Milton Augustinis de Castro

HIERARQUIAS DE SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL E DE SISTEMAS DE TABLEAUX ANALÍTICOS PARA OS SISTEMAS C_n DE DA COSTA

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D´Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação
final da Tese defendida e aprovada
pela Comissão Julgadora em 29 de
Junho de 2004.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. (Orientadora) Itala Maria Loffredo D´Ottaviano
Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa (UFSC, Florianópolis)
Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves (UFRN, Natal)
Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (UNESP, Bauru)
Profa. Dra. Maria da Paz Nunes de Medeiros (UFRN, Natal)
Prof. Dr. Elias Humberto Alves (UNESP, Marília) (Suplente)
Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (IFCH, UNICAMP) (Suplente)

Junho/2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Castro, Milton Augustinis de
C 279 h **Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas C_n de da Costa / Milton Augustinis de Castro. - - Campinas, SP : [s. n.], 2004.**

Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Costa, Newton C. A. da (Newton Carneiro Affonso da), 1929-. 2. Lógica. 3. Lógica simbólica e matemática. 4. Lógica matemática não-clássica. 5. Lógica de primeira ordem.
I. D'Ottaviano, Itala M. Loffredo (Itala Maria Loffredo).
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

Tese defendida e aprovada, em 29 de junho de 2004, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D´Ottaviano - Orientadora

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa (UFSC, Florianópolis)

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves (UFRN, Natal)

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (UNESP, Bauru)

Profa. Dra. Maria da Paz Nunes de Medeiros (UFRN, Natal)

Suplentes:

Prof. Dr. Elias Humberto Alves (UNESP, Marília)

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (IFCH, UNICAMP)

Resumo

Neste trabalho, introduzimos a hierarquia de sistemas proposicionais de dedução natural **DNC**$_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e a hierarquia de sistemas quantificacionais de dedução natural **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$. Demonstramos que cada um dos sistemas das hierarquias é equivalente aos sistemas correspondentes da hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes **C**$_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e de cálculos quantificacionais paraconsistentes **C**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa. Demonstramos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, e uma Propriedade de Subfórmula para os sistemas **DNC**$_n$ e **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.
Introduzimos a hierarquia de sistemas de tableaux analíticos **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, nos quais o operador "o" ("bola"), os operadores generalizados "k", "(k)", $1 \leq k$, e as negações "$\sim_k$", $k \geq 1$, de da Costa são operadores primitivos, diferentemente do que tem sido apresentado na literatura, onde esses operadores são usualmente definidos. Demonstramos uma versão da Regra do Corte para esses sistemas e demonstramos que cada um deles é equivalente ao correspondente sistema **C**$_n$, $1 \leq n < \omega$. Os sistemas **TNDC**$_n$ constituem provadores automáticos de teoremas para os sistemas da hierarquia **C**$_n$, $1 \leq n < \omega$, de Costa.

Palavras-chave: lógica paraconsistente; método de dedução natural; método de provas subordinadas; sistemas de dedução natural; normalização; sistemas de tableaux analíticos; regra do corte.

Abstract

In this work, we introduce the hierarchy of propositional natural deduction systems $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, and the hierarchy of quantificational natural deduction systems $\mathbf{DNC}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$. We prove that each one of the systems of the hierarchies is equivalent to the corresponding system of the hierarchy of da Costa´s propositional paraconsistent calculi $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, and the hierarchy of da Costa´s quantificational paraconsistent calculi $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$. We prove a Normalization Theorem, *à la* Fitch, and a Subformula Property for the systems $\mathbf{DNC}_n$ and $\mathbf{DNC}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$.

We introduce the hierarchy of analytical tableaux systems $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, in which da Costa´s "ball" operator "o", the generalized operators "k", "(k)", $1 \leq k$, and the negations "$\sim_k$", $k \geq 1$, are primitive operators, differently to what has been done in the literature. We prove a version of Cut Rule for these systems, and prove that each one of these systems is equivalent to the corresponding system $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$. The systems $\mathbf{TNDC}_n$ constitute automated theorem proving systems for the systems of da Costa's hierarchy $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Key-words: paraconsistent logic; method of natural deduction; method of subordinate proofs; systems of natural deduction; normalization; analytical tableaux systems; cut rule.

Dedico este trabalho à minha mãe Maria e à minha esposa Maria Lúcia.

Agradeço a todos que de algum modo contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos funcionários do CLE/UNICAMP.

Devo especial agradecimento à minha orientadora Itala Maria Loffredo D´Ottaviano, pela confiança e entusiasmo.

À FAPESP, pelo fundamental apoio financeiro concedido para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma teoria **T**, em cuja linguagem $\mathcal{L}$ ocorre o símbolo de negação "¬", é *inconsistente* (ou *contraditória*) em relação à negação "¬" se existe uma fórmula **A** de $\mathcal{L}$ tal que **A** e ¬**A** são teoremas de **T**; caso contrário, **T** é *consistente*.

Uma teoria **T** é *trivial* (ou *supercompleta*), se toda fórmula de sua linguagem $\mathcal{L}$ é teorema de **T**; caso contrário, **T** é *não-trivial*.

Uma *lógica* é *paraconsistente* se pode ser utilizada como lógica subjacente para teorias inconsistentes e não-triviais, ditas *teorias paraconsistentes*.

Se uma teoria **T** em cuja linguagem ocorre o símbolo de negação é trivial, é imediato que **T** é inconsistente. A recíproca, entretanto, não é necessariamente válida, como é o caso das teorias paraconsistentes.

Entretanto, a presença de contradição em teorias **T** cuja lógica subjacente é, por exemplo, a lógica clássica ou a lógica intuicionista, tem como conseqüência imediata a trivialização de **T**.

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, num certo sentido, restringido. Podemos mesmo afirmar, como da **Costa e Marconi 1989** que, se a força desse princípio é restringida em um dado sistema lógico, então esse sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes.

De fato, nas lógicas paraconsistentes o princípio da (não-) contradição – qualquer uma de suas formulações equivalentes ou qualquer uma de suas teses correlatas – não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente, de uma fórmula **A** e de sua negação ¬**A** não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula.

O estudo das lógicas paraconsistentes, além de possibilitar a construção e a investigação de teorias paraconsistentes, torna também possível o estudo direto de paradoxos semânticos e sintáticos sem procurar evitá-los; o estudo de certos princípios sem restrições – como por exemplo o princípio da abstração na teoria de conjuntos, o que nos permite a construção de teorias de conjuntos que admitem a existência de conjuntos que não existem nas teorias usuais, como a existência do conjunto de Russell $r = \{x: x \notin x\}$ e a existência do conjunto universal; e talvez nos possibilite uma melhor compreensão do conceito de negação.

Além disso, a lógica paraconsistente está fortemente relacionada com outros tipos de lógicas não-clássicas, como por exemplo com a lógica dialética, a lógica relevante, as lógicas paracompletas e polivalentes, as lógicas fuzzy, entre outras.

No início do século XX, a paraconsistência foi definitivamente assumida por vários lógicos e filósofos, de forma simultânea e independente.

Podem ser considerados precursores da lógica paraconsistente – e das lógicas não-clássicas em geral – J. Meinong (**Meinong 1907**), J. Łukasiewicz (**Łukasiewicz 1910a**, **1910b** e **1971**; ver **Borkowski 1970**), N. A. Vasiliev (**Vasiliev 1910**, **1911**, **1912**, **1913** e **1925**; ver **Arruda 1977**, **1984** e **1990**) e D. Bochvar (**Bochvar 1939**).

Tanto Łukasiewicz como Vasiliev, nos trabalhos acima mencionados, conjecturam que, como no caso das geometrias não-euclidianas, uma revisão das leis básicas da lógica aristotélica poderia levar a novos sistemas não-aristotélicos de lógicas.

S. Jaśkowski, discípulo de Łukasiewiz, motivado por diversos problemas relacionados a contradições, especialmente os relativos a “razões convincentes que levam a duas conclusões contraditórias”, construiu o primeiro sistema de lógica paraconsistente.

Jaśkowski 1948 (ver **Jaśkowski 1969**) e **Jaśkowski 1949** chamam a atenção, pela primeira vez na literatura, sobre a diferença entre sistemas contraditórios e sistemas *super-completos*, nos quais todas as fórmulas são teses.

Jaśkowski propõe o problema da construção de um cálculo proposicional com as seguintes propriedades:

> 1) *Quando aplicado a sistemas contraditórios não implicaria sempre sua supercompletude (trivialização)*;
> 2) *Seria rico o bastante para permitir inferências práticas*;
> 3) *Teria uma justificação intuitiva*.

Jaśkowski apresenta sua própria solução, apenas a nível proposicional, conhecida como *lógica discussiva*, ou *lógica discursiva* – denotada por D_2 - e afirma que

> *Obviamente, essas condições não determinam univocamente uma solução, pois elas podem ser satisfeitas em vários graus, sendo bastante difícil avaliar objetivamente a satisfação da condição 3.*

Apesar de Jaśkowski ter construído um cálculo proposicional paraconsistente, Newton Carneiro Affonso da Costa "é de fato o fundador da lógica paraconsistente" (**Arruda 1980** e **D´Ottaviano 1990**).

Na década de 1950, sem conhecer os trabalhos de Jaśkowski, da Costa começou a desenvolver suas idéias sobre a importância do estudo das teorias contraditórias.

Em "Notas sobre o conceito de contradição" (**da Costa 1958**), da Costa propõe o seguinte *Princípio de Tolerância em Matemática*:

> *Dos pontos de vista sintático e semântico, toda teoria é permissível, desde que não seja trivial.*

A partir de sua Tese, intitulada **Sistemas formais inconsistentes** (**da Costa 1963a**, ver da **Costa 1993**) da Costa inicia a publicação, ainda em 1963, de uma série de artigos, nos quais introduz suas hierarquias de cálculos paraconsistentes.

Em **da Costa 1963a** (ver da **Costa 1993**), estão claramente definidos os objetivos de seu trabalho pioneiro, que deu origem à área de investigação das lógicas não-clássicas paraconsistentes:

> *Informalmente, a idéia central deste trabalho é a seguinte: um sistema formalizado baseado na lógica clássica (ou lógica intuicionista, ou algumas lógicas polivalentes...) se inconsistente, é trivial no sentido em que todas as suas proposições são demonstráveis; então, deste ponto de vista, ele não tem qualquer interesse matemático especial. No entanto, por muitas razões como, por exemplo, a análise comparativa com sistemas consistentes, e para uma adequada análise metamatemática do princípio sob consideração, é conveniente estudar "diretamente" os sistemas inconsistentes. Mas para tal estudo é necessário construir novos tipos de lógica elementar apropriados para manipular tais sistemas* (ver **D´Ottaviano 1990**, p. 103).

Da Costa construiu inicialmente a hierarquia dos cálculos proposicionais $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

1. O princípio da (não-) contradição, na forma $\neg(\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A})$, não é válido em geral;
2. De duas premissas contraditórias **A** e $\neg\mathbf{A}$, não se deduz uma fórmula qualquer **B**; e
3. Os sistemas contêm os esquemas e regras mais importantes da lógica clássica que são compatíveis com as condições (1) e (2).

Da Costa estendeu sua hierarquia de cálculos proposicionais à hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, e à hierarquia de cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade $\mathbf{C}_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$; à hierarquia de cálculos de descrições $\mathbf{D}_n$, $1 \leq n \leq \omega$; e à hierarquia de teorias de conjuntos inconsistentes e aparentemente não-triviais $\mathbf{NF}_n$, $1 \leq n \leq \omega$ (ver da **Costa 1963b**, **1964a**, **1964b**, **1964c**, **1964d**, **1965**, **1967**, **1971**, **1974a** e **1974b**; **Arruda 1964**).

Da Costa, seus discípulos e colaboradores – entre eles, em especial, A. I. Arruda, R. Chuaqui, A. Raggio e A. M. Sette –, introduziram e investigaram diversos sistemas paraconsistentes, tendo obtido resultados relevantes relativos a estruturas algébricas associadas a tais sistemas, teorias de conjuntos paraconsistentes, teoria de modelos, lógicas de ordem superior, cálculo diferencial paraconsistente e algumas aplicações à ciência da computação.

Desde 1964, as lógicas de da Costa têm sido amplamente estudadas por lógicos brasileiros e de diversos países, e muitos autores têm contribuído para o desenvolvimento dessas lógicas e da lógica paraconsistente em geral.

Em uma série de artigos recentes, Feitosa e D´Ottaviano têm estudado inter-relações entre sistemas lógicos através da análise de traduções entre eles. A partir da definição do conceito de tradução entre sistemas lógicos proposta por **da Silva, D´Ottaviano e Sette 1999**, **Feitosa 1997** e **Feitosa e D´Ottaviano 2001** introduzem o conceito de tradução conservativa entre lógicas em geral, e **D´Ottaviano e Feitosa 2000** (ver também **Béziau 1990** e **1993** e **da Costa, Béziau e Bueno 1998**) apresentam traduções conservativas da lógica clássica em cada um dos sistemas $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$, e da lógica clássica em outros sistemas paraconsistentes, propiciando uma nova abordagem para o estudo das relações dos sistemas da hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, com a lógica clássica e outros sistemas não-clássicos.

Um artigo recente sobre a lógica paraconsistente em geral, com uma interessante abordagem, é **Carnielli e Marcos 2002**.

Como referências gerais sobre o desenvolvimento da lógica paraconsistente e o trabalho de da Costa, indicamos **Arruda 1980** e **1989**, **da Costa e Marconi 1989**, **Priest e Routley 1989** e **D´Ottaviano 1990**.

Nosso interesse pela lógica paraconsistente, em particular pelas célebres hierarquias de da Costa, manifestou-se já durante as disciplinas cursadas no Programa de Mestrado.

Motivados pelos problemas relativos à decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, interessamo-nos imediatamente pela série de artigos e autores que, desde o final da década de 1960, trataram dessa questão, em especial sob o enfoque de cálculos de seqüentes, sistemas de dedução natural e sistemas de tableaux analíticos.

Os sistemas de dedução natural, desenvolvidos independentemente por Jaśkowski e Gentzen, no início dos anos 1930, representam um método de formalização para sistemas lógicos distinto do método desenvolvido por Frege, Russell e Hilbert (ver **Alves 1999**, p. 3-4, p.13).

Jaśkowski 1934, motivado por uma conferência de Łukasiewiz de 1926, (ver **Jaśkowski 1967**, p. 232) introduz um sistema lógico cuja característica principal era não requerer axiomas, já chamando a atenção para o fato que os matemáticos, em suas provas, fazem uso de métodos de raciocínios cujo principal recurso é o de suposições arbitrárias (ver **Jaśkowski** 1967, p. 232. p. 238).

Para **Gentzen 1935** (ver **Szabo 1969**), as provas presentes nas provas formalizadas pelos sistemas lógicos hilbertianos, apesar de "consideráveis vantagens formais", distanciam-se das formas de dedução usadas na prática matemática. Gentzen desejava que seus sistemas formais expressassem ao máximo o tipo de raciocínio que se faz nas provas matemáticas (**Gentzen 1935**, ver **Szabo 1969**, p. 74).

Gentzen criou a dedução natural, como um novo tipo de formulação para sistemas lógicos; definiu formalmente, para esses sistemas, a noção de prova normal, como sendo uma prova sem partes desnecessárias, na qual qualquer conceito que faça parte da prova é um conceito que está contido no resultado final desta e é parte essencial para a obtenção do resultado (**Gentzen 1935**, ver **Szabo 1969**, p. 69). Através de uma análise das propriedades estruturais das provas normais, Gentzen percebeu que seria bastante simples provar a consistência dos dois sistemas lógicos por ele então introduzidos, se conseguisse provar que qualquer prova formalizada nesses sistemas poderia ser transformada em uma prova normal (Teorema de Normalização).

Devido a problemas na obtenção do Teorema de Normalização para um de seus sistemas, Gentzen criou o cálculo de seqüentes, como um outro tipo de formulação para sistemas lógicos. Obteve um Teorema da Eliminação do Corte ou **Hauptzatz** para seus novos sistemas introduzidos, tendo conseguido demonstrar, finitariamente, a consistência desses sistemas e a consistência da teoria elementar dos números, sem indução completa, formalizada nesses sistemas.

Esta prova do Hauptzatz, que é a versão em cálculo de seqüentes do Teorema de Normalização, e as provas de consistência dela derivadas, compatíveis com o tipo de prova exigido pelo programa de Hilbert, podem ser consideradas como os resultados inaugurais da Teoria da Prova (ver **Alves 1999**, p. 3-4, p.13).

Fitch 1952 introduz o procedimento de provas subordinadas nos sistemas de dedução natural, cuja vantagem reside em se poder tratar simultaneamente com várias provas subordinadas, permitindo que se trabalhe com diversas provas como parte de uma outra.

Há na literatura obras, já clássicas, para o estudo da dedução natural – mencionamos, como fundamental, **Prawitz 1965**.

Quanto à dedução natural para os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, $\mathbf{C}_\omega$ e $\mathbf{C}_\omega^*$ de da Costa, as primeiras investigações surgiram na década de 1970.

Alves 1976 introduz sistemas de dedução natural, *à la* Gentzen, para os cálculos proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, sem entretanto, aprofundar suas investigações sobre esses sistemas.

Raggio 1978 introduz sistemas com um único axioma, *à la* Gentzen, para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$ e para a lógica quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega^*$ de da Costa, denominados sistemas $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega^*$, respectivamente. Raggio demonstra um Teorema de Normalização para esses sistemas.

Béziau 1990 introduz o sistema de dedução natural M1 e uma sua variante M´1, equivalentes ao sistema $\mathbf{C}_1$.

Castro 1998 e **Castro e D´Ottaviano 2000** introduzem uma hierarquia de sistemas proposicionais de dedução natural, $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e demonstram a equivalência entre cada sistema dessa hierarquia e o correspondente sistema $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Moura 2002 introduz um sistema de dedução natural, *à la* Gentzen, para o cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$, denominado NNC_ω, e demonstra um Teorema de Normalização e um Teorema de Normalização Forte para esse sistema – um esboço inicial desse trabalho, desenvolvido em colaboração com L. C. P. D. Pereira, havia sido apresentado, como Comunicação, no VIII Encontro Brasileiro de Lógica, ocorrido em 1986. O sistema NNC_ω de Moura é o mesmo de **Alves 1976**, **Castro 1998** e de **Castro e D´Ottaviano 2000**.

A motivação original de **Gentzen 1935** fundamentava-se no âmbito da Teoria da Prova. Em seu trabalho não há quaisquer argumentos direcionados à correção ou completude de seus sistemas, apenas provas construtivas de equivalência com outras formulações.

H. W. Beth, entretanto, desenvolveu seus trabalhos com motivações semânticas.

Beth 1955 introduz a terminologia *tableau semântico* e o concebe como uma tentativa sistemática de busca de contra-exemplo.

Beth distribuiu sua busca de contra-exemplo na forma de uma tábua com duas colunas, uma chamada "Válida", a outra, "Inválida"; e estabeleceu padrões de procedimentos para verificar se a fórmula **A** é uma conseqüência de $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$, como que usando o cálculo de seqüentes de trás para a frente.

O método de Beth propicia um processo de decisão para o caso proposicional, sendo que no caso quantificacional a questão torna-se mais complexa.

Beth 1959 usa tableaux para provar um Princípio de Subfórmula, afirmando que se uma fórmula tem uma demonstração, então ela tem uma demonstração na qual ocorrem apenas subfórmulas dessa fórmula; e deriva o Hauptzatz Estendido de Gentzen. Nesse livro, discute a relação entre tableaux e o cálculo de seqüentes, e entre tableaux e dedução natural. É apresentada ainda uma prova, baseada nos tableaux, do Teorema da Eliminação do Corte de Gentzen, o que fazemos no Capítulo 4 deste trabalho, relativamente à nossa hierarquia de sistemas de tableaux $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Independentemente de Beth, H. Hintikka (**Hintikka 1955**), também motivado por questões semânticas, introduz certos tipos de tableaux, concebendo uma prova de uma fórmula **A** como uma tentativa semântica para construir um modelo no qual $\neg$**A** é verdadeira – uma tentativa de prova se processa quebrando-se a fórmula em suas partes constitutivas – , sendo que se a tentativa falha, então verifica-se que **A** é válida.

Hintikka usou estruturas de árvores, com conjuntos de fórmulas como nós.

Os sistemas de Beth e Hintikka, entretanto, não são de utilização fácil, para sistemas lógicos em geral.

É Z. Lis, com seu sistema de tableaux semânticos usando sinais, quem introduz a simplificação notacional nos tableaux de Beth. **Lis 1960**, como Beth, dividiu as fórmulas em duas categorias, separando-as em colunas, porém mantendo-as juntas e distinguindo-as por "sinais" (+ e -); introduziu leis de derivação e dispôs as provas na forma de árvores.

Lis também apresentou o que denominou um *sistema de dedução natural*, e que hoje poderíamos denominar um *sistema de tableaux não-assinalados*.

Independentemente do trabalho de Lis, R. Smullyan estende as idéias de Lis. **Smullyan 1968** introduz o que chama de tableau analítico, significando com isso que o princípio de subfórmula desempenha um papel central.

Como Lis, Smullyan introduziu sistemas de tableaux assinalados e não-assinalados, e regras de derivação.

M. C. Fitting estende os tableaux de Smullyan, em **Fitting 1996**, nos moldes dos sistemas de tableaux que introduzimos no Capítulo 4 deste trabalho.

Indicamos **Fitting 1999** como referência para o estudo de sistemas de tableaux em geral.

Com relação à decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, diversos procedimentos de decisão foram usados além do método de tableaux.

O primeiro trabalho aparece com **Raggio 1968**, quando a decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, era um problema aberto. Raggio introduz uma hierarquia de cálculos de seqüentes $\mathbf{CG}_n$, $1 \leq n \leq \omega$ - Raggio demonstra a equivalência entre cada cálculo de seqüentes $\mathbf{CG}_n$ e o cálculo correspondente cálculo $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$; como não é demonstrado que $\mathbf{CG}_n$ é decidível, Raggio constrói uma nova hierarquia de cálculos de seqüentes, os sistemas $\mathbf{WG}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, que são decidíveis, porém, apesar de terem propriedades semelhantes aos cálculos correspondentes da hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, os cálculos dessas duas hierarquias de sistemas não são equivalentes.

Da Costa e Alves 1976, **Alves 1976** e **da Costa e Alves 1977** introduzem uma semântica de valorações para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, que generaliza a semântica clássica de valorações. Definem as quase-matrizes, para demonstrar a decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Fidel 1977, usando métodos algébricos, demonstra a decidibilidade dos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Loparić e Alves 1980, baseado em **da Costa e Alves 1977**, modifica certas condições da definição de valoração de da Costa e Alves, resolve um problema relativo às quase-matrizes, e apresenta uma demonstração da decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Marconi 1980 introduz um sistema de tableaux semânticos, *à la* Beth (**Beth 1965**), e demonstra a completude e a decidibilidade do sistema proposicional $\mathbf{C}_1$ de Costa.

Béziau 1990, em seu memorial de DEA, introduz um cálculo de seqüentes S1 para $\mathbf{C}_1$, apresentando, pela primeira vez, um Teorema de Eliminação do Corte para $\mathbf{C}_1$. **Béziau 1993** apresenta esses resultados e alguns resultados suplementares.

Carnielli e Lima-Marques 1992 introduz sistemas de tableaux semânticos, *à la* Smullyan (**Smullyan 1968**), para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1{}^1$ e para a lógica quantificacional paraconsistente com igualdade $\mathbf{C}_1{}^{1=}$ de Alves, denominados sistemas TC_1 e $TC_1{}^=$, respectivamente, e apresenta uma prova de que esses sistemas são completos e decidíveis.

Buchsbaum e Pequeno 1993 introduz sistemas de tableaux sintáticos, também *à la* Smullyan, para os sistemas $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_1$* de da Costa, os sistemas *S*C1 e *S*C1*, mostrando que *S*C1 e *S*C1* são completos.

Moura 2002 e **Moura e D´Ottaviano 2002** introduzem um cálculo de seqüentes para o cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$, denominado NCG_ω, e demonstram um Teorema de Eliminação do Corte.

Marcos 1998 e **Carnielli 1999**, desenvolvem um tipo especial de semântica para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, a *semântica de traduções possíveis*, concebida por Carnielli, como generalização da noção formal de semântica, com ênfase especial para o caso do cálculo $\mathbf{C}_1$. As funções de tradução introduzidas satisfazem as condições da definição de tradução entre lógicas de **da Silva, D´Ottaviano e Sette 1999**.

Motivados pelos trabalhos acima mencionados e face ao nosso interesse pelos sistemas de da Costa e por dedução natural, decidimos investigar a possibilidade da construção de uma hierarquia de sistemas de dedução natural correspondentes aos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e da investigação de suas propriedades sob o enfoque de Teoria da Prova. E, a seguir, introduzir a hierarquia correspondente de sistemas quantificacionais de dedução natural para os sistemas $\mathbf{C}_n{}^*$, $1 \leq n \leq \omega$.

Baseados nas hierarquias de sistemas dedução natural que introduzimos e motivados pelos problemas relativos aos sistemas de tableaux para os cálculos $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_1{}^1$ de Carnielli e Lima-Marques e de Buchsbaum e Pequeno, respectivamente – a ocorrência de retornos infinitos nos ramos dos tableaux e a ocorrência de ramos abertos que necessitam ser reconstruídos, respectivamente – e face ao nosso interesse na construção efetiva de toda uma hierarquia de sistemas de tableaux analíticos equivalentes aos sistemas da hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, trabalhamos também na direção da construção de uma hierarquia de sistemas de tableaux que pudessem nos garantir um método mecânico para a decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Na hierarquia de sistemas de tableaux analíticos, equivalentes aos correspondentes sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, que introduzimos neste trabalho, os ramos dos tableaux são unívoca e automaticamente gerados e não ocorrem retornos infinitos.

Assim sendo, este trabalho é constituído por quatro capítulos e quatro anexos.

No Capítulo 1, introduzimos a hierarquia de sistemas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa; e a hierarquia de cálculos quantificacionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa. Apresentamos algumas definições e resultados que caracterizam esses cálculos, alguns deles originais, importantes para o desenvolvimento deste trabalho: diversos resultados e demonstrações são relevantes para a compreensão de métodos subjacentes ao desenvolvimento dos sistemas de dedução natural e dos sistemas de tableaux analíticos que introduzimos nos capítulos subseqüentes.

Generalizamos alguns operadores dos sistemas proposicionais e quantificacionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, para a construção dos sistemas de tableaux analíticos do Capítulo 4.

Os sistemas $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, num certo sentido subsistemas do cálculo proposicional e do cálculo de predicados clássico, respectivamente, aqui são concebidos também como extensões paraconsistentes da lógica clássica.

No Capítulo 2, apresentamos o método de provas subordinadas introduzido por **Fitch 1952**, no qual uma dedução formal corresponde a um encadeamento finito de fórmulas, em forma linear, através de aplicações de regras de dedução. As noções de prova subordinada, suposição, prova por introdução-eliminação, prova categórica, prova categórica normal, etc., adaptadas de Fitch, são introduzidas ao longo desse capítulo.

Introduzimos a hierarquia de sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e demonstramos a equivalência entre esses sistemas e os correspondentes cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa. Uma pecularidade desses sistemas é que as condições para a "propagação do bom comportamento" são neles derivadas.

Demonstramos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, e a Propriedade de Subfórmula.

No Capítulo 3, introduzimos a hierarquia de sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, e demonstramos a equivalência entre esses sistemas e os correspondentes cálculos $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa.

Demonstramos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, e a Propriedade de Subfórmula.

No Capítulo 4, introduzimos a hierarquia de sistemas proposicionais de tableaux analíticos $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, nos quais o operador definido "o" ("bola") de da Costa, os operadores "k" reiterados de nível k, os operadores generalizados "(k)" e as negações "$\sim_k$", $k \geq 1$, são considerados operadores primitivos, diferentemente do que tem sido feito na literatura, onde esses operadores são usualmente definidos.

Nossos sistemas são introduzidos a partir de uma quantidade enumerável (infinita) de operadores primitivos, para cada sistema, o que nos permite finalmente captar os sistemas $\mathbf{C}_n$ de da Costa, $1 \leq n < \omega$, como extensões paraconsistentes da lógica clássica.

Através da demonstração da Regra do Corte para os sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, demonstramos que cada sistema da hierarquia $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, é equivalente ao correspondente sistema paraconsistente $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Nos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, não usamos definições na geração dos ramos dos tableaux. Definimos duas condições para o fechamento dos ramos dos tableaux em $\mathbf{TNDC}_n$: um ramo fecha pela negação forte "$\sim_n$", como é usual, ou fecha pela negação paraconsistente "$\neg$" e condições adicionais.

Neste capítulo, demonstramos, via tableaux analíticos, resultados que relacionam entre si os diferentes sistemas $\mathbf{C}_n$ da hierarquia de da Costa, $1 \leq n < \omega$.

No Anexo 1, apresentamos resumidamente os sistemas de dedução natural, presentes na literatura, associados aos cálculos proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, ao cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$, e ao cálculo quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$*, de da Costa.

No Anexo 2, demonstramos diretamente a equivalência entre os sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e os sistemas de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, introduzidos em **Castro 1998** e **Castro e D´Ottaviano 2000**.

No Anexo 3, introduzimos uma outra hierarquia de sistemas dedutivos quantificacionais paraconsistentes de primeira ordem, que denominamos $\mathbf{aDNC_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$, onde as condições para a "propagação do bom comportamento" são consideradas primitivas, e demonstramos a equivalência entre os sistemas $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$, e $\mathbf{aDNC_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$.

Finalmente, no Anexo 4, apresentamos resumidamente os sistemas de tableaux, conhecidos na literatura, equivalentes ao cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1$ de da Costa e ao cálculo proposicional $\mathbf{C}_1{}^1$ de **Alves 1976**, e exibimos alguns exemplos comparativos entre a verificação da validade de fórmulas nesses sistemas e em nosso sistema $\mathbf{TNDC}_1$.

1 AS HIERARQUIAS DE CÁLCULOS PROPOSICIONAIS $\mathbf{C_n}$ E DE CÁLCULOS QUANTIFICACIONAIS $\mathbf{C_n}$* DE DA COSTA

Neste Capítulo, introduzimos as hierarquias de sistemas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ e quantificacionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}^*$, $1 \leq n \leq \omega$, respectivamente, de da Costa.

Os cálculos $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{C_n}^*$, $1 \leq n \leq \omega$, constituem hierarquias de sistemas lógicos, em que cada cálculo é estritamente mais forte do que o cálculo que o sucede na hierarquia. Nessas hierarquias, podemos considerar os cálculos $\mathbf{C_0}$ e $\mathbf{C_0}^*$ como o cálculo proposicional clássico e o cálculo quantificacional clássico, respectivamente.

Apresentamos algumas definições e resultados que caracterizam esses cálculos, importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Diversos resultados e demonstrações, alguns deles originais, são relevantes para a compreensão de métodos subjacentes ao desenvolvimento dos sistemas de dedução natural e dos sistemas de tableaux analíticos que introduzimos nos Capítulos 2 e 3, e Capítulo 4, respectivamente.

Generalizamos alguns dos operadores dos sistemas proposicionais e quantificacionais paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{C_n}^*$, a saber, os operadores “$\sim_k$”, “k” e “(k)”, a partir dos quais obtemos alguns teoremas mais gerais, importantes para a construção dos sistemas de tableaux analíticos do Capítulo 4.

Os sistemas $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{C_n}^*$, $1 \leq n \leq \omega$, num certo sentido subsistemas do cálculo proposicional clássico e do cálculo de predicados clássico, respectivamente, podem ser entretanto concebidos como extensões paraconsistentes da lógica clássica.

1.1 OS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES $\mathbf{C_n}$, $1\leq n\leq\omega$, DE DA COSTA

A linguagem $\mathcal{L}$ dos sistemas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, introduzidos por **da Costa 1963a** (ver **da Costa1963b** e **1974b**), tem como conectivos primitivos os símbolos correspondentes à negação, conjunção, disjunção e implicação. Ou seja, o alfabeto de $\mathcal{L}$ consiste de:

- *Variáveis proposicionais*: p, q, r, ..., p_k, q_k, r_k, ... ;
- *Conectivos lógicos*: $\neg$ (negação), $\vee$ (disjunção), & (conjunção) e $\supset$ (implicação);
- *Símbolos auxiliares*: (,).

O conjunto das *variáveis proposicionais* é enumerável.

As noções de *fórmula*, *demonstração*, *teorema*, *dedução*, etc., assim como as convenções e notações, são as usuais, como em **Kleene 1974**.

Usaremos as letras maiúsculas do alfabeto latino **A**, **B**, **C**, ... (em negrito, com ou sem índices numéricos inferiores), como metavariáveis sobre fórmulas de $\mathcal{L}$.

Sejam **A** e **B** fórmulas quaisquer de $\mathcal{L}$. Os seguintes símbolos são acrescentados, por definição, na linguagem $\mathcal{L}$.

Definição 1.1.1 $\mathbf{A}^{o} =_{df} \neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$.

Definição 1.1.2 $\mathbf{A}^{k} =_{def} \mathbf{A}^{oo\ldots o}$. ("o" k vezes, para $k \geq 1$).

Observamos que

$\mathbf{A}^{oo}$ é $(\mathbf{A}^{o})^{o}$, isto é, $\neg(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$; $\mathbf{A}^{ooo}$ é $\neg(\mathbf{A}^{oo}\&\neg(\mathbf{A}^{oo}))$; e assim por diante, ou seja, $\mathbf{A}^{k}$ é $\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg(\mathbf{A}^{k-1}))$, com $k>1$.

Definição 1.1.3 $\mathbf{A}^{(k)} =_{df} \mathbf{A}^1 \,\&\, \mathbf{A}^2 \,\&\ldots\&\, \mathbf{A}^k$, para $k \geq 1$.

Observamos que $\mathbf{A}^1\&\mathbf{A}^2\& \ldots \&\mathbf{A}^k$ deve ser entendida, como usualmente, por: $\mathbf{A}^1\&(\mathbf{A}^2\&(\mathbf{A}^3\&(\ldots \&\mathbf{A}^k))\ldots)$; e as fórmulas $\mathbf{A}^1$ e $\mathbf{A}^{(1)}$ coincidem com $\mathbf{A}^o$.

Definição 1.1.4 $\sim_k\mathbf{A} =_{df} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)}$, para $k \geq 1$.

Definição 1.1.5 $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B} =_{df} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$.

De acordo com as definições acima, $\mathbf{A}^o$ é usualmente lida como "**A** é uma fórmula bem comportada" ou "**A** é uma fórmula regular", e o operador "o" é usualmente denominado de "operador bola"; $\mathbf{A}^k$ pode ser lida como "**A** é uma fórmula com o operador bola reiterado k-vezes"; $\mathbf{A}^{(k)}$ pode ser lida como "**A** é uma fórmula de grau k", ou "**A** é uma fórmula composta de grau k"; em $\mathbf{C}_n$ $1\leq n<\omega$, $\mathbf{A}^{(n)}$ pode ser lida como "**A** é uma fórmula bem comportada" em $\mathbf{C}_n$ ou "**A** é uma fórmula regular" em $\mathbf{C}_n$; o símbolo $\equiv$ corresponde à equivalência usual; e, para cada n, $1\leq n<\omega$, o conectivo "$\sim_n$" é denominado de "negação forte" do sistema $\mathbf{C}_n$.

Para cada *sistema proposicional* $\mathbf{C}_n, 1\leq n<\omega$, os esquemas de *axiomas* e *regra de dedução* são os seguintes:

AXIOMA 1 $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$

AXIOMA 2 $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$

AXIOMA 3 $\mathbf{A}\&\mathbf{B}\supset\mathbf{A}$

AXIOMA 4 $\mathbf{A}\&\mathbf{B}\supset\mathbf{B}$

AXIOMA 5 $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}\&\mathbf{B})$

AXIOMA 6 $\mathbf{A}\supset\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

AXIOMA 7 $\mathbf{B}\supset\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

AXIOMA 8 $(\mathbf{A}\supset\mathbf{C})\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{C})\supset(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))$

AXIOMA 9 $\neg\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$

AXIOMA 10 $\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$

AXIOMA 11 $\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}))$

AXIOMA 12 $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}$

AXIOMA 13 $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}$

AXIOMA 14 $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$

REGRA: *MODUS PONENS* (MP)

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}. \end{array}$$

Entendemos que as Definições 1.1.1-1.1.4 e os Axiomas 11-14 caracterizam as lógicas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$ de da Costa. O Axioma 11 constitui um caso particular de *reductio ad absurdum*, afirmando que o Princípio de *Reductio ad Absurdum* na lógica paraconsistente $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, de da Costa só se aplica quando a fórmula **B** é uma fórmula bem comportada de grau n. Os Axiomas 12-14 de da Costa podem ser interpretados como condições para a "propagação do bom comportamento".

O *sistema* $\boldsymbol{C}_\omega$ é definido pelos seguintes esquemas de *axiomas* e *regra de dedução*:

AXIOMA 1 ao AXIOMA 10

MODUS PONENS.

Como é bem conhecido, a lógica proposicional clássica pode ser introduzida pelos Axiomas 1-9 e MP, acrescentando-se o Princípio de *Reductio ad Absurdum*, isto é:

AXIOMA 10´: $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A})$.

Nesse sentido, o cálculo proposicional clássico pode ser considerado como o *sistema* $\mathbf{C}_0$ (**Kleene 1974**, p 82) da hierarquia $\mathbf{C}_n$, $0\leq n\leq\omega$.

Observamos que, enquanto em $\mathbf{C}_0$, o esquema $\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$ é um teorema a partir dos axiomas (**Kleene 1974**, p. 119), em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, $\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$ é um axioma.

A seguir, apresentamos algumas definições e resultados conhecidos e alguns resultados originais, referentes aos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa, necessários ao desenvolvimento e à compreensão de métodos subjacentes à construção de nossos sistemas de dedução natural e de nossos sistemas de tableaux analíticos, introduzidos nos Capítulo 2 e 3, e Capítulo 4, respectivamente.

Teorema 1.1.6 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 14) Em $\mathbf{C}_1$ são demonstráveis todos os teoremas da lógica proposicional positiva clássica. □

Observamos que o resultado acima é válido para os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$.

Teorema 1.1.7 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 10-11) Em $\mathbf{C}_1$ são válidas todas as regras do Teorema 2 de **Kleene 1974**, p. 98, excetuando-se a referente ao método de redução ao absurdo:

1. $\dfrac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{B}}{\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}}$
2. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{B}$
3. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}\&\mathbf{B}$
4. $\mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}$
5. $\mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{B}$
6. $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}\vee\mathbf{B}$
7. $\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}\vee\mathbf{B}$
8. $\neg\neg\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{A}$
9. $\dfrac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{C} \qquad \Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A}\vee\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_1} \mathbf{C}}$.

□

Pelo Teorema 1.1.7-(1) temos o **Metateorema da Dedução** (**MtD**) para $\mathbf{C}_1$.

A generalização dos resultados do Teorema 1.1.7 para os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1<n\leq\omega$, é imediata. Salientamos o caso do Metateorema da Dedução.

Teorema 1.1.8 (**Metateorema da Dedução**) Se Γ é um conjunto de fórmulas, então $\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$ se, somente se, $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$, $1\leq n\leq\omega$. Isto é,

$$\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}. \qquad \square$$

Teorema 1.1.9 Em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, as seguintes fórmulas são teoremas:

i. $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\supset(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})$

ii. $\neg(\mathbf{A}^{k})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, para $k\geq 1$

iii. $\neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, para $k\geq 1$

iv. $\mathbf{A}^{(n)}\supset(\neg\mathbf{A})^{(k)}$, para $k\geq 1$

v. $(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))\supset(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$

vi. $(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$

vii. $(\mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset\mathbf{B}$

viii. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

ix. $(\mathbf{A}\vee\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

x. $\neg\sim_k\mathbf{A}\equiv\mathbf{A}$, para $k\geq n$

xi. $\sim_k\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$, para $k\geq 1$

xii. $(\mathbf{A})^{n+1}$

xiii. $\mathbf{A}^{(n)}\supset\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$

xiv. $(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}$

xv. $(\sim_k\mathbf{A})^{(n)}$, para $k\geq n$

xvi. $\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$, para $s\geq 1$ e $k\geq n$

xvii. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$

xviii. $((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

xix. $\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$.

Demonstração:

A demonstração de (i) está em **da Costa e Guillaume 1964**, p. 379; as demonstrações de (ii)-(iv) e (xviii) estão em **da Costa e Guillaume 1965**, p. 205-209; **Alves 1976**, p. 27, demonstra (vii); **Castro e D'Ottaviano 2000**, p.16-17, demonstra (v) e (vi).

Indicamos, a seguir, as provas dos itens (viii)-(xvii) e (xix), que não encontramos na literatura.

viii. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

1. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ propriedade de $\vdash_{C_n}$[1]

2. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$ propriedade de $\vdash_{C_n}$

---

[1] Usaremos as seguintes propriedades gerais resultantes da definição da relação de dedutibilidade $\vdash$ (ver **Kleene 1974**, p.89), sendo **E** uma fórmula, e Δ e Γ seqüências finitas de ocorrências de fórmulas:
i. $\mathbf{E}\vdash\mathbf{E}$;
ii. Se $\Delta\vdash\mathbf{E}$ e $\Delta\subseteq\Gamma$, então $\Gamma\vdash\mathbf{E}$.

3. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$ 1, 2, MP

4. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ Axioma 7

5. $\mathbf{A}, \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ 3, 4, MP

6. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ 5, MtD

7. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ Axioma 6

8. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$ Axioma 10

9. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset((\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset(\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))$ Axioma 8

10. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} ((\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset(\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))$ 6, 9, MP

11. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$ 7, 10, MP

12. $\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ 8, 11, MP

13. $\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ 10, MtD

ix. $(\mathbf{A}\vee\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

1. $\vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{A}$ Teorema 1.1.6

2. $\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{A})\supset(((\mathbf{A}\vee\mathbf{A})\supset\mathbf{A})))$ Axioma 8

3. $\vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$ 1, 2, MP

x. $\neg\sim_k\mathbf{A}\equiv\mathbf{A}$

1. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\sim_k\mathbf{A}$ propriedade de $\vdash_{C_n}$

2. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)})$ 1, Definição 1.1.4

3. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\vee\neg(\mathbf{A}^{(k)})$ 2, Teorema 1.1.9(i), MP

4. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$ Axioma 9

5. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ Teorema 1.1.9(iii)

6. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ Axioma 9

7. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$ Axioma 3

8.	$\neg{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset\mathbf{A}$	5, 6, 7, transitividade de $\supset$
9.	$\neg{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	4, 8, 3, Axioma 8, MP
10.	$\vdash_{C_n} \neg{\sim_k}\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	8, MtD

e

1.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} {\sim_k}\mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)}$	1, Definição 1.1.4
3.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
4.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(k)}$	2, Axioma 4, MP
5.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	4, Definição 1.1.3, Axioma 4, MP
6.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	2, Axioma 3, MP
7.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}$	5, 6, Axioma 5, MP
8.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	7, 3, Axioma 5, MP
9.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}\supset\neg{\sim_k}\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(vii)
10.	$\mathbf{A}, {\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg{\sim_k}\mathbf{A}$	8, 9, MP
11.	$\mathbf{A} \vdash_{C_n} {\sim_k}\mathbf{A}\supset\neg{\sim_k}\mathbf{A}$	10, MtD
12.	$\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg{\sim_k}\mathbf{A}\vee\neg{\sim_k}\mathbf{A}$	11, Teorema 1.1.9(viii), MP
13.	$\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg{\sim_k}\mathbf{A}$	12, Teorema 1.1.9(ix), MP
14.	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\neg{\sim_k}\mathbf{A}$	13, MtD

xi. ${\sim_k}\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$, para $k\geq1$

1.	${\sim_k}\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} {\sim_k}\neg\mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2.	${\sim_k}\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\&(\neg\mathbf{A})^{(k)}$	1, Definição 1.1.4
3.	${\sim_k}\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$	2, Axioma 3, MP
4.	${\sim_k}\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	3, Axioma 9, MP
5.	$\vdash_{C_n} {\sim_k}\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	4, MtD

xii.	$(\mathbf{A})^{n+1}$	
1.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{n+1})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}^n\&\neg(\mathbf{A}^n)))$	1, Definição 1.1.2
3.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^n\&\neg(\mathbf{A}^n))$	2, Axioma 9, MP
4.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^n$	3, Axioma 3, MP
5.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^n)$	3, Axioma 3, MP
6.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1}))$	5, Definição 1.1.2
7.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})$	6, Axioma 9, MP
8.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{n-1}$	7, Axioma 3, MP
9.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{n-1})$	7, Axioma 4, MP
	Repetindo-se os procedimentos dos passos 5-9, obtemos	
⋮	⋮	
s.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1))$	s-1, Definição 1.1.2
s+1.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1)$	s, Axioma 9, MP
s+2.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^1$	s+1, Axioma 3, MP
s+3.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^1$	s+1, Axioma 4, MP
s+4.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$	s+3, Definição 1.1.1
s+5.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	s+4, Axioma 9, MP
s+6.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	s+5, Axioma 3, MP
s+7.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	s+5, Axioma 4, MP
⋮	⋮	
s+j.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^1\&\mathbf{A}^2\& \ldots \& \mathbf{A}^{n-1}\&\mathbf{A}^n$	s+2, ... , 8, 4, aplicação reiterada do Axioma 5
s+j+1.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	s+j, Definição 1.1.3
s+j+2.	$\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$	s+j+1, s+5, Axioma 5, MP

s+j+3. $\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}^{n+1})$ Teorema 1.1.9(vii)

s+j+4. $\neg((\mathbf{A})^{n+1}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{n+1}$ s+j+2, s+j+3, MP

s+j+5. $\vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{n+1})\supset((\mathbf{A})^{n+1})$ s+j+4, MtD

s+j+6. $\vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A})^{n+1})\vee((\mathbf{A})^{n+1})$ s+j+5, Teorema 1.1.9(viii), MP

$\vdots$ $\vdots$

s+j+t. $\vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{n+1}$ Axioma 8, MP

xiii. $\mathbf{A}^{(n)}\supset\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$

1. $\mathbf{A}^{(n)}, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$ propriedade de $\vdash_{C_n}$
2. $\mathbf{A}^{(n)}, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$ propriedade de $\vdash_{C_n}$
3. $\mathbf{A}^{(n)}, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$ 1, 2, Axioma 5
4. $\mathbf{A}^{(n)}, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}\supset\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$ Teorema 1.1.9(vii)
5. $\mathbf{A}^{(n)}, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$ 3, 4, MP
6. $\mathbf{A}^{(n)} \vdash_{C_n} (\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$ 5, MtD
7. $\mathbf{A}^{(n)} \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\vee\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$ 6, Teorema 1.1.9(viii), MP
8. $\mathbf{A}^{(n)} \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$ 7, Teorema 1.1.9(ix), MP

xiv. $(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}$

1. $\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$ propriedade de $\vdash_{C_n}$
2. $\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})\supset((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})\&\neg(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1}))$

Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9,
transitividade de $\supset$

3 $\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})\&\neg(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})$ 1, 2, MP

4 $\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})$ 3, Axioma 3, MP

5 $\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})$ 3, Axioma 4, MP

6	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{n}$	5, Definição 1.1.2
7	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{n-1}$	4, Axioma 3, MP
8	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{n-1}$	4, Axioma 3, MP
9	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}^{n-2}\&\neg\mathbf{A}^{n-2}))$	8, Definição 1.1.2
10	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{n-2}\&\neg\mathbf{A}^{n-2})$	9, Axioma 9, MP
11	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{n-2}$	10, Axioma 3, MP
12	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{n-2}$	10, Axioma 4, MP
⋮	⋮	
s	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}^{1}\&\neg\mathbf{A}^{1}))$	s-1, Definição 1.1.2
s+1	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{1}\&\neg\mathbf{A}^{1})$	s, Axioma 9, MP
s+2	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{1}$	s+1, Axioma 3, MP
s+3	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{1}$	s+1, Axioma 4, MP
s+4	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$	s+3, Definição 1.1.1
s+5	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	s+4, Axioma 9, MP
s+6	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	s+5, Axioma 3, MP
s+7	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	s+5, Axioma 4, MP
⋮	⋮	
s+j	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{1}\&\mathbf{A}^{2}\& \ldots \& \mathbf{A}^{n-1}\&\mathbf{A}^{n}$	s+2, ... , 11, 7, 6, aplicação reiterada do Axioma 5
s+j+1	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	s+j, Definição 1.1.3
s+j+2	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})$	s+j+1, s+5, Axioma 5, MP
s+j+3	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	Teorema 1.1.9(vii)
s+j+4	$\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}) \vdash_{C_n} ((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	s+j+2, s+j+3, MP
s+j+5	$\vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})\supset((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	s+j+4, MtD
s+j+6	$\vdash_{C_n} \neg\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})\vee((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	s+j+5, Teorema 1.1.9(viii), MP

s+j+7	$\vdash_{C_n} \neg\neg((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})\supset((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	Axioma 9
s+j+8	$\vdash_{C_n} ((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})\supset((\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)})$	Teorema 1.1.6
s+j+9	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}$	s+j+7, s+j+8, s+j+6, Axioma 8, MP

xv. $(\sim_k\mathbf{A})^{(n)}$, para $k\geq n$

1	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})\supset(\sim_k\mathbf{A})\&\neg(\sim_k\mathbf{A})$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, MP
3	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\sim_k\mathbf{A})\&\neg(\sim_k\mathbf{A})$	1, 2, MP
4	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\sim_k\mathbf{A})$	3, Axioma 3, MP
5	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\sim_k\mathbf{A})$	3, Axioma 4, MP
6	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(k)}$	4, Definição 1.1.4
7	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	6, Axioma 3, Axioma 9, MP
8	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(k)}$	6, Axioma 4, MP
9	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(n)}$	8, Definição 1.1.3, Axioma 3, Axioma 5, MP
10	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(k)})$	5, Definição 1.1.4
11	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\vee\neg((\mathbf{A})^{(k)})$	10, Teorema 1.1.9(i), MP
12	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 9
13	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{(k)})\supset\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, transitividade de $\supset$
14	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 3
15	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{(k)})\supset\mathbf{A}$	13, 14, transitividade de $\supset$
16	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	12, 15, 11, Axioma 8, MP
17	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	9, 7, 16, Axioma 5, MP
18	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}\supset((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	Teorema 1.1.9(vii)

19	$\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} ((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	17, 18, MP
20	$\vdash_{C_n} \neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})\supset((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	19, MtD
21	$\vdash_{C_n} \neg\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}))\vee((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	20, Teorema 1.1.9(viii), MP
22	$\vdash_{C_n} \neg\neg((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}))\supset((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	Axioma 9
23	$\vdash_{C_n} ((\sim_k\mathbf{A})^{(n)}))\supset((\sim_k\mathbf{A})^{(n)})$	Teorema 1.1.6
24	$\vdash_{C_n} (\sim_k\mathbf{A})^{(n)}$	22, 23, 21, Axioma 8, MP

xvi. $\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$ para $s\geq1$ e $k\geq n$

1	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} \neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} \neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	Teorema 1.1.9(xi)
3	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	2, MP
4	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(k)})$	3, Definição 1.1.4
5	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(k)}$	4, Axioma 4, MP
6	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(n)}$	5, Definição 3, Axioma 3, MP
7	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	4, Axioma 3, MP
8	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	7, Axioma 3, Axioma 5, MP
9	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A})^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	8, 6, Axioma 5, MP
10	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} ((\mathbf{A})^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset(\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}))$	Teorema 1.1.9(vii)
11	$\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}) \vdash_{C_n} (\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	9, 10, MP
12	$\vdash_{C_n} \neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})\supset(\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	11, MtD
13	$\vdash_{C_n} \neg\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})\vee(\sim_k(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	Teorema 1.1.9(i), MP
14	$\vdash_{C_n} \neg\neg\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})))\supset(\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}))$	Axioma 9
15	$\vdash_{C_n} (\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}))\supset(\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A}))$	Teorema 1.1.6
16	$\vdash_{C_n} \sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$	14, 15, 13, Axioma 8, MP

xvii. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$

1	$\vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{(n)}\supset\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, transitividade de ⊃
2	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 4
3	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	Axioma 1
4	$\vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	1, 2, 3, transitividade
5	$\vdash_{C_n} (\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	Axioma 7
6	$\vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	4, 5, transitividade
7	$\vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}^{(n)}\supset\mathbf{B}\&\neg\mathbf{B}$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, transitividade de ⊃
⋮	⋮	
12	$\vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	idêntico a 1-6
13	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
14	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{(n)}\vee\neg\mathbf{B}^{(n)}$	13, Teorema 1.1.9 i, MP
15	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	6, propriedade de $\vdash_{C_n}$
16	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	12, propriedade de $\vdash_{C_n}$
17	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	15, 16, 14, Axioma 8, MP
18	$\vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	17, MtD
19	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
20	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
21	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	19, 20, Axioma 5, MP
22	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	21, Teorema 1.1.9(vi), MP
23	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	24, Axioma 3, MP
24	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
25	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}\supset\mathbf{A}$	26, MtD
26	$\vdash_{C_n} (\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	Axioma 7

27	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} ((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	25, 26, MP, propriedade de $\vdash_{C_n}$
26	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	27, MtD
28	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	Axioma 6, propriedade de $\vdash_{C_n}$
29	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	Axioma 10
30	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	28, 27, 29, Axioma 8, MP, propriedade de $\vdash_{C_n}$
31	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	30, MtD
32	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\vee(\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}))$	Axioma 10
33	$\vdash_{C_n} ((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A}))$	31, 18, 32, Axioma 8, MP

xix. $\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$

1	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
3	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	1,2 Axioma 5, MP
4	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	3, Teorema 1.1.9(vi), MP
5	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	4, Axioma 3, MP
6	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	5, Axioma 6, MP
7	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	6, MtD
8	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
9	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)})\vee\neg(\mathbf{B}^{(n)})$	8, Teorema 1.1.9(i), MP
10	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)})\supset\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, transitividade de $\supset$, propriedade de $\vdash_{C_n}$
11	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 3, propriedade de $\vdash_{C_n}$
12	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	Axioma 6, propriedade de $\vdash_{C_n}$
13	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)})\supset\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	10, 11, 12, transitividade

⋮	⋮	
18	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{B}^{(n)})\supset\mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	idêntico a 10-13
19	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),\ \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	13, 18, 9, Axioma 8, MP
20	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	19, MtD
21	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\lor\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$	Axioma 10, propriedade de $\vdash_{C_n}$
24	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	7, 20, 21, Axioma 8, MP
25	$\vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	24, MtD
26	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	Axioma 4
27	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\lor\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	Axioma 10
28	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}\lor(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	26, 25, 27, Axioma 8, MP □

Observamos que, pelo item (xvi) acima, verificamos que para todo $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, $\vdash_{C_n}\sim_s(\mathbf{A}\&\sim_k\mathbf{A})$, para $s\geq 1$ e $k\geq n$, o que corresponde a uma propriedade bastante geral das negações $\sim_m$, $m\geq 1$, em cada $\mathbf{C}_n$, Em particular para s, k = n, a propriedade corresponde ao Princípio da Não-Contradição clássico para $\mathbf{C}_n$.

O teorema a seguir corresponde a uma generalização de um resultado obtido para o sistema $\mathbf{C}_1$ por **da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 12.

Teorema 1.1.10 Em $\mathbf{C}_n$ é válida a seguinte versão do método de redução ao absurdo:

$$\frac{\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)} \qquad \Gamma,\ \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B} \qquad \Gamma, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}}{\Gamma \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}}$$ □

Teorema 1.1.11 (**da Costa 1974b**, p. 500) Em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, $\sim_n$ tem todas as propriedades da negação clássica. □

A seguir, generalizamos o resultado para $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, relativamente à negação $\sim_k$, $k \geq n$.

Teorema 1.1.12 Em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, $\sim_k$, $k \geq n$, tem propriedades da negação clássica.

Demonstração:

Basta demonstrarmos os Postulados 7 e 8 apresentados em **Kleene 1974**, p. 82.

Postulado 7 $\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B})\supset\sim_k\mathbf{A})$

1	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
3	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	1, 2, MP
3	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \sim_k\mathbf{B}$	1, 3, MP
4	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}^{(k)}$	3, Definição 1.1.4
5	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	4, Axioma 3, MP
6	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(k)}$	4, Axioma 4, MP
7	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$	6, Definição 1.1.3, Axioma 4, MP, Definição 1.1.3
8	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}$	7, 5, Axioma 5, MP
9	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}$	8, 2, Axioma 5, MP
10	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(vii)
11	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	9, 10, MP
12	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}$	11, MtD
13	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$	12, Teorema 1.1.9(viii), MP
14	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(ix)

15	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	13, 14, MP
16	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
17	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(iii), Axioma 9, transitividade de $\supset$
18	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	16, 17, MP
19	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	18, Axioma 3, MP
20	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
21	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	19, 20, MP
22	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
23	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B})), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \sim_k\mathbf{B}$	19, 22, MP
24	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}^{(k)}$	23, Definição 1.1.4
25	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	24, Axioma 3, MP
26	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(k)}$	24, Axioma 4, MP
27	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$	26, Definição 1.1.3, Axioma 4, MP, Definição 1.1.3
28	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}$	27, 25, Axioma 5, MP
29	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}$	28, 21, Axioma 5, MP
30	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\&\neg\mathbf{B}\&\mathbf{B}\supset(\mathbf{A}^{(k)})$	Teorema 1.1.9(vii)
31	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}), \neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(k)}$	29, 30, MP
32	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)})$	31, MtD
33	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\vee(\mathbf{A}^{(k)})$	32, Teorema 1.1.9(viii), MP
34	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)})$	Axioma 9
35	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)})$	Teorema 1.1.6
36	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}),(\mathbf{A}\supset\sim_k\mathbf{B}) \vdash_{C_n}(\neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)}))\supset(((\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)}))\supset((\neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\vee(\mathbf{A}^{(k)}))\supset(\mathbf{A}^{(k)})))$	Axioma 8

37	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (((\mathbf{A}^{(k)})\supset(\mathbf{A}^{(k)}))\supset((\neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\vee(\mathbf{A}^{(k)}))\supset(\mathbf{A}^{(k)})))$	34, 36, MP
38	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B}) \vdash_{C_n} ((\neg\neg(\mathbf{A}^{(k)})\vee(\mathbf{A}^{(k)}))\supset(\mathbf{A}^{(k)}))$	35, 37, MP
39	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{(k)})$	33, 38, MP
40	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A}^{(k)})$	15, 39, Axioma 5, MP
41	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B}) \vdash_{C_n} {\sim_k}\mathbf{A}$	40, Definição 1.1.4
42	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B})\supset{\sim_k}\mathbf{A}$	41, MtD
43	$\vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset{\sim_k}\mathbf{B})\supset{\sim_k}\mathbf{A})$	42, MtD

Postulado 8 $\vdash_{C_n} {\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$

1	${\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} {\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2	${\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg({\sim_k}\mathbf{A})\&({\sim_k}\mathbf{A})^{(k)}$	1, Definição 1.1.4
3	${\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg({\sim_k}\mathbf{A})$	2, Axioma 3, MP
4	${\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg({\sim_k}\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(xi),Definição 1.1.5, Axioma 3, MP
5	${\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	3, 4, MP
6	$\vdash_{C_n} {\sim_k}{\sim_k}\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	5, MtD □

Teorema 1.1.13 Os seguintes esquemas de fórmulas são demonstráveis em $\mathbf{C}_\omega$:

i. $\neg(\mathbf{A}^k)\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, para $k\geq1$

ii. $\mathbf{A}^k\vee\mathbf{A}$, para $k\geq1$

iii. $\mathbf{A}^k\vee\neg\mathbf{A}$, para $k\geq1$

iv. $\mathbf{A}^{(k)}\vee\mathbf{A}$, para $k\geq1$

v. $\mathbf{A}\vee{\sim_k}\mathbf{A}$, para $k\geq1$

vi. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

vii. $\neg\neg(\mathbf{A}^k)\vee\mathbf{A}$, para $k\geq1$.

As provas de (i), (iv) e (v) estão em **da Costa e Guillaume 1965**, p. 205. Indicamos, a seguir, as provas dos itens (ii), (iii), (vi) e (vii).

Demonstração:

ii. $\mathbf{A}^k \vee \mathbf{A}$, para $k \geq 1$

1	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \vee \neg(\mathbf{A}^k)$	Axioma 10
2	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset (\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$	Teorema 1.1.13(i)
3	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A} \& \neg\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$	Axioma 3
4	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset \mathbf{A}$	2, 3, transitividade de $\supset$
5	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \supset \mathbf{A}^k$	Teorema 1.1.6
6	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \vee \mathbf{A}$	5, 2, Axioma 8, MP

iii. $\mathbf{A}^k \vee \neg\mathbf{A}$, para $k \geq 1$

1	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \vee \neg(\mathbf{A}^k)$	Axioma 10
2	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset (\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$	Teorema 1.1.13(i)
3	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A} \& \neg\mathbf{A} \supset \neg\mathbf{A}$	Axioma 4
4	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset \neg\mathbf{A}$	2, 3, transitividade de $\supset$
5	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \supset \mathbf{A}^k$	Teorema 1.1.6
6	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{A}^k \vee \neg\mathbf{A}$	5, 2, Axioma 8, MP

vi. $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$

Idêntica à demonstração do Teorema 1.1.9(viii).

vii. $\neg\neg(\mathbf{A}^k) \vee \mathbf{A}$

1	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset (\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$	Teorema 1.1.13(i)
2	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} (\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$	Axioma 3
3	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg(\mathbf{A}^k) \supset \mathbf{A}$	1, 2, transitividade de $\supset$
4	$\vdash_{\mathbf{C}_\omega} \neg\neg(\mathbf{A}^k) \vee \mathbf{A}$	3, Teorema 1.1.13(vi), MP □

Observação 1.1.14 Observamos que o item (v) acima corresponde a uma propriedade bastante geral das negações $\sim_k$, para todo k, $k \geq 1$. No caso em que $k = n$, a propriedade corresponde ao Princípio do Terceiro Excluído clássico para $\mathbf{C}_n$.

O teorema a seguir constitui uma generalização do resultado obtido para o sistema $\mathbf{C}_1$ por **da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 16.

Teorema 1.1.15 Se Γ é um conjunto de fórmulas e $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_m$ são os componentes primos[2] das fórmulas de $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\}$, então, uma condição necessária e suficiente para que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_0} \mathbf{A}$ é que $\Gamma, \mathbf{A}_1^{(n)}, \mathbf{A}_2^{(n)}, ..., \mathbf{A}_m^{(n)} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}$, isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_0} \mathbf{A} \Leftrightarrow \Gamma, \mathbf{A}_1^{(n)}, \mathbf{A}_2^{(n)}, ..., \mathbf{A}_m^{(n)} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}. \qquad \square$$

Definição 1.1.16 Dados dois sistemas formais **S** e **S′**, cuja linguagem é $\mathcal{L}$, **S′** é *estritamente mais forte* que **S** se, e somente se,

i. Para toda fórmula **A** de $\mathcal{L}$,

$$\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\mathbf{S}'} \mathbf{A}$$

ii. Existe uma fórmula **B** de $\mathcal{L}$, tal que

$$\vdash_{\mathbf{S}'} \mathbf{B} \text{ e } \nvdash_{\mathbf{S}} \mathbf{B}.$$

Teorema 1.1.17 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 17) Cada um dos cálculos da hierarquia $\mathbf{C}_n$, $0 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais forte do que os que o sucedem na hierarquia. $\square$

Por exemplo, o esquema $(\mathbf{A}^{n-1} \& \neg \mathbf{A}^{n-1})^{(n)}$ é um teorema em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, mas, não o é em $\mathbf{C}_m$, $m > n$.

Um outro exemplo interessante, é que a fórmula $(\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \supset \neg\neg(\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A})$ é teorema em todo $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e não é teorema em $\mathbf{C}_\omega$.

---

[2] Isto é, as $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq m$, não são fórmulas do tipo $\mathbf{B}\&\mathbf{C}$, $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, $\neg \mathbf{B}$.

Teorema 1.1.18 (**da Costa 1974b**, p. 501) Os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são consistentes. □

Teorema 1.1.19 (**A. I. Arruda**, de acordo com **da Costa 1974b**, p. 501 e **Arruda 1975**) Os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, não são decidíveis por matrizes finitas. □

Teorema 1.1.20 (**Fidel 1977**, p. 31-40) Os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são decidíveis. □

Da Costa e Alves 1976 e **Alves 1976** introduzem o conceito de valoração paraconsistente para o sistema $\mathbf{C}_1$ através de uma valoração bivalente, e um procedimento de decisão denominado de quase-matrizes. Desenvolvem uma semântica, *à la* Henkin, e demonstram a correção e completude do sistema $\mathbf{C}_1$; e introduzem o método de quase-matrizes, para demonstrar a decidibilidade de $\mathbf{C}_1$. **Da Costa e Alves 1976** e **Alves 1976** estendem a semântica de $\mathbf{C}_1$ para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 < n < \omega$.

A definição de valoração paraconsistente, introduzida por da Costa e Alves, para $\mathbf{C}_1$, é a seguinte.

Definição 1.1.21 Se $\mathbf{F}$ é o conjunto de fórmulas da linguagem $\mathscr{L}$ de $\mathbf{C}_1$, uma *valoração* para $\mathbf{C}_1$ é uma função $\mathbf{v}: \mathbf{F} \rightarrow \{0, 1\}$, tal que:

1. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$
2. Se $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A}) = 1$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$
3. Se $\mathbf{v}(\mathbf{B}^{o}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B}) = 1$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$
4. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
5. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
6. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
7. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}^{o}) = \mathbf{v}(\mathbf{B}^{o}) = 1$, então $\mathbf{v}((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{o}) = \mathbf{v}((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{o}) = \mathbf{v}((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{o}) = 1$.

Da Costa e Alves 1977 apresenta uma generalização da semântica de da Costa e Alves (para $\mathbf{C}_1$) para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e demonstra (p. 623-624) que os sistemas $\mathbf{C}_n$,

$1 \leq n < \omega$, são corretos e completos. Introduzem uma pequena modificação na formulação da quase-matriz, no caso da negação de uma fórmula $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$:

> "In the construction of the quasi-matrices, the only change worth mentioning is that when A is $D^{n-1}\&\neg D^{n-1}$ or $\neg D^{n-1}\&D^{n-1}$ (have the value 1)[3], we write value 0 for the formula $\neg A$." (**da Costa e Alves 1977**, p. 628)

A cláusula acima constitui a caracterização das quase-matrizes dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Loparić e Alves 1980, p. 162, modifica a cláusula acima de da Costa e Alves, pois, uma quase-matriz, construída desse modo, poderia gerar uma linha v para uma fórmula $\mathbf{A}$, tal que, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}^{(n)}) = 1$, o que não é possível.

Contra-exemplo: De fato, considerando-se a cláusula acima de da Costa e Alves, a quase-matriz, em $\mathbf{C}_2$, para a fórmula $\mathbf{A}^1\&\neg(\mathbf{A}^1)\supset\neg(\mathbf{A}^2)$ é a seguinte:

$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^1$	$\neg(\mathbf{A}^1)$	$\mathbf{A}^1\&\neg(\mathbf{A}^1)$	$\mathbf{A}^2$	$\neg(\mathbf{A}^2)$
0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
	1	1	0	1	0	1	0
			1	0	0	1	0
				1	1	0	1

Portanto, ocorre a possibilidade de $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}^{(2)}) = 1$, o que não é possível em $\mathbf{C}_2$.

Observamos que resultado análogo pode ser obtido para $\mathbf{C}_n$, $n \geq 2$.

Por esse motivo, Loparić e Alves modificam algumas das condições da definição de valoração paraconsistente de da Costa e Alves e, a partir desta nova definição, com um pro-

---

[3] Acréscimo nosso, de acordo com **Alves 1976**, p. 79.

cedimento de decisão, via quase-matrizes, provam a correção, completude e decidibilidade dos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

A definição de valoração paraconsistente, introduzida por Loparić e Alves, para $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, é a seguinte.

Definição 1.1.22 Se **F** é o conjunto de fórmulas da linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, uma *valoração* para $\mathbf{C}_n$ é uma função **v**: $\mathbf{F} \rightarrow \{0, 1\}$, tal que:

1. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$
2. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A}) = 0$
3. $\mathbf{v}(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
4. $\mathbf{v}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
5. $\mathbf{v}(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$
6. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}^{n-1}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A}^{n-1})$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}^{n}) = 0$
7. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A})$, então $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}^{1}) = 1$
8. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{v}(\neg\mathbf{A})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{B}) \neq \mathbf{v}(\neg\mathbf{B})$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}\#\mathbf{B}) \neq \mathbf{v}(\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B}))$, onde # é &, $\vee$ ou $\supset$,

com
$\mathbf{A}^{0} =_{\text{def}} \mathbf{A}$,
$\mathbf{A}^{k} =_{\text{def}} \neg(\mathbf{A}^{k-1} \& \neg A^{k-1})$, para $k>0$.

Observamos que, para $k>0$, a definição de $\mathbf{A}^{k}$ é equivalente à usada por **da Costa 1963a** e **1974b** (ver **Definição 1.1.2**).

Teorema 1.1.23 (**Loparić e Alves 1980**, p. 164-171) Os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, são corretos, completos e decidíveis □

A seguir, como ilustração, apresentamos alguns esquemas não demonstráveis em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 1.1.24 Os seguintes esquemas não são demonstráveis em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$:

i. $\neg(\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$

ii. $\mathbf{A} \supset (\neg\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$

iii. $\mathbf{A} \supset \neg\neg\mathbf{A}$

vii. $\neg\mathbf{A} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$

viii. $\neg\mathbf{A} \equiv \sim_n\mathbf{A}$

iv. $(\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A})^{(n)}$

v. $\mathbf{A} \supset \sim_k\neg\mathbf{A}$

vi. $(\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A}) \supset \mathbf{B}$

ix. $(\mathbf{A} \supset \mathbf{A})^{(n)}$

x. $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$

xi. $\neg(\neg\mathbf{A} \& \mathbf{A}) \supset \neg(\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$.

Demonstração:

As demonstrações dos itens (i)-(iii), (vi) e (vii) estão em **da Costa 1963**, e **da Costa 1993**, p. 11-12.

Nessas demonstrações, da Costa introduz uma matriz trivalente com 2 (dois) valores distinguidos, $M = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \neg, \&, \vee, \supset\}$, que valida os axiomas de $\mathbf{C}_1$ e não valida os esquemas de fórmulas apresentados. Logo, pelo teorema anterior e Teorema 1.1.17, os esquemas não são válidos em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

A matriz trivalente, introduzida por da Costa, também não valida o esquema (x), isto é, $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$. Basta verificarmos o caso em que $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 2$ e $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 3$.

Para demonstrarmos os itens (iv), (v), (viii), (ix) e (xi), basta mostrarmos que não são esquemas válidos, de acordo com a Definição 1.1.22, e o resultado segue pelo Teorema 1.1.17.

iv. $(\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A})^{(n)}$

Mostremos que existe uma valoração $\mathbf{v}$, tal que

$\mathbf{v}((\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A})^{(n)}) = 0$.

Neste caso, basta que v seja tal que:

$\mathbf{v}(\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg(\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A})) = 1$

v. $\mathbf{A}\supset\sim_k\neg\mathbf{A}$

Mostremos que existe uma valoração v, tal que

$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{v}(\sim_k\neg\mathbf{A}) = 0$.

Neste caso, basta que v seja tal que:

$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$, $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A}) = 0$

viii. $\neg\mathbf{A}\equiv\sim_n\mathbf{A}$

Basta tomarmos uma valoração **v**, tal que:

$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$

ix. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{A})^{(n)}$

Basta tomarmos uma valoração **v**, tal que:

$\mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{A})) = 1$

xi. $\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})\supset\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$

Mostremos que existe uma valoração **v**, tal que

$\mathbf{v}(\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})) = 1$ e $\mathbf{v}(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})) = 0$.

Neste caso, basta que v seja tal que:

$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{A})=\mathbf{v}(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})=\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A})=1$, com $\mathbf{v}(\neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}))=1$ e $\mathbf{v}(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))=0$.

□

Loparić 1986, fundamentado no trabalho de **da Costa e Alves 1977**, introduz uma semântica para o sistema $\mathbf{C}_\omega$ e prova a completude, correção e a decidibilidade desse sistema.

Loparić introduz a seguinte definição de valoração para o cálculo $\mathbf{C}_\omega$.

Definição 1.1.25 Se **F** é o conjunto de fórmulas da linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathbf{C}_\omega$, *uma semi-valoração* para $\mathbf{C}_\omega$ é uma função **s**: **F** → {0, 1}, tal que:

1. Se $\mathbf{s}(\neg\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 1$
2. Se $\mathbf{s}(\neg\neg\mathbf{A}) = 1$, então $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 1$
3. $\mathbf{s}(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{s}(\mathbf{B}) = 1$
4. $\mathbf{s}(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{s}(\mathbf{B}) = 1$
5. Se $\mathbf{s}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = 0$, então $\mathbf{s}(\mathbf{B}) = 0$
6. Se $\mathbf{s}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = 1$, então $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{s}(\mathbf{B}) = 1$.

Definição 1.1.26 Uma *valoração* **v** para $\mathbf{C}_\omega$ é uma semi-valoração que satisfaz a seguinte condição:

7. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}_1\supset(\mathbf{A}_2\supset\ldots\supset(\mathbf{A}_{m-1}\supset\mathbf{A}_m)\ldots)) = 0$, então existe uma semi-valoração **s** tal que, para todo i, $1\leq i<m$, $\mathbf{s}(\mathbf{A}_i) = 1$ e $\mathbf{s}(\mathbf{A}_m) = 0$.

Definição 1.1.27 Uma valoração **v** é um *modelo* de um conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma\subseteq\mathbf{F}$, se, e somente se, para toda fórmula $\mathbf{A}\in\Gamma$, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$.

Teorema 1.1.28 (Loparić 1986[4], p 76-95) O sistema $\mathbf{C}_\omega$ é correto, completo e decidível.

A partir dessa semântica demonstramos os seguintes resultados.

Teorema 1.1.29 Os seguintes esquemas não são demonstráveis em $\mathbf{C}_\omega$:

i. $((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

ii. $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$

iii. $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$

iv. $\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$.

---

[4] Resultado apresentado em **Alves 1976**, p. 80-84.

Demonstração:

Para cada um dos casos, basta exibirmos uma valoração **v** que não seja modelo da fórmula. Provamos o caso (i).

i. $((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

Seja **s** uma semi-valoração, tal que

$\mathbf{s}((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = 0$.

Neste caso, $\mathbf{s}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = 0$ e, portanto, $\mathbf{s}(\mathbf{B}) = 0$.

Logo, pela cláusula 6 da Definição 1.1.25, $\mathbf{s}(((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A}) = 0$. □

Observação 1.1.30 De acordo com o Teorema 1.1.9, os esquemas de fórmulas acima, que não são teoremas em $\mathbf{C}_\omega$, são teoremas nos $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$.

Teorema 1.1.31 (**A.M. Sette**, de acordo com **Alves 1976**, p. 48) Nenhum esquema da forma $\neg\mathbf{A}$ é um teorema em $\mathbf{C}_\omega$. □

Teorema 1.1.32 (**Loparić 1988**, p. 217) Em $\mathbf{C}_\omega$ não pode ser definida uma negação que tenha todas as propriedades da negação clássica. □

Observação 1.1.33 O Teorema do *Replacement*[5] (ou Teorema da Substitutividade de Equivalentes) não é válido, em geral, em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$ (ver **Alves 1976**, p. 27).

Por exemplo,

$(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}) \equiv (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}) \nvdash_{C_1} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}) \equiv \neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$.

$(\neg\mathbf{A}^{n-1}\&\mathbf{A}^{n-1})\equiv(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1}) \nvdash_{C_1} \neg(\neg\mathbf{A}^{n-1}\&\mathbf{A}^{n-1})^{(n)} \equiv \neg(\mathbf{A}^{n-1}\&\neg\mathbf{A}^{n-1})^{(n)}$, para $1<n<\omega$.

---

[5] Teorema do *Replacement* ou Teorema da Substitutividade de Equivalentes:

Seja **A** uma fórmula do sistema formal **S** e $\mathbf{A}'$ obtida substituindo-se algumas ocorrências de $\mathbf{B}_1$, em **A**, por $\mathbf{B}_1'$. Se $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}_1'$ é um teorema de **S**, então $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$ é um teorema de **S**.

Definição 1.1.34 Um conjunto de fórmulas Γ de **F**, $\Gamma \subseteq \mathbf{F}$, é dito *trivial* se o conjunto de conseqüências sintáticas de Γ é **F**; Γ é dito *inconsistente* (ou *contraditório*), relativamente à negação básica $\neg$ de $\mathcal{L}$, se existe uma fórmula **A** de **F** tal que as fórmulas **A** e $\neg$**A** são conseqüências sintáticas de Γ.

Observação 1.1.35 Pela Definição 1.1.34 e pelo Teorema 1.1.24, segue-se que os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são não-triviais.

Definição 1.1.36 Um sistema formal **S** é *finitamente trivializável* se, e somente se, existir uma fórmula da linguagem de **S**, que acrescentada a **S** como axioma, torna-o trivial; caso contrário, é dito *infinitamente trivializável*.

Teorema 1.1.37 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p.19) Os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, são finitamente trivializáveis. □

Teorema 1.1.38 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 19) O sistema $\mathbf{C}_\omega$ é infinitamente trivializável. □

1.2 OS CÁLCULOS QUANTIFICACIONAIS PARACONSISTENTES $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, DE DA COSTA

A linguagem $\mathcal{L}^*$ dos *sistemas quantificacionais paraconsistentes de primeira ordem* $\mathbf{C}_n^*$*, $1 \leq n \leq \omega$*, de **da Costa 1963a** (ver **da Costa 1964** e **1974b**), tem como conectivos primitivos os conectivos da linguagem $\mathcal{L}$ dos *sistemas proposicionais paraconsistentes* $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$*, acrescidos dos quantificadores universal e existencial, ambos primitivos. O alfabeto de $\mathcal{L}^*$ consiste de:

- *Variáveis individuais*: x, y, z, ..., x_k, y_k, z_k, ...
- *Constantes individuais*: a, b, c, ..., a_k, b_k, c_k, ...
- *Símbolos de predicados m-ários*: P_k^m, Q_k^m, R_k^m, ...
- *Símbolos de funções m-árias*: f_k^m, g_k^m, h_k^m, ...
- *Conectivos lógicos*: ¬ (negação), ∨ (disjunção), & (conjunção), ⊃ (implicação)
- *Quantificadores*: ∀ (quantificador universal) e ∃ (quantificador existencial)
- *Símbolos auxiliares*: (,).

O conjunto das *variáveis individuais* é enumerável, os conjuntos dos *símbolos de predicados* de grau $m \in \mathbf{N}$, m>0, com ou sem índices inferiores $k \in \mathbf{N}$, k>0, e dos *símbolos funcionais* de grau $m \in \mathbf{N}$, m>0, com ou sem índices inferiores $k \in \mathbf{N}$, k>0, são enumeráveis.

As noções de *termo*, *fórmula*, *fórmula sem variáveis* (ou *livre de variáveis*), *fórmula congruente*, *escopo* de um quantificador, *ocorrência ligada* de uma variável numa fórmula, *ocorrência livre* de uma variável numa fórmula, *fórmula aberta*, *fórmula fechada*, etc., assim como as convenções e notações, são as usuais, como em **Kleene 1974**. Observamos que as substituições de uma variável por um termo, e de um termo por outro termo, numa fórmula, são definidas como usualmente.

Usaremos os símbolos **x**, **y**, **z** (em negrito, com ou sem índices inferiores), como metavariáveis sintáticas sobre variáveis individuais; os símbolos **P**, **Q**, **R** (em negrito, com ou sem índices inferiores), como metavariáveis sintáticas para símbolos de predicados de grau m; os símbolos **f**, **g**, **h** (em negrito, com ou sem índices inferiores), como metavariáveis sintáticas para símbolos funcionais de grau m; os símbolos **s** e **t** (em negrito, com ou sem índices inferiores), como metavariáveis sintáticas sobre os termos; as letras maiúsculas do alfabeto latino **A**, **B**, **C**, ... (em negrito, com ou sem índices inferiores), como metavariáveis sintáticas sobre fórmulas de $\mathcal{L}^*$. Usaremos $\mathbf{t_x}(\mathbf{t}_1)$ para designar o termo obtido, a partir do termo **t**, substituindo cada ocorrência da variável **x** pelo termo $\mathbf{t}_1$; assim, $\mathbf{t_x}(\mathbf{t}_1)$ designa um termo. Usaremos $\mathbf{A_x}(\mathbf{t}_1)$ para designar a fórmula, obtida a partir da fórmula **A**, substituindo cada ocorrência livre da variável **x** em **A** pelo termo $\mathbf{t}_1$; assim, $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}_1)$ designa uma fórmula (Nestes últimos casos, é suposto que $\mathbf{t}_1$ pode substituir **x**).

Os operadores "o" (bola), "$\sim_k$", "$\sim_n$" (negação forte), "≡" (equivalência), as noções de fórmula "bem comportada", "**A** é uma fórmula com o operador bola reiterado k-vezes" e "**A** é uma fórmula de grau k" são introduzidas por definição, como nos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Para cada *sistema quantificacional* $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$, os esquemas de *axiomas* e *regras de dedução* são os do cálculo proposicional correspondente $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, acrescidos de:

AXIOMA 15 $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{A}(\mathbf{t})$

AXIOMA 16 $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \supset \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$

AXIOMA 17 $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} \supset (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

AXIOMA 18 $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} \supset (\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

AXIOMA 19 Se **A** e **B** são duas fórmulas *congruentes*[6] ou uma delas é obtida da outra pela supressão de quantificadores vácuos, então **A≡B**

REGRA II $\dfrac{\mathbf{C} \supset \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{C} \supset \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})}$

REGRA III $\dfrac{\mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{C}}{\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{C}}$,

em que **x** é uma variável individual, **A**(**x**) é uma fórmula, **C** é uma fórmula na qual **x** não ocorre livre, e **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

O *cálculo de predicados de primeira ordem* $\mathbf{C}_\omega$* é definido pelos seguintes esquemas de *axiomas* e *regras de dedução*:

AXIOMA 1 ao AXIOMA 10

AXIOMA 15, AXIOMA 16, AXIOMA 19

---

[6] Brevemente, duas fórmulas são congruentes, se elas diferem somente nas suas variáveis ligadas e estas estão ligadas aos quantificadores correspondentes. Uma definição precisa encontra-se em **Kleene 1974**, p. 153.

REGRA DE *MODUS PONENS*
REGRA II
REGRA III.

Como é bem conhecido, a lógica quantificacional clássica pode ser introduzida pelos Axiomas 1-9, 15, 16, 19 e as Regras *Modus Ponens*, II e III, acrescentando-se o Princípio de *Reductio ad Absurdum*, isto é:

AXIOMA 10´: $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A})$.

Nesse sentido, o cálculo de predicados clássico de primeira ordem pode ser considerado como o sistema $\mathbf{C}_0^*$ da hierarquia $\mathbf{C}_n^*$, $1\leq n\leq\omega$.

A seguir, apresentamos algumas definições e resultados conhecidos, referentes aos sistemas quantificacionais $\mathbf{C}_n^*$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa, necessários à compreensão de métodos subjacentes à construção de nossos sistemas de dedução natural, introduzidos nos Capítulos 2 e 3.

Teorema 1.2.1 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 24) Em $\mathbf{C}_1^*$ são válidas todas as regras do Teorema 2 de **Kleene 1974**, p. 98, com as restrições convenientes, excetuando-se a referente ao método de redução ao absurdo:

Regra 1 a Regra 9 – Teorema 1.1.7

10. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_1^*} \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$

11. $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_1^*} \mathbf{A}(\mathbf{t})$

12. $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash_{C_1^*} \exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$

13. Se $\Gamma(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_1^*} \mathbf{C}$, então $\Gamma(\mathbf{x}), \exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_1^*} \mathbf{C}$. □

Pelo Teorema 1.2.1-(1), com as restrições convenientes, temos o **Metateorema da Dedução** (**MtD**) para $\mathbf{C}_1^*$, cuja extensão para os sistemas $\mathbf{C}_n^*$, $1<n\leq\omega$, é imediata. Também valem para os sistemas $\mathbf{C}_n^*$, $1<n\leq\omega$, as correspondentes extensões do Teorema 1.2.1.

Teorema 1.2.2 (**Metateorema da Dedução**) Se Γ é um conjunto de fórmulas, então $\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{C_n}\ast \mathbf{B}$ se, somente se, $\Gamma \vdash_{C_n}\ast \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, $1 \leq n \leq \omega$. Isto é,

$$\Gamma, \mathbf{A} \vdash_{C_n}\ast \mathbf{B} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_n}\ast \mathbf{A} \supset \mathbf{B}. \qquad \square$$

É válido o seguinte teorema, referente às fórmulas "bem comportadas".

Teorema 1.2.3 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 27) Em $\mathbf{C}_1$*, os seguintes esquemas de fórmulas são teoremas:

i. $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(1)} \vdash_{C_1}\ast \neg\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

ii. $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(1)} \vdash_{C_1}\ast \neg\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

iii. $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(1)} \vdash_{C_1}\ast \neg\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})$

iv. $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(1)} \vdash_{C_1}\ast \exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \neg\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$. □

Teorema 1.2.4 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 29) Os seguintes esquemas de fórmulas não são demonstráveis em $\mathbf{C}_1$*, $1 \leq n \leq \omega$:

i. $\neg\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

ii. $\neg\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

iii. $\neg\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})$

iv. $\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \neg\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$. □

Teorema 1.2.5 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 30) Se Γ é um conjunto de fórmulas e $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ são os componentes quantificacionais primos[7] das fórmulas de $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\}$, então, uma condição necessária e suficiente para $\Gamma \vdash_{C_0}\ast \mathbf{A}$ é que $\Gamma, \mathbf{A}_1^{(n)}, \mathbf{A}_2^{(n)}, \ldots, \mathbf{A}_m^{(n)} \vdash_{C_n}\ast \mathbf{A}$, para $1 \leq n < \omega$, isto é,

$$\Gamma \vdash_{C_0}\ast \mathbf{A} \Leftrightarrow \Gamma, \mathbf{A}_1^{(n)}, \mathbf{A}_2^{(n)}, \ldots, \mathbf{A}_m^{(n)} \vdash_{C_n}\ast \mathbf{A}. \qquad \square$$

Teorema 1.2.6 (**da Costa 1963a**, **da Costa 1993**, p. 30, e **da Costa 1974b,** p. 503) Os sistemas $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, são indecidíveis. □

---

[7] Isto é, as $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq m$, não são fórmulas do tipo $\mathbf{B}\&\mathbf{C}$, $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, $\neg\mathbf{B}$, $\forall x \mathbf{B}(x)$ ou $\exists x \mathbf{B}(x)$.

Teorema 1.2.7 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 31) Cada um dos cálculos da hierarquia $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais forte do que os que o sucedem na hierarquia. □

Como uma conseqüência imediata desse teorema, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.8 (**da Costa 1974b**, p. 503) Os sistemas $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$, são consistentes. □

Teorema 1.2.9 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 31) Os sistemas $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n < \omega$, são finitamente trivializáveis. □

Teorema 1.2.10 (**da Costa 1963a** e **da Costa 1993**, p. 31) O sistema $\mathbf{C}_\omega^*$ é infinitamente trivializável. □

Arruda e da Costa 1977 introduz o conceito de valoração bivalente paraconsistente para $\mathbf{C}_1^*$. É desenvolvida uma semântica, *à la* Henkin, e é demonstrado que $\mathbf{C}_1^*$ é correto e completo.

A semântica de Arruda e da Costa, que agora apresentamos, com uma cláusula, introduzida por **Moura 1978**, p. 23-24, para a valoração das fórmulas atômicas de $\mathbf{C}_1^*$ é aqui por nós estendida, fazendo seu valor depender do domínio fixado para uma interpretação.

Definição 1.2.11 Uma *interpretação* para o sistema $\mathbf{C}_1^*$ num conjunto $\mathfrak{D}$, não vazio, é uma função $\mathfrak{I}$ que associa, a cada constante individual da linguagem $\mathcal{L}^*$ do sistema quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_1^*$, um elemento de $\mathfrak{D}$; a cada símbolo predicativo $\mathbf{P}$ de grau m, $m>0$, um par ordenado $P_{\mathfrak{D}} = (p, p')$, onde p e p′ são subconjuntos de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \ldots \times \mathfrak{D}$ (m vezes) e $p \cup p' = \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \ldots \times \mathfrak{D}$ (m vezes); e a cada símbolo funcional f de grau m, uma função m-ária $F_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \ldots \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$.

Definição 1.2.12 Uma *linguagem diagrama* para $\mathbf{C}_1^*$, denotada por $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$, é a linguagem $\mathcal{L}^*$ do sistema quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_1^*$ acrescida de constantes, que nomeiam os elementos de $\mathfrak{D}$, sendo escolhidas constantes distintas para elementos distintos;

Definição 1.2.13 Dado um termo fechado **t** de $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$, definimos:

i) $\mathfrak{D}(k) = \mathfrak{I}(k)$, se k é uma constante de $\mathcal{L}^*$;

ii) $\mathfrak{D}(k) = i \in \mathfrak{D}$, se k nomeia i em $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$;

iii) $\mathfrak{D}f(t_1, ..., t_m) = F_{\mathfrak{D}}\ (\mathfrak{D}(\mathbf{t}_1), \mathfrak{D}(\mathbf{t}_2), ..., \mathfrak{D}(\mathbf{t}_m))$, se f é um símbolo funcional de $\mathcal{L}^*$.

Definição 1.2.14 Dado o sistema $\mathbf{C}_1^*$, uma *valoração* **v**, baseada numa *interpretação* $\mathfrak{I}$ num conjunto $\mathfrak{D}$, é uma função do conjunto das fórmulas fechadas de $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$ no conjunto $\{0, 1\}$, tal que:

1. $\mathbf{v}(\mathbf{P}^m(\mathbf{t}_1,...\mathbf{t}_m)) = 1$ se, e somente se, $(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m) \in p$, onde $\mathbf{t}_i$, $1 \leq i \leq m$, é um termo de $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$ e $\mathfrak{I}(\mathbf{P}^m) = (p, p')$;

2. $\mathbf{v}(\neg\mathbf{P}^m(\mathbf{t}_1,...\mathbf{t}_m)) = 1$ se, e somente se, $(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m) \in p'$, onde $\mathbf{t}_i$, $1 \leq i \leq m$, é um termo de $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$ e $\mathfrak{I}(\mathbf{P}^m) = (p, p')$;

3. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$;

4. Se $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A}) = 1$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$;

5. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$;

6. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$;

7. $\mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = 1$;

8. Se $\mathbf{v}(\mathbf{B}^o) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) = \mathbf{v}(\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B}) = 1$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$;

9. Se $\mathbf{v}(\mathbf{A}^o) = \mathbf{v}(\mathbf{B}^o) = 1$, então $\mathbf{v}((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^o) = 1$, onde # é &, $\vee$ ou $\supset$;

10. $\mathbf{v}(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{c})) = 1$, para toda $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$- instância $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$;

11. $\mathbf{v}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{c})) = 1$, para alguma $\mathfrak{D}\mathbf{C}_1^*$- instância $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$;

12. Se $\mathbf{v}(\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{o}) = 1$, então $\mathbf{v}((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{o}) = 1$;

13. Se $\mathbf{v}(\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{o}) = 1$, então $\mathbf{v}((\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{o}) = 1$;

14. $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\mathbf{B})$, se **A** e **B** são fórmulas congruentes, ou diferem entre si, pela supressão de quantificadores vácuos.

As noções de *fórmula fechada válida* segundo uma interpretação, *fórmula válida*, *conjunto trivial* de fórmulas, etc., são as usuais e podem ser encontradas em **Arruda e da Costa 1977**.

Com a semântica acima definida, demonstra-se a correção e a completude do sistema quantificacional de primeira ordem $\mathbf{C}_1$*, de da Costa.

A extensão da semântica de $\mathbf{C}_1$* para os sistemas $\mathbf{C}_n$*, $1<n<\omega$, é imediata. As definições introduzidas para $\mathbf{C}_1$* se aplicam, com as restrições convenientes, observando-se que os operadores $\sim_1$ e o são substituídos por $\sim_n$ e (n), respectivamente (ver **Moura 1978**, p. 29).

Não temos conhecimento do desenvolvimento de semântica de valorações para o sistema $\mathbf{C}_\omega$*.

2 A HIERARQUIA DE SISTEMAS PROPOSICIONAIS DE DEDUÇÃO NATURAL DNC$_n$, 1≤n≤ω

Neste capítulo, introduzimos a hierarquia de sistemas proposicionais de dedução natural **DNC**$_n$, 1≤n≤ω, equivalentes aos sistemas correspondentes da hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes **C**$_n$, 1≤n≤ω, de da Costa - usamos o método de dedução natural com provas subordinadas *à la* **Fitch 1952**.

Os sistemas de dedução natural associados aos cálculos paraconsistentes de da Costa, conhecidos na literatura, foram introduzidos por **Alves 1976**, **Raggio 1978**, **Béziau 1990**, **Castro 1998**, **Castro e D´Ottaviano 2000** e **Moura 2002**.

Alves 1976 introduz sistemas de dedução natural, *à la* Gentzen, para os cálculos **C**$_n$, 1≤n≤ω.

Raggio 1978 introduz os sistemas de dedução natural **NC**$_ω$ e **NC**$_ω$*, ambos com um único axioma, associados à lógica proposicional **C**$_ω$ e à lógica quantificacional **C**$_ω$*, respectivamente. Raggio demonstra, também *à la* Gentzen, um Teorema de Normalização para esses sistemas.

Béziau 1990 introduz, *à la* Gentzen, um sistema de dedução natural M1 e um seu variante M'1, equivalentes a **C**$_1$.

Castro 1998 e **Castro e D´Ottaviano 2000** introduzem uma hierarquia de sistemas proposicionais de dedução natural, *à la* Fitch, e demonstram a equivalência entre cada sistema dessa hierarquia e o correspondente sistema **C**$_n$, 1≤n≤ω, e demonstram a correção e completude desses sistemas, relativamente à semântica de Alves e da Costa.

Moura 2002 introduz o sistema de dedução natural NNC$_ω$, também *à la* Gentzen, para o cálculo proposicional **C**$_ω$ e obtém um Teorema de Normalização e um Teorema de

Normalização Forte para NNC_ω – um esboço inicial desse trabalho havia sido apresentado, em colaboração com L. C. P. D. Pereira, como Comunicação, no VIII Encontro Brasileiro de Lógica, em 1986. O sistema de Moura é o mesmo de **Alves 1976** e **Castro 1998**.

Uma referência para definições e propriedades fundamentais relativamente a sistemas de dedução natural, *à la* Prawitz, é **Medeiros 2002**.

Os sistemas de dedução natural que introduzimos neste capítulo são constituídos exclusivamente por regras de dedução. Várias das definições e resultados são adaptados de **Fitch 1952**.

Demonstramos a equivalência entre cada um de nossos sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e os correspondentes sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa.

Para finalizar o capítulo, demonstramos um Teorema de Normalização para as provas categóricas dos sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Como conseqüência do Teorema de Normalização obtido, demonstramos diretamente a não-trivialização e consistência de nossos sistemas; e obtemos um princípio de subfórmula adequado aos sistemas paraconsistentes $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Conforme explicitado nas Considerações Finais deste trabalho, como projeto futuro pretendemos analisar as relações entre a abordagem *à la* **Prawitz 1965** e a abordagem *à la* **Fitch 1952**, em particular no caso das hierarquias de sistemas de dedução natural associados aos sistemas $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$.

No ANEXO 1 deste trabalho, apresentamos, sucintamente, os sistemas de Alves, Raggio, Béziau e Moura.

No ANEXO 2, apresentamos a hierarquia de sistemas $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de Castro e D´Ottaviano.

2.1 O MÉTODO DE DEDUÇÃO NATURAL APLICADO AOS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS C_n, $1 \leq n \leq \omega$, DE DA COSTA.

A linguagem $\mathcal{L}$, as definições, as notações e convenções, para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são as mesmas dos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Nossos sistemas de dedução natural são constituídos exclusivamente por regras de dedução (ou esquemas de dedução).

As *regras de dedução (inferência)* de um sistema de dedução natural normatizam as provas através das quais podemos inferir uma *conclusão*, ou *conseqüência direta*, de um conjunto anterior de fórmulas, ditas *antecedentes*. Usualmente são escritas na forma

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \\ \hline \mathbf{B} \end{array} , \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k}{\mathbf{B}}$$

em que um ou mais antecedentes, representados por $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, são separados de uma conclusão, representada por $\mathbf{B}$, por um traço (opcional).

Adaptando **Fitch 1952**, uma prova formal corresponde a um encadeamento de fórmulas de $\mathcal{L}$, em forma linear, através de aplicações de regras de dedução.

Usamos as noções de *prova subordinada*, *suposição*, *prova por introdução-eliminação*, etc., adaptadas de Fitch. Essas noções são esclarecidas ao longo deste trabalho.

Uma *prova formal* é entendida como uma seqüência finita de itens, normalmente escrita numa coluna vertical, constituída por fórmulas, na qual cada uma delas é:

(a) uma premissa (ou premissa dada); ou

(b) uma fórmula derivada logicamente de outra ou de outras fórmulas anteriores na seqüência, por meio da aplicação de uma regra de dedução.

Uma premissa é uma fórmula que se considera dada no princípio da prova.

Cada fórmula da seqüência constitui um *item de prova*.

Os itens que procedem de outro ou de outros itens anteriores na seqüência, pela aplicação de uma regra de dedução, denominamos de *conseqüências lógicas imediatas* do outro item ou dos outros itens anteriores.

No curso de uma prova podemos introduzir premissas provisórias, ditas *suposições*, que nos permitem escrever provas, ditas *provas subordinadas*, como parte da prova inicial, ou *prova principal*.

Essas suposições são escritas à direita de um segmento vertical, que se inicia pela suposição, indica a extensão da prova subordinada, e é colocado à direita da prova original.

Uma prova subordinada deve satisfazer, ela mesma, as condições da definição de prova formal, excetuando-se que uma prova subordinada pode ter um ou mais itens que são reiterações de ítens anteriores da prova da qual ela é subordinada. Observamos que não é permitido reiterar um item de uma prova subordinada, na prova da qual ela é subordinada.

É permitido que provas subordinadas tenham, elas mesmas, provas a elas subordinadas, e assim por diante.

A título de ilustração, mesmo porque ainda não introduzimos as regras de dedução de nossos sistemas, apresentamos a seguir 2 (dois) exemplos.

i) Vejamos, como primeiro exemplo, a prova da fórmula $\mathbf{C}$ a partir das premissas $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$ e $\mathbf{A}$.

1	$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	premissa
2	$\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$	premissa
3	$\mathbf{A}$	premissa
4	$\mathbf{B}$	1, 2, Eliminação da Implicação
5	$\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	2, 3, Eliminação da Implicação
6	$\mathbf{C}$	4, 5, Eliminação da Implicação

Na prova acima, existem três ítens como premissas, que ocorrem nas linhas (ou passos) 1, 2 e 3. Os ítens que ocorrem nas linhas 4, 5, e 6 são conseqüências das anteriores por regra de eliminação.

ii) Vejamos, agora, uma prova onde ocorrem provas subordinadas.

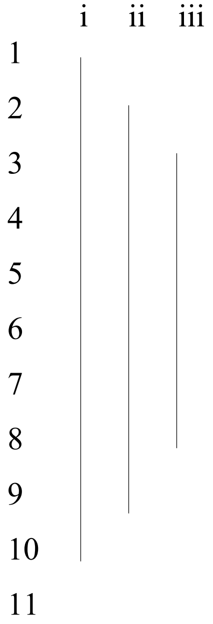
Demonstraremos que $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$.

1	$\mid\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	suposição
2	$\mid\ \mid\ \mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$	suposição
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}$	suposição
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$	2, Regra de Reiteração
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	3, 4, Eliminação da Implicação
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	1, Reiteração
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}$	3, 6, Eliminação da Implicação
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{C}$	5, 7, Eliminação da Implicação
9	$\mid\ \mid\ \mathbf{A}\supset\mathbf{C}$	3-8, Introdução da Implicação
10	$\mid\ ((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$	2-9, Introdução da Implicação
11	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$	1-10, Introdução da Implicação

Na prova acima, existem três provas subordinadas, cada uma com a sua própria suposição. A primeira prova subordinada inicia com a suposição que ocorre na linha 1, a segunda com a suposição que ocorre na linha 2 e a terceira com a suposição que ocorre na linha 3. Lembremos que cada suposição dá início a uma prova subordinada que, posteriormente, deverá ser "descarregada". A prova principal, da qual as provas subordinadas fazem parte, contém dois ítens, a saber, a primeira prova subordinada, cuja extensão vai da linha de número 1 até a de número 10, e a fórmula $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$, que nesse caso corresponde à própria conclusão. A primeira prova subordinada é constituída por três ítens, a saber, o item que ocorre na linha de número 1, a segunda prova subordinada (que é considerada como um item), cuja extensão vai da linha de número 2 até a de número 9, e o item que ocorre na linha de número 10. A segunda prova subordinada é constituída por três ítens, a saber, o item que ocorre na linha de número 2, a segunda prova subordinada (que é considerada como um item), cuja extensão vai da linha de número 3 até a de número 8, e o item que ocorre na linha de número 9. A terceira prova subordinada é constituída por seis ítens, a saber, os ítens que ocorrem nas linhas de números 3 a 8.

Em cada prova uma prova subordinada corresponde a um segmento que percorre parte do comprimento da prova.

Na prova acima, podemos verificar que, retirando os itens e numerando as provas subordinadas (representados pelos segmentos de reta), temos o seguinte esquema de provas:



A terceira coluna, que corresponde ao segmento iii (terceira prova subordinada), dos passos 3 ao passo 8, é dita subordinada ao segmento ii (segunda prova subordinada); o segmento ii, dos passos 2 ao passo 9, é dito subordinado ao segmento i (primeira prova subordinada); o segmento i, dos passos 1 ao passo 10, é dito subordinado ao passos 1 a 11, sem segmento.

Neste caso, a terceira prova é subordinada a todas as provas à esquerda (ou anteriores). Essa terceira prova subordinada é dita a *última* (ou *mais interna*) *prova subordinada*.

iii) Se uma prova tem apenas uma prova subordinada, trivialmente, ela deve ser considerada a última.

Cada prova subordinada tem **uma e apenas uma** suposição. Desse modo, uma prova subordinada de uma prova termina um passo a menos da prova subordinada anterior.

Como ilustração, vejamos o esquema de uma prova tendo 5 (cinco) suposições:

1 | primeira suposição
2 | | segunda suposição
3 | | | terceira suposição
4 | | | | quarta suposição
5 | | | | | quinta suposição
6 | | | | |
7 | | | | | ⋮
8 | | | | |
9 | | | | | quinta sub-conclusão
10 | | | | quarta sub-conclusão
11 | | | terceira sub-conclusão
12 | | segunda sub-conclusão
13 | primeira sub-conclusão
14 conclusão (ou *teorema*)

Agora, estendemos a noção de prova formal introduzida anteriormente, de modo que cada prova subordinada constitui, ela mesma, um item da prova.

Definição 2.1.1 Uma *prova formal* (*hipotética*) é uma seqüência finita de itens, tal que, cada um deles:

(a) É uma premissa (ou premissa dada); ou

(b) É uma fórmula que se deriva logicamente de outra ou de outras fórmulas anteriores na seqüência, por meio da aplicação de uma regra de dedução; ou

(c) É uma prova subordinada.

Se **A** é a conclusão de uma prova formal num sistema **S**, a partir das premissas $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_k$, isso será denotado por

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k\} \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{A} \text{ ou, abreviadamente, por } \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{A}.$$

Definição 2.1.2 i) Se uma fórmula **A** ocorre em qualquer passo de uma prova, ou ocorre em qualquer passo de uma prova subordinada a ela, e posteriormente ocorre em outro lugar como um item diferente daquela prova ou ocorre em outro lugar da prova subordinada, então essa segunda ocorrência da fórmula é denominada uma *resultante* da primeira ocorrência.

ii) Se uma fórmula **A** de uma prova é obtida pela aplicação de qualquer Regra de Dedução do sistema formal **S**, então essa fórmula é uma *resultante* de cada uma da(s) fórmula(s) precedente(s) nas quais a regra foi aplicada (uma ou mais dessas fórmulas podem ser obtidas por provas subordinadas).

iii) Uma prova subordinada é uma *resultante* de cada uma das suas próprias fórmulas e também de cada fórmula externa a ela que é nela reiterada.

iv) Se uma fórmula é uma *resultante* de uma outra fórmula, a qual é resultante de uma terceira fórmula, então a primeira fórmula é resultante da terceira fórmula, o mesmo ocorrendo para qualquer número finito de fórmulas.

Definição 2.1.3 Uma fórmula **A** é *dedutível* (*inferida* ou *derivada*), no sistema formal **S**, a partir de um conjunto de premissas Γ se, e somente se, existe uma prova formal de **A**, em **S**, a partir de um subconjunto $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k\}$ de Γ. Isto é, se existe uma prova formal cuja última fórmula é **A**, a partir de $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k\} \subseteq \Gamma$.

Notação: $$\Gamma \vdash_S \mathbf{A}, \text{ ou } \quad \begin{array}[t]{c} \Gamma \\ \vdots \\ \mathbf{A} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}[t]{c} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \\ \vdots \\ \mathbf{A} \end{array}$$

Definição 2.1.4 Uma prova formal de uma fórmula **A**, que não tem premissas, no sistema formal **S**, é dita uma *prova categórica* de **A**. Dizemos que **A** é *demonstrável* em **S**, ou que **A** é um *teorema* de **S**.

Notação: $\vdash_S \mathbf{A}$.

Definição 2.1.5 O *comprimento* de uma prova Π é o número de passos (fórmulas) que nela ocorrem, inclusive em suas provas subordinadas.

Notação: comp(Π).

As fórmulas que ocorrem numa prova são identificadas e ordenadas linearmente na prova, empregando-se as seguintes convenções.

a) Numeração das fórmulas.

Numa prova, cada uma das suas fórmulas será numerada à sua esquerda, a partir de 1, de tal forma que o último número será o que corresponde à conclusão.

b) Indicação das fórmulas iniciais da prova.

As fórmulas desse tipo serão indicadas, à direita, com a expressão *premissa*.

Por exemplo, se a segunda premissa de uma prova consiste da fórmula **A**, indicamos:

2	**A**	premissa

c) Indicação referente às conseqüências imediatas de uma regra de dedução.

Essas fórmulas são seguidas, à sua direita, por um comentário justificativo da sua presença. Neste comentário indica-se abreviadamente a regra de dedução que fundamenta essa fórmula e o(s) número(s) do(s) item(ns) da prova que serviu(viram) de antecedente(s) na aplicação da regra.

Por exemplo, se a fórmula que ocorre no passo *n+1* de uma prova consiste da fórmula **B** e esta fórmula é uma conseqüência imediata de itens anteriores *m* e *n* por meio da aplicação da Regra de Eliminação da Implicação (E - ⊃), indicamos:

⋮	⋮	
m	**A⊃B**	
⋮	⋮	
n	**A**	
n+1	**B**	m, n, E - ⊃

O passo n+1 é justificado da seguinte maneira: a fórmula **B** (conclusão, ou conseqüência direta) foi obtida pela aplicação da Regra de Eliminação da Implicação (E - ⊃) nas fórmulas (antecedentes) que ocorrem nos passos m e n.

Os pontos que ocorrem entre as linhas da prova devem ser entendidos como possíveis itens obtidos na prova (no caso acima eles ocorrem antes da linha m, e entre m e n).

d) Indicação da suposição.

Essa fórmula deve apresentar como indicação, à sua esquerda, o número do passo em que ela ocorre na prova; na sua esquerda imediata inicia-se um segmento de reta vertical, que acompanha toda essa prova subordinada, e apenas ela, indicando sua extensão; à direita da fórmula escreve-se a palavra suposição ou premissa provisória. Só é permitido introduzir uma suposição para cada prova subordinada.

Por exemplo, indicamos que uma fórmula **A** é uma suposição numa prova formal, da seguinte maneira:

m	**A**	suposição
⋮	⋮	

Isso significa, intuitivamente, que estamos supondo temporariamente, como o passo de número m, na prova, a fórmula **A**.

e) Encerramento (ou finalização) das provas subordinadas.

Uma prova subordinada, que sempre constitui um item da prova da qual ela é subordinada, deve ser encerrada, o que ocorre por aplicação de determinadas Regras de Dedução do sistema.

A fórmula que ocorre, na prova, imediatamente após uma prova subordinada é considerada resultante direta dessa prova subordinada.

Por exemplo:

1	$\mathbf{A}_1$		
$\vdots$	$\vdots$		
m-1	$\mathbf{A}_{m-1}$		
m		$\vert\ \mathbf{A}$	suposição
		$\vert\ \vdots$	
m+k		$\vert\ \mathbf{B}$	
(m+k)+1	$\mathbf{A}_{(m+k)+1}$		de m a (m+k), Regra de Dedução

Usualmente, indicamos a aplicação da regra de dedução do passo m ao passo (m+k), por um traço entre m e m+k, isto é, m - (m+k). Desse modo, estamos indicando que a fórmula que ocorre no passo (m+k)+1 é uma conseqüência direta (está subordinada aos) dos itens que ocorrem do passo m ao m+k.

A vantagem do procedimento de provas subordinadas reside em se poder tratar simultaneamente com várias provas subordinadas, permitindo escrever diversas provas subordinadas como parte da prova principal. Consiste também em se poder tratar com suposições, mesmo no caso de provas categóricas, nas quais o conjunto de premissas é vazio ($\Gamma = \varnothing$).

Nesse sentido, toda prova de uma fórmula **A**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, pode ser transformada em uma prova categórica de uma fórmula $\mathbf{A}_1\supset(\mathbf{A}_2\supset\ldots\supset(\mathbf{A}_k\supset\mathbf{A})\ldots)$, com $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k\} \in \Gamma$.

Se uma prova e todas as suas provas subordinadas (se existirem) usam apenas regras de introdução ou regras de eliminação, tal prova é dita uma *prova por introdução-eliminação* (*intelim*).

Quando necessário, usaremos as letras maiúsculas do alfabeto grego Π, Σ (com ou sem índices inferiores) para indicar provas formais no sistema.

Em **Castro e D'Ottaviano 2000**, introduzimos a hierarquia de sistemas lógicos de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, 1≤n<ω, e demonstramos que esses sistemas são logicamente equivalentes aos sistemas correspondentes da hierarquia de lógicas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, 1≤n<ω, de da Costa.

Essa hierarquia é distinta da hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, 1≤n<ω, que introduziremos na próxima seção – apesar dos sistemas correspondentes serem equivalentes entre si.

Optamos pela hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, 1≤n<ω, aqui introduzida, por nos parecer mais adequada para a obtenção do Teorema de Normalização, demonstrado na Seção 2.5.

No ANEXO 2, introduzimos a hierarquia $\mathbf{NDC}_n$, 1≤n≤ω, sucintamente explicitamos as diferenças entre as regras desses sistemas e as regras dos sistemas da hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, 1≤n≤ω, e demonstramos diretamente que os sistemas correspondentes dessas duas hierarquias são equivalentes.

2.2 OS SISTEMAS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$

Os sistemas lógicos $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, cuja linguagem é a linguagem $\mathcal{L}$ dos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, são constituídos por treze regras de dedução, que nos permitem deduzir todas as fórmulas dedutíveis nos correspondentes sistemas axiomáticos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Algumas das regras que usamos nos sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, são originais, não correspondendo a uma "transliteração" dos sistemas axiomáticos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, de da Costa, tal como introduzido pioneiramente por **Alves 1976**, p. 39 e 40 (ver ANEXO 1).

Os sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, são introduzidos através de regras de transporte, regras de introdução, regras de eliminação e regras especiais, apresentadas a seguir.

2.2.1 Regras de transporte

Repetição (R): Numa prova, podemos repetir, como item no passo k, qualquer item $\mathbf{A}_i$, que já ocorreu como item anterior no passo i na prova.

Essa regra é escrita esquematicamente como:

1	$\mathbf{A}_1$	
2	$\mathbf{A}_2$	
$\vdots$	$\vdots$	
i	$\mathbf{A}_i$	
$\vdots$	$\vdots$	
k-1	$\mathbf{A}_{k-1}$	
k	$\mathbf{A}_i$	i, R

Reiteração (Reit): Numa prova subordinada, podemos repetir qualquer item $\mathbf{A}_i$ da prova da qual ela é subordinada.

Esquematicamente:

1	$\mathbf{A}_1$	
2	$\mathbf{A}_2$	
⋮	⋮	
i	$\mathbf{A}_i$	
⋮	⋮	
m	| $\mathbf{A}$	
⋮	| ⋮	
p	| $\mathbf{A}_i$	i, Reit
⋮	| ⋮	
m+k	| $\mathbf{B}$	
(m+k)+1	$\mathbf{A}_{(m+k)+1}$	

2.2.2 Regras de introdução

Introdução da Implicação (I - $\supset$): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$,..., $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{B}$}, onde $\mathbf{B}$ é uma suposição de uma prova subordinada, podemos deduzir como conclusão na prova subordinada $\mathbf{C}$, então do subconjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} deduzimos como conclusão $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$.

1	$\mathbf{A}_1$	
2	$\mathbf{A}_2$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
m	| $\mathbf{B}$	suposição
⋮	| ⋮	
s	| $\mathbf{C}$	
s+1	$\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	m-s, I - $\supset$

Introdução da Conjunção (I - &): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusões **A** e **B**, então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **A&B**.

1 $\mathbf{A}_1$

⋮ ⋮

k $\mathbf{A}_k$

⋮ ⋮

m **A** (ou **B**)

⋮ ⋮

s **B** (ou **A**)

⋮ ⋮

u **A&B** m, s, I - &

Introdução da Disjunção (I - ∨): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **A** (ou **B**), então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **A∨B**.

1 $\mathbf{A}_1$

⋮ ⋮

k $\mathbf{A}_k$

⋮ ⋮

m **A** (ou **B**)

⋮ ⋮

s **A∨B** (ou **A∨B**) m, I - ∨

Introdução Restringida da Negação (ou *Reductio ad Absurdum* restringido) (I - ¬(rest)): Se a partir do conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \mathbf{C}\}$, onde $\mathbf{C}$ é uma suposição de uma prova subordinada, podemos deduzir na prova subordinada como conclusões $\mathbf{B}^{(n)}$, $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ deduzimos como conclusão $\neg\mathbf{C}$.

1	$\mathbf{A}_1$			
⋮	⋮			
k	$\mathbf{A}_k$			
⋮	⋮			
p		$\mathbf{C}$		suposição
⋮		⋮		
q		$\mathbf{B}^{(n)}$	$(\mathbf{B}$ ou $\neg\mathbf{B})$	
⋮		⋮		
r		$\mathbf{B}$	$(\mathbf{B}^{(n)}$ ou $\neg\mathbf{B})$	
⋮		⋮		
t		$\neg\mathbf{B}$	$(\mathbf{B}^{(n)}$ ou $\mathbf{B})$	
v	$\neg\mathbf{C}$			p, k-t, I - ¬(rest)

2.2.3 Regras de eliminação

Eliminação da Implicação (E - ⊃): Se a partir do conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos inferir como conclusões $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\mathbf{C}$.

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
t	$\mathbf{B}$	(ou $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$)	
⋮	⋮		
u	$\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	(ou $\mathbf{B}$)	
⋮	⋮		
v	$\mathbf{C}$		t, u, E - ⊃

Eliminação da Conjunção (E - &): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **A&B**, então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **A** e podemos deduzir como conclusão **B**.

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
p	**A&B**		
⋮	⋮		
q	**A**	(ou **B**)	p, E - &

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
p	**A&B**		
⋮	⋮		
q	**B**	(ou **A**)	p, E - &

Eliminação da Disjunção (E - ∨): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$}, podemos deduzir como conclusão **B∨C**, e de cada um dos conjuntos {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$, **B**} e {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$, **C**}, onde **B** e **C** são suposições de provas subordinadas, deduzimos uma conclusão **D**, então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} deduzimos como conclusão **D**.

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
p	**B∨C**		
⋮	⋮		
q		**B**	suposição
⋮		⋮	
r		**D**	
⋮	⋮		
s		**C**	suposição
⋮		⋮	
t		**D**	
t+1	**D**		p, q-r, s-t, E - ∨

Eliminação da Dupla Negação (E - ¬¬): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão ¬¬**B**, então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão **B**.

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
p	¬¬**B**	
⋮	⋮	
q	**B**	p, E - ¬¬

A seguir, introduzimos quatro regras especiais de dedução, na hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$. A primeira delas corresponde ao Princípio do Terceiro-Excluído para cada sistema $\mathbf{DNC}_n$; as outras três regras que permitem deduzir uma fórmula composta como resultante de outra fórmula composta, podem ser interpretadas como correspondentes aos Axiomas 12, 13 e 14 de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, que nos permitem justificar a introdução ("propagação") do "bom comportamento" de fórmulas geradas a partir de fórmulas "bem comportadas".

2.2.4 Regras especiais

Regra do Terceiro-Excluído (RTE)[8]: Se a partir de cada um dos conjuntos de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \mathbf{B}\}$ e $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \neg\mathbf{B}\}$, onde **B** e $\neg$**B** são suposições de provas subordinadas, deduzimos como conclusão **D**, então do subconjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ deduzimos como conclusão **D**.

$$\begin{array}{llll}
1 & \mathbf{A}_1 & & \\
\vdots & \vdots & & \\
k & \mathbf{A}_k & & \\
\vdots & \vdots & & \\
p & & \mid \mathbf{B} & \text{suposição} \\
\vdots & & \mid \vdots & \\
r & & \mid \mathbf{D} & \\
\vdots & \vdots & & \\
s & & \mid \neg\mathbf{B} & \text{suposição} \\
\vdots & & \mid \vdots & \\
t & & \mid \mathbf{D} & \\
t+1 & \mathbf{D} & & \text{p-r, s-t, RTE}
\end{array}$$

---

[8] Optamos pela Regra RTE - já utilizada em nossa Dissertação de Mestrado (ver **Castro 1998**) e em **Moura 2002**, porém, em seu lugar, poderia ser colocada no sistema a seguinte Regra (RTE´): De um conjunto qualquer de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\mathbf{D}\vee\neg\mathbf{D}$.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{lll}
1 & \mathbf{A} & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \mathbf{A}_k & \\
k+1 & \mathbf{D}\vee\neg\mathbf{D} & \text{RTE´}
\end{array}$$

Distribuição da Negação na Conjunção (DNC): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão a disjunção $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$.

1 $\mathbf{A}_1$
⋮ ⋮
k $\mathbf{A}_k$
⋮ ⋮
p $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$
⋮ ⋮
q $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ p, DNC

Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusões $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão a conjunção $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

1 $\mathbf{A}_1$
⋮ ⋮
k $\mathbf{A}_k$
⋮ ⋮
p $\mathbf{A}^{(n)}$ (ou $\mathbf{B}^{(n)}$)
⋮ ⋮
q $\mathbf{B}^{(n)}$ (ou $\mathbf{A}^{(n)}$)
⋮ ⋮
r $\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
⋮ ⋮
s $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ p, q, r, DND(rest)

Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusões $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão a conjunção $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
p	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
⋮	⋮		
q	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
⋮	⋮		
r	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$		
⋮	⋮		
s	$\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$		p, q, r, DNI(rest)

2.2.5 Observação. Observamos que poderíamos considerar uma segunda forma da Regra de Introdução da Implicação:

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
m	$\mathbf{C}$	
⋮	⋮	
m+s	$\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	m, I - $\supset$

De acordo com esta segunda forma, a fórmula $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$ é uma conseqüência direta da fórmula $\mathbf{C}$.

De fato, embora esta Regra seja uma Regra Derivada dos sistemas, chamada *Princípio da Adição de Antecedente* (ou *Princípio da Introdução do Antecedente*), em alguns casos, a demonstração da não-trivialidade das provas pode ser obtida mais facilmente se ela é considerada como uma das regras fundamentais dos sistemas.

Nesse sentido, a Regra I - ⊃ pode ser introduzida como:

$$\begin{array}{llll}
1 & \mathbf{A}_1 & & \\
\vdots & \vdots & & \\
k & \mathbf{A}_k & & \\
\vdots & \vdots & & \\
m & & \mid\ \mathbf{B} & \text{suposição} \\
\vdots & & \mid\ \vdots & \\
s & & \mid\ \mathbf{C} & \\
s+1 & \mathbf{B}\supset\mathbf{C} & & \text{m-s, I - }\supset
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
1 & \mathbf{A}_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \mathbf{A}_k & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \mathbf{C} & \\
\vdots & \vdots & \\
m+s & \mathbf{B}\supset\mathbf{C} & \text{m, I - }\supset
\end{array}$$

Observação 2.2.6 Quando uma fórmula **A** ($\mathbf{A}_m$) ocorre, como um passo m em uma prova Π, por aplicação da Regra de Repetição à fórmula **A** ($\mathbf{A}_i$) que ocorre no passo i de Π, caso **A** ($\mathbf{A}_i$) tenha sido introduzida por uma Regra de Introdução, a ocorrência de **A** ($\mathbf{A}_m$) no passo m deve ser considerada como introduzida por uma Regra de Introdução; caso **A** ($\mathbf{A}_i$) tenha sido obtida por uma Regra de Eliminação no passo i, o mesmo deve ser considerado para a ocorrência de **A** ($\mathbf{A}_m$) no passo m.

As considerações acima se aplicam ao caso em que uma fórmula **A**, numa prova subordinada, é obtida por aplicação da Regra de Reiteração.

Observação 2.2.7 Numa prova, quando ocorre qualquer aplicação da Regra de Introdução da Implicação (I - ⊃), da Regra Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)), da Regra de Eliminação da Disjunção (E - ∨) ou da Regra do Terceiro-Excluído (RTE), através das respectivas provas subordinadas, o item obtido na prova da qual a prova considerada é subordinada constitui uma resultante imediata das provas subordinadas. Nestes casos, as provas subordinadas são consideradas encerradas (ou finalizadas) e as suas respectivas suposições são consideradas "descarregadas".

2.3 O SISTEMA PROPOSICIONAL PARACONSISTENTE DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_{\omega}}$

O sistema $\mathbf{DNC_{\omega}}$ de dedução natural, cuja linguagem é a linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo $\mathbf{C_{\omega}}$, é constituído pelas regras introduzidas para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n < \omega$, com exceção das Regras I - ¬(rest), DNC, DND(rest), DNI(rest). Ou seja, $\mathbf{DNC_{\omega}}$ tem como regras: Regra de Repetição, Regra de Reiteração, Introdução da Implicação, Introdução da Conjunção, Introdução da Disjunção, Eliminação da Implicação, Eliminação da Conjunção, Eliminação da Disjunção, Eliminação da Dupla Negação e Regra do Terceiro-Excluído.

Todas essas Regras de Dedução apresentam idêntica formulação à apresentada para $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n < \omega$.

2.4 A EQUIVALÊNCIA LÓGICA ENTRE OS SISTEMAS PROPOSICIONAIS AXIOMÁTICOS $\mathbf{C_n}$, $1 \leq n \leq \omega$, DE DA COSTA E OS CORRESPONDENTES SISTEMAS PROPOSICIONAIS DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n \leq \omega$

A seguir, demonstramos a equivalência lógica entre os sistemas proposicionais axiomáticos $\mathbf{C_n}$, e os correspondentes sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n \leq \omega$.

O resultado, a seguir, será usado na demonstração do próximo teorema.

Lema 2.4.1 Em $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n < \omega$, vale o seguinte resultado:

$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^{(n)}) \supset ((\mathbf{A}\#\mathbf{B}) \& \neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B}))$, onde $\# \in \{\&, \vee, \supset\}$

1	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^{(n)})$	suposição
2	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1\&(\mathbf{A}\#\mathbf{B})^2\& \dots \&(\mathbf{A}\#\mathbf{B})^n)$	1, Definição 1.1.3
3	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1)\vee\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^2)\vee \dots \vee\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^n)$	2, DNC
4	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1)$	suposição
5	$\neg\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B}))$	4, Definição 1.1.1
6	$(\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B})$	5, E - ¬¬
7	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^2)$	suposição
8	$\neg\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1\&\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1))$	7, Definição 1.1.2
9	$(\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1\&\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1)$	8, E - ¬¬
10	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^1)$	9, E - &
11	$\neg\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B}))$	10, Definição 1.1.1
12	$(\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B})$	11, E - ¬¬
⋮	⋮	
s	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^n)$	suposição
s+1	$\neg\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^{k-1}\&\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^{k-1}))$	s, Definição 1.1.2
⋮	⋮	
s+m	$(\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B})$	(s+m)-1, E - ¬¬
s+m+1	$(\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B})$	3, 4-6, 7-12, ..., s-(s+m), E - ∨
s+m+2	$\neg((\mathbf{A}\#\mathbf{B})^{(n)})\supset((\mathbf{A}\#\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\#\mathbf{B}))$	1-(s+m+1), I - ⊃

Teorema 2.4.2 Toda prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, de da Costa**,** pode ser transformada numa prova Π′ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema proposicional de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento da prova de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$.

Por hipótese, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$, $1 \leq n < \omega$.

i) Seja comp(Π) = 1. Então, podem ocorrer 2 (dois) casos.

i.1) Se $\mathbf{F} \in \Gamma$, então, pela Regra de Repetição, temos uma prova Π′ de **F**, a partir de Γ, em **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}.$$

i.2) Se **F** é um esquema de Axioma de **C**$_n$, $1 \leq n < \omega$, demonstramos que existe uma prova categórica de **F** em **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$. Logo, se $\vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$.

Axioma 1: $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$

1	│ $\mathbf{A}$	suposição
2	│ │ $\mathbf{B}$	suposição
3	│ │ $\mathbf{A}$	1, Reiteração
4	│ $\mathbf{B}\supset\mathbf{A}$	2-3, I - $\supset$
5	$\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	1-4, I - $\supset$

Axioma 2: $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$

1	│ $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	suposição
2	│ │ $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$	suposição
3	│ │ │ $\mathbf{A}$	suposição
4	│ │ │ $\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$	2, Reiteração
5	│ │ │ $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	3, 4, E - $\supset$
6	│ │ │ $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	1, Reiteração
7	│ │ │ $\mathbf{B}$	3, 6, E - $\supset$
8	│ │ │ $\mathbf{C}$	5, 7, E - $\supset$
9	│ │ $\mathbf{A}\supset\mathbf{C}$	3-8, I - $\supset$
10	│ $((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$	2-9, I - $\supset$
11	$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset(\mathbf{B}\supset\mathbf{C}))\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{C}))$	1-10, I - $\supset$

Axioma 3: **A&B⊃A**

1	**A&B**	suposição
2	**A**	1, E - &
3	**A&B⊃A**	1-2, I - ⊃

Axioma 4: **A&B⊃B**

1	**A&B**	suposição
2	**B**	1, E - &
3	**A&B⊃B**	1, 2, I - ⊃

Axioma 5: **A⊃(B⊃A&B)**

1	**A**	suposição
2	**B**	suposição
3	**A**	1, Reiteração
4	**A&B**	2, 3, I - &
5	**B⊃A&B**	2-4, I - ⊃
6	**A⊃(B⊃A&B)**	1-5, I - ⊃

Axioma 6: **A⊃A∨B**

1	**A**	suposição
2	**A∨B**	1, I - ∨
3	**A⊃A∨B**	1-2, I - ⊃

Axioma 7: **B⊃A∨B**

1	**B**	suposição
2	**A∨B**	1, I - ∨
3	**B⊃A∨B**	1-2, I - ⊃

Axioma 8: (**A**⊃**C**)⊃((**B**⊃**C**)⊃(**A**∨**B**⊃**C**))

1	**A**⊃**C**	suposição
2	**B**⊃**C**	suposição
3	**A**∨**B**	suposição
4	**A**	suposição
5	**A**⊃**C**	1, Reiteração
6	**C**	4, 5, E - ⊃
7	**B**	suposição
8	**B**⊃**C**	2, Reiteração
9	**C**	7, 8, E - ⊃
10	**C**	3, 4-6, 7-9, E - ∨
11	**A**∨**B**⊃**C**	3-10, I - ⊃
12	(**B**⊃**C**)⊃(**A**∨**B**⊃**C**)	2-11, I - ⊃
13	(**A**⊃**C**)⊃((**B**⊃**C**)⊃(**A**∨**B**⊃**C**))	1-12, I - ⊃

Axioma 9: ¬¬**A**⊃**A**

1	¬¬**A**	suposição
2	**A**	1, E - ¬¬
3	¬¬**A**⊃**A**	1-2, I - ⊃

Axioma 10: **A**∨¬**A**

1	**A**	suposição
2	**A**∨¬**A**	1, I - ∨
3	¬**A**	suposição
4	**A**∨¬**A**	3, I - ∨
5	**A**∨¬**A**	1-2, 3-4, RTE

Axioma 11: $\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}))$

$\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}))$

1	$\vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	suposição
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B}$	suposição
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}$	suposição
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	2, Reiteração
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}$	4, 5, E - ⊃
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B}$	3, Reiteração
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	4, 7, E - ⊃
9	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	1, Reiteração
10	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	4- 9, I - ¬(rest)
11	$\vert\ \vert\ (\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}$	3-10, I - ⊃
12	$\vert\ (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A})$	2-11, I - ⊃
13	$\mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}))$	1-12, I - ⊃

Axioma 12: $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}$

1	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)})$	suposição
3	$\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)})\supset((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}))$	Lema 2.4.1
4	$((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}))$	2, 3, E - $\supset$
5	$\mathbf{A}\&\mathbf{B}$	4, E - &
6	$\mathbf{A}$	5, E - &
7	$\mathbf{B}$	5, E - &
8	$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	4, E - &
9	$\neg\mathbf{A}\lor\neg\mathbf{B}$	8, DNC
10	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, Reiteração
11	$\mathbf{A}^{(n)}$	10, E - &
12	$\mathbf{B}^{(n)}$	11, E - &
13	$\neg\mathbf{A}$	suposição
14	$\neg\mathbf{A}$	13, Repetição
15	$\neg\mathbf{B}$	suposição
16	$\mathbf{A}$	suposição
17	$\mathbf{B}$	7, Reiteração
18	$\neg\mathbf{B}$	15, Reiteração
19	$\mathbf{B}^{(n)}$	12, Reiteração
20	$\neg\mathbf{A}$	16-19, I - $\neg$(rest)
21	$\neg\mathbf{A}$	9, 13-14, 15-20, E - $\lor$
22	$\neg\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)})$	2-21, I - $\neg$(rest)
23	$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}$	22, E - $\neg\neg$
24	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}$	1-23, I - $\supset$

Axioma 13: $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}$

1	$\mid \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\mid\ \mid \neg((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)})$	suposição
3	$\mid\ \mid \neg((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)})\supset((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))$	Lema 2.4.1
4	$\mid\ \mid (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	2, 3, E - ⊃
5	$\mid\ \mid \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	4, E - &
6	$\mid\ \mid \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, Reiteração
7	$\mid\ \mid \mathbf{A}^{(n)}$	6, E - &
8	$\mid\ \mid \mathbf{B}^{(n)}$	6, E - &
9	$\mid\ \mid \neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	7, 8, 5, DND(rest)
10	$\mid\ \mid \neg\mathbf{A}$	9, E - &
11	$\mid\ \mid \neg\mathbf{B}$	9, E - &
12	$\mid\ \mid \mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	4, E - &
13	$\mid\ \mid\ \mid \mathbf{A}$	suposição
14	$\mid\ \mid\ \mid \mathbf{A}$	13, Repetição
15	$\mid\ \mid\ \mid \mathbf{B}$	suposição
16	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg\mathbf{A}$	suposição
17	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{B}$	15, Reiteração
18	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg\mathbf{B}$	11, Reiteração
19	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{B}^{(n)}$	8, Reiteração
20	$\mid\ \mid\ \mid \neg\neg\mathbf{A}$	16-19, I - ¬(rest)
21	$\mid\ \mid\ \mid \mathbf{A}$	20, E - ¬¬
22	$\mid\ \mid \mathbf{A}$	12, 13-14, 15-21, E - ∨
23	$\mid \neg\neg((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)})$	2-22, I - ¬(rest)
25	$\mid (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}$	23, E - ¬¬
26	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}$	1-25, I - ⊃

Axioma 14: $\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$

1	$\vert\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\vert\ \vert\ \neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)})$	suposição
3	$\vert\ \vert\ \neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))$	Lema 2.4.1
4	$\vert\ \vert\ (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	2, 3, E - ⊃
5	$\vert\ \vert\ \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	4, E - &
6	$\vert\ \vert\ \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, Reiteração
7	$\vert\ \vert\ \mathbf{A}^{(n)}$	6, E - &
8	$\vert\ \vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	6, E - &
9	$\vert\ \vert\ \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	5, 7, 8, DNI(rest)
10	$\vert\ \vert\ \neg\neg\mathbf{A}$	9, E - &
11	$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	9, E - &
12	$\vert\ \vert\ \mathbf{A}$	10, E - ¬¬
13	$\vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	6, E - &
14	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}$	suposição
15	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	13, Reiteração
16	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}$	14, 15, E - ⊃
17	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	11, Reiteração
18	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	8, Reiteração
19	$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	14-18, I - ¬(rest)
20	$\vert\ \neg\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)})$	2-19, I - ¬(rest)
21	$\vert\ (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$	20, E - ¬¬
22	$\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}\supset(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$	1-22, I - ⊃

ii) (Hipótese indutiva) Admitamos que, para toda prova Π de **F**, com comp(Π)< k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π′ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

iii) Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{Cn}} \mathbf{F}$ no k-ésimo passo.

Seja a prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, tal que, comp(Π) = k. Então, podem ocorrer 3 (três) casos.

iii.1) $\mathbf{F} \in \Gamma$

Neste caso, a demonstração é idêntica ao caso (i.1).

iii.2) **F** é um esquema de Axioma

Neste caso, a demonstração também é idêntica ao caso (i.2).

iii.3) **F** é conseqüência de $\mathbf{F}_i$ e $\mathbf{F}_i \supset \mathbf{F}$ na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$, por aplicação da Regra *Modus Ponens*.

Então, existem fórmulas $\mathbf{F}_i$ e $\mathbf{F}_i \supset \mathbf{F}$ que ocorrem na prova, em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, em passos anteriores ao passo k. Neste caso, pela hipótese de indução, existe, no correspondente $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, uma prova Π′, tal que, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}_i$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}_i \supset \mathbf{F}$. Logo, pela Regra de Eliminação da Implicação (E - ⊃) de $\mathbf{DNC}_n$:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$.

Então, por todos os casos demonstrados,

Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$. □

Teorema 2.4.3 Toda prova Π de **F**, no sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_\omega$, de da Costa**,** pode ser transformada numa prova Π′ de **F**, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{F} \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstração idêntica à do teorema anterior, excluindo-se os casos dos Axiomas 11, 12, 13 e 14. □

O lema seguinte é necessário para a demonstração do Teorema 2.4.5.

Lema 2.4.4 Em $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, os seguintes esquemas de fórmulas são teoremas:

a) $\mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$.

b) $\mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$.

Demonstração:

a) $\vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$.

1	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{\mathbf{C}_n}$
2	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{\mathbf{C}_n}$
3	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, 2, Axioma 5, MP
4	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} (\mathbf{A}\lor\mathbf{B})^{(n)}$	3, Axioma 13, MP
5	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})$	propriedade do $\vdash_{\mathbf{C}_n}$
6	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}$	propriedade do $\vdash_{\mathbf{C}_n}$

7	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	6, Axioma 6, MP
8	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	3, 5, 7, Axioma 5, MP
9	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(vii)
10	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	8, 9, MP
11	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\neg\mathbf{A}$	10, MtD
12	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{A}$	11, Teorema 1.1.9(viii), MP
13	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	12, Teorema 1.1.9(ix), MP
14	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
15	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
16	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	14, 15, Axioma 5, MP
17	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}$	16, Axioma 13, MP
18	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
19	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
20	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	19, Axioma 7, MP
21	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	16, 18, 20, Axioma 5, MP
22	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{B}$	Teorema 1.1.9(vii)
23	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	21, 22, MP
24	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \mathbf{B}\supset\neg\mathbf{B}$	23, MtD
25	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}\vee\neg\mathbf{B}$	24, Teorema 1.1.9(viii), MP
26	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	25, Teorema 1.1.9(ix), MP
27	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	13, 26, Axioma 5, MP
28	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	27, MtD
29	$\mathbf{A}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)} \supset(\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	28, MtD
30	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)} \supset(\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	29, MtD

b) $\vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$.

A sua demonstração é obtida na seguinte seqüência:

(b.1) $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$

(b.2) $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$

(b.3) $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$

Assim,

(b.1)

1	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
2	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
3	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, 2, Axioma 5, MP
4	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$	3, Axioma 14, MP
5	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
6	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
7	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
8	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	1, 6, 7, Axioma 5, MP
9	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	Teorema 1.1.9(vii)
10	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	8, 9, MP
11	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	10, MtD
12	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	4, 5, 11, Axioma 5, MP
13	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(vii)
14	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$	12, 13, MP
15	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\supset\neg\neg\mathbf{A}$	14, MtD
16	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\vee\neg\neg\mathbf{A}$	15, Teorema 1.1.9(viii), MP
17	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$	16, Teorema 1.1.9(ix), MP

(b.2)

1	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
2	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
3	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)}$	1, 2, Axioma 5, MP
4	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$	3, Axioma 14, MP
5	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
6	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
7	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B}, \mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$	propriedade do $\vdash_{C_n}$
8	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	7, MtD
9	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	4, 5, 8, Axioma 5, MP
10	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{B}$	Teorema 1.1.9(vii)
11	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \mathbf{B} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	9, 10, MP
12	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}), \vdash_{C_n} \mathbf{B}\supset\neg\mathbf{B}$	11, MtD
13	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}\vee\neg\mathbf{B}$	12, Teorema 1.1.9(viii), MP
14	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	13, Teorema 1.1.9(ix), MP

(b.3)

1	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$	passo 17 (b.1)
2	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$	passo 14 (b.2)
3	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	1, 2, Axioma 5, MP
4	$\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)} \vdash_{C_n} (\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	3, MtD
5	$\mathbf{A}^{(n)} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	4, MtD
6	$\vdash_{C_n} \mathbf{A}^{(n)}\supset(\mathbf{B}^{(n)}\supset(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	5, MtD

Teorema 2.4.5 Toda prova Π′ de **F** a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, de da Costa. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F} \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Por indução sobre o comprimento das provas de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Por hipótese, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, $1 \leq n < \omega$.

i) Seja comp(Π′) = 1

i.1. Se $\mathbf{F} \in \Gamma$, então é imediato que

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}.$$

ii) (Hipótese indutiva) Admitamos que toda prova Π′ de **F**, com 1< comp(Π′) < k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema proposicional de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema axiomático $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

iii) Demonstremos o resultado para comp(Π′) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, no k-ésimo passo.

Seja a prova Π′ de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, tal que, comp(Π′) = k. Então:

iii.1) $\mathbf{F} \in \Gamma$

Neste caso, a demonstração é idêntica ao caso (i.1) acima.

iii.2) **F** é conseqüência de fórmulas anteriores da prova, pela aplicação de alguma regra de dedução de $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

iii.2.1) **F** é conseqüência de aplicação da Regra de Repetição (R).

Neste caso, **F** já ocorre na prova num passo s<k.

Logo, pela hipótese de indução:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.2) **F** é a fórmula $\mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, obtida por aplicação da Regra de Introdução da Implicação (I - $\supset$). Temos, esquematicamente:

1	$\mathbf{A}_1$		
2	$\mathbf{A}_2$		
$\vdots$	$\vdots$		
h	$\mathbf{A}_h$		
$\vdots$	$\vdots$		
m		$\mid \mathbf{B}$	suposição
$\vdots$		$\mid \vdots$	
k-1		$\mid \mathbf{C}$	
k	$\mathbf{B} \supset \mathbf{C}$		m-s, I - $\supset$

Isto é, temos que $\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}$, em k-1 passos.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{C}$.

Portanto, pelo Metateorema da Dedução,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, ou seja, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.3) **F** é a fórmula **B&C**, obtida por aplicação da Regra de Introdução da Conjunção (I - &). Temos,

1 $\mathbf{A}_1$

⋮ ⋮

h $\mathbf{A}_h$

⋮ ⋮

m **A** (ou **B**)

⋮ ⋮

s **B** (ou **A**)

⋮ ⋮

k **A&B** m, s, I - &

Como m, s < k, por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A}$ e $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{B}$.

Logo, pelo Axioma 5, de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e por aplicações de *Modus Ponens*:

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A\&B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{F}$.

iii.2.4) **F** é a fórmula $\mathbf{B}\lor\mathbf{C}$, obtida por aplicação da Regra de Introdução da Disjunção (I - ∨). Temos,

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
h	$\mathbf{A}_h$		
⋮	⋮		
m	**A**	(ou **B**)	
⋮	⋮		
k	$\mathbf{A}\lor\mathbf{B}$	(ou $\mathbf{B}\lor\mathbf{A}$)	m, I - ∨

Como m < k, por hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}$ (ou $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}$).

Logo, pelo Axioma 6 (ou Axioma 7), de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e por *Modus Ponens*:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}\lor\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.5) **F** é a fórmula $\neg\mathbf{C}$, obtida por aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I – ¬(rest)). Temos:

1	$\mathbf{A}_1$			
⋮	⋮			
h	$\mathbf{A}_h$			
⋮	⋮			
p		**C**		suposição
⋮		⋮		
q		$\mathbf{B}^{(n)}$	(**B** ou $\neg\mathbf{B}$)	
⋮		⋮		
r		**B**	($\mathbf{B}^{(n)}$ ou $\neg\mathbf{B}$)	
⋮		⋮		
k-1		$\neg\mathbf{B}$	($\mathbf{B}^{(n)}$ ou **B**)	
k	$\neg\mathbf{C}$			p, p-(k-1), I - ¬(rest)

Isto é, de $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{B}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{C}$.

Por hipótese de indução, temos

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{B}$.

Portanto, pelo Metateorema de Dedução, temos que

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$.

Por propriedade da relação de dedutibilidade $\vdash_{C_n}$ (ver Nota de Rodapé 1),temos que

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$.

Pelo Axioma 11, segue que

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{C_n} \neg\mathbf{C}$.

Pelo Metateorema de Dedução, segue

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{C}$.

Logo, pelos itens (viii) e (ix) do Teorema 1.1.9,

$\Gamma \vdash_{C_n} \neg\mathbf{C}$, ou seja, $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{F}$.

iii.2.6) **F** é a fórmula **C**, obtida por aplicação da Regra de Eliminação da Implicação (E - $\supset$). Temos, esquematicamente:

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
h	$\mathbf{A}_h$		
⋮	⋮		
t	**B**	(ou $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$)	
⋮	⋮		
u	$\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$	(ou **B**)	
⋮	⋮		
k	**C**		t, u, E - $\supset$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}\supset\mathbf{C}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{B}\supset\mathbf{C}$.

Por *Modus Ponens*, temos que

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{C}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{F}$.

iii.2.7) **F** é a fórmula **B** (ou **C**), obtida por aplicação da Regra de Eliminação da Conjunção (E - &). Temos,

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
h	$\mathbf{A}_h$	
⋮	⋮	
p	**A&B**	
⋮	⋮	
k	**A** (ou **B**)	p, E - &

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A\&B}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A\&B}$.

Pelo Axioma 3, temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.8) **F** é a fórmula **B** (ou **C**), obtida por aplicação da Regra de Eliminação da Disjunção (E - &). Temos,

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
h	$\mathbf{A}_h$		
⋮	⋮		
p	$\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$		
⋮	⋮		
q		$\mathbf{B}$	suposição
⋮		⋮	
r		$\mathbf{D}$	
⋮	⋮		
s		$\mathbf{C}$	suposição
⋮		⋮	
k-1		$\mathbf{D}$	
k	$\mathbf{D}$		p, q-r, s-(k-1), E - $\vee$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ e $\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$.

Por hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ e $\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$.

Portanto, pelo Metateorema de Dedução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}\supset\mathbf{D}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{D}$.

Pelo Axioma 8, segue

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.9) **F** é a fórmula **B**, obtida por aplicação da Regra de Eliminação da Dupla Negação (E - ¬¬). Temos,

$$\begin{array}{lll} 1 & \mathbf{A}_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ h & \mathbf{A}_h & \\ \vdots & \vdots & \\ p & \neg\neg\mathbf{B} & \\ \vdots & \vdots & \\ k & \mathbf{B} & p, \text{E - }\neg\neg \end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\neg\mathbf{B}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}$.

Por hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg\neg\mathbf{B}$.

Logo, pelo Axioma 9 e por *Modus Ponens*:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.10) **F** é a fórmula **C**, obtida por aplicação da Regra do Terceiro-Excluído (RTE). Temos,

$$\begin{array}{llll} 1 & \mathbf{A}_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ h & \mathbf{A}_h & & \\ \vdots & \vdots & & \\ p & & \vert\ \mathbf{B} & \text{suposição} \\ \vdots & & \vert\ \vdots & \\ r & & \vert\ \mathbf{D} & \\ \vdots & \vdots & & \\ s & & \vert\ \neg\mathbf{B} & \text{suposição} \\ \vdots & & \vert\ \vdots & \\ k\text{-}1 & & \vert\ \mathbf{D} & \\ k & \mathbf{D} & & \text{p-r, s-(k-1), RTE} \end{array}$$

Isto é, de $\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$ e $\Gamma, \neg\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{D}$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma, \mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$ e $\Gamma, \neg\mathbf{B} \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$.

Pelo Metateorema de Dedução, segue que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}\supset\mathbf{D}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg\mathbf{B}\supset\mathbf{D}$.

Pelos Axiomas 8 e 10, segue que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{D}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.11) **F** é a fórmula $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$, obtida por aplicação da Regra Distribuição da Negação na Conjunção (DNC). Temos,

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
h	$\mathbf{A}_h$	
⋮	⋮	
p	$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	
⋮	⋮	
k	$\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$	p, DNC

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$.

Pelo Teorema 1.1.9 (i) e por *Modus Ponens*, segue que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.12) **F** é a fórmula $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, obtida por aplicação da Regra da Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)). Temos,

1	$\mathbf{A}_1$	
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\mathbf{A}_k$	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$\mathbf{A}^{(n)}$ (ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
q	$\mathbf{B}^{(n)}$ (ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$	
r	$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	
$\vdots$	$\vdots$	
s	$\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	p, q, r, DND(rest)

Isto é, de $\Gamma\vdash_{\mathbf{DNC}_n}\mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{DNC}_n}\mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{DNC}_n}\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$, temos $\Gamma\vdash_{\mathbf{DNC}_n}\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

Por hipótese de indução, temos que

$\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$.

Portanto, de

$\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$ e Lema 2.4.4 (a), por aplicações de *Modus Ponens*, temos que

$\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma\vdash_{\mathbf{C}_n}\mathbf{F}$.

iii.2.13) **F** é a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, obtida por aplicação da Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). Temos:

1	$\mathbf{A}_1$		
$\vdots$	$\vdots$		
h	$\mathbf{A}_h$		
$\vdots$	$\vdots$		
p	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$		
q	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$		
r	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$		
$\vdots$	$\vdots$		
k	$\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$		p, q, r, DNI(rest)

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

Por hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$.

Portanto, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ e Lema 2.4.4 (b), por aplicações de MP, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

Logo:

Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

Finalizamos, portanto, a demonstração do teorema. □

Teorema 2.4.6 Toda prova Π' de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$**,** pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{C}_\omega} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstração idêntica à do teorema anterior, excluindo-se os casos de aplicações das Regras de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)) e Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). □

Como uma conseqüência imediata dos resultados anteriores, temos o seguinte teorema de equivalência.

Teorema 2.4.7 Os sistemas proposicionais axiomáticos $\mathbf{C}_n$**,** $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, são logicamente equivalentes aos correspondentes sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$**,** $1 \leq n \leq \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}.$$ □

Colorário 2.4.8 Para toda prova Π de **F**, em cada sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, existe uma prova categórica Π' de **F**, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e vice-versa. Isto é,

$$\vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F} \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Pelos teoremas anteriores, basta tomar $\Gamma = \varnothing$. □

2.5 NORMALIZAÇÃO PARA OS SISTEMAS $\mathbf{DNC_n}$, $1 \leq n \leq \omega$.

Nesta seção, obtemos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

A seguir, reapresentamos a definição de prova categórica e de fórmula resultante, para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

Definição 2.5.1 Para cada sistema $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, uma prova formal é dita uma *prova categórica* se, e somente se, não contém premissa(s).

A normalização, em cada sistema $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, *à la* Fitch, será realizada nas provas categóricas.

Definição 2.5.2 i) Se uma fórmula **A** ocorre em qualquer passo de uma prova, ou ocorre em qualquer passo de uma prova subordinada a ela, e posteriormente ocorre em outro lugar como um item diferente daquela prova ou ocorre em outro lugar da prova subordinada, então essa segunda ocorrência da fórmula é denominada uma *resultante* da primeira ocorrência.

ii) Se uma fórmula **A** de uma prova é obtida pela aplicação de qualquer Regra de Dedução do sistema $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, então essa fórmula é uma *resultante* de cada uma da(s) fórmula(s) precedente(s) nas quais a regra foi aplicada (uma ou mais dessas fórmulas podem ser obtidas por provas subordinadas).

iii) Uma prova subordinada é uma *resultante* de cada uma das suas próprias fórmulas e também de cada fórmula externa a ela que é nela reiterada.

iv) Se uma fórmula é uma *resultante* de uma outra fórmula, a qual é resultante de uma terceira fórmula, então a primeira fórmula é resultante da terceira fórmula, o mesmo ocorrendo para qualquer número finito de fórmulas.

Observamos que, se uma fórmula numa prova é obtida de uma fórmula anterior por repetição ou reiteração, ela é uma resultante dessa fórmula anterior.

Lembramos que, em uma prova qualquer, uma fórmula **A**, que ocorra apenas em provas subordinadas, não pode ser reiterada na prova principal.

Definição 2.5.3 O *comprimento* de uma prova Π é o número de passos (fórmulas) que nela ocorrem, inclusive em suas provas subordinadas.

Notação: comp(Π).

Assim, o comprimento de uma prova é o último número escrito à esquerda da prova, no processo de numerar os passos da prova.

Definição 2.5.4 Uma prova categórica Π em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, é *normal* se, e somente se, a ocorrência de toda fórmula, que ocorre como um passo de Π, pode ser justificada por uma Regra de Introdução ou por uma Regra Especial, com possível exceção das fórmulas de suas provas subordinadas.

Definição 2.5.5 Seja Π uma prova categórica que tem entre seus itens uma fórmula **A** e uma prova subordinada que tem como fórmulas **A** (suposição), $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, isto é,

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \mathbf{A} \\ \vdots \\ \qquad \begin{array}{|ll} \mathbf{A} & \qquad\qquad \text{suposição} \\ \mathbf{A}_1 & \\ \mathbf{A}_2 & \\ \vdots & \\ \mathbf{A}_k & \end{array} \\ \vdots \end{array}$$

em que pelo menos um dos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, é distinto de **A**.

Uma prova categórica Π_1 é uma *redução direta* de Π se, e somente se, a prova Π_1 é obtida a partir de Π colocando-se, imediatamente após o item **A**, anterior na prova categórica principal, os itens $\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$, sem a prova subordinada.

Essa prova Π_1 é escrita esquematicamente como:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \\ \vdots \end{array}$$

Uma redução direta Π_1 de Π será denotada por $\mathcal{R}(\Pi)$.

No procedimento de redução anteriormente descrito:

i) A prova subordinada acima mencionada, sem a suposição **A**, é colocada após o item **A** da prova principal, isto é, os passos da prova subordinada transformam-se em itens da prova principal;

ii) Alguns desses itens podem ser eles próprios provas subordinadas.

Desse modo, na redução direta de uma prova categórica, uma lista de todos os passos de uma prova subordinada, exceto a própria suposição, toma o lugar dessa prova subordinada. Tornam-se itens da prova da qual a prova considerada é diretamente subordinada.

Definição 2.5.6 Uma prova categórica Σ é uma *redução* de uma prova categórica Π se, e somente se:

i) Σ coincide com (a própria) Π; ou

ii) Σ é $\mathcal{R}_k(\ldots \mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1(\Pi))\ldots)$, ou seja, Σ pode ser obtida a partir de Π por uma sucessão finita de reduções diretas.

Observamos que uma prova categórica é uma redução de si mesma, embora não seja uma redução direta de si mesma.

Lema 2.5.7 Se Π_1 é uma redução direta da prova categórica Π_2, então Π_1 é uma redução de Π_2.

Demonstração:

A demonstração é imediata, pela Definição 2.5.6.

Lema 2.5.8 O comprimento de uma redução Π_1 de uma prova categórica Π não é maior do que o comprimento de Π.

Demonstração:

A demonstração é imediata, pelas Definições 2.5.5 e 2.5.6.

Definição 2.5.9 Para cada sistema $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, uma prova categórica Π é *não-trivial* se, e somente se, entre os seus itens não ocorrem fórmulas do tipo $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$, exceção feita aos casos: i) ocorrência de qualquer dessas fórmulas apenas como suposição de prova subordinada; ou ii) ocorrência dessas fórmulas apenas como conseqüência direta interna de fórmulas que constam numa prova subordinada, que justifica uma aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)) na prova da qual essa prova é subordinada. Caso contrário, a prova Π é *trivial*.

As exceções constantes na Definição 2.5.9, se justificam, pois, caso contrário, toda e qualquer aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)) em uma prova trivializá-la-ia.

Em relação às provas Π em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, demonstramos o seguinte Teorema de Normalização, cuja versão correspondente é introduzida em **Fitch 1952**, p.119, como Teorema Fundamental.

Teorema 2.5.10 (**Teorema Fundamental**). Toda prova categórica Π em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, de comprimento menor ou igual a *s* é não-trivial, e tem pelo menos uma redução Σ que é não-trivial, normal e cujo comprimento não é maior que o comprimento de Π.

Demonstração:

Fazemos a demonstração por indução sobre o comprimento *s*.

1) No caso em que $s = 1$, seja Π uma prova categórica de comprimento $s = 1$, isto é, Π tem apenas um item (Π é constituída por uma única fórmula). Logo, este único item deve ser uma prova subordinada, que é ela mesma de comprimento 1, isto é, constituída por uma única fórmula, ou seja, uma suposição.

Portanto, a prova categórica é normal, por definição, por não ter ítens proposicionais na prova principal - Π constitui uma redução normal de si mesma, de comprimento 1. Além disso, Π é não-trivial, pois qualquer prova trivial deve ter comprimento maior ou igual a 3 - deve ter pelo menos três ítens, $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$.

2) Assumimos, como hipótese de indução, que o teorema se verifica no caso em que $s = m$, isto é, nos casos em que as provas têm comprimento $\leq m$.

3) Vamos demonstrar o teorema no caso em que $s = m+1$, isto é, nos casos em que Π tem comprimento $\leq m+1$.

Seja Π uma prova categórica de comprimento $\leq m+1$. Demonstraremos que Π é não-trivial e tem pelo menos uma redução normal não-trivial de comprimento não maior que o comprimento de Π.

3.1) Se Π tem apenas um item, podemos argumentar como no caso (1), considerando-se, entretanto, que esse único item pode ser uma prova subordinada de comprimento $\leq m+1$.

3.2) Se Π tem mais que um item, seja Π_1 a prova que resulta, de Π, retirando-se o último item.

Como assumimos que o teorema se verifica para *s* = m, e já que o comprimento de Π_1 é ≤ m, podemos concluir que Π_1 é não-trivial e tem uma redução não-trivial normal Π_2,

Toda fórmula que é um item de Π_1 é também um item de Π_2, e toda fórmula item de Π_2 tem uma Regra de Introdução ou uma Regra Especial que a pode justificar.

Temos, então, vários casos a considerar, dependendo da natureza do último item de Π.

3.2.1) Consideremos inicialmente o caso em que o último item de Π é uma prova subordinada. A prova categórica Π é não-trivial, porque Π_1 é não-trivial por hipótese de indução (comp $(\Pi_1) \leq$ m).

Pela hipótese de indução, Π_1 tem uma redução normal não-trivial Π_2.

Obtemos uma redução normal não-trivial Π_3 de Π, de comprimento ≤m+1, simplesmente acrescentando a Π_2 o último item – a prova subordinada – de Π.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{llllll}
\Pi_1 & \Pi & & \Pi_2 & \Pi_3 & \\
\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\mathbf{A}_k & \mathbf{A}_k & & \mathbf{A}'_p & \mathbf{A}'_p & \\
k\leq m & & \multicolumn{1}{|l}{\mathbf{A}_{k+1}\ \ \text{suposição}} & p\leq m & & \multicolumn{1}{|l}{\mathbf{A}_{p+1}\ \ (\text{i.é}, \mathbf{A}_{k+1})} \\
 & & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & & & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} \\
 & & \multicolumn{1}{|l}{\mathbf{A}_{m+1}} & & & \multicolumn{1}{|l}{\mathbf{A}_{p+(m-k)}\ (\text{i.é}, \mathbf{A}_{m+1})}
\end{array}$$

$$p+(m-k) \leq m+1$$

Observamos que, como caso particular, se a suposição **A**, do último item (isto é, prova subordinada) de Π, já ocorre na prova Π, entre os ítens anteriores, então ela já ocorre em Π_1 e, portanto, ela já ocorre em Π_2, justificada por uma Regra de Introdução ou por uma Regra Especial.

Neste caso, podemos obter uma redução direta Π'_3 de Π_3, de comprimento $\leq$m. Por hipótese de indução, podemos ainda obter uma redução normal não-trivial Π''_3 de Π'_3, de comprimento $\leq$m.

Esquematicamente:

Π_1	Π		Π_2	Π_3		Π'_3		Π''_3
$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}'_1$	$\mathbf{A}'_1$		$\mathbf{A}'_1$		$\mathbf{A}''_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}$	$(\mathbf{A}'_i)$	$\mathbf{A}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\mathbf{A}'_{i+1}$	(i.é, $\mathbf{A}_{k+2}$)	$\vdots$
$\mathbf{A}_k$	$\mathbf{A}_k$		$\mathbf{A}'_p$	$\mathbf{A}'_p$		$\vdots$		$\mathbf{A}''_q$
k$\leq$m		$\mathbf{A}$ (i.é, $\mathbf{A}_{k+1}$)	p$\leq$m		$\mathbf{A}_{p+1}$	$\mathbf{A}'_{i+(m-k-1)}$		q$\leq$m
		$\mathbf{A}_{k+2}$			$\vdots$	$\vdots$		
		$\vdots$			$\mathbf{A}_{p+(m-k)}$	$\mathbf{A}'_{p+(m-k-1)}$		
		$\mathbf{A}_{m+1}$						

3.2.2) Consideremos agora o caso em que a última fórmula de Π tem como justificativa a Regra de Repetição (R).

Neste caso, seja a fórmula **A** o item m+1 de Π, mas, como **A** já ocorre na prova Π, entre os m itens anteriores, então ela já ocorre na prova Π_1 e, por hipótese de indução, ela ocorre na redução não-trivial Π_2 de Π_1, justificada por uma Regra de Introdução ou por uma Regra Especial.

Seja Π_3 a prova que coincide com Π_2, acrescentando-se, como último item a fórmula **A** em Π_2. Nessas condições, Π_3 é uma redução de si mesma e é não-trivial, pois, se fosse trivial Π_2 também o seria; portanto, Π_3 é uma redução não-trivial normal de Π, de comprimento menor ou igual a m+1.

Esquematicamente:

	Π_1		Π			Π_2		Π_3	
	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}_1$			$\mathbf{A'}_1$		$\mathbf{A'}_1$	
	⋮		⋮			⋮		⋮	
	A		**A**			**A**		**A**	
	⋮		⋮			⋮		⋮	
m	$\mathbf{A}_m$	m	$\mathbf{A}_m$		p	$\mathbf{A'}_p$	p	$\mathbf{A'}_p$	
		m+1	**A**	Repetição		p≤m	p+1	**A**	Repetição

3.2.3) Consideremos o caso em que a última fórmula de Π tem como justificativa a Regra de Reiteração (Reit) – este caso não é procedente e estaria contemplado no caso (3.2.1).

3.2.4) Consideremos o caso em que o último item de Π tem a Regra I - $\supset$ como justificativa.

Sejam $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ o último item de uma prova Π, e Π_1 a prova categórica de maior comprimento que resulta de Π retirando-se esse último item. Pela hipótese de indução, como Π_1 tem comprimento m, seja Π_2 uma redução não-trivial de Π_1, de comprimento ≤m, cujos itens são justificados apenas por Regras de Introdução ou por Regras Especiais. Seja Π_3 a prova que resulta ao acrescentarmos ($\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$) em Π_2, e suponhamos que Π_3 seja trivial.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{llllll}
 & \Pi_1 & \Pi & & \Pi_2 & \Pi_3 \\
 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \mathbf{A}_{m-k} & \mathbf{A}_{m-k} & & \mathbf{A}'_{p-d} & \mathbf{A}'_{p-d} \\
 & \quad\vert\ \mathbf{A} & \quad\vert\ \mathbf{A} & & \quad\vert\ \mathbf{A} & \quad\vert\ \mathbf{A} \\
 & \quad\vert\ \vdots & \quad\vert\ \vdots & & \quad\vert\ \vdots & \quad\vert\ \vdots \\
m & \quad\vert\ \mathbf{B} & \quad\vert\ \mathbf{B} & p & \quad\vert\ \mathbf{B} & \quad\vert\ \mathbf{B} \\
 & & m+1\ \ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}\quad (\mathrm{I} - \supset) & p\leq m & & p+1\ \ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}\quad (\mathrm{I} - \supset)
\end{array}$$

Como Π_2 é não-trivial, então Π_3 – e, portanto Π_2 – deveria ter necessariamente como itens as fórmulas $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, justificadas, em $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$, por Regras de Introdução ou por Regras Especiais. Podemos verificar – ver esquema a seguir – que a fórmula $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$ só pode ser resultante de aplicação das Regras I - ¬(res), DNI(rest) e I - &, a partir de ocorrências das fórmulas $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ em itens anteriores da prova; a ocorrência da fórmula $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ só pode ser justificada por aplicação da Regra I - ¬(res), em uma prova subordinada que tem $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ como suposição.

Entretanto, de $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$, como suposição de uma prova subordinada, de acordo com as Regras dos sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$, não é possível deduzirmos imediatamente fórmulas do tipo $\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$, para podermos, pela Regra I - ¬(res) introduzir $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$. Como para toda fórmula $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, de $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ podemos deduzir, por RTE, $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$, então, pela Regra E - ∨, se de $\neg\mathbf{A}$ deduzimos fórmulas do tipo $\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$, e de $\mathbf{B}$ deduzimos fórmulas do tipo $\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$, então de $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ (e portanto de $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$) deduzimos uma trivialização.

Assim sendo, de $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ podemos deduzir uma trivialização ($\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$) - ver esquema a seguir - apenas se de $\neg\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$ pudermos deduzir $\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$. Neste caso, porém, pela Regra I-¬(res), na prova subordinada a $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$, ocorrem as fórmulas $\neg\neg\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{B}$.

Como, na prova, ocorrem as fórmulas $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$, teríamos que Π_2 seria trivial, o que não acontece.

Observamos que, no caso particular em que ¬(**A**⊃**B**) ocorresse como passo em uma prova subordinada, sem ser uma suposição, também obteríamos a trivialização de Π_2.

Logo, Π_3 é não-trivial e, já que **A**⊃**B** é justificada pela Regra I - ⊃, é uma redução normal de Π, de comprimento ≤m+1.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{lll}
\Pi_2 & & \\
A'_1 & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{A}'_d & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{A}^{(n)} & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{B}^{(n)} & & \\
\vdots & & \\
 & \mid (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) & \text{suposição} \\
 & \mid \mathbf{A}\supset\mathbf{B} & \text{E - \&} \\
 & \mid \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) & \text{E - \&} \\
 & \mid \mathbf{A}^{(n)} & \text{Reit} \\
 & \mid \mathbf{B}^{(n)} & \text{Reit} \\
 & \mid \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} & \text{DNI(rest)} \\
 & \mid \mathbf{A} & \text{E - \&} \\
 & \mid \neg\mathbf{B} & \text{E - \&} \\
 & \mid \mathbf{B} & \text{E - }\supset \\
\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})) & & \text{I - }\neg\text{(rest)} \\
(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1 & & \text{Definição 1.1.1} \\
 & \mid (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1\&\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1) & \text{suposição} \\
 & \mid \neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1) & \text{E-\&} \\
 & \mid \neg\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})) & \text{Definição 1.1.1} \\
 & \mid ((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})) & \text{E-}\neg\neg \\
 & \mid \mathbf{A}^{(n)} & \text{Reit}
\end{array}$$

$\mid \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\mid \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DNI(rest)
$\mid \mathbf{A}$	E - &
$\mid \neg\mathbf{B}$	E - &
$\mid \mathbf{B}$	E - $\supset$
$\neg(\ (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1\&\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1))$	I - $\neg$(rest)
$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^2$	Definição 1.1.3
$\vdots$	
$\mid (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{n-1}\&\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{n-1})$	suposição
$\mid \vdots$	
$\mid \mathbf{A}^{(n)}$	Reit
$\mid \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\mid \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DNI(rest)
$\mid \mathbf{A}$	E - &
$\mid \neg\mathbf{B}$	E - &
$\mid \mathbf{B}$	E - $\supset$
$\neg(\ (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{n-1}\&\neg((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{n-1}))$	I - $\neg$(rest)
$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^n$	Definição 1.1.3
$\vdots$	
$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^1\&...\&(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^n$	I - &
$(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)}$	Definição 1.1.3
$\vdots$	
$\mid \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	suposição
$\mid \mathbf{A}^{(n)}$	Reiteração (Reit)
$\mid \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\mid \quad \mid \mathbf{A}$	suposição
$\mid \quad \mid \mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	Reit
$\mid \quad \mid \mathbf{B}$	E - $\supset$
$\mid \quad \mid \neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	I - $\vee$
$\mid \quad \mid \neg\mathbf{A}$	suposição

│ │ $\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{B}$ I - $\lor$

│ $\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{B}$ RTE

│ │ $\neg\mathbf{A}$ suposição

│ │ ⋮

│ │ $\mathbf{C}$

│ │ ⋮

│ │ $\neg\mathbf{C}$

│ │ ⋮

│ │ $\mathbf{C}^{(n)}$

│ $\neg\neg\mathbf{A}$ I - $\neg$(rest)

│ │ $\mathbf{B}$ suposição

│ │ ⋮

│ │ $\mathbf{C}$

│ │ ⋮

│ │ $\neg\mathbf{C}$

│ │ ⋮

│ │ $\mathbf{C}^{(n)}$

│ $\neg\mathbf{B}$ I - $\neg$(rest)

│ $\mathbf{C}$ E - $\lor$

│ $\neg\mathbf{C}$ E - $\lor$

│ $\mathbf{C}^{(n)}$ E - $\lor$

$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ I - $\neg$(rest)

⋮

│ $\mathbf{A}$ suposição

│ ⋮

│ $\mathbf{B}$

Observação. Observamos que podemos ainda considerar o caso em que **A**, suposição da prova subordinada, já ocorria anteriormente na prova Π. Neste caso, Π_1 e Π_2 podem ser representadas por

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \Pi_1 & & \Pi & \Pi'_1 & & \Pi_2 & & \Pi'_2 & \Pi_3 \\
 & \mathbf{A}_1 & 1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & 1 & \mathbf{A}'_1 & 1 & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \mathbf{A} & & \mathbf{A} & \mathbf{A} & d & \mathbf{A} & d & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \vert\ \mathbf{A} & & \vert\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & d+j & \mathbf{B} & k & \mathbf{A}''_k & \mathbf{A}''_k \\
 & \vert\ \vdots & & \vert\ \vdots & \vdots & & \vdots & k+1 & \vert\ \mathbf{A} & \vert\ \mathbf{A} \\
m & \vert\ \mathbf{B} & m & \vert\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{m-1} & p & \mathbf{A}'_p & & \vert\ \vdots & \vert\ \vdots \\
 & & m+1 & \mathbf{A}\supset\mathbf{B} & & p\leq m-1 & & p'=k+1+j & \vert\ \mathbf{B} & \vert\ \mathbf{B} \\
 & & & & & & & & & \mathbf{A}\supset\mathbf{B}\ (\mathrm{I}-\supset) \\
 & & & & & & & p'=p+1\leq m & & p''\leq m+1
\end{array}$$

Neste caso, $p<m$, e podemos transformar Π_1 na sua redução direta Π'_1, de comprimento $m-1$; Π_2 é uma redução normal de Π'_1, de comprimento $p\leq m-1<m$. Podemos transformar Π_2 em Π'_2 - Π'_2 é não-trivial e constitui uma redução normal de Π_1.

Obtemos Π_3 acrescentando-se a Π'_2, pela Regra I - ⊃, a fórmula **A⊃B**. Logo, Π_3 é uma redução normal não-trivial de Π, de comprimento $\leq m+1$.

Esta observação também se aplica a vários dos casos que demonstramos a seguir.

3.2.5) O último item de Π tem a Regra I - & como justificativa.

Seja **A&B** o último item de Π, justificada por aplicação da Regra I - &.

Pela hipótese de indução, existe uma redução normal não-trivial Π_2 de Π_1, sendo Π_1 a prova Π sem a última fórmula **A&B**.

Observamos que em Π_1 e Π_2 ocorrem necessariamente como itens as fórmulas **A** e **B**, pois **A&B** é obtida em Π pela Regra I - &.

Como nos casos anteriores, seja Π_3 a prova obtida acrescentando-se a Π_2 a fórmula **A&B**.

$$\begin{array}{llll}
\Pi_1 & \Pi & \Pi_2 & \Pi_3 \\
\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{A}_m & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}'_p & \mathbf{A}'_p \\
 & \mathbf{A\&B} & p \leq m & \mathbf{A\&B}
\end{array}$$

Se Π_3 for trivial então, como Π_2 é não-trivial, em Π_2 ocorrem, necessariamente, as fórmulas $(\mathbf{A\&B})^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A\&B})$.

Como no caso anterior, já que Π_2 é normal, ocorreriam em Π_2 as fórmulas **A**, **B**, $\mathbf{A}^{(n)}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$, todas justificadas por Regras de Introdução ou por Regras Especiais.

Ainda como no caso anterior, para que ocorra a fórmula $\neg(\mathbf{A\&B})$ em Π_2, ela só pode ter sido introduzida por aplicação da Regra I - ¬(rest), através de uma prova subordinada que tenha **A&B** como suposição.

Em uma prova subordinada, a partir da suposição **A&B**, só seria possível a obtenção de uma trivialização, caso de **A**, ou de **B**, pela Regra E - &, deduzíssemos uma trivialização. Porém, neste caso, teríamos na prova subordinada a fórmula $\neg\mathbf{A}$, ou a fórmula $\neg\mathbf{B}$, o que tornaria a prova Π_2 trivial.

Temos ainda que considerar os casos em que a trivialização nesta prova subordinada seja resultante de fórmulas componentes de **A** e de **B**, e não apenas da fórmula **A** ou da fórmula **B**; nestes casos, a trivialização seria resultante da ocorrência das fórmulas $(\mathbf{C}_i)^{(n)}$, $1 \leq i \leq u$, na prova principal, onde os $\mathbf{C}_i$ são essas componentes de **A** e **B**.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{l}
\Pi_2 \\
\mathbf{A}'_1 \\
\vdots \\
\mathbf{A} \\
\vdots \\
\mathbf{B} \\
\vdots \\
\mathbf{A}^{(n)} \\
\vdots \\
\mathbf{B}^{(n)} \\
\vdots
\end{array}$$

$\vert\ (\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	suposição
$\vert\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}$	E - &
$\vert\ \mathbf{A}$	E - &
$\vert\ \mathbf{B}$	E - &
$\vert\ \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	E - &
$\vert\ \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$	DNC
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	suposição
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	Reit
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	suposição
$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{A}$	suposição
$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}$	Reit
$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	Reit
$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	I - ¬(rest)
$\vert\ \neg\mathbf{A}$	E - ∨
$\vert\ \mathbf{A}^{(n)}$	Reit
$\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}))$	I - ¬(rest)
$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^1$	Definição 1.1.1
$\vert\ (\mathbf{A}\&\mathbf{B})^1\&\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^1)$	suposição
$\vert\ \neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^1)$	E-&
$\vert\ \neg\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}))$	Definição 1.1.1
$\vert\ ((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}))$	E - ¬¬
$\vert\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}$	E - &
$\vert\ \mathbf{A}$	E - &
$\vert\ \mathbf{B}$	E - &
$\vert\ \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	E - &
$\vert\ \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$	DNC
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	suposição
$\vert\ \vert\ \neg\mathbf{A}$	Reit

$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{B}$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}$	Reit
$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathbf{B}$	Reit
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}$	I - ¬(rest)
$\mid\ \neg\mathbf{A}$	E - ∨
$\mid\ \mathbf{A}^{(n)}$	Reit
$\neg(\ (\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{1}\&\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{1}))$	I - ¬(rest)
$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{2}$	Definição
⋮	
$\mid\ (\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n-1}\&\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n-1})$	suposição
$\mid\ \vdots$	
$\mid\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}$	E - &
$\mid\ \mathbf{A}$	E - &
$\mid\ \mathbf{B}$	E - &
$\mid\ \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	E - &
$\mid\ \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$	DNC
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}$	suposição
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}$	Repetição
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{B}$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}$	Reit
$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathbf{B}$	Reit
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{B}^{(n)}$	Reit
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}$	I - ¬(rest)
$\mid\ \neg\mathbf{A}$	E - ∨
$\mid\ \mathbf{A}^{(n)}$	Reit
$\neg(\ (\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n-1}\&\neg((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n-1}))$	I - ¬(rest)

$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n}$	Definição
$\vdots$	
$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{1}\&\ldots\&(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{n}$	I - &
$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}$	Definição 1.1.3
$\mid\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}$	suposição
$\mid\ \mathbf{A}$ (ou $\mathbf{B}$)	E - &
$\mid\ \vdots$	
$\mid\ \mathbf{B}$ (ou $\mathbf{A}$)	E - &
$\mid\ \mid\ \mathbf{A}$ (ou $\mathbf{B}$)	suposição
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{C}$ $(\neg\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}^{(n)})$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{C}$ $(\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}^{(n)})$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{C}^{(n)}$ $(\mathbf{C}$ ou $\neg\mathbf{C})$	
$\mid\ \neg\mathbf{A}$ (ou $\neg\mathbf{B}$)	I - ¬(rest)
$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	I - ¬(rest)
$\vdots$	
$\mathbf{A}'_{p}$	

Logo, Π_3 é não-trivial e, como **A&B** é introduzida pela Regra I - &, constitui uma redução normal de Π, de comprimento ≤m+1.

3.2.6) O último item de Π tem a Regra I - ∨ como justificativa.

Consideremos o caso em que o último item de Π é **A∨B**, justificado por uma aplicação da Regra I - ∨.

$$\begin{array}{llll}
\Pi_1 & \Pi & \Pi_2 & \Pi_3 \\
\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{A}\text{ (ou }\mathbf{B}\text{)} & \mathbf{A}\text{ (ou }\mathbf{B}\text{)} & \mathbf{A}\text{ (ou }\mathbf{B}\text{)} & \mathbf{A}\text{ (ou }\mathbf{B}\text{)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{A}_m & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}'_p & \mathbf{A}'_p \\
 & \mathbf{A}\lor\mathbf{B} & & \mathbf{A}\lor\mathbf{B}
\end{array}$$

Seja Π_3 a prova que resulta ao acrescentarmos $(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})$ a Π_2.

Se Π_3 for trivial, como Π_2 é não-trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente como itens as fórmulas $(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})$.

Como nos casos anteriores, a fórmula $(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})^{(n)}$ só pode ser resultante, pela aplicação das Regras E - &, DND, E - $\lor$, I - $\neg$(res) e I - &, de ocorrências das fórmulas $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$; e a fórmula $\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})$ só pode ser introduzida a partir de uma prova subordinada com suposição $\mathbf{A}\lor\mathbf{B}$.

A única possibilidade de deduzirmos uma trivialização de $\mathbf{A}\lor\mathbf{B}$ é, pela Regra E - $\lor$, se deduzirmos uma trivialização $\mathbf{C}^{(n)}$, $\neg\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$.

Assim sendo, necessariamente, de $\mathbf{A}$ deduzimos $\mathbf{C}^{(n)}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}$; e de $\mathbf{B}$ deduzimos $\mathbf{C}^{(n)}$, $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}$. Logo, nessa prova subordinada, pela Regra I - $\neg$(rest), ocorrem necessariamente como itens as fórmulas $\neg\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{B}$.

Como $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$, e $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$, ocorrem em Π_2, então Π_2 seria trivial. Logo Π_3 é não-trivial.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{ll}
\Pi_2 & \\
\mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}\quad(\text{ou } \mathbf{B}) & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}^{(n)} & \\
\vdots & \\
\mathbf{B}^{(n)} & \\
\vdots & \\
(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)} & \\
\vdots & \\
\qquad \mid \mathbf{A}\vee\mathbf{B} & \text{suposição}\\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{A} & \text{suposição}\\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{C} & \\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \neg\mathbf{C} & \\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{C}^{(n)} & \\
\qquad \mid \neg\mathbf{A} & \text{I - }\neg\text{(rest)}\\
\qquad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{B} & \text{suposição}\\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{C} & \\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \neg\mathbf{C} & \\
\qquad \mid \quad \mid \vdots & \\
\qquad \mid \quad \mid \mathbf{C}^{(n)} & \\
\qquad \mid \neg\mathbf{B} & \text{I - }\neg\text{(res)}\\
\qquad \mid \mathbf{C} & \text{E - }\vee\\
\qquad \mid \neg\mathbf{C} & \text{E - }\vee\\
\qquad \mid \mathbf{C}^{(n)} & \text{E - }\vee\\
\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) & \text{I - }\neg\text{(res)}\\
\quad\vdots & \\
\quad\mathbf{A}'_p &
\end{array}
$$

Assim, Π_3 é não-trivial e, como $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ é introduzida pela Regra I - $\vee$, Π_3 é uma redução normal de Π, de comprimento $\leq$m+1.

3.2.7) O último item de Π tem como justificativa a Regra I - $\neg$(rest).

Seja $\neg\mathbf{C}$ o último item de Π, introduzido pela Regra I - $\neg$(rest).

Esquematicamente:

$$\begin{array}{llll}
\Pi_1 & \Pi & \Pi_2 & \Pi_3\\
\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1 & \mathbf{A}'_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\mathbf{A}_k & \mathbf{A}_k & \mathbf{A}'_d & \mathbf{A}'_d\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\left|\begin{array}{l}\mathbf{C}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\\ \vdots\\ \neg\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{B}^{(n)}\end{array}\right. &
\left|\begin{array}{l}\mathbf{C}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\ (\text{ou }\neg\mathbf{B}\text{ ou }\mathbf{B}^{(n)})\\ \vdots\\ \neg\mathbf{B}\ (\text{ou }\mathbf{B}\text{ ou }\mathbf{B}^{(n)})\\ \vdots\\ \mathbf{B}^{(n)}\ (\text{ou }\neg\mathbf{B}\text{ ou }\mathbf{B})\end{array}\right. &
\left|\begin{array}{l}\mathbf{C}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\\ \vdots\\ \neg\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{B}^{(n)}\end{array}\right. &
\left|\begin{array}{l}\mathbf{C}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\\ \vdots\\ \neg\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{B}^{(n)}\end{array}\right.\\
\neg\mathbf{C} & \text{I - }\neg\text{(rest)} & & \neg\mathbf{C}\\
 & & p\leq m & p+1\leq m+1
\end{array}$$

Se a prova Π_3 for trivial, como Π_2 é não-trivial, então as fórmulas $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$ (ou $\neg\neg\mathbf{C}$ e $(\neg\mathbf{C})^{(n)}$) devem necessariamente ocorrer em Π_2, não como suposições de provas subordinadas.

Logo, a prova Π'_2, esquematicamente a seguir, seria uma redução direta e trivial de Π_2, sendo uma prova de comprimento $p'<p\leq m$, o que contradiz a hipótese de indução.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{llll}
\Pi_2 & & \Pi'_2 & \\
\mathbf{A}'_1 & & \mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & & \vdots & \\
\mathbf{C}^{(n)} & & \mathbf{C}^{(n)} & \\
\vdots & & \vdots & \\
\mathbf{C} & & \mathbf{C} & \\
\vdots & & \vdots & \\
 & \vline\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & (\text{ou } \mathbf{B}^{(n)} \text{ ou } \neg\mathbf{B}) \\
 & \vline\ \vdots & \vdots & \\
 & \vline\ \mathbf{B} & \neg\mathbf{B} & (\text{ou } \mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{B}^{(n)}\ ) \\
 & \vline\ \vdots & \vdots & \\
 & \vline\ \neg\mathbf{B} & \mathbf{B}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{B} \text{ ou } \neg\mathbf{B}) \\
 & \vline\ \vdots & \vdots & \\
 & \vline\ \mathbf{B}^{(n)} & \mathbf{A}'_p &
\end{array}
$$

Logo, Π_3 deve ser não trivial.

Portanto, Π_3 é uma redução não-trivial de Π e, como $\neg$**C** é introduzida pela Regra I – $\neg$ (rest), Π_3 é uma redução normal de Π, de comprimento $\leq$m+1.

3.2.8) O último item de Π tem a Regra E - $\supset$ como justificativa.

Seja **B** o último item de Π, obtido por aplicação da Regra E - $\supset$, a partir das fórmulas **A** e (**A**$\supset$**B**).

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{llllll}
\Pi & & \Pi_2 & & \Pi_3 & \\
\mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}'_1 & & \mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\mathbf{A} & & \mathbf{A} & & \mathbf{A} & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\mathbf{A}\supset\mathbf{B} & & & \vert\ \mathbf{A} & & \vert\ \mathbf{A} \\
\vdots & & & \vert\ \vdots & & \vert\ \vdots \\
\mathbf{A}_m & & & \vert\ \mathbf{B} & & \vert\ \mathbf{B} \\
\mathbf{B} & & \mathbf{A}\supset\mathbf{B} & & \mathbf{A}\supset\mathbf{B} & \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & p & \mathbf{A}'_p & & \mathbf{A}'_p & \\
 & & p\leq m & & \mathbf{B} &
\end{array}
$$

Como a fórmula **A⊃B** ocorre em Π_2, deve necessariamente ser introduzida pela Regra I - ⊃, a partir da suposição **A**.

Se Π_3 for trivial, então as fórmulas ¬**B** e $\mathbf{B}^{(n)}$ devem necessariamente ocorrer em Π_2, o que contradiz a não-trivialidade de Π_2, já que **B** ocorre em Π_2 e não ocorre como suposição de prova subordinada.

Logo, Π_3 é não-trivial.

Agora, consideremos a prova Π'_2 abaixo:

$$
\begin{array}{l}
\Pi'_2 \\
\mathbf{A}''_1 \\
\vdots \\
\mathbf{A} \\
\vdots \\
\mathbf{B} \\
\vdots \\
\mathbf{A}\supset\mathbf{B} \\
\vdots \\
\mathbf{A}''_{p-1} \\
p-1<m
\end{array}
$$

Temos que Π'_2 é uma reduzida direta de Π_2 de comprimento <m; portanto, existe uma reduzida normal de Π'_2 de comprimento <m, a qual é também uma reduzida normal de Π_2.

Podemos acrescentar a Π'_2 a fórmula **B**, por aplicação da Regra de Repetição, obtendo-se Π_3.

Logo, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal de Π, de comprimento ≤m+1.

3.2.9) O último item de Π tem a Regra E - & como justificativa.

Seja **A** (ou **B**) o último item de Π, obtido por aplicação da Regra E - &, a partir da fórmula **A&B**.

Esquematicamente:

	Π		Π_2	Π_3
1	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}'_1$	$\mathbf{A}'_1$
	⋮		⋮	⋮
k	$\mathbf{A}_k$		**A**	**A**
	⋮		⋮	⋮
p	**A&B**		**B**	**B**
	⋮		⋮	⋮
m	$\mathbf{A}_m$		**A&B**	**A&B**
m+1	**A**	(ou **B**)	⋮	⋮
			$\mathbf{A}'_p$	$\mathbf{A}'_p$
				⋮
			p ≤ m	**A** (ou **B**)

Como Π_2 é uma redução normal de Π_1, então a fórmula **A&B** só pode ser obtida pela Regra I - &. Logo, as fórmulas **A** e **B** ocorrem necessariamente em Π_2.

Se Π_3 for trivial, então as fórmulas $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$ (ou $\neg\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$) devem ocorrer necessariamente em Π_2, o que trivializaria Π_2.

Logo, Π_3 é não-trivial e tem comprimento ≤ m+1.

Agora, como **A** e **B** ocorrem necessariamente em Π_2, então sua introdução em Π_3 pode ser justificada pela Regra de Repetição.

Portanto, Π_3 satisfaz as condições do teorema.

3.2.10) O último item de Π tem a Regra E - $\vee$ como justificativa.

Seja **C** o último item de Π, obtido por aplicação da Regra E - $\vee$, a partir da disjunção $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{lllllllll}
\Pi_1 & & & \Pi & & \Pi_2 & & & \Pi_3\\
\mathbf{A}_1 & & 1 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}'_1 & & & \mathbf{A}'_1\\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots\\
\mathbf{A}_k & & k & \mathbf{A}_k & & \mathbf{A} & (\text{ou } \mathbf{B}) & & \mathbf{A}\\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots\\
\mathbf{A}\vee\mathbf{B} & & p & \mathbf{A}\vee\mathbf{B} & & \mathbf{A}\vee\mathbf{B} & & & \mathbf{A}\vee\mathbf{B}\\
 & \vline\ \mathbf{A} & & & \vline\ \mathbf{A} & \vdots & & & \vdots\\
 & \vline\ \vdots & & & \vline\ \vdots & \mathbf{A}'_p & & & \mathbf{A}'_p\\
 & \vline\ \mathbf{C} & & & \vline\ \mathbf{C} & p\leq m & & p+1 & \mathbf{C}\\
\vdots & & & \vdots & & & & p+1 \leq m+1 & \\
 & \vline\ \mathbf{B} & & & \vline\ \mathbf{B} & & & & \\
 & \vline\ \vdots & & & \vline\ \vdots & & & & \\
 & \vline\ \mathbf{C} & m & & \vline\ \mathbf{C} & & & & \\
 & & m+1 & \mathbf{C} & & & & &
\end{array}$$

Como Π_2 é normal e a fórmula $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ ocorre necessariamente em Π_2 então, pela Regra I - $\vee$, a fórmula **A** (ou **B**) a antecede em Π_2.

Se Π_3 for trivial, então as fórmulas $\neg\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{(n)}$ ocorrem necessariamente em Π_2, o que trivializaria Π_2, já que a fórmula **C** ocorre em Π_2.

Logo, Π_3 é não-trivial.

Agora, como **A** (ou **B**) ocorre em Π_3, seja Π'_3 a seguinte redução direta de Π_3:

$$
\begin{array}{l}
\Pi'_3 \\
\mathbf{A}''_1 \\
\vdots \\
\mathbf{A}\ \ (\text{ou } \mathbf{B}) \\
\vdots \\
\mathbf{C} \\
\vdots \\
\mathbf{A}\lor\mathbf{B} \\
\vdots \\
\mathbf{A}''_{p-1} \\
p\leq m
\end{array}
$$

Temos que Π'_3 é uma redução normal não-trivial de Π_3, de comprimento $\leq$ m.

Logo, Π'_3 admite uma redução normal de comprimento $\leq$ m, que é uma redução normal não-trivial de Π, de comprimento $\leq$ m+1.

3.2.11) O último item de Π tem a Regra E - ¬¬ como justificativa.

Seja **A** o último item de Π, obtido a partir da fórmula ¬¬**A**, por aplicação da Regra E - ¬¬.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{llllll}
\Pi_1 & & \Pi & \Pi_2 & & \\
\mathbf{A}_1 & 1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1 & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \\
\neg\neg\mathbf{A} & q & \neg\neg\mathbf{A} & & \vert\ \neg\mathbf{A} & \text{suposição} \\
\vdots & & \vdots & & \vert\ \vdots & \\
\mathbf{A}_m & & \mathbf{A}_m & & \vert\ \mathbf{B} & \\
 & m+1 & \mathbf{A} & & \vert\ \vdots & \\
 & & & & \vert\ \neg\mathbf{B} & \\
 & & & & \vert\ \vdots & \\
 & & & & \vert\ \mathbf{B}^{(n)} & \\
 & & & \neg\neg\mathbf{A} & & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
 & & & \vdots & & \\
 & & & \mathbf{A}'_p & & \\
 & & & p \leq m & &
\end{array}$$

Como a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}$ ocorre necessariamente em Π_2, e só pode ter sido introduzida por uma Regra de Introdução ou por Regra Especial, então o foi pela Regra I - ¬(rest), a partir da fórmula $\neg\mathbf{A}$. Isto é, em uma prova subordinada a partir de $\neg\mathbf{A}$ se deduz, necessariamente, uma trivialização $\mathbf{B}$, $\neg\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$.

Consideremos, então, a prova subordinada que ocorre necessariamente em Π_2, tendo como suposição $\neg\mathbf{A}$. Mostremos, por indução sobre o grau de complexidade de **A**, que a fórmula **A**, ou fórmulas componentes de **A**, ou a negação de fórmulas componentes de **A**, ocorrem em Π_2.

i) Se A é atômica então, como não é possível deduzir qualquer fórmula de $\neg\mathbf{A}$, a trivialização $\mathbf{B}$, $\neg\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$ só pode ser constituída pelas fórmulas $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$; neste caso, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$ só podem ocorrer na prova subordinada por aplicação da Regra Reit.

Assim, as fórmulas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$ devem ocorrer necessariamente na prova principal.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{ll}
\Pi_2 & \\
\mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & \\
\mathbf{A} & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}^{(n)} & \\
\vdots & \\
 & \begin{array}{|ll} \neg\mathbf{A} & \qquad\qquad \text{suposição} \\ \mathbf{A} & \\ \mathbf{A}^{(n)} & \end{array} \\
\neg\neg\mathbf{A} & \qquad\qquad\qquad \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\vdots & \\
\mathbf{A}'_p &
\end{array}
$$

ii) Se **A** é do tipo $\neg$**C**, então $\neg$**A** é $\neg\neg$**C**. Neste caso, a trivialização obtida na prova subordinada é dada pelas fórmulas $\neg$**C** e $(\neg\mathbf{C})^{(n)}$, isto é, pelas fórmulas **A** e $\mathbf{A}^{(n)}$, que devem, como no caso anterior, ocorrer necessariamente em Π_2; ou a trivialização obtida é dada pelas fórmulas **C**, $\neg$**C** e $\mathbf{C}^{(n)}$; o que nos diz que **A** ($\neg$**C**) e $\mathbf{C}^{(n)}$ ocorrem necessariamente em Π_2.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{lll}
 & \Pi_2 & \\
 & \mathbf{A}'_1 & \\
 & \vdots & \\
 & \neg\mathbf{C} & \\
 & \vdots & \\
 & (\neg\mathbf{C})^{(n)} & \\
 & \vdots & \\
 & & \begin{array}{|lll} \neg\neg\mathbf{C} & (\neg\mathbf{A}) & \qquad \text{suposição} \\ \neg\mathbf{C} & (\mathbf{A}) & \\ (\neg\mathbf{C})^{(n)} & (\mathbf{A}^{(n)}) & \end{array} \\
\neg\neg\neg\mathbf{C} & & \qquad (\neg\neg\mathbf{A}) \quad \text{I - }\neg\text{(res)} \\
 & \vdots & \\
 & \mathbf{A}'_p &
\end{array}
$$

iii) Se **A** é do tipo **C&D**, então a prova subordinada, a partir da suposição ¬(**C&D**), só pode ser trivializada se as componentes **C** e **D** de **A**, e $\mathbf{C}^{(n)}$ e $\mathbf{D}^{(n)}$ ocorrem necessariamente em Π_2; ou as componentes $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$ e $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_s$ de **C** e **D** são tais que $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_s, \mathbf{C}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{C}_r^{(n)}, \mathbf{D}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{D}_s^{(n)}$ ocorrem em Π_2.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{llll}
\Pi_2 & & & \\
\mathbf{A}'_1 & & & \\
\vdots & & & \\
& \vert\ \neg(\mathbf{C}\&\mathbf{D}) & & \text{suposição} \\
& \vert\ \neg\mathbf{C}\lor\neg\mathbf{D} & & \text{DNC} \\
& \vert & \vert\ \neg\mathbf{C} & \text{suposição} \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \mathbf{E} & \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \neg\mathbf{E} & \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \mathbf{E}^{(n)} & \\
& \vert & \vert\ \neg\mathbf{D} & \text{suposição} \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \mathbf{E} & \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \neg\mathbf{E} & \\
& \vert & \vert\ \vdots & \\
& \vert & \vert\ \mathbf{E}^{(n)} & \\
& \vert\ \mathbf{E} & & \text{E - }\lor \\
& \vert\ \neg\mathbf{E} & & \text{E - }\lor \\
& \vert\ \mathbf{E}^{(n)} & & \text{E - }\lor \\
\neg\neg(\mathbf{C}\&\mathbf{D}) & & & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\vdots & & & \\
\mathbf{A}'_p & & &
\end{array}
$$

iv) Se **A** é do tipo $\mathbf{C}\vee\mathbf{D}$, então na prova subordinada, para podermos obter $\neg\mathbf{C}_1\&\neg\mathbf{D}$, necessitamos das ocorrências anteriores das fórmulas $\mathbf{C}^{(n)}$ e $\mathbf{D}^{(n)}$ em Π_2.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{lll}
\Pi_2 & & \\
\mathbf{A}'_1 & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{C}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{D}^{(n)}) & \\
\vdots & & \\
\mathbf{D}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{C}^{(n)}) & \\
\vdots & & \\
 & \begin{array}{|lll}
\neg(\mathbf{C}\vee\mathbf{D}) & (\neg\mathbf{A}) & \text{suposição} \\
\mathbf{C}^{(n)} & & \text{Reit} \\
\mathbf{D}^{(n)} & & \text{Reit} \\
\neg\mathbf{C}\&\neg\mathbf{D} & & \text{DND} \\
\vdots & & \\
\mathbf{E} & & \\
\vdots & & \\
\neg\mathbf{E} & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{E}^{(n)} & &
\end{array} & \\
\neg\neg(\mathbf{C}\vee\mathbf{D}) & (\neg\neg\mathbf{A}) & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\vdots & & \\
\mathbf{A}'_p & &
\end{array}
$$

Como nos casos anteriores estudados, para obtermos uma trivialização na prova subordinada é necessário que a fórmula **C** ou a fórmula **D** (componentes de **A**) ocorra na prova subordinada pela Regra Reit, isto é, **C** ou **D** ocorre anteriormente na prova Π_2; ou é necessário que componentes de **C**, ou componentes de **D** ocorram na prova subordinada por aplicação da Regra Reit, isto é, já ocorrem em Π_2.

v) Se **A** é do tipo $\mathbf{C}\supset\mathbf{D}$, como no caso anterior, $\mathbf{C}^{(n)}$ e $\mathbf{D}^{(n)}$ já devem ter ocorrido em Π_2.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{ll}
\Pi_2 & \\
\mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & \\
\mathbf{C}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{D}^{(n)}) \\
\vdots & \\
\mathbf{D}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{C}^{(n)}) \\
\vdots & \\
 & \left|\begin{array}{lll}
\neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D}) & (\neg\mathbf{A}) & \text{suposição} \\
\mathbf{C}^{(n)} & & \text{Reit} \\
\mathbf{D}^{(n)} & & \text{Reit} \\
\mathbf{C}\&\neg\mathbf{D} & & \text{DNI} \\
\mathbf{C} & & \text{E - \&} \\
\neg\mathbf{D} & & \text{E - \&} \\
\vdots & & \\
\mathbf{E} & & \\
\vdots & & \\
\neg\mathbf{E} & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{E}^{(n)} & &
\end{array}\right. \\
\neg\neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D}) & \qquad\qquad (\neg\neg\mathbf{A})\ \text{I - }\neg(\text{res}) \\
\vdots & \\
\mathbf{A}'_p &
\end{array}$$

Neste caso, de acordo com o esquema anterior, a trivialização da prova subordinada, a partir de $\neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D})$, só será possível se tivermos uma trivialização a partir de $\mathbf{C}\&\neg\mathbf{D}$, isto é, a partir de **C**, ou a partir de $\neg\mathbf{D}$, ou de componentes de ambas. Aqui, teríamos que $\neg\mathbf{C}$ deveria ocorrer na prova subordinada por aplicação da Regra Reit (isto é, $\neg\mathbf{C}$ já ocorria em

Π_2), ou que **D** deveria ocorrer na prova subordinada por aplicação da Regra Reit (isto é, **D** já ocorria em Π_2); ocorre ainda o caso em que **C** e **D** não são fórmulas atômicas e, neste caso, como em caso anteriores, as componentes $\mathbf{C}_1, ..., \mathbf{C}_r$ e $\mathbf{D}_1, ..., \mathbf{D}_s$ de **C** e **D** são tais que $\mathbf{C}_1^{(n)}, ..., \mathbf{C}_r^{(n)}, \mathbf{D}_1^{(n)}, ..., \mathbf{D}_s^{(n)}$ já ocorrem em Π_2, e $\mathbf{C}_1, ..., \mathbf{C}_r$ ocorrem em Π_2 ou $\mathbf{D}_1, ..., \mathbf{D}_s$ ocorrem em Π_2.

Temos dois casos a considerar: se $\neg\mathbf{C}$ está em Π_2 e se **D** está em Π_2.

Se $\neg\mathbf{C}$ ocorre em Π_2,como Π_2 é uma redução normal de Π_1, então $\neg\mathbf{C}$ só pode ter sido introduzida pela Regra I - $\neg$(rest), a partir de **C**; se **C** é fórmula atômica, a trivialização a partir de **C** conduziria à trivialização de Π_2. Logo, não é o caso que $\neg\mathbf{C}$ ocorre na prova subordinada por aplicação da Regra Reit, isto é, $\neg\mathbf{C}$ não pode ocorrer em Π_2.

Portanto, a fórmula que conduz à trivialização da prova subordinada a partir de $\neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D})$ é a fórmula $\neg\mathbf{D}$; logo, **D** ocorre na prova subordinada por aplicação da Regra Reit, isto é, **D** ocorre em Π_2.

Portanto, Π_2 pode ser esquematizada por:

$$\begin{array}{lllll}
 & \Pi_2 & & & \\
 & \mathbf{A}'_1 & & & \\
 & \vdots & & & \\
 & \mathbf{C}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{C}_1^{(n)}, ..., \mathbf{C}_r^{(n)}) & & \\
 & \vdots & & & \\
 & \mathbf{D}^{(n)} & (\text{ou } \mathbf{D}_1^{(n)}, ..., \mathbf{D}_s^{(n)}) & & \\
 & \vdots & & & \\
 & \mathbf{D} & & & \\
 & \vdots & & & \\
 & & \vline\; \neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D}) & (\neg\mathbf{A}) & \text{suposição} \\
 & & \vline\; \mathbf{C}^{(n)} & & \text{Reit} \\
 & & \vline\; \mathbf{D}^{(n)} & & \text{Reit} \\
 & & \vline\; \mathbf{C}\&\neg\mathbf{D} & & \text{DNI} \\
 & & \vline\; \mathbf{C} & & \text{E - \&} \\
 & & \vline\; \neg\mathbf{D} & & \text{E - \&} \\
 & & \vline\; \mathbf{D} & & \text{Reit} \\
\neg\neg(\mathbf{C}\supset\mathbf{D}) & & & (\neg\neg\mathbf{A}) & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\vdots & & & & \\
\mathbf{A}'_p & & & &
\end{array}$$

Agora, nos 5 (cinco) casos acima, se Π_3 fosse trivial, como Π_2 é não-trivial, então as fórmulas $\neg$**A** e **A**$^{(n)}$ ocorreriam necessariamente em Π_2. Entretanto, acabamos de ver que, em Π_2, em uma prova subordinada a partir de $\neg$**A** deduzimos uma trivialização. Assim, por raciocínio idêntico ao de casos anteriores, uma redução direta de Π_2 seria trivial.

Logo, Π_3 é não-trivial.

Para finalizarmos este caso (3.15), vejamos como podemos verificar que Π_3 é uma redução normal de Π. De acordo com o grau de complexidade da fórmula **A**, acabamos de provar que:

(i) **A** ocorre na prova principal, então a introdução de **A** em Π_3 pode ser justificada pela Regra de Repetição;

(ii) **A** ocorre na prova principal, como no caso acima;

(iii) Se **A** é do tipo **C&D**, então as fórmulas **C** e **D** ocorrem na prova principal, e então **A** pode ser justificada, em Π_3, pela Regra I - &;

(iv) Se **A** é do tipo **C**$\vee$**D**, então a fórmula **C**, ou a fórmula **D**, ocorre na prova principal, então **A** pode ser justificada, em Π_3, pela Regra I - $\vee$;

(v) Se **A** é do tipo **C**$\supset$**D**, então a fórmula **D** ocorre na prova principal; então **A** pode ser justificada, em Π_3, pela Regra I - $\supset$;

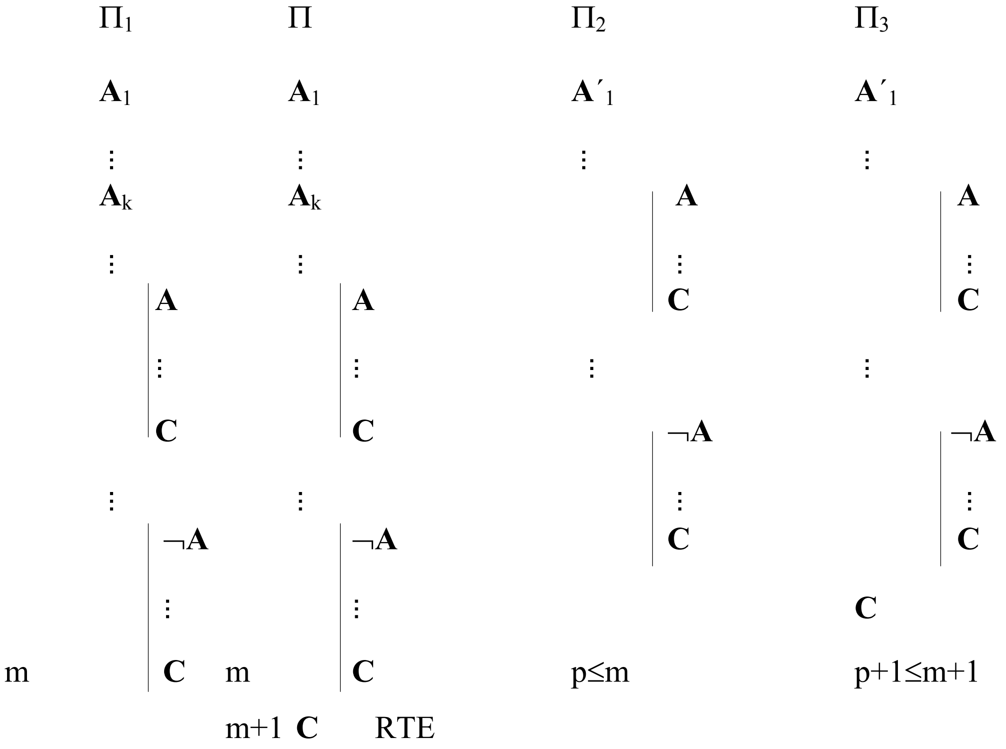
Assim, o acréscimo da fórmula **A** no final de Π_2, pode ser justificado, em todos os casos possíveis, por Regras de Introdução.

Logo, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal de Π.

3.2.12) O último item de Π tem a Regra do Terceiro-Excluído (RTE) como justificativa.

Seja **C** o último item de uma prova Π, na qual **C** é resultante da prova subordinada com suposição **A** e conclusão **C**, e da prova subordinada com suposição $\neg$**A** e conclusão **C**. Seja Π_1 a prova que resulta de Π retirando-se esse último item.

Esquematicamente:



Se Π_3 for trivial, como Π_2 é não-trivial, então as fórmulas $\neg$**C** e $\mathbf{C}^{(n)}$ devem necessariamente ocorrer em Π_2.

Entretanto, como **C** ocorre em Π_1 e, portanto, em Π_2, então Π_2 seria trivial, mesmo que $\neg$**C** ou $\mathbf{C}^{(n)}$ ocorressem em Π_2 em uma das duas provas subordinadas.

Logo, como **C** é introduzida por uma Regra Especial, Π_3 é uma redução normal não-trivial de Π, de comprimento ≤m+1.

3.2.13) O último item de Π tem como justificativa a Regra DNC.

Seja $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ este último item de Π. Seja Π_1 a prova que resulta ao retirarmos $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ de Π, e Π_2 uma redução de Π_1 onde todos os seus itens são justificados por Regras de Introdução ou por Regra Especial . Seja Π_3 a prova que resulta de Π_2 acrescentando-se $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$, e suponhamos que Π_3 seja trivial.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{lllllllll}
\Pi_1 & & \Pi & \Pi_2 & & & \Pi_3 & & \\
\mathbf{A}_1 & 1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1 & & & \mathbf{A}'_1 & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\
\mathbf{A}_k & k & \mathbf{A}_k & \mathbf{A}'_q & & & \mathbf{A}'_q & & \\
\vdots & & \vdots & & \vert & \mathbf{A}\&\mathbf{B} & & \vert & \mathbf{A}\&\mathbf{B} \\
\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) & q & \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) & & \vert & \mathbf{A} & & \vert & \mathbf{A} \\
\vdots & & \vdots & & \vert & \mathbf{B} & & \vert & \mathbf{B} \\
\mathbf{A}_m & m & \mathbf{A}_m & & \vert & \vdots & & \vert & \vdots \\
 & m+1 & \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B} & & \vert & \mathbf{C} & & \vert & \mathbf{C} \\
 & & & & \vert & \vdots & & \vert & \vdots \\
 & & & & \vert & \neg\mathbf{C} & & \vert & \neg\mathbf{C} \\
 & & & & \vert & \vdots & & \vert & \vdots \\
 & & & & \vert & \mathbf{C}^{(n)} & & \vert & \mathbf{C}^{(n)} \\
 & & & \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) & & \text{I - }\neg\text{(res)} & \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) & & \text{I-}\neg\text{(res)} \\
 & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & & \mathbf{A}'_p & & & \mathbf{A}'_p & & \\
 & & & p \leq m & & & \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B} & & \\
 & & & & & & p+1\leq m+1 & &
\end{array}$$

Se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente as fórmulas $\neg(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})$ e $(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})^{(n)}$.

Como nos casos anteriores, se em Π_2 ocorre a fórmula $(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})^{(n)}$, então as fórmulas $(\neg\mathbf{A})^{(n)}$ e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$ ocorrem necessariamente como passos anteriores de Π_2. Também é o caso das fórmulas $\mathbf{A}^{(n)}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$ e das fórmulas $(\mathbf{C}_i)^{(n)}$, $1\leq i\leq u$, na prova principal, onde os $\mathbf{C}_i$ são as componentes de **A** e **B**.

Se a fórmula $\neg(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})$ ocorre em Π_2, então ela é necessariamente introduzida por aplicação da Regra I - ¬(res), a partir da fórmula $\neg\mathbf{A}\vee\neg$B. Porém, a única possibilidade de se obter uma trivialização, em uma prova subordinada cuja suposição é $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$, é que de

¬**A** e de ¬**B** sejam obtidas trivializações, logo, na prova subordinada ocorrem necessariamente ¬¬**A** e ¬¬**B**.

Entretanto, como ¬(**A&B**) ocorre em Π_2, introduzida por uma Regra de Introdução ou por uma Regra Especial, então ela ocorre por aplicação da Regra I - ¬(rest), em uma prova subordinada cuja suposição é a fórmula **A&B**. Logo, a partir de **A**, ou a partir de **B**, obtém-se em Π_2, uma trivialização **C**, ¬**C** e $\mathbf{C}^{(n)}$; o que garante que ¬**A** (ou ¬**B**) ocorre necessariamente em Π_2, não como suposição de uma prova subordinada. Nessas condições, ¬**A**, ¬¬**A** e $(\neg\mathbf{A})^{(n)}$ (ou ¬**B**, ¬¬**B** e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$) ocorreriam em Π_2, o que tornaria Π_2 trivial.

Esquematicamente:

$$
\begin{array}{llll}
\Pi_2 & & & \\
\mathbf{A}'_1 & & & \\
\vdots & & & \\
 & \mid\ \mathbf{A\&B} & & \text{suposição} \\
 & \mid\ \mathbf{A} & & \text{E - \&} \\
 & \mid\ \mathbf{B} & & \text{E - \&} \\
 & \mid\ \vdots & & \\
 & \mid & \mid\ \mathbf{A}\ \text{(ou } \mathbf{B}\text{)} & \text{suposição} \\
 & \mid & \mid\ \vdots & \\
 & \mid & \mid\ \mathbf{C} & \\
 & \mid & \mid\ \vdots & \\
 & \mid & \mid\ \neg\mathbf{C} & \\
 & \mid & \mid\ \vdots & \\
 & \mid & \mid\ \mathbf{C}^{(n)} & \\
 & \mid\ \neg\mathbf{A}\ \text{(ou } \neg\mathbf{B}\text{)} & & \text{I - }\neg\text{(rest)} \\
\neg(\mathbf{A\&B}) & & & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\vdots & & & \\
(\neg\mathbf{A})^{(n)} & & & \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

$(\neg\mathbf{B})^{(n)}$	
$\vdots$	
$(\neg\mathbf{A}\lor\neg\mathbf{B})^{(n)}$	
$\vdots$	
$\mid\ \neg\mathbf{A}\lor\neg\mathbf{B}$	suposição
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}$	suposição
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{D}$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{D}$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{D}^{(n)}$	
$\mid\ \neg\neg\mathbf{A}$	I - ¬(res)
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{B}$	suposição
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{D}$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{D}$	
$\mid\ \mid\ \vdots$	
$\mid\ \mid\ \mathbf{D}^{(n)}$	
$\mid\ \neg\neg\mathbf{B}$	I - ¬(res)
$\mid\ \mathbf{D}$	E - ∨
$\mid\ \neg\mathbf{D}$	E - ∨
$\mid\ \mathbf{D}^{(n)}$	E - ∨
$\neg(\neg\mathbf{A}\lor\neg\mathbf{B})$	I - ¬(res)
$\vdots$	
$\mathbf{A}'_p$	

Caso a trivialização nas provas subordinadas acima ocorra devido a componentes de **A** e de **B**, ocorreria a trivialização de Π_2, pois essas componentes $(\mathbf{D}_j)^{(n)}$, $1 \leq j \leq q$ $(q \leq r)$, são tais que $(\mathbf{D}_j)^{(n)}$ ocorre anteriormente na prova principal.

Portanto, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal de Π, de comprimento $\leq m+1$.

3.2.14) O último item de Π tem como justificativa a Regra DND(rest).

Seja $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ o último item de Π, obtido por aplicação da Regra DND(rest).

Esquematicamente:

Π_1		Π		Π_2
$\mathbf{A}_1$	1	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}'_1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{A}^{(n)}$	q	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	$\mathbf{A}^{(n)}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{B}^{(n)}$	r	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	$\mathbf{B}^{(n)}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	s	$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$		$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{A}_m$		$\mathbf{A}_m$		$\mathbf{A}'_p$
	m+1	$\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DND(rest)	$p \leq m$

Como a fórmula $\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$ ocorre em Π_2, justificada pela Regra I - $\neg$(rest), de acordo com o caso já analisado, as fórmulas $\neg\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{B}$ ocorrem na prova subordinada cuja suposição é $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$.

Se Π_3 for trivial, como Π_2 é não-trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente as fórmulas $\neg(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ e $(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$.

Como nos casos anteriores, se $(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$ ocorre em Π_2, então as fórmulas $(\neg\mathbf{A})^{(n)}$ e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$ ocorrem necessariamente em Π_2, em passos anteriores.

Se a fórmula $\neg(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ ocorre em Π_2, então ela só pode ser obtida por aplicação da Regra I - (rest), a partir da fórmula $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$. Entretanto, neste caso, só seria possível uma trivialização, a partir de $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, se tivéssemos uma trivialização a partir de $\neg\mathbf{A}$, ou a partir de $\neg\mathbf{B}$, ou de componentes de ambas; o que resultaria, necessariamente, na prova subordinada cuja suposição é $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}$, ou a fórmula $\neg\neg\mathbf{B}$, no primeiro ou no segundo caso – no primeiro caso, teríamos na prova Π_2 as fórmulas $\neg\mathbf{A}$, $\neg\neg\mathbf{A}$ e $(\neg\mathbf{A})^{(n)}$ e, no segundo caso, teríamos as fórmulas $\neg\mathbf{B}$, $\neg\neg\mathbf{B}$ e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$; no terceiro caso, a trivialização seria devida a componentes de **A** e **B** e, como nos situações anteriores, também ocorreria a trivialização de Π_2.

Portanto, Π_3 não pode ser trivial.

$$\begin{array}{l}
\Pi_2\\
\mathbf{A}'_1\\
\vdots\\
\mathbf{A}^{(n)}\\
\vdots\\
\mathbf{B}^{(n)}\\
\vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{|l|ll}
\mathbf{A}\vee\mathbf{B} & & \text{suposição}\\
 & \mathbf{A} & \text{suposição}\\
 & \vdots & \\
 & \mathbf{C} & \\
 & \vdots & \\
 & \neg\mathbf{C} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathbf{C}^{(n)} & \\
\neg\mathbf{A} & & \text{I - }\neg\text{(res)}\\
 & \mathbf{B} & \text{suposição}\\
 & \vdots & \\
 & \mathbf{C} & \\
 & \vdots &
\end{array}$$

| | $\neg\mathbf{C}$
| | ⋮
| | $\mathbf{C}^{(n)}$
| $\neg\mathbf{B}$ I - ¬(res)
| $\mathbf{C}$
| ⋮
| $\neg\mathbf{C}$
| ⋮
| $\mathbf{C}^{(n)}$
$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$ I - ¬(rest)
⋮
$(\neg\mathbf{A})^{(n)}$
⋮
$(\neg\mathbf{B})^{(n)}$
⋮
$(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$
⋮
| $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ suposição
| $\neg\mathbf{A}$ E - &
| $\neg\mathbf{B}$ E - &
| ⋮
| $\mathbf{D}$
| ⋮
| $\neg\mathbf{D}$
| ⋮
| $\mathbf{D}^{(n)}$
$\neg(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ I - ¬ (rest)
⋮
$\mathbf{A}'_p$

Acrescentando-se a Π_2 a fórmula $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ obtemos Π_3, que é não-trivial e constitui uma redução normal de Π, de comprimento $\leq m+1$.

Como caso particular, a trivialização poderia ser obtida numa prova subordinada a partir de $\neg\mathbf{A}$ (ou $\neg\mathbf{B}$):

$$\begin{array}{l}
\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} \\
\neg\mathbf{A} \\
\neg\mathbf{B} \\
\quad \begin{array}{|l}
\neg\mathbf{A} \\
\vdots \\
\mathbf{D} \\
\vdots \\
\neg\mathbf{D} \\
\vdots \\
\mathbf{D}^{(n)}
\end{array} \\
\neg\neg\mathbf{A}
\end{array}$$

E a prova reduzida seria:

$$\begin{array}{l}
\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} \\
\neg\mathbf{A} \\
\vdots \\
\mathbf{D} \\
\vdots \\
\neg\mathbf{D} \\
\vdots \\
\mathbf{D}^{(n)} \\
\neg\mathbf{B} \\
\neg\neg\mathbf{A}
\end{array}$$

3.2.15) O último item de Π tem como justificativa a Regra DNI(rest).

Seja $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ o último item de Π, obtido por aplicação da Regra DNI(rest).

Esquematicamente:

Π_1		Π		Π_2
$\mathbf{A}_1$	1	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}'_1$
⋮		⋮		⋮
$\mathbf{A}^{(n)}$	q	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	$\mathbf{A}^{(n)}$
⋮		⋮		⋮
$\mathbf{B}^{(n)}$	r	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	$\mathbf{B}^{(n)}$
⋮		⋮		⋮
$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	s	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$		$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$
⋮		⋮		⋮
$\mathbf{A}_m$	m	$\mathbf{A}_m$		$\mathbf{A}'_p$
	m+1	$\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DNI(rest)	$p\leq m$

Como a fórmula $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ ocorre em Π_2, justificada pela Regra I - $\neg$(rest), a partir da fórmula $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$, então nessa prova subordinada ocorrem necessariamente as fórmulas $\neg\neg\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{B}$.

Se Π_3 for trivial, como Π_2 é não-trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente as fórmulas $\neg(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ e $(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$.

Como nos casos anteriores, se $(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$ ocorre em Π_2, então as fórmulas $(\neg\neg\mathbf{A})^{(n)}$ e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$ a antecedem em Π_2.

A fórmula $\neg(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ só pode ocorrer em Π_2 por aplicação da Regra I - $\neg$(rest), a partir da suposição $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$. Entretanto, de $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ podemos obter uma trivialização se, e somente se, a obtivermos a partir de $\neg\neg\mathbf{A}$, ou a partir de $\neg\mathbf{B}$, ou de componentes de ambas – no primeiro caso, teríamos necessariamente na prova subordinada a fórmula $\neg\neg\neg\mathbf{A}$ e, no segundo caso, a fórmula $\neg\neg\mathbf{B}$; no caso da trivialização devida a componentes de $\neg\neg\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{B}$, também ocorreria a trivialização de Π_2, como em situações anteriores.

Nos dois primeiros casos, teríamos uma trivialização em Π_2, pelas fórmulas $\neg\neg\mathbf{A}$, $\neg\neg\neg\mathbf{A}$ e $(\neg\neg\mathbf{A})^{(n)}$ e, no segundo caso, teríamos as fórmulas $\neg\mathbf{B}$, $\neg\neg\mathbf{B}$ e $(\neg\mathbf{B})^{(n)}$.

$$\begin{array}{ll}
\Pi_2 & \\
\mathbf{A}'_1 & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}^{(n)} & \\
\vdots & \\
\mathbf{B}^{(n)} & \\
\vdots & \\
\quad \mid \; \mathbf{A}\supset\mathbf{B} & \text{suposição} \\
\quad \mid \; \quad \vdots & \\
\quad \mid \; \neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B} & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \neg\mathbf{A} & \text{suposição} \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \neg\mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \mathbf{C}^{(n)} & \\
\quad \mid \; \neg\neg\mathbf{A} & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \mathbf{B} & \text{suposição} \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \neg\mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \vdots & \\
\quad \mid \; \quad \mid \; \mathbf{C}^{(n)} & \\
\quad \mid \; \neg\mathbf{B} & \text{I - }\neg\text{(res)} \\
\quad \mid \; \mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \neg\mathbf{C} & \\
\quad \mid \; \mathbf{C}^{(n)} & \\
\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) & \text{I - }\neg\text{(rest)}
\end{array}$$

$\vdots$

$(\neg\neg\mathbf{A})^{(n)}$

$\vdots$

$(\neg\mathbf{B})^{(n)}$

$\vdots$

$(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})^{(n)}$

$\vdots$

$\mid\ \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$ suposição

$\mid\ \neg\neg\mathbf{A}$ E - &

$\mid\ \neg\mathbf{B}$ E - &

$\mid\ \mid\ \neg\neg\mathbf{A}$ (ou $\neg\mathbf{B}$) suposição

$\mid\ \mid\ \vdots$

$\mid\ \mid\ \mathbf{D}$

$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{D}$

$\mid\ \mid\ \mathbf{D}^{(n)}$

$\mid\ \neg\neg\neg\mathbf{A}$ (ou $\neg\neg\mathbf{B}$) I - $\neg$(rest)

$\mid\ \mathbf{D}$

$\mid\ \neg\mathbf{D}$

$\mid\ \mathbf{D}^{(n)}$

$\neg(\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$ I - $\neg$(rest)

$\vdots$

$\mathbf{A}'_p$

Logo, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal de Π, de comprimento $\leq m+1$.

Com os casos 3.1 a 3.2.15, completamos a demonstração do teorema. □

2.6 NORMALIZAÇÃO PARA O SISTEMA DNC$_\omega$

A seguir, apresentamos a definição de prova categórica consistente (não-trivial) e de prova categórica normal para **DNC**$_\omega$.

Definição 2.6.1 Uma prova categórica Π em **DNC**$_\omega$ é *normal* se, e somente se, a ocorrência de toda fórmula, que ocorre como um passo de Π, pode ser justificada por uma Regra de Introdução ou pela Regra do Terceiro-Excluído (RTE), com possível exceção das fórmulas de suas provas subordinadas.

Definição 2.6.2 No sistema **DNC**$_\omega$, uma prova categórica Π é *consistente* (*não-trivial*) se, e somente se, não existe qualquer fórmula **A** tal que **A** e ¬**A** ocorrem como itens de Π, exceção feita ao caso da ocorrência de quaisquer dessas fórmulas apenas como suposição de prova subordinada; caso contrário, Π é *inconsistente* (*trivial*).

Teorema 2.6.3 (**Teorema Fundamental**). Toda prova categórica Π, em **DNC**$_\omega$, de comprimento menor ou igual a *s* é consistente (não-trivial), e tem pelo menos uma redução Σ que é consistente (não-trivial), normal e cujo comprimento não é maior que o comprimento de Π.

Demonstração:

Como no caso do Teorema Fundamental para os sistemas **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, fazemos a prova por indução sobre o comprimento *s* da prova.

1) No caso em que Π é uma prova categórica de comprimento s = 1, a demonstração é idêntica à do Teorema 2.5.10.

2) Assumimos, como hipótese de indução, que o teorema se verifica nos casos em que *s* =m, isto é, nos casos em que o comprimento da prova categórica é ≤m.

3) Vamos demonstrar o teorema para o caso *s* = m+1, isto é, em que a prova Π tem comprimento s ≤ m+1.

Se Π tem m+1 passos, seja Π_1 a prova que resulta, de Π, retirando-se o último item. Como Π_1 tem comprimento ≤m, então, por hipótese de indução, Π_1 é consistente e tem uma redução consistente normal Π_2, de comprimento menor ou igual a m. As fórmulas que ocorrem como ítens de Π_1 também ocorrem em Π_2, e cada item de Π_2 tem uma Regra de Introdução ou a Regra do Terceiro-Excluído como justificativa.

Como no Teorema 2.5.10, temos que analisar todos os casos possíveis, de acordo com as regras do sistema.

3.1) Nos casos em que Π tem apenas um item, ou tem mais que um item e o último item da prova Π é uma prova subordinada, ou o último item de Π é obtido por aplicação da Regra de Repetição (R), a demonstração é idêntica à do Teorema 2.5.10.

3.2) Consideremos o caso em que o último item de Π tem a Regra I - ⊃ como justificativa.

Sejam **A⊃B** o último item de uma prova Π, e Π_1 a prova que resulta de Π retirando-se esse último item. Pela hipótese de indução, como Π_1 tem comprimento m, seja Π_2 uma redução consistente de Π_1, de comprimento ≤m, cujos itens são justificados apenas por Regras de Introdução ou por RTE. Seja Π_3 a prova que resulta ao acrescentarmos (**A⊃B**) em Π_2.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{llllllll}
 & \Pi_1 & & \Pi & & \Pi_2 & & \Pi_3 \\
 & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}_1 & & \mathbf{A}'_1 & & \mathbf{A}'_1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \mathbf{A}_{m-k} & & \mathbf{A}_{m-k} & & \mathbf{A}'_{p-d} & & \mathbf{A}'_{p-d} \\
 & \quad \mid \mathbf{A} & & \quad \mid \mathbf{A} & & \quad \mid \mathbf{A} & & \quad \mid \mathbf{A} \\
 & \quad \mid \vdots & & \quad \mid \vdots & & \quad \mid \vdots & & \quad \mid \vdots \\
m & \quad \mid \mathbf{B} & & \quad \mid \mathbf{B} & p & \quad \mid \mathbf{B} & & \quad \mid \mathbf{B} \\
 & & m+1 & \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \quad (I - \supset) & & p\leq m & p+1 & \mathbf{A}\supset\mathbf{B} \quad (I - \supset)
\end{array}$$

Suponhamos que Π_3 seja inconsistente (trivial).

Como Π_2 é consistente (não-trivial), então Π_3 – e, portanto Π_2 – deveria ter necessariamente como item a fórmula $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, justificada, em $\mathbf{DNC}_\omega$, por uma Regra de Introdução ou por RTE. Como, em $\mathbf{DNC}_\omega$, não há Regra de Introdução da Negação, a fórmula $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ não ocorre em Π_2 e, portanto, Π_3 é consistente.

Portanto, como $\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$ é justificada pela Regra I - $\supset$, Π_3 é uma redução normal consistente de Π_2, de comprimento $\leq$m+1.

3.3) Nos casos em que o último item de Π tem como justificativa a Regra I - &, ou a Regra I - $\vee$, ou a Regra do Terceiro-Excluído, ou a Regra E - &, ou a Regra E - $\vee$, ou a Regra E - $\supset$, a demonstração é feita como no caso anterior e na demonstração do Teorema 2.5.10.

3.4) O último item de Π tem a Regra E - $\neg\neg$ como justificativa.

Seja $\mathbf{A}$ a última fórmula de Π, obtida a partir da fórmula $\neg\neg\mathbf{A}$, por aplicação da Regra E - $\neg\neg$.

Esquematicamente:

Π_1		Π	Π_2	Π_3
$\mathbf{A}_1$	1	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}'_1$	$\mathbf{A}'_1$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\neg\neg\mathbf{A}$		$\neg\neg\mathbf{A}$	$\neg\neg\mathbf{A}$	$\neg\neg\mathbf{A}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{A}_m$		$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{A}'_p$	$\mathbf{A}'_p$
	m+1	$\mathbf{A}$	p$\leq$m	$\mathbf{A}$
				p+1$\leq$m+1

Por hipótese de indução, Π_2 é uma redução normal consistente de Π_1, isto é, em Π_2 ocorre a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}$, justificada por uma Regra de Introdução ou por RTE.

Entretanto, em $\mathbf{DNC}_\omega$, não há Regra de Introdução da Negação que justifique a ocorrência de fórmula do tipo $\neg\neg\mathbf{A}$ em Π_2.

Da mesma forma, em $\mathbf{DNC}_{\omega}$, a Regra do Terceiro-Excluído não pode justificar a ocorrência de $\neg\neg\mathbf{A}$ em Π_2, pois, não existem Regras que justifiquem a prova de $\neg\neg\mathbf{A}$ a partir de uma fórmula **C** e a partir da fórmula $\neg\mathbf{C}$

Portanto, em $\mathbf{DNC}_{\omega}$, uma fórmula do tipo $\neg\neg\mathbf{A}$ não pode ocorrer como item na prova categórica normal Π_2.

Então, em $\mathbf{DNC}_{\omega}$, não pode existir uma prova categórica nas condições deste caso.

□

2.7 A NÃO-TRIVIALIDADE E A PROPRIEDADE DE SUBFÓRMULA DOS SISTEMAS DNC$_n$, 1≤n≤ω.

Nesta seção, como conseqüência dos Teoremas de Normalização, demonstramos que os sistemas de dedução natural de nossa hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são não-triviais.

Além disso, demonstramos que vale, para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, uma propriedade específica de subfórmula

Teorema 2.7.1 Qualquer fórmula da forma $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(n)}$ não é demonstrável no sistema $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$. Isto é:

$$\nvdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(n)}.$$

Demonstração:

Pelo Teorema Fundamental (Teorema 2.5.10), se existir uma prova categórica Π de $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(n)}$ em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, existe uma redução normal não-trivial Π' de Π.

Portanto, $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(n)}$ seria justificada, em Π', por Regra de Introdução (Regra de Introdução da Conjunção). Então. em Π' ocorreriam necessariamente os ítens $\mathbf{A}, \neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$, o que trivializaria Π'.

Logo, não existe, em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, uma prova categórica de $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(n)}$. □

Teorema 2.7.2 Os sistemas **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, são não-triviais.

Demonstração:

Imediata, pela Definição 1.1.34 e pelo Teorema 2.7.1. □

Teorema 2.7.3 Os sistemas **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, são consistentes. □

Demonstração:

Seja a fórmula **A** e admitamos que existe uma prova de **A**, e existe uma prova de ¬**A**.

Então, pelo Teorema 2.5.10, existem uma prova normal de **A** e uma prova normal de ¬**A**, na qual a única justificativa possível para a prova da fórmula ¬**A** seria a Regra I - ¬(rest) aplicada à suposição **A**. Considerando-se, então, uma prova categórica, que seja uma redução direta das duas provas categóricas mencionadas, teríamos uma prova trivial de ¬**A**, o que não é possível pelo Teorema Fundamental. □

Teorema 2.7.4 No sistema **DNC**$_\omega$, não existe prova categórica de qualquer fórmula da forma ¬**A**. Isto é:

$$\nvdash_{\mathbf{DNC}_\omega} \neg \mathbf{A}.$$

Demonstração:

Se existir uma prova categórica de uma fórmula da forma ¬**A**, pelo Teorema Fundamental para **DNC**$_\omega$ (Teorema 2.6.3), existiria uma prova categórica normal Π de ¬**A** em **DNC**$_\omega$. Ou seja, existiria uma prova categórica normal de ¬**A**, na qual ¬**A** seria justificada por uma Regra de Introdução, o que não é possível em **DNC**$_\omega$. □

Corolário 2.7.5 ¬(**A**&¬**A**) não é teorema de **DNC**$_\omega$. □

Corolário 2.7.6 O sistema **DNC**$_\omega$ é consistente (e não-trivial). □

A seguir, definimos subfórmula.

Definição 2.7.7 Dada uma fórmula **A**:

i) **A** é *subfórmula* de **A**;

ii) Se $\neg\mathbf{B}$ é uma subfórmula de **A**, então **B** é uma *subfórmula* de **A**;

iii) Se $\mathbf{B}\&\mathbf{C}$, $\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ ou $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$ é uma subfórmula de **A**, então **B** e **C** são *subfórmulas* de **A**;

Teorema 2.7.8 (**Princípio de Subfórmula** para $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$). Toda ocorrência de uma fórmula, introduzida por Regra de Introdução, em uma prova categórica normal Π de **A**, em $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$, é subfórmula de **A**, com possível exceção das fórmulas que são suposições de aplicações da Regra do Terceiro-Excluído (RTE), ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras Especiais, ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras de Eliminação.

Demonstração:

Segue das características das Regras de Dedução dos sistemas $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n<\omega$, da definição de prova categórica normal, da definição de subfórmula e da demonstração do Teorema Fundamental para esses sistemas. □

Teorema 2.7.9 (**Princípio de Subfórmula** para $\mathbf{DNC}_\omega$). Toda ocorrência de uma fórmula, introduzida por Regra de Introdução, em uma prova categórica normal Π de **A**, em $\mathbf{DNC}_\omega$ é subfórmula de **A**, com possível exceção das fórmulas que são suposições de aplicações da Regra do Terceiro-Excluído (RTE), ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras de Eliminação.

Demonstração:

Segue das características das Regras de Dedução do sistema $\mathbf{DNC}_\omega$, da definição de prova categórica normal, da definição de subfórmula, e da demonstração do Teorema Fundamental para esse sistema. □

3 A HIERARQUIA DE SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_n}$*, $1\leq n\leq\omega$.

Neste capítulo, aplicamos o método de dedução natural, apresentado na Seção 2.1 do Capítulo 2 para os sistemas proposicionais $\mathbf{DNC}_n$, $1\leq n\leq\omega$, para a introdução dos sistemas quantificacionais $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n\leq\omega$.

Usamos as noções de prova formal, prova subordinada, suposição, prova por introdução e eliminação, etc., introduzidas no Capítulo 2.

Apresentamos a hierarquia de sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n\leq\omega$, e demonstramos a equivalência entre cada sistema $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n\leq\omega$, e o correspondente sistema da hierarquia $\mathbf{C}_n$*, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa.

Conforme mencionado no Capítulo 2 e apresentado no ANEXO 1, na literatura, além dos sistemas de dedução natural, *à la* Gentzen, associados aos cálculos proposicionais $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa, conhecemos apenas um “sistema de dedução natural” associado aos cálculos de predicados de da Costa – o sistema NC_ω*, introduzido em **Raggio 1978**, associado ao cálculo $\mathbf{C}_\omega$* de da Costa.

3.1 OS SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS PARACONSISTENTES DE PRIMEIRA ORDEM DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$

A linguagem, as definições, as convenções, as notações, etc., para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, são as mesmas de $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, apresentadas no Capítulo 1.

Os sistemas lógicos $\mathbf{DNC}_n^*$**,** $1 \leq n < \omega$, são constituídos por dezenove regras de dedução. As regras de dedução, para cada um dos sistemas $\mathbf{DNC}_n^*$, $1 \leq n < \omega$, são as regras introduzidas para os sistemas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, conforme a Seção 2.1, Capítulo 2, com Regras de Transporte específicas, e regras para os quantificadores.

3.1.1 Regras de transporte

Repetição (R): Numa prova, podemos transportar para o passo k, qualquer item $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, que já ocorreu como item anterior no passo i na prova, na forma $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, com $\mathbf{t}$ um termo que é livre para $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

1	$\mathbf{A}_1$	
2	$\mathbf{A}_2$	
⋮	⋮	
i	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}(\mathbf{t})$	i, R

Reiteração (Reit): Numa prova subordinada, podemos repetir qualquer item **A**(**x**), da prova da qual ela é subordinada, na forma **A**(**t**).

Restrição: **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

1	$\mathbf{A}_1$		
2	$\mathbf{A}_2$		
⋮	⋮		
i	**A**(**x**)		
⋮	⋮		
m		| **A**	
⋮		| ⋮	
p		| **A**(**t**)	i, Reit
⋮		| ⋮	
m+k		| **B**	
(m+k)+1	$\mathbf{A}_{(m+k)+1}$		

3.1.2 Regras de introdução

Introdução do Quantificador Universal (I - ∀): Se a partir de um conjunto de fórmulas {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$}, podemos deduzir uma conclusão **A**(**x**), então do conjunto {$\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{A}_k$} podemos deduzir como conclusão $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, isto é, ∀**xA**(**x**).

Restrição: a variável **x** não ocorre livre em quaisquer fórmulas das quais **A**(**x**) é resultante.

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
p	**A**(**x**)	
⋮	⋮	
t	∀**xA**(**x**)	p, I - ∀

Introdução do Quantificador Existencial (I - $\exists$): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir uma conclusão $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$, isto é, $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, na qual $\mathbf{A}_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ é o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de **t** em **A** por **x**.

Restrição: **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
p	$\mathbf{A}(\mathbf{t})$	
⋮	⋮	
t	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	p, I - $\exists$

3.1.3 Regras de eliminação

Eliminação do Quantificador Universal (E - $\forall$): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir uma conclusão $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$, isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{t})$.

Restrição: **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
p	$\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
⋮	⋮	
q	$\mathbf{A}(\mathbf{t})$	p, E - $\forall$

Eliminação do Quantificador Existencial (E - $\exists$): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir uma conclusão $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, e a partir do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\}$, onde $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ é uma suposição, podemos deduzir $\mathbf{C}$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\mathbf{C}$.

Restrição: $\mathbf{y}$ é uma variável que não ocorre livre em $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, em $\mathbf{C}$, ou em quaisquer outras fórmulas, além da suposição $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, das quais a ocorrência de $\mathbf{C}$ na prova subordinada é resultante.

$$\begin{array}{llll}
1 & \mathbf{A}_1 & & \\
\vdots & \vdots & & \\
k & \mathbf{A}_k & & \\
\vdots & \vdots & & \\
p & \exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & & \\
\vdots & \vdots & & \\
p+1 & & \vline\ \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) & \text{suposição} \\
\vdots & & \vline\ \vdots & \\
q & & \vline\ \mathbf{C} & \\
r & \mathbf{C} & & \text{p, (p+1)-q, E - }\exists
\end{array}$$

3.1.4 Regras Especiais

Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - $\neg\forall$): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir as fórmulas $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

$$\begin{array}{lll}
1 & \mathbf{A}_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \mathbf{A}_k & \\
\vdots & \vdots & \\
p & \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & (\text{ou } \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) \\
\vdots & \vdots & \\
q & \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & (\text{ou } \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})) \\
\vdots & \vdots & \\
t & \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \qquad\qquad p, q, \text{D} - \neg\forall
\end{array}$$

Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - $\neg\exists$): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir as fórmulas $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, então do mesmo conjunto $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

$$\begin{array}{lll}
1 & \mathbf{A}_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \mathbf{A}_k & \\
\vdots & \vdots & \\
p & \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & (\text{ou } \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) \\
\vdots & \vdots & \\
q & \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & (\text{ou } \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})) \\
\vdots & \vdots & \\
t & \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \qquad\qquad p, q, \text{D} - \neg\exists
\end{array}$$

3.2 O SISTEMA QUANTIFICACIONAL PARACONSISTENTE DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_\omega}$*

O sistema $\mathbf{DNC_\omega}$* de dedução natural é constituído pelas regras introduzidas para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n < \omega$, com exceção das Regras I - ¬(rest), DNC, DND(rest), DNI(rest), I - ∃¬, I - ∀¬. Ou seja, $\mathbf{DNC_\omega}$* tem como regras: Regra de Repetição, Regra de Reiteração, Introdução da Implicação, Introdução da Conjunção, Introdução da Disjunção, Eliminação da Implicação, Eliminação da Conjunção, Eliminação da Disjunção, Eliminação da Dupla Negação, Regra do Terceiro-Excluído, Introdução do Quantificador Universal, Introdução do Quantificador Existencial, Eliminação do Quantificador Universal e Eliminação do Quantificador Existencial.

Todas essas regras de dedução apresentam idêntica formulação à apresentada para $\mathbf{DNC_n}^*$, $1 \leq n < \omega$.

3.3 A EQUIVALÊNCIA LÓGICA ENTRE OS SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS AXIOMÁTICOS $\mathbf{C_n}$*, 1≤n≤ω, DE DA COSTA E OS CORRESPONDENTES SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{DNC_n}$*, 1≤n≤ω

A seguir, demonstramos a equivalência lógica entre os sistemas quantificacionais axiomáticos $\mathbf{C_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa e os correspondentes sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n \leq \omega$.

Teorema 3.3.1 Toda prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema quantificacional axiomático $\mathbf{C_n}$*, $1 \leq n < \omega$, de da Costa**,** pode ser transformada numa prova Π´ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n < \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{C_n *} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Por indução sobre o comprimento das provas de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{C}_n*$, $1\leq n<\omega$.

i) Seja comp(Π) = 1. Neste caso, podem ocorrer 2 (dois) casos.

i.1) Se $\mathbf{F}\in\Gamma$, então, pela Regra de Repetição, temos uma prova Π' de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{DNC}_n*$, $1\leq n<\omega$, isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F}.$$

i.2) Se **F** é um esquema de Axioma de $\mathbf{C}_n*$, $1\leq n<\omega$, demonstramos que existe uma prova de **F** em $\mathbf{DNC}_n*$, $1\leq n<\omega$. Observamos que, em cada axioma de $\mathbf{C}_n*$, $1\leq n<\omega$, são respeitadas as restrições mencionadas no Capítulo 1.

Para o caso dos Axiomas proposicionais e da Regra *Modus Ponens*, a demonstração é idêntica à da Seção 2.4. Apresentamos, aqui, as demonstrações para os Axiomas e Regras quantificacionais.

Axioma 15 $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{A}(\mathbf{t})$,

onde **x** é uma variável, **A**(**x**) é uma fórmula e **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

1	$\vert\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
2	$\vert\ \mathbf{A}(\mathbf{t})$, onde **t** é livre para **x** em **A**(**x**)	1, E - $\forall$
3	$\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{A}(\mathbf{t})$	1-2, I - $\supset$

Axioma 16 $\mathbf{A}(\mathbf{t})\supset\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$,

onde **x** é uma variável, **A**(**x**) é uma fórmula e **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

1	$\mid\ \mathbf{A}(\mathbf{t})$	suposição
2	$\mid\ \exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, com **t** livre para **x** em **A**(**x**)	I - ∃
3	$\mathbf{A}(\mathbf{t})\supset\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	1-2, I - ⊃

Axioma 17 $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

1	$\mid\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	suposição
2	$\mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
3	$\mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}\&...\&(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	2, Definição 1.1.3
4	$\mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})\vee\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2})\vee...\vee\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	3, DNC[9]
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	suposição
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))))$	5, Definição 1.1.1
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	6, E - ¬¬
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	7, E - &
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	7, E - &
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	1, 9, D - ¬∀
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$, com **y** livre para **x** em **A**(**x**)	suposição
12	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
13	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	8, Reiteração
14	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{y})$	13, E - ∀
15	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$	11, Reiteração
16	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
17	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ (\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	16, E - ∀
18	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	12-17, I - ¬(res)

---

[9] Para a brevidade da prova, empregamos a forma da aplicação reiterada da Regra DNC. Nas demons trações que se seguem, deverá estar subentendida a aplicação reiterada da Regra DNC.

19	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	18, E - $\neg\neg$
20	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	10, 11-19, E - $\exists$
21	$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2})$	suposição
22	$\neg(\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}))$	21, Definição 1.1.2
23	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	22, E - $\neg\neg$
24	$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	23, E - &
25	$\neg(\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))))$	24, Definição 1.1.1
26	$\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	25, E - $\neg\neg$
27	$\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	26, E - &
28	$\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	26, E - &
29	$\exists \mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	1, 28, D - $\neg\forall$
30	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$, com **y** livre para **x** em **A**(**x**)	suposição
31	$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
32	$\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	27, Reiteração
33	$\mathbf{A}(\mathbf{y})$	32, E - $\forall$
34	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$	30, Reiteração
35	$\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
36	$\mathbf{A}(\mathbf{y})^{(n)}$	35, E - $\forall$
37	$\neg\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	31-36, I - $\neg$(res)
38	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	37, E - $\neg\neg$
39	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	29, 30-38, E - $\exists$
⋮	⋮	
p	$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	suposição
p+1	$\neg(\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}))$	p, Definição 1.1.2
p+2	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}\&\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	(p+1), E - $\neg\neg$
p+3	$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	(p+2), E - &
p+4	$\neg(\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}))$	(p+3), Definição 1.1.2
p+5	$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	(p+4), E - $\neg\neg$

p+6	$\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-1})$	(p+5), E - &
p+7	$\neg(\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-2}\&\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-2}))$	(p+6), Definição 1.1.2
p+8	$((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-2}\&\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-2})$	(p+7), E - ¬¬
p+9	$\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{n-2})$	(p+8) E - &
⋮	⋮	
p+i	$\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{1})$	((p+i)-1), E - &
p+i+1	$\neg(\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))))$	(p+i), Definição 1.1.1
p+i+2	$\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))$	(p+i+1), E - ¬¬
p+i+3	$\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x})$	(p+i+2), E - &
p+i+4	$\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))$	(p+i+2), E - &
p+i+5	$\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	1, (p+i+4), D - ¬∀
p+i+6	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$, com **y** livre para **x** em **A**(**x**)	suposição
p+i+7	$\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
p+i+8	$\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x})$	(p+i+3), Reiteração
p+i+9	$\mathbf{A}(\mathbf{y})$	(p+i+8), E - ∀
p+i+10	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{y}))$	(p+i+6), Reiteração
p+i+11	$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
p+i+12	$(\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	(p+i+11), E - ∀
p+i+13	$\neg\neg((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+7)-(p+i+12), I - ¬(res)
p+i+14	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+13), E - ¬¬
p+i+15	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+5), (p+i+6)-(p+i+14), E - ∃
p+i+16	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	4, 5-20, 21-39, ..., p-(p+i+15), E - ∨
p+i+17	$\neg(\forall\mathbf{xA}(x))^{(n)}\supset(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	2-(p+i+17), I - ⊃
p+i+18	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	suposição
p+i+19	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+18), Repetição
p+i+20	$\neg(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	suposição
p+i+21	$\neg(\forall\mathbf{xA}(x))^{(n)}\supset(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+17), Reiteração
p+i+22	$(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+20), (p+i+21), E - ⊃
p+i+23	$((\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+18)-(p+i+19), (p+i+20)-(p+i+23), RTE
p+i+24	$(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset(\forall\mathbf{xA}(\mathbf{x}))^{(n)})$	1-(p+i+23), I - ⊃

Axioma 18 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

1	$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	suposição
2	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
3	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\& \ldots \&(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	2, Definição 1.1.3
4	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})\vee \ldots \vee\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	3, DNC
5	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	suposição
6	$\neg(\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))))$	5, Definição 1.1.1
7	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	6, E - ¬¬
8	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	7, E - &
9	$\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	7, E - &
10	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	1, 9, D - ¬∃
11	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
12	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	10, Reiteração
13	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	12, E - ∀
14	$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
15	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	14, E - ∀
16	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
17	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	11, Reiteração
18	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	13, Reiteração
19	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	15, Reiteração
20	$\neg\neg(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	15-19, I - ¬(rest)
21	$((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	20, E - ¬¬
22	$((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	8, 11-21, E - ∃
23	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2})$	suposição
24	$\neg(\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}))$	23, Definição 1.1.2
25	$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	24, E - ¬¬
26	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	25, E - &
27	$\neg(\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))))$	25, Definição 1.1.1

28	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	26, E - $\neg\neg$
29	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	28, E - &
30	$\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	28, E - &
31	$\forall\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	1, 30, D - $\neg\exists$
32	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
33	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	31, Reiteração
34	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	33, E - $\forall$
35	$\neg(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	suposição
36	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	32, Reiteração
37	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	34, Reiteração
38	$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
39	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	38, E - $\forall$
40	$\neg\neg(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	35-39, I - $\neg$(rest)
41	$((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	40, E - $\neg\neg$
42	$((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	29, 32-41, E - $\exists$
⋮	⋮	
p	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n})$	suposição
p+1	$\neg(\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}))$	p, Definição 1.1.2
p+2	$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	(p+1), E - $\neg\neg$
p+3	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	(p+2), E - &
⋮	⋮	
p+i+1	$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	(p+i), E - &
p+i+2	$\neg(\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))))$	(p+i+1), Definição 1.1.1
p+i+3	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	(p+i+2), E - $\neg\neg$
p+i+4	$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(p+i+3), E - &
p+i+5	$\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	(p+i+3), E - &

p+i+6	$\mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	1, (p+i+5), D - ¬∃
p+i+7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
p+i+8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(p+i+6), Reiteração
p+i+9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	(p+i+8), E - ∀
p+i+10	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1, Reiteração
p+i+11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+10), E - ∀
p+i+12	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
p+i+13	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$	(p+i+7), E - &
p+i+14	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(p+i+9), E - &
p+i+15	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	(p+i+11), Reiteração
p+i+16	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+12)-(p+i+15), I - ¬(rest)
p+i+17	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+16), E - ¬¬
p+i+18	$\mid\ \mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+4), (p+i+7)-(p+i+17), E - ∃
p+i+19	$\mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	4, 5-22, 23-42, ..., p-(p+i+18), E - ∨
p+i+20	$\mid\ \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	2-(p+i+19), I - ⊃
p+i+21	$\mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
p+i+22	$\mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	p+i+21, Repetição
p+i+23	$\mid\ \mid\ \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
p+i+24	$\mid\ \mid\ \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(x))^{(n)})\supset((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+20), Reiteração
p+i+25	$\mid\ \mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+23), (p+i+24), E- ⊃
p+i+26	$\mid\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(p+i+21)-(p+i+22), (p+i+23)-(p+i+25), RTE
p+i+27	$(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	1-(p+i+26), I - ⊃

Axioma 19 Se **A** e **B** são congruentes, então $\vdash_{C_n}*$ $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$.

Supomos que **A** e **B** sejam congruentes, em $\mathbf{DNC}_n*$, $1\leq n<\omega$.

a) **A** e **B** são fórmulas do tipo universal, tal que **A** é $\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})$ e **B** é $\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})$.

1	$\mid \forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	suposição
2	$\mid \mathbf{C}(\mathbf{y})$	1, E - $\forall$
3	$\mid \forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	2, I - $\forall$
4	$\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})\supset\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	1-3, I - $\supset$
5	$\mid \forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	suposição
6	$\mid \mathbf{C}(\mathbf{x})$	5, E - $\forall$
7	$\mid \forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	6, I - $\forall$
8	$\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})\supset\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	5-7, I - $\supset$
9	$(\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})\supset\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y}))\&(\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})\supset\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x}))$	4, 8, I - &
10	$\forall\mathbf{xC}(\mathbf{x})\equiv\forall\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	9, Definição 1.5

b) **A** e **B** são fórmulas do tipo existencial, tal que **A** é $\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})$ e **B** é $\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$.

1	$\mid \exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	suposição
2	$\mid\quad\mid \mathbf{C}(\mathbf{y})$	suposição
3	$\mid\quad\mid \exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	2, I - $\exists$
4	$\mid \exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	1, 2-3, E - $\exists$
5	$\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})\supset\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	1-4, I - $\supset$
6	$\mid \exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	suposição
7	$\mid\quad\mid \mathbf{C}(\mathbf{x})$	suposição
8	$\mid\quad\mid \exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	7, I - $\exists$
9	$\mid \exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	6, 7-8, E - $\exists$
10	$\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})\supset\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})$	6-9, I - $\supset$
11	$(\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})\supset\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y}))\&(\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})\supset\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x}))$	5, 10, I - &
12	$\exists\mathbf{xC}(\mathbf{x})\equiv\exists\mathbf{yC}(\mathbf{y})$	11, Definição 1.5

ii. (Hipótese indutiva) Admita'mos que para toda prova Π de **F**, com comp(Π)< k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema quantificacional axiomático $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π' de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{C_n*}$ **F**, no k-ésimo passo.

iii. Seja a prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$, tal que comp(Π) = k.

iii.1) $\mathbf{F} \in \Gamma$

Neste caso, a demonstração é idêntica ao caso (i.1).

iii.2) **F** é um esquema de Axioma de $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Neste caso, as demonstrações dos Axiomas 15 a 19 são idênticas ao caso (i.2).

iii.3) **F**, o passo k-ésimo na prova $\Gamma \vdash_{C_n*}$ **F**, é conseqüência de aplicação de alguma regra de prova de $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$, em fórmulas que antecedem **F** na prova.

iii.3.1) No caso de aplicação da Regra *Modus Ponens*, a demonstração é idêntica à da Seção 2.2.

iii.3.2) Regra **II** $\dfrac{\mathbf{C} \supset \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{C} \supset \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})}$, onde **x** é uma variável, **A**(**x**) é uma fórmula, **C** é uma fórmula em que **x** não ocorre livre.

A fórmula **F** é uma fórmula do tipo $\mathbf{C}\supset\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, e ocorre no passo k, por aplicação da Regra II a uma fórmula do tipo $\mathbf{C}\supset\mathbf{A}(\mathbf{x})$ que ocorre num passo m anterior a k na prova em $\mathbf{C}_n$*.

Neste caso, temos que $\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{C}\supset\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n^*} \mathbf{C}\supset\mathbf{A}(\mathbf{x})$, onde **C** é uma fórmula em que **x** não ocorre livre. Assim,

	Γ	
	$\vdots$	
s	$\mathbf{C}\supset\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
s+1	$\mathbf{C}\supset\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$	
s+2	$\mid\ \mathbf{C}$	suposição
s+3	$\mid\ \mathbf{C}\supset\mathbf{A}(\mathbf{y})$	s+1, Reiteração
s+4	$\mid\ \mathbf{A}(\mathbf{y})$	s+2, s+3, E - $\supset$
s+5	$\mid\ \mathbf{A}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$	
s+6	$\mid\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+5, I -$\forall$
s+7	$\mathbf{C}\supset\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(s+2)-(s+6), I - $\supset$

Observamos que a restrição da Regra I -$\forall$ de $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n<\omega$, é obedecida, pois, a variável **x** não ocorre livre na fórmula **C**.

iii.3.3) Regra **III** $\dfrac{\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}}{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}}$, onde **x** é uma variável, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é uma fórmula e **C** é uma fórmula na qual **x** não ocorre livre.

A fórmula **F** é uma fórmula do tipo $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}$, e ocorre no passo k, por aplicação da Regra III a uma fórmula do tipo $\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}$ que ocorre num passo m anterior a k na prova em $\mathbf{C}_n$*.

Neste caso, temos que $\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}$.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\mathbf{C}$, onde **C** é uma fórmula em que **x** não ocorre livre. Assim,

Γ

$\vdots$

s $\mathbf{A(x)}\supset\mathbf{C}$

s+1 $\quad\vert\ \exists\mathbf{xA(x)}$ suposição

s+2 $\quad\vert\quad\vert\ \mathbf{A_x(y)}$, onde **y** não ocorre em C e não ocorre livre em $\exists\mathbf{xA(x)}$ suposição

s+3 $\quad\vert\quad\vert\ \mathbf{A(x)}\supset\mathbf{C}$ s, Reiteração

s+4 $\quad\vert\quad\vert\ \mathbf{A_x(y)}\supset\mathbf{C}$ s+3

s+5 $\quad\vert\quad\vert\ \mathbf{C}$ (s+2), (s+4), E - $\supset$

s+6 $\quad\vert\ \mathbf{C}$ (s+1), (s+2)-(s+5), E - $\exists$

s+7 $\exists\mathbf{xA(x)}\supset\mathbf{C}$ (s+1)-(s+6), I - $\supset$

Observamos que a restrição da Regra E -$\exists$ de $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n<\omega$, é obedecida, pois, a variável **y** não ocorre em **C**, **y** não ocorre livre em $\exists\mathbf{xA(x)}$.

Portanto:

Se $\Gamma \vdash_{C_n*} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F}$. □

Teorema 3.3.2 Toda prova Π de **F**, no sistema quantificacional axiomático $\mathbf{C}_\omega$*, de da Costa**,** pode ser transformada numa prova Π' de **F**, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$*. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{C_\omega*} \mathbf{F} \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega*} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos dos Axiomas 11-14, e Axiomas 17 e 18. □

Lema 3.3.3 Em $\mathbf{C}_n$*, $1\leq n<\omega$, os seguintes esquemas de fórmulas são teoremas:

a) $(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset(\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x})))$.

b) $(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset(\neg\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset\forall\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x})))$.

Demonstração:

a) $\vdash_{\mathbf{C}_\mathbf{n}}^{*}\ (\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset(\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x})))$.

1 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

2 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

3 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset((\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{(n)})$ Axioma 17, prop$\vdash_{C_n}^{*}$

4 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{(n)}$ 2, 3, MP

5 $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 1, MtD

6 $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 5, Regra II

7 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 6, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

8 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 2, 7, MP

9 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

10 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{(n)}\supset$

$((\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$ Axioma 5, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

11 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 4, 10, MP

12 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 9, 11, MP

13 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*}$

$(((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset(((((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$

Axioma 5, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

14 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset((((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$

12, 13, MP

15 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} ((((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 8,14, MP

16 $\vdash_{C_n}^{*}\ (((\forall\mathbf{xA(x)})^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{xA(x)})\&\forall\mathbf{xA(x)})\supset\neg(\mathbf{A(x)})$ Teorema 1.1.9-(vii)

17 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*} ((((\forall\mathbf{xA(x)})^{(n)})\&\neg\forall\mathbf{xA(x)})\&\forall\mathbf{xA(x)})\supset\neg\mathbf{A(x)}$

16, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

18 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \neg\mathbf{A(x)}$ 15, 17, MP

19 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \mathbf{A(x)}\supset\neg\mathbf{A(x)}$ 18, MtD

20 $\vdash_{C_n}^{*}\ (\mathbf{A(x)}\supset\neg\mathbf{A(x)})\supset(\neg\mathbf{A(x)}\vee\neg\mathbf{A(x)})$ Teorema 1.1.9-(viii)

21 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ (\mathbf{A(x)}\supset\neg\mathbf{A(x)})\supset(\neg\mathbf{A(x)}\vee\neg\mathbf{A(x)})$

20, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

22 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ (\neg\mathbf{A(x)}\vee\neg\mathbf{A(x)})$ 19, 21, MP

23 $\vdash_{C_n}^{*}\ (\neg\mathbf{A(x)}\vee\neg\mathbf{A(x)})\supset(\neg\mathbf{A(x)})$ Teorema 1.1.9-(ix)

24 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ (\neg\mathbf{A(x)}\vee\neg\mathbf{A(x)})\supset(\neg\mathbf{A(x)})$ 23, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

25 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \neg\mathbf{A(x)}$ 22, 24, MP

26 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\forall\mathbf{xA(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A(x)}$ 25, Axioma 15, MP

27 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)} \vdash_{C_n}^{*}\ \neg\forall\mathbf{xA(x)}\supset\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A(x)}$ 26, MtD

28 $\vdash_{C_n}^{*}\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}\supset(\neg\forall\mathbf{xA(x)}\supset\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A(x)}))$ 27, MtD

b) $\vdash_{C_n}^{*}\ (\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)})\supset(\neg\exists\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})\supset\forall\mathbf{x}\neg(\mathbf{A(x)}))$.

1 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \mathbf{A(x)}$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

2 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

3 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ (\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)})\supset((\exists\mathbf{xA(x)})^{(n)})$ Axioma 18, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

4 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ (\exists\mathbf{xA(x)})^{(n)}$ 2, 3, MP

5 $\vdash_{C_n}^{*}\ \mathbf{A(x)}\supset\exists\mathbf{xA(x)}$ Axioma 16

6 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \mathbf{A(x)}\supset\exists\mathbf{xA(x)}$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

7 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \exists\mathbf{xA(x)}$ 1, 6, MP

8 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A(x)})^{(n)}, \neg\exists\mathbf{xA(x)}, \mathbf{A(x)} \vdash_{C_n}^{*}\ \neg\exists\mathbf{xA(x)}$ propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

9 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)},\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}),\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset((\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$

Axioma 5, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

10 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} ((\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$ 4, 9, MP

11 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 8, 10, MP

12 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*}$

$(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$

Axioma 5, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

13 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset(((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$

11, 12, MP

14 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$

7, 13, MP

15 $\vdash_{C_n}^{*} (((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ Teorema 1.1.9-(vii)

16 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\&\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$

15, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

17 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 14, 16, MP

18 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} \mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 18, MtD

19 $\vdash_{C_n}^{*} (\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\vee\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ Teorema 1.1.9-(viii)

20 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\vee\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 19, prop $\vdash_{C_n}^{*}$

21 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\vee\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 18, 20, MP

22 $\vdash_{C_n}^{*} (\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\vee\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ Teorema 1.1.9-(ix)

23 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\vee\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 22, propriedade do $\vdash_{C_n}^{*}$

24 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}, \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n}^{*} (\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 21, 23, MP

25 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} \vdash_{C_n}^{*} (\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 24, MtD

26 $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} \vdash_{C_n}^{*} (\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\supset(\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ 25, Regra II

27 $\vdash_{C_n}^{*} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}\supset(\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})\supset\forall\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x})))$ 26, MtD

Teorema 3.3.4 Toda prova Π′ de **F** a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema quantificacional de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema axiomático $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$, de da Costa. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F} \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Por indução sobre o comprimento das provas de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Por hipótese, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F}$, $1 \leq n < \omega$.

i) Seja comp(Π) = 1

i.1) Se $\mathbf{F} \in \Gamma$, então é imediato que

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \mathbf{F}.$$

ii) (Hipótese indutiva) Admitamos que toda prova Π′ de **F**, com 1< comp(Π′) < k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema quantificacional de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema axiomático $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F}$, no k-ésimo passo.

iii) Seja a prova Π′ de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, tal que comp(Π′) = k. Então, podem ocorrer 2 (dois) casos.

iii.1) $\mathbf{F} \in \Gamma$

Neste caso, a demonstração é idêntica ao caso (i.1) acima.

iii.2) **F** é obtida na prova, em $\mathbf{DNC}_n$*, pela aplicação de uma regra de prova.

iii.2.1) **F** é conseqüência da aplicação da Regra de Repetição (R).

Neste caso, **F** já ocorre na prova, num passo s<k.

Logo, pela hipótese de indução:

$\Gamma \vdash_{C_n *} \mathbf{F}$.

iii.2.2) **F** é a fórmula $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$, obtida por aplicação da Regra de Introdução do Quantificador Universal (I - ∀) de $\mathbf{DNC}_n$*. Temos, esquematicamente:

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
m	$\mathbf{A}_m$	
⋮	⋮	
h	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
⋮	⋮	
k	$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$	h, I - ∀

onde a variável **x** não ocorre livre nas fórmulas das quais $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é resultante.

Isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{A}(\mathbf{x})$, em uma prova de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{C_n *} \mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Portanto,

1	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{x})$	
2	$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash_{C_n^*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Teorema 1.2.1-(10)
3	$\vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	2, MtD
4	$\vdash_{C_n^*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	1, 3, MP
5	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	4, propriedade do $\vdash_{C_n^*}$

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{F}$.

iii.2.3) **F** é a fórmula $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ obtida por aplicação da Regra de Introdução Quantificador Existencial (I - ∃) de **DNC**$_n$*. Temos,

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
m	$\mathbf{A}_m$	
⋮	⋮	
h	$\mathbf{A}(\mathbf{t})$	
⋮	⋮	
k	$\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	p, I - ∃

onde **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

Isto é, $\Gamma \vdash_{DNC_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{t})$, numa prova de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{t})$.

Portanto,

1	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{t})$	h<k e **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**)
2	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{t}) \supset \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Axioma 16
3	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	1, 2, MP

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{F}$.

iii.2.4) **F** é a fórmula **A**(**t**), obtida por aplicação da Regra da Eliminação do Quantificador Universal (E - ∀) de $\mathbf{DNC}_n$*.   Temos,

1 $\mathbf{A}_1$
⋮ ⋮
m $\mathbf{A}_m$
⋮ ⋮
h $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$
⋮ ⋮
k $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ p, E - ∀

onde **t** é um termo que é livre para **x** em **A**(**x**).

Isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, numa prova de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Portanto,

1 $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$

2 $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{A}(\mathbf{t})$ Axioma 15

3 $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \mathbf{A}(\mathbf{t})$ 1, 2, MP

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \mathbf{F}$

iii.2.5) **F** é a fórmula **C**, obtida por aplicação da Regra da Eliminação do Quantificador Existencial (E - ∃) de $\mathbf{DNC}_n$*. Temos,

1	$\mathbf{A}_1$	
$\vdots$	$\vdots$	
m	$\mathbf{A}_k$	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
p+1	$\vert\ \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$	suposição
$\vdots$	$\vert\ \vdots$	
q	$\vert\ \mathbf{C}$	
k	$\mathbf{C}$	p, (p+1)-q, E - ∃

onde **x** e **y** são variáveis que não ocorrem livres em **C** ou em qualquer premissa dada.

Isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\Gamma, \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{C}$, numa prova de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{C_n *} \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\Gamma, \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \vdash_{C_n *} \mathbf{C}$.

Portanto,

1	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Hipótese
2	$\Gamma, \mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \vdash_{C_n^*} \mathbf{C}$	Hipótese
3	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{y}) \supset \mathbf{C}$	2, MtD
4	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{C}$	3, Axioma 19
5	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{C}$	4, Regra IV
6	$\Gamma \vdash_{C_n^*} \mathbf{C}$	1, 5, MP

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{C_n *} \mathbf{F}$.

iii.2.6) **F** é a fórmula $\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, obtida por aplicação da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - $\neg\forall$) de $\mathbf{DNC}_n$*. Temos,

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
m	$\mathbf{A}_k$		
⋮	⋮		
p	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(ou $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$)	
⋮	⋮		
q	$\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(ou $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$)	
⋮	⋮		
k	$\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$		p, q, D - $\neg\forall$

Isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, em uma prova de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Portanto: de $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n *} \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e Lema 3.3.3 (a), por aplicações de MP, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n}{}^{*}\ \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

iii.2.7) **F** é a fórmula $\forall\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, obtida por aplicação da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - $\neg\exists$) de $\mathbf{DNC}_n$*. Temos,

1	$\mathbf{A}_1$		
$\vdots$	$\vdots$		
m	$\mathbf{A}_k$		
$\vdots$	$\vdots$		
p	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(ou $\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$)	
$\vdots$	$\vdots$		
q	$\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(ou $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$)	
$\vdots$	$\vdots$		
k	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$		p, q, D - $\neg\exists$

Isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, em provas de comprimento menor que k.

Pela hipótese de indução, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Portanto, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e Lema 3.3.3 (b), por aplicações de MP, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n}{}^{*} \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{F}$.

Assim, completamos a demonstração do teorema. □

Teorema 3.3.5 Toda prova Π′ de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$*, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema proposicional axiomático $\mathbf{C}_\omega$*. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega*} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{C}_\omega*} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos das regras: Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)), Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)), Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - ¬∀) e Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - ¬∃). □

Como uma conseqüência imediata dos resultados anteriores, temos o seguinte teorema de equivalência.

Teorema 3.3.6 Os sistemas quantificacionais axiomáticos $\mathbf{C}_n\mathbf{*}$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa, são logicamente equivalentes aos correspondentes sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n\mathbf{*}$, $1\leq n\leq\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n*} \mathbf{F} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F}. \qquad \square$$

Colorário 3.3.7 Toda prova Π de **F**, em cada sistema quantificacional axiomático $\mathbf{C}_n*$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa**,** pode ser transformada numa prova categórica Π' de **F**, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n*$, $1\leq n\leq\omega$, e vice versa. Isto é,

$$\vdash_{\mathbf{C}_n*} \mathbf{F} \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Pelos teoremas anteriores, basta tomar $\Gamma = \varnothing$. □

Introduzimos, no ANEXO 3, uma outra hierarquia de sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{aDNC}_n*$, $1\leq n\leq\omega$, e demonstramos diretamente que esses sistemas são logicamente equivalentes aos sistemas correspondentes da hierarquia de sistemas quantificacionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n*$, $1\leq n\leq\omega$.

3.4 NORMALIZAÇÃO PARA OS SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Nesta seção, demonstramos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, para os sistemas **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, nos moldes da demonstração do teorema obtido para os sistemas proposicionais **DNC**$_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

A seguir, como conseqüência do Teorema de Normalização, demonstramos diretamente a não-trivialização e a consistência dos sistemas **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$; e obtemos um princípio de subfórmula adequado aos sistemas paraconsistentes **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.

As definições de prova categórica, resultante, comprimento de uma prova formal, redução direta, redução de uma prova são as mesmas introduzidas na Seção 2.5.

A seguir, apresentamos a definição de prova categórica não-trivial para **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Definição 3.4.1 Uma prova categórica Π em **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, é *normal* se, e somente se, a ocorrência de toda fórmula, que ocorre como um passo de Π, pode ser justificada por uma Regra de Introdução ou por uma Regra Especial, com possível exceção das fórmulas de suas provas subordinadas.

Definição 3.4.2. Para cada sistema **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, uma prova categórica Π é *não-trivial* se, e somente se, entre os seus itens não ocorrem fórmulas do tipo $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$, exceção feita aos casos: i) ocorrência de qualquer dessas fórmulas apenas como suposição de prova subordinada; ou ii) ocorrência dessas fórmulas apenas como conseqüência direta interna de fórmulas que constam apenas numa prova subordinada, que justifica uma aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - $\neg$(rest)) na prova da qual essa prova é subordinada.

Com relação às provas categóricas, em **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, demonstramos o seguinte Teorema de Normalização.

Teorema 3.4.3 (**Teorema Fundamental**). Toda prova categórica Π em **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, de comprimento menor ou igual a *s* é não-trivial, e tem pelo menos uma redução Σ que é não-trivial, normal e cujo comprimento não é maior que o comprimento de Π.

Demonstração:

Fazemos a demonstração por indução sobre o comprimento *s*, como na demonstração do Teorema 2.5.10.

Pelo Teorema Fundamental para os sistemas **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, basta demonstrarmos os casos em que o último item da prova Π - de comprimento $\leq m+1$ -, tem como justificativa uma das Regras específicas dos sistemas **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$ - isto é, uma das Regras de Introdução de Quantificadores, de Eliminação de Quantificadores, ou das Regras Especiais.

Dada a prova Π, seja Π_1 a prova que resulta, de Π, retirando-se o último item.

1) Consideremos o caso em que a último item de Π tem como justificativa a Regra de Introdução do Quantificador Universal (I - $\forall$).

Seja, portanto, $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ o último item de Π, tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ocorre como um item anterior de Π, e **x** não ocorre livre nas fórmulas $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k$ das quais $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é resultante.

Pela hipótese de indução, como Π_1 tem comprimento m, menor que m+1, então Π_1 é consistente e tem uma redução não-trivial normal Π_2, de comprimento menor ou igual a m. Seja Π_3 a prova que resulta ao acrescentarmos $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ a Π_2, e suponhamos que Π_3 seja trivial.

Esquematicamente:

	Π_1		Π		Π_2		Π_3
	$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}_1$		$\mathbf{A}'_1$		$\mathbf{A}'_1$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$\mathbf{A}_k$		$\mathbf{A}_k$		$\mathbf{A}'_q$		$\mathbf{A}'_q$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$		$\mathbf{A}(\mathbf{x})$		$\mathbf{A}(\mathbf{x})$		$\mathbf{A}(\mathbf{x})$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
m	$\mathbf{A}_m$	m	$\mathbf{A}_m$	p	$\mathbf{A}'_p$	p	$\mathbf{A}'_p$
		m+1	$\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ I - $\forall$		$p \leq m$	p+1	$\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ I - $\forall$
							$p+1 \leq m+1$

Como Π_2 é não-trivial, então Π_3 – e, portanto, Π_2 – deve ter necessariamente como ítens as fórmulas $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ e $\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, justificadas por Regra de Introdução ou Regra Especial. Se $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ é um item que ocorre em Π_2, justificado por Regra de Introdução ou Regra Especial, então $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$, $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2$, ..., $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$ são ítens de Π_2, também justificados por Regras de Introdução ou Regras Especiais.

Para que $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^i$, $1 \leq i \leq n$, ocorra em Π_2, é necessário que cada item $\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\& \neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$, $\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1\&\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1)$, ..., $\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$ seja introduzido pela Regra I - $\neg$ (rest) – veremos que, para que isso seja possível, é necessário que $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ ocorra como um item prévio da prova e, portanto, $(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ também ocorra como um item de Π_2.

A seguir, apresentamos um esquema geral da prova Π_2:

Π_2

$\mathbf{A'}_1$

$\vdots$

$\mathbf{A'}_q$

$\vdots$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$

$\vdots$

$\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$

$\vdots$

$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

$\vdots$

$\forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

$\vdots$

$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 \& (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \& \ldots \& (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$

$\vdots$

$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

$\vdots$

$\mathbf{A'}_p$

Agora, apresentamos um esquema da prova de $(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 \& (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \& \ldots \& (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$:

$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	suposição
$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid \exists \mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	D - $\neg\forall$
$\mid \quad \mid \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	suposição[10]
$\mid \quad \mid \quad \mid \neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
$\mid \quad \mid \quad \mid \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	Reiteração
$\mid \quad \mid \quad \mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	Reiteração
$\mid \quad \mid \quad \mid \forall \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid \quad \mid \quad \mid \mathbf{A}(\mathbf{y})$	E - $\forall$
$\mid \quad \mid \quad \mid (\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	E - $\forall$
$\mid \quad \mid \neg\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	I - $\neg$(rest)
$\mid \quad \mid ((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - $\neg\neg$
$\mid ((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - $\exists$
$\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	I - $\neg$(rest)
$(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$	Definição 1.1.1
$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1\&\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1)$	suposição
$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$	E - &
$\mid \neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))^1$	E - &
$\mid \neg\neg((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	Definição 1.1.1
$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - $\neg\neg$
$\mid (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \neg(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &

---

[10] Onde **y** é livre para **x** em **A**(**x**) e **y** não ocorre livre em $((\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\mid\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid\ \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	D - ¬∀
$\mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	suposição[11]
$\mid\ \mid\ \mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid\ (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{y})$	E - ∀
$\mid\ \mid\ \mid\ (\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	E - ∀
$\mid\ \mid\ \neg\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	I - ¬(rest)
$\mid\ \mid\ ((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ¬¬
$\mid\ ((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ∃
$\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}))$	I - ¬(rest)
$(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}$	Definição 1.1.2
$\vdots$	
$\mid\ (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	suposição
$\mid\ (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}$	E - &
$\mid\ \neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{n-1}$	E - &
$\mid\ \vdots$	
$\mid\ ((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ∃
$\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}))$	I - ¬(rest)
$(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	Definição 1.1.2
$\vdots$	
$(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}\&\ \ldots\ \&(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	I - &
$(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Definição 1.1.3

---

[11] Onde **y** é livre para **x** em **A**(**x**) e **y** não ocorre livre em $((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

Nestas condições, na prova Π_2 ocorreriam os ítens $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\neg(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ e $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, o que tornaria Π_2 trivial.

Portanto, Π_3 é não-trivial.

Como Π_3 é obtida, a partir de Π_2, acrescentando-se a fórmula $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, justificada pela Regra de Introdução do Quantificador Universal (I - $\forall$), então Π_3 é uma redução normal não-trivial de Π_2, de comprimento $\leq$m+1.

2) Consideremos o caso em que o último item de Π tem a Regra de Introdução do Quantificador Existencial (I - $\exists$) como justificativa.

Logo, $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é o último item de Π, tal que $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ ocorre como um item anterior de Π, onde **t** é um termo que é livre para **x** em $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Esquematicamente:

Π
$\mathbf{A}_1$
$\vdots$
$\mathbf{A}_k$
$\vdots$

$\mathbf{A}(\mathbf{t})$

$\vdots$

$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ p, I - $\exists$

Pela hipótese de indução, seja Π_2 uma redução normal não-trivial de Π_1, de comprimento $\leq$m.

Se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente como ítens as fórmulas $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ e $\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, justificadas por Regras de Introdução ou Regras Especiais.

Como no caso anterior, já que $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ é um item que ocorre em Π_2, então em itens anteriores ocorreriam $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$, $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2$, ..., $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$ e também os itens $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ e $(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Esquematicamente:

$$\Pi_2$$
$$\mathbf{A}'_1$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{t})$$
$$\vdots$$
$$\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$$
$$\vdots$$
$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$$
$$\vdots$$
$$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$$
$$\vdots$$
$$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 \& (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \& \ldots \& (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$$
$$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}'_p$$

Para que ocorra $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$, bem como os itens $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^i$, $1<i\leq n$, em Π_2, é necessário que cada item $\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\& \neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$, $\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1)$, ..., $\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$ seja introduzido pela Regra I - $\neg$ (rest).

Esquematicamente:

$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	suposição
$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	D - ¬∃
$\mid\ \mid \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	suposição[12]
$\mid\ \mid\ \mid \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
$\mid\ \mid\ \mid \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\mid\ \mid\ \mid \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	E - ∀
$\mid\ \mid\ \mid (\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	E - ∀
$\mid\ \mid \neg\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	I - ¬(rest)
$\mid\ \mid ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ¬¬
$\mid ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ∃
$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	I - ¬(rest)
$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}$	Definição 1.1.1
$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1})$	suposição
$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}$	E - &
$\mid \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{1}$	E - &
$\mid \neg\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	Definição 1.1.1
$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))\&\neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - ¬¬
$\mid (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\mid \neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &

---

[12] Onde **y** é livre para **x** em **A**(**x**) e **y** não ocorre livre em $((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\vert\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\vert\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	D - ¬∃
$\vert\quad\vert\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	suposição[13]
$\vert\quad\vert\quad\vert\ \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
$\vert\quad\vert\quad\vert\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	Reiteração
$\vert\quad\vert\quad\vert\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Reiteração
$\vert\quad\vert\quad\vert\ \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reiteração
$\vert\quad\vert\quad\vert\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	E - ∀
$\vert\quad\vert\quad\vert\ (\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	E - ∀
$\vert\quad\vert\ \neg\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	I - ¬(rest)
$\vert\quad\vert\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ¬¬
$\vert\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ∃
$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}))$	I - ¬(rest)
$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}$	Definição 1.1.2
$\vdots$	
$\vert\ (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	suposição
$\vert\ (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}$	E - &
$\vert\ \neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{n-1}$	E - &
$\vert\quad\vdots$	
$\vert\ ((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - ∃
$\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}))$	I - ¬(rest)
$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	Definição 1.1.2
$\vdots$	
$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}\&\ \ldots\ \&(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	I - &
$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Definição 1.1.3

---

[13] Onde **y** é livre para **x** em **A**(**x**) e **y** não ocorre livre em $((\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

Portanto, em Π_2 ocorreriam os ítens $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\neg(\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ e $(\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, o que trivializaria Π_2.

Logo, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal não-trivial de Π, de comprimento $\leq m+1$.

3) O último item de Π tem a Regra E - $\forall$ como justificativa.

Seja $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o último item de Π, obtido por aplicação da Regra E - $\forall$, a partir da fórmula $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Esquematicamente,

$$\begin{array}{ll}
\Pi & \\
\mathbf{A}_1 & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}_k & \\
\vdots & \\
\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \\
\vdots & \\
\mathbf{A}(\mathbf{t}) & \text{, onde } \mathbf{t} \text{ é um termo livre para } \mathbf{x} \text{ em } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \qquad \text{E - } \forall
\end{array}$$

Nestas condições, se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente como ítens as fórmulas $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))$, justificadas por Regras de Introdução ou Regras Especiais.

Como nos casos anteriores, antecedendo $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{(n)}$, ocorrem em Π_2 os ítens $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1$, $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^2$, ..., $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^n$. Também ocorre necessariamente o item $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ antecedendo o item $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{l}
\Pi_2 \\
\mathbf{A}'_1 \\
\vdots \\
\mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
\vdots \\
\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
\vdots \\
\neg\mathbf{A}(\mathbf{t}) \\
\vdots \\
(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1 \& (\mathbf{A}(\mathbf{t}))^2 \& \ldots. \& (\mathbf{A}(\mathbf{t}))^n \\
(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{(n)} \\
\vdots \\
\mathbf{A}'_p
\end{array}$$

O item $\neg\mathbf{A}(\mathbf{t})$ só pode ocorrer em Π_2 justificado pela Regra I - ¬(rest).

Esquematicamente:

$$\begin{array}{l|l}
 & \mathbf{A}(\mathbf{t}) \\
 & \vdots \\
 & \mathbf{C} \\
 & \vdots \\
 & \neg\mathbf{C} \\
 & \vdots \\
 & \mathbf{C}^{(n)} \\
\multicolumn{2}{l}{\neg\mathbf{A}(\mathbf{t}) \qquad\qquad\qquad \text{I - }\neg\text{(rest)}}
\end{array}$$

Vejamos esquematicamente a introdução do item $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^i$, $1 \leq i \leq n$.

	$\mathbf{A}(\mathbf{t})\&\neg\mathbf{A}(\mathbf{t})$	suposição
	$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))$	E - &
	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{t})$	E - &
	$\vdots$	
	$\mathbf{C}$	
	$\neg\mathbf{C}$	
	$\mathbf{C}^{(n)}$	
$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t})\&\neg\mathbf{A}(\mathbf{t}))$		I - ¬(rest)
$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1$		Definição 1.1.1
	$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1$	suposição
	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1$	E - &
	$\neg\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t})\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t})))$	Definição 1.1.1
	$\mathbf{A}(\mathbf{t})\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))$	E - ¬¬
	$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))$	E - &
	$\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))$	E - &
	$\vdots$	
	$\mathbf{C}$	
	$\neg\mathbf{C}$	
	$\mathbf{C}^{(n)}$	
$\neg\ ((\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^1)$		I - ¬(rest)
$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^2$		Definição 1.1.2
$\vdots$		
	$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{n-1}\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{n-1}$	suposição
	$\vdots$	
$\neg\ ((\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{n-1}\&\neg(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{n-1})$		I - ¬(rest)
$(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^n$		Definição 1.1.2

Portanto, os ítens $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, $\neg\mathbf{A}(\mathbf{t})$ e $(\mathbf{A}(\mathbf{t}))^{(n)}$ ocorreriam como ítens em Π_2, o que tornaria Π_2 trivial.

Logo, Π_3 é não-trivial.

Agora, resta-nos mostrar que o item $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ pode ser acrescentado a Π_2, por uma Regra de Introdução, ou por uma Regra Especial.

Temos que Π_3 é uma prova, de comprimento $\leq$m+1, na qual ocorrem os ítens $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. Logo, a ocorrência de $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ pode ser justificada pela Regra de Repetição aplicada a $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Esquematicamente:

Π_3
$\mathbf{A}'_1$
$\vdots$
$\mathbf{A}(\mathbf{x})$
$\vdots$
$\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$
$\vdots$
$\mathbf{A}'_p$
$\mathbf{A}(\mathbf{t})$ Repetição
$p+1\leq m+1$

Portanto, Π_3 é uma redução normal, não-trivial de Π, de comprimento menor que m+1.

4) O último item de Π tem a Regra E - $\exists$ como justificativa.

Seja **C** o último item de Π, obtido por aplicação da Regra E - $\exists$, a partir da fórmula $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Esquematicamente,

$$
\begin{array}{lll}
\Pi & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{A}_1 & & \\
\vdots & & \\
\mathbf{A}_k & & \\
\vdots & & \\
\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & & \\
 & \left|\begin{array}{l}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}\end{array}\right. & \begin{array}{l}\text{suposição} \\ \\ \\ \end{array} \\
\mathbf{C} & & \text{E - }\exists
\end{array}
$$

em que **y** é uma variável que não ocorre livre em $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, em **C**, ou em quaisquer outras fórmulas, além da suposição $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, das quais a ocorrência de **C** na prova subordinada é resultante.

Nestas condições, se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente os ítens $\mathbf{C}^{(n)}$ e $\neg\mathbf{C}$. Porém, como **C** ocorre em Π_2, e não como suposição de prova subordinada, Π_2 seria trivial.

Logo, Π_3 é não-trivial.

Agora, em Π_2 ocorre necessariamente $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, com o termo **t** livre para **x** em $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, pois, o item $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é, por hipótese de indução, introduzido por Regra de Introdução ou por Regra Especial.

Esquematicamente:

Π_2
$\mathbf{A}'_1$
$\vdots$
$\mathbf{A}(\mathbf{t})$
$\vdots$
$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$

> $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ suposição
> $\vdots$
> $\mathbf{C}$

Podemos obter uma redução direta de Π_2, Π'_2, tal que comp(Π'_2) $\leq$m.

Esquematicamente

Π_2
$\mathbf{A}'_1$
$\vdots$
$\mathbf{A}'_k$
$\vdots$
$\mathbf{A}_{\mathbf{t}}(\mathbf{y})$
$\vdots$
$\mathbf{C}$

$\vdots$

$\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$
$\mathbf{C}$ Repetição

Então, Π_3 é obtida, a partir de Π'_2, acrescentando-se o item **C**, por Repetição.

Portanto, Π_3 constitui uma redução normal, não-trivial de Π, de comprimento $\leq$m+1.

5) O último item de Π tem a Regra Distribuição da Negação do Quantificador Universal ($D - \neg\forall$): como justificativa.

Seja $\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ o último item de uma prova Π, onde $\exists\mathbf{x}\neg(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ é resultante da prova de $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, e da prova de $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Seja Π_1 a prova que resulta de Π retirando-se esse último item.

Seja $\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o último item de Π, obtido por aplicação da Regra $D - \neg\forall$.

Esquematicamente,

$$\begin{array}{lll}
\quad\Pi & & \\
\quad\mathbf{A}_1 & & \\
\quad\vdots & & \\
\quad\mathbf{A}_k & & \\
\quad\vdots & & \\
\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & (\text{ou } \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) & \\
\quad\vdots & & \\
\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & (\text{ou } \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})) & \\
\quad\vdots & & \\
\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & & D - \neg\forall
\end{array}$$

Nestas condições, se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente como ítens as fórmulas $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ e $\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, justificadas por Regras de Introdução ou Regras Especiais.

Com em casos anteriores, antecedendo $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ ocorrem em Π_2 os ítens $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$, $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2$, ..., $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$. Também ocorreriam necessariamente os ítens $\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, $(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Esquematicamente:

$$\Pi_2$$

$$\mathbf{A}'_1$$

$$\vdots$$

$$\forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$$

$$\vdots$$

$$\forall \mathbf{x}((\neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$$

$$\vdots$$

$$\neg \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

$$\vdots$$

$$\neg(\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))$$

$$\vdots$$

$$(\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 \& (\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \& \ldots . \& (\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$$

$$(\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}'_p$$

Vejamos o esquema dedutivo de introdução de $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$ em Π_2:

$$\begin{array}{ll}
\mid\ \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})) & \text{suposição} \\
\mid\ \neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})) & \text{E - \&} \\
\mid\ \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} & \text{Reit} \\
\mid\ \forall\mathbf{x}\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{D - }\neg\exists \\
\mid\ \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{E - \&} \\
\mid\quad \mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y}) & \text{suposição (}\mathbf{y}\text{ com as restrições usuais)} \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \neg((\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & \text{suposição} \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y}) & \text{Reit} \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \forall\mathbf{x}\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \text{Reit} \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{y}) & \text{E - }\forall \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{y}) & \text{E - }\neg\neg \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} & \text{Reit} \\
\mid\quad \mid\quad \mid\ (\neg\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)} & \text{E - }\forall \\
\mid\quad \mid\ \neg\neg((\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & \text{I - }\neg\text{(rest)} \\
\mid\quad \mid\ ((\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & \text{E - }\neg\neg \\
\mid\ (\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} & \text{E - }\exists \\
\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))) & \text{I - }\neg\text{(rest)} \\
(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 & \text{Definição 1.1.1}
\end{array}$$

Logo, em Π_2 ocorreriam $\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ e $(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, o que trivializaria Π_2.

Portanto, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal, não-trivial de Π, de comprimento $\leq m+1$.

6) O último item de Π tem como justificativa a Regra Distribuição da Negação do Quantificador Existencial (D - $\neg\exists$).

Esquematicamente

$$
\begin{array}{ll}
\quad\Pi & \\
\quad\mathbf{A}_1 & \\
\quad\vdots & \\
\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & (\text{ou } \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) \\
\quad\vdots & \\
\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & (\text{ou } \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})) \\
\quad\vdots & \\
\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \qquad\text{D - }\neg\exists
\end{array}
$$

Nestas condições, se Π_3 for trivial, então em Π_2 ocorrem necessariamente como ítens as fórmulas $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ e $\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, justificadas por Regras de Introdução ou Regras Especiais.

Como em casos anteriores, antecedendo $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$ ocorreriam em Π_2 os ítens $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$, $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2$, ..., $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$. Também ocorreriam necessariamente os ítens $\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, $(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Esquematicamente:

Π_2

$\mathbf{A}'_1$

$\vdots$

$\mathbf{A}'_k$

$\vdots$

$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\vdots$

$\forall\mathbf{x}((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\vdots$

$\neg\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$

$\vdots$

$(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1 \& (\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \& \ldots\ldots \& (\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^n$

$(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$

$\vdots$

$\mathbf{A}'_p$

Vejamos o esquema dedutivo de introdução de $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$ em Π_2:

$\vert\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	suposição
$\vert\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	E - &
$\vert\ \neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	E - &
$\vert\ \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reit
$\vert\ \exists\mathbf{x}\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	D - $\neg\exists$
$\vert\ \quad\vert\ \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	suposição (**y** com as restrições usuais)
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ \neg((\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	Reit
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Reit
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{y})$	E - $\forall$
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	Reit
$\vert\ \quad\vert\ \quad\vert\ (\neg\mathbf{A}(\mathbf{y}))^{(n)}$	E - $\forall$
$\vert\ \quad\vert\ \neg\neg((\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	I - $\neg$(rest)
$\vert\ \quad\vert\ ((\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	E - $\neg\neg$
$\vert\ (\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	E - $\exists$
$\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})))$	I - $\neg$(rest)
$(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$	Definição 1.1.1

Logo, em Π_2 ocorreriam $\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ e $(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, o que trivializaria Π_2.

Portanto, Π_3 é não-trivial e constitui uma redução normal, não-trivial de Π, de comprimento $\leq$m+1.

Através dos casos 1-6, demonstramos o teorema. □

A seguir, demonstramos o Teorema de Normalização para o sistema **DNC$_\omega$***.

3.5 NORMALIZAÇÃO PARA O SISTEMA $\mathbf{DNC_{\omega}}$*

As definições de prova categórica, resultante, comprimento de uma prova formal, redução direta, redução de uma prova, são as mesmas introduzidas na Seção 2.5.

A seguir, apresentamos a definição de prova categórica normal e de prova categórica consistente (não-trivial) para $\mathbf{DNC_{\omega}}$*.

Definição 3.5.1 Uma prova categórica Π em $\mathbf{DNC_{\omega}}$* é *normal* se, e somente se, a ocorrência de toda fórmula, que ocorre como um passo de Π, pode ser justificada por uma Regra de Introdução ou por uma Regra do Terceiro-Excluído (RTE), com possível exceção das fórmulas de suas provas subordinadas.

Definição 3.5.2 Em $\mathbf{DNC_{\omega}}$*, uma prova categórica Π é *consistente* (*não-trivial*) se, e somente se, não existe qualquer fórmula **A** tal que **A** e ¬**A** ocorrem como itens de Π, exceção feita ao caso da ocorrência de quaisquer dessas fórmulas apenas como suposição de prova subordinada; caso contrário, Π é *inconsistente* (*trivial*).

Teorema 3.5.3 (**Teorema Fundamental**). Toda prova categórica Π em $\mathbf{DNC_{\omega}}$*, de comprimento menor ou igual a *s* é consistente (não-trivial), e tem pelo menos uma redução Σ que é consistente (não-trivial), normal e cujo comprimento não é maior que o comprimento de Π.

Demonstração:

Como no caso do Teorema Fundamental para os sistemas $\mathbf{DNC_n}$*, $1 \leq n < \omega$, fazemos a demonstração por indução sobre o comprimento *s*.

Pela hipótese de indução, temos que demonstrar o teorema para os casos em que o último item da prova Π é introduzido pelas Regras: Repetição, Reit, I - ⊃, I - &, I - ∨, RTE, E - ⊃, E - &, E - ∨, E - ¬¬, I -∀, I - ∃, E - ∀ e E - ∃.

Em todos esses casos, procedemos como nas demonstrações do Teorema de Normalização para $\mathbf{DNC}_{\omega}$ e do Teorema de Normalização para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$*,$1 \leq n < \omega$. □

3.6 A NÃO-TRIVIALIDADE E A PROPRIEDADE DE SUBFÓRMULA DOS SISTEMAS $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.

Nesta seção, como conseqüência dos Teoremas de Normalização, demonstramos que os sistemas de dedução natural de nossa hierarquia $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, são não-triviais.

Além disso, demonstramos que vale para os sistemas $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, uma propriedade específica de subfórmula

Teorema 3.6.1 Os sistemas $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, são não-triviais e consistentes.

Demonstração:

Idêntica às demonstrações dos Teoremas 2.5.12 e 2.5.13 do Capítulo 2, a partir da utilização dos respectivos Teoremas de Normalização. □

A seguir, relembramos a definição de subfórmula.

Definição 3.6.2 Dada uma fórmula **A**:

i) **A** é subfórmula de **A**;

ii) Se $\neg\mathbf{B}$ é uma subfórmula de **A**, então **B** é uma subfórmula de **A**;

iii) Se $\mathbf{B}\&\mathbf{C}$, $\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ ou $\mathbf{B}\supset\mathbf{C}$ é uma subfórmula de **A**, então **B** e **C** são subfórmulas de **A**;

iv) Se $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ou $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}(\mathbf{x})$, é uma subfórmula de A, então $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ é subfórmula de **A**.

Teorema 3.6.3 (**Princípio de Subfórmula** para $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$) Toda ocorrência de uma fórmula introduzida, por Regra de Introdução, em uma prova categórica normal Π de **A**, em $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, é subfórmula de **A**, com possível exceção das fórmulas que são suposições de aplicações de RTE, ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras Especiais, ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras de Eliminação.

Demonstração:

Segue das características das Regras de Dedução dos sistemas $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, da definição de subfórmula, da definição de prova categórica normal e da demonstração do Teorema de Normalização para esses sistemas, e pela definição de subfórmula. □

Teorema 3.6.4 O sistema $\mathbf{DNC}_\omega$* é consistente e não-trivial.

Demonstração:

Idêntica às demonstrações dos Teoremas 2.6.4 e Corolários 2.6.3 e 2.6.4 do Capítulo 2, a partir da utilização do respectivo Teorema de Normalização. □

Teorema 3.6.5 (**Princípio de Subfórmula** para $\mathbf{DNC}_\omega$*) Toda ocorrência de uma fórmula introduzida, por Regra de Introdução, em uma prova categórica normal Π de **A**, em $\mathbf{DNC}_\omega$* é subfórmula de **A**, com possível exceção das fórmulas que são suposições de aplicações de RTE, ou das fórmulas que são antecedentes de aplicações de Regras de Eliminação.

Demonstração:

Segue das características das Regras de Dedução do sistema $\mathbf{DNC}_\omega$*, da definição de prova categórica normal e da demonstração do Teorema de Normalização para esse sistema. □

4 A HIERARQUIA DE SISTEMAS DE TABLEAUX ANALÍTICOS TNDC$_n$, 1≤n<ω

Em 1968, quando a decidibilidade dos sistemas **C**$_n$, 1≤n≤ω, era um problema aberto, **Raggio 1968** introduz uma hierarquia de cálculos de seqüentes **CG**$_n$, 1≤n≤ω, buscando resolver esse problema - prova a equivalência entre cada cálculo de seqüentes **CG**$_n$ e o correspondente cálculo **C**$_n$ de da Costa, 1≤n≤ω, porém não é demonstrada a decidibilidade de **CG**$_n$, para todo n, 1≤n≤ω; a seguir, Raggio constrói uma nova hierarquia de cálculos de seqüentes, os sistemas **WG**$_n$, 1≤n≤ω, que são decidíveis - todavia, apesar desses sistemas terem propriedades semelhantes às dos cálculos **C**$_n$, para todo n, 1≤n≤ω, essas duas hierarquias de sistemas não são equivalentes.

Conforme mencionado no Capítulo 1, **da Costa e Alves 1976** e **Alves 1976** introduzem uma semântica de valorações para o cálculo **C**$_1$; **Alves 1976** e **da Costa e Alves 1977** introduzem uma semântica de valorações para os cálculos **C**$_n$, 1≤n<ω, que generaliza a semântica clássica de valorações, demonstrando a correção e completude desses cálculos. Introduzem o método de quase-matrizes, para demonstrar a decidibilidade dos sistemas **C**$_n$, 1≤n<ω.

Sette 1971 introduz a estrutura de hiper-reticulado, cujas propriedades algébricas correspondem à contrapartida algébrica das propriedades lógicas de **C**$_\omega$.

Loparić 1977, baseado no trabalho de da Costa e Alves, apresenta uma prova da completude e da decidibilidade do cálculo **C**$_\omega$.

Fidel, em 1970, usando métodos algébricos, havia provado a decidibilidade dos cálculos **C**$_n$, 1≤n≤ω. **Fidel 1977** introduz o conceito de **C**$_\omega$ - estrutura e demonstra a correção e completude de **C**$_\omega$.

Loparić e Alves 1980, baseado em **da Costa e Alves 1977**, modifica certas condições da definição de valoração de da Costa e Alves, resolve um problema relativo às quase-matrizes, e apresenta uma demonstração da completude e da decidibilidade dos sistemas **C**$_n$, 1≤n<ω.

Marconi 1980 introduz um sistema de tableaux semânticos, *à la* Beth (**Beth 1959**), e demonstra a completude e a decidibilidade do sistema proposicional $\mathbf{C}_1$ de Costa - também afirma que o método pode ser ampliado para os sistemas $\mathbf{C}_n$, $2 \leq n < \omega$, apesar de nada desenvolver a respeito. O sistema introduzido por Marconi está baseado nas mesmas intuições que fundamentam a definição de quase-matrizes introduzida por da Costa e Alves, simplificando o processo de verificação da validade das fórmulas. No sistema de Marconi as regras para os conetivos &, $\vee$ e $\supset$ são as usuais, e são adicionadas duas regras especiais para operar com a negação paraconsistente.

Béziau 1990, em seu memorial de DEA, introduz um novo sistema, *à la* Hilbert, para $\mathbf{C}_1$ e uma nova versão de sua semântica, com o objetivo de dar uma apresentação mais intuitiva para $\mathbf{C}_1$. Introduz um sistema de dedução natural M1 e um seu variante M'1, equivalentes a $\mathbf{C}_1$; e um cálculo de seqüentes S1 para $\mathbf{C}_1$, apresentando, pela primeira vez, um Teorema de Eliminação do Corte para $\mathbf{C}_1$.

Béziau 1993 apresenta uma parte dos resultados acima mencionados, relativos ao sistema $\mathbf{C}_1$ e alguns resultados suplementares.

No mesmo trabalho de 1976, Alves havia introduzido o sistema proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1^1$, um sistema mais forte que o sistema $\mathbf{C}_1$ de da Costa, mediante a substituição do esquema de axiomas $(\neg\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A})$ de $\mathbf{C}_1$ pelo esquema $(\neg\neg\mathbf{A}\equiv\mathbf{A})$.

Carnielli e Lima-Marques 1992 introduz sistemas de tableaux semânticos, *à la* Smullyan (**Smullyan 1968**), para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1^1$ e para a lógica quantificacional paraconsistente com igualdade $\mathbf{C}_1^{1=}$ de Alves, denominados sistemas $\mathbf{TC}_1$ e $\mathbf{TC}_1^=$ respectivamente, e apresenta uma prova de que esses sistemas são completos e decidíveis.

Buchsbaum e Pequeno 1993 introduz sistemas de tableaux sintáticos, também *à la* Smullyan, para o sistema $\mathbf{C}_1$* de da Costa, o sistema *S***C**1*, mostrando que *S***C**1* é completo.

Em ambos os artigos, **Carnielli e Lima-Marques 1992** e **Buchsbaum e Pequeno 1993**, são introduzidas regras derivadas (de expansão), com a finalidade de reduzir os comprimentos de ramos dos tableaux. Esses autores afirmam que seus sistemas de tableaux podem ser generalizados para toda a hierarquia $\mathbf{C}_n$, apesar de nada desenvolverem a respeito.

Conforme mencionado no Capítulo 2, **Castro 1998** aplica o método de dedução natural, através do método de provas subordinadas de Fitch (**Fitch 1952**), à hierarquia de lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de Costa. Castro introduz uma hierarquia de sistemas de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e demonstra que essa hierarquia é logicamente equivalente à hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, de Costa.

Castro e D'Ottaviano 2000 estuda a hierarquia de sistemas de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Apesar dos principais resultados sintáticos e semânticos constituírem uma conseqüência natural da equivalência lógica entre as hierarquias $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, é demonstrada a correção e a completude desses sistemas, a partir da semântica de da Costa e Alves, modificada por Loparić e Alves.

Neste capítulo, tendo por base a hierarquia de sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, introduzida no Capítulo 2, e usando o método de tableaux analíticos (**Smullyan 1968** e **van Fraassen 1971**), introduzimos a hierarquia de sistemas de tableaux analíticos $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, onde cada sistema $\mathbf{TNDC}_n$ é equivalente ao correspondente sistema $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, de Costa. Particularmente, o nosso sistema $\mathbf{TNDC}_1$ é distinto da formulação de Marconi, do sistema de tableaux $\mathbf{TC}_1$ de Carnielli e Lima-Marques, e da formulação de tableaux **SC**1 de Buchsbaum e Pequeno.

Nos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, introduzimos o operador definido "o" ("bola") de da Costa, os operadores "k" reiterados de nível k, os operadores generalizados "(k)" e as negações "$\sim_k$", $k \geq 1$, como operadores primitivos, diferentemente do que tem sido feito na literatura, onde esses operadores são usualmente definidos.

Na Seção 4.2, demonstramos uma Regra do Corte para os sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Na Seção 4.3, provamos que cada sistema da hierarquia $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, é logicamente equivalente ao correspondente sistema paraconsistente $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Finalizando o capítulo, apresentamos algumas considerações relativas à decidibilidade dos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

O nosso sistema $\mathbf{TNDC}_1$ constitui um sistema de prova automática de teoremas.

No sistema ***S*C**1* de Buchsbaum e Pequeno não há uma regra que, *a priori*, determine explicitamente quando a definição do operador "o" deve ser usada, ou não, durante as derivações; por causa disso, é possível ocorrer ramos abertos que devem ser reconstruídos, de um modo distinto, a partir da mencionada ocorrência do operador “o”.

Também nos sistemas $\mathbf{TC}_1$ e $\mathbf{TC}_1^{=}$ de Carnielli e Lima-Marques não há regras específicas que determinem, *a priori*, quando deve ser empregada a definição do operador “o”, o que torna necessária a reconstrução de ramos. Particularmente, nestes sistemas podem acontecer infinitos retornos, adiando indefinidamente, de acordo com os próprios autores, a análise final das fórmulas nas quais o operador primitivo de negação está envolvido e, como uma conseqüência natural, também a análise final de fórmulas nas quais ocorre o operador “o”. Carnielli e Lima-Marques apresentam uma prova da decidibilidade de $\mathbf{TC}_1$ e $\mathbf{TC}_1^{=}$, indicando como tratar com os retornos infinitos.

No nosso sistema $\mathbf{TNDC}_1$, assim como em cada $\mathbf{TNDC}_n$, $1<n<\omega$, existem regras específicas que operam objetivamente com o operador “o”, como também com os operadores “k”, “(k)”, “$\sim_k$” e, dessa maneira, os ramos dos tableaux são unívoca e automaticamente gerados. Nos tableaux dos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, retornos infinitos não ocorrem.

De fato, nos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, não usamos definições na geração dos ramos dos tableaux, pois temos regras específicas para lidar diretamente com todos os operadores: os conetivos clássicos primitivos para a conjunção, disjunção, implicação e negações fortes; os conectivos primitivos não-clássicos “bola” e a negação paraconsistente; e os operadores paraconsistentes generalizados *k*-bola, $k\geq 1$.

Assim sendo, todos os sistemas de nossa hierarquia $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, também constituem sistemas de demonstração automática de teoremas.

Outra peculiaridade dos nossos sistemas de tableaux é que, diferentemente do que está na literatura, definimos duas condições para o fechamento dos ramos dos tableaux em $\mathbf{TNDC}_n$: um ramo fecha pela negação forte “$\sim_n$”, como é usual, ou fecha pela negação paraconsistente “$\neg$” e condições adicionais.

Assim sendo, nossa hierarquia $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, equivalente à hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, de da Costa, tem uma concepção distinta dos sistemas de tableaux existentes na literatura para o cálculo $\mathbf{C}_1$.

Nossos sistemas são introduzidos a partir de uma quantidade enumerável (infinita) de operadores primitivos, para cada sistema, o que nos permite finalmente captar os sistemas **C_n** de da Costa, $1 \leq n < \omega$, como extensões paraconsistentes da lógica clássica.

Na geração de nossa hierarquia de sistemas **$TNDC_n$**, $1 \leq n < \omega$, foi também necessário resolver problemas específicos concernentes às relações entre os distintos operadores generalizados para a negação e o "bom-comportamento", em cada sistema e entre os diferentes sistemas da hierarquia **$TNDC_n$**. Desse modo, pudemos demonstrar, via tableaux analíticos, resultados que relacionam entre si os diferentes sistemas **C_n** da hierarquia de da Costa, $1 < n < \omega$.

4.1 SISTEMAS DE TABLEAUX ANALÍTICOS PARA OS SISTEMAS C_n, $1 \leq n < \omega$

Nesta seção, introduzimos versões de tableaux analíticos, *à la* **Smullyan 1968**, para os sistemas de da Costa **C_n**, $1 \leq n < \omega$, denominados **$TNDC_n$**. Adaptamos a noção de seqüência de tableau apresentada por **van Fraassen 1971**.

A linguagem $\mathcal{L}$ dos sistemas **$TNDC_n$**, $1 \leq n < \omega$, é a linguagem das lógicas **C_n**, exceção feita ao símbolo "o" (bola), aos símbolos "k" e "(k)" para $k \geq 1$, e às negações "$\sim_k$" para $k \geq 1$, os quais são considerados como símbolos primitivos.

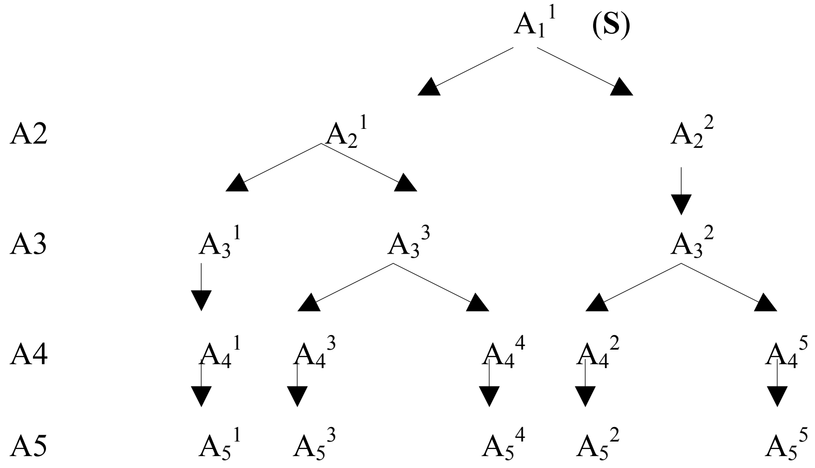
A linguagem $\mathcal{L}$, portanto, contém um conjunto enumerável (infinito) de conectivos primitivos.

O método de tableaux é baseado em regras de expansão, que nos permitem analisar as fórmulas de $\mathcal{L}$. Essencialmente, as regras de expansão nos permitem expandir uma sucessão de fórmulas em outra sucessão de fórmulas.

Definição 4.1.1 Para todo sistema de tableaux $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, uma *seqüência de tableau* para uma determinada fórmula **S**, ou simplesmente um *tableau*, é uma sucessão de expressões $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,..., $\mathbf{A}_k$, tal que a fórmula **S** é colocada na origem do tableau, como a expressão inicial $\mathbf{A}_1$; e cada expressão $\mathbf{A}_i$, $1 < i \leq k$, corresponde a uma disjunção finita $\mathbf{A}_i^1$ ou ... ou $\mathbf{A}_i^m$, $m \geq 1$, onde toda $\mathbf{A}_i^j$, $1 \leq j \leq m$, é gerada a partir das expressões precedentes $\mathbf{A}_p^j$, aplicando uma das Regras de Expansão 4.1.4 do sistema. Denominamos cada $\mathbf{A}_i^j$ um *disjunto* da expressão $\mathbf{A}_i$.

Definição 4.1.2 Um *ramo j* de uma seqüência de tableau, $1 \leq j \leq m$, corresponde a uma seqüência de expressões A_i^s, $1 \leq i \leq k$, sendo A_1^1 a primeira expressão e A_k^j a última. O índice superior s é igual a 1 ($s = 1$), para $1 \leq i \leq i'$, para algum $i' \leq k$; $s = j$, para $i'' \leq i \leq k$, para algum $i'' > i'$; e para $i' < i < i''$, s assume valores entre 1 e j.

Exemplo esquemático:



Observamos que a seqüência de tableau tem a estrutura de uma árvore, se omitimos a disjunção, e escrevemos os resultados da aplicação de uma regra qualquer abaixo do disjunto no qual a regra é aplicada. Assim sendo, se pensamos a disjunção como indicando uma ramificação, o tableau tem a estrutura de uma árvore diádica ordenada, *à la* **Smullyan 1968**.

Para facilidade de utilização, as expressões de um dado ramo j de um tableau serão identificadas como do tipo A_i^j, com $1 \leq i \leq k$ e j fixo, $1 \leq j \leq m$.

Definição 4.1.3 Um *nó* corresponde a cada expressão $\mathbf{A}_i^j$ de cada ramo do tableau, com $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$.

A seguir, denotamos as fórmulas de $\mathscr{L}$ pelas letras do alfabeto grego α, β, χ, ... , ζ.

Agora, suponhamos que **T** seja um tableau, que está sendo construído, para uma fórmula inicial **A**. Dado um certo ramo j, seja $\mathbf{A}_{i-1}^j$ a última expressão do ramo. Então, podemos estender **T** por uma das cinco operações seguintes:

(i) Se a fórmula α ocorre no ramo da última expressão $\mathbf{A}_{i-1}^j$, então, se δ_i^j e δ_{i+1}^j são geradas a partir de α por uma das Regras de Tipo Conjuntivo **C** do sistema, podemos simultaneamente acrescentar as fórmulas δ_i^j e δ_{i+1}^j como as próximas expressões, no ramo j, após $\mathbf{A}_{i-1}^j$;

(ii) Se a fórmula β ocorre no ramo da última expressão $\mathbf{A}_{i-1}^j$, então, se β_1 ou β_2 é gerada de β por uma das Regras de Tipo Disjuntivo **D** do sistema, podemos simultaneamente acrescentar a fórmula β_1 à esquerda de $\mathbf{A}_{i-1}^j$, como o nó δ_i^j, e a fórmula β_2 como a próxima expressão à direita de $\mathbf{A}_{i-1}^{j+1}$ como o nó δ_i^{j+1};

(iii) Se a fórmula γ ocorre no ramo da última expressão $\mathbf{A}_{i-1}^j$, então, se δ_i^j é gerada de γ por uma das Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_1$ do sistema, podemos acrescentar, no ramo j, após $\mathbf{A}_{i-1}^j$, a formula δ_i^j como a próxima expressão;

(iv) Se as fórmulas φ_1, ..., φ_m ocorrem no ramo da última expressão $\mathbf{A}_{i-1}^j$ então, se a formula δ_i^j é gerada de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ por uma das Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_2$ do sistema, então, podemos acrescentar, no ramo j, após $\mathbf{A}_{i-1}^j$, a formula δ_i^j como a próxima expressão;

(v) Se a fórmula ε ocorre no ramo da última expressão $\mathbf{A}_{i-1}^j$ então, se a formula ζ_i^j é gerada de ε por uma das Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_3$ do sistema, então, podemos acrescentar, no ramo j, após $\mathbf{A}_{i-1}^j$, a formula ζ_i^j como a próxima expressão.

Regras de Expansão 4.1.4 As *regras de expansão* dos sistemas de tableaux $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, são as seguintes.

4.1.4.1 *Regras de Tipo Conjuntivo* **C**:

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\delta_i^j\\ \delta_{i+1}^j\end{array}}$$

α	$\delta_i^{\ j}$	$\delta_{i+1}^{\ j}$	Nome da Regra
$\mathbf{A}\&\mathbf{B}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E&
$\mathbf{A}^{(k)}$	$\mathbf{A}^k$	$\mathbf{A}^{(k-1)}$	E(k), $k>1$
$\neg(\mathbf{A}^k)$	$\mathbf{A}^{k-1}$	$\neg(\mathbf{A}^{k-1})$	Ek$\neg$, $k\geq1$, onde $\mathbf{A}^0$ é $\mathbf{A}$
$\neg(\mathbf{A}^{(k)})$	$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	E(k)$\neg$, $k\geq1$
$\sim_n\neg\mathbf{A}$	$\neg\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^{(n)}$	E$\sim_n\neg$
$\sim_n(\mathbf{A}^k)$	$\neg(\mathbf{A}^k)$	$(\mathbf{A}^k)^{(n)}$	Ek$\sim_n$, $k\geq1$
$\sim_n(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$\sim_n\mathbf{A}$	$\sim_n\mathbf{B}$	DND$\sim_n$
$\sim_n(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	$\mathbf{A}$	$\sim_n\mathbf{B}$	DNI$\sim_n$
$\sim_n(\mathbf{A}^{(k)})$	$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	E(k)$\sim_n$, $k\geq1$
$\sim_k\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^{(k)}$	E$\sim_k$, $k<n$ (i)

4.1.4.2 *Regras de Tipo Disjuntivo* **D**:

$$\frac{\beta}{\delta_i^j \;\mid\; \delta_i^{j+1}}$$

β	δ_i^j	δ_i^{j+1}	Nome da Regra
$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E$\vee$
$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	$\sim_n\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E$\supset$
$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	$\neg\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{B}$	DNC$\neg$, onde **B** é distinta de $\neg\mathbf{A}$ (ii)
$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$	$\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DND$\neg$
$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	$\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$	$\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DNI$\neg$
$\sim_n(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	$\sim_n\mathbf{A}$	$\sim_n\mathbf{B}$	DNC$\sim_n$

4.1.4.3 *Regras de Tipo Especial* **S**$_1$:

$$\frac{\gamma}{\delta_i^j}$$

γ	δ_i^j	Nome da Regra
$\neg\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\neg\neg$
$\neg\sim_k\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\neg\sim_k$, $k \geq 1$
$\sim_n\sim_k\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\sim_n\sim_k$, $k \geq 1$
$\sim_k\mathbf{A}$	$\sim_{k-1}\mathbf{A}$	R$\sim_k$, $k > n$
$\mathbf{A}^k$	$\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1})$	Rk, $k\geq 1$, onde $\mathbf{A}^0$ é $\mathbf{A}$ (iii)
$\mathbf{A}^{(1)}$	$\mathbf{A}^1$	E(1)

4.1.4.4 *Regras de Tipo Especial* **S**$_2$:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m\end{array}}{\delta_i^j}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$	δ_i^j	Nome da Regra
$\{\neg\mathbf{A}, \mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^k\}$	$\sim_k\mathbf{A}$	I$\sim_k$, $k < n$
$\{\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^k\}$	$\mathbf{A}^{(k)}$	I(k), $k < n$ (i)

4.1.4.5 *Regras de Tipo Especial* **S**$_3$ (iv):

$$\frac{\varepsilon}{\zeta_i^j}$$

ε	ζ_i^j	Nome da Regra
$\mathbf{A}^{oo\ldots o}$	$\mathbf{A}^k$	Eo (com "o" k-vezes)
$\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1})$	$\mathbf{A}^k$	Ik, $k\geq 1$, onde $\mathbf{A}^0$ é $\mathbf{A}$
$(\mathbf{A}^s)^k$	$\mathbf{A}^{s+k}$	I s+k, para s, $k \geq 1$
$\mathbf{A}^1\&\mathbf{A}^2\&\ldots\&\mathbf{A}^k$	$\mathbf{A}^{(k)}$	I´(k) , $k\geq 1$ (v)
$\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)}$	$\sim_k\mathbf{A}$	I´$\sim_k$, $k\geq 1$ (v)

(i) Esta Regra só pode ser aplicada uma única vez, em cada ramo e para cada fórmula.

(ii) Se **A** é do tipo ($\mathbf{C}^{k-1}\&\neg(\mathbf{C}^{k-1})$), então **B** deve ser distinta de $\mathbf{C}^k$.

(iii) Esta Regra só deve ser aplicada após não haver a possibilidade de aplicação de qualquer outra Regra; pode ser aplicada em subfórmulas de fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, deve ser aplicada de "fora para dentro", isto é, do conectivo de maior escopo para o conectivo de menor escopo.

(iv) As Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_3$ devem ser aplicadas imediatamente, em cada caso, logo após a aplicação da primeira Regra aplicada no nó inicial do tableau; podem ser aplicadas em subfórmulas das fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, devem ser aplicadas de "fora para dentro".

(v) Estas Regras, nas condições (iv), só podem ser aplicadas em subfórmulas próprias de fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, devem ser aplicadas de "fora para dentro".

Observação 4.1.5 Na aplicação das Regras de Expansão é mais eficiente dar prioridade às Regras de Tipo **C** e às Regras de Tipo Especial.

Observação 4.1.6 Observamos que A^0, que corresponde à fórmula **A** com índice superior "0" (numeral 0), coincide com a fórmula **A**. E esta fórmula é distinta da fórmula $\mathbf{A}^o$ ("**A**-bola"), isto é, ela é distinta da fórmula "**A** é uma fórmula bem-comportada".

Nas Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_2$ usamos a notação de conjunto para indicar que não é relevante a ordem em que as fórmulas ocorrem nos nós de um determinado ramo.

Observamos, ainda, que as únicas Regras que podem ser aplicadas a subfórmulas, são as Regras de Tipo Especial $\mathbf{S}_3$ e a Regra Rk.

Definição 4.1.7 Para cada sistema $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$, um ramo $\mathbf{A}_1^j, \ldots, \mathbf{A}_s^j$ de um tableau é denominado um *ramo fechado* se existem nós $\mathbf{A}_r^j$, $1\leq r\leq s$, que correspondem às fórmulas **B** e $\sim_n\mathbf{B}$, ou às fórmulas **B**, $\neg\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \ldots, \mathbf{B}^n$.

A próxima definição nos fornece o critério de fechamento para os tableaux.

Definição 4.1.8 Dada uma fórmula **S**, um *tableau* para **S** é *fechado* se todos os seus ramos são fechados; caso contrário, é *aberto*.

.

Definição 4.1.9 Um *conjunto de fórmulas* Γ é *fechado* se, e somente se, existe um subconjunto finito Γ_0 de Γ, tal que existe um tableau fechado para a fórmula que é a conjunção das fórmulas de Γ_0; caso contrário, Γ é *aberto*.

A seguir, usamos Γ, **A** como uma abreviação para $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\}$[14].

Definição 4.1.10 Para cada sistema de tableaux **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, uma fórmula **S** é uma *conseqüência analítica* de um conjunto Γ de fórmulas se, e somente se, Γ, $\sim_n$**S** é fechado. Dizemos também que Γ, através das Regras de Expansão de **TNDC**$_n$, *gera* **S** .

Isso é denotado por: $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$.

Observamos que uma fórmula **S** é demonstrável em **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, se é possível gerar um tableau fechado, a partir da fórmula inicial $\sim_n$ **S**.

Definição 4.1.11 Em cada sistema de tableaux **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, uma fórmula **S** é *demonstrável* se, e somente se, existe um tableau fechado para $\sim_n$ **S**, isto é, $\{\sim_n \mathbf{S}\}$ é fechado.

Isso é denotado por: $\vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$.

Definição 4.1.12 Dado um tableau **T** em **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, um *ramo j* é *completo* se, e somente se, não há qualquer Regra de Expansão que possa ainda ser aplicada a qualquer dos nós de θ; além disso, se cada ramo de qualquer tableau expandido a partir de θ pelas Regra de Expansão é completo ou fechado.

Definição 4.1.13 Um tableau **T** em **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, é *completo* se, e somente se, todo ramo θ de **T** é fechado ou é completo.

---

[14] Γ, **A**, **B** é o mesmo que Γ, **B**, **A**.

Exemplos 4.1.14 Apresentamos, a seguir, a título de ilustração, exemplos de provas nos sistemas $\mathbf{TNDC}_n$, $1\leq n<\omega$.

Observamos que as regras usadas na geração dos nós são indicadas imediatamente à direita do nó gerado pela regra; os números à esquerda de cada nó foram acrescentados para facilitar a descrição do tableau e não são parte dele; o sinal “*” significa que o ramo fechou.

a) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_1} (\mathbf{A})^{oo}$

1	$\sim_1((\mathbf{A})^{oo})$	
2	$\sim_1((\mathbf{A})^{2})$	1, Eo
3	$\neg((\mathbf{A})^{2})$	2, E2$\sim_1$
4	$((\mathbf{A})^{2})^{(1)}$	2, E2$\sim_1$
5	$\mathbf{A}^{1}$	3, E2$\neg$
6	$\neg((\mathbf{A})^{1})$	3, E2$\neg$
7	$\mathbf{A}$	6, E1$\neg$
8	$\neg\mathbf{A}$	6, E1$\neg$
	*	

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 5, 7 e 8, isto é, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$, respectivamente.

b) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_2} (\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1)^{(2)}$

1	$\sim_2((\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1)^{(2)})$	
2	$(\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1)$	1, E(2) $\sim_2$
3	$\neg(\mathbf{A}^1\&\neg\mathbf{A}^1)$	1, E(2) $\sim_2$
4	$\mathbf{A}^{2}$	3, I2
5	$\mathbf{A}^{1}$	2, E&
6	$\neg(\mathbf{A}^{1})$	2, E&
7	$\mathbf{A}$	6, E1$\neg$
8	$\neg\mathbf{A}$	6, E1$\neg$
	*	

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 4, 5, 7 e 8, isto é, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$, respectivamente.

c) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_6} (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$

1 $\sim_6((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))$

2 $(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ 1, DNI$\sim_6$

3 $\sim_6(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$ 1, DNI$\sim_6$

4 $\sim_6\neg\mathbf{A}$ 3, DND$\sim_6$

5 $\sim_6\mathbf{B}$ 3, DND$\sim_6$

6 $\neg\neg\mathbf{A}$ 4, E$\sim_6\neg$

7 $\mathbf{A}^{(6)}$ 4, E$\sim_6\neg$

8 $\mathbf{A}$ 6, E$\neg\neg$

9 $\mathbf{A}^{6}$ 7, E(6)

10 $\mathbf{A}^{(5)}$ 7, E(6)

11 $\mathbf{A}^{5}$ 10, E(5)

12 $\mathbf{A}^{(4)}$ 10, E(5)

13 $\mathbf{A}^{4}$ 12, E(4)

14 $\mathbf{A}^{(3)}$ 12, E(4)

15 $\mathbf{A}^{3}$ 14, E(3)

16 $\mathbf{A}^{(2)}$ 15, E(3)

17 $\mathbf{A}^{2}$ 16, E(2)

18 $\mathbf{A}^{(1)}$ 16, E(2)

19 $\mathbf{A}^{1}$ 18, E(1)

20 $\sim_6\mathbf{A}$ 2, E$\supset$ 21 $\mathbf{B}$ 2, E$\supset$

* *

O tableau fecha no primeiro ramo pelas fórmulas $\sim_6\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 8 e 20, e no segundo ramo pelas fórmulas $\mathbf{B}$ e $\sim_6\mathbf{B}$, que ocorrem nos nós 5 e 21.

d) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_3} (\mathbf{A}^{(3)}\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$

1	$\sim_3(\mathbf{A}^{(3)}\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$	
2	$\mathbf{A}^{(3)}$	1, DNI$\sim_3$
3	$\sim_3(((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})))$	1, DNI$\sim_3$
7	$(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	3, DNI$\sim_3$
8	$\sim_3((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$	3, DNI$\sim_3$
9	$(\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})$	8, DNI$\sim_3$
10	$\sim_3\neg\mathbf{B}$	8, DNI$\sim_3$
11	$\neg\neg\mathbf{B}$	10, E$\sim_3\neg$
12	$\mathbf{B}^{(3)}$	10, E$\sim_3\neg$
13	$\mathbf{B}$	11, E$\neg\neg$
14	$\mathbf{B}^3$	12, E(3)
15	$\mathbf{B}^{(2)}$	12, E(3)
16	$\mathbf{B}^2$	15, E(3)
17	$\mathbf{B}^{(1)}$	15, E(3)
18	$\mathbf{B}^1$	17, E(1)
19	$\mathbf{A}^3$	2, E(3)
20	$\mathbf{A}^{(2)}$	2, E(3)
21	$\mathbf{A}^2$	20, E(2)
22	$\mathbf{A}^{(1)}$	20, E(2)
23	$\mathbf{A}^1$	22, E(1)

24 $\sim_3\mathbf{B}$ 7, E$\supset$
*

25 $\mathbf{A}$ 7, E$\supset$

26 $\sim_3\mathbf{B}$ 9, E$\supset$
*

27 $\neg\mathbf{A}$ 9, E$\supset$
*

O tableau fecha no primeiro e no segundo ramos pelas fórmulas $\sim_3\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}$, que ocorrem nos nós 13 e 24, 13 e 26, respectivamente; e no terceiro ramo pelas fórmulas $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 19, 21, 23, 25 e 27.

e) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_{15}} ((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A}$

1 $\sim_{15}(((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})\supset\mathbf{A})$

2 $((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset\mathbf{A})$ 1, DNI$\sim_{15}$

3 $\sim_{15}\mathbf{A}$ 1, DNI$\sim_{15}$

4 $\sim_{15}(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$ 2, DNI$\sim_{15}$ 5 $\mathbf{A}$ 2, DNI$\sim_{15}$

*

6 $\mathbf{A}$ 4, DNI$\sim_{15}$

7 $\sim_{15}\mathbf{B}$ 4, DNI$\sim_{15}$

*

O tableau fecha nos dois ramos pelas fórmulas $\sim_{15}\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$, que ocorrem, no primeiro ramo, nos nós 3 e 6, e nos nós 3 e 5 do segundo ramo.

f) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_n} (\neg(\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))\&\neg\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))))^s\supset(\mathbf{A}^{ooo})^s$

1 $\sim_n((\neg(\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))\&\neg\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))))^s\supset(\mathbf{A}^{ooo})^s)$

2 $(\neg(\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))\&\neg\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))))^s$ 1, DNI$\sim_n$

3 $\sim_n((\mathbf{A}^{ooo})^s)$ 1, DNI$\sim_n$

4 $((\neg(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))^1)^s$ 2, I1

5 $(((\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))^1)^1)^s$ 4, I1

6 $(((\mathbf{A}^1)^1)^1)^s$ 5, I1

7 $((\mathbf{A}^1)^1)^{1+s}$ 6, I1+s

8 $(\mathbf{A}^1)^{2+s}$ 7, I1+(1+s)

9 $\mathbf{A}^{3+s}$ 8, I1+(2+s)

10 $\sim_n((\mathbf{A}^3)^s)$ 3, Eo

11 $\sim_n(\mathbf{A}^{3+s})$ 10, I3+s

*

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós (9) e (11), isto é, $\mathbf{A}^{3+s}$ e $\sim_n(\mathbf{A}^{3+s})$.

4.1.15 O Sistema **TNDC**$_1$

A seguir, especificamos o primeiro sistema de nossa hierarquia **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$.

O sistema **TNDC**$_1$ corresponde, entre os sistemas de tableaux acima mencionados, ao sistema equivalente ao cálculo paraconsistente **C**$_1$ de da Costa.

Esta sub-seção facilitará a análise comparativa entre as provas em nosso sistema **TNDC**$_1$, e as provas nos sistemas de **Marconi 1980**, **Carnielli e Lima-Marques 1992** e **Buchsbaum e Pequeno 1993**, que apresentamos no ANEXO 3.

Regras de Expansão 4.1.15.1 As *regras de expansão* do sistema de tableaux **TNDC**$_1$ são as seguintes.

4.1.15.1.1 *Regras de Tipo Conjuntivo* **C**:

$$\begin{array}{c}\alpha\\ \hline \delta_i^j\\ \delta_{i+1}^j\end{array}$$

α	δ_i^j	δ_{i+1}^j	Nome da Regra
$\mathbf{A\&B}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E&
$\mathbf{A}^{(k)}$	$\mathbf{A}^k$	$\mathbf{A}^{(k-1)}$	E(k), $k>1$
$\neg(\mathbf{A}^k)$	$\mathbf{A}^{k-1}$	$\neg(\mathbf{A}^{k-1})$	Ek¬, $k\geq 1$, onde $\mathbf{A}^0$ é $\mathbf{A}$
$\neg(\mathbf{A}^{(k)})$	$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	E(k)¬, $k\geq 1$
$\sim_1(\mathbf{A}^k)$	$\neg(\mathbf{A}^k)$	$(\mathbf{A}^k)^{(1)}$	Ek$\sim_1$, $k \geq 1$
$\sim_1(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$\sim_1\mathbf{A}$	$\sim_1\mathbf{B}$	DND$\sim_1$
$\sim_1(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	$\mathbf{A}$	$\sim_1\mathbf{B}$	DNI$\sim_1$
$\sim_1(\mathbf{A}^{(k)})$	$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$	E(k)$\sim_1$, $k\geq 1$

4.1.15.1.2 *Regras de Tipo Disjuntivo* **D**:

$$\frac{\beta}{\delta_i^j \mid \delta_i^{j+1}}$$

β	δ_i^j	δ_i^{j+1}	Nome da Regra
$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E$\vee$
$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$	$\sim_1\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	E$\supset$
$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	$\neg\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{B}$	DNC$\neg$, onde **B** é distinta de $\neg\mathbf{A}$ (i)
$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$\neg(\mathbf{A}^{(1)}\&\mathbf{B}^{(1)})$	$\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DND$\neg$
$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	$\neg(\mathbf{A}^{(1)}\&\mathbf{B}^{(1)})$	$\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	DNI$\neg$
$\sim_1(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$	$\sim_1\mathbf{A}$	$\sim_1\mathbf{B}$	DNC$\sim_1$

4.1.15.1.3 *Regras de Tipo Especial* $\mathbf{S}_1$:

$$\frac{\gamma}{\delta_i^j}$$

γ	δ_i^j	Nome da Regra
$\neg\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\neg\neg$
$\sim_1\neg\mathbf{A}$	$\neg\neg\mathbf{A}$	E$\sim_1\neg$
$\neg\sim_k\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\neg\sim_k$, $k \geq 1$
$\sim_1\sim_k\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	E$\sim_1\sim_k$, $k \geq 1$
$\sim_k\mathbf{A}$	$\sim_{k-1}\mathbf{A}$	R$\sim_k$, $k > 1$
A^k	$\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1})$	Rk, $k\geq 1$, onde $\mathbf{A}^0$ é **A** (ii)
$\mathbf{A}^{(1)}$	$\mathbf{A}^1$	E(1)

4.1.15.1.4 *Regras de Tipo Especial* **S**$_2$ (iii): $\dfrac{\varepsilon}{\zeta_i^j}$

ε	ζ_i^j	Nome da Regra
$\mathbf{A}^{oo...o}$	$\mathbf{A}^k$	Eo (com "o" k-vezes)
$\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1})$	$\mathbf{A}^k$	Ik, k≥1, onde $\mathbf{A}^0$ é **A**
$(\mathbf{A}^s)^k$	$\mathbf{A}^{s+k}$	I s+k, para s, k ≥1
$\mathbf{A}^1\&\mathbf{A}^2\&...\&\mathbf{A}^k$	$\mathbf{A}^{(k)}$	I´(k) , k≥1 (iv)
$\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)}$	$\sim_k\mathbf{A}$	I´$\sim_k$, k≥1 (iv)

Como no caso geral, temos as restrições seguintes.

(i) Se **A** é do tipo $(\mathbf{C}^{k-1}\&\neg(\mathbf{C}^{k-1}))$, então **B** deve ser distinta de $\mathbf{C}^k$.

(ii) Esta Regra só deve ser aplicada após não haver a possibilidade de aplicação de qualquer outra Regra; pode ser aplicada em subfórmulas de fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, deve ser aplicada de "fora para dentro".

(iii) As Regras de Tipo Especial **S**$_2$ devem ser aplicadas imediatamente, em cada caso, logo após a aplicação da primeira Regra aplicada no nó inicial do tableau; podem ser aplicadas em subfórmulas das fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, devem ser aplicadas de "fora para dentro".

(iv) Estas Regras, nas condições (iii), só podem ser aplicadas em subfórmulas próprias de fórmulas que ocorrem nos nós e, nestes casos, devem ser aplicadas de "fora para dentro".

Observação 4.1.15.2 Na aplicação das Regras de Expansão é mais eficiente dar prioridade às Regras de Tipo **C** e às Regras de Tipo Especial.

Observação 4.1.15.3 A Observação 4.1.6 também se aplica em **TNDC**$_1$.

Exemplos 4.1.15.4 Apresentamos, a seguir, a título de ilustração, exemplos de provas nos sistemas **TNDC**$_1$:

a) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_1} (\sim_1\mathbf{A})^o$

1	$\sim_1((\sim_1\mathbf{A})^o)$	
	$\downarrow$	
2	$\sim_1((\sim_1\mathbf{A})^1)$	1, Eo
	$\downarrow$	
3	$\neg((\sim_1\mathbf{A})^1)$	2, E1$\sim_1$
	$\downarrow$	
4	$(\sim_1\mathbf{A})^{(1)}$	2, E1$\sim_1$
	$\downarrow$	
5	$\sim_1\mathbf{A}$	3, E1$\neg$
	$\downarrow$	
6	$\neg\sim_1\mathbf{A}$	3, E1$\neg$
	$\downarrow$	
7	$\mathbf{A}$	6, E$\neg\sim_1$
	*	

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 5 e 7, isto é, $\sim_1\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$.

b) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_1} (\sim_5\mathbf{A})^1$

1	$\sim_1((\sim_5\mathbf{A})^1)$	
	$\downarrow$	
2	$\neg((\sim_5\mathbf{A})^1)$	1, E1$\sim_1$
	$\downarrow$	
3	$(\sim_5\mathbf{A})^1)^{(1)}$	1, E1$\sim_1$
	$\downarrow$	
4	$\sim_5\mathbf{A}$	2, E1$\neg$
	$\downarrow$	
5	$\neg(\sim_5\mathbf{A})$	2, E1$\neg$
	$\downarrow$	
6	$\mathbf{A}$	5, E$\neg\sim_5$
	$\downarrow$	
7	$\sim_4\mathbf{A}$	4, R$\sim_5$
	$\downarrow$	
8	$\sim_3\mathbf{A}$	7, R$\sim_4$
	$\downarrow$	
9	$\sim_2\mathbf{A}$	8, R$\sim_3$
	$\downarrow$	
10	$\sim_1\mathbf{A}$	9, R$\sim_2$
	*	

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 6 e 10, isto é, $\mathbf{A}$ e $\sim_1\mathbf{A}$.

c) Demonstrar que

$\vdash_{\mathbf{TNDC}_1} \mathbf{A}\supset(\neg\mathbf{A}\supset\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$

1	$\sim_1(\mathbf{A}\supset(\neg\mathbf{A}\supset\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})))$	
	$\downarrow$	
2	$\mathbf{A}$	1, DNI$\sim_1$
	$\downarrow$	
3	$\sim_1(\neg\mathbf{A}\supset\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$	1, DNI$\sim_1$
	$\downarrow$	
4	$\sim_1(\neg\mathbf{A}\supset\neg(\mathbf{A}^1))$	3, I1
	$\downarrow$	
5	$\neg\mathbf{A}$	4, DNI$\sim_1$
	$\downarrow$	
6	$\sim_1(\neg(\mathbf{A}^1))$	4, DNI$\sim_1$
	$\downarrow$	
7	$\neg\neg(\mathbf{A}^1)$	6, E$\sim_1\neg$
	$\downarrow$	
8	$\mathbf{A}^1$	7, E$\neg\neg$
	*	

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 2, 5 e 8, isto é, $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^1$.

4.2 REGRA DO CORTE PARA OS SISTEMAS TNDC$_n$, 1≤n<ω

O próximo teorema nos dá uma versão especial da Regra do Corte para os sistemas **TNDC**$_n$.

Lema 4.2.1 Se Γ, **A** é fechado, então Γ, **A**, **B** é fechado.

Demonstração:

Imediata, a partir da Definição 4.1.9. □

Teorema 4.2.2 (**Regra do Corte**) Em cada sistema **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, existe um tableau fechado para um conjunto Γ de fórmulas se, e somente se, para uma dada fórmula **S**, existem tableaux fechados para $\Gamma\cup\{\mathbf{S}\}$ e $\Gamma\cup\{\sim_n\mathbf{S}\}$, ou para $\Gamma\cup\{\mathbf{S}\}$ e $\Gamma\cup\{\neg\mathbf{S}, \mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, ..., \mathbf{S}^n\}$.

Demonstração:

Se existe um tableau fechado para Γ, pelo Lema 4.2.1, é imediato que existem tableaux fechados para Γ, **S** e Γ, $\sim_n$**S**, ou para Γ, **S** e Γ, $\neg$**S**, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, ..., $\mathbf{S}^n$.

Agora, suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, **S** e Γ, $\sim_n$**S**, ou existem tableaux fechados para Γ, **S** e Γ, $\neg$**S**, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, ..., $\mathbf{S}^n$. A demonstração de que existe um tableau fechado para Γ é feita por indução sobre a complexidade da fórmula **S**.

1 Seja **S** uma fórmula atômica **A**.

Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, **A** e Γ, $\sim_n$**A**. Nos casos em que $\mathbf{A}\in\Gamma$ ou $\sim_n\mathbf{A}\in\Gamma$, é imediato que Γ é fechado. Portanto, temos que analisar somente o caso em que $\mathbf{A}\notin\Gamma$ e $\sim_n\mathbf{A}\notin\Gamma$. Se Γ, **A** ou Γ, $\sim_n$**A** é fechado, apenas devido a fórmulas de Γ, então Γ é fechado e nada temos a demonstrar; a mesma explicação é aplicável ao caso em que Γ, **A** e Γ, $\neg$**A**, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^n$ são fechados.

1.1 Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, **A** e para Γ, $\sim_n$**A**. Observamos que de **A** atômica não podemos gerar qualquer fórmula, e de $\sim_n$**A** também não podemos gerar qualquer fórmula.

Se Γ, **A** é fechado então, pela Definição 4.1.9, existe um tableau **T** tal que seus ramos são fechados por $\sim_n$**A**, ou por $\neg$**A**, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^n$. Como Γ, $\sim_n$**A** também é fechado, então existe um tableau fechado **T**′, tal que seus ramos são fechados por **A**, ou por $\sim_n\sim_n$**A**, ou por $\neg\sim_n$**A** e $(\sim_n\mathbf{A})^1$, $(\sim_n\mathbf{A})^2$, ... , $(\sim_n\mathbf{A})^n$; ou seja, pelas Regras $E\sim_n\sim_k$ e $E\neg\sim_k$, a fórmula **A** ocorre em todos os ramos de **T**′.

Então, nos tableaux **T** e **T**′ as fórmulas $\sim_n$**A** ou $\neg$**A**, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^n$ (em **T**) e **A** (em **T**′), respectivamente, são diretamente geradas, pelas Regras de Expansão, a partir de Γ, pois, nem $\sim_n$**A**, $\neg$**A**, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^n$ poderiam ser gerados de **A**, nem **A** poderia ser gerada de $\sim_n$**A**.

Conseqüentemente, existe um tableau fechado para Γ e assim, pela Definição 4.1.9, Γ é fechado.

1.2 Suponhamos que existem tableaux fechados para $\Gamma, \mathbf{A}$ e para $\Gamma, \neg\mathbf{A}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$. Observamos que não é possível gerar qualquer fórmula de $\mathbf{A}$; e de $\neg\mathbf{A}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$ só é possível gerar $\sim_k\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{(k)}$, $k<n$ (Regras $I\sim_k$ e $I(k)$).

Se $\Gamma, \mathbf{A}$ é fechado então, pela Definição 4.1.9, existe um tableau $\mathbf{T}$, tal que seus ramos são fechados por $\sim_n\mathbf{A}$, ou por $\neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$.

Como $\Gamma, \neg\mathbf{A}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$ também é fechado, então existe um tableau fechado $\mathbf{T}'$, tal que seus ramos são fechados por $\mathbf{A}$; ou por $\sim_n\neg\mathbf{A}$; ou por $\neg\neg\mathbf{A}, (\neg\mathbf{A})^1, (\neg\mathbf{A})^2, ..., (\neg\mathbf{A})^n$; ou por $\sim_n(\mathbf{A}^i)$, para todo i, $1\leq i\leq n$; ou por $\neg(\mathbf{A}^i), (\mathbf{A}^i)^1, (\mathbf{A}^i)^2, ..., (\mathbf{A}^i)^n$, para todo i, $1\leq i\leq n$. Portanto, pelas Regras $E\sim_n\neg$, $E\neg\neg$, $Ek\sim_n$, $E\&$ e $Ek\neg$, a fórmula $\mathbf{A}$ ocorre em todos os ramos de $\mathbf{T}'$.

Conseqüentemente, nos tableaux $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ as fórmulas $\sim_n\mathbf{A}$ ou $\neg\mathbf{A}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$ (em $\mathbf{T}$) e $\mathbf{A}$ (em $\mathbf{T}'$), respectivamente, são geradas diretamente, pelas Regras de Expansão, a partir de Γ.

Assim, existe um tableau fechado para Γ e, portanto, pela Definição 4.1.9, Γ é fechado.

2 Suponhamos que o resultado é satisfeito para fórmulas $\mathbf{S}$ de complexidade p, $p>0$.

3 Seja $\mathbf{S}$ uma fórmula de complexidade $(p+1)$.

3.1 Seja $\mathbf{S}$ do tipo $\neg\mathbf{B}$, com $\mathbf{B}$ de complexidade p.

3.1.1 Suponhamos que $\Gamma, \neg\mathbf{B}$ e $\Gamma, \sim_n\neg\mathbf{B}$ são fechados, considerando que $\neg\mathbf{B}$ e $\sim_n\neg\mathbf{B}$ não são fórmulas de Γ.

Se existem tableaux fechados para $\Gamma, \neg\mathbf{B}$ e para $\Gamma, \sim_n\neg\mathbf{B}$, então, pelas Regras $E\sim_n\neg$, $E\neg\neg$ e $E(k)$ existem tableaux fechados para $\Gamma, \neg\mathbf{B}$ e para $\Gamma, \mathbf{B}, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ..., \mathbf{B}^n$. Assim, pelo Lema 4.2.1 e Regra $E(k)$, existem tableaux fechados para $\Gamma, \neg\mathbf{B}, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ..., \mathbf{B}^n$ e para $\Gamma, \mathbf{B}, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ..., \mathbf{B}^n$.

Se o tableau fechado para Γ, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, ..., $\mathbf{B}^n$ fecha devido a Γ, $\mathbf{B}$, então Γ, $\mathbf{B}$ é fechado e, desse modo, pela hipótese de indução, Γ é fechado.

Se o tableau fecha devido a $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, ..., $\mathbf{B}^n$ então, pelas Regras Ek$\sim_n$, E& e Ek$\neg$, a fórmula $\neg\mathbf{B}$ ocorre em todos os seus ramos. Portanto, pelas Regras de Expansão, Γ gera $\neg\mathbf{B}$ e, portanto, como Γ, $\neg\mathbf{B}$ é fechado, temos que Γ é fechado.

3.1.2 Suponhamos que Γ, $\neg\mathbf{B}$ e Γ, $\neg\neg\mathbf{B}$, $(\neg\mathbf{B})^1$, $(\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\neg\mathbf{B})^n$ são fechados, considerando também que $\neg\mathbf{B}$, $\neg\neg\mathbf{B}$ e $(\neg\mathbf{B})^i$, para cada i, $1 \leq i \leq n$, não são fórmulas de Γ.

Como Γ, $\neg\neg\mathbf{B}$, $(\neg\mathbf{B})^1$, $(\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\neg\mathbf{B})^n$ é fechado então, pela Regras E$\neg\neg$, existe um tableau fechado $\mathbf{T}$ para Γ, $\mathbf{B}$, $(\neg\mathbf{B})^1$, $(\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\neg\mathbf{B})^n$. Se existe um ramo fechado devido a Γ e a qualquer uma das fórmulas $(\neg\mathbf{B})^1$, $(\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\neg\mathbf{B})^n$, então ele é fechado por $\sim_n(\neg\mathbf{B})^1$, ..., ou $\sim_n(\neg\mathbf{B})^n$; ou por $\neg(\neg\mathbf{B})^i$, $((\neg\mathbf{B})^i)^1$, ..., $((\neg\mathbf{B})^i)^n$, para cada i, $1 \leq i \leq n$. Em todos esses casos, pelas Regras Ek$\sim_n$, E&, Ek$\neg$ e E$\neg\neg$, as fórmulas $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$ ocorrem neste ramo. Como $\neg\mathbf{B}$ não pode ser gerado a partir de $\neg\neg\mathbf{B}$, temos que Γ, pelas Regras de Expansão, gera $\neg\mathbf{B}$. Portanto, como Γ, $\neg\mathbf{B}$ é fechado, temos que Γ é fechado.

Assim, suponhamos que Γ, $\mathbf{B}$, $(\neg\mathbf{B})^1$, $(\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\neg\mathbf{B})^n$ é fechado devido a Γ, $\mathbf{B}$. Como Γ, $\neg\mathbf{B}$ é fechado então, pelo Lema 4.2.1, Γ, $\neg\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, ..., $\mathbf{B}^n$ é fechado. Portanto, pela hipótese indutiva, Γ é fechado.

3.2 Seja $\mathbf{S}$ do tipo $\mathbf{B}^k$, $k \geq 1$.

3.2.1 Suponhamos que Γ, $\mathbf{B}^k$ e Γ, $\sim_n(\mathbf{B}^k)$ são fechados.

Como Γ, $\mathbf{B}^k$ é fechado e de $\mathbf{B}^k$ só é possível gerar, pela Regra Rk, $\neg(\mathbf{B}^{k-1}\&\neg\mathbf{B}^{k-1})$, então existe um tableau fechado $\mathbf{T}$ cujos ramos são fechados por $\sim_n(\mathbf{B}^k)$; ou por $\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$. Logo, pela Regra Ek$\sim_n$, as fórmulas $\mathbf{B}$, $\neg\mathbf{B}$ $\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$ aparecem em todos os ramos de $\mathbf{T}$ e, portanto, Γ gera $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$.

Como Γ, $\sim_n(\mathbf{B}^k)$ é fechado, então existe um tableau fechado $\mathbf{T}'$ cujos ramos são fechados por $\sim_n\sim_n(\mathbf{B}^k)$; ou por $\neg\sim_n(\mathbf{B}^k)$, $(\sim_n(\mathbf{B}^k))^1$, $(\sim_n(\mathbf{B}^k))^2$, ..., $(\sim_n(\mathbf{B}^k))^n$. Logo, como de

$\sim_n(\mathbf{B}^k)$, pelas Regras $Ek\sim_n$ e $Ek\neg$, só é possível gerar $(\mathbf{B}^k)^{(n)}$, $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, e em todos os ramos de $\mathbf{T}'$, pelas Regras $E\sim_n\sim_k$ e $E\neg\sim_n$, ocorre $\mathbf{B}^k$, então Γ gera $\mathbf{B}^k$.

Como Γ gera $\mathbf{B}^k$, $\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$, então Γ é fechado.

3.2.2 Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, $\mathbf{B}^k$ e Γ, $\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$, observando que a partir de $\neg(\mathbf{B}^k)$, pela Regra $Ek\neg$, apenas é possível gerar $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$.

Como Γ, $\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\mathbf{B}^k)^1$, $(\mathbf{B}^k)^2$, ..., $(\mathbf{B}^k)^n$ é fechado, então existe um tableau fechado $\mathbf{T}$ tal que seus ramos são fechados por $\sim_n(\neg(\mathbf{B}^k))$; ou por $\neg\neg(\mathbf{B}^k)$, $(\neg(\mathbf{B}^k))^1$, $(\neg(\mathbf{B}^k))^2$, ..., $(\neg(\mathbf{B}^k))^n$; ou $\sim_n((\mathbf{B}^k)^i)$, para todo i, $1\leq i\leq n$; ou $\neg((\mathbf{B}^k)^i)$,$(\neg(\mathbf{B}^k)^i)^1$, $(\neg(\mathbf{B}^k)^i)^2$, ..., $(\neg(\mathbf{B}^k)^i)^n$, para todo i, $1\leq i\leq n$. Então, pelas Regras $E\sim_n\neg$, $E\neg\neg$, $Ek\sim_n$ e $Ek\neg$, a fórmula $\mathbf{B}^k$ aparece em todos os ramos de $\mathbf{T}$. Portanto, pelas Regras de Expansão, Γ gera $\mathbf{B}^k$.

Como Γ, $\mathbf{B}^k$ é fechado e Γ gera $\mathbf{B}^k$, então Γ é fechado.

3.3 Seja $\mathbf{S}$ do tipo $\mathbf{B}^{(k)}$, com $k \geq 1$.

3.3.1 Suponhamos que Γ, $\mathbf{B}^{(k)}$ e Γ, $\sim_n(\mathbf{B}^{(k)})$ são fechados. Observamos que, pela Regra $E(k)$, a partir de $\mathbf{B}^{(k)}$ apenas é possível gerar $\mathbf{B}^{(k-1)}$, $\mathbf{B}^{(k-2)}$, ..., $\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{B}^k$, $\mathbf{B}^{k-1}$, ..., $\mathbf{B}^1$; e, pela Regra $E(k)\sim_n$, a partir de $\sim_n(\mathbf{B}^{(k)})$ só é possível gerar $\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, para todo k.

Como Γ, $\mathbf{B}^{(k)}$ é fechado então, pela Regra $E(k)$, Γ, $\mathbf{B}^1$, ..., $\mathbf{B}^k$ é fechado. Portanto, existe um tableau fechado $\mathbf{T}$ tal que todos os seus ramos são fechados por $\sim_n(\mathbf{B}^i)$, para $1\leq i\leq k$; ou por $\neg(\mathbf{B}^i)$, $(\mathbf{B}^i)^1$, ..., $(\mathbf{B}^i)^n$, para todo i, $1\leq i\leq k$; ou por $\sim_n(\mathbf{B}^{(k)})$; ou por $\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, $(\mathbf{B}^{(k)})^1$, ..., $(\mathbf{B}^{(k)})^n$. Assim, pelas Regras $Ek\sim_n$, $Ek\neg$, $E(k)\sim_n$ e $E(k)\neg$, as fórmulas $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$ aparecem em todos os ramos de $\mathbf{T}$, isto é, Γ gera $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$.

Como Γ, $\sim_n(\mathbf{B}^{(k)})$ é fechado, pela Regra $E(k)\sim_n$, temos que Γ, $\mathbf{B}$, $\neg\mathbf{B}$ é fechado. Então, como Γ gera $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, temos que Γ é fechado.

3.3.2 Suponhamos que Γ, $\mathbf{B}^{(k)}$ e Γ, $\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, $(\mathbf{B}^{(k)})^1$, $(\mathbf{B}^{(k)})^2$, ..., $(\mathbf{B}^{(k)})^n$ são fechados. Observamos que, pela Regra $E(k)\neg$, a partir de $\neg(\mathbf{B}^{(k)})$ somente é possível gerar $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$; e que, de $(\mathbf{B}^{(k)})^{i}$, para $1\leq i\leq k$, de fato não é possível gerar qualquer fórmula, a menos de $\neg((\mathbf{B}^{(k)})^{i-1}\&\neg((\mathbf{B}^{(k)})^{i-1}))$.

Como no caso anterior, já que Γ, $\mathbf{B}^{(k)}$ é fechado, temos que existe um tableau fechado **T** tal que as fórmulas **B** e $\neg\mathbf{B}$ aparecem em todos os ramos de **T**, isto é, Γ gera **B** e $\neg\mathbf{B}$.

Como Γ, $\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, $(\mathbf{B}^{(k)})^{1}$, $(\mathbf{B}^{(k)})^{2}$, ..., $(\mathbf{B}^{(k)})^{n}$ é fechado, existe um tableau fechado **T´** tal que os seus ramos são fechados por $\sim_n\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, ou por $\sim_n(\mathbf{B}^{(k)})^{i}$, para $1\leq i\leq n$; ou por $\neg\neg(\mathbf{B}^{(k)})$, $(\neg(\mathbf{B}^{(k)}))^{1}$, ..., $(\neg(\mathbf{B}^{(k)}))^{n}$; ou por $\neg(\mathbf{B}^{(k)})^{i}$, $((\mathbf{B}^{(k)})^{i})^{1}$, ..., $((\mathbf{B}^{(k)})^{i})^{n}$, para todo i, $1\leq i\leq n$. Então, pelas Regras de Expansão, a fórmula $\mathbf{B}^{(k)}$ aparece em todos os ramos de **T´**. Portanto, Γ gera $\mathbf{B}^{(k)}$.

Assim, como no caso 3.2.2, Γ gera **B**, $\neg\mathbf{B}$ e gera $\mathbf{B}^{1}$, $\mathbf{B}^{2}$, ..., $\mathbf{B}^{k}$, e portanto, Γ é fechado.

3.4 Seja **S** do tipo $\sim_k\mathbf{B}$, com $k\geq 1$.

3.4.1 Suponhamos que Γ, $\sim_k\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n\sim_k\mathbf{B}$ são fechados.

3.4.1.1 Se $k = n$, então, pela Regra $E\sim_n\sim_k$, Γ, **B** e Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ são fechados. Logo, pela hipótese indutiva, Γ é fechado.

3.4.1.2 Se $k < n$, então, como Γ, $\sim_k\mathbf{B}$ é fechado, e de $\sim_k\mathbf{B}$ só podemos gerar $\neg\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{1}$, $\mathbf{B}^{2}$, ..., $\mathbf{B}^{k}$, pelas possíveis condições de fechamento a fórmula **B** ocorre em todos os ramos do tableau fechado **T**, concluímos que de Γ deduzimos **B**.

Como Γ, $\sim_n\sim_k\mathbf{B}$ é fechado, pela Regra $E\sim_n\sim_k$, temos que Γ, **B** é fechado.

Logo, temos que Γ é fechado.

3.4.1.3 Se $k > n$, como Γ, $\sim_k\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n\sim_k\mathbf{B}$ são fechados, pelas Regras $R\sim_k$ e $E\sim_n\sim_k$, Γ, **B** e Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ são fechados. Logo, pela hipótese indutiva, Γ é fechado.

3.4.2 Suponhamos que Γ, $\sim_k\mathbf{B}$ e Γ, $\neg\sim_k\mathbf{B}$, $(\sim_k\mathbf{B})^{1}$, $(\sim_k\mathbf{B})^{2}$, ..., $(\sim_k\mathbf{B})^{n}$ são fechados.

Como Γ, $\neg\sim_k\mathbf{B}$, $(\sim_k\mathbf{B})^{1}$, $(\sim_k\mathbf{B})^{2}$, ..., $(\sim_k\mathbf{B})^{n}$ é fechado, então existe um tableau **T** tal que seus ramos são fechados por $\sim_n(\neg\sim_k\mathbf{B})$; ou por $\neg(\neg\sim_k\mathbf{B})$, $(\neg\sim_k\mathbf{B})^{1}$, ..., $(\neg\sim_k\mathbf{B})^{n}$; ou $\sim_n(\sim_k\mathbf{B})^{i}$, para qualquer i, $1\leq i\leq n$; ou por $\neg(\sim_k\mathbf{B})^{i}$, $((\sim_k\mathbf{B})^{i})^{1}$, ..., $((\sim_k\mathbf{B})^{i})^{n}$, para qualquer i,

$1\leq i\leq n$. Assim, pelas Regras $E{\sim_n}\neg$, $E\neg\neg$, $Ek{\sim_n}$ e $Ek\neg$, a fórmula $\sim_k\mathbf{B}$ aparece em todos os ramos de **T**. Como de $\neg\sim_k\mathbf{B}$ só é possível gerarmos **B**, então, pelas Regras de Expansão, $\sim_k\mathbf{B}$ é gerada a partir de Γ.

Como Γ, $\sim_k\mathbf{B}$ é fechado e Γ gera $\sim_k\mathbf{B}$, então Γ é fechado.

3.5 Seja **S** do tipo (**B**&**C**).

3.5.1 Suponhamos que Γ, (**B**&**C**) e Γ, $\sim_n$(**B**&**C**) são fechados.

Como Γ, (**B**&**C**) é fechado então, pela Regra E&, existe um tableau fechado para Γ, **B**, **C**, isto é, existe um tableau fechado para Γ, **B**; ou para Γ, **C**; ou o tableau fechado para Γ, **B**, **C** depende tanto de **B** quanto de **C**, isto é, **C** é do tipo $\sim_n\mathbf{B}$, $\neg\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{(n)}$, ou $\mathbf{B}^{i}$, $1\leq i\leq n$ (ou **B** é do tipo $\sim_n\mathbf{C}$, $\neg\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^{(n)}$, ou , $\mathbf{C}^{i}$, $1\leq i\leq n$).

Como existe um tableau fechado para Γ, $\sim_n$(**B**&**C**) então, pela Regra $DNC{\sim_n}$, existem tableaux fechados para Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n\mathbf{C}$.

Portanto, existem tableaux fechados para Γ, **B** e Γ, $\sim_n\mathbf{B}$; ou para Γ, **C** e Γ, $\sim_n\mathbf{C}$; ou para Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n\sim_n\mathbf{B}$ (e assim, pela Regra $E{\sim_n}{\sim_k}$, existe um tableau fechado para Γ, **B**); ou para Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n\neg\mathbf{B}$ (e assim, pelas Regras $E{\sim_n}\neg$ e $E\neg\neg$, existe um tableau fechado para Γ, **B**, $\mathbf{B}^{(n)}$); ou para Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ e Γ, $\sim_n(\mathbf{B}^{(n)})$ (e assim, pela Regra $E(k){\sim_n}$ ou $Ek{\sim_n}$, existe um tableau fechado para Γ, **B**, $\neg\mathbf{B}$), tal que nestes últimos dois casos temos que Γ gera $\mathbf{B}^{(n)}$ ou Γ gera $\neg\mathbf{B}$.

Observamos que, os casos em que fórmulas do tipo **D**, $\neg\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{1}$, $\mathbf{D}^{2}$, ..., $\mathbf{D}^{n}$ ocorrem como fórmulas geradas a partir de Γ, **B** e **C** – em todas as possibilidades possíveis, com as fórmulas sendo geradas necessariamente de Γ e **B** e **C** – são todos casos particulares dos casos anteriormente analisados. Esta observação também se aplica aos casos subseqüentes desta demonstração.

Portanto, temos que, em todos os casos possíveis, Γ, **B** e Γ, $\sim_n\mathbf{B}$ são fechados, ou Γ, **C** e Γ, $\sim_n\mathbf{C}$ são fechados. Então, pela hipótese indutiva, Γ é fechado.

3.5.2 Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, (**B**&**C**) e Γ, $\neg$(**B**&**C**), $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^{1}$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^{2}$, ... , $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^{n}$.

3.5.2.1 Suponhamos que **C** é distinta de ¬**B**.

Como Γ, ¬(**B**&**C**), $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^n$ é fechado então, pela Regra DNC¬, existe um tableau fechado **T** para Γ, ¬**B**, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^n$ e existe um tableau fechado **T**´ para Γ, ¬**C**, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^n$. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que a fórmula **B** aparece em todos os ramos de **T**; e a partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**´, temos que a fórmula **C** aparece em todos os ramos de **T**´. Portanto, temos que Γ gera, pelas Regras de Expansão, **B** e **C**.

Assim, como Γ, **B**, **C** é fechado, então Γ é fechado.

3.5.2.2 Suponhamos que **C** é ¬**B**.

Como Γ, ¬(**B**&**C**), $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})^n$ é fechado então, pela Regra Ik, existe um tableau fechado **T** para Γ, $\mathbf{B}^1$, $(\mathbf{B}\&\neg\mathbf{B})^1$, $(\mathbf{B}\&\neg\mathbf{B})^2$, ..., $(\mathbf{B}\&\neg\mathbf{B})^n$. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que as fórmulas **B** e ¬**B** aparecem em todos os ramos de **T**. Assim, como no caso anterior, Γ gera **B** e **C**, e portanto Γ é fechado.

3.6 Seja **S** do tipo (**B**∨**C**).

3.6.1 Suponhamos que Γ, (**B**∨**C**) e Γ, $\sim_n$(**B**∨**C**) são fechados.

Como Γ, (**B**∨**C**) é fechado então, pela Regra E∨, Γ, **B** e Γ, **C** são fechados e, portanto, existe um tableau fechado **T** para Γ, **B** e existe um tableau fechado **T**´ para Γ, **C**.

A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que Γ gera, pelas Regras de Expansão, $\sim_n$**B** (ou ¬**B**, $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, ..., $\mathbf{B}^n$); e a partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**´, temos que Γ gera $\sim_n$**C** (ou ¬**C**, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^2$, ..., $\mathbf{C}^n$).

Como Γ, $\sim_n$(**B**∨**C**) é fechado então, pela Regra DND$\sim_n$, temos que Γ, $\sim_n$**B**, $\sim_n$**C** é fechado.

Portanto, como Γ gera $\sim_n$**B** e $\sim_n$**C**, então Γ é fechado.

3.6.2 Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, (**B**∨**C**) e Γ, ¬(**B**∨**C**), $(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})^n$.

Como Γ, $\neg$(**B**$\vee$**C**), (**B**$\vee$**C**)^1, (**B**$\vee$**C**)^2, ..., (**B**$\vee$**C**)^n é fechado, então existe um tableau fechado **T** para este conjunto de fórmulas. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que a fórmula (**B**$\vee$**C**) aparece em todos os ramos de **T**.

Todavia, a partir de $\neg$(**B**$\vee$**C**), pela Regra DND$\neg$ somente podemos gerar a fórmula $\neg$(**B**$^{(n)}$&**C**$^{(n)}$) ou a fórmula ($\neg$**B**&$\neg$**C**) e, conseqüentemente, as fórmulas **B** e $\neg$**B**, ou as fórmulas **C** e $\neg$**C**, ou as fórmulas $\neg$**B** e $\neg$**C**. Portanto, a partir de $\neg$(**B**$\vee$**C**), (**B**$\vee$**C**)^1, (**B**$\vee$**C**)^2, ..., (**B**$\vee$**C**)^n não podemos gerar, pelas Regras de Expansão, a fórmula (**B**$\vee$**C**).

Assim, Γ gera, pelas Regras de Expansão, (**B**$\vee$**C**).

Mas, pela hipótese, Γ, (**B**$\vee$**C**) é fechado. Desse modo, pelo caso anterior, Γ é fechado.

3.7 Seja **S** do tipo (**B**$\supset$**C**).

3.7.1 Suponhamos que Γ, (**B**$\supset$**C**) e Γ, $\sim_n$(**B**$\supset$**C**) são fechados.

Como Γ, (**B**$\supset$**C**) é fechado então, pela Regra E$\supset$, Γ, $\sim_n$**B** e Γ, **C** são fechados.

Como Γ, $\sim_n$(**B**$\supset$**C**) é fechado então, pela Regra DNI$\sim_n$, Γ, **B**, $\sim_n$**C** é fechado.

Como Γ, $\sim_n$**B** é fechado, então existe um tableau **T** fechado para Γ, $\sim_n$**B**. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que do conjunto de fórmulas Γ geramos **B**.

Com Γ, **C** é fechado, então existe um tableau fechado **T**´ para Γ, **C**. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**´, temos que do conjunto de fórmulas Γ geramos $\sim_n$**C**.

Mas, Γ, **B**, $\sim_n$**C** é fechado e, portanto, Γ é fechado.

3.7.2 Suponhamos que existem tableaux fechados para Γ, (**B**$\supset$**C**) e Γ, $\neg$(**B**$\supset$**C**), (**B**$\supset$**C**)^1, (**B**$\supset$**C**)^2, ..., (**B**$\supset$**C**)^n.

Como Γ, $\neg$(**B**$\supset$**C**), (**B**$\supset$**C**)^1, (**B**$\supset$**C**)^2, ..., (**B**$\supset$**C**)^n é fechado, então existe um tableau fechado **T** para este conjunto de fórmulas. A partir de todas as possíveis condições de fechamento para **T**, temos que a fórmula (**B**$\supset$**C**) aparece em todos os ramos de **T**.

Entretanto, a partir de $\neg$(**B**$\supset$**C**), pela Regra DNI$\neg$, somente podemos gerar a fórmula $\neg$(**B**$^{(n)}$&**C**$^{(n)}$) ou a fórmula (**B**&$\neg$**C**) e, conseqüentemente, as fórmulas **B** e $\neg$**B**, ou as fórmulas **C** e $\neg$**C**, ou as fórmulas **B** e $\neg$**C**. Portanto, a partir de $\neg(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$, $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})^1$, $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})^2$, ..., $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})^n$ não podemos gerar, pelas Regras de Expansão, a fórmula $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$.

Assim, Γ gera, pelas Regras de Expansão, a fórmula $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$.

Mas, pela hipótese, Γ, $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$ é fechado. Assim, pelo caso anterior, Γ é fechado.

Portanto, pelos casos 1-3, demonstramos que se Γ, **S** e Γ, $\sim_n$**S** são fechados, ou Γ, **S** e Γ, **S**, $\neg$**S**, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, ..., $\mathbf{S}^n$ são fechados, então Γ é fechado. □

4.3 A EQUIVALÊNCIA LÓGICA ENTRE OS SISTEMAS DA HIERARQUIA TNDC$_n$, 1≤n<ω, E OS CORRESPONDENTES SISTEMAS AXIOMÁTICOS C$_n$, 1≤n<ω, DE DA COSTA

Baseados na Regra do Corte para **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, demonstraremos a equivalência entre os sistemas paraconsistentes **C**$_n$, $1\leq n<\omega$, de da Costa e os correspondentes **TNDC**$_n$.

Teorema 4.3.1 Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{S}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$, para cada n, $1\leq n<\omega$.

Demonstração:

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{S}$.

Se $\mathbf{S}\in\Gamma$ então, para cada n, $1 \leq n < \omega$, é imediato que $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$. Assim, suponhamos que **S** não está em Γ.

1 Seja **S** um esquema de axioma de **C**$_n$, $1\leq n<\omega$.

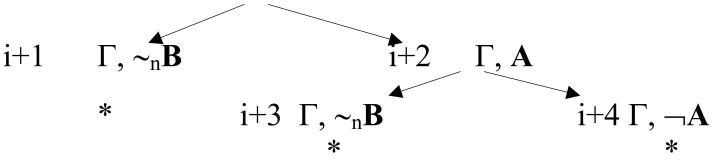
Demonstraremos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$, isto é, devemos demonstrar que Γ, $\sim_n$**S** é fechado em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$.

Aqui, daremos apenas as provas para os esquemas de Axiomas 11^n a 14^n. Essas provas são apresentadas em forma de árvore, onde o símbolo (*) significa que aquele ramo está fechado.

Lembremos que as regras usadas na geração dos nós são indicadas imediatamente à direita do nó gerado pela regra; os números à esquerda de cada nó foram acrescentados para facilitar a descrição do tableau e não são parte dele.

1.1 Seja **S** o Axioma 11^n, isto é, **S** é $\mathbf{A}^{(n)}\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$. Geraremos um tableau fechado, cujo nó inicial, $\Gamma, \sim_n\mathbf{S}$, constitui o passo 1 abaixo.

1 $\Gamma, \sim_n(\mathbf{A}^{(n)}\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$
2 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n)}$
3 $\Gamma, \sim_n(((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})))$
4 $\Gamma, (\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$
5 $\Gamma, \sim_n((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$
6 $\Gamma, (\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})$
7 $\Gamma, \sim_n\neg\mathbf{B}$
8 $\Gamma, \neg\neg\mathbf{B}$
9 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n)}$
10 $\Gamma, \mathbf{B}$
11 $\Gamma, \mathbf{A}^n$
12 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-1)}$
13 $\Gamma, \mathbf{A}^{n-1}$
14 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-2)}$
15 $\Gamma, \mathbf{A}^{n-2}$
⋮ ⋮
i-1 $\Gamma, \mathbf{A}^{(1)}$
i $\Gamma, \mathbf{A}^1$ i-1, E(1)



O tableau fecha no primeiro e segundo ramos pelas fórmulas $\sim_n\mathbf{B}$ e **B**, que ocorrem nos nós 10 e (i+1), 10 e (i+3), respectivamente; no terceiro ramo fecha pelas fórmulas $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A}^{n-1}$, ..., $\mathbf{A}^1$, **A** e $\neg\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 11, 13, 15, ..., i, (i+2) e (i+4).

Nesta árvore, 1 inicializa o tableau; 2 e 3 são obtidos de 1 pela Regra DNI$\sim_n$; 4 e 5 são obtidos de 3 pela Regra DNI$\sim_n$; 6 e 7 são obtidos de 5 pela Regra DNI$\sim_n$; 8 e 9 são obtidos de 7 pela Regra E$\sim_n\neg$; 10 é obtido de 8 pela Regra E$\neg\neg$; 11 e 12, 13 e 15,..., i-2 e i-1, são obtidos de 2, 12, 14, ..., i-3, por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i é obtido de i-1 pela Regra E(1); i+1 e i+2 são obtidos de i+1 de 4 Regra E$\supset$; i+3, i+4 são obtidos de 6 pela Regra E$\supset$.

1.2 Seja **S** o Axioma 12^n, isto é, **S** é $(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)})$.

1 $\Gamma, \sim_n((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)}))$

2 $\Gamma, (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$

3 $\Gamma, \sim_n((\mathbf{A}\&\mathbf{B})^{(n)})$

4 $\Gamma, (\mathbf{A}\&\mathbf{B})$

5 $\Gamma, \neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$

6 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n)}$

7 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n)}$

8 $\Gamma, \mathbf{A}^{n}$

9 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-1)}$

10 $\Gamma, \mathbf{A}^{n-1}$

11 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-2)}$

⋮ ⋮

i-3 $\Gamma, \mathbf{A}^{(2)}$

i-2 $\Gamma, \mathbf{A}^{2}$

i-1 $\Gamma, \mathbf{A}^{(1)}$

i $\Gamma, \mathbf{A}^{1}$

i+1 $\Gamma, \mathbf{B}^{n}$

i+2 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-1)}$

i+3 $\Gamma, \mathbf{B}^{n-1}$

i+4 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-2)}$

⋮ ⋮

i+(s-3) $\Gamma, \mathbf{B}^{(2)}$

i+(s-2) $\Gamma, \mathbf{B}^{2}$
i+(s-1) $\Gamma, \mathbf{B}^{(1)}$
i+s $\Gamma, \mathbf{B}^{1}$
i+s+3 $\Gamma, \mathbf{A}$
i+s+4 $\Gamma, \mathbf{B}$
i+s+5 $\Gamma, \neg\mathbf{A}$ i+s+6 $\Gamma, \neg\mathbf{B}$
* *

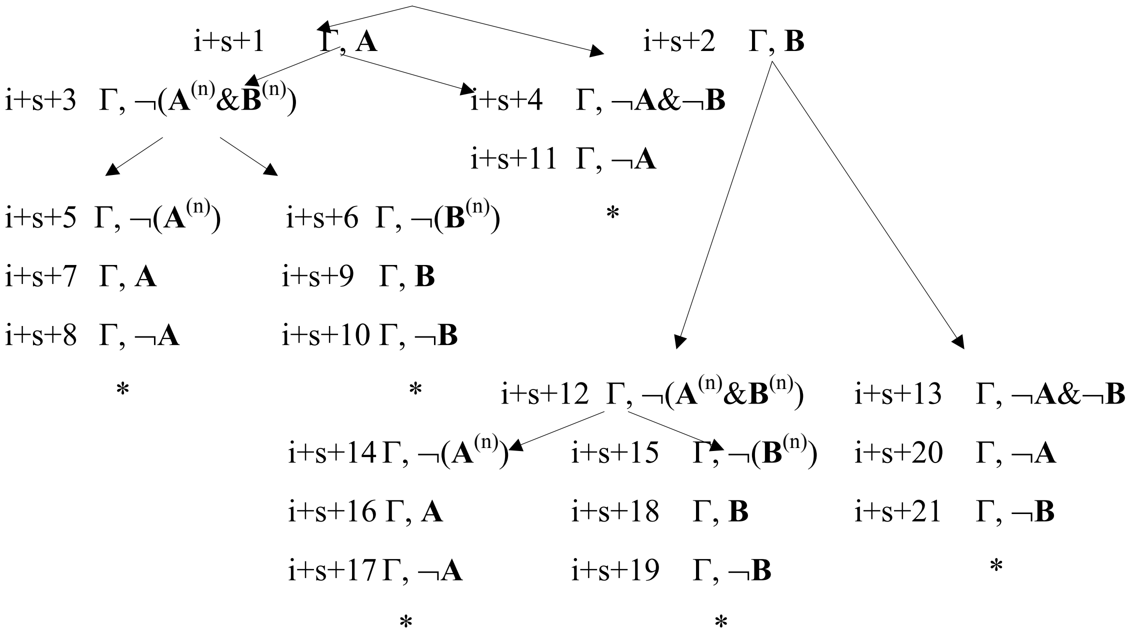
O tableau fecha no primeiro ramo pelas fórmulas $\mathbf{A}^{n}$, $\mathbf{A}^{n-1}$, ..., $\mathbf{A}^{1}$, $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 8, 10, 12, ... , i, (i+s+3) e (i+s+5); e no segundo ramo pelas fórmulas $\mathbf{B}^{n}$, $\mathbf{B}^{n-1}$, ..., $\mathbf{B}^{1}$, $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, que ocorrem nos nós (i+1), (i+3), (i+5), ..., (i+s), (i+s+4) e (i+s+6).

Nesta árvore, 2 e 3 são obtidos de 1 pela Regra DNI$\sim_{n}$; 4 e 5, de 3, pela Regra E(k)$\sim_{n}$; 6 e 7, de 2, por E&; 8 e 9, 10 e 11, ..., i+(s-2), i+(s-1), são obtidos de 6, 9, ... , i-3 por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i é obtido de i-1 pela Regra E(1); (i+1) e (i+2), (i+3) e (i+4), ..., (i+(s-2) e i+(s-1) são obtidos de 7, (i+2), ... , i+s(-3) por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i+s é obtido de i+(s-1) pela Regra E(1); (i+s+5) e (i+s+6), de 5, pela Regra DNC$\neg$.

1.3 Seja **S** o Axioma 13^{n}, isto é, **S** é $(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)})$.

1 $\Gamma, \sim_{n}((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}))$
2 $\Gamma, (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$
3 $\Gamma, \sim_{n}((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)})$
4 $\Gamma, (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
5 $\Gamma, \neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
6 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n)}$
7 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n)}$
8 $\Gamma, \mathbf{A}^{n}$
9 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-1)}$
10 $\Gamma, \mathbf{A}^{n-1}$
11 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-2)}$

⋮ ⋮
i-3 $\Gamma, \mathbf{A}^{(2)}$
i-2 $\Gamma, \mathbf{A}^{2}$
i-1 $\Gamma, \mathbf{A}^{(1)}$
i $\Gamma, \mathbf{A}^{1}$
i+1 $\Gamma, \mathbf{B}^{n}$
i+2 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-1)}$
i+3 $\Gamma, \mathbf{B}^{n-1}$
i+4 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-2)}$
⋮ ⋮
i+(s-3) $\Gamma, \mathbf{B}^{(2)}$
i+(s-2) $\Gamma, \mathbf{B}^{2}$
i+(s-1) $\Gamma, \mathbf{B}^{(1)}$
i+s $\Gamma, \mathbf{B}^{1}$



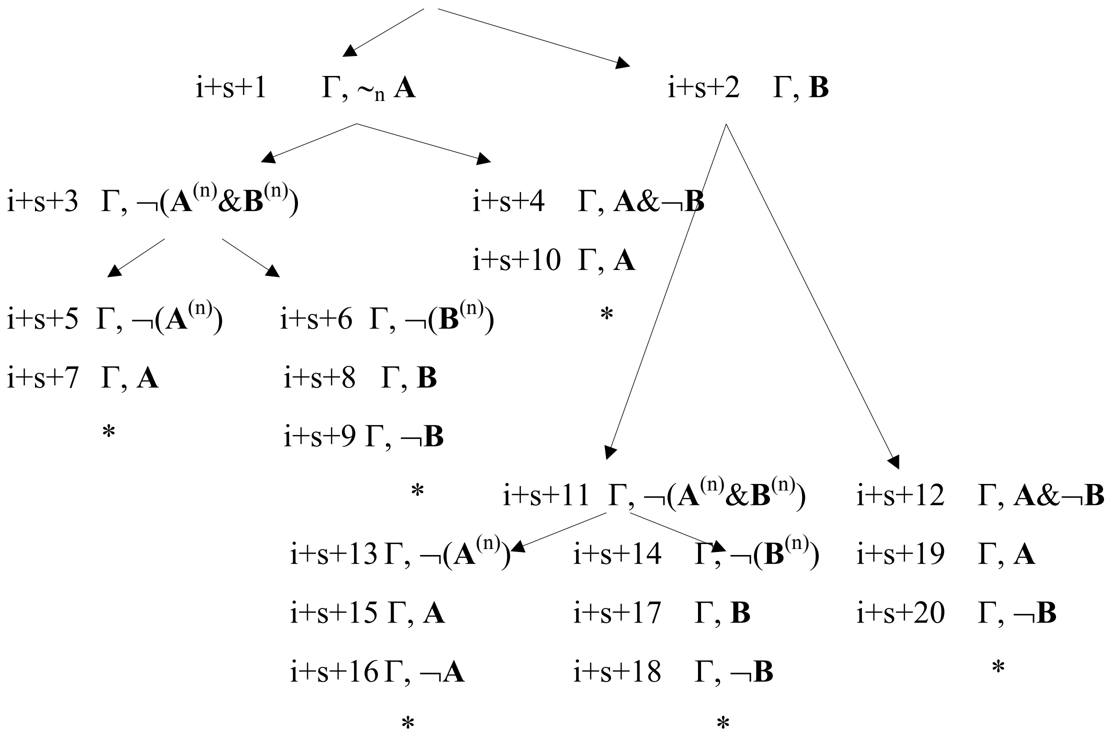
O tableau fecha no primeiro, terceiro e quarto ramos pelas fórmulas $\mathbf{A}^{n}$, $\mathbf{A}^{n-1}$, ... , $\mathbf{A}^{1}$, $\mathbf{A}$ e $\neg\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 8, 10, 12, ... , i-2, i, (i+s+1) e (i+s+8), nos nós 8, 10, 12, ... , i-2, i, (i+s+1) e (i+s+11), nos nós 8, 10, 12, ..., i-2, i, (i+s+16) e (i+s+17), respectivamente; no segundo, quinto e sexto ramo fecha pelas fórmulas $\mathbf{B}^{n}$, $\mathbf{B}^{n-1}$, ..., $\mathbf{B}^{1}$, $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, que ocorrem nos nós (i+1), (i+3), (i+5), ..., i+(s-2), (i+s), (i+s+9) e (i+s+10), nos nós (i+1), (i+3), (i+5), ..., i+(s-2), (i+s), (i+s+18) e (i+s+19), e nos nós (i+1), (i+3), (i+5), ..., i+(s-2), (i+s), (i+s+2), (i+s+21), respectivamente.

Nesta árvore, 2 e 3 são obtidos de 1 pela Regra DNI$\sim_n$; 4 e 5, de 3, pela Regra E(k)$\sim_n$; 8 e 9, 10 e 11, ..., (i-2), (i+1), são obtidos de 6, 9, ... , (i-3) por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i é obtido de i-1 por E(1); (i+1) e (i+2), (i+3) e (i+4), ... , i+(s-2) e i+(s-1) são obtidos de 7, (i+2), (i+4), ... , i+(s-3) por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i+s é obtido de i+(s-1) por E(1); i+s+1 e i+s+2, de 4, pela Regra E∨; i+s+3 e i+s+4, de 5, pela Regra DND¬; i+s+5 e i+s+6, de i+s+3, pela Regra DNC¬; i+s+7 e i+s+8 são obtidos de i+s+5, pela Regra E(k)¬; i+s+9 e i+s+10, de i+s+6, pela Regra E(k)¬; i+s+11 é obtido de i+s+4, pela Regra E&; i+s+12 e i+s+13, de 5, pela Regra DND¬; i+s+14 e i+s+15, de i+s+12, pela Regra DNC¬; i+s+16 e i+s+17, de i+s+14, pela Regra E(k)¬; i+s+18 e i+s+19, de i+s+15, pela Regra E(k)¬; i+s+20 e i+s+21 são obtidos de i+s+13, pela Regra E&.

1.4 Seja **S** o Axioma 14^n, isto é, **S** é $(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)})$.

1 $\Gamma, \sim_n((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})^{(n)}))$
2 $\Gamma, (\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$
3 $\Gamma, \sim_n((\mathbf{A}\supset\mathbf{B})^{(n)})$
4 $\Gamma, (\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$
5 $\Gamma, \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$
6 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n)}$
7 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n)}$
8 $\Gamma, \mathbf{A}^{n}$
9 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-1)}$
10 $\Gamma, \mathbf{A}^{n-1}$
11 $\Gamma, \mathbf{A}^{(n-2)}$
⋮ ⋮
i-3 $\Gamma, \mathbf{A}^{(2)}$

i-2 $\Gamma, \mathbf{A}^2$
i-1 $\Gamma, \mathbf{A}^{(1)}$
i $\Gamma, \mathbf{A}^1$
i+1 $\Gamma, \mathbf{B}^n$
i+2 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-1)}$
i+3 $\Gamma, \mathbf{B}^{n-1}$
i+4 $\Gamma, \mathbf{B}^{(n-2)}$
⋮ ⋮
i+(s-3) $\Gamma, \mathbf{B}^{(2)}$
i+(s-2) $\Gamma, \mathbf{B}^2$
i+(s-1) $\Gamma, \mathbf{B}^{(1)}$
i+s $\Gamma, \mathbf{B}^1$



O tableau fecha no primeiro e terceiro ramos pelas fórmulas $\sim_n$**A** e **A**, que ocorrem nos nós (i+s+1), (i+s+7) e (i+s+10); no segundo, quinto e sexto ramo pelas fórmulas $\mathbf{B}^n$, $\mathbf{B}^{n-1}$, ..., $\mathbf{B}^1$, **B** e ¬**B**, que ocorrem nos nós (i+1), (i+3), (i+5), ..., i+(s-2), (i+s), (i+s+8), (i+s+9), (i+s+2), (i+s+18) e (i+s+20); no quarto ramo pelas fórmulas $\mathbf{A}^{n}$, $\mathbf{A}^{n-1}$, ..., $\mathbf{A}^{1}$, **A** e $\neg\mathbf{A}$, que ocorrem nos nós 8, 10, 12, ..., i-2, i, (i+s+15), (i+s+16).

Nesta árvore, 2 e 3 são obtidos de 1 pela Regra DNI$\sim_n$; 4 e 5, de 3, pela Regra E(k)$\sim_n$; 8 e 9, 10 e 11, ..., i-2, i-1, são obtidos de 6, 9, ... , i-3 por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i é obtido de i-1 por E(1); (i+1) e (i+2), (i+3) e (i+4), ... , i+(s-2) e i+(s-1) são obtidos de 7, (i+2), (i+4), ... , i+(s-3) por sucessivas aplicações da Regra E(k), respectivamente; i+s é obtido de i+(s-1) por E(1); i+s+1 e i+s+2, de 4, pela Regra E$\supset$; i+s+3 e i+s+4, de 5, pela Regra DNI$\neg$; i+s+5 e i+s+6, de i+s+3, pela Regra DNC$\neg$; i+s+7 é obtido de i+s+5, pela Regra E(k)$\neg$; i+s+8 e i+s+9, de i+s+6, pela Regra E(k)$\neg$; i+s+10 é obtido de i+s+4, pela Regra E&; i+s+11 e i+s+12, de 5, pela Regra DNI$\neg$; i+s+13 e i+s+14, de i+s+11, pela Regra DNC$\neg$; i+s+15 e i+s+16, de i+s+13, pela Regra E(k)$\neg$; i+s+17 e i+s+18, de i+s+14, pela Regra E(k)$\neg$; i+s+19 e i+s+20 são obtidos de i+s+12, pela Regra E&.

2. Agora, consideremos que a fórmula **S** é conseqüência de fórmulas precedentes na prova, em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, por *Modus Ponens*; isto é, temos que $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{S}$ é uma conseqüência de $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A}$ e $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A} \supset \mathbf{S}$. Então, como temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A} \supset \mathbf{S}$, portanto, os conjuntos $\Gamma \cup \{\sim_n \mathbf{A}\}$ e $\Gamma \cup \{\sim_n (\mathbf{A} \supset \mathbf{S})\}$ são fechados em $\mathbf{TNDC}_n$, e assim, por DNI$\sim_n$, $\Gamma \cup \{\sim_n \mathbf{A}\}$ e $\Gamma \cup \{\mathbf{A}, \sim_n \mathbf{S}\}$ são fechados. Conseqüentemente, $\Gamma, \sim_n \mathbf{S}, \mathbf{A}$ e $\Gamma, \sim_n \mathbf{S}, \sim_n \mathbf{A}$ são fechados e, pela Regra do Corte, $\Gamma, \sim_n \mathbf{S}$ é fechado. Portanto, Γ gera **S** em $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, isto é, $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$. □

Observação 4.3.2 O Metateorema da Dedução (Teorema 1.1.8) é demonstrável em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Logo, podemos transformar toda prova de **S** a partir de um subconjunto finito $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_k\}$ de fórmulas de Γ, numa prova de $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset ... \supset \mathbf{A}_k \supset \mathbf{S}$, em $\mathbf{C}_n$. Então, a partir de $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{S}$ temos que $\vdash_{C_n} \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset ... \supset \mathbf{A}_k \supset \mathbf{S}$ e, pelo Teorema 4.3.1, segue-se que $\vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset ... \supset \mathbf{A}_k \supset \mathbf{S}$.

Agora, suponhamos que $\vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset ... \supset \mathbf{A}_k \supset \mathbf{S}$. Então, $\{\sim_n(\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset ... \supset \mathbf{A}_k \supset \mathbf{S})\}$ é fechado e, assim, por DNI$\sim_n$, temos que $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 ... , \mathbf{A}_k, \sim_n\mathbf{S}\}$ é fechado, isto é, $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 ..., \mathbf{A}_k\} \cup \{\sim_n\mathbf{S}\}$ é fechado. Portanto, $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 ..., \mathbf{A}_k\} \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$. □

Teorema 4.3.3 Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{S}$.

Demonstração:

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$. Se $\mathbf{S} \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} \mathbf{S}$ é imediato. Assim, suponhamos que **S** não está em Γ.

Para demonstrar o teorema, consideremos **S** como uma fórmula gerada a partir de Γ pelas regras de expansão de $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Transformaremos cada Regra de Expansão de $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, na correspondente prova válida em $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$. Isto é, as regras de tipo conjuntivo, disjuntivo e especiais serão transformadas nas provas de $\alpha \vdash_{\mathbf{C}_n} (\delta_i^j)\&(\delta_{i+1}^j)$; $\beta \vdash_{\mathbf{C}_n} (\delta_i^j)\vee(\delta_{i+1}^j)$; $\gamma \vdash_{\mathbf{C}_n} (\delta_i^j)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{\mathbf{C}_n} \delta_i^j$ e $\varepsilon \vdash_{\mathbf{C}_n} (\delta_i^j)$, respectivamente.

Apenas apresentaremos as provas relativas a algumas das Regras de Expansão envolvendo as negações fraca e forte, e o operador “k”.

1. Seja **S** do tipo $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, gerada, em $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, a partir de $\neg(\mathbf{A}^{(k)})$, pela Regra E(k)$\neg$. Devemos demonstrar que $\neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{\mathbf{C}_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$.

A demonstração é imediata, pelo Teorema 1.1.9(iii) e pelo Metateorema da Dedução (MtD).

2. Seja **S** do tipo $\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}$, gerada, em $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, a partir de $\sim_n\neg\mathbf{A}$, por E$\sim_n\neg$. Demonstraremos que $\sim_n\neg\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{C}_n} \neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}$.

1. $\sim_n\neg\mathbf{A} , \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{\mathbf{C}_n} \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)})$ propriedade de $\vdash_{\mathbf{C}_n}$

2. $\sim_n\neg\mathbf{A} , \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{\mathbf{C}_n} \sim_n\neg\neg\mathbf{A}\vee\sim_n((\mathbf{A})^{(n)})$ 1, Teorema 1.1.9(i)

3. $\sim_n\neg\mathbf{A} , \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{\mathbf{C}_n} \sim_n\neg\mathbf{A}$ propriedade de $\vdash_{\mathbf{C}_n}$

4. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\&(\neg\mathbf{A})^{(n)}$ 3, Definição 1.1.4

5. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}$ 4, Axioma 3, MP

6. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \sim_n((\mathbf{A})^{(n)})$ 2, 5, Teorema 1.1.6

7. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{(n)})\&(((\mathbf{A})^{(n)})^{(n)})$ 6, Definição 1.1.4

8. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg((\mathbf{A})^{(n)}))$ 7, Axioma 3, MP

9. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}$ 8, (1), Axioma 4, MP

10. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&\sim_n\neg\mathbf{A}$ 9, 3, Axioma 5, MP

11. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} \neg\mathbf{A}\&(\neg\neg\mathbf{A}\&(\neg\mathbf{A})^{(n)})$ 10, Definição 1.1.4

12. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\neg\mathbf{A}\&(\neg\neg\mathbf{A}\&(\neg\mathbf{A})^{(n)}))\supset(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)})$

Teorema 1.1.9(vii)

13. $\sim_n\neg\mathbf{A}\ ,\ \sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}) \vdash_{C_n} (\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)})$ 11, 12, MP

14. $\sim_n\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))\supset(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))$ 13, MtD

15. $\sim_n\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\neg\sim_n(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))\vee(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))$ 14, Teorema 1.1.9(i), MP

16. $\sim_n\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))\supset(\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)}))$ Teorema 1.1.6

17. $\sim_n\neg\mathbf{A} \vdash_{C_n} (\neg\neg\mathbf{A}\&(\mathbf{A})^{(n)})$ 15, Teorema 1.1.9(xi), 16,

Axioma 8, MP

3. Seja **S** do tipo $((\mathbf{A}^{k-1})\&\neg(\mathbf{A}^{k-1}))$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, a partir de $\neg(\mathbf{A}^k)$, por Ek$\neg$, k>1. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}^k) \vdash_{C_n} ((\mathbf{A}^{k-1})\&\neg(\mathbf{A}^{k-1}))$.

1. $\neg(\mathbf{A}^k) \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^k)$

2. $\neg(\mathbf{A}^k) \vdash_{C_n} \neg(\neg((\mathbf{A}^{k-1})\&\neg(\mathbf{A}^{k-1})))$ 1, Definição 1.1.2

3. $\neg(\mathbf{A}^k) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^{k-1})\&\neg(\mathbf{A}^{k-1})$ 2, Axioma 9, MP

4. Seja **S** do tipo $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg(\mathbf{A}^{(k)})$, por E(k)$\neg$. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$.

A demonstração é imediata pelo Teorema 1.1.9(iii) e pelo Metateorema da Dedução.

5. Seja **S** do tipo $\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$ ou $(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$, por DND$\neg$. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\vee(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$.

1.	$\vdash_{C_n}(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\&\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))\supset(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	Teorema 1.1.9(v)
2.	$\vdash_{C_n}(\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\&(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	1, Teorema 1.1.6
3.	$\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	2, Teorema 1.1.6
4.	$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vdash_{C_n}((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	3, MtD
5.	$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\vee(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	4, Teorema 1.1.9(viii), MP

6. Seja **S** do tipo $\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})$ ou $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, por DNI$\neg$. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\vee(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$.

1.	$\vdash_{C_n}(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\&\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}))\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	Teorema 1.1.9(vi)
2.	$\vdash_{C_n}(\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\&(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	1, Teorema 1.1.6
3.	$\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	2, Teorema 1.1.6
4.	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vdash_{C_n}((\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}))$	3, MtD
5.	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(n)}\&\mathbf{B}^{(n)})\vee(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$	4, Teorema 1.1.9(viii), MP

7 Seja **S** do tipo $\neg(\mathbf{A}^k)$, gerada, da partir de $\sim_n(\mathbf{A}^k)$, por E$k\sim_n$ $(k\geq 1)$. Demonstraremos que $\sim_n(\mathbf{A}^k)\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^k)$.

A demonstração é imediata, pela Definição 1.1.4 e Axioma 3.

8 Seja **S** do tipo $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)})$, por E$(k)\sim_n$, com $k>1$. Demonstraremos que $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)})\vdash_{C_n}(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$.

1. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}),\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\vdash_{C_n}\sim_n(\mathbf{A}^{(k)})$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}),\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(k)})\&((\mathbf{A}^{(k)})^{(n)})$	1, Definição 1.1.4
3. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}),\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\vdash_{C_n}\neg(\mathbf{A}^{(k)})$	2, Axioma 3
4. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}),\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\vdash_{C_n}(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	3, Teorema 1.1.9(iii), MP

5. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	4, MtD
6. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\vee(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	5, Teorema 1.1.9(viii), MP
7. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} \neg\sim_n(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	Teorema 1.1.9(xi), Definição 1.1.5, Axioma 3, MP
8. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	Teorema 1.1.6
9. $\sim_n(\mathbf{A}^{(k)}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	6, 7, 8, Axioma 8, MP

9. Seja **S** do tipo ($\mathbf{A}^k\&\mathbf{A}^{(k-1)}$), gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\mathbf{A}^{(k)}$, por E(k), com k>1. Demonstraremos que $\mathbf{A}^{(k)} \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^k\&\mathbf{A}^{(k-1)})$.

A demonstração é imediata, pela Definição 1.1.3.

10. Seja **S** de tipo ($\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$), gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$, por DNC¬, onde **B** é distinta de $\neg\mathbf{A}$. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \vdash_{C_n} (\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})$.

A demonstração é imediata, pelo Teorema 1.1.9 (i).

11. Seja **S** do tipo **A**, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg\sim_k\mathbf{A}$, por $E\neg\sim_k$ ($k\geq1$). Demonstraremos que $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$.

1. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\sim_k\mathbf{A}$	propriedade de $\vdash_{C_n}$
2. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{(k)})$	1, Definição 1.1.4
3. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\vee\neg(\mathbf{A}^{(k)})$	2, Teorema 1.1.9(i), MP
4. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 9
5. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$	Teorema 1.1.9(iii)
6. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Axioma 3
7. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \neg(\mathbf{A}^{(k)})\supset\mathbf{A}$	5, 6, transitividade de $\supset$
8. $\neg\sim_k\mathbf{A}, \sim_n\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$	4, 7, 3, Axioma 8, MP
9. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \sim_n\mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	8, MtD
10. $\neg\sim_k\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{A}$	Teorema 1.1.6

11. $\neg{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}\vee{\sim_n}\mathbf{A}$ Teorema 1.1.13 (v)

12. $\neg{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$ 10, 9, 11, Axioma 8, MP

12. Seja **S** do tipo **A**, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de ${\sim_n}{\sim_k}\mathbf{A}$, por E${\sim_n}{\sim_k}$ ($k\geq 1$). Demonstraremos que ${\sim_n}{\sim_k}\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{A}$.

O resultado é imediato, pela Definição 1.1.4 e (11).

13. Seja **S** do tipo $(\mathbf{A}^k)$, gerada, em **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, de $\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1})$, por Ik. Demonstraremos que $\neg(\mathbf{A}^{k-1}\&\neg\mathbf{A}^{k-1}) \vdash_{C_n} (\mathbf{A}^k)$.

O resultado é imediato, pela Definição 1.1.2. □

Observação 4.3.4 O Metateorema da Dedução para os sistemas **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, é facilmente demonstrado. Se Γ, $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$ então, pelo Teorema 4.3.3, Γ, $\mathbf{A} \vdash_{C_n} \mathbf{S}$ e, pelo Teorema 1.1.8, $\Gamma \vdash_{C_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{S}$; portanto, pelo Teorema 4.3.1, $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{S}$.

Por outro lado, suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{S}$. Então, Γ, ${\sim_n}(\mathbf{A}\supset\mathbf{S})$ é fechado e, portanto, pela Regra DNI$\sim_n$, Γ, $\mathbf{A}$, ${\sim_n}\mathbf{S}$ é fechado. Conseqüentemente, Γ, $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$.

Logo, em cada **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, temos o seguinte resultado:

Γ, $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{S}$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{\mathbf{TNDC}_n} \mathbf{A}\supset\mathbf{S}$. □

Teorema 4.3.5 Os sistemas **TNDC**$_n$, $1\leq n<\omega$, constituem uma hierarquia de sistemas de tableaux, tal que cada sistema **TNDC**$_n$ é equivalente ao correspondente sistema paraconsistente **C**$_n$, $1\leq n<\omega$, de da Costa.

Demonstração:

É uma conseqüência imediata dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.3. □

Como, pela Observação 4.3.4 e Teorema 4.3.5, cada sistema $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, é equivalente ao correspondente $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, os resultados sintáticos e semânticos relativos aos $\mathbf{TNDC}_n$ são imediatos.

Assim sendo, a correção e completude de nossos sistemas de tableaux são imediatas.

Além disso, a decidibilidade de $\mathbf{TNDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, também pode ser demonstrada, a partir das características das Regras de Expansão dos sistemas.

Para toda fórmula **S** devemos poder verificar, em um número finito de passos, se $\sim_n \mathbf{S}$ é fechado, ou se $\sim_n \mathbf{S}$ não é fechado; para todo tableau para $\sim_n \mathbf{S}$, no caso quando $\sim_n \mathbf{S}$ não é fechado, devemos gerar pelo menos um ramo finito completo e aberto.

Pretendemos desenvolver essa demonstração, em trabalho futuro.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, demonstramos que os sistemas de dedução natural **DNC**$_n$ e **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, introduzidos *à la* Fitch, constituem hierarquias de sistemas lógicos não-triviais, equivalentes aos sistemas correspondentes das hierarquias **C**$_n$ e **C**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa. Nesses sistemas, as condições para a "propagação do bom comportamento" são derivadas.

Demonstramos um Teorema de Normalização, *à la* Fitch, para as provas categóricas dos sistemas **DNC**$_n$ e **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$. Como conseqüência da normalização, demonstramos diretamente a consistência, a não-trivialização e um princípio de subfórmula adequado aos sistemas proposicionais **DNC**$_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e aos sistemas quantificacionais **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.

Também foram introduzidos os sistemas de tableaux analíticos **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, nos quais o operador definido "o" ("bola") de da Costa, os operadores "k" reiterados de nível k, os operadores generalizados "(k)", e as negações "$\sim_k$", $k \geq 1$, foram considerados operadores primitivos, diferentemente do que tem sido feito na literatura, onde esses operadores são usualmente definidos.

Através da demonstração da Regra do Corte para os sistemas **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, demonstramos que cada sistema da hierarquia **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, é equivalente ao correspondente sistema paraconsistente **C**$_n$, $1 \leq n < \omega$, de da Costa.

Nos sistemas de tableaux **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, existem regras específicas que operam objetivamente com todos os operadores e, desse modo, os ramos dos tableaux são unívoca e automaticamente gerados. Nos tableaux dos sistemas **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, retornos infinitos não ocorrem.

Nos sistemas de tableaux **TNDC**$_n$ são definidas duas condições para o fechamento dos ramos dos tableaux, diferentemente do que é usual na literatura.

Na hierarquia de sistemas **TNDC**$_n$, $1 \leq n < \omega$, também demonstramos resultados que relacionam entre si os diferentes sistemas **C**$_n$ da hierarquia de da Costa, $1 < n < \omega$.

Pretendemos dar continuidade ao trabalho desenvolvido e, baseados nos resultados já obtidos, projetamos:

- Estender a normalização, à la Fitch, para provas não-categóricas, o que parece bastante natural, face às características das provas subordinadas. Observamos que toda prova à la Fitch pode ser transformada em prova categórica.

- Estudar as relações entre as especificidades dos métodos de normalização de **Fitch 1952** e de **Prawitz 1965**, em particular para os sistemas correspondentes às hierarquias $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa.

- Demonstrar um Teorema de Normalização Forte para as hierarquias $\mathbf{DNC}_n$ e $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.

- Desenvolver hierarquias de sistemas de seqüentes para as hierarquias de sistemas $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa.

- Introduzir o sistema de tableaux analíticos $\mathbf{TNDC}_\omega$, correspondente ao sistema $\mathbf{C}_\omega$ de da Costa.

- Estender o método de tableaux analíticos para a construção da hierarquia de sistemas quantificacionais de tableaux analíticos $\mathbf{TNDC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, correspondentes aos sistemas $\mathbf{C}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa.

ANEXO 1 - SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL PARA OS CÁLCULOS DE DA COSTA

Neste anexo, apresentamos resumidamente os sistemas de dedução natural, presentes na literatura, associados aos cálculos proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, ao cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$, e ao cálculo quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$*, de da Costa.

Primeiramente, introduzimos os sistemas de dedução natural para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, de **Alves 1976**.

A seguir, introduzimos os sistemas de **Raggio 1978**, denominados $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega$*.

Em 1990, Béziau introduziu o sistema de dedução natural M1, equivalente a $\mathbf{C}_1$, e uma sua variante M'1. Aqui, apresentamos esses sistemas.

Por último, introduzimos o sistema de dedução natural de **Moura 2002**, para $\mathbf{C}_\omega$, denominado $\mathbf{NNC}_\omega$.

1. OS SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL DE ALVES

Alves 1976 introduz sistemas de dedução natural, *à la* Gentzen, para os cálculos proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1\leq n\leq\omega$, de da Costa.

1.1) As *regras de dedução* para os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1\leq n<\omega$, são as seguintes:

Regras de introdução	**Regras de eliminação**
(⊃I) $\dfrac{\begin{array}{c}[\mathbf{A}]\\ \mathbf{B}\end{array}}{\mathbf{A}\supset\mathbf{B}}$	(⊃E) $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{A}\supset\mathbf{B}}{\mathbf{B}}$

Regras de introdução	**Regras de eliminação**
(&I) $\dfrac{\mathbf{A} \quad \mathbf{B}}{\mathbf{A\&B}}$	(&E) $\dfrac{\mathbf{A\&B}}{\mathbf{A}} \qquad \dfrac{\mathbf{A\&B}}{\mathbf{B}}$
($\lor$I) $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A\lor B}} \qquad \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{A\lor B}}$	($\lor$E) $\dfrac{\mathbf{A\lor B} \quad \overset{[\mathbf{A}]}{\mathbf{C}} \quad \overset{[\mathbf{B}]}{\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}$
(o′) $\dfrac{\mathbf{A}^{(n)} \quad \mathbf{B}^{(n)}}{(\mathbf{A\&B})^{(n)}}$	
(o′′) $\dfrac{\mathbf{A}^{(n)} \quad \mathbf{B}^{(n)}}{(\mathbf{A\lor B})^{(n)}}$	
(o′′′) $\dfrac{\mathbf{A}^{(n)} \quad \mathbf{B}^{(n)}}{(\mathbf{A\supset B})^{(n)}}$	

E as Regras:

($\neg_1$) $\dfrac{\overset{[\mathbf{A}]}{\mathbf{C}} \quad \overset{[\neg\mathbf{A}]}{\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}$ ($\neg_2$) $\dfrac{\neg\neg\mathbf{A}}{\mathbf{A}}$ ($\neg_3$) $\dfrac{\mathbf{A}^{(n)} \quad \mathbf{A} \quad \neg\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$

1.2) As *regras de dedução* para $\mathbf{C}_\omega$ são as seguintes:

As Regras de Introdução e Eliminação de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e as Regras ($\neg_2$) e ($\neg_3$).

Observamos que deve ter havido problemas na revisão da impressão do trabalho de Alves, pois, as regras que caracterizam o sistema de dedução natural $\mathbf{C}_\omega$ deveriam ser:

As Regras de Introdução e Eliminação de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, e as regras ($\neg_1$) e ($\neg_2$).

2. OS SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL $\mathbf{NC}_\omega$ E $\mathbf{NC}_\omega^*$ DE RAGGIO.

Raggio 1978 introduz sistemas com um único axioma para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$ e para a lógica quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$* de da Costa, denominados sistemas $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega$*, respectivamente.

Consideramos $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega$* como sistemas de dedução natural, sendo que Raggio apresenta um Teorema de Normalização para esses sistemas, com uma prova *à la* Gentzen.

Aqui, apresentamos, sucintamente, o sistema $\mathbf{NC}_\omega$ e o sistema $\mathbf{NC}_\omega$* de Raggio.

2.1) Os sistemas $\mathbf{NC}_\omega$ e $\mathbf{NC}_\omega$* têm $\mathbf{A\vee\neg A}$ (*tertium-non-datur*) como único *axioma*.

2.2) As *regras de dedução* para $\mathbf{NC}_\omega$ são as seguintes:

Regras de introdução	**Regras de eliminação**
(⊃I) $\dfrac{\overset{[\mathbf{A}]}{\mathbf{B}}}{\mathbf{A\supset B}}$	(⊃E) $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{A\supset B}}{\mathbf{B}}$
(&I) $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}{\mathbf{A\&B}}$	(&E) $\dfrac{\mathbf{A\&B}}{\mathbf{A}\ \ (\mathbf{B})}$
(∨I) $\dfrac{\mathbf{A}\ \ (\mathbf{B})}{\mathbf{A\vee B}}$	(∨E) $\dfrac{\mathbf{A\vee B}\quad \overset{[\mathbf{A}]}{\mathbf{C}}\quad \overset{[\mathbf{B}]}{\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}$ onde $\mathbf{A\vee B}$ é a premissa principal
	(¬¬E) $\dfrac{\neg\neg\mathbf{A}}{\mathbf{A}}$

2.3) As *regras de dedução* para $\mathbf{NC}_{\omega}*$ são as seguintes, consideradas as restrições usuais:

Regras de introdução	**Regras de eliminação**
(⊃I), (&), (∨I)	(⊃E), (&), (∨E), (¬¬E)
(∀I) $\dfrac{\mathbf{A}(a)}{\forall x\mathbf{A}(x)}$	(∀E) $\dfrac{\forall x\ \mathbf{A}(x)}{\mathbf{A}(a)}$
(∃I) $\dfrac{\mathbf{A}(a)}{\exists x\mathbf{A}(x)}$	(∃E) $\dfrac{\exists x\mathbf{A}(x) \qquad \begin{matrix}\mathbf{A}(a)\\ \mathbf{C}\end{matrix}}{\mathbf{C}}$ $\exists x\mathbf{A}(x)$ é a premissa principal

Teorema de Normalização: Toda derivação em $NC_{\omega}*$ (NC_{ω}) pode ser reduzida a uma forma normal, aplicando-se um número finito de reduções. A derivação na forma normal tem a mesma fórmula final e não tem novas suposições não descarregadas (**Raggio 1978**, p. 3-4).

3. O SISTEMA DE DEDUÇÃO NATURAL M1 (M'1) DE BÉZIAU.

Béziau 1990, em seu memorial (manuscrito) de DEA, introduz um novo sistema, *à la* Hilbert, para $\mathbf{C}_1$ e uma nova versão de sua semântica, com o objetivo de dar uma nova apresentação mais intuitiva para $\mathbf{C}_1$. São apresentados o sistema de dedução natural M1, equivalente a $\mathbf{C}_1$, e uma sua variante M'1.

Consideramos, aqui, M1 como um sistema de dedução natural.

A seguir, apresentamos os sistemas M1 e M'1, como introduzidos no memorial de DEA de Béziau.

3.1) O sistema M1 tem como *axiomas*:

- Identidade: $\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$
- Terceiro-Excluído: $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$

3.2) As *regras* para M1 são as seguintes:

3.2.1) *Regra estrutural*:

- Enfraquecimento à direita: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}$

3.2.2) As *regras lógicas* para M1 são as seguintes:

	Regras de introdução	**Regras de eliminação**
(&)	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \qquad \Gamma' \vdash \mathbf{B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mathbf{A\&B}}\ \& +$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A\&B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}}\ \& - \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A\&B}}{\Gamma \vdash \mathbf{B}}\ \& -$
(∨)	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A \vee B}}\ \vee + \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A \vee B}}\ \vee +$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A \vee B} \qquad \Gamma', \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \qquad \Gamma'', \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \mathbf{C}}$
(⊃)	$\dfrac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A \supset B}}\ \supset +$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \qquad \Gamma' \vdash \mathbf{A \supset B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mathbf{A \supset B}}\ \supset -$

E as Regras para a negação:

(¬) $\dfrac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \quad \Gamma', \mathbf{A} \vdash \neg \mathbf{B} \quad \Gamma'', \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}^{o}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \neg \mathbf{A}}\ \neg + \qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash \mathbf{A}_1^{o} \ \dots \ \Gamma_n \vdash \mathbf{A}_n^{o}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash k[\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n]^{o}}\ k^{o}$

onde $n \in \{1, 2\}$ $k \in \{\&, \vee, \supset, \neg\}$

3.3) O sistema M'1, considerado uma variante de M1, é obtido suprimindo-se a Regra ¬+ de M1 e acrescentando-se as seguintes **regras**:

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}} \qquad \neg + ' \quad \text{(Introdução da negação)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \qquad \text{(Enfraquecimento à esquerda)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{B} \qquad \Gamma' \vdash \neg \mathbf{B} \qquad \Gamma'' \vdash \mathbf{B}^{o}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash} \qquad \neg - ' \text{ (Eliminação da negação)}$$

Teorema:

a) $\Gamma \vdash_{C_1} \mathbf{A}$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{\mathbf{M1}} \mathbf{A}$

b) $\Gamma \vdash_{\mathbf{M1}} \mathbf{A}$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{\mathbf{M'1}} \mathbf{A}$.

4. O SISTEMA DE DEDUÇÃO NATURAL NNC$_\omega$ DE MOURA.

Moura 2002 introduz um sistema de dedução natural, *à la* Gentzen, para o cálculo proposicional paraconsistente **C**$_\omega$, denominado NNC$_\omega$.

O sistema NNC$_\omega$ de Moura é o mesmo de **Alves 1976**, **Castro 1998** e de **Castro e D´Ottaviano 2000**.

4.1) As *regras de dedução* para NNC$_\omega$ são as seguintes:

Regras de introdução	**Regras de eliminação**
$(\supset I)\quad \begin{array}{c}[\mathbf{A}_1]\\ \Pi_1\\ \mathbf{A}_2\\ \hline \mathbf{A}_1\supset\mathbf{A}_2\end{array}$	$(\supset E)\quad \dfrac{\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_1\supset\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_2}$
$(\&I)\quad \dfrac{\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_1\&\mathbf{A}_2}$	$(\&E)\quad \dfrac{\mathbf{A}_1\&\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_i}\qquad (i = 1, 2)$
$(\vee I)\quad \dfrac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2}\quad (\mathbf{A}_i = 1, 2)$	$(\vee E)\quad \begin{array}{ccc} & [\mathbf{A}_1] & [\mathbf{A}_2]\\ & \Pi_1 & \Pi_2\\ \mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2 & \mathbf{C} & \mathbf{C}\\ \hline & \mathbf{C} & \end{array}$
	$(\neg\neg E)\quad \dfrac{\neg\neg\mathbf{A}}{\mathbf{A}}$

E a Regra

$$(neg)\quad \begin{array}{cc}[\mathbf{A}] & [\neg\mathbf{A}]\\ \Pi_1 & \Pi_2\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{C}}\end{array}$$

Teorema de Normalização: Toda derivação Π de NNC$_\omega$ reduz-se a uma derivação normal Π', sem novas suposições e com a mesma fórmula final (**Moura 2002**, p. 109-110).

Moura 2002 demonstra um Teorema de Normalização Forte para o sistema NNC$_\omega$.

ANEXO 2 - OS SISTEMAS PROPOSICIONAIS PARACONSISTENTES DE DEDUÇÃO NATURAL NDC$_n$, 1≤n≤ω.

Em **Castro e D'Ottaviano 2000**, introduzimos a hierarquia de sistemas lógicos de dedução natural **NDC**$_n$, 1≤n≤ω, e demonstramos que esses sistemas são logicamente equivalentes aos sistemas correspondentes da hierarquia de lógicas paraconsistentes **C**$_n$, 1≤n≤ω, de da Costa.

A diferença entre os sistemas lógicos **NDC**$_n$, 1≤n≤ω, e os correspondentes sistemas **DNC**$_n$, 1≤n≤ω, introduzidos na Seção 2.2 do Capítulo 2, está somente na formulação da *Regra de Introdução Restringida da Negação* (I - ¬(rest)) e da *Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação* (DNI(rest)).

Em **NDC**$_n$, 1≤n≤ω, temos as seguintes *regras de dedução*, sendo que as idênticas às dos sistemas **DNC**$_n$ correspondentes são apenas mencionadas.

Regra de Repetição (R)

Regra de Reiteração (Reit)

Regra de Introdução da Implicação (I - ⊃)

Regra de Introdução da Conjunção (I - &)

Regra de Introdução da Disjunção (I - ∨)

Regra de Eliminação da Implicação (E - ⊃)

Regra de Eliminação da Conjunção (E - &)

Regra de Eliminação da Disjunção (E - ∨)

Regra de Eliminação da Dupla Negação (E - ¬¬)

Regra do Terceiro-Excluído (RTE)

Regra da Distribuição da Negação na Conjunção (DNC)

Regra da Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest))

Introdução Restringida da Negação (I - $\neg$(rest)): Se a partir do conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{C}\}$, onde $\mathbf{C}$ é uma suposição, podemos deduzir como conclusões $\mathbf{B}$ e $\neg\mathbf{B}$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k, \mathbf{B}^{(n)}\}$ podemos deduzir como conclusão $\neg\mathbf{C}$.

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
m	$\mathbf{B}^{(n)}$	
⋮	⋮	
p	| $\mathbf{C}$	suposição
⋮	| ⋮	
s	| $\mathbf{B}$ (ou $\neg\mathbf{B}$)	
⋮	| ⋮	
t	| $\neg\mathbf{B}$ (ou $\mathbf{B}$)	
v	$\neg\mathbf{C}$	m, p-t, I - $\neg$(rest)

Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)): Se a partir de um conjunto de fórmulas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusões $\mathbf{A}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ e $\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão a conjunção de $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

1	$\mathbf{A}_1$	
⋮	⋮	
k	$\mathbf{A}_k$	
⋮	⋮	
p	$\mathbf{A}^{(n)}$ (ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
⋮	⋮	
q	$\mathbf{B}^{(n)}$ (ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
⋮	⋮	
r	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	
⋮	⋮	
s	$\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	p, q, r, DNI(rest)

Os sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \le n \le \omega$, são equivalentes aos correspondentes sistemas proposicionais axiomáticos $\mathbf{C}_n$, $1 \le n \le \omega$; e, como no Capítulo 2 é demonstrada a equivalência entre cada $\mathbf{DNC}_n$ e os correspondentes sistemas $\mathbf{C}_n$ resulta que os sistemas da hierarquia $\mathbf{NDC}_n$ são equivalentes aos sistemas correspondentes da hierarquia $\mathbf{DNC}_n$, $1 \le n \le \omega$.

Todavia, aqui demonstramos diretamente a equivalência lógica entre os sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$ e os correspondentes sistemas de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \le n \le \omega$.

No lema, a seguir, demonstramos resultados que serão utilizados nas provas dos próximos teoremas.

Lema 1 a) $\vdash_{\mathrm{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)} \supset ((\mathbf{C} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C}))$

b) $\vdash_{\mathrm{DNC}_n} (\mathbf{C} \supset \mathbf{B}^{(n)}) \supset ((\neg \mathbf{C} \supset \mathbf{B}) \supset ((\neg \mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C}))$.

Demonstração

a) $\vdash_{\mathrm{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)} \supset ((\mathbf{C} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C}))$

1	$\mid \mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\mid\ \mid \mathbf{C} \supset \mathbf{B}$	suposição
3	$\mid\ \mid\ \mid \mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}$	suposição
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{C}$	suposição
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{C} \supset \mathbf{B}$	2, Reiteração
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}$	3, Reiteração
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathbf{B}$	4, 5, E - $\supset$
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg \mathbf{B}$	4, 6, E - $\supset$
9	$\mid\ \mid\ \mid \neg \mathbf{C}$	1, 4-8, I - $\neg$(rest)
10	$\mid\ \mid (\mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C}$	3-9, I - $\supset$
11	$\mid (\mathbf{C} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C})$	2-10, I - $\supset$
12	$\mathbf{B}^{(n)} \supset ((\mathbf{C} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \supset \neg \mathbf{B}) \supset \neg \mathbf{C}))$	1-11, I - $\supset$

b) $\vdash_{\mathrm{DNC}_n}(\mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)})\supset((\neg\mathbf{C}\supset\mathbf{B})\supset((\neg\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C}))$

1	$\vert\ \mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)}$	suposição
2	$\vert\ \vert\ \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$	suposição
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$	suposição
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}$	suposição
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}$	suposição
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)}$	1, Reiteração
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}^{(n)}$	5, 6, E - ⊃
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$	3, Reiteração
9	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{B}$	5, 8, E - ⊃
10	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$	2, Reiteração
11	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \mathbf{B}$	5, 10, E - ⊃
12	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{C}$	5-12, I - ¬(rest)
13	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{C}$	suposição
14	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{C}$	13, Repetição
15	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathbf{C}$	5-12, 13-14, RTE
16	$\vert\ \vert\ (\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C}$	3-15, I - ⊃
17	$\vert\ (\mathbf{C}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C})$	2-16, I - ⊃
18	$(\mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{C}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C}))$	1-17, I - ⊃

Teorema 2 Toda prova Π′ de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema de dedução natural **DNC**$_n$, $1\leq n<\omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **NDC**$_n$, $1\leq n<\omega$. Isto é,

$$\Gamma\vdash_{\mathbf{DNC}_n}\mathbf{F}\Rightarrow\Gamma\vdash_{\mathbf{NDC}_n}\mathbf{F}.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento da prova de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Como hipótese de indução, admitamos que, para toda prova Π' de **F**, com comp(Π) < k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema proposicional $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNCn}} \mathbf{F}$, no k-ésimo passo.

Apresentamos, a seguir, apenas a demonstração relativa aos casos de aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)) e da Regra de Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)), pois, nos outros casos, as regras são as mesmas, nos 2 (dois) sistemas.

i) **F** é a fórmula $\neg\mathbf{C}$, obtida no passo k da prova Π', em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$, por aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)) de $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$. Temos:

1	$\mathbf{A}_1$			
$\vdots$	$\vdots$			
h	$\mathbf{A}_h$			
$\vdots$	$\vdots$			
p		$\mathbf{C}$		suposição
$\vdots$		$\vdots$		
q		$\mathbf{B}^{(n)}$	($\mathbf{B}$ ou $\neg\mathbf{B}$)	
$\vdots$		$\vdots$		
r		$\mathbf{B}$	($\mathbf{B}^{(n)}$ ou $\neg\mathbf{B}$)	
$\vdots$		$\vdots$		
k-1		$\neg\mathbf{B}$	($\mathbf{B}^{(n)}$ ou $\mathbf{B}$)	
k	$\neg\mathbf{C}$			p, p-(k-1), I - ¬(rest)

Isto é, de $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{B}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{C}$, onde **C** é uma suposição.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}$

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\mathbf{B}$

Então, pela Regra de Introdução da Implicação (I - $\supset$) em **NDC**$_n$, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$

Portanto, por aplicações da Regra de Eliminação da Implicação (E - $\supset$) em

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}\supset((\mathbf{C}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C}))$ (Lema 1- (a))

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$, temos

$\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\mathbf{C}$.

Então, pela Regra I - $\supset$, segue-se

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{C}$.

De $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{C}$, pela Regra do Terceiro-Excluído (RTE), temos,

Γ

$\vdots$

s	$\mid \mathbf{C}$	suposição
s+1	$\mid \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{C}$	Reiteração
s+2	$\mid \neg\mathbf{C}$	s, s+1, E - $\supset$
s+3	$\mid \neg\mathbf{C}$	suposição
s+4	$\mid \neg\mathbf{C}$	s+3, Repetição
s+5	$\neg\mathbf{C}$	s-(s+2), (s+3)-(s+4), RTE

Logo, $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\mathbf{C}$, ou seja

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}$.

ii) **F** é a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, obtida no passo k da prova Π', em $\mathbf{DNC}_n$, por aplicação da Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). Temos:

1	$\mathbf{A}_1$		
⋮	⋮		
h	$\mathbf{A}_h$		
⋮	⋮		
p	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
⋮	⋮		
q	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
⋮	⋮		
r	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$		
⋮	⋮		
k	$\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$		p, q, r, DNI(rest)

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

Por hipótese de indução, temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$.

Portanto, em $\mathbf{NDC}_n$, $1\leq n<\omega$:

	Γ	
	⋮	
p	$\mathbf{A}^{(n)}$ (ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
⋮	⋮	
q	$\mathbf{B}^{(n)}$ (ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
⋮	⋮	
r	$\neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$	
⋮	⋮	
s	$\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	p, q, r, DNI(rest)
s+1	$\mathbf{A}$	s, E - &
s+2	$\neg\mathbf{B}$	s, E - &
s+3	$\quad\mid \neg\mathbf{A}$	suposição
s+4	$\quad\mid \mathbf{A}$	s+1, Reiteração
s+5	$\neg\neg\mathbf{A}$	p (ou q), (s+3)-(s+4), I - ¬(rest)
s+6	$\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$	s+2, s+5, I - &

Logo, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, obtemos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\neg\mathbf{A} \& \neg\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}$.

Portanto,

Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}$. □

Teorema 3 Toda prova Π' de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{NDC}_\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_\omega} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos de aplicações das Regras: Introdução Restringida da Negação (I – ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)) e Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). □

Teorema 4 Toda prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π' de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento da prova de **F**, a partir de Γ, em $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Como hipótese de indução, admitamos que, para toda prova Π de **F**, com comp(Π)< k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema proposicional $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π' de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$, no k-ésimo passo.

Apresentamos, a seguir, apenas a demonstração relativa aos casos de aplicação das Regras de Introdução Restringida da Negação (I - $\neg$(rest)) e da Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)), pois, nos outros casos, as regras são as mesmas, nos 2 (dois) sistemas.

i) **F** é a fórmula $\neg\mathbf{C}$, obtida no passo k da prova Π, em $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$, por aplicação da Regra de Introdução Restringida da Negação (I - $\neg$(rest)) de $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n < \omega$. Temos:

$$\begin{array}{llll}
 & \Gamma & & \\
 & \vdots & & \\
k & \mathbf{A}_k & & \\
\vdots & \vdots & & \\
m & \mathbf{B}^{(n)} & & \\
\vdots & \vdots & & \\
p & & \vert\ \mathbf{C} & \text{suposição} \\
\vdots & & \vert\ \vdots & \\
s & & \vert\ \mathbf{B}\ \ (\text{ou } \neg\mathbf{B}) & \\
\vdots & & \vert\ \vdots & \\
k\text{-}1 & & \vert\ \neg\mathbf{B}\ (\text{ou } \mathbf{B}) & \\
k & \neg\mathbf{C} & & \text{m, p-(k-1), I - }\neg\text{(rest)}
\end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\mathbf{B}$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg\mathbf{C}$, onde **C** é uma suposição.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}$ e $\Gamma, \mathbf{C} \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{B}$.

Então, pelo Princípio da Introdução do Antecedente e pela Regra de Introdução da Implicação (I - $\supset$) em **DNC**$_n$, temos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$.

Portanto, por aplicações da Regra de Eliminação da Implicação (E - $\supset$) em

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} (\mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)})\supset((\mathbf{C}\supset\mathbf{B})\supset((\mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B})\supset\neg\mathbf{C}))$ (Lema 1- (b))

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\mathbf{B}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{C}\supset\neg\mathbf{B}$, temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg\mathbf{C}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$.

ii) **F** é a fórmula $\neg\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$, obtida, no passo k da prova Π, em **NDC**$_n$, por aplicação da Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). Temos:

$$\begin{array}{lll}
 & \Gamma & \\
 & \vdots & \\
p & \mathbf{A}^{(n)} \text{ (ou } \mathbf{B}^{(n)}) & \\
\vdots & \vdots & \\
q & \mathbf{B}^{(n)} \text{ (ou } \mathbf{A}^{(n)}) & \\
\vdots & \vdots & \\
r & \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B}) & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} & \text{p, q, r, DNI(rest)}
\end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}$.

Por hipótese de indução, temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg(\mathbf{A}\supset\mathbf{B})$.

Portanto, em $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n < \omega$:

	Γ		
	$\vdots$		
p	$\mathbf{A}^{(n)}$	(ou $\mathbf{B}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$		
q	$\mathbf{B}^{(n)}$	(ou $\mathbf{A}^{(n)}$)	
$\vdots$	$\vdots$		
r	$\neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$		
$\vdots$	$\vdots$		
s	$\neg\neg\mathbf{A} \& \neg\mathbf{B}$		p, q, r, DNI(rest)
s+1	$\neg\neg\mathbf{A}$		s, E - &
s+2	$\mathbf{A}$		s+1, E - ¬¬
s+3	$\neg\mathbf{B}$		s, E - &
s+4	$\mathbf{A} \& \neg\mathbf{B}$		s+2, s+3, I - &

Logo, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{B}^{(n)}$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, obtemos

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{A} \& \neg\mathbf{B}$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$.

Portanto,

Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F}$. □

Teorema 5 Toda prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema dedução natural $\mathbf{NDC}_\omega$, pode ser transformada numa prova Π' de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_\omega} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos de aplicações das Regras: Introdução Restringida da Negação (I – ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)) e Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)). □

Como uma conseqüência imediata dos resultados anteriores, temos o seguinte teorema de equivalência.

Teorema 6 Os sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$**,** $1 \leq n \leq \omega$, são logicamente equivalentes aos correspondentes sistemas proposicionais de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$**,** $1 \leq n \leq \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}. \qquad \square$$

Colorário 7 Para toda prova categórica Π' de **F**, em cada sistema proposicional de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, existe uma prova categórica Π de **F**, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{NDC}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e vice-versa. Isto é,

$$\vdash_{\mathbf{DNC}_n} \mathbf{F} \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{NDC}_n} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Pelos teoremas anteriores, basta tomar $\Gamma = \emptyset$. □

ANEXO 3 - OS SISTEMAS QUANTIFICACIONAIS PARACONSISTENTES DE DEDUÇÃO NATURAL **aDNC$_n$*, 1≤n≤ω.**

Aqui introduzimos uma outra hierarquia de sistemas dedutivos quantificacionais paraconsistentes de primeira ordem, que denominamos **aDNC**$_n$*, 1≤n≤ω.

A diferença entre os sistemas lógicos **aDNC**$_n$*, 1≤n≤ω, e os correspondentes sistemas **DNC**$_n$*, 1≤n≤ω, introduzidos na Seção 3.1 do Capítulo 3, está somente na formulação da *Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Universal* (D - ¬∀) e da *Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Existencial* (D - ¬∃) de **DNC**$_n$*, 1≤n≤ω, que em **aDNC**$_n$*, 1≤n≤ω, são substituídas pela *Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Universal* (I - reg∀) e pela *Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Existencial* (I - reg∃), respectivamente.

Em **aDNC**$_n$, 1≤n≤ω, temos as seguintes *regras de dedução*, sendo que as idênticas às dos sistemas **DNC**$_n$* correspondentes são apenas mencionadas.

Regra de Repetição (R)
Regra de Reiteração (Reit)
Regra de Introdução da Implicação (I - ⊃)
Regra de Introdução da Conjunção (I - &)
Regra de Introdução da Disjunção (I - ∨)
Regra de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest))
Regra de Eliminação da Implicação (E - ⊃)
Regra de Eliminação da Conjunção (E - &)

Regra de Eliminação da Disjunção (E - ∨)
Regra de Eliminação da Dupla Negação (E - ¬¬)
Regra do Terceiro-Excluído (RTE)
Regra da Distribuição da Negação na Conjunção (DNC)
Regra da Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest))
Regra da Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest))
Regra da Introdução do Quantificador Universal (I - ∀)
Regra da Introdução do Quantificador Existencial (I - ∃)
Regra da Eliminação do Quantificador Universal (E - ∀)
Regra da Eliminação do Quantificador Existencial (E - ∃)

Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Universal (I - reg∀): Se a partir de um conjunto de premissas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir a conclusão $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

1	$\mathbf{A}_1$	premissa
⋮	⋮	
n	$\mathbf{A}_k$	premissa
⋮	⋮	
p	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	
⋮	⋮	
q	$(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	p, I - reg∀

Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Existencial (I - reg∃): Se a partir de um conjunto de premissas $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$, podemos deduzir a conclusão $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$, então do conjunto $\{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ podemos deduzir como conclusão $(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

1	$\mathbf{A}_1$	premissa
⋮	⋮	
n	$\mathbf{A}_k$	premissa
⋮	⋮	
p	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	
⋮	⋮	
q	$(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	p, I - reg∃

Estas duas últimas regras de dedução, assim como os Axiomas 17 e 18 dos sistemas $\mathbf{C}_n^*$, $1 \leq n < \omega$, de da Costa, podem ser interpretadas como condições para a "propagação do bom comportamento", no cálculo quantificacional.

A seguir, demonstramos diretamente a equivalência lógica entre os sistemas de dedução natural $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, e os correspondentes sistemas de dedução natural $\mathbf{aDNC}_n$*, $1 \leq n \leq \omega$.

Lema 1. Em $\mathbf{aDNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, o seguinte resultado é demonstrável:

$$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) \supset \forall\mathbf{x}((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}).$$

Demonstração:

1	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	suposição
2	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
3	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	2, E - &
4	$\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	2, E - &
5	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	4, E - ¬¬
6	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	1, Reiteração
7	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	6, E - ∀
8	$\neg(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	2-7, I - ¬(rest)
9	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1$	8, Definição 1.1 (ver Capítulo 1)
10	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1\&\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1)$	suposição
11	$\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1)$	10, E - &
12	$\neg\neg(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	11, Definição 1.2
13	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	12, E - ¬¬
14	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	13, E - &
15	$\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	13, E - &
16	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	15, E - ¬¬
17	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	1, Reiteração
18	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	17, E - ∀
19	$\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1\&\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^1))$	10-18, I - ¬(rest)
20	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2$	19, Definição 1.1
⋮	⋮	
s	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}\&\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	suposição
s+1	$\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})$	s, E - &
s+2	$\neg\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-2}\&\neg(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-2}))$	s+1, Definição 1.2
s+3	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-2}\&\neg(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-2}$	s+2, E - ¬¬
s+4	$\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-2})$	s+3, E - &
⋮	⋮	
s+p	$\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(s+p-1), E - &

s+p+1	$\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+p, E - &
s+p+2	$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+p+1, E - ¬¬
s+p+3	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	1, Reiteração
s+p+4	$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+p+3, E - ∀
s+p+5	$\neg(((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1})\&\neg((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n-1}))$	s-(s+p+4), I - ¬(rest)
s+p+6	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	s+p+5, Definição 1.2
⋮	⋮	
s+m	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{1}\&(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{2}\& ...\& (\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{n}$	9, 20, ..., s+p+6, I - &
s+m+1	$(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+m+, Definição 1.3
s+m+2	$\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+m+1, I - ∀
s+m+3	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	1-(s+m+2), I - ⊃

Teorema 2 Toda prova Π' de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema dedução natural **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento da prova de **F**, a partir de Γ, em **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Como hipótese de indução, admitamos que, para toda prova Π' de **F**, com comp(Π) < k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F}$, no k-ésimo passo.

Apresentamos, a seguir, apenas a demonstração relativa aos casos de aplicação da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - ¬∀) e da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - ¬∃), pois, nos outros casos, as regras são as mesmas, nos 2 (dois) sistemas.

i) **F** é a fórmula $\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})$, obtida no passo k da prova Π´, em $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, por aplicação da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - ¬∀) de $\mathbf{DNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$. Temos:

$$\begin{array}{lll}
 & \Gamma & \\
 & \vdots & \\
p & \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & (\text{ou } \neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})) \\
\vdots & \vdots & \\
m & \neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}) & (\text{ou } \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})) \\
\vdots & \vdots & \\
k & \exists \mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) & \quad\quad \text{p, m, D - }\neg\forall
\end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \exists \mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n *} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n *} \neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Ou seja, em $\mathbf{aDNC}_n$*:

	Γ	
	$\vdots$	
m	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	
	$\vdots$	
s	$\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
s+1	$\mid\ \neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	suposição
s+2	$\mid\quad\mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
s+3	$\mid\quad\mid\ (\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	s+2, I - $\exists$
s+4	$\mid\quad\mid\ \neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	s+1, Reiteração
s+5	$\mid\quad\mid\ \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	m, Reiteração
s+6	$\mid\quad\mid\ (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+5, I - reg$\exists$
s+7	$\mid\ \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(s+2)-(s+6), I - $\neg$(rest)
s+8	$\mid\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+7, E - $\neg\neg$
s+9	$\mid\ \forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+8, I - $\forall$
s+10	$\mid\ \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s, Reiteração
s+11	$\mid\ \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	m, Reiteração
s+12	$\mid\ (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+11, I - reg$\forall$
s+13	$\neg\neg(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	(s+1)-(s+12), I - $\neg$(rest)
s+14	$(\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	s+13, E - $\neg\neg$

Logo, $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} (\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \mathbf{F}$.

ii) **F** é a fórmula $\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$, obtida no passo k da prova Π', em $\mathbf{DNC}_n$,*, $1\leq n<\omega$, por aplicação da Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - $\neg\exists$) de $\mathbf{DNC}_n$*, $1\leq n<\omega$. Temos:

	Γ	
	$\vdots$	
p	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	(ou $\neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$)
$\vdots$	$\vdots$	
m	$\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(ou $\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$)
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	p, m, D - $\neg\exists$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Ou seja, em $\mathbf{aDNC}_n$*:

	Γ	
	$\vdots$	
m	$\forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	
	$\vdots$	
s	$\neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$	
s+1	$\mid\ \neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	suposição
s+2	$\mid\ \mid\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$	suposição
s+3	$\mid\ \mid\ (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	s+2, I - $\exists$
s+4	$\mid\ \mid\ \neg(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	s+1, Reiteração
s+5	$\mid\ \mid\ \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	m, Reiteração
s+6	$\mid\ \mid\ (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$	s+5, I - reg$\exists$
s+7	$\mid\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	(s+2)-(s+6), I - $\neg$(rest)
s+8	$\mid\ \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+7, I - $\forall$
s+9	$\mid\ \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	m, Reiteração
s+10	$\mid\ \forall\mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})\supset\forall\mathbf{x}((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	Lema 1
s+11	$\mid\ \forall\mathbf{x}((\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$	s+9, s+10, E - $\supset$
s+12	$\mid\ (\forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})))^{(n)}$	s+11, I - reg$\forall$
s+13	$\neg\neg(\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))$	(s+1)-(s+12), I - $\neg$(rest)
s+14	$\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$	s+13, E - $\neg\neg$

Logo, $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_{n}*} \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})$, ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_{n}*} \mathbf{F}$. □

Teorema 3 Toda prova Π′ de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema dedução natural **DNC**$_\omega$*, pode ser transformada numa prova Π de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **aDNC**$_\omega$*. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega *} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_\omega *} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos de aplicações das Regras: Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)), Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)), Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Universal (D - ¬∀) e Regra de Distribuição da Negação no Quantificador Existencial (D - ¬∃). □

Teorema 4. Toda prova Π de **F** a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema quantificacional de dedução natural **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, pode ser transformada numa prova Π′ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **DNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n *} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n *} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Por indução sobre o comprimento da prova de **F**, a partir de Γ, em **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$.

Como hipótese de indução, admitamos que, para toda prova Π de **F**, com comp(Π) < k, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, em cada sistema **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, existe uma prova Π′ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural **DNC**$_n$, $1 \leq n < \omega$.

Demonstremos o resultado para comp(Π) = k, ou seja, para o caso em que **F** é obtida, na prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*}$ **F**, no k-ésimo passo.

Apresentamos, a seguir, apenas a demonstração relativa aos casos de aplicação da Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Universal (I - reg∀) e da Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Existencial (I - reg∃), pois, nos outros casos, as regras são as mesmas, nos 2 (dois) sistemas.

i) **F** é a fórmula $(\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, obtida no passo k da prova Π, em **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$, por aplicação da Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Universal (I - reg∀) de **aDNC**$_n$*, $1 \leq n < \omega$. Temos:

$$\begin{array}{lll} & \Gamma & \\ & \vdots & \\ p & \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & \\ \vdots & \vdots & \\ k & (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} & p,\ \text{I - reg}\forall \end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$.

Pelo Teorema 3.3.1, segue-se que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) \supset (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Por E - ⊃ , temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} (\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*}$ **F**.

ii) **F** é a fórmula $(\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$, obtida no passo k da prova Π, em $\mathbf{aDNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$, por aplicação da Regra de Introdução da Regularidade no Quantificador Existencial (I - reg∃) de $\mathbf{aDNC}_n$*, $1 \leq n < \omega$. Temos:

$$\begin{array}{lll} & \Gamma & \\ & \vdots & \\ p & \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) & \\ \vdots & \vdots & \\ k & (\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)} & \text{p, I - reg}\exists \end{array}$$

Isto é, de $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n*} (\exists \mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Por hipótese de indução, temos que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)})$.

Pelo Teorema 3.3.1, segue-se que:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \forall \mathbf{x}((\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}) \supset (\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Por E - ⊃ , temos que

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} (\exists \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{(n)}$.

Ou seja,

$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n*} \mathbf{F}$.

Teorema 5 Toda prova Π de **F**, a partir de um conjunto Γ de fórmulas, no sistema dedução natural $\mathbf{aDNC}_\omega$*, pode ser transformada numa prova Π´ de **F**, a partir do conjunto Γ de fórmulas, no correspondente sistema de dedução natural $\mathbf{DNC}_\omega$*. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_\omega*} \mathbf{F} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_\omega*} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Demonstrações idênticas às do teorema anterior, excluindo-se os casos de aplicações das Regras de Introdução Restringida da Negação (I - ¬(rest)), Distribuição da Negação na Conjunção (DNC), Distribuição Restringida da Negação na Disjunção (DND(rest)), Distribuição Restringida da Negação na Implicação (DNI(rest)), Introdução da Regularidade no Quantificador Universal (I - reg∀) e Introdução da Regularidade no Quantificador Existencial (I - reg∃). □

Como uma conseqüência imediata dos resultados anteriores, temos o seguinte teorema de equivalência.

Teorema 6 Os sistemas quantificacionais de dedução natural **DNC**$_n$*****, $1 \leq n \leq \omega$, são logicamente equivalentes aos correspondentes sistemas quantificacionais de dedução natural **aDNC**$_n$*****, $1 \leq n \leq \omega$. Isto é,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{DNC}_n{*}} \mathbf{F} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{aDNC}_n{*}} \mathbf{F}. \qquad \square$$

Colorário 7 Toda prova categórica Π′ de **F**, em cada sistema quantificacional de dedução natural **DNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, pode ser transformada numa prova categórica Π de **F**, no correspondente sistema de dedução natural **aDNC**$_n$*, $1 \leq n \leq \omega$, e vice versa. Isto é,

$$\vdash_{\mathbf{DNC}_n{*}} \mathbf{F} \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{aDNC}_n{*}} \mathbf{F}.$$

Demonstração:

Pelos teoremas anteriores, basta tomar $\Gamma = \varnothing$. □

ANEXO 4 - SISTEMAS DE TABLEAUX PARA OS CÁLCULOS C_1 DE DA COSTA E C_1^1 DE ALVES

Neste anexo, apresentamos resumidamente os sistemas de tableaux, conhecidos na literatura, equivalentes ao cálculo proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1$ de da Costa e ao cálculo proposicional $\mathbf{C}_1^1$ de Alves.

Primeiramente, introduzimos o sistema de tableaux de **Marconi 1980**, denominado M1.

A seguir, introduzimos o sistema de tableaux de **Carnielli e Lima-Marques 1992**, denominado TC1.

Por último, introduzimos o sistema de **Buchsbaum e Pequeno 1993**, denominado **SC**1.

Finalizamos com alguns exemplos, que exibem as peculariedades dos 3 (três) sistemas de tableaux mencionados, ou seja, M1, TC1 e SC1, e salientam as características algorítmicas de nosso sistema de tableaux $\mathbf{TDNC}_1$.

Recomendamos **Pastorello Jr 2002**, para maiores detalhes e uma análise comparativa entre os diversos sistemas de tableaux para os cálculos $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_1$* e $\mathbf{C}_1$= de da Costa.

1. O SISTEMA DE TABLEAUX M1 DE MARCONI

Marconi 1980 introduz um sistema de tableaux semânticos, *à la* Beth (**Beth 1959**), para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1$ de da Costa, o qual denominaremos M1.

Aqui, apresentamos, sucintamente, o sistema M1 de Marconi.

A *linguagem* de M1 é a mesma linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo $\mathbf{C}_1$ de da Costa, apresentada no Capítulo 1.

Em M1, o operador de "bom comportamento", representado por "o", e a negação forte "~" (isto é, "$\sim_1$") são introduzidos por definição, isto é:

$\mathbf{A}^o =_{def} \neg(\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$

$\sim_1\mathbf{A} =_{\text{def}} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^o$.

Um tableau é *inicializado*, no caso de provas de teoremas, colocando-se a fórmula que se quer provar na coluna do lado direito (coluna de nome *inválida*); no caso da verificação da validade de argumentos, colocando-se a conclusão do argumento na coluna da direita, e as outras fórmulas, tomadas como premissas, na coluna do lado esquerdo (coluna de nome *válida*) do tableau. Antes da inicialização de um tableau, todas as ocorrências do operador de bom comportamento "o" e a negação forte "~" são substituídos por "$\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$" e "$\neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^o$", respectivamente.

Para dar a condição de fechamento de M1, Marconi necessita introduzir as seguintes definições.

Definição 1 Uma fórmula **B** é uma *subfórmula direta* de uma fórmula **A**, se **C** é uma fórmula e **A** tem uma das seguintes formas:

$(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$, $(\mathbf{C}\vee\mathbf{B})$, $(\mathbf{B}\&\mathbf{C})$, $(\mathbf{C}\&\mathbf{B})$, $(\mathbf{B}\supset\mathbf{C})$, $(\mathbf{C}\supset\mathbf{B})$, $\neg\mathbf{B}$.

Definição 2 Uma fórmula **B** é uma *subfórmula* de uma fórmula **A** se existe uma seqüência $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$, $m \geq 1$, de fórmulas tais que $\mathbf{B}_1$ é **B**, $\mathbf{B}_m$ é **A** e, para $i = 2 \ldots m$, $\mathbf{B}_{i-1}$ é uma subfórmula direta de $\mathbf{B}_i$.

Definição 3 A noção de *conjunto inicial de subfórmulas* (CIS) é definida como:

1. Para qualquer fórmula **A**, $\{\mathbf{A}\}$ é um CIS de **A**;
2. Se **B** e **C**, para $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, são subfórmulas diretas de **A**, então $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ é um CIS de **A**;
3. Se **B** e **C**, para $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, são subfórmulas diretas de **A**, $\{\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_n\}$ é um CIS de **B**, e $\{\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_n\}$ é um CIS de **C**, então $\{\mathbf{B}_1,\ldots, \mathbf{B}_n\} \cup \{\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_n\}$ é um CIS de **A**;
4. Um CIS é dado apenas por (1)-(3) acima.

O *critério de fechamento* de um ramo do tableau é dado pelas duas condições a seguir.

Um tableau é *fechado* se, e somente se:

a) Para alguma fórmula **A**, **A** está na direita e na esquerda de um tableau, ou de algum de seus sub-tableaux, simultaneamente; ou

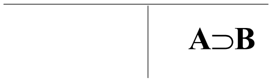
b) $\neg(\mathbf{A}_1 \,\&\, \neg\mathbf{A}_1), \neg(\mathbf{A}_2 \,\&\, \neg\mathbf{A}_2), \ldots, \neg(\mathbf{A}_n \,\&\, \neg\mathbf{A}_n)$ estão na esquerda do tableau (ou de um de seus sub-tableaux) e $\neg(g(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \,\&\, \neg g(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n))$ está na direita do tableau (ou de um de seus sub-tableaux), onde $g(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$ é uma função sentencial de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ e $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n\}$ é um CIS de $g(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$.

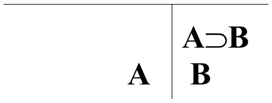
As *regras de expansão* para M1 são as seguintes:

<table>
<tr><th>Nome da Regra</th><th>Inicial</th><th>Final</th></tr>
<tr><td>&e:</td><td>$\begin{array}{l|l} \mathbf{A\&B} & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|l} \mathbf{A\&B} & \\ \mathbf{A} & \\ \mathbf{B} & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>&d:</td><td>$\begin{array}{l|l} & \mathbf{A\&B} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|c} & \begin{array}{c} \mathbf{A\&B} \\ \hline \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \end{array} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>∨e:</td><td>$\begin{array}{l|l} \mathbf{A\lor B} & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|l} \begin{array}{c} \mathbf{A\lor B} \\ \hline \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \end{array} & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>∨d:</td><td>$\begin{array}{l|l} & \mathbf{A\lor B} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|l} & \mathbf{A\lor B} \\ & \mathbf{A} \\ & \mathbf{B} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>⊃e:</td><td>$\begin{array}{l|l} \mathbf{A\supset B} & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|l} \mathbf{A\supset B} & \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}$</td></tr>
</table>

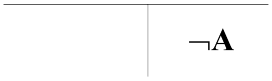
Nome da Regra **Inicial** **Final**

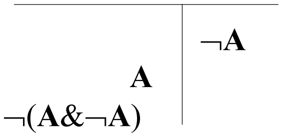
⊃d:



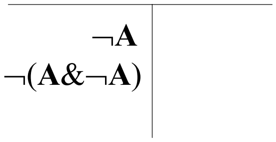


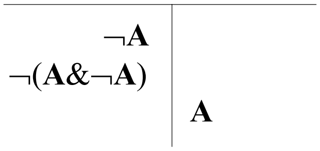
¬d:



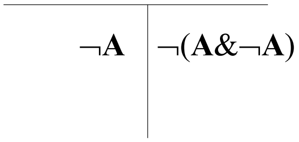


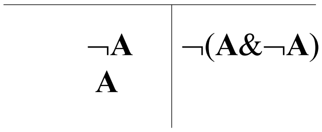
¬e (**i**):



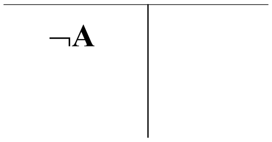


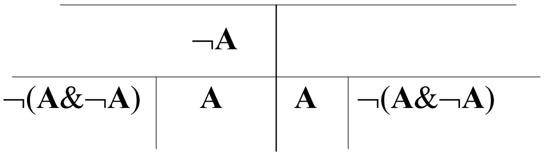
¬e (**i**):





¬e (**ii**): Se **¬A** ocorre à esquerda e a configuração inicial **¬e** (**i**) não acontece.





¬e (**iii**) **¬e** não se aplica em fórmulas do tipo:

$\neg(\neg^{n}(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\& \neg^{n+1}(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})), n \geq 0$

$\neg^{0}\mathbf{A}=\mathbf{A}, \neg^{n+1}\mathbf{A} = \neg(\neg^{n}\mathbf{A})$.

Estas fórmulas devem ser tratadas como fórmulas finais, ou seja, como fórmulas que não têm regras aplicáveis a elas.

Marconi introduz um princípio que deve ser seguido na construção de tableaux para M1, que é chamado de *Princípio Geral* (ou PG), que consiste em não se aplicar uma regra a uma fórmula que já tenha ocorrido no mesmo lado de um tableau **T**.

2. O SISTEMA DE TABLEAUX TC1 DE CARNIELLI E LIMA-MARQUES

Carnielli e Lima-Marques 1992 introduz um sistema de tableaux semânticos, *à la* Smullyan (**Smullyan 1968**), para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1^{\,1}$ e para a lógica quantificacional paraconsistente com igualdade $\mathbf{C}_1^{\,1=}$ de **Alves 1976**, p. 92, denominados sistemas TC1 e TC1=, respectivamente.

Aqui, apresentamos, sucintamente, o sistema TC1 de Carnielli e Lima-Marques.

A *linguagem* de TC1 é a mesma linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo $\mathbf{C}_1$ de da Costa, apresentada no Capítulo 1.

Em TC1, o operador de "bom comportamento", representado por "o", e a negação forte "~" são introduzidos por definição, isto é:

$\mathbf{A}^{o} =_{def} \neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$

$\sim_1\mathbf{A} =_{def} \neg\mathbf{A}\&\mathbf{A}^{o}$.

Um tableau é *inicializado* colocando-se, sob o escopo do símbolo de inicialização **F**, a fórmula a ser testada.

O *critério de fechamento* de um ramo do tableau é o seguinte: se no ramo ocorrem as fórmulas **T**(A) e **F**(A), para alguma fórmula A, o ramo é *fechado*; caso contrário, o ramo é *aberto*.

Um tableau é *fechado* se todos os seus ramos são fechados e, *aberto*, caso contrário.

As *regras de expansão* para TC1 são as seguintes:

Regras de Tipo Conjuntivo:

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

α	α_1	α_2	Nome da Regra
T(A&B)	**T**A	**T**B	T&
F(A∨B)	**F**A	**F**B	F∨
F(A⊃B)	**T**A	**F**B	F⊃
T(¬¬A)	**T**A	**T**A	T¬¬
F(¬A)	**T**A	**T**A	F¬
F(¬¬A)	**F**A	**F**A	F¬¬
F(A&B)^o	**F**(A^o&B^o)	**F**(A^o&B^o)	F^o
F(A∨B)^o	**F**(A^o&B^o)	**F**(A^o&B^o)	F^o
F(A⊃B)^o	**F**(A^o&B^o)	**F**(A^o&B^o)	F^o

Regras de Tipo Disjuntivo:

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2	Nome da Regra
F(A&B)	**F**A	**F**B	F&
T(A∨B)	**T**A	**T**B	T∨
T(A⊃B)	**F**A	**T**B	T⊃
T(¬A)	**F**A	**F**(A^o)	T¬

Carnielli e Lima-Marques introduzem Regras Derivadas, como opção para que os comprimentos de ramos dos tableaux possam ser reduzidos.

3. O SISTEMA DE TABLEAUX *S*C1 DE BUCHSBAUM E PEQUENO

Buchsbaum e Pequeno 1993 introduz sistemas de tableaux analíticos, *à la* Smullyan (**Smullyan 1968**), para a lógica proposicional paraconsistente $\mathbf{C}_1$ e para a lógica quantificacional paraconsistente $\mathbf{C}_1$* de da Costa, denominados sistemas *S*C1 e *S*C1*, respectivamente.

Aqui, apresentamos, sucintamente, o sistema *S*C1 de Buchsbaum e Pequeno.

A *linguagem* do sistema de *S*C1 é a mesma linguagem $\mathscr{L}$ do cálculo $\mathbf{C}_1$ de da Costa, apresentada no Capítulo 1.

Em *S*C1, também são definidos o operador de “bom comportamento” e a negação forte “~”.

O tableau é *inicializado* colocando-se sob o escopo do símbolo de inicialização “~” a fórmula a ser testada.

O *critério de fechamento* de um ramo do tableau é o seguinte: se nele ocorrem as fórmulas **A** e ~(**A**) para alguma fórmula **A**, o ramo é *fechado*; caso contrário, ele é *aberto*.

Um tableau é *fechado* se todos os seus ramos são fechados e, *aberto*, caso contrário.

As *regras de expansão* para *S*C1 são as seguintes:

Regras de Tipo Conjuntivo: $\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \end{array}$

α	α_1	α_2	Nome da Regra	
A&B	**A**	**B**	**A&B**	(&)
~(A⊃B)	**A**	**~B**	**~(A⊃B)**	(~⊃)
~(A∨B)	**~A**	**~B**	**~(A∨B)**	(~∨)
~¬A	**A**		**~¬(A)**	(~¬)

Regras de Tipo Disjuntivo: $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array}$

β	β_1	β_2		Nome da Regra	
A⊃B	**~A**	**B**		**A⊃B**	(⊃)
A∨B	**A**	**B**		**A∨B**	(∨)
~(A&B)	**~A**	**~B**		**~(A&B)**	(~&)
¬**(A&B)**	**~(A&B)**	**~A**^{o}	**~B**^{o}	¬**(A&B)**	(¬&)
¬**(A∨B)**	**~(A∨B)**	**~A**^{o}	**~B**^{o}	¬**(A∨B)**	(¬∨)
¬**(A⊃B)**	**~(A⊃B)**	**~A**^{o}	**~B**^{o}	¬**(A⊃B)**	(¬⊃)
¬¬**A**	**~¬A**	**~A**^{o}		¬¬**A**	(¬¬)

Buchsbaum e Pequeno também introduzem Regras Derivadas opcionais.

4. EXEMPLOS COMPARATIVOS

A seguir, apresentamos alguns exemplos de provas de fórmulas nos sistemas M1, TC1, *S*C1 e **TDNC**$_1$.

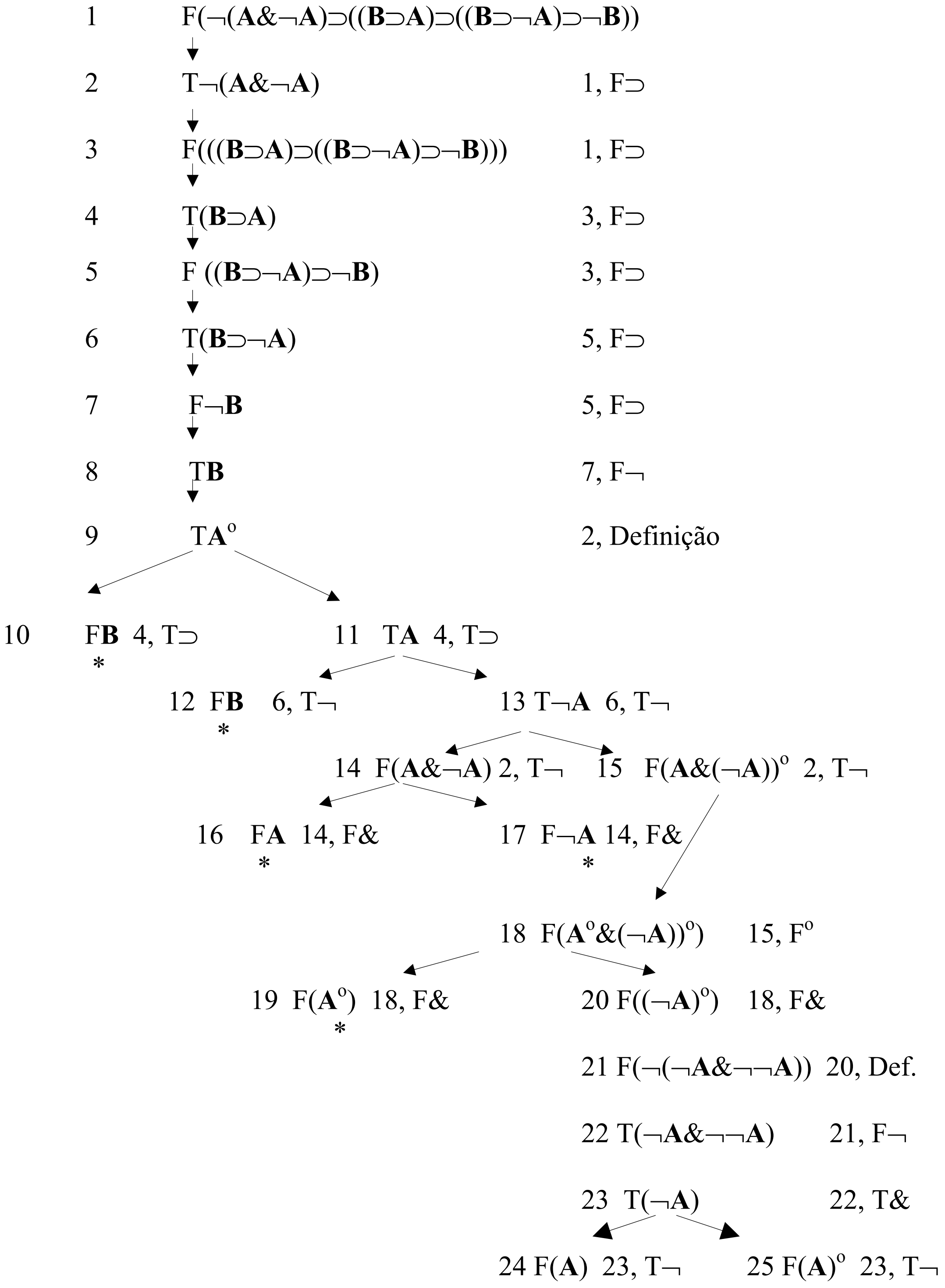
a) Demonstrar que $\vdash_{C_1}$ $(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$.

a.1) Em M1

1		$\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$	
2	$\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$	$((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$	1, ⊃d
3	$(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$	$((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$	2, ⊃d
4	$(\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})$	$\neg\mathbf{B}$	3, ⊃d
5	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	3, ⊃e
6	$\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	4, ⊃e
7	$\mathbf{B}$		4, ¬d
8	$\neg(\mathbf{B}\&\neg\mathbf{B})$		4, ¬d

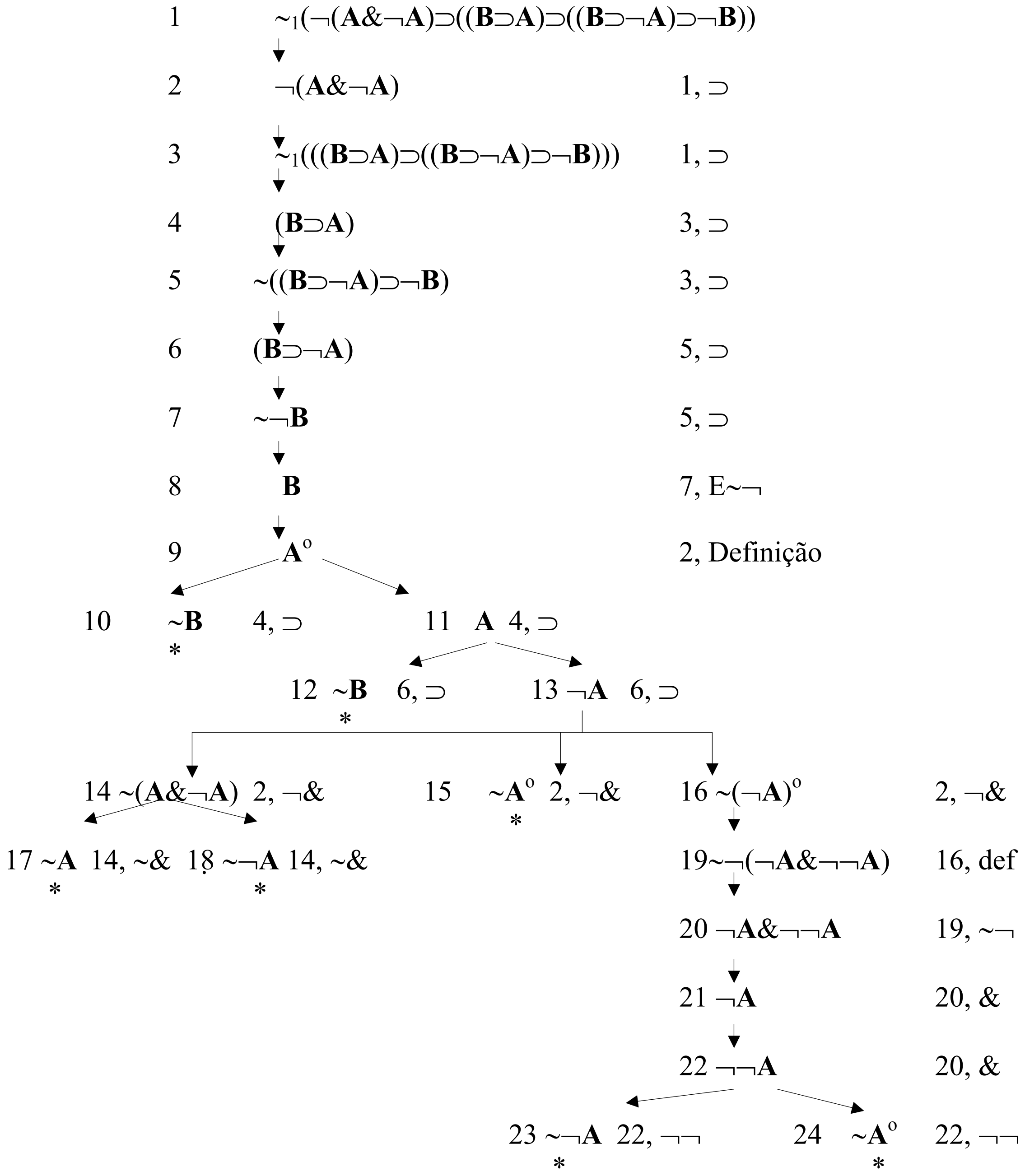
O tableau fecha com **B** à direita (passo 6) e à esquerda (passo 7).

a.2) Em TC1



O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 8 e 10; 8 e 12; 11 e 16; 13 e 17; 9 e 19; 11 e 24, 9 e 25.

a.3) Em *S*C1



O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 8 e 10; 8 e 12; 11 e 17; 13 e 18; 9 e 15; 21 e 23; 9 e 24.

a.4) **Em TDNC**$_1$

1 $\sim_1(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B}))$

2 $\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 1, DNI$\sim_1$

3 $\sim_1(((\mathbf{B}\supset\mathbf{A})\supset((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})))$ 1, DNI$\sim_1$

4 $\mathbf{A}^1$ 2, I1

5 $(\mathbf{B}\supset\mathbf{A})$ 3, DNI$\sim_1$

6 $\sim_1((\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})\supset\neg\mathbf{B})$ 3, DNI$\sim_1$

7 $(\mathbf{B}\supset\neg\mathbf{A})$ 6, DNI$\sim_1$

8 $\sim_1\neg\mathbf{B}$ 6, DNI$\sim_1$

9 $\neg\neg\mathbf{B}$ 8, E$\sim_1\neg$

10 $\mathbf{B}$ 9, E$\neg\neg$

12 $\mathbf{A}$ 5, E$\supset$

11 $\sim_1\mathbf{B}$ 5, E$\supset$

13 $\sim_1\mathbf{B}$ 7, E$\supset$ 14 $\neg\mathbf{A}$ 7, E$\supset$

* *

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 10 e 11; 10 e 13; 4, 12 e 14.

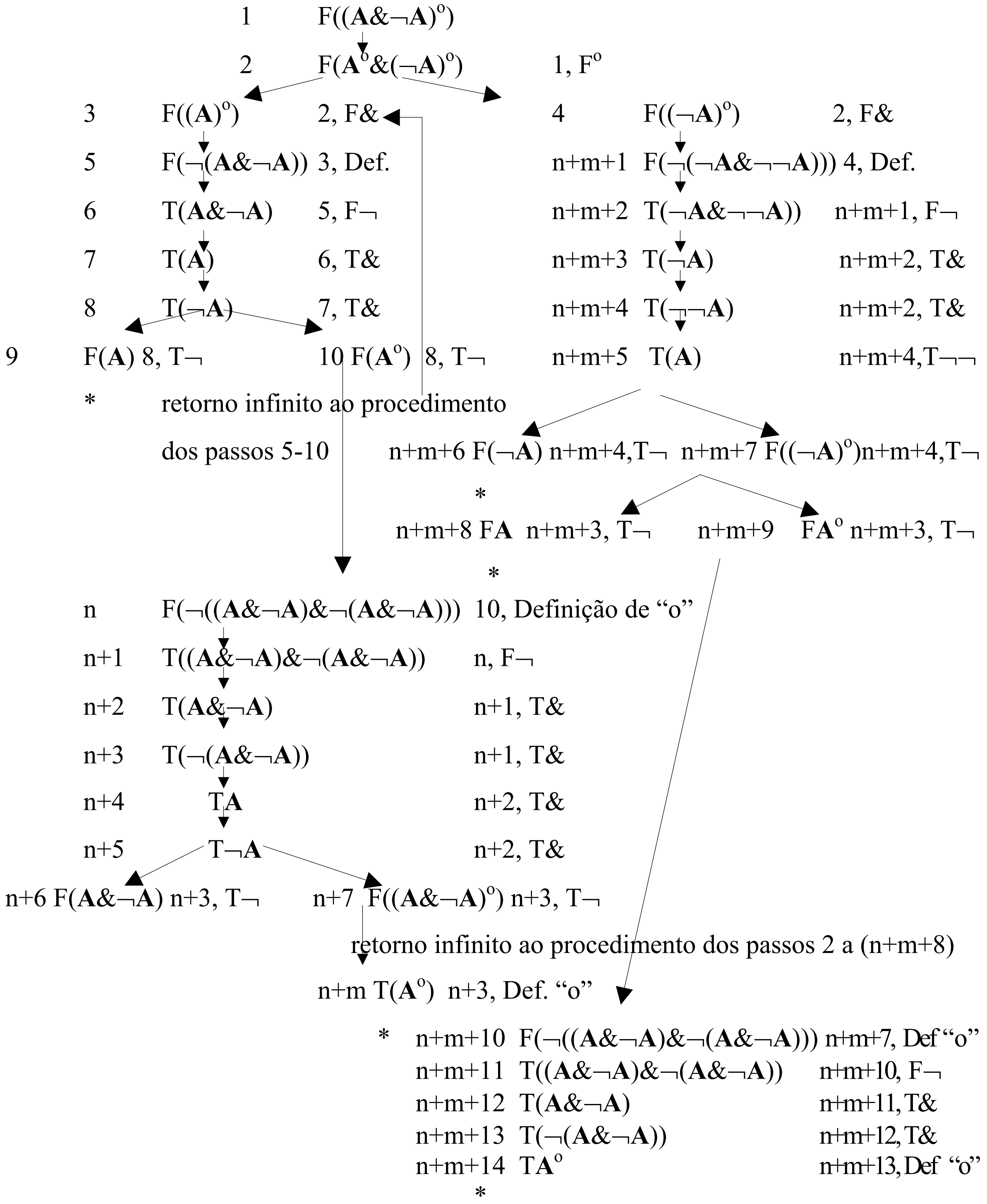
b) Demonstrar que $\vdash_{C_1} (\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})^{o}$

b.1) Em M1

1		$\neg((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$	
2	$(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$		1, $\neg$e
3	$\neg(((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))\&\neg((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})))$		1, $\neg$e
4	$(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$		2, &e
5	$\mathbf{A}$		2, &e
6	$\neg\mathbf{A}$		4, &e
7	$\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$		4, &e
8		$\mathbf{A}$	6, 7, $\neg$e

O tableau fecha com **A** à direita (passo 5) e à esquerda (passo 8).

b.1) Em TC1



O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 7 e 9; (n+2) e (n+6); 10 e (n+m); (n+m+3) e (n+m+6); (n+n+5) e (n+m+8); (n+m+9) e (n+m+14).

b.3) Em *S*C1

1 $\sim((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})^{o})$
2 $\sim(\neg((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})))$ 1, Definição de “o”
3 $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 2, $\sim\neg$
4 $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$ 3, &
5 $\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 3, &
6 $\mathbf{A}$ 4, &
7 $\neg\mathbf{A}$ 4, &

8 $\sim(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 5, $\neg\&$
*

9 $\sim(\mathbf{A}^{o})$ 5, $\neg\&$
11 $\sim(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$ 9, Def.
*

10 $\sim((\neg\mathbf{A})^{o})$ 5, $\neg\&$
12 $\sim(\neg(\neg\mathbf{A}\&\neg\neg\mathbf{A}))$ 10, Def. “o”
13 $(\neg\mathbf{A}\&\neg\neg\mathbf{A})$ 12, $\sim\neg$
14 $\neg\mathbf{A}$ 13, &
15 $\neg\neg\mathbf{A}$ 13, &

16 $\sim\neg\mathbf{A}$ 15, $\neg\neg$
*

17 $\sim(\mathbf{A}^{o})$ 15, $\neg\neg$
18 $\sim(\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}))$ 17, Def

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 4 e 8; 5 e 11; 14 e 16; 5 e 18.

b.4) **Em TDNC**$_1$

1 $\sim_1((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})^{o})$
2 $\sim_1((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})^{1})$ 1, Eo
3 $\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 2, E1$\sim_1$
4 $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$ 2, E1$\sim_1$
5 $\mathbf{A}^{1}$ 4, I1
6 $\mathbf{A}$ 3, E&
7 $\neg\mathbf{A}$ 3, E&
*

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 5, 6 e 7.

c) Demonstrar que $\vdash_{C_1} (\mathbf{A}^{(2)})^{o}$

c.1) Em M1

1		$\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)})$	
2	$(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$		1, ¬e
3	$\neg((\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))\&\neg((\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))))$		1, ¬e
4	$(\mathbf{A}^{(2}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)})))$		2, &e
5	$\mathbf{A}^{(2)})$		2, &e
6	$\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$		4, &e
7	$\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$		4, &e
8		$\mathbf{A}^{(2)}$	6, 7, ¬e

O tableau fecha com **A** à direita (passo 5) e à esquerda (passo 8).

c.1)) Em TC1

1 $F((\mathbf{A}^{(2)})^{o})$
2 $F(\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$ 1, Definição
3 $T(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$ 2, F¬
4 $T(\mathbf{A}^{(2)})$ 3, T&
5 $T(\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$ 4, T&
6 $F(\mathbf{A}^{(2)})$ 5, T¬ 7 $F((\mathbf{A}^{(2)})^{o})$ 5, T¬
* 8 retorno infinito ao procedimento dos passos 1-5
9 $T(\mathbf{A}^{1}\&\mathbf{A}^{2})$ 4, Definição de “$\mathbf{A}^{(2)}$”
10 $T(\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})$ 9, Definição de “$\mathbf{A}^{1}$” e “$\mathbf{A}^{2}$”
11 $T(\mathbf{A}^{o})$ 10, T&
12 $T(\mathbf{A}^{oo})$ 10, T&
13 $T(\neg(\mathbf{A}^{1}\&\mathbf{A}^{2})^{o})$ 7, Definição de “$\mathbf{A}^{(2)}$”
14 $T(\neg(\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 13, Definição de “$\mathbf{A}^{1}$” e “$\mathbf{A}^{2}$”
15 $F(\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})$ 14, T¬ 16 $F((\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 14, T¬
* 17 $F((\mathbf{A}^{o})^{o}\&(\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 16, F°
18 $F((\mathbf{A}^{o})^{o})$ 17, F& 19 $F((\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 17, F&

20 $F(\neg(\mathbf{A}^{oo}\&\neg(\mathbf{A}^{oo}))$ 19, Definição “o”

21 $T(\mathbf{A}^{oo}\&\neg(\mathbf{A}^{oo}))$ 19, F¬

22 $T(\mathbf{A}^{oo})$ 21, T&

23 $T(\neg(\mathbf{A}^{oo}))$ 21, T&

24 $F(\mathbf{A}^{oo})$ 23, T¬ 25 $F((\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 23, T¬

* 26 $F(\neg(\mathbf{A}^{oo}\&\neg(\mathbf{A}^{oo}))$ 25, Def. “o”

27 $T(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 26, F¬

28 $T(\mathbf{A}^{o})$ 27, T&

29 $T(\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 27, T&

30 $F(\mathbf{A}^{o})$ 29, T¬ 31 $F(\mathbf{A}^{o})^{o}$ 29, T¬

* *

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 4 e 6; 10 e 15; 12 e 18; 12 e 24; 11 e 30; 22 e 31.

c.3) Em *S*C1

1 $\sim((\mathbf{A}^{(2)})^{o})$

2 $\sim(\neg(\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2)})))$ 1, Definição

3 $\mathbf{A}^{(2)}\&\neg(\mathbf{A}^{(2})$ 2, ~¬

4 $\mathbf{A}^{(2)}$ 3, &

5 $\neg(\mathbf{A}^{(2)})$ 3, &

6 $\mathbf{A}^{1}\&\mathbf{A}^{2}$ 4, Definição de “$\mathbf{A}^{(2)}$”

7 $\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo}$ 6, Definição de “$\mathbf{A}^{1}$” e “$\mathbf{A}^{2}$”

8 $\mathbf{A}^{o}$ 7, &

9 $\mathbf{A}^{oo}$ 7, &

10 $\neg(\mathbf{A}^{1}\&\mathbf{A}^{2})$ 5, Definição de “$\mathbf{A}^{(2)}$”

11 $\neg(\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})$ 4, Definição de “$\mathbf{A}^{1}$” e “$\mathbf{A}^{2}$”

12 $\sim(\mathbf{A}^{o}\&\mathbf{A}^{oo})$ 11, ¬& 13 $\sim((\mathbf{A}^{o})^{o})$ 11, ¬& 14 $\sim((\mathbf{A}^{oo})^{o})$ 11, ¬&

* *

15 $\sim(\neg(\mathbf{A}^{oo}\&\neg(\mathbf{A}^{oo})))$ 14, Def“o”

16 $(\mathbf{A}^{oo})\&\neg(\mathbf{A}^{oo})$ 15, ~¬

17 $\mathbf{A}^{oo}$ 16, &

18 $\neg(\mathbf{A}^{oo})$ 16, &

19 $\neg\neg(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 18, Def“o”

20 $\sim\neg((\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o})))$ 19, ¬¬

22 $\sim(\mathbf{A}^{oo})$ 20, Def. “o”

*

21 $\sim((\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))^{o})$ 19, ¬¬

23 $\sim(\neg((\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))\&\neg(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))))$ 21, Def“o”

24 $(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))\&\neg(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 23, ~¬

25 $(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 24, &

26 $\neg(\mathbf{A}^{o}\&\neg(\mathbf{A}^{o}))$ 24, &

27 $\mathbf{A}^{o}$ 25, &

28 $\neg(\mathbf{A}^{o})$ 25, &

29 $\neg\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 28, Def“o”

30 $\sim\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 29, ¬¬

32 $\sim(\mathbf{A}^{o})$ 30, Def “o”

*

31 $\sim(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})^{o}$ 29, ¬¬

33 $\sim(\neg((\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})))$ 31, Def“o”

34 $(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})\&\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 33, ~¬

35 $\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$ 34, &

36 $\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 34, &

37 $\mathbf{A}$ 35, &

38 $\neg\mathbf{A}$ 35, &

39 $\mathbf{A}^{o}$ 36, Def “o”

40 $\sim(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$ 36, ¬&

*

41 $\sim(\mathbf{A}^{o})$ 36, ¬&

*

42 $\sim((\neg\mathbf{A})^{o})$ 36, ¬&

43 $\sim(\neg((\neg\mathbf{A})\&\neg(\neg\mathbf{A})))$ 42, Def “o”

44 $(\neg\mathbf{A})\&\neg(\neg\mathbf{A})$ 43, ~¬

↓

45 $\neg\mathbf{A}$ 44, &

46 $\neg(\neg\mathbf{A})$ 44, &

47 $\sim\neg(\mathbf{A})$ 46, ¬¬   48 $\sim(\mathbf{A})^{o}$ 46, E¬¬

*   *

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 7 e 12; 9 e 13; 17 e 22; 27 e 32; 35 e 40; 39 e 41; 45 e 47; 39 e 48.

c.4) **Em TDNC**$_1$

1 $\sim_1((\mathbf{A}^{(2)})^{o})$

2 $\sim_1((\mathbf{A}^{(2)})^{1})$ 1, Eo

3 $\neg((\mathbf{A}^{(2)})^{1})$ 2, E1~$_1$

4 $(((\mathbf{A}^{(2)})^{1}))^{(1)}$ 2, E1~$_1$

5 $\mathbf{A}^{(2)}$ 3, E1¬

6 $\neg(\mathbf{A}^{(2)}))$ 3, E1¬

7 $\mathbf{A}^{2}$ 5, E(2)

8 $\mathbf{A}^{(1)}$ 5, E(2)

9 $\mathbf{A}^{1}$ 8, E(1)

10 $\mathbf{A}$ 6, E(2)¬

11 $\neg\mathbf{A}$ 6, E(2) ¬

*

O tableau fecha pelas fórmulas que ocorrem nos nós 9, 10 e 11.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, E. H. **Lógica e inconsistência**. 1976. 137 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1976.

ALVES, D. D. P. **Normalização forte via ordinal natural**. 1999. 405p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

ARRUDA, A. I. **Considerações sobre os sistemas formais $\mathbf{NF_n}$**. 1964. 55 p. Tese (Livre-docência) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1964.

_________ . Remarques sur les systèmes C_n. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 280, p. 1253-1256, 1975.

_________ . On the imaginary logic of N. A. Vasil'év. In: ARRUDA, A. I., DA COSTA, N.C.A., CHUAQUI, R. (Eds.). **Non-Classical Logics, Model Theory and Computability**. Amsterdam: North Holland, 1977. p. 3-22.

_________ . A survey of paraconsistent logic. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 4., 1978, Santiago, Chile. **Mathematical Logic in Latin America**: proceedings. Editado por A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e R. Chuaqui. Amsterdam: North Holland, 1980. p. 1-41.

_________ . N. A. Vasil'év: a forerunner of paraconsistent logic. *Philosophia Naturalis*, v. 21, p. 427-491, 1984.

_________ . Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (Eds.). **Paraconsistent logic**: essays on the inconsistent. München: Philosophia Verlag, 1989, p. 99-130.

ARRUDA, A. I. **N. A. Vasiliev e a lógica paraconsistente**. Campinas: Unicamp / CLE, 1990. (Coleção CLE; v.7)

ARRUDA, A. I., DA COSTA, N.C.A. Une semantique pour le calcul C_1. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 284, p. 279-282, 1977.

BETH, E. W. Semantic, entailment and formal derivability. *Mededelingen der Kon. Ned. Akad*., 18, 13, 1955.

BETH, E.W. **The foundations of mathematics**. Amsterdan: North Holland, 1959.

BÉZIAU, J.-Y. La logique propositionnelle paraconsistante C1 de N. C. A. da Costa. *Université Denis Diderot* (Paris 7), 1990.

_________ . Nouveaux resultats et nouveau regard sur la logique paraconsistante C_1. *Logique et analyse*, n. 141-142, p. 45-58, 1993.

BOCHVAR, D. On a three-valued calculus and its applications to the analysis of contradictions. *Mathematičěskÿ Sbornik* (Recueil mathématique), n.s. 4, p. 287-300, 1939.

BORKOWSKI, L. (Ed.) **Selected works of Łukasiewiz**. Amsterdam: North Holland, 1970.

BUCHSBAUM, A., PEQUENO, T. A reasoning method for a paraconsistent logic. *Studia Logica*, v. 52, p. 281-289, 1993.

CARNIELLI, W. A., LIMA-MARQUES, M. Reasoning under inconsistent knowledge. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v. 2, n. 1, p. 49-79, 1992.

CARNIELLI, W.A. Possible translations semantics for paraconsistent logics. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. **Frontiers in Paraconsistent Logic**: proceedings. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. London: King’s College Publications, 1999. p. 116-139.

CARNIELLI, W. A., MARCOS, J. A. taxonomy of C-systems. In: CARNIELLI, W. A., CONIGLIO, M. E., D'OTTAVIANO, I. M. L. (Eds). **Paraconsistency**: the logical way to the inconsistent. New York: Marcel Dekker, 2002. p. 01-94. (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v.228)

CASTRO, M. A de. **O método de dedução natural aplicado às lógicas proposicionais paraconsistentes $\mathbf{C}_n$**. 1998. 166p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

CASTRO, M. A. de, D'OTTAVIANO, I. M. L. Natural deduction for paraconsistent logic. *Logica Trianguli*, v. 4, p. 9-13, 2000.

DA COSTA, N. C. A. Nota sobre o conceito de contradição. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática* v. 1, p. 6-8, 1958.

_________ . **Sistemas formais inconsistentes**. 1963. 68p. Tese (Cátedra) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963a.

_________ . Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 257, p. 3790-3793, 1963b.

_________ . Calculs des prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 27-29, 1964a.

_________ . Calculs des prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 1111-1113, 1964b.

_________ . Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p.1366-1368, 1964c.

_________ . Sur un systéme inconsistant de théorie des ensembles. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 3144-3147, 1964d.

DA COSTA, N. C. A. Sur les systèmes formels C_1, C_1*, $C_1^{=}$, D_i et NF_i. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 260, p. 5427-5430, 1965.

_________ . Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes. *Publications du Département de Mathématiques*, Université de Lyon, 4, p. 2-8, 1967.

_________ . Remarques sur le systéme NF_1. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 272A, p. 1149-1151, 1971.

_________ . Remarques sur les calcus C_n, C_n*, $C_n^{=}$ et D_n. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 278A, p. 819-821, 1974a.

_________ . On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 15, p. 497-510, 1974b.

_________. **Sistemas formais inconsistentes**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1993.

DA COSTA, N. C. A., ALVES, E. H. Une semantique pour le calcul $\mathbf{C}_1$. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 238A, p.729-731, 1976.

_________ . A semantical analysis of the calculi $\mathbf{C}_n$. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 18, p. 621-630, 1977.

DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J. Y., BUENO, O. **Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos**. Campinas: Unicamp / CLE, 1998. (Coleção CLE; v.23)

DA COSTA, N. C. A., GUILLAUME, M. Sur les calculs $\mathbf{C}_n$. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 36, n. 4, p. 379-382, 1964.

_________ . Négations composées et Loi de Peirce dans les systèmes $\mathbf{C}_n$. *Portugaliae Mathematica*, v. 24, p. 201-210, 1965.

DA COSTA, N. C. A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.6, n.1, p. 5-31, 1989.

D'OTTAVIANO, I. M. L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, n. 1/2, p. 89-152, 1990.

D'OTTAVIANO, I. M. L., FEITOSA, H. A. Paraconsistent logics and translations. *Synthese*, v.125, n. 1/2, p. 77-95, 2000.

DA SILVA, J. J., D'OTTAVIANO, I. M. L., SETTE, A. M. Translations between logics. In: CAICEDO, X, MONTENEGRO, C.H. (Eds.). **Models, Algebras and Proofs**. New York: M. Dekker, 1999, p. 435-448.(Lecture notes in pure and applied mathematics, v.203)

FEITOSA, H. A. **Traduções conservativas**. 1997. 161 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p.205-227, 2001.

FIDEL, M. The decidability of the calculi $\mathbf{C}_n$. *Reports on Mathematical Logic*, v. 8, p. 31-40, 1977.

FITCH, F. B. **Symbolic logic:** an introduction. New York: Ronald Press, 1952.

FITTING, M. C. **First-order logic and automated theorem proving**. Springer-Verlag, 1996.

_________ . Introduction. In: D´AGOSTINO, M., GABBAY, D. V., HÄHNLE, R., POSEGGA, J. (Eds.) **Handbook of tableau methods**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 1-43.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, p. 176-210, 1935.

GENTZEN, G. Investigations into logical deduction. In: SZABO, M.E. (Ed.) **The colleted papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1969. p. 68-131. Publicado originalmente como Untersuchungen über das logische Schliessen, em 1935.

HINTIKKA, J. Form and contend in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, v. 8, p. 8-55, 1955.

JAŚKOWSKI, S. On the rules of suppositions in formal logic. *Studia Logica*, v. 1, 1934.

_________ . Rachunek zdán dla systemóv dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, p. 55-57, 1948.

_________ . O konjuncji dyskusyjnej w rachunku zdán dla systemóv dedukcyjnych sprzeczcych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, p. 171-172, 1949.

_________ . On the rules of suppositions in formal logic. In: McCALL, S. (Ed.). **Polish logic**: 1920-1939. Oxford: Claredon Press, 1967. p. 232-258.

_________ . Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, v. 24, p. 143-157, 1969.

KLEENE, S. C. **Introduction to metamathematics**. 7. reprint. New York: Van Nostrand, 1974.

LIS, Z. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica*, v. 10, p. 39-60, 1960.

LOPARIĆ, A. Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels. *Comptes Rendus de l´Académie de Sciences de Paris*, t. 284A, p. 835-838, 1977.

_________ . A semantical study of some propositional calculi. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 3, n. 1, p. 73-95, 1986.

LOPARIĆ, A. Un estudio semantico de algunos calculos proposicionales. In: ANTOLOGIA de la Logica en America Latina. Madrid : Fundación Banco Exterior, 1988. p. 213-217.

LOPARIĆ, A., ALVES, E. H. The semantics of the systems $\mathbf{C}_n$ of da Costa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3., 1979, Recife: **Proceedings** ... , Editado por A.I. Arruda, N.C.A. da Costa, A.M. Sette. São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, p. 161-172.

ŁUKASIEWICZ, J. Über den satz des widerspruchs bei Aristoteles. *Bull. Inter. de l´Académie Sciences de Cracovie*, Classe d´Histoire de Philosophie, p. 15-38, 1910a.

_________ . O zasadzie sprzecznosci u aristotelesa. *Studium Krytyczne*, Cracow, Polland (tradução inglesa em *Review of Metaphysics*, v. 24, 1971), 1910b.

_________ . On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics*, v. 24, p. 485-509, 1971.

MARCONI, D. A decision method for the calculus $\mathbf{C}_1$. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3, 1979, Recife: **Proceedings** ... , Editado por A.I. Arruda, N.C.A. da Costa, A.M. Sette. São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, p. 211-223.

MARCOS, J. **Semânticas de traduções possíveis**. 1998. 137 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MEDEIROS, M. da P. N. de.**Traduções via teoria da prova**: aplicações à lógica linear. Natal: Editora da UFRN, 2002.

MEINONG, A. **Über die stellung der Gegenstandstheorie im System der wissenschaften**. Leipzig: R. Voitlander Verlag, 1907.

MOURA, J. E. de A. **Aspectos da lógica funcional paraconsistente**. 1978. 71 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.

_________ . **Um estudo de C_ω em cálculo de seqüentes e dedução natural**. 2002. 144p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

MOURA, J. E. de A., D'OTTAVIANO, I. M. L. On NCG_ω: a paraconsistente sequent calculus. In: CARNIELLI, W. A., CONIGLIO, M. E., D'OTTAVIANO, I. M. L. (Eds). **Paraconsistency**: the logical way to the inconsistent. New York: Marcel Dekker, 2002. p. 227-240. (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v.228)

PASTORELLO JUNIOR, G. Z. **Métodos de decisão por tableaux para sistemas paraconsistentes de da Costa**. 2002. 118p. Trabalho final resultante do desenvolvimento de Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica - FAPESP. Universidade Estadual de Campinas, 2002.

PRAWITZ, D. **Natural deduction**: a proof-theoretical study. Stockholm: Almquist & Wicksell, 1965.

PRIEST, G., ROUTLEY, R., NORMAN, J. (Eds.). **Paraconsistent logic**: essays on the inconsistent. München: Philosophia Verlag, 1989.

PRIEST, G., ROUTLEY, R. First historical introduction: a preliminary history of paraconsistent and dialethic approaches. In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (Eds.). **Paraconsistent logic**: essays on the inconsistent. München: Philosophia Verlag, 1989, p. 3-75.

RAGGIO, A. R. Propositional sequence-calculi for inconsistent systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 9, n. 4, p. 359-366, 1968.

RAGGIO, A. R. A proof-theoretic analysis of da Costa’s C_ω*. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 1, 1977, Campinas. **Proceedings** ... Ed. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui. New York : Marcel Dekker, 1978. p. 233-240.

SETTE, A. M. **Sobre as álgebras e hiper-reticulados C_ω**. 1971. 46p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1971.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. New York: Springer Verlag, 1968.

VAN FRAASSEN, B. C. **Formal semantics and logic**. New York: The Macmillan Company, 1971.

VASILIEV, N. A. O častnyh suždéniálh, o tréugol’niké protivopoložnostéj, o zakoné isklučēnnog čétvērtogo. *Učēnié zapiski Kanzan’skogo Universitéta*, 42 p., 1910.

_________ . Voobražaémaá logika: konspékt lektsii, 6p., 1911.

_________ . Voobražaémaá (néaristotéléva) logika. *Žurnal Ministérstva Narodnago Prosvěščéniá*, v. 40, p. 207-246, 1912.

_________ . Logika i métalogika. *Logos*, v. 2-3, p. 53-58, 1913.

_________ . Imaginary (non-aristotelian) logic. *Atti dei V Congresso Internazionale di Filosofia*, Nápoles, p. 107-109, 1925.