

Finalmente, é fácil ver que o número hiper-real $\langle 1, 0 \rangle$ é elemento neutro da multiplicação $\times$, pois $\langle r, f \rangle \times \langle 1, 0 \rangle = \langle r1, r0 + f1 + f0 \rangle = \langle r, f \rangle$, o mesmo valendo para $\langle 1, 0 \rangle \times \langle r, f \rangle$.

Portanto, $\langle \mathcal{H}, \times \rangle$ é um semi-grupo comutativo.

Concluimos, então, que $\langle \mathcal{H}, +, \times, 0, 1 \rangle$ é anel comutativo com unidade. $\square$

Observação. A estrutura de corpo $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ pode ser vista como um subanel de $\langle \mathcal{H}, +, \times, 0, 1 \rangle$, pela identificação de todo par da forma $\langle r, 0 \rangle$ com o número real r .

Definição 2.9. Os elementos do anel $\mathcal{H}$ do tipo $\langle r, f \rangle$, com $r \neq 0$ e $f(x) \neq -r$, para todo x , são inversíveis, sendo o seu inverso, denotado por $\langle r, f \rangle^{-1}$, dado por

$$\langle r, f \rangle^{-1} =_{\text{def}} \left\langle r^{-1}, \frac{-f}{r(f+r)} \right\rangle.$$

A divisão entre elementos do hiperanel $\mathcal{H}$ pode ser agora definida.

Definição 2.10. Dados dois números hiper-reais de $\mathcal{H}$, $\langle s, g \rangle$ e $\langle r, f \rangle$, com $r \neq 0$:

$$\langle s, g \rangle \div \langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle s, g \rangle \times \langle r, f \rangle^{-1}.$$

A divisão pode ser assim estendida para o caso de divisores e dividendos hiper-reais infinitesimais, $\delta = \langle 0, g \rangle$ e $\varepsilon = \langle 0, f \rangle$. Consideramos que devemos poder determinar $k = \langle r, h \rangle$, tal que

$$\langle 0, f \rangle \div \langle 0, g \rangle = \langle r, h \rangle,$$

isto é,

$$\langle 0, f \rangle = \langle r, h \rangle \times \langle 0, g \rangle = \langle 0, (r + h)g \rangle.$$

Logo, f deve ser tal que $f = (r + h)g$, e podemos escrever que

$$\langle 0, f \rangle = r\langle 0, g \rangle + n\langle 0, g \rangle, \text{ com } n = \langle 0, h \rangle.$$

Assim sendo, temos os seguintes casos:

- Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = r$, com r real standard, então

$$\langle 0, g \rangle \div \langle 0, f \rangle = \langle r, h \rangle, \text{ com } h = \frac{f}{g} - r;$$

- Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, então

$$\langle 0, g \rangle \div \langle 0, f \rangle = \langle 0, \frac{g}{f} \rangle$$

- Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ não existem, então

não existem os quocientes $\langle 0, g \rangle / \langle 0, f \rangle$, e $\langle 0, f \rangle / \langle 0, g \rangle$.

A relação de ordem “<”, de $\mathbb{R}$, pode ser estendida a $\mathcal{A}$.

Definição 2.11. $\langle r, f \rangle < \langle s, g \rangle$ se, e somente se, $r < s$, ou $r = s$ e $f(x) < g(x)$, $\forall x \in I$.

A relação de ordem $\leq$ pode ser definida em $\mathcal{A}$, como usualmente.

Definição 2.12. $\langle r, f \rangle \leq \langle s, g \rangle$ se, e somente se, $\langle r, f \rangle < \langle s, g \rangle$ ou $\langle r, f \rangle = \langle s, g \rangle$.

No hiperanel $\mathcal{A}$ a relação de ordem $<$ não é linear. Dado um número hiper-real $\langle r, f \rangle$ qualquer de $\mathcal{A}$, a variável infinitesimal pode ser nula ($f(x) = 0$, para todo x), não-negativa ($0 \leq f(x)$, para todo x), positiva ($0 < f(x)$, para todo x), não-positiva ($f(x) \leq 0$, para todo x), negativa ($f(x) < 0$, para todo x), ou nenhum dos casos (f alterna valores positivos e negativos em seu domínio). Se o último caso ocorre com as partes infinitesimais de dois números hiper-reais distintos $\langle r, f \rangle$ e $\langle r, g \rangle$, então esses números podem ser incomparáveis, segundo $<$.

Os números hiper-reais maiores (ou iguais) que 0, são os hiper-reais *positivos*, os menores que 0 são os hiper-reais *negativos*. Um infinitésimo positivo $\langle 0, f \rangle$, onde f não se anula em I , diz-se *estritamente positivo* ou *positivo estrito*; analogamente, temos os infinitésimos *estritamente negativos*. Denotamos o conjunto dos hiper-reais positivos, com o $\langle 0, 0 \rangle$, por $\mathcal{A}^+$, e o conjunto dos hiper-reais negativos com o $\langle 0, 0 \rangle$, por $\mathcal{A}^-$.

O valor absoluto de um número hiper-real pode ser definido como uma função $|\cdot|: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$.

Definição 2.13. O *valor absoluto*, ou *módulo*, de um número hiper-real $\langle r, f \rangle$ de $\mathcal{A}$, denotado por $|\langle r, f \rangle|$, é definido por:

- a) $|\langle r, f \rangle| =_{\text{def}} \langle r, f \rangle$, se $\langle 0, 0 \rangle < \langle r, f \rangle$ e $r \neq 0$;
- b) $|\langle r, f \rangle| =_{\text{def}} -\langle r, f \rangle = \langle -r, -f \rangle$, se $\langle r, f \rangle < \langle 0, 0 \rangle$ e $r \neq 0$;
- c) $|\langle 0, f \rangle| =_{\text{def}} \langle 0, \sqrt{f^2} \rangle$, com $f^2(k) = (f(k))^2$.

Definição 2.14. A *ordem* de um infinitésimo qualquer, $\langle 0, g \rangle$, relativamente a um infinitésimo $\langle 0, f \rangle$, é definida por:

a) $\langle 0, f \rangle$ e $\langle 0, g \rangle$ possuem *mesma ordem* se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$, sendo b um número real standard diferente de zero.

b) A ordem de $\langle 0, f \rangle$ é *superior* à de $\langle 0, g \rangle$ se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) $\langle 0, f \rangle$ é de *ordem k* relativamente a $\langle 0, g \rangle$ se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = b$, para b um número real standard diferente de zero.

Dois infinitésimos $\langle 0, f \rangle$ e $\langle 0, g \rangle$ são ditos *equivalentes* quando

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemplos.

a) Para o caso particular em que $a = 0$, na Definição 2.1, temos que $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x$ são variáveis infinitesimais. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, temos, também, que estas variáveis infinitesimais são equivalentes.

b) Se, na Definição 2.1, $a = 1$, temos que $f(x) = (2x - 2)/x$ e $g(x) = x - 1$ são variáveis infinitesimais. Como $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2)/x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x} = 2$, temos que as duas variáveis infinitesimais são de mesma ordem, mas não equivalentes.

c) Se, na Definição 2.1, $a = 0$, é imediato ver que $f(x) = x^2$ é uma variável infinitesimal, com ordem superior à ordem da variável infinitesimal $g(x) = x$. Neste caso, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x)^2} = 1$, temos que a ordem de $f(x) = x^2$, relativamente a $g(x) = x$, é 2.

Podemos verificar, sem dificuldades, que a soma de um infinitésimo $\langle 0, f \rangle$ com um infinitésimo $\langle 0, g \rangle$, de ordem superior, resulta num infinitésimo de mesma ordem que $\langle 0, f \rangle$, e que a diferença de dois infinitésimos equivalentes resulta num infinitésimo de ordem superior à dos mesmos. O teorema seguinte está relacionado com o primeiro caso.

Teorema 2.15. Se $\langle 0, f_1 \rangle, \langle 0, f_2 \rangle, \dots, \langle 0, f_k \rangle$ são infinitésimos de ordens distintas entre si, então sua soma é um infinitésimo equivalente ao de menor ordem, f_j , $1 \leq j \leq k$.

Demonstração

$$\langle 0, f_1 \rangle + \dots + \langle 0, f_k \rangle = \langle 0, f_1 + \dots + f_k \rangle$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1 + \dots + f_k)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = 0 + \dots + 0 = 0,$$

em que $f_1 + \dots + f_k$ é uma função de I em $\mathbb{R}$.

Logo, a soma dos infinitésimos é um infinitésimo.

$$\text{Agora, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f_1 + \dots + f_j + \dots + f_k)(x)}{f_j(x)} =$$

$$\overbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_j(x)}}^0 + \dots + \overbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_j(x)}{f_j(x)}}^1 + \dots + \overbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_k(x)}{f_j(x)}}^0 = 1.$$

Logo, $\langle 0, f_1 \rangle + \dots + \langle 0, f_k \rangle$ é equivalente a $\langle 0, f_j \rangle$. □

Observação. O hiperanel $\mathcal{H}$ é uma estrutura *não-arquimediana*, uma vez que dado um número hiper-real positivo r qualquer, não podemos afirmar que exista um número natural standard n tal que seja válida a desigualdade $0 < 1/n < r$.

O hiperanel $\mathcal{H}$ não é anel de integridade, pois possui divisores de zero.

satisfeitas por essa estrutura, razão pela qual iremos denominá-la, conforme da Costa & Doria 1990, da Costa 1996 e da Costa, Béziau & Bueno 1998, um *quase-anel*.

Utilizaremos, para as relações e operações de $\mathcal{A}^*$, as mesmas notações adotadas para as relações e operações de $\mathcal{A}$.

Definição 2.20. *Igualdade (identidade)*

Dois números hiper-reais infinitos $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$ são *iguais*, ou *idênticos*, $\langle u, 0 \rangle = \langle v, 0 \rangle$, se, e somente se, as variáveis infinitas u e v são iguais, isto é, $u = v$, com possível exceção do ponto a .

Dois números hiper-reais finitos de $\mathcal{A}^*$ são iguais, de acordo com a Definição 2.4, quando suas respectivas partes reais e infinitesimais são iguais entre si.

Observação. Nas definições das operações em $\mathcal{A}^*$, a seguir, as condições relativas aos casos envolvendo apenas elementos finitos coincidem com as condições já introduzidas nas definições das operações correspondentes em $\mathcal{A}$.

Definição 2.21. As operações de *adição* e *multiplicação* de dois números hiper-reais de $\mathcal{A}^*$ são definidas, com $\langle r, f \rangle$ e $\langle s, g \rangle$ finitos, e $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$ infinitos, por:

• **Adição (+)**

$$(i) \quad \langle r, f \rangle + \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle s, g \rangle + \langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle r + s, f + g \rangle$$

$$(ii) \quad \langle v, 0 \rangle + \langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle r, f \rangle + \langle v, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle v + r, 0 \rangle$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} &\langle u, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle v, 0 \rangle + \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle u + v, 0 \rangle, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} (u + v) = \infty \\ &\langle u, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle = \langle v, 0 \rangle + \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle r, f \rangle, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} (u + v) = r, \text{ em que } f = r - (u + v) \\ &\langle u, 0 \rangle + \langle v, 0 \rangle \text{ e } \langle v, 0 \rangle + \langle u, 0 \rangle \text{ não estão definidas nos demais casos} \end{aligned}$$

- Multiplicação ($\times$)

$$(i) \quad \langle r, f \rangle \times \langle s, g \rangle =_{\text{def}} \langle rs, rg + fs + fg \rangle$$

$$(ii) \quad \langle u, 0 \rangle \times \langle v, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle v, 0 \rangle \times \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle uv, 0 \rangle$$

$$(iii) \quad \langle u, 0 \rangle \times \langle r, f \rangle =_{\text{def}} \langle r, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle ur, 0 \rangle, \text{ se } r \neq 0.$$

$$(iv) \quad \begin{aligned} &\langle u, 0 \rangle \times \langle 0, f \rangle =_{\text{def}} \langle 0, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle uf, 0 \rangle, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} (uf) = \infty \\ &\langle u, 0 \rangle \times \langle 0, f \rangle =_{\text{def}} \langle 0, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle 0, uf \rangle, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} (uf) = 0 \end{aligned}$$

$\langle u, 0 \rangle \times \langle 0, f \rangle$ e $\langle 0, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle$ não estão definidas nos demais casos.

É fácil a verificação de que as operações de adição e multiplicação em $\mathcal{A}^*$ são associativas e comutativas.

Definição 2.22. O *oposto* de um número hiper-real infinito $\langle u, 0 \rangle$ é o número hiper-real infinito, denotado por $-\langle u, 0 \rangle$, definido por:

$$-\langle u, 0 \rangle =_{\text{def}} \langle -u, 0 \rangle.$$

Definição 2.23. A *subtração* de dois números de $\mathcal{A}^*$ é definida pela soma do primeiro com o oposto do segundo.

Definição 2.24. Dado um número hiper-real infinito $\langle u, 0 \rangle$, seu *inverso*, denotado por $\langle u, 0 \rangle^{-1}$, é o infinitésimo $\langle 0, u^{-1} \rangle$, isto é:

$$\langle u, 0 \rangle^{-1} =_{\text{def}} \langle 0, u^{-1} \rangle,$$

com $\lim_{x \rightarrow a} u^{-1}(x) = 0$.

Analogamente, sob certas condições, se $\langle 0, f \rangle$ é um infinitésimo, então $\langle f^{-1}, 0 \rangle$ é o infinito inverso de $\langle 0, f \rangle$.

Definição 2.25. $\langle 0, f \rangle^{-1} =_{\text{def}} \langle f^{-1}, 0 \rangle$, com

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = \langle u, 0 \rangle, \text{ com } u \text{ variável infinita.}$$

O inverso de números finitos $\langle r, f \rangle$ de $\mathcal{A}^*$ é definido, como vimos anteriormente, por $\langle r, f \rangle^{-1} =_{\text{def}} \langle r^{-1}, \frac{-f}{r(f+r)} \rangle$, sob a condição de que $r(f(x) + r) \neq 0$, para todo x do intervalo I fixado.

Com o auxílio das definições acima, a operação de *divisão* entre elementos de $\mathcal{A}^*$ pode ser definida.

Definição 2.26. *Divisão entre números hiper-reais de $\mathcal{A}^*$*

O *quociente* de dois números hiper-reais infinitos de $\mathcal{A}^*$ é o resultado da multiplicação do primeiro pelo inverso do segundo.

A relação de ordem de $\mathcal{A}$, $<$, estende-se naturalmente a $\mathcal{A}^*$, e a comparação entre dois hiper-reais infinitos é feita de forma semelhante à que vimos para infinitésimos.

A seguir, estendemos a definição de valor absoluto para o conjunto $\mathcal{A}^*$, como uma função $|\cdot|: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^{**}$.

Definição 2.27. Dado um número hiper-real de $\mathcal{A}^*$, seu *valor absoluto*, ou *módulo*, é definido por:

i) Se o número é finito, $\langle r, f \rangle$, então seu valor absoluto é definido conforme a Definição 2.13.

ii) Se o número é infinito, $\langle u, 0 \rangle$, então seu valor absoluto é:

$$|\langle u, 0 \rangle| =_{\text{def}} \langle \sqrt{u^2}, 0 \rangle, \text{ com } u^2(k) =_{\text{def}} (u(k))^2.$$

Definição 2.28. Dados dois números hiper-reais infinitos $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$, temos:

(i) Os números $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$ possuem *mesma ordem* se, e somente se, dado um número hiper-real standard positivo N , existe um número hiper-real standard positivo M , com $\left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| < M$ e $\left| \frac{v(x)}{u(x)} \right| < M$, para todo $x \in I$ satisfazendo $|x - a| < N$.

(ii) O número $\langle u, 0 \rangle$ tem *ordem superior* à do número $\langle v, 0 \rangle$ se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x)}{u(x)} = 0.$$

Observações.

- Decorre do item (i) da Definição 2.28 que dois números hiper-reais infinitos $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$ são de mesma ordem se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

- Quando, no caso anterior, $b = 1$, os números infinitos $\langle u, 0 \rangle$ e $\langle v, 0 \rangle$ são *equivalentes*.

- $\mathcal{A}^*$, assim como $\mathcal{A}$, é uma estrutura não arquimediana. Dados dois números hiper-reais positivos quaisquer a e b , com $a < b$, não podemos garantir a existência de um número natural standard n tal que $b < na$, uma vez que podemos ter $b \in \mathcal{A}^* - \mathcal{A}$.

Conceitos e tópicos do cálculo tradicional podem ser expressados na linguagem de infinitésimos e infinitos de $\mathcal{A}^*$. Observamos que $\mathcal{A}^*$ constitui, de certa

forma, um modelo de um cálculo com infinitésimos e infinitos, que pode ser formulado abstratamente, através de axiomatização - ver os artigos mencionados de Schmieden e Laugwitz. Por exemplo, podemos estender a $\mathcal{R}^*$ o conceito de *intervalo*, ou, como é mais natural, o conceito de *hiperintervalo*, ou *intervalo hiper-real*.

Definição 2.29. Um *intervalo hiper-real fechado*, ou um *hiperintervalo fechado* I de $\mathcal{R}^*$ (ou de $\mathcal{R}$), determinado por dois números hiper-reais finitos, $a = \langle s, g \rangle$ e $b = \langle t, h \rangle$, com $s < t$, é um subconjunto de $\mathcal{R}^*$, denotado como no caso de intervalos reais por $[a, b]$, é definido por

$$[a, b] =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : (\langle r, f \rangle = \langle s, g \rangle) \vee (\langle r, f \rangle = \langle t, h \rangle) \vee ((r = s) \wedge (g < f)) \vee ((r = t) \wedge (f < h)) \vee (s < r < t) \}.$$

Se os extremos a e b são números reais standard, a definição acima de intervalo $[a, b]$ não apresenta maiores problemas; mas se os extremos não são números standard, então os intervalos I não possuem necessariamente as mesmas propriedades dos intervalos reais.

Como ocorre com a análise não-standard de Robinson, a presença dos infinitésimos torna o cálculo infinitesimal Dedekind - incompleto, isto é, podem existir conjuntos de números hiper-reais limitados superiormente, que não têm supremo.

Hiperintervalos abertos, hiperintervalos semi-abertos e hiperintervalos ilimitados podem, de forma análoga à clássica, ser definidos. Consideremos, a título de exemplo, a definição de hiperintervalo aberto.

Definição 2.30. Um *hiperintervalo aberto* (a, b) de $\mathcal{R}^*$, $a = \langle s, g \rangle$ e $b = \langle t, h \rangle$, é definido por

$$(a, b) =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : \langle s, g \rangle < \langle r, f \rangle < \langle t, h \rangle \}.$$

Definição 2.31. Um número hiper-real finito c é dito *ponto de aderência* de um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^*$ se, e somente se, para todo infinitésimo ε , $\varepsilon > 0$,

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset.$$

Definição 2.32. Como no caso clássico, definimos o fecho de um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\overline{B}$, como o conjunto formado por seus pontos de aderência.

Teorema 2.33. O *fecho* de um hiperintervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado $[a, b]$.

Demonstração

Basta observar que, como no caso clássico, dados infinitésimos positivos quaisquer ε_1 e ε_2 , existe um número natural n_0 tal que, se $n > n_0$, então $|(a + 1/n) - a| < \varepsilon_1$ e $|b - (b - 1/n)| < \varepsilon_2$, ou seja, a e b são pontos aderentes de $[a, b]$. Agora, se $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset (a, b)$ para todo infinitésimo positivo ε , então, como $a \leq c \leq b$, temos que c é ponto de aderência de (a, b) . Logo, todos os pontos de aderência de (a, b) pertencem ao intervalo fechado $[a, b]$, e, portanto, $\overline{(a, b)} = [a, b]$. $\square$

Como já temos um modelo clássico do cálculo com infinitésimos e infinitos $\mathbb{R}^*$, vamos ver, a seguir, como podemos delinear, a partir de $\mathbb{R}^*$, uma teoria paraconsistente do cálculo diferencial, tendo como lógica subjacente o cálculo de predicados paraconsistente $C_1^=$, e como teoria de conjuntos subjacente a teoria CHU_1 de da Costa.

Os desenvolvimentos formais são elaborados utilizando-se, muitas vezes, adaptações de **Mortensen 1990** e **Chuaqui & Suppes 1995**.

Como o cálculo paraconsistente que desenvolvemos origina-se da interpretação na estrutura clássica $\mathcal{A}^*$, ele é não-trivial - embora inconsistente -, desde que a análise clássica seja consistente.

2.3. Um Cálculo Diferencial Paraconsistente

Vamos iniciar a construção, a partir de $\mathcal{A}^*$, de uma teoria paraconsistente $\mathbb{P}$ do cálculo diferencial, proposta por da Costa.

A linguagem L de $\mathbb{P}$ é a linguagem de C_1^- , estendida à linguagem de CHU_1 , com símbolos funcionais, na qual lidamos com os elementos de $\mathcal{A}^*$. Para isso, introduzimos constantes especiais para nomear os indivíduos da estrutura $\mathcal{A}^*$; o predicado $<$; as operações de $\mathcal{A}^*$; e três espécies de variáveis individuais, para denotarem, respectivamente, hiper-reais finitos - $r, s, \dots$ -, infinitésimos - $\delta, \varepsilon, \dots$ -, e infinitos.

A lógica subjacente a $\mathbb{P}$ é o cálculo paraconsistente de predicados de primeira ordem com igualdade C_1^- , e a teoria de conjuntos subjacente é a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 de da Costa.

A partir de agora, chamaremos indistintamente *hiper-reais* de $\mathcal{A}^*$ aos indivíduos - números hiper-reais - da estrutura de quase anel $\mathcal{A}^*$ (e do anel $\mathcal{A}$), e aos nomes de indivíduos de $\mathcal{A}^*$, da linguagem estendida de C_1^- .

Introduzimos em L , a seguir, por definição, o predicado " $\equiv$ ".

Definição 2.34. O predicado de *igualdade generalizada*, ou *identidade generalizada*, denotado por " $\equiv$ ", é definido por:

$$t_1 \equiv t_2 \stackrel{\text{def}}{=} t_1 - t_2 = \varepsilon,$$

com t_1 e t_2 termos da linguagem, ε infinitésimo, $=$ o predicado primitivo de igualdade de L .

Além disso, para $\neg(t_1 \equiv t_2)$, definimos:

$$t_1 \not\equiv t_2 =_{\text{def}} t_1 \neq t_2.$$

O conceito de valoração paraconsistente da Definição 1.34 pode ser entendido à linguagem L .

Definição 2.35. Uma valoração para L é uma função v , do conjunto das fórmulas fechadas de L em $\{0, 1\}$, satisfazendo:

- (i) As cláusulas (i) – (xiv) da Definição (1.34) ;
- (ii) Para sentenças atômicas da forma $t_1 = t_2$,
 $v(t_1 = t_2) = 1$, se $t_1 = t_2$ é válida em $\mathcal{A}^*$
e
 $v(t_1 = t_2) = 0$, em caso contrário;
- (iii) Para uma sentença qualquer P da linguagem considerada, o valor $v(P)$ é dado pela adequada combinação das propriedades anteriores.

De acordo com a definição anterior, temos que:

- (i) Para sentenças da forma $t_1 < t_2$,
 $v(t_1 < t_2) = 1$, se $t_1 < t_2$ é válida em $\mathcal{A}^*$
e
 $v(t_1 < t_2) = 0$, em caso contrário;
- (ii) Para sentenças da forma $t_1 \equiv t_2$,

$v(t_1 \equiv t_2) = 1$, se $t_1 - t_2 = \varepsilon$ é válida em $\mathcal{A}^*$, com ε infinitesimal

e

$v(t_1 \equiv t_2) = 0$, em caso contrário;

(iii) Para sentenças da forma $t_1 \neq t_2$ (isto é, $\neg(t_1 \equiv t_2)$),

$v(t_1 \neq t_2) = 1$, se $t_1 \neq t_2$ (isto é, $\neg(t_1 = t_2)$) é válida em $\mathcal{A}^*$

e

$v(t_1 \neq t_2) = 0$, em caso contrário.

Observação. A relação de ordem $<$ é *quase-linear* em $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^*$), em relação à identidade $\equiv$, o que se traduz pela fórmula seguinte, para t_1 e t_2 termos quaisquer:

$$(t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1) \vee (t_1 \equiv t_2).$$

Podemos considerar, assim, que vale para essa relação de ordem uma *quase-tricotomia*, uma vez que podemos ter $t_1 \equiv t_2$, com t_1 e t_2 apresentando as partes reais iguais e as partes infinitesimais incomparáveis.

A definição anterior de valoração, além de ser compatível com o Princípio de l'Hospital, conforme **da Costa 1996**, possibilita a verificação do caráter inconsistente de certas sentenças do cálculo paraconsistente, como $t_1 \equiv t_2$, no caso da ocorrência conjunta de $v(t_1 \equiv t_2) = 1$ e $v(\neg(t_1 \equiv t_2)) = 1$.

Estamos, agora, em condições de estender ao hiperanel $\mathcal{A}$, e ao quase-anel $\mathcal{A}^*$, alguns resultados conhecidos do cálculo diferencial clássico, bem como de introduzir alguns resultados específicos do que, como da Costa, podemos denominar um *cálculo diferencial paraconsistente* – caso da definição a seguir, de *infinitésimo quase-nilpotente de ordem k*. Veremos que se tais resultados não envolvem negação ou números reais não-standard, então são análogos a resul-

tados correspondentes do cálculo diferencial usual.

A seguir, introduzimos o conceito de infinitésimo quase-nilpotente.

Definição 2.36. Um infinitésimo $\varepsilon = \langle 0, f \rangle$ é um *infinitésimo quase-nilpotente de ordem k* , se temos:

$$\neg^* \langle \langle 0, f \rangle^m = \langle 0, 0 \rangle \rangle, \text{ se } m < k,$$

e

$$\neg \langle \langle 0, f \rangle^k = \langle 0, 0 \rangle \rangle, \text{ se } m \geq k.$$

6

Dado um hiperintervalo fechado $I = [a, b]$, com $a = \langle s, g \rangle$ e $b = \langle t, h \rangle$, podemos definir para o mesmo, em $\mathcal{A}^*$, dois conjuntos complementares, o conjunto interior, uma zona de inconsistência e duas regiões difusas, como a seguir.

Definição 2.37.

- O *conjunto complementar forte*, ou *clássico*, de $[a, b]$, que corresponde ao conjunto complementar clássico de I em $\mathcal{A}^*$, denotado por I^{**} , é definido por:

$$I^{**} =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle \in \mathcal{A}^* : \neg^* \langle \langle r, f \rangle \in I \rangle \}$$

ou seja,

$$I^{**} =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle \in \mathcal{A}^* : \langle r, f \rangle \notin^* I \}.$$

- O *conjunto complementar*, *complementar fraco*, ou *complementar relativo* de $[a, b]$, denotado por I^* , é definido por:

$$I^* =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle \in \mathcal{A}^* : \neg \langle \langle r, f \rangle \in I \rangle \}$$

ou seja,

$$I^* =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle \in \mathcal{A}^* : \langle r, f \rangle \notin I \}.$$

- O *conjunto interior* de $[a, b]$, denotado por ∇I , é definido por:

$$\nabla I =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : \langle r, f \rangle \in I \wedge (\langle r, f \rangle \notin {}^* I) \}$$

ou seja,

$$\nabla I =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : \langle r, f \rangle \in I \wedge \neg {}^* \langle r, f \rangle \in I' \}.$$

- O *conjunto de inconsistências*, ou *zona de inconsistência* de $[a, b]$, denotado por $!I$, é definido por:

$$!I =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : \langle r, f \rangle \in I \wedge \langle r, f \rangle \notin I \}$$

ou seja,

$$!I =_{\text{def}} \{ \langle r, f \rangle : \langle r, f \rangle \in I \wedge \langle r, f \rangle \in I' \}.$$

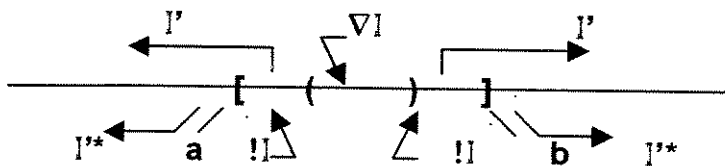
- A *região difusa* em torno de a e a *região difusa* em torno de b , denotadas por “ $?a$ ” e “ $?b$ ”, respectivamente, são definidas por:

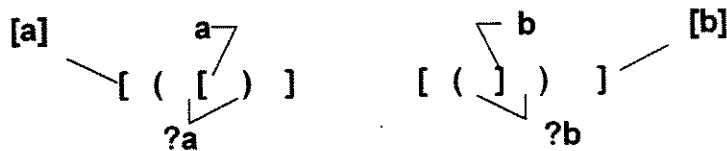
$?a =_{\text{def}} \{ \langle s, f \rangle \in [s] : (\langle s, f \rangle - \langle s, g \rangle) \text{ é um infinitésimo quase-nilpotente de ordem } 2 \}.$

$?b =_{\text{def}} \{ \langle t, f \rangle \in [t] : (\langle t, h \rangle - \langle t, f \rangle) \text{ é um infinitésimo quase-nilpotente de ordem } 2 \}.$

Ou seja, $?a$ e $?b$ são constituídas, respectivamente, por números hiper-reais que diferem de a e b por um infinitésimo de ordem igual ou superior à de um infinitésimo quase-nilpotente de ordem dois.

Diagrama dos elementos de um hiperintervalo fechado $[a, b]$ de $\mathcal{A}^*$.





Observações.

- Se a e b são números reais standard, então ∇I coincide com o conceito usual de interior de um intervalo (conjunto).

Conforme observado em **da Costa, Béziau & Bueno 1998**, p. 58, o Axioma 12 de “preservação de bom comportamento” de $C_1^=$, relativamente aos conectivos $\wedge$ e $\vee$, nos permite explicitar onde estão os interiores de $[a, b] \cap [c, d]$ e de $[a, b] \cup [c, d]$, com relação aos interiores de cada um dos intervalos.

Teorema 2.38. Sejam I_1 e I_2 os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente:

- $\nabla I_1 \cap \nabla I_2 \subseteq \nabla(I_1 \cap I_2)$

é equivalente a $I_1^\circ \cap I_2^\circ \subseteq (I_1 \cap I_2)^\circ$.

- $\nabla I_1 \cap I_2 \subseteq \nabla(I_1 \cap I_2)$

é equivalente a $I_1^\circ \subseteq (I_1 \cap I_2)^\circ$.

- $I_1 \cap \nabla I_2 \subseteq \nabla(I_1 \cap I_2)$

é equivalente a $I_2^\circ \subseteq (I_1 \cap I_2)^\circ$,

onde $I_i^\circ = \{ \langle r, f \rangle \in \mathcal{A}^* : \langle r, f \rangle \in (I_i \cap I_i') \}$, com $i = 1, 2$.

Demonstração. Adaptação direta de resultados de Béziau 1995. $\square$

Resultados análogos podem ser obtidos relativamente à união de hiperintervalos, satisfeitas certas condições especiais.

Teorema 2.39. Dado um hiperintervalo I , temos:

- $\forall I \subseteq I$
- $\forall I \cup !I \cup I^* = \mathbb{A}^*$
- $\forall I \cap !I = \emptyset^*$
- $!I \cap I^* = \emptyset^*$
- $I \cap I^* = \emptyset^*$

Demonstração. Adaptação direta de resultados de Béziau 1995. $\square$

Observamos que, para hiperintervalos abertos, semi-abertos, etc., podemos também definir conceitos como os de complementar forte e complementar fraco.

Observação. Com a introdução do símbolo de igualdade generalizada “ $\equiv$ ” na linguagem L , a Definição 2.27, de valor absoluto de números hiper-reais, pode ser reescrita, substituindo-se a condição (c) da Definição 2.13, por

$$| \langle r, f \rangle | \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0, \sqrt{f^2} \rangle, \text{ se } \langle r, f \rangle \equiv \langle 0, 0 \rangle.$$

Neste trabalho optamos por uma definição de valor absoluto, ou módulo, como uma função $| \cdot | : \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{A}^{**}$. Quando o número hiper-real $\langle r, f \rangle$ for um real standard, $| \langle r, f \rangle |$ coincide com o módulo real clássico.

Observamos, entretanto, que o módulo de um número hiper-real poderia ter sido definido da seguinte forma:

i) $|\langle r, f \rangle| = |r|$, com $|r|$ o módulo usual do real r , se $\langle r, f \rangle$ é um hiper-real finito.

ii) $|\langle u, 0 \rangle| = \langle \sqrt{u^2}, 0 \rangle$, com $u^2(k) = (u(k))^2$, se $\langle u, 0 \rangle$ é um hiper-real infinito.

Definição 2.40. Uma função hiper-real é uma função f cujo domínio é um subconjunto do conjunto $\mathcal{A}$ de hiper-reais, com valores em $\mathcal{A}^*$. Isto é:

$$f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*.$$

A definição de limite de uma função hiper-real, quando x tende a um número real standard, é a usual.

Definição 2.41. Dada uma hiper-função $f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ e números reais standard r e b :

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = b \text{ se, e somente se, } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (0 < |x - r| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Teorema 2.42. Dada uma função hiper-real $f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = k \text{ se, e somente se, } (\forall x) (x \in B) ((x \equiv r) \rightarrow (f(x) \equiv k)). \quad \square$$

Podemos também, na linguagem L , introduzir os conceitos de limite de uma função hiper-real nos casos em que x , ou $f(x)$, tendem ao infinito.

Definição 2.43. Dada uma função hiper-real $f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ e um real standard b , temos:

$$\lim_{x \rightarrow \langle u, 0 \rangle} f(x) = b \text{ se, e somente se, } (\exists \langle v, 0 \rangle \in \mathcal{A}^*) (\forall x) ((|x| > |\langle v, 0 \rangle|) \rightarrow (f(x) \equiv b)).$$

Definição 2.44. Dada uma função hiper-real $f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ e um hiper-real stan-

dado r :

$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = \langle u, 0 \rangle$ se, e somente se, $(\exists \langle v, 0 \rangle \in \mathcal{A}^*) (\forall x) (x \equiv r \rightarrow (|f(x)| > |\langle v, 0 \rangle|))$.

Definição 2.45. Dada uma função hiper-real $f: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$:

$\lim_{x \rightarrow \langle u, 0 \rangle} f(x) = \langle v, 0 \rangle$ se, e somente se, $(\forall \langle w, 0 \rangle \in \mathcal{A}^*) (\exists \langle w', 0 \rangle \in \mathcal{A}^*) (\forall x) ((|x| > |\langle w', 0 \rangle|) \rightarrow (|f(x)| > |\langle w, 0 \rangle|))$.

Exibimos agora, motivados por **Mortensen 1995**, p. 46, alguns resultados que expressam propriedades interessantes dos infinitésimos.

Teorema 2.46. Dados um infinitésimo δ e um número real standard $k > 0$, arbitrários, existe um infinitésimo ε tal que $\frac{\varepsilon^{k+1}}{\delta}$ é infinitésimo e $\frac{\varepsilon^k}{\delta}$ é infinito.

Demonstração

Sejam $\langle k, 0 \rangle = k > 0$ e $\delta = \langle 0, f \rangle$ um infinitésimo, isto é, tal que, dado o intervalo real fixo I e $a \in I$, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, e consideremos $f(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, com possível exceção do ponto a .

Tomando $h(x) = f^{(k+1)/k(k+2)}(x)$ e aplicando as propriedades da teoria clássica de limites, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \left[\lim_{x \rightarrow a} f^{k+1}(x) \right]^{\frac{1}{k(k+2)}} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} h^{k+1}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[f^{(k+1)/k(k+2)} \right]^{k+1}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(f^{\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}} \right)(x) =$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} (f^{k^2+2k+1})(x) \right]^{\frac{1}{k^2+2k}} = 0.$$

Logo, h e h^{k+1} são variáveis infinitesimais que definem os infinitésimos $\langle 0, h \rangle$ e $\langle 0, h^{k+1} \rangle$. Fazendo $\langle 0, h \rangle = \varepsilon$ temos, pela definição do produto em $\mathcal{A}^*$, que $\langle 0, h^{k+1} \rangle = \langle 0, h \rangle \times \dots \times \langle 0, h \rangle = \varepsilon^{k+1}$.

Consideremos agora o quociente $\frac{\varepsilon^{k+1}}{\delta} = \frac{\langle 0, h^{k+1} \rangle}{\langle 0, f \rangle}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h^{k+1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left[\frac{k+1}{f(x)^{k(k+2)}} \right]^{k+1}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f^{\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}}}{f} \right](x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (f^{\frac{(k^2+2k+1)-(k^2+2k)}{k^2+2k}}(x)) = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{1}{k^2+2k}} = 0,$$

temos, por definição, que $\frac{\langle 0, h^{k+1} \rangle}{\langle 0, f \rangle} = \left\langle 0, \frac{h^{k+1}}{f} \right\rangle$, que é um infinitésimo, ou seja,

$\frac{\varepsilon^{k+1}}{\delta}$ é infinitésimo.

Dado agora $\frac{\varepsilon^k}{\delta} = \frac{\langle 0, h^k \rangle}{\langle 0, f \rangle}$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h^k(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left[\frac{f^{(k+1)/(k+2)}(x)}{f(x)} \right]^k}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f^{(k+1)/(k+2)}(x))^k}{f(x)^{k+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^{\frac{k+1-(k+2)}{k+2}}(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f^{\frac{-1}{k+2}}(x)) = \frac{1}{\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{1}{k+2}}} = \infty$$

Portanto, $\frac{h^k(x)}{f(x)}$ é variável infinita e $\left\langle \frac{h^k}{f}, 0 \right\rangle$ é um número hiper-real infinito. $\square$

Teorema 2.47. Fixado um infinitésimo $\delta = \langle 0, f \rangle$, se $\varepsilon_1 = \langle 0, g \rangle$ e $\varepsilon_2 = \langle 0, h \rangle$ são infinitésimos tais que ε_1^2 e ε_2^2 possuem ordem superior à ordem de δ , então $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ é um infinitésimo com ordem também superior à ordem de δ .

Demonstração

Se $\varepsilon_1 = \langle 0, g \rangle$ e $\varepsilon_2 = \langle 0, h \rangle$ são infinitésimos, então $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \langle 0, g \rangle \times \langle 0, h \rangle =_{\text{def}} \langle 0, gh \rangle$ é infinitésimo, pois $\lim_{x \rightarrow a} (gh)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$.

Sabemos também, pelas propriedades da multiplicação em $\mathcal{H}^*$, que dados $\varepsilon_1 = \langle 0, g \rangle$ e $\varepsilon_2 = \langle 0, h \rangle$, temos $\varepsilon_1^2 = \langle 0, g^2 \rangle$, e $\varepsilon_2^2 = \langle 0, h^2 \rangle$. Agora, sabendo que a ordem de ε_1^2 e a ordem de ε_2^2 são superiores à ordem de δ , isto é, que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g^2(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h^2(x)}{f(x)} = 0, \text{ queremos mostrar que a ordem de } \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \text{ é supe-}$$

rior à ordem de δ , isto é, que $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{gh}{f} \right)(x) = 0$. Vejamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{gh}{f} \right)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(gh)(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{g(x)h(x)}{f(x)} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{g^2(x)}{f(x)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{h^2(x)}{f(x)} \right) \right]^{1/2} = 0^{1/2} = 0\end{aligned}$$

Logo, a ordem de $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ é superior à ordem de δ . □

Corolário 2.48. Dados um infinitésimo δ e um inteiro standard positivo k , arbitrários, se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ são infinitésimos tais que ε_i^k têm ordem superior à de δ , para todo i , $1 \leq i \leq k$, então $\varepsilon_1 \times \dots \times \varepsilon_k$ tem ordem superior à ordem de δ . □

2.3.1. Seqüências e Hiperseqüências de $\mathcal{N}^*$

Robinson 1996, trabalhando com extensões de conjuntos consistentes de sentenças, estabeleceu um modelo não-standard de ordem superior para a aritmética e um modelo não-standard para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades usuais. O primeiro baseia-se numa extensão não standard do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, denotada por ${}^*\mathbb{N}$, cujos elementos, entre os quais incluem-se *números naturais infinitos*, são chamados *números hipernaturais*. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, denotada por ${}^*\mathbb{R}$, que inclui *números reais infinitos*.

Conceitos variados da análise standard, definidos com o auxílio dos números naturais ou dos números reais, foram, então, estendidos à linguagem de ${}^*\mathbb{N}$ e de ${}^*\mathbb{R}$. É o caso, por exemplo, do conceito de seqüências determinadas por funções definidas em ${}^*\mathbb{N}$.

Como as extensões do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais de Robinson (${}^*\mathbb{R}$) e de da Costa ($\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$) são estruturas algébricas não-arquimedianas, mais precisamente, um corpo ordenado, no primeiro caso, e um hiperanel e um quase anel ordenados no segundo caso, é natural que também possamos interpretar resultados da análise clássica em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$, como no caso de resultados relativos a seqüências e continuidade de funções.

Definição 2.49. Uma *seqüência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de *números reais* é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número real $f(n) = x_n$.

Definição 2.50. Uma *seqüência* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de *números hiper-reais*, ou *hiperse-
qüência* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uma *hiperfunção* $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}^*$, com domínio no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e contradomínio no quase-anel $\mathcal{A}^*$, que a cada número natural n associa um número hiper-real $f(n) = a_n$.

Temos, na análise clássica, a seguinte definição para convergência de uma seqüência de números reais:

Definição 2.51. Uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais converge para um número real r se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que, para todo $n > n_0$, temos que $|a_n - r| < \varepsilon$.

Podemos caracterizar, de forma semelhante, a convergência de uma hiperseqüência $(\langle r_n, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.52. Uma hiperseqüência $(\langle r_n, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número hiper-real $\langle r, f \rangle$ se, e somente se, para todo infinitésimo $\langle 0, g \rangle > \langle 0, 0 \rangle$, existe um núme-

ro natural n_0 tal que, para todo número natural $n > n_0$, temos que $|\langle r_n, f_n \rangle - \langle r, f \rangle| \leq \langle 0, h \rangle$, sendo h uma variável infinitesimal positiva, e $\langle 0, h \rangle < \langle 0, g \rangle$.

Definição 2.53. Uma hiperseqüência $(\langle r_n, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existem números hiper-reais $\langle r, 0 \rangle$ e $\langle s, 0 \rangle$ tais que $\langle s, 0 \rangle < \langle r_n, f_n \rangle < \langle r, 0 \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Alguns conceitos clássicos envolvendo a relação de ordem dos reais, como o de *monotonicidade não-estrita* de uma seqüência, não podem ser generalizados para hiperseqüências, uma vez que a relação de ordem do hiperanel, ou do quase-anel, não é linear.

A partir daqui, não havendo maiores inconvenientes, usaremos a notação simplificada (a_n) para seqüências e hiperseqüências.

Teorema 2.54. Dada uma hiperseqüência *estritamente monótona e limitada* (a_n) qualquer, a seqüência standard formada pelas partes reais de seus termos é convergente.

Demonstração:

Seja (a_n) uma hiperseqüência monótona, estritamente crescente, isto é, satisfazendo $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$.

Se (a_n) é limitada, então existem números hiper-reais não-infinitos b e c tais que, para todo número natural n , $b \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq c$. Considerando apenas as partes reais dos termos de (a_n) , obtemos uma seqüência standard (a'_n) , tal que $b \leq a'_0 \leq a'_1 \leq \dots \leq a'_n \leq c$, para todo natural n .

Em $\mathcal{A}^*$, assim como em $\mathbb{R}$, existe (e é único) o supremo de todo conjunto standard limitado superiormente. Logo, existe $s = \sup\{a'_n : n \in \mathbb{N}\}$, do que temos, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq s$, que $a'_j \leq m$.

Vamos agora mostrar que (a'_n) converge para s .

Dado um infinitésimo $\varepsilon_1 \in \mathcal{A}^*$, $\varepsilon_1 = \langle 0, f \rangle$, com $0 < f$ (f uma variável infinitesimal estritamente positiva), temos que $s - \varepsilon_1 \neq s$, pela definição da identidade no quase anel $\mathcal{A}^*$. Como $s - \varepsilon_1 < s$, admitindo a unicidade do supremo de (a'_n) , temos, para algum índice j , que $\neg^*(a'_j \leq s - \varepsilon_1)$, e para um índice qualquer $k > j$, temos que $\neg^*((s + \varepsilon_1) \leq a'_k)$, ou seja, temos $s - \varepsilon_1 < a'_j < a'_k \leq s < s + \varepsilon_1$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, $j < k$, temos que $|a'_k - s| < \varepsilon_1$, devendo existir, portanto, um infinitésimo $\varepsilon_2 = \langle 0, g \rangle > \langle 0, 0 \rangle$, tal que $a'_k - s = \varepsilon_2$, ou $a'_k = s + \varepsilon_2$. Concluimos, daí, que (a'_n) converge para s .

A demonstração para o caso em que a hiperseqüência é estritamente decrescente é semelhante. □

Definição 2.55. Uma hiperseqüência $(\langle r_n, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para o número hiper-real $\langle r, f \rangle$ se, e somente se:

- i) $(\langle r_n, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $(\langle r, f \rangle)$;
- ii) A subseqüência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das partes reais dos termos da hiperseqüência converge uniformemente para r , ou seja, para todo infinitésimo $\langle 0, g \rangle > \langle 0, 0 \rangle$, existe um número natural standard n_0 tal que, para todo $n > n_0$, temos que $|r_n - r| < |\langle 0, g \rangle|$;
- iii) A subseqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das variáveis infinitesimais dos termos da hiperseqüência converge uniformemente para f , ou seja, para todo infinitésimo $\langle 0, h \rangle > \langle 0, 0 \rangle$, existe um número natural m_0 tal que, para todo natural standard $m > m_0$, temos que $|f_m(x) - f(x)| < \langle 0, h \rangle$, qualquer que seja $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ (I sendo o domínio das variáveis infinitesimais f_n).

2.3.2. Funções contínuas e funções paracontínuas em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{A}^*$

As definições de *quase-função* e de *função quase-contínua* que apresenta-

mos a seguir, estendem o conceito de função real no escopo da linguagem L . Preservamos aqui, e em alguns outros casos, o uso de limites, com a intenção de facilitar a comparação entre propriedades clássicas e propriedades não clássicas de funções reais estendidas a $\mathcal{A}$ e a $\mathcal{A}^*$.

Definição 2.56. Uma função $f: U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ é *contínua* em um hiper-real $\langle r, g \rangle \in U$ se, e somente se:

$$(\forall \langle s, h \rangle \in U) (\langle r, g \rangle \equiv \langle s, h \rangle \rightarrow f(\langle r, g \rangle) \equiv f(\langle s, h \rangle)).$$

Caso contrário, f é *descontínua* em $\langle r, g \rangle$.

Definição 2.57. Uma função $f: U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ é *contínua* em U se, e somente se, f é contínua em cada hiper-real de U .

Definição 2.58. Uma relação definida em um subconjunto U de $\mathcal{A}$, $f: U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, é chamada uma *quase-função*, ou uma *parafunção* de U em $\mathcal{A}^*$ quando associa a cada elemento do domínio U um único elemento de $\mathcal{A}^*$, exceto em um conjunto discreto $Q = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de U , a cujos elementos u_k , a relação f associa mais de uma *imagem*, $v_k^1, v_k^2, \dots, v_k^{n_k}$, $n_k > 1$, de tal modo que $v_k^i \neq v_k^j$, mas $v_k^i \equiv v_k^j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n_k\}$, $i \neq j$.

Notação: $f: U \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$

$$\begin{cases} f(x) = x, \text{ se } x \in U - Q \\ f(u_k) = v_k^i, \text{ se } u_k \in Q, i = 1, 2, \dots, n_k. \end{cases}$$

Definição 2.59. Uma função $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ é *paracontínua*, ou *quase-contínua*, em $U \subseteq \mathbb{R}$ quando é contínua, no sentido usual, em todo $x \in U$, exceto num conjunto discreto $P = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos standard do domínio, nos quais está univocamente definida, tal que:

$$a) \neg^* (\lim_{x \rightarrow u_k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow u_k^-} f(x) = f(u_k)).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow u_k^+} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow u_k^-} f(x) \equiv f(u_k).$$

Chamaremos os pontos u_k de P , da definição acima, de *pontos de quase-descontinuidade*, ou de *paracontinuidade*.

Definição 2.60. Uma função paracontínua $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ possui uma *quase-descontinuidade removível* em $u_k \in U$, se ocorrem:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \lim_{x \rightarrow u_k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow u_k^-} f(x) = L \\ b) f(u_k) = M \\ c) \neg^* (M = L), \text{ mas } M \equiv L. \end{array} \right.$$

Redefinindo f em u_k , de tal modo que $f(u_k) = L$, obtemos uma função contínua neste ponto, no sentido usual.

Observação.

Uma quase-função f , paracontínua, pode ser naturalmente associada a uma função paracontínua g , se para todo $u_k \in Q$, ocorrem $\lim_{x \rightarrow u_k} f(x) = L_k$ e

$v_k^i \equiv L_k, \forall i = 1, 2, \dots, n_k$. Basta tomarmos a função $g: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, definida por

$$g(x) = f(x), \forall x \in U \setminus Q$$

e

$$g(u_k) = \bar{v}_k ,$$

com $\bar{v}_k$ escolhido arbitrariamente como uma das imagens de u_k por f , em particular o próprio L_k .

Teorema 2.61. Se $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ é uma função paracontínua, com um conjunto $\{u_j\}_{j=1, 2, \dots, k} \subset (a, b)$ de pontos de quase-descontinuidade, sendo a e b números reais, então f é limitada em $[a, b]$.

Demonstração

Vamos demonstrar que f é limitada superiormente em $[a, b]$ (sendo análoga a demonstração de que f é limitada inferiormente).

Dado $A = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, o conjunto dos pontos de quase-descontinuidade de f , decorre da hipótese a existência de infinitésimos não-negativos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, satisfazendo a:

$$a) \left| \lim_{x \rightarrow u_j^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow u_j^+} f(x) \right| = \varepsilon_1 ,$$

$$\left| \left(\lim_{x \rightarrow u_j^-} f(x) \right) - f(u_j) \right| = \varepsilon_2 ,$$

e

$$\left| \left(\lim_{x \rightarrow u_j^+} f(x) \right) - f(u_j) \right| = \varepsilon_3 ;$$

b) f é contínua nos intervalos

$$I_1 = [a, u_1 - \delta_1], I_2 = [u_1 + \delta_1, u_2 - \delta_2], \dots, I_{k+1} = [u_k + \delta_k, b].$$

Analisando os pontos de quase-descontinuidade u_j , relativamente aos intervalos $B_j = (u_j - \delta_j, u_j + \delta_j)$, verificamos que $u_j \in \bigcup_j B_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$, o que garante a validade das relações de igualdade a seguir.

$$\begin{aligned} \{[u_{j-1} + \delta_{j-1}, u_j - \delta_j] \cap B_j\} &= \{[u_j + \delta_j, u_{j+1} - \delta_{j+1}] \cap B_j\} = \\ &= \{[u_{j-1} + \delta_{j-1}, u_j - \delta_j] \cap [u_j + \delta_j, u_{j+1} - \delta_{j+1}]\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Temos daí, como resultado da análise clássica, válido também no contexto do cálculo paraconsistente, que f possui uma cota superior M_j em cada intervalo I_j . E temos também, para cada índice j , que $\left\{ \lim_{x \rightarrow u_j^-} f(x), \lim_{x \rightarrow u_j^+} f(x) \right\}$ possui um máximo, L_j .

Logo, como existe no conjunto $S = \{M_1, M_2, \dots, M_k, L_1, L_2, \dots, L_k\}$, finito, um máximo absoluto, que podemos denotar por M , este representa um limitante superior para a função f . □

Teorema 2. 62.

Se f e g são funções definidas no hiperanel $\mathcal{A}$, contínuas em um número real standard t , então $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são funções contínuas em t ; e se $g(t) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é função contínua em t .

Demonstração do caso $f \times g$

Dado um infinitésimo $\varepsilon = \langle 0, w \rangle$ qualquer, sendo f e g funções contínuas em $t \in \mathbb{R}$, temos, pela Definição 2.14, que existem infinitésimos $\delta_1 = \langle 0, u \rangle$ e $\delta_2 = \langle 0, v \rangle$ tais que $f(t + \delta_1) = f(t) + \varepsilon$, e $g(t + \delta_2) = g(t) + \varepsilon$. Considerando, então, o infinitési-

$uv\rangle$, de ordem superior, portanto, à ordem de δ_1 e à de δ_2 ; a continuidade de f e de g em t , com $f(t) = \langle r, m \rangle$ e $g(t) = \langle s, n \rangle$; a definição da operação $\times$; e ainda as propriedades das operações do anel $\mathcal{A}$, temos:

$$\begin{aligned}
& (f \times g)(t + \delta) - (f \times g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} [f(t + \delta) \times g(t + \delta)] - (f(t) \times g(t)) = \\
& = [(f(t) + \varepsilon) \times (g(t) + \varepsilon)] - (f(t) \times g(t)) = \\
& = [(\langle r, m \rangle + \langle 0, w \rangle) \times (\langle s, n \rangle + \langle 0, w \rangle)] - (\langle r, m \rangle \times \langle s, n \rangle) = \\
& = \langle r, m \rangle \times \langle s, n \rangle + \langle r, m \rangle \times \langle 0, w \rangle + \langle 0, w \rangle \times \langle s, n \rangle + \langle 0, w \rangle^2 - \langle r, m \rangle \times \langle s, n \rangle = \\
& = [\langle r, m \rangle + \langle s, n \rangle] \times \langle 0, w \rangle + \langle 0, w \rangle^2 \\
& = (f(t) + g(t)) \times \varepsilon + \varepsilon^2, \text{ que é um infinitésimo com a mesma ordem de } \varepsilon, \text{ de} \\
& \text{acordo com a Definição 2.14}^{22}. \text{ Logo, a função } f \times g \text{ é contínua em } t. \quad \square
\end{aligned}$$

2.3.3. Diferenciabilidade em $\mathcal{A}$

A derivada de uma função hiper-real $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ em um número real standard r , pode ser definida de forma semelhante à definição clássica de derivada.

Definição 2.63. A derivada de uma função hiper-real $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, em um número real standard r , denotada por $f'(r)$, é um número real standard, denotado por $f'(r)$, tal que

$$f(r + \varepsilon) - f(r) = f'(r) \times \varepsilon + \delta,$$

em que ε é um infinitésimo arbitrário, e δ é um infinitésimo que depende de ε , e tem ordem superior à do mesmo.

Observação. De acordo com a Definição 2.63, D será o valor da derivada de f em um número real standard r , isto é, $D = f'(r)$, se tivermos

²² De outra forma, sendo $f(t)$ e $g(t)$ números hiper-reais finitos, temos que $(f(t) + g(t)) \times \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon \in \mathcal{I}_0$, região difusa do zero.

$$f(r + \varepsilon) - f(r) \equiv D \times \varepsilon.$$

Se existe $f'(r)$, dizemos que f é *diferenciável em r* . Quando isso ocorre para todo r real, dizemos que f é *diferenciável em $\mathbb{R}$* .

A definição anterior para a derivada de uma função f num ponto r de $\mathbb{R}$, através de infinitésimos, contribui de forma significativa para simplificar os procedimentos do cálculo diferencial e integral, ao possibilitar a substituição de operações com limites por operações algébricas, muitas vezes elementares.

Poderíamos, talvez, estender o conceito de derivada de uma função hiper-real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ também para hiper-reais não standard $\langle r, f \rangle$, o que pretendemos analisar em trabalhos futuros.

Teorema 2.64. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ é uma função diferenciável em um número real standard r , então f é contínua em r .

Demonstração

Dado um infinitésimo $\theta > 0$ qualquer, existe um infinitésimo $\delta > 0$, com ordem superior à ordem de ε , tal que

$$f(r + \theta) - f(r) = f'(r) \times \theta + \delta,$$

ou seja,

$$f(r + \theta) = f(r) + f'(r) \times \theta + \delta.$$

Mas como $f'(r) \times \theta$ é um infinitésimo da ordem do infinitésimo θ , uma vez que $f'(r)$ é um número finito, e ainda, como a ordem de δ é superior à ordem de $f'(r) \times \theta$, temos que $f'(r) \times \theta + \delta$ é um infinitésimo com mesma ordem que θ , de onde podemos concluir que f é contínua em r . $\square$

Observação. Em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^*$ vale o cancelamento de infinitésimos:

Supondo f uma variável infinitesimal não-nula e dados os produtos $\langle 0, f \rangle \times \langle r, 0 \rangle$ e $\langle 0, f \rangle \times \langle s, 0 \rangle$, temos:

$$\langle 0, f \rangle \times \langle r, 0 \rangle = \langle 0, f \rangle \times \langle s, 0 \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle 0, fr \rangle = \langle 0, fs \rangle \Leftrightarrow$$

$$fr = fs \Leftrightarrow$$

$$r = s \quad (\text{para todo } x \text{ tal que } f(x) \neq 0, \text{ o cancelamento efetuado de } f(x) \text{ é válido}) \Leftrightarrow$$

$$\langle r, 0 \rangle = \langle s, 0 \rangle.$$

Nos casos em que os produtos $\langle 0, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle$ e $\langle 0, f \rangle \times \langle v, 0 \rangle$ entre um infinitésimo e hiper-reais infinitos estão definidos, cancelamentos semelhantes são possíveis:

Se $\langle 0, f \rangle \times \langle u, 0 \rangle = \langle 0, f \rangle \times \langle v, 0 \rangle$, então, pela Definição 2.21, temos que $fu = fv$, ou seja, $f(x)u(x) = f(x)v(x)$, para todo x do intervalo I de definição da variável infinitesimal f e das variáveis infinitas u e v . Daí, admitindo que f seja inversível em I , concluímos que $u = v$.

O conceito de infinitésimo, que podemos utilizar para simplificar o tratamento formal do cálculo, pode ser usado em processos numéricos de aproximação, como é o caso da *aproximação linear* local de uma função através de sua *diferencial*.

No cálculo diferencial clássico a fórmula $f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta(x)$ é utilizada para representar a aproximação linear local da função f , quando x sofre um acréscimo Δx . Quando $\Delta(x)$ é suficientemente pequeno, a diferença $f(x+\Delta x) - f(x)$, que é o acréscimo Δy experimentado pela função f entre os extremos do intervalo $[x, x+\Delta(x)]$, pode ser bem representada por $f'(x)\Delta(x)$, que é a chamada *diferencial de f* , normalmente denotada por dy .

Podemos substituir $\Delta(x)$ por dx na fórmula da aproximação linear acima, fixando x , de modo a obter a fórmula equivalente $f(x + dx) \cong f(x) + f'(x)dx$, na qual dx é variável independente.

Estas são notações de Leibniz para fórmulas que descrevem a aproximação de f por uma função linear na vizinhança de um ponto de seu domínio. Para

dx tomado como um infinitésimo ε , na linguagem L , equivalem à fórmula $f(x+\varepsilon) - f(x) \equiv f'(x) \times \varepsilon$.

Sua interpretação é a usual. Se a x é atribuído um acréscimo infinitesimal ε , o segmento da curva determinada por f confunde-se, entre x e $x+\varepsilon$, com o segmento de reta determinado por $(x, f(x))$ e $(x+\varepsilon, f(x+\varepsilon))$. Formalmente, isso significa que $f'(x) \times \varepsilon$ representa uma aproximação com precisão infinitesimal para $f(x + \varepsilon) - f(x)$.

2.3.4. Regras de derivação em $\mathcal{A}$

Podemos expressar as regras básicas de derivação de funções reais,

- Se $f(r) = c$, então $f'(r) = 0$
- $f'(r^n) = nr^{n-1}$
- $(f \pm g)'(r) = f'(r) \pm g'(r)$
- $(fg)'(r) = f'(r)g(r) + f(r)g'(r)$
- $(f/g)'(r) = [f'(r)g(r) - f(r)g'(r)] / [g(r)]^2$
- $(f \circ g)'(r) = f'(g(r))g'(r)$ (*Regra da Cadeia*)

na linguagem L do cálculo paraconsistente. Vejamos os casos da função constante, da função potência (natural) e do produto de funções.

Teorema 2.65.

- i) Se, para todo $x \in \mathcal{A}$, $f(x) = c$, com c constante, então $f'(r) = 0$, para todo r real standard.
- ii) Se, para todo $x \in \mathcal{A}$, $f(x) = x$, então $f'(r) = 1$, para todo r real standard.

Demonstração.

i) $f(x) = c$.

$$\begin{aligned} f(r + \varepsilon) - f(r) &= c - c \\ &= 0 \\ &\equiv 0 \times \varepsilon, \text{ para todo infinitésimo } \varepsilon. \\ \text{Logo, } f'(r) &= 0. \end{aligned}$$

ii) $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(r + \varepsilon) - f(r) &= (r + \varepsilon) - r \\ &= \varepsilon \\ &\equiv 1\varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $f'(r) = 1$, para todo real standard r . □

Teorema 2.66. Se $f, g: B \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ são diferenciáveis em $r \in B \subseteq \mathcal{A}$, r real standard, então $(f \times g)'(r) = (f'(r) \times g(r)) + (f(r) \times g'(r))$.

Demonstração

Se f e g são diferenciáveis em r , então, para todo infinitésimo ε , podemos encontrar infinitésimos δ_1 e δ_2 , de ordem superior à de ε , tais que

$$f(r + \varepsilon) = f(r) + f'(r) \times \varepsilon + \delta_1 \text{ e } g(r + \varepsilon) = g(r) + g'(r) \times \varepsilon + \delta_2.$$

Pelas propriedades das operações do anel $\mathcal{A}$, temos:

$$\begin{aligned} (f \times g)(r + \varepsilon) &= f(r + \varepsilon) \times g(r + \varepsilon) = (f(r) + f'(r) \times \varepsilon + \delta_1) \times (g(r) + g'(r) \times \varepsilon + \delta_2) = \\ &= f(r) \times g(r) + f(r) \times (g'(r) \times \varepsilon) + f(r) \times \delta_2 + (f'(r) \times \varepsilon) \times g(r) + (f'(r) \times \varepsilon) \times (g'(r) \times \varepsilon) + \\ &\quad (f'(r) \times \varepsilon) \times \delta_2 + \delta_1 \times g(r) + \delta_1 \times (g'(r) \times \varepsilon) + (\delta_1 + \delta_2) = \\ &= ((f \times g)(r)) + ((f(r) \times g'(r)) \times \varepsilon + (f'(r) \times g(r)) \times \varepsilon + ((f(r) \times \delta_2) + (g(r) \times \delta_1)) + (f'(r) \times \\ &\quad g'(r) \times \varepsilon^2) + (\delta_1 \times \delta_2) + (f'(r) \times \varepsilon \times \delta_2) + g'(r) \times \varepsilon \times \delta_1) = \end{aligned}$$

$$= (f \times g)(r) + [(f(r) \times g'(r)) + f'(r) \times g(r)] \times \varepsilon + [(f(r) \times \delta_2 + g(r) \times \delta_1) + (f'(r) \times \varepsilon \times \delta_2) + (g'(r) \times \varepsilon \times \delta_1) + (f'(r) \times g'(r) \times \varepsilon^2) + (\delta_1 \times \delta_2)](*).$$

Como os infinitésimos δ_1 e δ_2 têm ordem superior à de ε , e como o produto de dois infinitésimos resulta num infinitésimo de ordem superior à de ambos, temos que ε^2 , $\delta_1 \times \delta_2$, $\varepsilon \times \delta_1$ e $\varepsilon \times \delta_2$ têm todos ordem superior à de ε . Segue, então, que $f'(r) \times g'(r) \times \varepsilon^2$, $f'(r) \times \varepsilon \times \delta_2$, $g'(r) \times \varepsilon \times \delta_1$, $\delta_1 \times \delta_2$, e a soma de todos estes termos, representam infinitésimos de ordem superior à de ε .

Agora, $f(r) \times \delta_2$ e $g(r) \times \delta_1$ possuem mesma ordem, respectivamente, que δ_2 e δ_1 , logo, a última parcela entre colchetes do termo acima, destacado por (*), é um infinitésimo θ , de ordem superior à de ε . Podemos, então, escrever:

$$(f \times g)(r + \varepsilon) = (f \times g)(r) + ((f \times g') + (f' \times g))(r) \times \varepsilon + \theta,$$

ou, mais simplesmente,

$$(f \times g)'(r) = f(r) \times g'(r) + f'(r) \times g(r).$$

□

Teorema 2.67 Se $f(x) = x^n$, para todo $x \in \mathbb{A}$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(r) = nr^{n-1}$, para todo r real standard.

Demonstração.

Por indução sobre n .

i) $n = 0$

$$f(x) = x^0 = 1$$

$$f(x) = 1.$$

Pelo Teorema 2.65 – (i), para todo r real standard:

$$f'(r) = 0.$$

ii) Por hipótese de indução, consideremos o teorema válido, para $n = k$.

iii) Demonstremos o resultado para $n = k + 1$.

$$f(x) = x^{k+1}$$

$$f(x) = xx^k$$

Pelos Teoremas 2.65 - (iii) e 2.66:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x^k)' + x^k(x)' \\ &= kx^k + x^k 1 \\ &= (k+1)x^k. \end{aligned}$$

□

Podemos introduzir da forma clássica usual, a definição de derivadas de ordem superior.

Definição 2.68. Dada uma função $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, derivável até a ordem n em um ponto $t \in (a, b)$, com t , a e b reais standard, denomina-se *polinômio de Taylor de ordem n* de f , na variável x , em t , ao polinômio de ordem n :

$$T(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Uma propriedade importante de T é que sua k -ésima derivada em t , $T^{(k)}(t)$, coincide com a k -ésima derivada de f em t , $f^{(k)}(t)$. Isso significa que f pode ser bem aproximada por T numa vizinhança do ponto t , conforme expressa o teorema seguinte.

Teorema 2.69. Seja $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, com derivada até ordem n em um ponto $t \in (a, b)$, sendo a , b e t números reais standard. Temos, dado um infinitésimo ε qualquer, que existe um infinitésimo δ , com ordem superior à ordem de ε , tal que $f(t + \varepsilon) = T(t) + \delta$. □

Teorema 2.70. Seja $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ uma função polinomial, da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_i \in \mathcal{A}$, $0 \leq i \leq n$, e $n \in \mathbb{N}$. Sua derivada, nos pontos x reais standard, é dada por $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$.

Demonstração

Temos, pela definição da derivada f' em um real standard $t \in \mathbb{R}$, que para infinitésimos ε e δ , ε qualquer e δ dependente e de ordem superior à de ε ,

$$f(t + \varepsilon) - f(t) = f'(t) \times \varepsilon + \delta, \text{ isto é ,}$$

$$(a_n (t + \varepsilon)^n + a_{n-1} (t + \varepsilon)^{n-1} + \dots + a_1 (t + \varepsilon) + a_0) - (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) = \\ = f'(t) \times \varepsilon + \delta .$$

Desenvolvendo o termo à esquerda, temos:

$$a_n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} \varepsilon^k - t^n \right) + a_{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{n-1-k} \varepsilon^k - t^{n-1} \right) + \dots + a_1 (t + \varepsilon - t) + (a_0 - a_0) = \\ f'(t) \times \varepsilon + \delta .$$

Com o cancelamento dos termos de maior potência, em cada parcela das somas desenvolvidas, obtemos:

$$a_n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^{n-k} \varepsilon^k + a_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{n-1-k} \varepsilon^k + \dots + a_1 \varepsilon = f'(t) \times \varepsilon + \delta .$$

Temos, daí:

$$a_n \left(\binom{n}{1} t^{n-1} \varepsilon + \binom{n}{2} t^{n-2} \varepsilon^2 + \dots + \binom{n}{n} t^0 \varepsilon^n \right) + a_{n-1} \left(\binom{n-1}{1} t^{n-2} \varepsilon + \binom{n-1}{2} t^{n-3} \varepsilon^2 + \dots + \binom{n-1}{n-1} t^0 \varepsilon^{n-1} \right)$$

$$+ a_{n-2} \left(\binom{n-2}{1} t^{n-3} \varepsilon + \binom{n-2}{2} t^{n-4} \varepsilon^2 + \dots + \binom{n-2}{n-2} t^0 \varepsilon^{n-2} \right) + \dots + a_2 \binom{2}{1} t \varepsilon + a_2 \binom{2}{2} \varepsilon^2 + a_1 \binom{1}{1} \varepsilon$$

$$= f'(t) \times \varepsilon + \delta , \text{ ou}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j \binom{j}{1} t^{j-1} \right) (\varepsilon) + \left(\sum_{j=2}^n a_j \binom{j}{2} t^{j-2} \right) (\varepsilon^2) + \left(\sum_{j=3}^n a_j \binom{j}{3} t^{j-3} \right) (\varepsilon^3) + \dots + a_n \varepsilon^n = f'(t) \times \varepsilon + \delta$$


 somas envolvendo ε^ℓ , $\ell \geq 2$

Tanto δ quanto ε^ℓ , $\ell \geq 2$, possuem ordem superior à ordem de ε , e os somatórios envolvendo estas potências de ε são, naturalmente, infinitésimos com esta mesma propriedade, determinando, então, um infinitésimo θ , com ordem superior à de ε .

Podemos reescrever a igualdade anterior do seguinte modo:

$$\left(\sum_{j=1}^n j a_j t^{j-1} \right) \times \varepsilon = f'(t) \times \varepsilon + \theta.$$

Supondo $\varepsilon = \langle 0, g \rangle$ e $\theta = \langle 0, h \rangle$, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$, temos que $\frac{\theta}{\varepsilon} = \left\langle 0, \frac{h}{g} \right\rangle$,

que é um infinitésimo de ordem superior à de ε . Temos, então, que

$$f(t + \varepsilon) - f(t) \equiv \left(\sum_{j=1}^n j a_j t^{j-1} \right) \times \varepsilon = f'(t) \varepsilon + \theta.$$

Logo, $f'(t) \equiv \sum_{j=1}^n j a_j t^{j-1}$, o que significa que

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1. \quad \square$$

Observação. A demonstração do teorema anterior poderia ter sido feita diretamente, utilizando-se os resultados do Teorema 2.65, 2.66 e 2.67:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \dots + (a_1 x)' + (a_0)'$$

$$= a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \dots + a_1 x' + 0$$

$$= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Definição 2.71. Dada uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, dizemos que c é um *ponto de máximo local* de f e que f possui um valor *máximo local* em $c \in (a, b)$, com c, a, b reais standard, se existe um número real standard positivo k tal que, para todo $x \in (c-k, c+k)$, $f(x) \leq f(c)$.

Analogamente, definimos *ponto de mínimo local* de f em (a, b) e o valor *mínimo local* de f num ponto $c \in (a, b)$, c real standard.

Os máximos e mínimos locais são ditos *extremos locais* de f em $[a, b]$.

Observação. Um valor extremo de uma função f hiper-real num intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ é dito um *extremo absoluto* de f quando é, conforme o caso, maior ou igual que cada um dos máximos locais, ou menor ou igual que cada um dos mínimos locais – nestes casos, são ditos *máximo absoluto* e *mínimo absoluto* de f em $[a, b]$, respectivamente.

Teorema 2.72. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ tem um valor máximo local em $c \in (a, b)$, com c, a, b reais standard, e se f é derivável em c , então $f'(c) = 0$.

Demonstração

Como f tem um máximo local em c , então existe um real standard k tal que, para todo $x \in (c - k, c + k)$, $f(x) \leq f(c)$. Podemos afirmar, com base na Definição 2.72, que se ε é um infinitésimo qualquer, então $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, e, portanto, para todo $x \in [c]$. Isto é naturalmente verdadeiro, pois, para todo ε , $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ está contido em $(c - k, c + k)$, onde vale a propriedade.

Como f é derivável em c , temos:

$$f(c + \varepsilon) - f(c) = f'(c) \times \varepsilon + \delta.$$

Tomando x_1 e x_2 em $[c]$, tais que $x_1 < c < x_2$, temos $c - x_1 = \alpha_1$, infinitésimo positivo, $c - x_2 = \alpha_2$, infinitésimo negativo, e, então,

$$f(c + \alpha_1) - f(c) = f'(c) \times \alpha_1 + \delta_1$$

e

$$f(c + \alpha_2) - f(c) = f'(c) \times \alpha_2 + \delta_2.$$

Da continuidade de f em c temos que $x_1 \equiv c$ implica $f(x_1) \equiv f(c)$, e $x_2 \equiv c$ implica $f(x_2) \equiv f(c)$ e, como $f(c)$ é um valor máximo local de f , temos

$$f(c + \alpha_1) - f(c) \leq 0 \text{ e } f(c + \alpha_2) - f(c) \leq 0.$$

Daí, sendo $\mathcal{A}$ um anel comutativo, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 < 0$, temos que:

$$(f(c + \alpha_1) - f(c)) \times \alpha_2 = (f'(c) \times \alpha_1 + \delta_1) \times \alpha_2 = (f'(c) \times (\alpha_1 \times \alpha_2)) + (\delta_1 \times \alpha_2) \geq 0,$$

e

$$(f(c + \alpha_1) - f(c)) \times \alpha_1 = (f'(c) \times \alpha_2 + \delta_2) \times \alpha_1 = (f'(c) \times (\alpha_1 \times \alpha_2)) + (\delta_2 \times \alpha_1) \leq 0.$$

Dividindo agora as igualdades acima por $\alpha_1 \times \alpha_2$, temos:

$$a) \frac{(f(c + \alpha_1) - f(c)) \times \alpha_2}{\alpha_1 \times \alpha_2} = f'(c) + \frac{\overbrace{(\delta_1 \times \alpha_2)}^{\text{infinitésimo}}}{\alpha_1 \times \alpha_2} \leq 0,$$

e

$$b) \frac{(f(c + \alpha_1) - f(c)) \times \alpha_1}{\alpha_1 \times \alpha_2} = f'(c) + \frac{(\delta_2 \times \alpha_1)}{\underbrace{\alpha_1 \times \alpha_2}_{\text{infinitésimo}}} \geq 0.$$

Podemos considerar, sem maiores inconvenientes, α_1 e α_2 com a mesma ordem de ε . Escrevendo $\alpha_1 = \langle 0, g \rangle$, $\alpha_2 = \langle 0, h \rangle$, $\delta_1 = \langle 0, m \rangle$ e $\delta_2 = \langle 0, n \rangle$, com g e h não assumindo o valor 0 numa vizinhança do ponto c , e com base nas condições para a divisão de infinitésimos, temos:

$$\frac{\delta_1 \times \alpha_2}{\alpha_1 \times \alpha_2} = \frac{\langle 0, m \rangle \times \langle 0, h \rangle}{\langle 0, g \rangle \times \langle 0, h \rangle} = \frac{\langle 0, mh \rangle}{\langle 0, gh \rangle} = \langle 0, \frac{mg}{gh} \rangle = \langle 0, \frac{m}{h} \rangle,$$

$$\text{pois } \lim_{x \rightarrow a} \frac{mg}{gh} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m}{h} = 0.$$

O infinitésimo resultante tem ordem superior à de ε , uma vez que a ordem de δ_1 é superior à ordem de α_1 . Logo, obtemos, pela desigualdade (a) aci-

ma, que $f'(c) \equiv r$, com $r \leq 0$, o que implica que $f'(c) \leq 0$.

Procedendo de forma análoga no caso (b), obtemos $f'(c) \equiv s$, com $s \geq 0$, logo $f'(c) \geq 0$, e podemos concluir que $f'(c) = 0$. $\square$

Um teorema análogo ao anterior pode ser enunciado, para o caso em que c é ponto de mínimo local.

Teorema 2.73. Teorema de Weierstrass

Se f é uma função hiper-real contínua em $[a, b]$, $f: [a, b] \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, com a e b reais standard, então existem reais standard x_1 e $x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Isto é, f tem pontos reais standard de máximo e mínimo absolutos em $[a, b]$.

Demonstração

Como f é contínua em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$. Logo, o conjunto

$$B = \{f(x): x \in [a, b]\}$$

admite supremo e ínfimo, reais standard. Sejam

$$M = \sup \{f(x): x \in [a, b]\}$$

e

$$m = \inf \{f(x): x \in [a, b]\}.$$

Temos, para todo $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Provaremos, a seguir, que $M = f(x_2)$, para algum $x_2 \in [a, b]$, x_2 real standard.

Se tivéssemos, para todo $x \in [a, b]$, que $f(x) < M$, a função

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \text{ com } x \in [a, b],$$

seria contínua em $[a, b]$. Se g fosse limitada em $[a, b]$, então existiria um real standard $N > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$,

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < N$$

e, portanto, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) < M - \frac{1}{N}$$

e, assim, M não seria o supremo de $f(x)$ em B , absurdo.

Logo, $g(x)$ seria contínua e não limitada em $[a, b]$, o que é uma contradição.

Portanto, $f(x) < M$, para todo $x \in [a, b]$, não pode ocorrer, e, então, devemos ter que $M = f(x_2)$, para algum $x_2 \in [a, b]$, x_2 real standard.

Com raciocínio análogo, prova-se que $f(x_1) = m$, para algum real standard $x_1 \in [a, b]$. □

Teorema 2.74. Teorema de Rolle

Se f é uma função contínua em um hiperintervalo $[a, b]$, com a, b reais standard, diferenciável no hiperintervalo (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$, então existe um número real standard $r \in (a, b)$ tal que $f'(r) = 0$.

Demonstração

Como f é contínua em $[a, b]$, então, pelo Teorema de Weierstrass, f assume um valor máximo absoluto M , em $m \in [a, b]$, e um valor mínimo absoluto N , em $n \in [a, b]$, com $N \leq M$.

Se $M = N$, então f é constante em $[a, b]$, isto é, $f(u) = c$, para todo $u \in [a, b]$. Temos, então, que $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, x real.

Se $N < M$, temos, necessariamente, que $f(a) \neq M$ ou $f(a) \neq N$, isto é, $f(a) \neq f(m)$ ou $f(a) \neq f(n)$.

No primeiro caso concluímos que $m \in (a, b)$, e no segundo caso concluímos que $n \in (a, b)$. Logo, pelo Teorema 2.72, $f'(m) = 0$, ou $f'(n) = 0$. □

Teorema 2.75. Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Se $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, com a e b reais standard, é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ para

o qual $f(c) = 0$.

Demonstração

Podemos admitir, sem perda de generalidade, que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, sendo a, b e 0 notações simplificadas para $\langle a, 0 \rangle$, $\langle b, 0 \rangle$ e $\langle 0, 0 \rangle$, respectivamente.

Considerando o ponto médio $x = \langle \frac{a+b}{2}, 0 \rangle$ ($\langle a + \frac{b-a}{2}, 0 \rangle$) ou, simplesmente, $a + \frac{b-a}{2}$, de $[a, b]$, temos:

- a) Se $f(a) \times f(x) = 0$, então x é o ponto procurado, pois $f(x) = 0$.
- b) Se $f(a) \times f(x) < 0$, então o valor de $f(x)$ é negativo, e como o intervalo $[a, x]$ satisfaz às condições da hipótese, um ponto c nas condições desejadas deve ser procurado em (a, x) . Fazendo, então, $b = x$ e descartando o intervalo $(x, b]$ original, damos início a um processo iterativo pelo qual uma seqüência de intervalos contendo c é obtida, cuja amplitude, a cada passo, reduz-se à metade da amplitude do intervalo anteriormente obtido.
- c) Se $f(a) \times f(x) > 0$, o ponto está no intervalo (x, b) , caso em que podemos desconsiderar o intervalo $[a, x)$ e repetir o procedimento anterior, a partir do intervalo $[x, b]$.

Denotando o extremo esquerdo do intervalo mantido na k -ésima iteração por x_k e o extremo direito por y_k , obtemos duas hiperseqüências de reais standard de $\mathcal{I}^*$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Observando que (x_k) é monótona crescente e limitada, temos que esta é uma seqüência convergente, com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$, sendo $x_k \leq L$, para todo k . Logo, fixado qualquer infinitésimo positivo ε , podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que, se m é um natural e $m > n$, então $x_m - \varepsilon < L < x_m + \varepsilon$, ou seja, $x_m \equiv L$. Como $f(x_k) > 0$, para todo k , sendo f contínua em $[a, b]$, temos que $f(L) \geq 0$.

Do mesmo modo, (y_n) , que pode ser escrita na forma $(y_n) = (x_n + \frac{b-a}{2^n})$, sendo decrescente e limitada, é uma seqüência convergente, com limite M e $f(M) \leq 0$.

Podemos, fixado o infinitésimo ε acima, admitir a existência de um natural n_0 tal que, para $n > n_0$, tenhamos $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ e, em consequência, $x_n \equiv y_n \equiv L \equiv M$. Nesse caso, como $x_n \leq L \leq x_n + \varepsilon$ e $y_n - \varepsilon \leq M \leq y_n$, com $f(L) \geq 0$, $f(x_n + \varepsilon) \leq 0$, $f(y_n - \varepsilon) \geq 0$ e $f(M) \leq 0$, devemos ter, para um infinitésimo de ordem suficientemente elevada, $x_n \equiv y_n \equiv L = M$, com $f(x_n) > 0$ e $f(y_n) < 0$. Tomando, então, $c = L = M$, teremos $0 \leq f(c) \leq 0$ e, portanto, $f(c) = 0$. $\square$

A forma geral do TVI, em que o ponto real 0 é substituído por um ponto real standard não nulo c qualquer, ($f(b) < c < f(a)$), é demonstrado da mesma forma que o caso acima.

O Teorema do Valor Médio (TVM) para derivadas, que apresentamos a seguir, assim como o Teorema do Valor Intermediário, conserva em $\mathcal{A}$ suas características clássicas. Geometricamente, pelo TVM, se uma função f é contínua num hiperintervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe um número real standard c , $a < c < b$, no qual a reta tangente à curva determinada por f apresenta um coeficiente angular no máximo infinitesimalmente distinto do coeficiente angular da reta secante a essa curva, pelos pontos extremos a e b .

Apresentamos, inicialmente, uma demonstração do TVM semelhante à apresentada em **Stroyan & Luxemburg 1976**, para a análise não-standard.

Teorema 2.76. Teorema do Valor Médio

Se $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , sendo a e b números reais standard, então existe um real standard $m \in (a,$

b) tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(m)$.

Demonstração

Consideremos a função auxiliar $g: [1/n, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ definida por

$$g(t) = f(a + t(b-a)) - f(a + (t - \frac{1}{n})(b-a)),$$

com $n \geq 3$ (o que garante que $g(t) \neq 0$, para todo $t \in (1/n, 1)$).

Observamos que a soma dos n primeiros termos da sequência $(g(k/n))_{k \in \mathbb{N}}$, isto é, $\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})$, $n \geq 3$, colapsa em $f(b) - f(a)$. Temos, então, que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})}{b - a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{g(\frac{k}{n})}{\frac{b-a}{n}},$$

que podemos interpretar como a média aritmética dos n termos $[g(k/n)] / [(b-a)/n]$, que identificaremos por θ_n .

Se θ_n é constante ($\theta_n = \theta$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), então $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \theta$,

que é o coeficiente angular da reta determinada por f .

Se os termos θ_n não forem todos iguais ao termo médio θ , então existem termos $x_0 = k_0/n$ e $x_1 = k_1/n$, do intervalo $(1/n, 1)$, para os quais vale a desigualdade:

$$\frac{g(x_0)}{\frac{b-a}{n}} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{g(x_1)}{\frac{b-a}{n}}.$$

Podemos, então, aplicar o TVI, em sua forma geral, à função $h(t) = \frac{g(t)}{\frac{b-a}{n}}$, com $c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, obtendo um ponto $d \in (x_0, x_1)$, que satisfaz

$$\frac{g(d)}{\frac{b-a}{n}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podemos, a partir daí, procedendo indutivamente, obter uma hiperse-

qüência crescente e limitada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma hiperseqüência decrescente e limitada $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $(f(b) - f(a)) / (b - a) = (f(b_n) - f(a_n)) / (b_n - a_n)$, para as quais é possível determinar um número real standard $m \in (a, b)$ e um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq m \leq b_n$ e $a_n \equiv m \equiv b_n$, para todo $n > n_0$. Como f é diferenciável em a_n e em b_n , fazendo $m - a_n = \varepsilon_1$ e $b_n - m = \varepsilon_2$, temos que $b_n - a_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, sendo ε um infinitésimo com ordem igual à menor das ordens dos infinitésimos ε_1 e ε_2 . Supondo ε de ordem suficientemente elevada, podemos considerar $f'(a_n) = f'(m) = f'(b_n)$, e temos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{f(b_n) - f(a_n) + f(m) - f(m)}{b_n - a_n} = \\ \frac{f(b_n) - f(m)}{b_n - a_n} + \frac{f(m) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{f(b_n) - f(m)}{b_n - a_n} \times \frac{b_n - m}{b_n - m} + \frac{m - a_n}{m - a_n} \times \frac{f(m) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \\ \frac{b_n - m}{b_n - a_n} \times \frac{f(m) - f(b_n)}{m - b_n} + \frac{m - a_n}{b_n - a_n} \times \frac{f(m) - f(a_n)}{m - a_n}. &\text{Então:} \\ f(b_n) - f(a_n) &= (b_n - m) \frac{f(m) - f(b_n)}{m - b_n} + (m - a_n) \frac{f(m) - f(a_n)}{m - a_n} = \\ \varepsilon_2 f'(m) + \delta_2 + \varepsilon_1 f'(m) + \delta_1 &\equiv f'(m)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\delta_1 + \delta_2). \end{aligned}$$

Como temos

$$(f(b) - f(a)) / (b - a) = (f(b_n) - f(a_n)) / (b_n - a_n),$$

podemos concluir que $(f(b) - f(a)) / (b - a) = f'(m)$. $\square$

A demonstração clássica para o T.V.M, mais simples e menos geral que a anterior, pode ser obtida do modo a seguir.

Sob as mesmas condições estabelecidas para o Teorema 2.66, consideremos a função $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$.

Como f é contínua em $[a, b]$ e é derivável em (a, b) , o mesmo ocorre para

a função g . Além disso, $g(a) = g(b) = 0$, logo, o Teorema de Rolle é válido para g . Existe, então, um ponto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é, $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, de onde temos o resultado $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, para um $c \in (a, b)$.

A seguir introduzimos o conceito de *integral* de uma função hiper-real. Embora o desenvolvimento de um cálculo integral paraconsistente não esteja entre os objetivos deste trabalho, trata-se de um conceito fundamental do Cálculo, utilizado na conclusão deste capítulo.

Definição 2.77. Dada uma função $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, limitada em $[a, b]$, com a e b reais standard, podemos definir uma função $S: [a, b] \times [a, b] \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, denominada *função área de f* , satisfazendo as condições seguintes.

- $S(a, b) = S(a, x) + S(x, b)$, para todo $x \in [a, b]$, com $M, N \in \mathcal{A}^*$, e $a, b \in \mathbb{R}$.
- Considerando $M = \sup(f)$ (supremo, ou menor das cotas superiores de f em $[a, b]$) e $N = \inf(f)$ (ínfimo, ou maior das cotas inferiores de f em $[a, b]$), temos que $S(a, b) \in [N \times (b - a), M \times (b - a)]$.

Através da partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos determinados por uma hiperseqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $x_1 = a$ e $x_n = b$, com $x_{i+1} - x_i$ apresentando a parte real $\Delta(x_i) = \Delta(x)$ constante, para todo i , e, portanto, com $x_{i+1} = x_i + \Delta(x)$ (podemos fazer, por exemplo, $x_{i+1} = x_i + i[(b - a)/n]$, para $i > 0$), obtemos o equivalente à *soma de Riemann* para a função f .

Considerando uma hiperseqüência $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i^* \in \nabla[x_i, x_{i+1}]$ ²³, com $x_1 = a$, $x_k = x_1 + (k-1) \times \Delta(x)$, e $a + n \times x_1 \leq b$, obtemos a *Soma de Riemann*,

²³ Omitimos os extremos de $[x_i, x_{i+1}]$ porque estes estão na região de inconsistência do intervalo.

$$S_n = \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) \times \Delta(x)],$$

que é um número hiper-real cujo valor corresponde a uma aproximação para o valor da área $S(a,b)$, delimitada por f entre a e b .

Refinando a partição anterior através de uma hiperseqüência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $x_{i+1} - x_i$ seja um infinitésimo dx_i , obtemos uma aproximação S_ω para a área total delimitada por f entre a e b , com precisão infinitesimal, através da soma das áreas dos infinitos retângulos de base infinitesimal dx_i e altura $f(x_i^*)$, determinados pela nova partição ($S(a, b) \equiv S_\omega$). Escrevendo $S_\omega = \langle S'_\omega, f \rangle$, conforme fazemos em $\mathcal{A}$, podemos definir a *integral (paraconsistente) de f entre a e b* como a seguir.

Definição 2.78. Integral Definida

Dada uma função $f: [a, b] \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$, onde a e b são reais standard, e uma partição $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$, $S_\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(x_i^*)(dx_i) = \langle S', f \rangle$, definimos a *integral* de f

no intervalo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ na notação de Leibniz, como o número real standard

$$\int_a^b f(x)dx =_{\text{def}} S'_\omega.$$

Observação. Podemos estender a definição anterior de integral às *integrais impróprias* (que são as integrais com limites de integração infinitos, ou então as integrais de funções com descontinuidades infinitas dentro do intervalo de integração), nos moldes da análise clássica, mas usando a linguagem dos infinitésimos. Uma idéia de como proceder pode ser vista em **Robinson 1996** – 3.5.

Encerramos o capítulo com um exemplo de aplicação de propriedades clássicas elementares do quase-anel $\mathcal{A}^*$ à física, e com considerações sobre a

possibilidade de utilização de algumas de suas propriedades não-clássicas no estudo de fenômenos ou experimentos envolvendo situações inconsistentes. No primeiro exemplo, o tratamento, embora equivalente ao clássico, é mais simples, por substituir os limites pelos infinitésimos, além de poder ser estudado, eventualmente, em variantes que exijam o uso de quantidades infinitas, presentes em $\mathcal{N}^*$.

Aplicação 2.79. A aceleração no movimento circular uniforme (aceleração centrípeta).

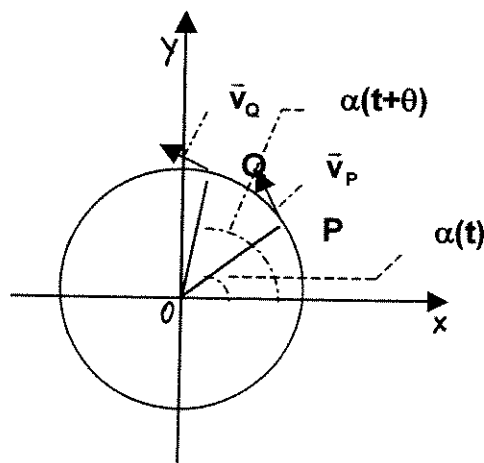
Estudamos este exemplo como consequência de um problema a nós sugerido, em correspondência pessoal, por J. Bell.

Consideremos uma partícula que descreve um movimento circular de raio r , em torno de um ponto O , pela ação de uma força centrada no mesmo. Consideremos também que no instante t a partícula se encontre na posição P da figura abaixo, que pode ser dada por um ângulo α , formado entre o raio $\overline{OP}$ e o eixo x , e por coordenadas (x, y) , todos dependendo de t :

$$\alpha = \alpha(t),$$

$$x = x(t),$$

$$y = y(t).$$



Desejamos estabelecer uma fórmula para a aceleração do movimento da partícula, usando algumas das propriedades do quase anel $\mathcal{A}^*$.

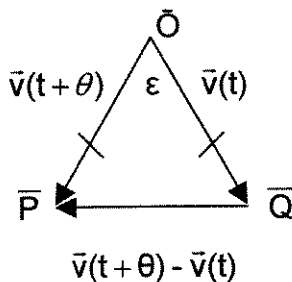
Sob uma variação infinitesimal $\theta > 0$ (θ inversível) do tempo t , a partícula sofrerá uma alteração em sua posição, passando do ponto P a um ponto Q , determinado por um raio, formando com o eixo x um ângulo $\alpha(t + \theta)$. O acréscimo angular será, pois, $\varepsilon = \alpha(t + \theta) - \alpha(t)$.

Alguns fatos que podemos assumir:

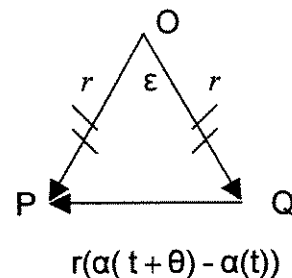
a) Se $\alpha \equiv 0$, sendo a variável infinitesimal associada a α comparável com a função nula 0 , então $\text{sen}\alpha \equiv \alpha$. Mas, sendo $\alpha \equiv 0$, podemos escrever $\alpha = \gamma$, γ infinitesimal. Valendo, sob a restrição inicial para α , a relação $|\text{sen}\alpha| \leq |\alpha|$ em $\mathcal{A}^*$, temos que $|\text{sen}\alpha| = |\text{sen}(\gamma)| \leq |\gamma|$. Como $0 < \alpha < \pi/2$, podemos escrever $0 < \text{sen}\gamma < \gamma$ e concluir, então, que $\text{sen}\gamma \equiv \gamma$.

b) $f(t + \varepsilon) - f(t) = f'(t) \times \varepsilon + \delta_1$, sendo δ_1 infinitésimo de ordem superior à de ε , para todo ε infinitesimal.

Posicionando os vetores-velocidade $\bar{v}_p$ e $\bar{v}_q$ da partícula em P e Q numa origem comum, $\bar{O}$, e comparando com os vetores-posição em P e Q , temos, com o uso das propriedades que acabamos de assinalar:



(O módulo do vetor-velocidade é constante, mas sua direção varia).



$r(\alpha(t + \theta) - \alpha(t))$: distância percorrida pela partícula entre os tempos t e $t + \theta$.

Os vetores-velocidade são perpendiculares aos raios, na direção dos quais os vetores-aceleração apontam para o centro O. Como as equações x , y , α e v são diferenciáveis em t , temos por (b) e pela relação $\equiv$ em $\mathcal{A}^*$, que $\alpha(t + \theta) - \alpha(t) \equiv \alpha'(t) \times \theta$ e $v(t + \theta) - v(t) \equiv v'(t) \times \theta$ (as duas expressões diferem por um infinitésimo de ordem superior à de θ).

Como os triângulos OPQ e $\overline{O} \overline{P} \overline{Q}$ são semelhantes, temos:

$$\frac{v(t + \theta) - v(t)}{v(t)} \equiv \frac{r(\alpha(t + \theta) - \alpha(t))}{r},$$

e

$$\frac{v'(t) \times \theta}{v(t)} \equiv \frac{r(\alpha(t + \theta) - \alpha(t))}{r} \rightarrow v'(t) \equiv \underbrace{\frac{r(\alpha(t + \theta) - \alpha(t))}{\theta}}_{\equiv v(t)} \times \frac{v(t)}{r}.$$

Logo, $v'(t) \equiv \frac{v^2(t)}{r}$, que é a lei procurada para a aceleração do movimento descrito pela partícula considerada. □

Aplicação 2.80.

Em certas áreas da física aplicada, como em *eletricidade* e *acústica*, é comum a necessidade de se lidar com forças de ação local, no tempo ou no espaço. Uma ferramenta clássica bastante utilizada em casos especiais dessa natureza, é a denominada *função (delta) de Dirac*²⁴. Esta é idealizada, no caso da variável independente tempo, como uma espécie de função-limite de uma sequência de funções, que descrevem a ação de forças de intensidade crescente, em intervalos decrescentes de tempo, fora dos quais anulam-se.

Para simplificar a interpretação dessas funções, é comum considerá-las

²⁴ A “função” delta de Paul Dirac, que assim é tratada, embora não seja propriamente uma função, motivou Laurent Schwartz a desenvolver a “teoria das distribuições”, com a qual ganhou a Medalha Fields em 1950.

constantes em cada intervalo de tempo em que não se anulam, e onde a ação da força tende a concentrar-se em um ponto.

São muitas as funções que podem gerar uma função de Dirac, algumas contínuas, outras descontínuas. Uma delas, descontínua, é descrita a seguir.

Consideremos, para a e k números reais standard, a função $\delta_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\delta_k(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & \text{se } t \in (a-k, a+k), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como o limite da família $(\delta_k(t-a))$ assim obtida não está definido para $t = a$, pode-se argumentar que a definição das funções δ_k não esteja correta. Mas não há um problema imediato em considerá-la como tal, como veremos.

Impondo a condição de que cada função $\delta_k(t-a)$ represente a ação de uma força constante, produzindo um impulso total unitário, geometricamente traduzido pela área unitária que $\delta_k(t-a)$ determina com o eixo x no intervalo $[a-k, a+k]$, temos que a “função” $\delta(t-a) = \lim_{k \rightarrow 0} \delta_k(t-a)$ satisfaz as condições abaixo.

- $\delta(a)$ não está definida.

- $\delta(t-a) = 0$, se $t \neq a$.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1$.

Embora $\delta(t-a)$ não seja uma função, no sentido usual, é utilizada para modelar a ação de forças descritas por meio de outras funções.

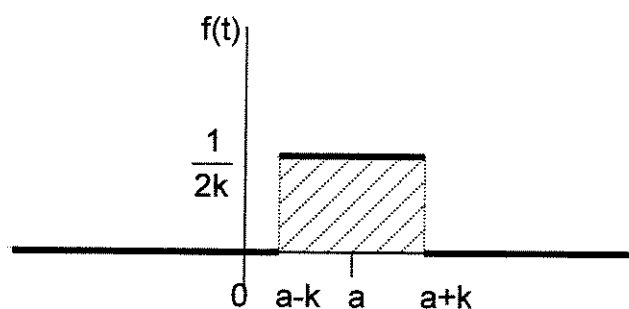
Supondo, por exemplo, que f seja uma função definida num ponto a , e diferenciável em $[a-k, a+k]$, temos que o valor de f em a pode ser dado do modo

a seguir, com o auxílio de δ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_k(t-a)dt = f(a).$$

A presença das quantidades infinitesimais no anel $\mathcal{A}$, e das quantidades infinitesimais e quantidades infinitas no quase-anel $\mathcal{A}^*$, e as propriedades da teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , permitem que consideremos a “função” delta como, de fato, uma hiperfunção do cálculo paraconsistente.

No gráfico abaixo



temos representada a situação em que há uma força de amplitude $1/2k$, agindo por um intervalo de tempo de amplitude $2k$ em torno de $t = a$, com $f(t) = 0$ para $t \in (-\infty, a-k) \cup (a+k, +\infty)$, cuja intensidade é caracterizada pela área unitária delimitada por f entre $a-k$ e $a+k$.

Estendemos, agora, a função real clássica a uma função hiper-real com domínio em $\mathcal{A}$.

Observa-se, no uso sistemático da função delta, que é ignorada a possibilidade de ocorrência de inconsistências nos extremos do intervalo $[a-k, a+k]$, o que deveria ser considerado no caso mais geral de fenômenos quantificados no quase anel $\mathcal{A}^*$, e sob o prisma de uma lógica paraconsistente (como C_1^*) e de uma teoria paraconsistente de conjuntos (como CHU_1).

Seja ψ_j uma função relacionada com a ação de uma força em torno de um ponto a , com as seguintes características:

- ψ_j é nula fora de $[a - (1/j), a - (1/j^2)] \cup [a + (1/j^2), a + (1/j)]$, para j hiper-real maior do que um;

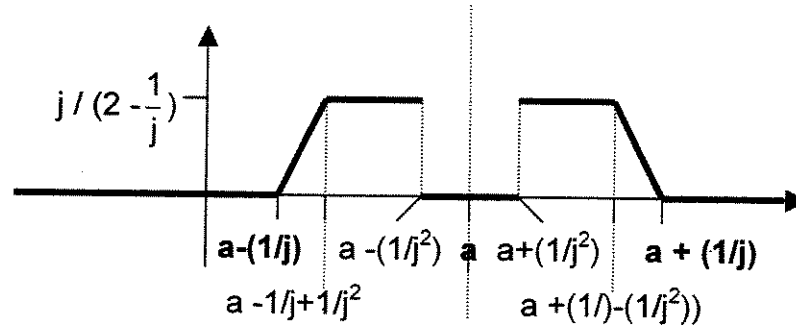
- ψ_j é linearmente crescente no intervalo $(a - (1/j), a - (1/j) + (1/j^2))$, ou seja, por uma fração de tempo de duração igual a $(1/j^2)$, estacionando nos intervalos $(a - (1/j) + (1/j^2), a - (1/j^2))$ e $(a + (1/j^2), a + (1/j) - (1/j^2))$;

- ψ_j decresce linearmente no intervalo $(a + (1/j) - (1/j^2), a + (1/j))$, até anular-se no instante $a + (1/j)$.

Considerando que a área total delimitada pelo gráfico de ψ_j seja unitária, podemos escrever ψ_j na forma abaixo, onde as operações e notações de $\mathcal{A}^*$ aparecem simplificadas.

$$\psi_j(t - 1/j) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in (-\infty, a - \frac{1}{j}] \cup (a - \frac{1}{j^2}, a + \frac{1}{j^2}) \cup [a + \frac{1}{j}, +\infty), \\ \frac{t j^3}{2 - \frac{3}{j}} - \frac{j^3(a - \frac{1}{j})}{2 - \frac{3}{j}}, & \text{se } t \in [a - \frac{1}{j}, a - \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}], \\ \frac{j}{2 - \frac{3}{j}}, & \text{se } t \in [a - \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}, a - \frac{1}{j^2}] \cup [a + \frac{1}{j^2}, a + \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}], \\ -\frac{t j^3}{2 - \frac{3}{j}} + \frac{j^3(a + \frac{1}{j})}{2 - \frac{3}{j}}, & \text{se } t \in [a + \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}, a + \frac{1}{j}]. \end{cases}$$

Gráfico de ψ_j :



Admitamos que a redução do tempo de ação da força considerada não altere a área determinada por ψ_j , que se mantém unitária.

Como no caso da função de Dirac, podemos considerar, quando j varia em $\mathbb{R}^+ - \{1\}$, que as funções ψ_j , assumindo valores infinitamente grandes, tendendo a uma função ψ que pode apresentar um comportamento contraditório em $[a - (1/j), a + (1/j)]$ (intervalo de inconsistência de ψ). Isto é, se $1/j^2$ assume valores muito próximos de zero, então

$$a - (1/j) \equiv a - j + (1/j^2), \quad a + (1/j) - (1/j^2) \equiv a + (1/j) + (1/j^2), \quad \text{e} \quad a + (1/j) - (1/j^2) \equiv a + (1/j),$$

que aplicados às sentenças que definem ψ_j , sugerem a possibilidade de ocorrência de saltos infinitos destas funções em $a - (1/j)$, e em $a + (1/j)$. Quando t e j^2 são hiper-reais infinitos de mesma ordem, podemos considerar que ψ_j torna-se equivalente a uma função δ_j , assim definida:

$$\delta_j(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a - 1/j, \text{ ou } t \geq a + 1/j, \\ j/2, & \text{se } a - 1/j \leq t \leq a + 1/j. \end{cases}$$

Obtemos daí, como caso limite das funções δ_j , uma espécie de extensão da função delta em $\mathcal{A}^*$, que denotaremos por δ^* , que apresenta um comportamento inconsistente na região difusa $\mathcal{A}$, de $[a]$, em consequência do salto infinito e instantâneo em a .

De acordo com as condições inicialmente estabelecidas, observamos que a área determinada por δ^* é unitária, ou, de forma análoga à função de Dirac,

$$\lim_{1/j \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(t-a) dt = \lim_{1/j \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_j(t-a) dt = \int_{a-1/j}^{a+1/j} \delta^*(t-a) dt = 1.$$

Consideremos, para fixar melhor as idéias anteriores, que as funções ψ_j representem aproximações para funções de probabilidade associadas a uma variável aleatória t , utilizada para a descrição de algum fenômeno quantificado em CHU_1 (o que é possível, dado que as ψ_j poderiam ser modificadas para se tornarem contínuas, em adendo ao fato assumido de que delimitam áreas unitárias). Isso significa que os *eventos possíveis*, isto é, os intervalos I para os quais a probabilidade $P(t \in I) \in (0, 1]$, são subconjuntos de $(a - (1/j), a - (1/j^2)) \cup (a + (1/j^2), a + (1/j))$. Quando, porém, um evento corresponde a uma subregião da região $\mathcal{A}$ de inconsistência de a , a sequência de funções ψ_j converge para a função δ^* , que, inconsistentemente, identifica-se com uma região de “área unitária” (correspondendo, geometricamente, à união de dois trapézios equivalentes de bases infinitesimais - ocasionalmente quase nilpotentes de ordem 2, e altura infinita), e ao mesmo tempo com uma região de área que pode ser considerada nula. Isto pela impossibilidade de se distinguir o seu domínio do domínio do evento nulo a .

Terminamos este capítulo com uma conjectura.

Embora estejamos já acostumados aos devaneios das obras de ficção (científica), deparamo-nos, por vezes, com notícias de experimentos cujos resultados surpreendem por roçar verdadeiramente a ficção. Um exemplo pode ser visto na revista *Nature*, vol. 421, de 30 de janeiro de 2003, que traz interessante artigo da equipe de pesquisadores em física aplicada da Universidade de Genebra, intitulado *Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths*²⁵. Nesse artigo é relatado um experimento realizado com sucesso pela equipe, liderada por Nicolas Gisin, cujo feito foi conseguir promover o teletransporte de propriedades de um fóton entre dois laboratórios distanciados entre si cerca de 55 metros, através de uma bobina de fibra ótica de dois quilômetros de comprimento, o que representa a maior distância já atingida em experimentos afins.

Parece-nos, do pouco que pudemos apreender do artigo considerado, que as partículas e suas propriedades teletransportadas apresentam aspectos aparentemente contraditórios. Ao mesmo tempo em que não podemos assegurar que estas possam ocupar uma posição específica no espaço, em determinado instante, podemos considerar que podem, por um momento, situar-se em dois locais distintos, como os pontos de saída e de chegada no teletransporte realizado. Isso ilustraria como as propriedades básicas das partículas não seguem os modelos clássicos do macrocosmo. Uma evidência do interesse despertado pelos resultados da pesquisa é o otimismo com que foram recebidos por pesquisadores de áreas emergentes, como *criptografia quântica* e *computação quântica*, que estudam formas para incrementar a segurança e a velocidade na transmissão e processamento de dados com o auxílio da física quântica.

Veremos, no Capítulo 3, como obter extensões do conjunto dos números

²⁵ *Qubits* são sistemas quânticos (unidades quânticas) que correspondem, nos processadores atômicos (ainda em estudo), aos bits com os quais é descrita a capacidade de um processador transistorizado atual.

reais e dos números naturais standard no hiperanel $\mathcal{A}$ e no quase-anel $\mathcal{A}^*$, através de funções especiais denominadas *monomorfismos*, definidas entre *superestruturas*. Através destas poderemos verificar como o modelo de da Costa, com sua lógica subjacente $C_1^=$, e sua teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 , estende, o cálculo clássico; além disso, veremos que o modelo de da Costa também estende, em certo sentido, a análise de Robinson, que por sua vez estende, da mesma forma, o cálculo clássico.

CAPÍTULO 3

SUPERESTRUTURAS PARACONSISTENTES E UM TEOREMA DE TRANSFERÊNCIA

Apresentamos, no capítulo anterior, resultados de um cálculo diferencial paraconsistente, que estendem resultados do cálculo diferencial clássico, conforme teoria delineada por Newton C. A. da Costa em **da Costa & Dória 1990**, **da Costa 1996**, **da Costa, Béziau & Bueno 1998** e **da Costa 2000**.

Embora a teoria proposta por da Costa seja essencialmente distinta da análise não-standard introduzida por Abraham Robinson, em certos aspectos, no entanto, sua teoria estende esta última.

Robinson 1996 (reedição revisada da primeira edição de 1966) estabelece, via *teoria dos tipos* e *teoria de modelos*, condições sob as quais propriedades de uma dada estrutura matemática são conservadas por certas extensões, em particular para o caso de estruturas determinadas pelo conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e sua extensão ${}^*\mathbb{R}$, usualmente denominada *conjunto dos números hiper-reais*. A conservação das propriedades básicas de uma estrutura, em uma sua extensão, é normalmente garantida para as propriedades de primeira ordem dos objetos classificados como *internos*, que compreendem *conjuntos*, *relações*, *funções*, etc. No caso do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, embora ${}^*\mathbb{R}$ constitua um contínuo não-arquimediano, o fato de seus conjuntos internos preservarem muitas das propriedades básicas de $\mathbb{R}$ foi o que possibilitou a Abraham Robinson o uso dos infinitésimos como base para o desenvolvimento da análise não-standard.

Robinson & Zakon 1967 e **Stroyan & Luxemburg 1976** apresentam esse procedimento de forma mais compreensível, utilizando *teoria de conjuntos* e *teoria de modelos*.

Como a caracterização de conjuntos internos e externos não depende significativamente da lógica subjacente considerada e, ainda, como as extensões $\mathcal{A}$ (hiperanel) e $\mathcal{A}^*$ (quase-anel) do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, de da Costa, são contínuos não-arquimedianos, parece viável estudar essas extensões utilizando procedimento semelhante ao utilizado por Robinson e Zakon no estudo da extensão não-standard dos números reais.

Limitamos nosso trabalho ao cálculo diferencial a uma variável, o que é natural face à construção do hiperanel $\mathcal{A}$ e do quase-anel $\mathcal{A}^*$ de da Costa.

Apresentamos, inicialmente, alguns pré-requisitos algébricos e de teoria de conjuntos, motivados por **Stroyan & Luxemburg 1976**, como a construção de ultrapotências, e de **Robinson & Zakon 1967**, cujo Teorema de Transferência não-standard tomamos como referência para a busca de um Teorema de Transferência paraconsistente.

Observamos que sempre que nos reportarmos especificamente às extensões $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ de $\mathbb{R}$, estaremos considerando, ainda que implicitamente, a lógica paraconsistente C_1^- e a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 subjacentes.

3.1. Superestruturas

Motivados pela análise não-standard de Robinson, no estudo das extensões paraconsistentes do cálculo diferencial clássico introduzimos uma extensão paraconsistente para o conceito de superestrutura.

As superestruturas representam, no âmbito da matemática, como sugere a denominação, grandes estruturas cujos elementos são construídos a partir de um conjunto básico - como por exemplo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais -, por um processo indutivo, tal que cada etapa incorpora todos os elementos anteriormente obtidos, além de novos elementos. A escolha do conjunto básico para uma superestrutura depende dos objetivos a serem alcançados. No nosso caso, são

candidatos naturais a conjuntos básicos para as superestruturas, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o hiperanel $\mathcal{H}$, e o quase anel $\mathcal{H}^*$, uma vez que desejamos confrontar propriedades do cálculo diferencial clássico, com propriedades da extensão paraconsistente do mesmo.

É desejável que o conjunto básico de uma superestrutura inclua um conjunto enumerável infinito, como o conjunto dos números naturais, ou uma extensão do mesmo, o que ocorre com $\mathbb{R}$, com $\mathcal{H}$ e com $\mathcal{H}^*$.

Nossas superestruturas paraconsistentes envolvem, portanto, extensões de $\mathbb{R}$, têm como lógica e teoria de conjuntos subjacentes, C_1^- e CHU_1 , respectivamente, e nelas podemos interpretar todos os conceitos matemáticos do cálculo diferencial paraconsistente, em construção.

Definimos, pois, uma superestrutura paraconsistente em CHU_1 , a partir da definição indutiva de seu conjunto universo X , como a seguir.

Definição 3.1. Seja X um conjunto (classicamente não vazio) infinito de indivíduos de CHU_1 . Definimos o conjunto X indutivamente:

$$X_0 = X,$$

$$X_1 = \wp(X_0),$$

$$X_2 = \wp(X_0 \cup X_1),$$

...

$$X_{n+1} = \wp\left(\bigcup_{k=0}^n X_k\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n.$$

O conjunto X (X_0) é um conjunto infinito de átomos, isto é, se $a \in X$, não podemos escrever " $x \in a$ ", qualquer que seja x .

Os elementos de X são ditos *entidades* de X , sendo que os elementos (átomos) de X são denominados *indivíduos* de X . Denotamos indistintamente por letras minúsculas ou letras maiúsculas, as entidades em geral; os indivíduos, em particular, são denotados exclusivamente por letras minúsculas.

Teorema 3.2. Um conjunto X de CHU_1 , construído como acima, satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\emptyset^*$ é uma entidade, isto é, $\emptyset^* \in X$;
- ii) Para cada n , X_n é uma entidade de X , isto é, $X_n \in X$;
- iii) X é transitivo, no sentido de que se y é uma entidade e $x \in y$, então x é uma entidade;
- iv) Se y é uma entidade e $x \subseteq y$, então x é uma entidade;
- v) Se x é uma entidade, então $\wp(x)$ é uma entidade;
- vi) Se x é um conjunto finito de entidades, então x é uma entidade;
- vii) Se x é uma entidade, então $\bigcup x$ é uma entidade;
- viii) Se $x_1, \dots, x_n$ são entidades, então $(x_1, \dots, x_n)$ é uma entidade;
- ix) Funções e relações cujos domínios e contradomínios são entidades, são entidades;
- x) Assumindo-se o Axioma da Escolha em CHU_1 , então este axioma vale para as entidades de X .

Demonstração

- i) Observemos que $\emptyset^* \in \wp(X_0) = X_1 \subseteq X$.
- ii) $X_n \in \wp(X_n) \subseteq X_{n+1}$.

- iii) Se y é uma entidade, então $y \in X_{n+1}$, para algum $n \geq 0$. Ou seja, $y \subseteq \bigcup_{k=0}^n X_k$ e, portanto, $x \in \bigcup_{k=0}^n X_k$. Logo, cada $X_k \subseteq \mathcal{X}$.
- iv) Se $y \in \mathcal{X}$, então existe n tal que $y \in X_{n+1}$, ou $\bigcup_{k=0}^n X_k \supseteq y \supseteq x$. Logo, $x \in \mathcal{X}$.
- v) Toda entidade x de $\mathcal{X}$ é um subconjunto de $\mathcal{X}$, pois $x \in X_{n+1}$, para algum n , e $x \subseteq X_0 \cup X_n \subseteq \mathcal{X}$. Logo, $\wp(x) \subseteq \wp(X_0 \cup X_n) = X_{n+1}$ e, por (iv), $\wp(x)$ é uma entidade.
- vi) Seja $x = \{a_1, \dots, a_p\}$, com $a_i \in \mathcal{X}$. Então, para todo i tal que $1 \leq i \leq p$, $a_i \in \bigcup_{k=0}^n X_k$, para algum n . Logo, $x \in X_{n+1}$.
- vii) Temos que $\bigcup x = \bigcup \{y : y \in x\}$. Como os indivíduos são átomos, se $y \in x$ e $y \in X_0$, então y não tem elementos e, portanto, não contribui para a união. Como $x \in X_{n+1}$, para algum n , então $\{z : \text{existe } y \in x \text{ com } z \in y\}$ é um subconjunto de $X_{n-1} \cup X_0$, e é um elemento de X_n e, portanto, é um elemento de $\mathcal{X}$.
- viii) É imediato, já que um par ordenado $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ é constituído por um conjunto de entidades, e $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x)$.
- ix) Consequência imediata de (viii).

Para a demonstração do item (x) observamos que, em geral, dada uma relação n -ária $F \in \mathcal{X}$, dizemos que F é uma entidade relacional n -ária de $\mathcal{X}$ quando o domínio e o contradomínio de F são entidades.

- x) Se $F \in \mathcal{X}$ é uma função n -ária cujo domínio e contradomínio são entidades, tal que $F(x)$ é uma entidade não-vazia para cada $x \in \text{dom}(F) \neq \emptyset$, então existe uma entidade f , tal que $f(x) \in F(x)$, para cada $x \in$

$\text{Dom}(F)$. Devemos mostrar que $f \in X$. De fato, cada $f(x) \in X$, por transitividade. Como o contradomínio de f , $\text{CD}(f)$, é um subconjunto de $\bigcup (\text{CD}(F))$, que é uma entidade, temos que $f \subseteq \text{Dom}(f) \times \text{CD}(f)$. $\square$

Observamos que subconjuntos quaisquer de X não são necessariamente entidades de X – as entidades são os conjuntos que são elementos de X , construtíveis, portanto, pelo processo indutivo anteriormente apresentado.

Uma consequência imediata de (viii) é que o produto cartesiano $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ de entidades é uma entidade, já que $x \times y \subseteq \wp(\wp(x \cup y))$.

Vamos, agora, tratar de mostrar que a classe de entidades sobre um dado conjunto é adequada para descrever certas teorias matemáticas, no caso, nosso cálculo diferencial paraconsistente.

Stroyan & Luxemburg 1976 define uma superestrutura, baseada em um conjunto infinito de átomos X , como o conjunto X (de acordo com a Definição 3.1) com as noções de igualdade e pertinência sobre os elementos de X .

Adaptamos esse conceito ao cálculo paraconsistente, definindo uma superestrutura paraconsistente como toda superestrutura cuja teoria de conjuntos subjacente é paraconsistente - no nosso caso CHU_1 -, tendo, portanto, como lógica subjacente, uma lógica paraconsistente - no nosso caso, $C_1^=$, estendida pela linguagem L introduzida no Capítulo 2, Seção 3.

Definição 3.3. Denominamos *superestrutura paraconsistente* sobre um conjunto X de átomos de CHU_1 , X classicamente não vazio e infinito, à estrutura $\langle X, =, \in, <, \equiv \rangle$, com X como na Definição 3.1.

Assim, se $X = \mathbb{R}$, temos a superestrutura $\mathcal{R}$, cujo universo tem como conjunto básico o conjunto dos números reais standard, que são os indivíduos de $\mathcal{R}$,

e cujas entidades são todos os elementos de $\mathcal{R}$.

Se $X = \mathcal{R}^*$ e se denotamos por $\mathcal{S}^*$ o universo construído a partir do conjunto $\mathcal{R}^*$ dos números hiper-reais, que são os indivíduos de $\mathcal{S}^*$, temos a superestrutura paraconsistente $\langle \mathcal{S}^*, =, \in, <, \equiv \rangle$.

Observamos que poderíamos ter definido uma superestrutura paraconsistente sobre um conjunto X , simplesmente como uma estrutura $\langle X, =, \in \rangle$, com X como na Definição 3.1, acrescentando-se a seguir os predicados $<$ e $\equiv$, por definição. Optamos, entretanto, pela definição acima.

Usaremos, sempre que conveniente, a mesma notação X para designar a superestrutura e seu universo.

Queremos, agora, mostrar que, dada uma superestrutura $\langle X, =, \in, <, \equiv \rangle$, existe uma superestrutura $\langle Y, =, \in, <, \equiv \rangle$, maior do que X , e uma imersão $\diamond: X \rightarrow Y$ que preserva toda a estrutura matemática de $\langle X, =, \in, <, \equiv \rangle$.

Seja $\langle X, =, \in, <, \equiv \rangle$ uma superestrutura baseada no conjunto de átomos X_0 . Seja $\langle Y, =, \in, <, \equiv \rangle$ uma superestrutura baseada em outro conjunto de átomos Y_0 que estende X_0 , $Y_0 = {}^*X_0$. Cada indivíduo $x \in X_0$ tem uma “extensão” *x em Y_0 , o mesmo ocorrendo com a entidade X_0 e $\{{}^*x: x \in X_0\} \subseteq {}^*X_0$, podendo ocorrer que $\{{}^*x: x \in X_0\} \neq {}^*X_0$.

Assumimos que ${}^*X_0 = Y_0$. Do mesmo modo, cada subconjunto A de X_0 ($A \subseteq X_0$) tem uma “extensão” *A e o conjunto potência $\wp(X_0) = X_1$ também tem uma “extensão” *X_1 . É importante observar que ${}^*\wp(X_0) \neq \wp({}^*X_0)$.

Dada uma “extensão” $\diamond: X \rightarrow Y$, definimos uma função σ no conjunto $\text{Ent}(X)$ das entidades de X por:

$$\sigma(A) = \{{}^*a: a \in A\}.$$

A função σ produz, em $\mathcal{Y}$, a *cópia standard* imersa de A .

A definição de *monomorfismo* entre superestruturas, que apresentamos a seguir, é fundamental para o estudo de extensões de superestruturas. Estaremos considerando o caso especial de superestruturas paraconsistentes, que têm como predicados primitivos a igualdade, $=$, a pertinência, $\in$, e os símbolos $<$ e $\equiv$, com o acréscimo de cláusulas relativas à negação fraca, como a preservação da diferença fraca de conjuntos.

Definição 3.4. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ superestruturas paraconsistentes. Uma função injetiva $\diamond: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um *monomorfismo* se satisfaz as condições a seguir, nas quais, para todo conjunto A de CHU_1 , a notação $\diamond A$ é usada para representar $\diamond(A)$ (ou $\diamond[A]$) de forma simplificada:

- i) Se $x = y$, então $\diamond x = \diamond y$ ($\diamond$ preserva a relação de igualdade “=”);
- ii) Se $x \equiv y$, então $\diamond x \equiv \diamond y$ ($\diamond$ preserva a relação de identidade paraconsistente “ $\equiv$ ”);
- iii) Se $x < y$, então $\diamond x < \diamond y$ ($\diamond$ preserva a relação de desigualdade “ $<$ ”);
- iv) $\diamond\{x\} = \{\diamond x\}$ ($\diamond$ preserva conjuntos unitários);
- v) $\diamond(A -^* B) = \diamond A -^* \diamond B$ ($\diamond$ preserva a diferença usual, ou diferença forte de conjuntos);
- vi) $\diamond(A - B) = \diamond A - \diamond B$ ($\diamond$ preserva a diferença fraca de conjuntos);
- vii) $\diamond(A \times B) = \diamond A \times \diamond B$ ($\diamond$ preserva o produto cartesiano de conjuntos);

viii) $\star(\tau \circ F) = \tau(\star F)$, onde τ é uma permutação de n elementos e F é uma relação n -ária ($\star$ comuta com permutações de variáveis);

ix) $\star(F^{-1}) = (\star F)^{-1}$ ($\star$ comuta com a relação inversa);

x) Sendo F uma relação binária, $\star(\text{Dom}(F)) = \text{Dom}(\star F)$ e $\star(\text{Im}(F)) = \text{Im}(\star F)$ ($\star$ preserva o domínio e a imagem de relações);

xi) $\star(A \cup B) = \star A \cup \star B$ ($\star$ preserva a união de conjuntos);

xii) Dado $A \in \mathcal{X}$, $\star\{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in y \in A\} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n, w) : (z_1, z_2, \dots, z_n) \in w \in \star A\}$ ($\star$ preserva a definição standard de conjuntos).

xiii) $\star$ produz uma extensão $\star A$ de $\sigma(A)$, $\sigma(A) \subseteq \star A$, ocorrendo a igualdade $\sigma(A) = \star A$ se, e somente se, A é um conjunto finito.

As propriedades acima, que caracterizam um monomorfismo, implicam que a imagem $\star \mathcal{X}$ da superestrutura $\mathcal{X}$ é um modelo paraconsistente de superestrutura.

O teorema seguinte apresenta propriedades complementares de um monomorfismo entre superestruturas, algumas delas necessárias para que possamos lidar com elementos de ordem superior da linguagem adotada para o cálculo diferencial paraconsistente.

Teorema 3.5. Se $\star: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um monomorfismo entre superestruturas paraconsistentes, são válidas as propriedades seguintes para indivíduos e entidades de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

I) $\star$ preserva as operações básicas de conjuntos:

i) a) $\star(\emptyset^\star) = \emptyset^\star$, em que $\emptyset^\star = \{x: \neg^\star(x = x)\}$;

b) $\star\emptyset = \emptyset$, em que $\emptyset = \{x: \neg(x = x)\}$;

ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \star A \subseteq \star B$;

iii) $x \in A \Leftrightarrow \star x \in \star A$;

iv) $\star(A \cap B) = \star A \cap \star B$.

II) i) $\star\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{\star x_1, \star x_2, \dots, \star x_n\}$ ($\star$ preserva conjuntos finitos);

ii) $\star(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\star x_1, \star x_2, \dots, \star x_n)$ ($\star$ preserva n-uplas finitas).

III) i) Dadas uma relação binária F e uma entidade A qualquer da superestrutura $\mathcal{X}$, temos que $\star(F[A]) = (\star F)[\star A]$;

ii) Se $z \in A \in \star X_{n+1}$, então $z \in \star X_0 \cup \star X_n$;

iii) Se $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A \in \star X_{n+1}$, então $x_k \in \star X_0 \cup \star X_n, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstração

I-i.a) Usando a Definição 3.4-ii e propriedades clássicas da diferença de conjuntos em CHU_1 , temos: $\star\emptyset^\star = \star(A -^\star A) = \star A -^\star \star A = \emptyset^\star$, para A uma entidade qualquer da superestrutura $\mathcal{X}$.

I-i.b) De forma semelhante ao caso anterior, mas agora para a diferença fraca de conjuntos, temos:

$$\star\emptyset = \star(A - A) = \star A - \star A = \emptyset.$$

I-ii) Temos, por propriedades clássicas das relações e operações de conjuntos

de CHU_1 , e por I-i.a, que

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow A -^* B = \emptyset^* \\ &\Leftrightarrow {}^*A -^* B = {}^*\emptyset^* (= \emptyset^*) \\ &\Leftrightarrow {}^*A \subseteq {}^*B. \end{aligned}$$

Chegaríamos ao mesmo resultado se utilizássemos, na demonstração, a diferença fraca de conjuntos. Observamos que, de uma eventual inconsistência $(A \subseteq B) \wedge \neg(A \subseteq B)$, obtemos ${}^*A \subseteq {}^*B$, porém não o inverso.

I-iii) Usando propriedades de CHU_1 , I-ii acima e a Definição 3.4-i, temos:

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \\ &\Leftrightarrow {}^*\{x\} \subseteq {}^*A \\ &\Leftrightarrow \{{}^*x\} \subseteq {}^*A \\ &\Leftrightarrow {}^*x \in {}^*A. \end{aligned}$$

I-iv) Sabendo que $A \cap B = A -^* (A -^* B)$, temos:

$$\begin{aligned} {}^*(A \cap B) &= {}^*(A -^* (A -^* B)) \\ &= {}^*A -^* {}^*(A -^* B) \\ &= {}^*A -^* {}^*A -^* {}^*B \\ &= {}^*A \cap {}^*B. \end{aligned}$$

II-i) Como $\{x_1, \dots, x_n\} = \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}$ temos, pela Definição 3.4 (i e viii), que

$${}^*\left(\bigcup_{j=1}^n \{x_j\}\right) = \bigcup_{j=1}^n {}^*\{x_j\} = \bigcup_{j=1}^n \{{}^*x_j\}, \text{ de onde obtemos o resultado desejado.}$$

II-ii) Observando que $(x_1, x_2) =_{\text{def}} \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$, temos, pelo item anterior, que

$$\begin{aligned} {}^*(x_1, x_2) &= {}^*\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \\ &= \{{}^*\{x_1\}, {}^*\{x_1, x_2\}\} \\ &= \{{}^*\{x_1\}, \{{}^*x_1, {}^*x_2\}\} \\ &= ({}^*x_1, {}^*x_2). \end{aligned}$$

Com este resultado, e sabendo que $(x) = x$, e que $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ pode ser escrita na forma $((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$, podemos, indutivamente, obter o resultado desejado.

III-i) Temos, pela Definição 3.4 (vii e ix), que ${}^*\text{Dom}(F) = \text{Dom}({}^*F)$ e ${}^*\text{Im}(F) = \text{Im}({}^*F)$. Mas $F[A] = \text{Im}(F \cap (A \times \text{Im}(F)))$, logo, temos, pela Definição 3.4-iv e Teorema 3.5-i,iv, que ${}^*F[A] = \text{Im}({}^*F \cap ({}^*A \times {}^*\text{Im}(F))) = \text{Im}({}^*F \cap ({}^*A \times \text{Im}({}^*F))) = ({}^*F)[{}^*A]$,

III-ii) Dado o conjunto $F = \{(x, y): x \in y \in X_{n+1}\}$ temos, pela Definição 3.4-(viii e ix), que ${}^*F = \{(z, w): z \in w \in {}^*X_{n+1}\}$. Como $x \in y \in X_{n+1}$ implica que $x \in X_{n+1} = X_0 \cup X_n$, temos que $\text{Dom}(F) \subseteq X_0 \cup X_n$, de onde, pela propriedade I-ii acima, temos também que $\text{Dom}({}^*F) \subseteq {}^*X_0 \cup {}^*X_n$. Logo, se $z \in A \in {}^*F$ então $(z, A) \in {}^*F$, isto é, $z \in {}^*X_0 \cup {}^*X_n$.

III-iii) Considerando o par $(x_1, x_2) \in A \in {}^*X_{n+1}$, podemos afirmar, pela Definição 3.4-viii que, de forma equivalente, $(x_1, x_2) \in {}^*X_0 \cup {}^*X_n$. Temos daí que $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \subset {}^*X_0 \cup {}^*X_n$, e, assim, que $x_1 \in {}^*X_{n+1}$ e $\{x_1, x_2\} \in {}^*X_{n+1}$. Mas $x_2 \in \{x_1, x_2\}$, logo, pelo Teorema 3.2-iii (se A é entidade de X , e $x \in A$, então $x \in X$), temos que $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2\} \in {}^*X_{n+1}$. Logo, $\{x_2\} \in {}^*X_{n+1}$ e, como $\{x_2\}$ é entidade e $x \in \{x_2\}$, temos, novamente pelo Teorema 3.2-iii, que $x_2 \in {}^*X_{n+1}$. Raciocinando indutivamente obtemos o resultado desejado. $\square$

Observações

- Uma consequência útil da Definição 3.4 e do Teorema 3.5-III.ii é que o monomorfismo $\diamond$ preserva conjuntos diagonais: se $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n): (x_1, \dots, x_n) \in y \in A, \text{ e } x_i = x_j, i, j = 1, \dots, n\}$, então ${}^*\Delta = \{(z_1, \dots, z_n): (z_1, \dots, z_n) \in w \in {}^*A, \text{ e } z_i = z_j, i, j = 1, \dots, n\}$.

- Outra consequência importante do Teorema 3.5-I.ii é que, se $F \in \mathcal{X}$ é uma relação n -ária, então $\star F$ é uma relação n -ária de $\mathcal{Y}$. Em particular, se π é a projeção $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$, então $\star(\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) = \pi(\star(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}))$, ou seja, $\star$ preserva a projeção nas n primeiras coordenadas.

A definição de *conjunto interno* de uma superestrutura paraconsistente, dada a seguir, corresponde à definição de **Robinson & Zakon 1967** para a análise não-standard.

Definição 3.6. Dado um monomorfismo $\star: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, entre as superestruturas paraconsistentes $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, definimos os *elementos internos* de $\mathcal{Y}$ como os elementos de

$$\star \mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \star X_n, \text{ com } X_0 \text{ o conjunto de indivíduos de } \mathcal{X}.$$

Os elementos de $\mathcal{Y}$ que não são internos são ditos *externos*.

Observações. Em decorrência da Definição 3.4-xiii, pela qual podemos definir uma função $\sigma: \text{Ent}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{Y}$, das entidades de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$, tal que, para uma entidade A qualquer de $\mathcal{X}$, $\sigma(A) =_{\text{def}} \{\star x : x \in A\}$, e da Definição 3.6, temos:

- Um elemento y de $\star \mathcal{X}$ é elemento interno de $\mathcal{Y}$ se existe k tal que $y \in \star X_k$, ou seja, se existe x em $\mathcal{X}$ tal que $y \in \star x$.

- No caso em que $X_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais standard, temos que $\sigma(\mathbb{R})$ é uma cópia (standard) de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{Y}$, com $\sigma(\mathbb{R}) \subseteq \star(\mathbb{R}) = \star \mathbb{R}$.

- Se $x \in X_0 = \mathbb{R}$, então $\star x \in \star X_0 = \star \mathbb{R} \subseteq \star \mathcal{R}$, de onde temos que todo indivíduo y de $\star \mathcal{R}$ é interno.

- No caso em que a superestrutura $\mathcal{X} = \mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ é construída sobre $R_0 =$

$\mathbb{R}$, e a superestrutura $\mathcal{U}$ é construída sobre uma extensão Y_0 de $\mathbb{R}$ contendo números infinitesimais e números infinitos, temos que os conjuntos desses números infinitesimais e infinitos não são internos.

Os conjuntos internos são particularmente importantes porque, analogamente ao que ocorre na análise não-standard de Robinson, dada uma fórmula α de L interpretada em uma superestrutura paraconsistente $\mathcal{R}$ construída sobre $\mathbb{R}$, as variáveis quantificadas de sua transformada $\diamond^i(\alpha)$, ou $\star^i\alpha$, variam apenas sobre conjuntos internos de extensões $\mathcal{U}$ de $\mathcal{R}$, construídas sobre extensões de $\mathbb{R}$. Espera-se, assim, que quando as variáveis livres de $\star^i\alpha$ estejam definidas para variar apenas sobre objetos internos de uma extensão $\mathcal{U}$ de $\mathcal{R}$, os valores de verdade de α em $\mathcal{R}$ sejam os mesmos valores de sua transformada em $\star\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$.

3.2. A superestrutura paraconsistente $\mathcal{R}$ e algumas de suas extensões.

A construção de extensões de superestruturas e de monomorfismos entre superestruturas pode ser realizada com o auxílio de funções de interpretação i , da linguagem L em superestruturas.

Stroyan & Luxemburg 1976 define o conceito de função de interpretação da linguagem $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\epsilon, =)$, subjacente à sua análise não-standard, em uma superestrutura $\mathcal{X}$. Motivados por essa definição de interpretação, adaptamos nossa Definição 1.33 de *interpretação*, adequando-a à linguagem L e às superestruturas paraconsistentes.

Consideraremos, a partir daqui, a superestrutura $\mathcal{R}$ (superestrutura paraconsistente construída sobre o conjunto $\mathbb{R}$), e fixaremos o hiperanel $\mathcal{A}$ e o quase anel $\mathcal{A}^*$ como conjuntos básicos para a construção de extensões de $\mathcal{R}$. Podemos, assim, estabelecer a definição a seguir, onde $\mathcal{M}$ é uma superestrutura paracon-

sistente, construída a partir de $\mathbb{R}$ ou de extensões de $\mathbb{R}$, dentre as quais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$.

Definição 3.7. Uma função de interpretação da linguagem L em uma superestrutura paraconsistente $\mathcal{M}$, construída sobre $\mathbb{R}$ ou uma extensão de $\mathbb{R}$, é uma função $\mathfrak{i}: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{M}$, injetora, com A um subconjunto do conjunto $C(L)$ das constantes da linguagem L .

Esta definição de interpretação corresponde a uma restrição do conceito introduzido na Definição 1.33.

Dada uma interpretação $\mathfrak{i}$, seja F uma fórmula fechada de L , cujas constantes $a_1, \dots, a_n$ pertencem ao domínio de $\mathfrak{i}$:

- i) Se t_1 e t_2 são constantes, $(t_1 = t_2)$ é interpretado como “a entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_1$ é igual ($=_{\mathcal{M}}$, em $\mathcal{M}$) à entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_2$ ”.
- ii) Se t_1 e t_2 são constantes, $(t_1 \in t_2)$ é interpretado como “a entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_1$ é um membro ($\in_{\mathcal{M}}$, em $\mathcal{M}$) da entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_2$ ”.
- iii) Se t_1 e t_2 são constantes, $(t_1 < t_2)$ é interpretado como “a entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_1$ é menor ($<_{\mathcal{M}}$, em $\mathcal{M}$) que a entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_2$ ”.
- iv) Se t_1 e t_2 são constantes, $(t_1 \equiv t_2)$ é interpretado como “a entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_1$ é quase idêntico ($\equiv_{\mathcal{M}}$, em $\mathcal{M}$) à entidade (ou indivíduo) $\mathfrak{i}t_2$ ”.

Interpretamos os símbolos $=$, $\in$, $<$ e $\equiv$ de L , na forma conjuntista usual, motivo pelo qual podemos dizer, como **Stroyan & Luxemburg 1976**, que nossas

interpretações levam L na teoria de conjuntos CHU_1 .

Observamos que os itens (iii) e (iv) poderiam ter sido omitidos, porque podem ser obtidos por definição de $<$ e $\equiv$, já que os símbolos $<$ e $\equiv$ não são símbolos primitivos de L .

Chamamos a atenção para o fato de que a possibilidade de interpretação de uma fórmula atômica não significa que a sua interpretação seja verdadeira. Em particular, quando ${}^i t_2$ é um indivíduo, $t_1 \in_M t_2$ (ou, simplificando, $t_1 \in t_2$) tem, necessariamente, quando $t_1 \in \text{Dom}(i)$, uma interpretação falsa, mas não tem interpretação quando $t_1 \notin \text{Dom}(i)$.

Podemos estender i aos símbolos de predicados e símbolos de funções de L , como no caso da Definição 1.33.

Nesse sentido, temos, em particular, que:

- ${}^i(t_1 = t_2) = 1$ se, e somente se, ${}^i t_1 =_M {}^i t_2$.
- ${}^i(t_1 \in t_2) = 1$ se, e somente se, ${}^i t_1 \in_M {}^i t_2$.
- ${}^i(t_1 < t_2) = 1$ se, e somente se, ${}^i t_1 <_M {}^i t_2$.
- ${}^i(t \equiv t) = 1$ se, e somente se, ${}^i t_1 \equiv_M {}^i t_2$.

Além disso, podemos associar a toda interpretação i , nas condições anteriores, uma função de valoração v_i , conforme a Definição 1.34 e a Definição 2.35, através da qual podemos verificar que toda sentença cujas constantes pertencem a $A \subseteq C(L)$, ou é *verdadeira* (válida) ou é *falsa* (não-válida), em M . Com isso, definindo v_i a partir de uma i -interpretação das constantes de um conjunto $A \subseteq C(L)$ na superestrutura $\mathcal{R}$ construída sobre o conjunto $\mathbb{R}$ (ou a partir de uma i' -interpretação das constantes de um conjunto $B \subseteq C(L)$ em uma extensão de $\mathcal{R}$, construída sobre uma extensão de $\mathbb{R}$), é possível valorar as sentenças de L cujas

constantes pertençam ao $\text{Dom}(i)$ (ou ao $\text{Dom}(i')$).

Dado um conjunto $A \subseteq C(L)$, não vazio, e uma interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow M$, definimos uma $C_L^=$ *valoração (-estendida)* de L como uma função v_i , do conjunto $^i\text{Sent}$ das sentenças (fórmulas fechadas) de L cujas constantes pertencem a A , em $\{0, 1\}$, de forma equivalente à Definição 1.33 e Definição 2.35.

Uma fórmula fechada F de L , cujas constantes pertencem ao $\text{Dom}(i)$, é *verdadeira* (ou *válida*), em uma superestrutura M , segundo uma interpretação i , se $v_i(F) = 1$.

Uma M_i -instância de uma fórmula F é uma fórmula fechada, obtida a partir de F , substituindo-se, adequadamente, todas as ocorrências de variáveis livres de F por constantes que pertencem ao $\text{Dom}(i)$.

Dada uma fórmula F de L , F é *válida* em M , *segundo* v_i , se $v_i(F) = 1$, para toda M_i - instância F_i de F .

Uma fórmula F de L é *válida* em M , se é válida em M segundo todas as valorações v_i .

A definição a seguir relaciona uma função de interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow M$ com o conjunto das sentenças válidas da linguagem L na superestrutura M , segundo i .

Definição 3.8. Seja $K_0 = K_0(i)$ um conjunto de sentenças da linguagem L , e $i: A \subseteq C(L) \rightarrow M$ uma função de interpretação de um subconjunto do conjunto das constantes de L na superestrutura M . Dizemos que M é um *modelo* para K_0 determinado por i , ou um *i -modelo*, se todas as constantes das sentenças F de K_0

estão no domínio de i , e F é válida em $\mathcal{M}$ segundo v_i , para toda $F \in K_0$.

Sejam $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$ uma interpretação de um conjunto A de constantes de L em $\mathcal{R}$, e $i': B \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{M}$, uma interpretação de um conjunto B de constantes de L em uma extensão paraconsistente $\mathcal{M}$ de $\mathcal{R}$. Supondo $\mathcal{R}$ um i -modelo de um conjunto K_0 de sentenças de L e $\mathcal{M}$ um i' -modelo de K_0 , se $i' \circ i^{-1}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{M}$ não é sobrejetora, dizemos que $(i' \circ i^{-1})(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}$ é um *modelo paraconsistente conjuntista* de $\mathcal{R}$. Observamos que se $F \in K_0$, então toda constante c que ocorre em F é tal que $c \in A \cap B$.

Considerando na Definição 3.8, em lugar de $K_0 = K_0(i)$, o conjunto $K_1 = K_1(i)$ de todas as fórmulas F de L válidas em $\mathcal{R}$ segundo uma valoração v_i , podemos obter, fixado um conjunto enumerável infinito J , um modelo paraconsistente para K_1 , que denotaremos por $\mathcal{R}^J$. Esse modelo que, como veremos, é composto por todas as seqüências determinadas por funções $f: J \rightarrow \mathcal{R}$ e pode, através de suas entidades finitas, ser parcialmente imerso na teoria de conjuntos CHU_1 , permite o estudo dos indivíduos e entidades de $\mathcal{R}$ representados como seqüências de $\mathcal{R}^J$.

A construção de $\mathcal{R}^J$ e de suas relações e operações requer a definição de ultrafiltro livre e de ultrafiltro δ -incompleto, que daremos a seguir.

Definição 3.9. Um *ultrafiltro* sobre um conjunto infinito enumerável J de CHU_1 é um conjunto não-vazio $\mathcal{U}$ de subconjuntos de J , isto é, $\mathcal{U} \subseteq \wp(J)$, satisfazendo as seguintes condições:

- i) $\emptyset^* \notin \mathcal{U}$ e $\emptyset \notin \mathcal{U}$
- ii) Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$, então $A \cap B \in \mathcal{U}$ (Propriedade da intersecção finita).
- iii) Se $A \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B \in \wp(J)$, então $B \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ é um superconjunto).

iv) Se $B \in \wp(J)$, então $B \in \mathcal{U}$, ou $B^{**} \in \mathcal{U}$, com B^{**} o complemento forte de B , isto é, $B^{**} = J -^* B$. ($\mathcal{U}$ é maximal).

Definição 3.10. Um *ultrafiltro livre* sobre um conjunto infinito enumerável J de CHU_1 é um ultrafiltro $\mathcal{U}$ que satisfaz a seguinte condição adicional:

v) Se A é finito, então $\neg^*(A \in \mathcal{U})$. (A coleção $\mathcal{U}$ não possui conjuntos finitos).

Definição 3.11. Um *ultrafiltro δ -incompleto* sobre um conjunto infinito enumerável J de CHU_1 é um ultrafiltro $\mathcal{U}$ que satisfaz a seguinte condição adicional:

v') Existe uma partição enumerável $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, de J , tal que $A_n \notin \mathcal{U}$, para cada n , e $\bigcup A_n = J \in \mathcal{U}$.

Definição 3.12. Com base nas propriedades das relações $=$, $\in$ e $<$, e nas operações $+$ e $\cdot$ do corpo $\mathbb{R}$ dos reais standard, para cada subconjunto B de $\mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, definimos os seguintes conjuntos:

$$I_B = \{(x, y) : x, y \in B \wedge x = y\}$$

$$P_B = \{(x, y) : x, y \in B \wedge x \in y\}$$

$$O_B = \{(x, y) : x, y \in B \wedge x < y\}$$

$$S_B = \{(x, y, z) : x, y, z \in B \wedge x + y = z\}$$

$$M_B = \{(x, y, z) : x, y, z \in B \wedge x \cdot y = z\}$$

Observamos que, quando não for necessária a explicitação do conjunto B da definição acima, serão omitidos os sub-índices de I , P , O , S e M .

Através desses conjuntos podemos representar, na linguagem de conjun-

tos, sentenças da linguagem clássica subjacente à superestrutura $\mathcal{R}$.

Consideremos, como exemplo, a sentença:

“O número real zero é elemento neutro da operação de adição do anel $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ”.

Identificando, pela função de interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$, os conjuntos anteriores, e o conjunto $\mathbb{R}$, como imagens respectivas de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta \in \text{Term}(L)$ (com $\text{Term}(L)$ o conjunto dos termos de L), isto é, $i(\alpha) = I, i(\beta) = O, i(\gamma) = S, i(\delta) = M$ e $i(\theta) = \mathbb{R}$, e assumindo a comutatividade da adição em $\mathbb{R}$, assim re-escrevemos a sentença dada:

$$((\forall x)(\exists y)((x \in \theta) \rightarrow ((y \in \theta) \wedge (x, 0, y) \in \delta \wedge (x, y) \in \alpha))).$$

Considerando um ultrafiltro $\mathcal{U}$, construído sobre um conjunto enumerável e infinito J , uma superestrutura $\mathcal{R}$ sobre o conjunto $\mathbb{R}$, e o conjunto $\mathcal{R}^J$ das funções $f: J \rightarrow \mathcal{R}$ (ou espaço das seqüências infinitas de indivíduos e de entidades quaisquer de $\mathcal{R}$), e procedendo conforme **Stroyan & Luxemburg 1976** - Seção 3.8, podemos definir funções de interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$ e $i^u: B \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}^J$, de tal forma que indivíduos e entidades quaisquer de $\mathcal{R}$ possam ser representados como seqüências infinitas de $\mathcal{R}^J$.

A imersão parcial de $\mathcal{R}^J$ em uma extensão $\mathcal{H}$ de $\mathcal{R}$, por outro lado, nos leva à determinação de uma função de interpretação $i': C \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{H}$, o que permite que funções e conjuntos representados como seqüências em $\mathcal{R}^J$ possam ser comparados com conjuntos da superestrutura $\mathcal{H}$. Esse processo pode ser repetido para a obtenção de extensões de *ultrapotências*²⁶ sobre $\mathcal{R}$, como ultra-

²⁶ Uma *ultrapotência* $\mathcal{R}^J/\mathcal{U}$ relativa à linguagem L e ao ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre um conjunto enumerável J é um ultraproduto da superestrutura $\mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, definido pelas seguintes cláusulas: i) Para cada constante c de L ,

potências sobre $\mathcal{A}^*$. Através dessas superestruturas, relações, operações e funções de interpretação, e de extensões adequadas dos conjuntos I, P, O, S e M da Definição 3.12, poderemos determinar um monomorfismo entre $\mathcal{R}$ e uma certa extensão de $\mathcal{R}$, como requisito fundamental para a obtenção do Teorema de Transferência almejado.

Pretendemos fazê-lo segundo a abordagem baseada em superestruturas de **Robinson & Zakon 1967**. Como falta a esta, no entanto, o processo de construção de ultrapotências e de um monomorfismo $\diamond$ adequado, buscamos em **S-troyan & Luxemburg 1976** elementos motivadores para o desenvolvimento que apresentamos.

Definição 3.13. Dado um ultrafiltro $\mathcal{U}$ δ -incompleto, sobre um conjunto infinito enumerável J, definimos as relações $=_u$, $<_u$, $\in_u$ e as operações $+_u$ e $\times_u$, entre seqüências $(a_j)_{j \in J}$ de indivíduos e $(A_j)_{j \in J}$ de entidades (não-indivíduos) de $\mathcal{R}^J$, ou, mais simplesmente, (a_j) e (A_j) , determinadas por funções $a: J \rightarrow \mathcal{R}$ e $A: J \rightarrow \mathcal{R}$, do seguinte modo:

i) $=_u$

$(a_j) =_u (b_j)$ se, e somente se, $\{j: a_j = b_j\} \in \mathcal{U}$, em que $=$ é a identidade de L;

$(A_j) =_u (B_j)$ se, e somente se, $\{j: A_j = B_j\} \in \mathcal{U}$, em que $A_j = B_j$ é a igualdade usual de conjuntos;²⁷

ii) $<_u$

$(a_j) <_u (b_j)$ se, e somente se, $\{j: a_j < b_j\} \in \mathcal{U}$;

iii) $\in_u$

$c^{(R)}$ é a classe de equivalência das n-uplas $[c^{(x)}]_{i \in J}$ módulo $\mathcal{U}$; ii) Para cada relação n-ária básica R de L, o valor de $R^{(R)}$ é dado por $\{[x_1]_u, \dots, [x_n]_u\} \in R^{(R)}$ se, e somente se, $\{i \in J: x_1(i), \dots, x_n(i)\} \in \mathcal{U}$, e iii) Para cada operação n-ária básica f de L, e cada n-upla $([x_1]_u, \dots, [x_n]_u)$, o valor de $f^{(R)}([x_1]_u, \dots, [x_n]_u)$ é $[f^{(R)}(x_1, \dots, x_n)]$.

²⁷ Podemos verificar, por ser o ultrafiltro $\mathcal{U}$ δ -incompleto, que dada uma entidade infinita A qualquer de $\mathcal{R}$, existem seqüências (A_j) de $\mathcal{A}^J$ tais que $(A_j) \neq_u (c)$, para toda seqüência constante (c) de $\mathcal{A}^J$.

$(a_j) \in_u (A_j)$ se, e somente se, $\{j: a_j \in A_j\} \in \mathcal{U}$;

iv) $+_u$

$(a_j) +_u (b_j) =_u (c_j)$ se, e somente se, $\{j: a_j + b_j = c_j\} \in \mathcal{U}$, onde $+$ é a adição usual de $\mathbb{R}$, e $=$ é a identidade de L .

Vejamos se $+_u$ está bem definida.

Suponhamos que as identidades $(a_j) =_u (a'_j)$ e $(b_j) =_u (b'_j)$ sejam válidas em $\mathbb{R}^J$. Então, pela definição da relação $=_u$, temos que $A = \{j: a_j = a'_j\} \in \mathcal{U}$, e $B = \{j: b_j = b'_j\} \in \mathcal{U}$. Sendo a identidade “=” uma relação de congruência em $\mathbb{R}$, temos que $a_j = a'_j$ acarreta $a_j + b_j = a'_j + b_j$, para todo $j \in J$, de onde $C = \{j: a_j + b_j = a'_j + b_j\} \in \mathcal{U}$.

Analogamente, $D = \{j: a'_j + b_j = a'_j + b'_j\} \in \mathcal{U}$.

Pela Definição 3.9-ii, temos, então, que $C \cap D = \{j: a_j + b_j = a'_j + b_j \text{ e } a'_j + b_j = a'_j + b'_j\} \in \mathcal{U}$. Concluimos daí, pela transitividade da relação “=” em $\mathbb{R}$, que $\{j: a_j + b_j = a'_j + b'_j\} \in \mathcal{U}$ e, portanto, que $(a_j) +_u (b_j) =_u (a'_j) +_u (b'_j)$, como queríamos. $\square$

v) $\times_u$

$(a_j) \times_u (b_j) =_u (c_j) \Leftrightarrow \{j: a_j \cdot b_j = c_j\} \in \mathcal{U}$, onde “.” é a multiplicação usual de $\mathbb{R}$ (normalmente omitida nas operações com reais standard).

Vejamos, agora, se a operação $\times_u$ está bem definida.

Sejam $(a_j) =_u (a'_j)$ e $(b_j) =_u (b'_j)$. Temos, pela definição da relação de igualdade “ $=_u$ ”, que existem os conjuntos $A = \{j: a_j b_j = c_j\} \in \mathcal{U}$ e $B = \{j: a'_j b'_j = d_j\} \in \mathcal{U}$. Como $(a_j) =_u (a'_j)$ e $\{j: a_j = a'_j\} \in \mathcal{U}$, e ainda, como “=” é uma relação de congruência, temos que $C = \{j: a_j b_j = a'_j b_j\} \in \mathcal{U}$, e $D = \{j: a'_j b_j = a'_j b'_j\} \in \mathcal{U}$. Temos

então, usando a Definição 3.9-ii, que $C \cap D = \{j: a_j b_j = a'_j b_j \text{ e } a'_j b_j = a'_j b'_j\} \in \mathcal{U}$. Daí, pela propriedade transitiva da relação "=", concluímos que $\{j: a_j b_j = a'_j b'_j\} \in \mathcal{U}$, ou seja, que $(c_j) =_u (d_j)$, e que $(a_j) \times_u (b_j) =_u (a'_j) \times_u (b'_j)$. $\square$

Teorema 3.14. A relação "=", da Definição 3.13, é uma relação de congruência.

Demonstração

- i) $(a_j) =_u (a_j)$, pois $a_j = a_j, \forall n$, e portanto, $\{j: a_j = a_j\} \in \mathcal{U}$.
- ii) Supondo que $(a_j) =_u (b_j)$, então, em vista da comutatividade da relação "=", temos também que $(b_j) =_u (a_j)$.
- iii) Se $(a_j) =_u (b_j)$, e $(b_j) =_u (c_j)$, então $A = \{j: a_j = b_j\} \in \mathcal{U}$ e $B = \{j: b_j = c_j\} \in \mathcal{U}$. Pela Definição 3.9-ii, temos que $A \cap B = \{j: a_j = b_j \text{ e } b_j = c_j\} \in \mathcal{U}$, e, portanto, $\{j: a_j = c_j\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_j) =_u (c_j)$.
- iii) Suponhamos que $(a_j) =_u (a'_j)$ e $(b_j) =_u (b'_j)$, ou seja, que $\{j: a_j = a'_j\} \in \mathcal{U}$ e $\{j: b_j = b'_j\} \in \mathcal{U}$. Temos, pela Definição 3.9-ii, que $\{j: a_j + b_j = a'_j + b'_j\} \in \mathcal{U}$, logo, $(a_j + b_j) =_u (a'_j + b'_j)$. Logo, conforme a definição de "+_u", $(a_j) +_u (b_j) =_u (a'_j) +_u (b'_j)$.

Analogamente podemos verificar, sob as mesmas condições anteriores, que $(a_j) \times_u (b_j) =_u (a'_j) \times_u (b'_j)$. $\square$

Dada uma interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$, podemos estabelecer, com o auxílio das propriedades do ultrafiltro $\mathcal{U}$, uma função de interpretação $i^u: B \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}^J$, satisfazendo as condições:

- $\text{Dom}(i) \subseteq \text{Dom}(i^u)$;
- Se $\alpha \in \text{Dom}(i)$ e $a = i\alpha$, então $i^u(\alpha) = f \in \mathcal{R}^J$, com $f(j) = a$, para todo $j \in J$;

• As i^u -interpretações das relações $\in, =$ e $<$, e das operações $+$ e $\times$ de L em $\mathbb{R}^J$ são, respectivamente, $\in_u, =_u, <_u, +_u$ e $\times_u$.

Observamos que i^u induz uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^J$, com a condição de que toda constante r de $\mathbb{R}$ seja identificada com a seqüência constante $(r, r, \dots, r, \dots)$, determinada por uma função $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(j) = r_j = r, \forall j \in J$, e toda entidade A de $\mathbb{R}$ pode ser associada a uma seqüência de conjuntos $(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots)$, determinada por uma função $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(j) = A_j$.

Teorema 3.15. $\langle \mathbb{R}^J, =_u, +_u, \times_u \rangle$ é um anel comutativo com unidade.

Demonstração

Vamos analisar apenas a propriedade associativa, e a existência do elemento neutro e do elemento simétrico de todo elemento de $\mathbb{R}^J$, relativamente à adição $+_u$.

i) Associatividade da adição $+_u$.

Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_j, \dots)$ em $\mathbb{R}^J$, temos, por definição, que $d =_u x +_u (y +_u z) \Leftrightarrow \{j : d_j = x_j + (y_j + z_j)\} \in \mathcal{U}$.

Do mesmo modo, $e =_u (x +_u y) +_u z \Leftrightarrow \{j : e_j = (x_j + y_j) + z_j\} \in \mathcal{U}$. Sabemos, porém, que dados A e B em $\mathcal{U}$, $A \cap B$ também está em $\mathcal{U}$, e que, $\forall j \in J$, $x_j + (y_j + z_j) = (x_j + y_j) + z_j$, logo, $\{j : d_j = x_j + (y_j + z_j)\} \cap \{j : e_j = (x_j + y_j) + z_j\} \in \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow \{j : x_j + (y_j + z_j) = (x_j + y_j) + z_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x +_u (y +_u z) =_u (x +_u y) +_u z$. Logo, $+_u$ é associativa.

ii) Elemento neutro da adição.

Sejam $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, c , e d , elementos de $\mathbb{R}^J$. Dado $y \in \mathbb{R}^J$, temos:

$$\mathbf{c} =_u \bar{0} +_u \mathbf{y} \Leftrightarrow \{j : \mathbf{c}_j = 0 + y_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{j : \mathbf{c}_j = y_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathbf{c} =_u \mathbf{y} \Leftrightarrow \bar{0} +_u \mathbf{y} =_u \mathbf{y} \quad (1)$$

$$\mathbf{d} =_u \mathbf{y} + \bar{0} \Leftrightarrow \{j : \mathbf{d}_j = y_j + 0\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{j : y_j = \mathbf{d}_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathbf{y} =_u \mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{y} +_u \bar{0} =_u \mathbf{y} \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $\bar{0} +_u \mathbf{y} =_u \mathbf{y} +_u \bar{0} =_u \mathbf{y}$, isto é, $\bar{0}$ é elemento neutro da adição $+_u$ em $\mathbb{R}^J$.

iii) Elemento simétrico de um elemento qualquer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ de $\mathbb{R}^J$, relativamente à operação $+_u$.

Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos que um elemento $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^J$ é simétrico de $\mathbf{x}$ se $\mathbf{x} +_u \mathbf{c} =_u \bar{0} =_u \mathbf{c} +_u \mathbf{x} \Leftrightarrow \{j : x_j + \mathbf{c}_j = 0\} \in \mathcal{U} \text{ e } \{j : 0 = \mathbf{c}_j + x_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{j : \mathbf{c}_j = -x_j\} \in \mathcal{U} \text{ e } \{j : -x_j = \mathbf{c}_j\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathbf{c} =_u -\mathbf{x}$, em que $-\mathbf{x}$ é a seqüência $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

As demais propriedades são demonstradas de forma semelhante. $\square$

$\langle \mathbb{R}^J, =_u, +_u, \times_u \rangle$ não é anel de integridade. Como é fácil ver, podemos ter $(x_n) \times_u (y_n) =_u \bar{0}$, com $\{j : x_j \neq 0\} \neq \emptyset$ e $\{j : y_j \neq 0\} \neq \emptyset$ (isso ocorre, por exemplo, se $x_{2k} = 0$, $x_{2k-1} = 1$, $y_{2k} = 1$ e $y_{2k-1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$).

Tendo demonstrado que $\langle \mathbb{R}^J, =_u, +_u, \times_u \rangle$ é um anel comutativo com unidade, e que $=_u$ é uma relação de congruência, temos, como resultado básico da teoria de anéis, que $\mathbb{R}^J / =_u$ é um anel (comutativo e com unidade).

Teorema 3.16. $\langle \mathbb{R}^J / =_u, *_u, *+_u, * \times_u \rangle$ é um anel comutativo com unidade.

Demonstração. Observamos que a relação $*=_u$ e as operações $*+_u$ e $* \times_u$ de $\mathbb{R}^J / =_u$ são induzidas, respectivamente, pela relação de igualdade $=_u$, e pelas operações $+_u$ e $\times_u$ de $\mathbb{R}^J$, do modo seguinte:

- $[a] \ast_{=u} [b]$ se, e somente se, $a =_u b$.
- $[a] \ast_{+u} [b] \ast_{=u} [c]$ se, e somente se, $a +_u b =_u c$.
- $[a] \ast_{\times u} [b] \ast_{=u} [c]$ se, e somente se, $a \times_u b =_u c$. □

Como $\mathbb{R}$ é base para $\mathcal{R}$ e $\mathbb{R}^J \subset \mathcal{R}^J$, $\mathbb{R}^J / \equiv_u$ pode ser tomado como base para uma superestrutura $\mathfrak{H}$ que estende $\mathcal{R}$. No caso clássico, esta é a superestrutura que fornece um modelo $\ast\mathcal{R}$ não-standard para a análise. Em nosso caso, vamos um pouco além na construção de superestruturas, estendendo $\mathfrak{H}$ a um modelo paraconsistente da análise, baseado no quase anel $\mathfrak{A}^\ast$. De fato, tomando como conjunto básico o quase anel $\mathfrak{A}^\ast$, pode ser construída uma superestrutura $\mathfrak{S}^\ast = (\mathfrak{S}^\ast, =, \equiv, \in, <)$, que estende $\mathcal{R}$. Com base em expediente já utilizado para mergulhar $\mathbb{R}$ em $\mathfrak{A}$, ou em $\mathfrak{A}^\ast$, podemos verificar, sem dificuldades, que $\mathbb{R}^J \subseteq \mathfrak{A}^{\ast J}$, de onde temos que $\mathcal{R}^J \subseteq \mathfrak{S}^{\ast J}$, este último, o conjunto das funções $f: J \rightarrow \mathfrak{S}^\ast$, ou espaço das hiperseqüências de $\mathfrak{S}^\ast$ (como as seqüências $(\langle r_j, f_j \rangle)$ de números hiper-reais finitos).

A ultrapotência $\mathfrak{S}^{\ast J}$ induz, como no caso de $\mathcal{R}^J$, uma função de interpretação $j^u: E \subseteq C(L) \rightarrow \mathfrak{S}^{\ast J}$, através da qual constantes pertencentes ao subconjunto E do conjunto de constantes da linguagem L podem ser interpretadas em $\mathfrak{S}^{\ast J}$, e relações e operações, como as introduzidas pela Definição 3.13 para $\mathcal{R}^J$, podem ser definidas para $\mathfrak{S}^{\ast J}$.

Definição 3.17. Consideremos um ultrafiltro $\mathcal{U}$ δ -incompleto sobre um conjunto enumerável infinito J . Definimos as relações $=_u, \equiv_u, <_u$ e $\in_u$, e as operações $+_u$ e $\times_u$ entre seqüências de $\mathfrak{A}^{\ast J}$ da seguinte maneira:

i) $=_u$

Dadas as seqüências de termos $(r_j)_{j \in J}$ e $(s_j)_{j \in J}$ de $\mathfrak{A}^{\ast J}$, temos:

$(r_j)_{j \in J} =_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: r_j = s_j\} \in \mathcal{U}$,

em que $=$ é o predicado primitivo de igualdade de L .

Informalmente, duas seqüências de termos de $\mathcal{T}^{*J}$ estão relacionadas por $=_u$, se é desprezível a quantidade de elementos correspondentes, que não são iguais, em ambas.

ii) $\equiv_u$

Dadas as seqüências de termos $(r_j)_{j \in J}$ e $(s_j)_{j \in J}$ de $\mathcal{T}^{*J}$, temos:

$(r_j)_{j \in J} \equiv_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: r_j \equiv s_j\} \in \mathcal{U}$,

em que $\equiv$ é o predicado de identidade generalizada de L .

Informalmente, duas seqüências de termos de $\mathcal{T}^{*J}$ estão relacionadas por $\equiv_u$, se é desprezível a quantidade de elementos correspondentes de ambas que diferem entre si por mais do que um infinitésimo.

iii) $\not\equiv_u$

Dadas as seqüências de termos $(r_j)_{j \in J}$ e $(s_j)_{j \in J}$ de $\mathcal{T}^{*J}$, temos:

$(r_j)_{j \in J} \not\equiv_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: \neg(r_j \equiv s_j)\} \in \mathcal{U}^{28}$.

iv) $<_u$

$(r_j)_{j \in J} <_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: r_j < s_j\} \in \mathcal{U}$,

em que $<$ é a relação de ordem de L .

v) $(r_j)_{j \in J} \in_u (s_j)$ se, e somente se, $\{j: r_j \in s_j\} \in \mathcal{U}$,

²⁸ De acordo com as cláusulas que definem a relação $\equiv$ em L , podemos ter seqüências de $\mathcal{T}^J$ apresentando comportamento inconsistente, caso a inconsistência dessa relação se manifeste entre seus membros.

sendo $\in$ o predicado primitivo de pertinência de L .

vi) $+_u$

$(t_j)_{j \in J} \equiv_u (r_j)_{j \in J} +_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: t_j \equiv r_j + s_j\} \in \mathcal{U}$,

em que $+$ é o símbolo da operação de adição de L .

vii) $\times_u$

Analogamente ao caso anterior, temos que $(t_j)_{j \in J} \equiv_u (r_j)_{j \in J} \times_u (s_j)_{j \in J}$ se, e somente se, $\{j: t_j \equiv r_j \times s_j\} \in \mathcal{U}$,

em que $\times$ é o símbolo da operação de multiplicação de L .

A partir daqui deixamos de representar regularmente os índices das seqüências de $\mathcal{A}^{*J}$, ficando subentendido que variam em J , conforme o enunciado acima.

Teorema 3.18. $\equiv_u$ é uma relação de congruência em $\mathcal{A}^{*J}$.

Demonstração

i) Propriedade reflexiva.

Dada uma seqüência qualquer (r_j) de $\mathcal{A}^{*J}$, temos que $(r_j) - (r_j) =_{\text{def}} (r_j - r_j) = (0)$, sendo $0 = \langle 0, 0 \rangle$ um infinitésimo. Logo, $\{j: r_j \equiv r_j\} = J \in \mathcal{U}$ e vale, então, a propriedade reflexiva para $\equiv_u$.

ii) Propriedade simétrica.

Suponhamos que $(r_j) \equiv_u (s_j)$. Sabemos, pelas propriedades de $\mathcal{A}^*$, que, se u é um infinitésimo, então $-u$ é um infinitésimo. Daí, sendo $r_j - s_j$ um infinitésimo, isto é, $r_j \equiv s_j$, igualmente teremos $s_j \equiv r_j$. Logo, $(s_j) \equiv_u (r_j)$ se, e somente se, $(r_j) \equiv_u (s_j)$, valendo, pois, a propriedade simétrica.

iii) Propriedade transitiva.

Suponhamos que $(r_j) \equiv_u (s_j)$, e que $(s_j) \equiv_u (t_j)$.

Como $A = \{j : r_j \equiv s_j\} \in \mathcal{U}$, e $B = \{j : s_j \equiv t_j\} \in \mathcal{U}$, temos, pela Definição (3.10-ii), que $C = A \cap B \in \mathcal{U}$, isto é, $C = \{j : r_j \equiv s_j \text{ e } s_j \equiv t_j\} \in \mathcal{U}$.

De forma equivalente, temos que $C = \{j : r_j \equiv s_j \text{ e } s_j \equiv t_j\} \in \mathcal{U}$. Mas para $j \in C$, temos, usando as operações do quase-anel $\mathcal{A}^*$, que $r_j - t_j = (r_j - s_j + s_j - t_j) = (r_j - s_j) + (s_j - t_j) = \langle 0, f_j \rangle + \langle 0, g_j \rangle = \langle 0, f_j + g_j \rangle$ (em que f_j e g_j são variáveis infinitesimais), que é um infinitésimo, pois $\lim_{x \rightarrow a} (f_j + g_j)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) + \lim_{x \rightarrow a} g_j(x) = 0 + 0 = 0$ ($a \in I \subseteq \mathbb{R}$, conforme a Definição (2.1)). Isso significa que $r_j \equiv t_j$, para todo $j \in C \in \mathcal{U}$. Logo, $(r_j) \equiv_u (t_j)$, e vale a propriedade transitiva.

Concluimos, assim, que $\equiv_u$ é relação de equivalência.

Vejamos agora se $\equiv_u$ é uma relação de congruência.

iv) Se $(r_j) \equiv_u (s_j)$, então $A = \{j : r_j \equiv s_j\} \in \mathcal{U}$. Considerando $(r_j) +_u (t_j)$ e $(s_j) +_u (t_j)$, sendo (t_j) uma hiperseqüência qualquer, temos, pela Definição 3.12, que existem (u_j) e (v_j) tais que $B = \{j : u_j \equiv r_j + t_j\} \in \mathcal{U}$, e $C = \{j : v_j \equiv s_j + t_j\} \in \mathcal{U}$. Mas, pela Definição 3.9-ii, $B \cap C \in \mathcal{U}$, ou seja, $(u_j) \equiv_u (v_j)$, ou ainda, $(r_j) +_u (t_j) \equiv_u (s_j) +_u (t_j)$. Logo, vale a propriedade $(r_j) +_u (t_j) \equiv_u (s_j) +_u (t_j)$, que comuta, dado que a operação $+$ do quase-anel $\mathcal{A}^*$ é comutativa.

Podemos, de modo semelhante, mostrar que $(r_j) \times_u (t_j) \equiv_u (s_j) \times_u (t_j)$ também comuta. Logo, $\equiv_u$ é uma relação de congruência em $\mathcal{A}^{*J}$. $\square$

A relação $\equiv_u$, estendida a $\mathcal{A}^{*J}$, é também, assim como demonstramos para $\mathcal{R}^J$, uma relação de congruência.

Definição 3.19. As relações e operações $\equiv_u$, $\leq_u$, $\in_u$, $+_u$ e $\times_u$ da Definição 3.17

induzem as seguintes relações e operações em $\mathcal{A}^{*J}/\equiv_u$:

- $[(x_j)]^* =_u [(y_j)]$ se, e somente se, $(x_j) =_u (y_j)$;
- $[(x_j)]^* \equiv_u [(y_j)]$ se, e somente se, $(x_j) \equiv_u (y_j)$;
- $[(x_j)]^* <_u [(y_j)]$ se, e somente se, $(x_j) <_u (y_j)$;
- $[(x_j)]^* \in_u [(y_j)]$ se, e somente se, $(x_j) \in_u (y_j)$;
- $[(x_j)]^* +_u [(y_j)] =_{\text{def}} [(x_j) +_u (y_j)]$;
- $[(x_j)]^* \times_u [(y_j)] =_{\text{def}} [(x_j) \times_u (y_j)]$;

para $[(x_j)] =_{\text{def}} \{(r_j) : (r_j) \equiv_u (x_j)\}$.

Pelo teorema anterior, dadas as operações $^*_+u$ e $^*_\times u$, e as relações $^*_=_u$, $^*_\equiv_u$, $^*_\in_u$ e $^*_{<_u}$, procedendo como na construção de $\mathcal{R}^J/_=_u$, podemos construir uma superestrutura $\mathfrak{S}^*$ sobre o quase-anel quociente $\mathcal{A}^{*J}/\equiv_u$ ²⁹, que estende a superestrutura $\mathfrak{H}$ e, por transitividade, estende também a superestrutura $\mathcal{R}$. Manteremos, com a devida cautela, as mesmas notações anteriores para as relações e operações dessa superestrutura. Através dessas novas relações e operações construímos o quase-anel $\mathcal{A}^{*J}/\equiv_u$.

Não formalizaremos essas construções por sua absoluta semelhança com construções desenvolvidas anteriormente neste trabalho, mas vamos apresentar, em seguida, considerações adicionais sobre algumas consequências das

²⁹ Conforme a Definição 3.2, $\mathfrak{S}^* =_{\text{def}} \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, onde $X_0 = \mathcal{A}^{*J}/\equiv_u$ e $X_{n+1} = \wp(\bigcup_{k=0}^n X_k)$.

mesmas.

3.3. Um Teorema de Transferência

Demonstramos, nesta seção, um Teorema de Transferência de uma superestrutura $\mathcal{R}$, construída sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, para uma superestrutura $\mathcal{S}$, construída sobre uma extensão do quase anel $\mathcal{A}^*$ que, restrito às fórmulas do cálculo diferencial clássico, desempenha papel semelhante ao do Teorema de Transferência de Robinson, do cálculo clássico para a análise não-standard. Trata-se, pois, de um teorema fundamental, segundo o qual uma fórmula T é um teorema do cálculo clássico se, e somente se, existe uma “interpretação de T ” que é um teorema do cálculo paraconsistente.

Assumida a existência das superestruturas do parágrafo anterior, podemos determinar funções de interpretação $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$, tomada como bijeção entre um subconjunto do conjunto das constantes de L e as constantes de $\mathcal{R}$, e $i'': C \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{S}$, uma função injetora com domínio em um subconjunto do conjunto das constantes da linguagem, e como contradomínio, a superestrutura $\mathcal{S}$.

Como, por construção, $\mathcal{S}$ contém entidades externas³⁰, que não pertencem à linguagem L , i'' não pode ser sobrejetora.

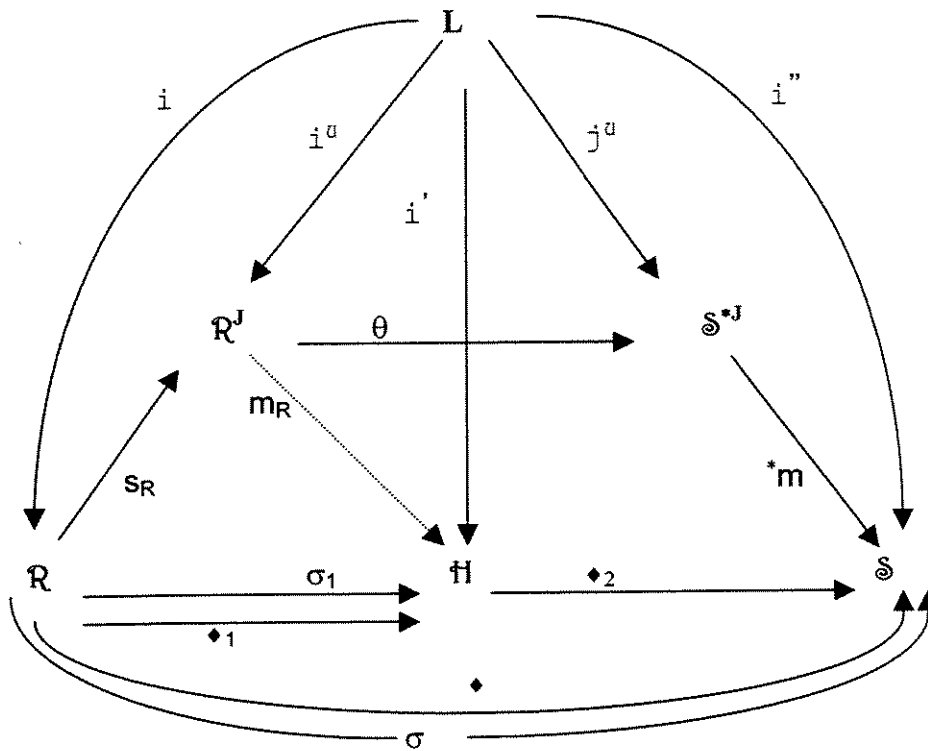
No diagrama abaixo, apresentamos todas as estruturas anteriormente descritas e funções através das quais estas se relacionam, algumas novas, cujas ações são explicitadas em seguida ao diagrama e outras anteriormente introduzidas. Lembramos que J é o conjunto enumerável infinito da definição de ultrafiltro (Definição 3.11).

Embora reconheçamos que o caminho seguido poderia ser um pouco

³⁰ Um modo de verificar isto é através do uso da condição de δ -incompletude do ultrafiltro $\mathcal{U}$, como no caso do conjunto dos infinitésimos de $\mathcal{A}$ (conforme **Stroyan & Luxemburg 1976** – 3.10, com as devidas adaptações à linguagem L).

abreviado, suprimindo a passagem pela superestrutura $\mathfrak{H}$, sua presença permite a análise de restrições interessantes do caso mais geral, inclusive um estudo comparativo entre o modelo correspondente à superestrutura paraconsistente $\mathfrak{S}$ e o modelo correspondente à superestrutura não standard de **Stroyan & Luxemburg 1976**.

Esta é a razão pela qual apenas nos aprofundaremos na análise das funções, do diagrama, que relacionam diretamente $\mathcal{R}$ e $\mathfrak{S}$.



- i, i', i'', i^u, j^u :- funções de interpretação, com domínio em subconjuntos A, B, C, D e E do conjunto $C(L)$ das constantes de L e contradomínios iguais a, respectivamente, $\mathcal{R}, \mathfrak{H}, \mathfrak{S}, \mathcal{R}^J$ e $\mathfrak{S}^{*J}$;

- $\mathbf{s}_R: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^J$: mergulho de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}^J$, que identifica cada constante r ou variável x , de $\mathcal{R}$, com uma seqüência constante $(r, \dots, r, \dots)$ ou uma seqüência $(x_1, x_2, \dots)$ de $\mathcal{R}^J$;
- $\theta: \mathcal{R}^J \rightarrow \mathcal{S}^{*J}$: mergulho de $\mathcal{R}^J$ em $\mathcal{S}^{*J}$, pelo qual toda seqüência da forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é associada a uma seqüência da forma $(\langle x_1, 0 \rangle, \langle x_2, 0 \rangle, \dots, \langle x_n, 0 \rangle, \dots)$ de números hiper-reais finitos, eventualmente constantes;
- $\mathbf{m}_R: \mathcal{R}^J \rightarrow \mathcal{H}$: mergulho de $\mathcal{R}^J$ em $\mathcal{H}$, que leva seqüências (x_j) de $\mathcal{R}^J$ em classes $[(y_j)]$ de $\mathcal{H}$, sendo $[(y_j)] = \{(z_n) \in \mathcal{R}^J : (z_j) =_u (y_j)\}$;
- $^*\mathbf{m}: \text{Fin}(\mathcal{S}^{*J}) \rightarrow \mathcal{S}$: função que associa seqüências de elementos finitos de $\mathcal{S}^{*J}$, (x_j) , a classes $[(x_j)]$, em $\mathcal{S}$;
- $\diamond_1$ (ou $^*\diamond_1$) : monomorfismo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{H}$, que pode ser construído nos moldes de **Stroyan & Luxemburg 1976**, Definição 3.10.1, p. 44.
- $\diamond_2$ (ou $^*\diamond_2$) : mergulho de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{S}$, que leva classes $[(x_j)]$ de $\mathcal{H}$ em classes $[(\langle x_j, 0 \rangle)]$ de $\mathcal{S}$:

$$\diamond_2([(x_j)]) = \diamond_2(\{(y_j): x_j =_u y_j\}) = \diamond_2(\{(y_j): \{j: x_j = y_j\} \in \mathcal{U}\}) = \{(\langle y_j, f \rangle): \langle y_j, f \rangle \equiv_u \langle x_j, 0 \rangle\} = [(\langle x_j, 0 \rangle)];$$
- $\diamond$ (ou $^*\diamond$) : monomorfismo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, a ser introduzido na Definição 3.20;
- $\sigma_1: C(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{H}$: função com domínio no conjunto das constantes de $\mathcal{R}$, pela qual uma cópia standard $\sigma_1(\mathbb{R}) = \{^*1x : x \in \mathbb{R}\}$ da base $\mathbb{R}$ de $\mathcal{R}$ é produzida em $\mathcal{H}$;

- $\sigma: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}$: função que determina uma cópia de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{S}$, tal que ${}^\sigma\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

Admitiremos, sem demonstração, que s_R , θ , m_R , e *m são funções, dada a evidência do fato.

Observações.

a) As funções $i: A \subseteq C(L) \rightarrow \mathbb{R}$, $i': B \subseteq C(L) \rightarrow \mathbb{H}$, $i'': C \subseteq C(L) \rightarrow \mathbb{S}$, $i^u: D \subseteq C(L) \rightarrow \mathbb{R}^J$ e $j^u: E \subseteq C(L) \rightarrow \mathbb{S}^{*J}$ são tais que $\text{Dom}(i) \subseteq \text{Dom}(i') \subseteq \text{Dom}(i'')$; $\text{Dom}(i^u) \subseteq \text{Dom}(j^u)$; $\text{Dom}(i) \subseteq \text{Dom}(i^u)$, e $\text{Dom}(i'') \subseteq \text{Dom}(j^u)$.

Podemos considerar, quanto às funções de interpretação:

a₁) Uma sentença da forma $\alpha = \beta$ de L é interpretada em $\mathbb{R}$ como $i(\alpha = \beta)$, ou $i(\alpha = \beta)$, e lida na forma “o objeto $i\alpha$ é igual ao objeto $i\beta$ ”;

a₂) $i'(\alpha = \beta)$ pode ser lida como “a classe $[i'(\alpha)]$ é igual à classe $[i'(\beta)]$ ”, o que, sendo verdade, significa que as seqüências $(i^u\alpha)$ e $(i^u\beta)$, de $\mathbb{R}^J$, diferem apenas numa quantidade “desprezível” de termos, ou seja, $(i^u\alpha) =_u (i^u\beta)$.

a₃) Dada uma sentença α de L , se $i\alpha = a$, temos $s_R(a) = (a)$, com (a) uma seqüência constante de $\mathbb{R}^J$. Por outro lado, supondo $i^u(\alpha) = \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$, em $\mathbb{R}^J$, com $\varphi(j) = a$, para todo j de J , temos $\theta(\varphi) = \psi$ em ${}^*\mathbb{S}^J$, com $\psi(j) = \langle a, 0 \rangle$, para todo j de J . Observamos que $v_i(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v_{i^u}(s_R(i\alpha)) = 1 \Leftrightarrow v_{j^u}(\theta(s_R(i\alpha))) = 1 \Leftrightarrow v_{i''}((m \circ \theta \circ s_R)(i\alpha)) = 1$.

a₄) Denotando a negação (clássica) $\neg$ utilizada no cálculo clássico em $\mathbb{R}$ por $\neg^{\mathbb{R}}$, observamos que a mesma corresponde, por $\diamond$, no cálculo paraconsistente

em ${}^*\mathcal{R}$, à negação forte $\neg^*$. Por desempenharem papéis equivalentes, vamos adotar para ambas a notação $\neg^*$ da negação forte.

a₅) Assim como no caso clássico, temos que $\langle \mathcal{R}^J, \in_u, =_u \rangle$ é um modelo para $\mathcal{R}$, relativamente à função de interpretação i^u , o mesmo ocorrendo com $\langle {}^*\mathcal{R}^J, \in_u, =_u \rangle$, em relação à função de interpretação j^u .

b) i' e i'' são injetivas, mas não são sobrejetoras, e $i'' = {}^*m \circ j^u$.

c) As funções s_R , θ , e *m são monomorfismos. A título de exemplo, pois todas as provas são equivalentes, indicamos a seguir a demonstração de que s_R é um monomorfismo.

Observamos, inicialmente que, se $x = y$ em $\mathcal{R}$ então, como $s_R(x) = (x_j) \in \mathcal{R}^J$, com $A = \{j : x_j = x\} \in \mathcal{U}$, e $s_R(y) = (y_j) \in \mathcal{R}^J$, com $B = \{j : y_j = y\} \in \mathcal{U}$, temos, pela definição de ultrafiltro, que $A \cap B \in \mathcal{U}$ ou seja, $\{j : x_j = y_j\} \in \mathcal{U}$. Logo, $s_R(x) =_u s_R(y)$.

Da mesma forma anterior, verificamos que, se $x < y$ então $s_R(x) <_u s_R(y)$.

Se $x \in A$, então, sendo $s_R(x) = (x_1, x_2, \dots)$ e $s_R(A) = (A_1, A_2, \dots)$, com $\{x_1, x_2, \dots\} =_u \{x, x, \dots\}$, e $\{A_1, A_2, \dots\} =_u \{A, A, \dots\}$, temos que $\{j : x \in A\} =_u \{j : x_j \in A_j\}$, isto é, $s_R(x) \in_u s_R(A)$.

Dado agora o conjunto unitário $\{x\}$, uma entidade de $\mathcal{R}$, temos, pela definição de s_R , que $s_R(\{x\}) = (\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_j\}, \dots) \in \mathcal{R}^J$, com $\{j : \{x_j\} = \{x\}\} \in \mathcal{U}$. Mas $\{x_j\} = \{x\}$ se, e somente se, $x_j = x$, de onde temos que $\{j : x_j = x\} = \{j : \{x_j\} = \{x\}\}$. Decorre daí que $\{s_R(x)\} = \{(x_1, x_2, \dots)\} =_u \{(x, x, \dots)\} = \{\{x\}, \{x, x\}, \{x, x, x\}, \dots\} = \{\{x\}, \{x\}, \{x\}, \dots\} =_u \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots\} = s_R(\{x\})$.

O caso acima pode ser generalizado para conjuntos finitos, isto é, se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{R}$, então $s_R(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = \{s_R(x_1), s_R(x_2), \dots, s_R(x_n)\}$.

$$\begin{aligned} s_R(A \times B) &= s_R(\{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}) = s_R(\{\{\{x\}, \{x, y\}\} : x \in A \text{ e } y \in B\}) = \\ &= \{s_R(\{\{x\}, \{x, y\}\}) : x \in A \text{ e } y \in B\} = \{\{s_R(\{x\}), s_R(\{x, y\})\} : x \in A \text{ e } y \in B\} = \\ &= \{\{s_R(\{x\}), \{s_R(x), s_R(y)\}\} : x \in A \text{ e } y \in B\} = s_R(A) \times s_R(B). \end{aligned}$$

As demais cláusulas da definição de monomorfismo, como as que se referem a relações e funções, são demonstradas com o auxílio das propriedades acima, relativas a conjuntos e produto cartesiano.

d) Através das funções auxiliares, apresentadas acima, usando o fato de que partes do diagrama acima comutam, podemos determinar os monomorfismos $\diamond_1$ e $\diamond$:

$$d_1) \quad \diamond_1 = m_R \circ s_R,$$

$$d_2) \quad \diamond = {}^*m \circ \theta \circ s_R.$$

Definição 3.20. Dadas as superestruturas $\mathcal{R} = (\mathcal{R}, =, \in)$ e $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, =_u, \in_u, <_u, \equiv_u)$, o monomorfismo $\diamond: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ é definido por:

- Dada uma constante $c \in \mathbb{R}$ em $\mathcal{R}$, esta é associada, por s_R , à função $j: J \rightarrow \mathcal{R}$, tal que $s_R(c) = c_j = c$, ou seja, c é associada à seqüência $(c_j) = (c, c, \dots, c, \dots)$ de $\mathcal{R}^J$. A seqüência (c_j) é associada, então, através da função θ , à seqüência $(\langle c_j, 0 \rangle)$, de $\mathcal{S}^{*J}$. Esta, através de *m e da relação de congruência $\equiv_u$, é (univocamente) associada à classe $[(\langle c_j, 0 \rangle)]$ de $\mathcal{S}$, que corresponde a *c , imagem de c por $\diamond$.

- Analogamente, uma variável $x \in \mathbb{R}$ é associada, por s_R , a uma seqüência $(x_1, \dots, x_j, \dots)$ de $\mathcal{R}^J$, que é associada, por θ , a uma seqüência $(\langle x_1, f_1 \rangle, \dots, \langle x_j, f_j \rangle, \dots)$ de $\mathcal{S}^{*J}$. Esta, como no caso anterior, é (univocamente) associada à classe $[(\langle x_j, f_j \rangle)]$, de $\mathcal{S}$ que corresponde a *x , imagem de x por $\diamond$.

- Considerando o conjunto de todas as classes de seqüências de constan-

- Considerando o conjunto de todas as classes de seqüências de constantes acima, em $\mathfrak{S}$, dois conjuntos podem ser determinados:

$$M_0 = \{[(\langle x_j, f_j \rangle)] : (x_j) = s_R(x), \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$N_0 = \{[(\langle c, 0 \rangle)] : c \in \mathbb{R}\}, \text{ tal que } N_0 \subseteq M_0.$$

Definimos:

$${}^*\mathbb{R} = M_0 \text{ e } \sigma(\mathbb{R}) = N_0.$$

- Se A é uma entidade de $\mathcal{R}$, com $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos os conjuntos

$$A_1 = {}^*A = \{[b_j] \in M_2 : b_j \in_u A_j, \text{ com } (A_j) \equiv_u (A)\},$$

e

$$A_2 = \sigma(A) = \{[(c)] : c \in A\}.$$

Observamos que $A_2 \subseteq A_1$, valendo a igualdade se A é uma entidade finita.

- Tomando $S_0 = {}^*\mathbb{R} = M_0$, podemos obter através da função σ uma cópia standard de $\mathbb{R}$ ($\sigma(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R} \subseteq \mathfrak{S}$):

$$S_0 = M_0,$$

$$S_1 = \wp(S_0),$$

$$S_2 = \wp(S_0 \cup S_1),$$

...

$$S_{n+1} = \wp\left(\bigcup_{k=0}^n S_k\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathfrak{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Podemos verificar, considerando a superestrutura $\mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n$, que ${}^*\mathcal{R}_k \subseteq$

$$\wp(\star R_1 \cup \dots \cup \star R_{k-1}) \subseteq \wp(S_1 \cup \dots \cup S_{k-1}) = S_k, \text{ para todo } k.$$

Para confrontar propriedades clássicas das sentenças de $\mathcal{R}$ com suas $\star$ -transformadas em $\mathcal{S}$ (ou extensões de $\mathcal{S}$), restritas a entidades internas de $\mathcal{S}$, não necessitamos de toda a superestrutura que obtivemos sobre $\mathcal{S}^{\star J}$. Poderíamos nos restringir à sua sub-superestrutura $\mathcal{S}'$, determinada sobre $\mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u$, na qual a relação de congruência $\equiv_u$ é substituída pela relação de congruência $=_u$.

Iniciamos, agora, a construção de extensões dos conjuntos I, P, O, S e M , da Definição 3.12, na superestrutura $\mathcal{S}$, através das quais podemos determinar as transformadas $\star \phi$ de sentenças fechadas ϕ de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{S}$, na linguagem de conjuntos. Vamos utilizar a mesma notação para as variáveis associadas em $\mathcal{R}$ e em $\mathcal{S}$, o que simplifica bastante nosso trabalho e não apresenta maiores inconvenientes.

Definição 3.21. Considerando as superestruturas $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u$ e os conjuntos I, P, O, S e M , da Definição 3.12, definimos os conjuntos $\star I, \star P, \star O, \star S$ e $\star M$ em $\mathcal{S}'$, com o auxílio das relações e operações obtidas para $\mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u$ através da Definição 3.19:

- i) $\star I = \star \{(x, y) : x, y \in B \subseteq \mathbb{R} \wedge x = y\} =_{\text{def}} \{(x, y) : x, y \in \star B \subseteq \mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u \wedge x \equiv_u y\};$
- ii) $\star P = \star \{(x, y) : x, y \in B \subseteq \mathbb{R} \wedge x \in y\} =_{\text{def}} \{(x, y) : x, y \in \star B \subseteq \mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u \wedge x \in_u y\};$
- iii) $\star O = \{(x, y) : x, y \in \star B \subseteq \mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u \wedge x \prec_u y\};$
- iv) $\star S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \star B \subseteq \mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u \wedge x \star +_u y \equiv_u z\};$
- v) $\star M = \{(x, y, z) : x, y, z \in \star B \subseteq \mathcal{S}^{\star J}/\equiv_u \wedge x \star \times_u y \equiv_u z\}.$

Observações. • Usaremos implicitamente, na análise de fórmulas do cálculo clássico, o fato de que toda ocorrência de uma variável em uma fórmula atômica, ou termo, é livre, bem como o de que toda ocorrência de uma variável em $\neg^*(\alpha)$ ou em $\alpha \square \beta$, onde $\square$ é um dos conectivos primitivos de $C_1^=$, é livre (ligada) se, e somente se, for livre (ligada) em α e em β .

• Uma vez definidas as funções de interpretação i e i'' de constantes da linguagem L em $\mathcal{R}$ e em $\mathcal{S}$, respectivamente, e as valorações associadas v_i e $v_{i''}$, podemos reescrever os conjuntos das Definições 3.12 e 3.21, como, por exemplo, o conjunto

$$I = \{((x, y): x, y \in B \subseteq \mathbb{R} \text{ e } v_i({}^i x = {}^i y) = 1\} \text{ e}$$

$${}^*I = \{((x, y): x, y \in {}^*B \subseteq \mathcal{S} \text{ e } v_{i''}({}^{i''} x \equiv_u {}^{i''} y) = 1\}.$$

Lema 3.22. Seja $t(x_1, \dots, x_n)$ um termo e $c_j = {}^i a_j$, $j=1,2,\dots,n$, constantes de L interpretadas em $\mathcal{R}$. Se $\diamond(t(x_1, \dots, x_n))$ (ou ${}^*t(x_1, \dots, x_n)$) é a transformada de t em $\mathcal{S}$ pelo monomorfismo $\diamond$, e os elementos $[(\langle c_i, 0 \rangle)]$ de $\mathcal{S}$ são internos, então $({}^*t)([(\langle c_1, 0 \rangle)], \dots, [(\langle c_n, 0 \rangle)]) = [(\langle t(c_1, \dots, c_n), 0 \rangle)]$ (classe determinada na sub-superestrutura $\mathcal{S}' = \mathcal{T}^J/\equiv_u$, a partir de uma hiperseqüência de $\mathcal{S}^{*J}$ e das relações e operações definidas anteriormente para $\mathcal{T}^{*J}$ e $\mathcal{T}^{*J}/\equiv_u$).

Demonstração

I) Se t é uma constante real α de L , com ${}^i \alpha = c \in \mathbb{R}$, temos, como decorrência da construção de $\diamond$, que α pode ser identificada, através da função $s_{\mathcal{R}}$ do diagrama anterior, com uma seqüência constante $(c, c, \dots, c, \dots)$ em $\mathcal{R}^J$, que pode ser associada, então, com o auxílio da função θ do mesmo diagrama, com a seqüência $(\langle c, 0 \rangle, \dots, \langle c, 0 \rangle)$ em $\mathcal{S}^{*J}$, que pertence à classe $[(\langle c, 0 \rangle)]$ de $\mathcal{S}^{*J}/\equiv_u$. Temos, assim, compondo as funções daquele diagrama:

II) Se t é uma variável x , o procedimento é semelhante ao anterior, onde x é associada, por s_R , com uma seqüência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, em $\mathcal{R}^I$.

III) Se $t = F(t_1, t_2, \dots, t_n)$, admitindo a validade do resultado para t_j , $j = 1, 2, \dots, k$, temos:

$$\begin{aligned}
 {}^*(F(c_1, \dots, c_n)) &= {}^*F({}^*t_1([\langle c_1, 0 \rangle]), \dots, {}^*t_k([\langle c_n, 0 \rangle])) \\
 &= {}^*F([\langle t_1(c_1, \dots, c_n), 0 \rangle], \dots, [\langle t_k(c_1, \dots, c_n), 0 \rangle]) \\
 &= [\langle F(t_1(c_1, \dots, c_n), \dots, t_k(c_1, \dots, c_n)), 0 \rangle] \\
 &= [\langle t(c_1, \dots, c_n), 0 \rangle] \\
 &= [\langle F(c_1, \dots, c_n), 0 \rangle]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Considerando que as fórmulas do cálculo diferencial clássico podem ser traduzidas em $\mathcal{R}$ através da linguagem L – como sugerem os axiomas básicos do cálculo $C_1^=$ e as cláusulas do Teorema 1.13, juntamente com as propriedades da teoria CHU_1 de conjuntos -, podemos enunciar um Teorema de Transferência entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente.

Teorema 3.23 *Teorema de Transferência*

Sejam as superestruturas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, as funções de interpretação i e i'' , e o monomorfismo $\diamond$, como introduzidos acima, e seja $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma fórmula de L , cujas variáveis livres estão entre $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nessas condições, $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é válida em $\mathcal{R}$ segundo v_i se, e somente se, $\diamond(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n))$ é válida em $\mathcal{S}$ segundo $v_{i''}$.

Demonstração

Devemos mostrar que, para toda fórmula α de L , $v_i(\alpha) = 1$ se, e somente se, $v_{i''}({}^*(\alpha)) = 1$.

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento de α .

I) Seja α uma sentença atômica de L . Temos os seguintes casos a considerar:

(I-i) α é do tipo $t_1 = t_2$.

Se α é do tipo $t_1 = t_2$, como α é fechada, t_1 e t_2 são termos sem variáveis e temos:

$$\begin{aligned} v_i(t_1 = t_2) = 1 &\Leftrightarrow v_i(t_1) = v_i(t_2) \Leftrightarrow {}^i t_1 = {}^i t_2 \Leftrightarrow ({}^i t_1, {}^i t_2) \in I \\ &\Leftrightarrow (\star({}^i t_1), \star({}^i t_2)) \in \star I \Leftrightarrow \star({}^i t_1) \equiv_u \star({}^i t_2) \Leftrightarrow {}^{i''}(\star({}^i t_1)) \equiv_u {}^{i''}(\star({}^i t_2)) \Leftrightarrow \\ &v_{i''}(\star({}^i t_1)) = v_{i''}(\star({}^i t_2)) \Leftrightarrow v_{i''}(\star({}^i t_1 = {}^i t_2)) = 1. \end{aligned}$$

(I-ii) α é do tipo $t_1 < t_2$.

Se α é do tipo $t_1 < t_2$ então, como no caso anterior, temos:

$$\begin{aligned} v_i(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow {}^i t_1 < {}^i t_2 \Leftrightarrow ({}^i t_1, {}^i t_2) \in O \Leftrightarrow \star({}^{i''} t_1, {}^{i''} t_2) \in \star O \Leftrightarrow (\star({}^{i''} t_1), \star({}^{i''} t_2)) \in \\ \star O &\Leftrightarrow \star({}^{i''} t_1) \prec_u \star({}^{i''} t_2) \Leftrightarrow v_{i''}(\star({}^{i''} t_1)) = v_{i''}(\star({}^{i''} t_2)) \Leftrightarrow v_{i''}(\star({}^i t_1 < {}^i t_2)) = 1. \end{aligned}$$

Logo, $t_1 < t_2$ é válida em $\mathcal{R}$ se, e somente se, $\star t_1 \prec_u \star t_2$ é válida em $\star \mathcal{R}$.

(I.iii) α é $t_1 \in t_2$.

A demonstração no caso de α ser do tipo $t_1 \in t_2$ é idêntica, utilizando-se o conjunto P em $\mathcal{R}$.

II) Seja α uma fórmula atômica qualquer.

II.i) α é do tipo $(t_1 = t_2)$, sendo $t_1 = t_2$ termos quaisquer.

Temos, neste caso, para toda $\mathcal{R}$ -instância $(t_1 = t_2)'$ de α :

$$\begin{aligned} v_i(t_1 = t_2)' = 1 &\Leftrightarrow v_i(t_1' = t_2') = 1 \Leftrightarrow v_i(t_1') = v_i(t_2') \Leftrightarrow {}^i t_1' = {}^i t_2' \text{ se, e somente} \\ \text{se, como no caso (I.i), } &\star({}^i t_1' = {}^i t_2') \in \star I \Leftrightarrow v_{i''}(\star({}^i t_1' = {}^i t_2')) = 1. \end{aligned}$$

Nos demais casos, a demonstração recai em (I.ii) ou em (I.iii).

III) Hipótese de indução.

Consideramos que o teorema vale para fórmulas de comprimento menor do que n .

IV) Demonstremos que o teorema vale para fórmulas α de comprimento n .

IV.i) Seja α uma fórmula do tipo $\neg^* \beta$.

$v_i''(\neg^* \beta) = 1$ se, e somente se, para toda $\mathcal{S}$ -instância β' de β , temos

$v_i''(\neg^* \beta) = 1 \Leftrightarrow v_i''(\neg^* \beta') = 1 \Leftrightarrow v_i''(\beta') = 0$ (pela hipótese de indução)

$\Leftrightarrow v_i(\beta') = 0 \Leftrightarrow v_i(\neg^* \beta') = 1$, para toda $\mathcal{R}$ -instância β' de β , $\Leftrightarrow v_i(\neg^* \beta) = 1$
 $\Leftrightarrow v_i(\alpha) = 1$.

IV.ii) Seja α uma fórmula do tipo $\beta \wedge \gamma$, sendo β e γ de comprimento menor do que n .

Temos que $v_i(\alpha) = 1$ se, e somente se, para toda β' $\mathcal{R}$ -instância de β , e toda γ' instância de γ , temos $v_i(\beta' \wedge \gamma') = 1 \Leftrightarrow v_i(\beta') = v_i(\gamma') = 1$ (pela hipótese de indução) $\Leftrightarrow v_i''(\beta) = v_i''(\gamma) = 1 \Leftrightarrow v_i''(\beta' \wedge \gamma') = 1 \Leftrightarrow v_i''(\beta' \wedge \gamma') = 1 \Leftrightarrow v_i''(\beta \wedge \gamma) = 1 \Leftrightarrow v_i''(\alpha) = 1$.

IV.iii) Seja α uma fórmula do tipo $\exists x \beta$.

$v_i(\alpha) = 1$ se, e somente se, existe uma $\mathcal{R}$ -instância β' de β , tal que

$v_i(\beta') = 1$. Por hipótese de indução, temos:

$v_i''(\beta') = 1 \Leftrightarrow v_i''(\exists x(\beta')) = 1 \Leftrightarrow v_i''(\exists x \beta) = 1 \Leftrightarrow v_i''(\exists x \beta) = 1$
 $\Leftrightarrow v_i''(\alpha) = 1$.

Como nos restringimos a fórmulas livres da negação primitiva (negação fraca) do sistema $C_1^=$, os demais casos podem ser determinados através dos casos acima, como classicamente se faz. $\square$

Pelo Teorema de Transferência acima, como, dada qualquer interpretação $i : A \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{R}$ corresponde uma interpretação $i'' : B \subseteq C(L) \rightarrow \mathcal{S}$, temos que uma fórmula α de L é válida em $\mathcal{R}$ se, e somente se, sua transformada ${}^*\alpha$ é válida em $\mathcal{S}$ (ou, mais apropriadamente, em ${}^*\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$).

Observação. O teorema acima pode ser considerado um caso especial do Teorema de Łoś.

Aplicação 3.24 Todo conjunto interno $B \subseteq {}^*\mathbb{R} \in \mathcal{S}'$, não vazio e limitado superiormente, possui um supremo (isto é, um menor extremo superior).

Demonstração

Sabemos do cálculo diferencial clássico que se A é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $a \in A$, temos que $a \leq k$, e para todo k' tal que $k' < k$, existe x em A tal que $k' < x$.

Simbolicamente, utilizando o Teorema de Transferência anterior, podemos escrever:

$$(((\forall A \in \mathcal{R})(\neg^*(A = \emptyset^*) \wedge (\exists s \in \mathbb{R} : a \in A \Rightarrow a \leq s))) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{R} : (a \in A \Rightarrow a \leq k) \wedge (\forall \varepsilon \in \mathbb{R})(0 < \varepsilon \Rightarrow \exists m \in A : (k - \varepsilon) < m))))$$

$\Leftrightarrow$

$$(((\forall {}^*A \in {}^*\mathcal{R})(\neg^*({}^*A = \emptyset^*) \wedge (\exists s \in {}^*\mathbb{R} : a \in {}^*A \Rightarrow a \leq_u s))) \Rightarrow (\exists k \in {}^*\mathbb{R} : (a \in {}^*A \Rightarrow a \leq_u k) \wedge (\forall \varepsilon = [(\langle 0, f \rangle)])([\langle 0, 0 \rangle] \leq_u \varepsilon \Rightarrow \exists m \in {}^*A : (k \leq_u (-\varepsilon)) \leq_u m))).$$

A segunda expressão é escrita com o auxílio das relações e operações anteriormente definidas para os elementos de ${}^*\mathcal{R} \in \mathcal{S}'$ (sub-superestrutura de $\mathcal{S}$), construída sobre $\mathcal{S}^{*J}/=_{\mathcal{U}}$. As variáveis da segunda expressão correspondentes às variáveis da primeira expressão variam sobre conjuntos distintos. A consequência da equivalência acima é que, como existe e é único o supremo para conjun-

tos limitados superiormente de $\mathbb{R}$, o mesmo deve valer para conjuntos internos limitados em ${}^*\mathbb{R}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, além de uma apresentação sucinta - porém cuidadosamente estruturada a partir de diversos artigos da literatura -, das teorias de conjuntos NF de Quine e CHU de Church, e das teorias paraconsistentes de conjuntos de da Costa, introduzimos o Cálculo Diferencial Paraconsistente, como sugerido por da Costa.

Apresentamos, além de demonstrações de resultados já conhecidos, novos resultados, inclusive com a introdução de conceitos originais, como os de quase-função, função quase-contínua, hiperseqüência, etc.

Estendemos o conceito de superestrutura, com a noção de superestrutura paraconsistente, cujas propriedades nos permitiram a obtenção de um Teorema de Transferência do Cálculo Diferencial Clássico para o Cálculo Diferencial Paraconsistente.

Dentre as diversas áreas da Matemática destaca-se, sem dúvida, a Análise Matemática. E nesta, poucas sub-áreas exibirão, talvez, tanta afinidade com a lógica paraconsistente e a teoria paraconsistente de conjuntos quanto o cálculo infinitesimal, em virtude, principalmente, das propriedades inconsistentes dos infinitésimos.

Da mesma forma como Archimedes utilizou elementos da pré-história do cálculo e da física para suas descobertas e para demonstrações de resultados matemáticos, e Isaac Newton e Leibniz trouxeram o cálculo à luz tornando-o instrumento imprescindível para a física e outras áreas do conhecimento, assim também poderá ocorrer com novas teorias matemáticas que, apoiadas em lógicas paraconsistentes, teorias paraconsistentes de conjuntos, novas teorias de modelos, etc., venham a se constituir em instrumentos básicos para o desenvolvimento de novas teorias da análise, da física, das engenharias, da psicologia, etc.

Há diversas questões que pretendemos analisar, em trabalhos futuros.

- A primeira delas se refere aos números hiper-naturais – nossos hiper-reais infinitos são funções, que tendem ao infinito quando x tende ao real a e, nesse sentido, como poderíamos caracterizar um hiper-natural infinito ? O que seria o conjunto dos números naturais estendidos?

- Como poderíamos estender o domínio de funções hiper-reais para o quase-anel $\mathcal{R}^*$?

- Como poderíamos trabalhar com hiperseqüências do tipo $(\langle u_n, 0 \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$?

Conforme já mencionado no Capítulo 2, pretendemos estudar a possibilidade de estender a definição - e os resultados subseqüentes – de derivada de uma função hiper-real $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$ também para números hiper-reais não standard $\langle r, f \rangle \in \mathcal{R}$.

Consideramos, naturalmente, a possibilidade de estender este trabalho ao cálculo integral.

Da Silva, D'Ottaviano e Sette 1999 introduzem uma definição bastante geral para o conceito de traduções entre lógicas, como funções que preservam derivabilidade: se L_1 e L_2 são lógicas, uma tradução de L_1 em L_2 é uma função $t: \text{Form } L_1 \rightarrow \text{Form } L_2$, tal que

$$\Gamma \vdash_{L_1} \alpha \Rightarrow t(\Gamma) \vdash_{L_2} t(\alpha).$$

Feitosa 1997 e D'Ottaviano & Feitosa 1999 definem traduções conservativas entre L_1 e L_2 , como funções t que preservam fortemente a derivabilidade:

$$\Gamma \vdash_{L_1} \alpha \Leftrightarrow t(\Gamma) \vdash_{L_2} t(\alpha).$$

Em **D'Ottaviano & Feitosa 2000** e **Feitosa & D'Ottaviano 2001** várias traduções conservativas são construídas, em particular da lógica clássica para diversas lógicas paraconsistentes de da Costa.

No Teorema de Transferência do Cálculo Diferencial Clássico para o Cálculo Diferencial Paraconsistente (Teorema 3.23) que obtivemos, o monomorfismo $\diamond: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ consitui, de fato, uma tradução conservativa entre as fórmulas das linguagens subjacentes às teorias.

Consideramos que uma análise das relações entre o Cálculo Diferencial Clássico e o Cálculo Diferencial Paraconsistente de da Costa, sob o enfoque da teoria de traduções que tem sido desenvolvida por Feitosa e D'Ottaviano, pode conduzir a resultados interessantes.

Devemos considerar, finalmente, o potencial didático de um cálculo assim desenvolvido. Sabemos que o cálculo diferencial e integral é uma disciplina básica, freqüentemente alvo de pesquisas e discussões nas academias, motivadas, não raro, pelas dificuldades enfrentadas por muitos alunos para compreender seus princípios e técnicas tradicionais.

Vislumbramos a possibilidade de se introduzir os rudimentos e aplicações de lógicas e teorias de conjuntos não-clássicas no ensino de graduação, em alguns cursos especialmente selecionados, como bacharelados em matemática e física, à semelhança, talvez, de experiência realizada por H. Jerome Keisler, da Universidade de Wisconsin. Este, em 1976, editou o livro "**Elementary calculus: an infinitesimal approach**"³¹ (**Keisler 1976**) e o aplicou a estudantes de graduação, numa experiência inédita.

Mesmo não tendo sido institucionalizado o experimento, Keisler comenta no Prefácio da segunda edição de sua obra, de 1986:

³¹ Obra não mais editada, mas que se encontra disponível, gratuitamente, na página de H. J. Keisler, na Internet.

The infinitesimals approach has three important advantages for the student. First, it is closer to the intuition which originally led to the calculus. Second, the central concepts of derivative and integral become easier for the student to understand and use. Third, it teaches both the infinitesimal and traditional approaches, giving the student an extra tool which may become increasingly important in the future.

E acrescenta mais à frente, ainda no Prefácio:

Recently, infinitesimals have had exciting applications outside mathematics, notably in the fields of economics and physics. Since it is quite natural to use infinitesimals in modelling physical and social processes, such applications seem certain to grow in variety and importance. This is a unique opportunity to find new uses for mathematics, but at present few people are prepared by training to take advantage of this opportunity.

Outra interessante aplicação do método infinitesimal ao cálculo clássico, ainda que restrita a funções diferenciáveis, encontra-se em **Bell 1998 (A primer of infinitesimal analysis)**. Observe-se, porém, conforme adverte Bell no Prefácio dessa obra, que os infinitésimos ali considerados são nilpotentes, não sendo, pois, inversíveis, bem como que seu cálculo infinitesimal tem origem na teoria de categorias, e não na lógica - ao contrário do que ocorre com a análise não-standard e com nosso cálculo diferencial paraconsistente, baseados, respectivamente, na lógica clássica e teoria clássica de conjuntos; e na lógica paraconsistente e teoria paraconsistente de conjuntos de da Costa.

REFERÊNCIAS

ALVES, E.H. **Lógica e inconsistência**. 1976. 137p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1976.

ARCHIMEDES. **Works of Archimedes**. Capítulos introdutórios por T. L. Heath. New York: Dover, 1950. Com o suplemento: The method of Archimedes

ARISTOTLE. De interpretatione. Trad. E. M. Edghill. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). **Great books of the western world**. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978. v.8, p. 23-36.

_____. Analytica priora. Trad. E. M. Edghill. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). **Great books of the western world**. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978. v.8, p. 37-93.

ARRUDA, A.I. **Considerações sobre os sistemas formais NF_n** . 1964. Tese - Universidade Federal do Paraná, 1964.

_____. Sur les systèmes formels NF_i de da Costa. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.270A, p. 1081-1084, 1970a.

_____. Sur le système NF_{ω} . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.270A, p. 1137-1139, 1970b.

_____. Remarques sur les systèmes C_n . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.280-A, p. 1253-1256, 1975a.

_____. Le schéma de la séparation dans les systèmes NF_n . *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.280A, p. 1341-1344, 1975b.

_____. The paradox of Russell in the systems NF_n . In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3, 1979, Recife: **Third Brazilian Conference on Mathematical Logic**: proceedings. Editado por A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e A. M. Sette. Sociedade Brasileira de Lógica, 1980a, p. 1-12, São Paulo, Brasil.

_____. A survey of paraconsistent logic. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 4., 1978, Santiago, Chile. **Mathematical Logic in Latin America**: proceedings. Editado por A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e R. Chuaqui. Amsterdam: North Holland, 1980b. p. 1-41.

_____. Remarks on da Costa's paraconsistent set theories. *Revista Colombiana de Matemáticas*, v. XIX, n.1-2, p. 9-24, 1985.

_____. Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In: G. Priest, R. Routley and J. Norman(eds). **Paraconsistent Logic**: essays on the inconsistent. Philosophia Verlag, 1989.

ARRUDA, A.I., BATENS, D. Russell's set versus the universal set in paraconsistent set theory. *Logique et Analyse*, v.98, p.121-133, 1982.

ARRUDA, A.I., da COSTA, N.C.A. Sur une hiérarchie de systèmes formels. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.259, p. 2943-2945, 1964.

_____. Une sémantique pour le calcul $C_1^{\equiv}$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.284A, p. 279-282, 1977.

BARON, M.E. **The origins of the infinitesimal calculus**. Hungary: Pergamon Press, 1969.

- BARROW, I. **Lectiones geometricae**. London: John Collins (ed.), 1670.
- BELL, J.L. **A primer of infinitesimal analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- BERKELEY, G. **The analyst**. London: printed for J. Tonson, 1734.
- BERNOULLI, J. **Opera**. Genevae: Cramer & Philibert (ed.), 1744.
- BÉZIAU, J.-Y. **La logique propositionnelle paraconsistente C_1 de N. C. A. da Costa**. Paris: Université Denis Diderot (Paris 7), 1990.
- _____. Nouveaux resultats et nouveaux regard sur la logique paraconsistente C_1 . *Logique et Analyse*, n. 141-142, p. 45-58, 1993.
- _____. **Recherches sur la logique universelle**. 1995. Tese - Université Paris 7, 1995.
- BOCHENSKI, I.M. **Ancient formal logic**. Amsterdam: North-Holland, 1951.
- _____. **A history of formal logic**. New York: Chelsea Publishing Co., 1961.
- BOOLE, G. **An investigation of the laws of thought**. New York: Dover, 1958. (Publicado originalmente em 1847)
- BORKOWSKI, L. **Selected works of J. Łukaziewicz**. Amsterdam: North Holland, 1970.
- BOYER, C.B. **História da matemática**. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, EDUSP, 1974.

CARNIELLI, W.A. Lógicas não-clássicas, teoria da informação e inteligência artificial. In: ÉVORA, F. (ed.). **Século XX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p.101-110. (Coleção CLE, v.11)

_____. Possible translations semantics for paraconsistent logics. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. **Frontiers in Paraconsistent Logic: proceedings**. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. London: King's College Publications, 2000. p. 116-139.

CARNIELLI, W.A., MARCOS, J. A taxonomy of C-systems. In: CARNIELLI, W.A., CONIGLIO, M.E., D'OTTAVIANO, I.M.L. (eds). **Paraconsistency: the logical way to the inconsistent**. New York: Marcel Dekker, 2002. p. 01-94. (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v.228)

CASTRO, M.A. **Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas C_n de da Costa**. 2004. 270p. Tese (Doutorado, a ser defendida) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

CAUCHY, A. L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique: 1er. partie (analyse algébrique). In: _____. **Oeuvres complètes 2**. Paris: Gauthier-Villars, 1821. v.3.

_____. Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal: leçons sur le calcul différentiel. In: _____. **Oeuvres complètes 2**. Paris: Gauthier-Villars, 1826 /1829. v.4.

CAVALIERI, B. **Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri**. Lucio Lombardo-Radice (ed.). Torino: Unione Tipografico - Editrice Torinese, 1966.

Tradução para o Italiano da edição original, em latim, de 1635, e da versão pós-tuma, aperfeiçoada, de 1653 – *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*.

CHANG, C.C., KEISLER, H.J. **Model theory**. 3.ed. Amsterdam: North-Holland, 1992. (Studies in Logic and Foundations of Mathematics, v.37)

CHUAQUI, R. & SUPPES, P. Free-variable axiomatic set foundations of infinitesimal analysis: a fragment with finitary consistency proof. *Journal of Symbolic Logic*, v. 60, p. 122-159, 1995

CHURCH, A. A formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, v.5, p.56-68, 1974.

COUTURAT, L. (ed.) **Opuscles et fragments inédits de Leibniz**. Paris, 1903.

DA COSTA, N.C.A. **Sistemas formais inconsistentes**. 1963a. 68 p. Tese (Cátedra) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963a.

_____. Calculs propositionels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.257, p. 3790-3793, 1963b.

_____. Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.258, p. 27-29, 1964a.

_____. Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.258, p. 1111-1113, 1964b.

_____. Sur un système inconsistant de théorie des ensembles. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.258, p. 3144-3147, 1964c.

_____. Sur les systèmes formels C_1 , C_1^* , C_1^- , D_i et NF_i . *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.260, p. 5427-5430, 1965.

_____. Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes. *Publications du Département de Mathématiques*. Université de Lyon, n. 4, p. 2-8, 1967.

_____. Remarques sur le système NF_1 . *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t.272A, p. 1149-1151, 1971.

_____. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.15, n.4, p. 497-510, 1974.

_____. On paraconsistent set theory. *Logique et Analyse*, v.115, p. 361-371, 1986.

_____. Matemática e paraconsistência. Curitiba: UFPR, 1989. (Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática, v.7)

_____. O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX. In: ÉVORA, F. (ed.). **Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p. 59-65. (Coleção CLE, v. 11)

_____. **Sistemas formais inconsistentes**. Curitiba: Ed. UFPR, 1993.

_____. Paraconsistent mathematics. In: I WORLD CONGRESS ON PARA-CONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. **Frontiers in Paraconsistent Logic: proceedings**. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bende-
gen. London: King's College Publications, 2000. p. 165-179.

DA COSTA, N.C.A., ALVES, E.H. Une sémantique pour le calcul C_1 . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.238, p. 729-731, 1976.

_____. A semantical analysis of the calculi C_n . *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.18, p. 621-630, 1977.

DA COSTA, N.C.A., BÉZIAU, J.Y., BUENO, O. **Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos**. Campinas: Unicamp / CLE, 1998. (Coleção CLE, v.23)

DA COSTA, N.C.A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.6, n.1, p. 5-31, 1989.

DA SILVA, J.J., D'OTTAVIANO, I.M.L., SETTE, A.M. Translations between logics. In: CAICEDO, X, MONTENEGRO, C.H. (eds.). **Models, algebras and proofs**. New York: M. Dekker, 1999, p. 435-448. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, v.203)

DE L'HOSPITAL, G.F.A. **Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes**. Paris: Imprimerie Royale, 1696.

DE MORGAN, A. **Formal logic**: or the calculus of inference, necessary and probable. London: Taylor & Walton, 1847.

DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences**. Leyde: Jean Maire (ed.), 1637.

DESCARTES, R. **La géométrie**. Paris: Hermann, 1686 (1.ed. 1637, 2.ed. 1659-1661).

DI PRISCO, C. A. **Una introducción a la teoria de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas**. Campinas: Unicamp/CLE, 1997. (Coleção CLE, v.20)

D'OTTAVIANO, I.M.L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.7, p. 89-152, 1990.

_____. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (ed.). **Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Unicamp / CLE, 1992. p. 65-93. (Coleção CLE, v. 11)

D'OTTAVIANO, I.M.L., EPSTEIN, R.L. A paraconsistent many-valued propositional logic: J_3 . In: EPSTEIN, R. L, **The semantic foundations of logic**. Com a colaboração de W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano, S. Krajewski and R. D. Maddux.. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. v.1: Propositional Logics, p. 263-287.

D'OTTAVIANO, I.M.L., FEITOSA, H.A. Paraconsistent logics and translations. *Synthese*, v.125, n. 1/2, p. 77-95, 2000.

_____. História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: NOBRE, Sérgio (org.). **Coleção História da Matemática para Professores**. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003. Preprint.

FEITOSA, H.A. **Traduções conservativas**. 1997. 161 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

FEITOSA, H.A., D'OTTAVIANO, I.M.L. Conservative Translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p. 205-227, 2001.

FERMAT, P. **Varia opera mathematica**. Editor D. Petri Fermat. Tolosae (Toulouse): Apud Joannem Pech, 1679.

_____. **Oeuvres de Fermat**. Editadas por Paul Tannery et Charles Henry. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891-1922.

FIDEL, M. The decidability of the calculi C_n . *Reports on Mathematical Logic*, n.8, p. 31-40, 1977.

FORSTER, T.E. **Set theory with a universal set**. Oxford: Clarendon Press, 1995.

FRAENKEL, A.A. Zu den grundlagen der Cantor–Zermeloschen mengenlehre. *Mathematische Annalen* n. 86, p. 230-237, 1922. Tradução para o inglês em **Van Heijenoort 1967**, p. 284-289.

FRAENKEL, A.A., BAR-HILEL, Y. **Foundations of set theory**. Amsterdam: North-Holland, 1958.

FREGE, G. **Begriffsschrift**: eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1977. (Publicado originalmente em 1879).

GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze**. Leida: Louis Elsevier (ed.), 1638. Tradução para o italiano da primeira edição, em latim, de 1635.

_____. **Le opere di Galileo Galilei**. Edizione Nazionale. Firenze: Tip. di G. Barbera, 1890-1909.

HALMOS, P.R. **Naive Set Theory**. New York: Springer-Verlag, 1974.

HRBACEK, K., YECH, T. **Introduction to set theory**. New York: Marcel Dekker, 1999.

JĄSKOWSKI, S. Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, p. 55-77, 1948.

_____. O konjuncji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Torunensis*, Sectio A, I, p. 171-172, 1949.

_____. Propositional calculus for contradictory deductive systems, *Studia Logica*, n.24, p. 143-157, 1969.

JOVEN, F. Los infinitesimales como ficciones utiles para Leibniz: la polémica en la Academia de Paris. *Theoria*, segunda época, v.12, n.2, p. 257-279, 1997.

JURIN, J. **Geometry no friend to infidelity...** . Cambridge: T.Cooper (ed.), 1734.

_____. **The minute mathematician...** . London: T. Cooper (ed.), 1735.

KEISLER, H.J. **Elementary calculus**: an infinitesimal approach. 1.ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

KEPLER, J. **Nova stereometria doliorum vinariorum**. Lincii: J. Pancvs, 1615.

KLEENE, S.C. **Introduction to metamathematics**. Amsterdam: North Holland; New York: Van Nostrand, 1952.

LAUGWITZ, D. Anwendungen unendlich kleiner zahlen. I. zur theorie der distributionen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 207, p. 53-60, 1961a.

_____. Anwendungen unendlich kleiner zahlen. II. Ein zugang zur operatorenrechnung von Mikusinski. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 208, p. 22-34, 1961b.

LeBLANC, O. Łukasiewicz, Aristotle and contradiction. *Polish Philosophy Page*. Disponível em: < <http://www.fmag.unict.it/PolPhil/Lukas/LeBlanc.html> > Acesso em: 03 jan. 2002.

LEIBNIZ, G.W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1684.

_____. De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1686.

_____. **Logical papers**. Trad. G. H. R. Parkinson. Oxford: Clarendon Press, 1966.

_____. **Oeuvre concernant le calcul infinitésimal**. Trad. J. Peyroux. Bordeaux: A. Blanchard, 1983.

LINTZ, R. **História da Matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v.1.

LOPARIĆ, A. A semantical study of some propositional calculi. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.3, n.1, p. 73-95, 1986.

LOPARIĆ, A., ALVES, E.H. The semantics of the systems C_n of da Costa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3, 1979, Recife: **Third Brazilian Conference on Mathematical Logic**: proceedings. Editado por A.I. Arruda, N.C.A. da Costa, A.M. Sette. Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, São Paulo, Brasil. p. 161-172.

ŁUKASIEWICZ, J. **O Zasadzie sprzeczności u Arystotelesa: studium krytyczne**. Kraków: Akademia Umiejętności, 1910.

_____. Über den satz von widerspruchs bei Aristoteles. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*: Classe d'Histoire de Philosophie, p. 15-38, 1910. Tradução para o inglês em **Borkowski 1970**.

ŁUKASIEWICZ, J., TARSKI, A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. Classe III, v.23, p. 30-50, 1930. Tradução para o inglês em **Borkowski 1970**.

MARCOS, J. **Semânticas de traduções possíveis**. 1998. 137p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1998.

MORTENSEN, C. **Inconsistent mathematics**. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. (Mathematics and its Applications, v. 312)

MOURA, J.E. de A. **Aspectos da lógica funcional paraconsistente**. 1978, 71 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.

NEWTON, I. **The mathematical papers of Isaac Newton**. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1981. 8 v.

_____. **The method of fluxions and infinite series**. Ed. John Colson. London, 1736. (De methodus fluxionum et serierum infinitarum, 1671)

_____. **Philosophiae naturalis principia mathematica**. London: Royal Society, 1687.

_____. **De analysi per aequationes numero terminorum infinitas**. London: William Jones (ed.), 1711.

PAIS, A. **Sutil é o Senhor: a ciência e a vida de Einstein**. 2.ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1995.

PIN, V.G. Ontologia e história del calculus (la tarea de Abraham Robinson). *Theoria*, segunda época, v.2, p. 97-119, 1987.

PIZZI, C. Considerações sobre as lógicas não-clássicas. In: Évora, F. (ed.). **Século XX: O nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Unicamp / CLE, 1992. (Coleção CLE, v. 11, p. 95-99)

QUINE, W.V.O. New foundations for mathematical logic. *American Mathematical Monthly*, v.44, p. 70-80, 1937.

ROBINS, B.A. **A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios**. London: W. Innys & R. Manby, 1735.

ROBINSON, A. Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, p. 432-440. Amsterdam: 1961.

_____. **Non-standard analysis**. (Edição revisada da 1. ed. de 1966) Princeton: Princeton University Press, 1996.

ROBINSON, A., ZAKON, E. A set theoretical characterization of enlargements. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. C.I.T., Holt, Rinehart and Winston, p. 109-122, 1967.

ROSSER, J.B. **Logic for mathematicians**. New York: McGraw-Hill, 1953.

RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, v.30, p. 222-262. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1908.

SCHMIEDEN, C., LAUGWITZ, D. Eine erweiterung der infinitesimalrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, v.69, p. 1-39, 1959.

SCHOENFIELD, J.R. **Mathematical logic**. New York: Addison Wesley, 1967.

SHAKESPEARE, W. **The Oxford Shakespeare – Hamlet**. G. R. Hibbard (ed.). Oxford World's Classics. Oxford: Oxford University Press, 1998.

STROYAN, K.D., LUXEMBURG, W.A.J. **Introduction to the theory of infinitesimals**. New York: Academic Press (1.ed.), 1976.

TORRICELLI, E. **Opera geometrica**. Amatore Massa & Lorenzo di Landi. Firenze, 1644.

VAN DALEN, D. **Logic and structure**. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

VAN HEIJENOORT, J., (ed.). **From Frege to Gödel: a source book in mathematics, 1879-1931**. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

WALLIS, J. **Johannis Wallis opera mathematica** (3 v.). Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.

WEIERSTRASS, K.T.Z. Zur theorie der abelschen functionen. *Crelle's Journal*. Berlin, 1854.

_____. **Mathematische werke von Karl Weierstrass**. Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927.

WHITEHEAD, A.N., RUSSELL, B. **Principia mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.

ZERMELO, E. Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre. *Mathematische Annalen*, n. 65, p. 261-281, 1908. Tradução para o inglês em **Van Heijenoort 1967**, p. 199-215.