

COONE DAMIÃO LASTOS MASCHI

NORMALIZAÇÃO E NORMALIZAÇÃO FORTE PARA A LÓGICA CLÁSSICA DE
PRIMEIRA ORDEM

*Este exemplar corresponde a redação final da
tese defendida pelo Sr. Coone Damiano BASTOS
MASCHI e aprovada pela Comissão Julgadora.
Campinas, 31 de maio de 1989.*

dsr

Dissertação apresentada ao Departamento de Filosofia do
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da UNICAMP como
parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Lógica
e Filosofia da Ciência.

ORIENTADOR: LUIZ CARLOS F.D. PEREIRA

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP

Campinas, 26 de Setembro de 1988.

I N D I C E

	Página
PREFÁCIO	[1]
CAPÍTULO I - O Sistema de Dedução Natural <u>C</u> ..	[4]
CAPÍTULO II - Normalização para a Lógica Clássica	[17]
CAPÍTULO III - Normalização Forte.....	[23]
CAPÍTULO IV - Normalização Forte - Validade Forte	[97]

- o o o -

PREFÁCIO

Em teoria da prova, temos três tipos de resultados fundamentais sobre a forma que derivações pertencentes a um sistema formal S podem assumir :

(I) Teorema da Forma Normal - Toda derivação em S possui uma forma normal.

(II) Teorema da Normalização (Fraca) - Dada uma derivação em S , podemos efetivamente obter sua forma normal, através de certas operações chamadas de reduções.

(III) Teorema da Normalização Forte - Dada uma derivação em S , sua forma normal é única, e sempre pode ser obtida após um número finito de reduções, independentemente da ordem em que as mesmas são aplicadas.

A distinção entre teorema da forma normal e teoremas de normalização foi introduzida por Kreisel [6]. Prawitz [12] usa a terminologia "fraca" e "forte" para os teoremas de normalização.

Se denotarmos por C a formulação em Dedução Natural da Lógica Clássica de primeira ordem, com todos os conectivos lógicos (Prawitz [11]), é bem sabido que temos resultados de normalização "fraca" e "forte" para o fragmento C' de C que contém os operadores : $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Normalização (fraca) para C' pode ser obtida da seguinte maneira:

Seja Π uma derivação em C' . Então Π pode ser efetivamente

transformada em uma derivação Π' em C tal que :

a) Toda aplicação da regra do absurdo clássico em Π , tem consequência atômica .

b) Π' está em forma normal.

Em Prawitz [11] encontramos a afirmação de que o teorema de normalização (fraca) é válido para C e em 1968, Prawitz & Malmmas [14] assumem explicitamente um teorema de normalização para o sistema completo C , mas nenhuma prova é fornecida. A primeira prova de normalização para C , data de 1974 e é devida a Richard Stataman [15]. Stataman não oferece uma prova direta deste resultado. Ele utiliza um conceito modificado de forma normal, onde é permitido aplicações do absurdo clássico, cujas conclusões não são premissas maiores de regras de eliminação. A prova é obtida através da imersão da Lógica Clássica de segunda ordem em um outro sistema.

Em 1980, N. Tenant [17] ,propõe uma prova direta do mesmo resultado, mas infelizmente havia uma falha em sua prova. Em particular, a proposição enunciada no parágrafo 4 , p. 195, está incorreta.

O objetivo da presente dissertação é fornecer uma prova direta do teorema da normalização para o sistema C (capítulo II) e duas provas do teorema da normalização forte para C . Uma prova, algumas vezes chamada de sêmântica, utilizando-se de uma propriedade (validade forte) aplicável às derivações em C (capítulo IV). A outra segue, em linhas gerais, a técnica desenvolvida por Girard [3] (capítulo III).

Além do seu interesse intrínseco e de sua aplicação no artigo [14] mencionado acima, gostaríamos de indicar outras áreas

onde um resultado de normalização para C poderia ser útil :

(a) Dado um resultado de normalização para C, a possibilidade de se desenvolver uma semântica baseada em regras de uso (i.e. regras de inferência) é ampliada.

(b) Como é bem sabido, se estamos interessados em Lógicas Não-Clássicas, como a Lógica da Relevância, então, existe uma perda considerável na exclusão da disjunção e do quantificador existencial. Portanto, qualquer tratamento em termos de prova, iria requerer um teorema da normalização para o sistema C .

(c) Um teorema de normalização para C poderia ser útil na formulação de módulos tradutores a serem acoplados a provadores automáticos de teorema (ver Herman [4]

Gostaria de agradecer ao professor Luiz Carlos P. D. Pereira. Seu estímulo, auxílio e orientação tornaram possível esta dissertação. As falhas, no entanto, são de minha inteira responsabilidade.

CAPÍTULO I

O SISTEMA DE DEDUÇÃO NATURAL C

Neste capítulo, apresentaremos o sistema de dedução natural C, para a lógica clássica de primeira ordem com todos os conectivos lógicos.

O sistema C que é, em essência, do tipo introduzido por Gentzen [2], encontra-se definido em Prawitz [11]. Com uma diferença : apresentaremos um conceito modificado de forma normal.

I) A LINGUAGEM DE C

Sua linguagem é a da Lógica de predicados de primeira ordem, formulada da maneira usual. Contendo (o que nem sempre é adotado) :

- a) parâmetros em lugar de variáveis livres (variáveis são sempre ligadas) ;
- b) uma constante lógica " $\perp$ " para a falsidade, e a negação " $\neg$ " é um símbolo definido ($\neg A = A \rightarrow \perp$)

Usaremos os seguintes símbolos, como constantes lógicas :
 $\wedge$ - conjunção , $\vee$ - disjunção , $\rightarrow$ - implicação , $\forall$ - quantificação universal, $\exists$ - quantificação existencial

II) REGRAS DE INFERÊNCIA E DERIVAÇÕES

As regras de inferência consistem em regras de introdução (I) e regras de eliminação (E), para cada constante lógica,

com exceção do $\perp$. Elas são indicadas pelas figuras abaixo. Uma fórmula escrita entre colchetes e acima de uma premissa, indica que as suposições desta forma e que ocorrem acima da premissa, são eliminadas na regra de inferência.

$\wedge - I$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$\wedge - E$

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad , \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

$\vee - I$

$$\frac{A}{A \vee B} \quad , \quad \frac{B}{A \vee B}$$

$\vee - E$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ C \end{array}}{C}$$

$\rightarrow - I$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$\rightarrow - E$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

$\forall - I$

$$\frac{A(a)}{\forall x A(x)}$$

$\forall - E$

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

$\exists - I$

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

$\exists - E$

$$\frac{\begin{array}{c} [A(a)] \\ \exists x A(x) \end{array} \quad B}{B}$$

Regra para o absurdo clássico ($\perp$)
c

$$\frac{[\neg A] \quad \perp}{A} \quad - \perp \quad c$$

Como um caso especial desta regra, temos a regra do absurdo intuicionista ($\perp$)
I

$$\frac{\perp}{A} \quad - \perp \quad I$$

Restrição para a regra $\forall$ - I : o parâmetro " a " não deve ocorrer em qualquer suposição da qual a premissa depende .

Restrição para a regra $\exists$ - E : o parâmetro " a " não deve ocorrer em $\exists xA(x)$, em B ou em qualquer outra suposição, diferente de $A(a)$, da qual B depende .

Restrição para a regra $\perp$: A deve ser diferente de $\perp$ e não pode ter a forma $B \rightarrow \perp$.
c

Nas regras de eliminação acima, a premissa que contém a constante lógica é denominada premissa maior, as outras, quando existem, são ditas premissas menores.

O parâmetro " a " que aparece nas regras $\forall$ - I e $\exists$ - E , é chamado parâmetro próprio da regra.

Assumiremos, de acordo com Prawitz [11], os resultados sobre parâmetros próprios :

- a) um parâmetro em uma derivação é um parâmetro próprio de apenas uma regra de inferência ;
- b) o parâmetro próprio de uma regra $\forall$ - I , ocorre somente acima da conclusão da regra ;

c) o parâmetro próprio de uma regra de $\exists - E$, ocorre somente acima da premissa menor da regra.

As derivações em C, são escritas na forma de árvores. As fórmulas do topo da árvore são as suposições e as outras fórmulas são obtidas, das que estão imediatamente acima, por uma das regras de inferência.

Uma suposição em uma derivação é chamada aberta, se ela não foi eliminada por qualquer regra de inferência na derivação. Caso contrário, é dita fechada. Marca-se, com numerais, as suposições eliminadas (fechadas), escrevendo o mesmo numeral na inferência que as eliminou. As suposições são também chamadas de top-fórmulas.

Usaremos as seguintes convenções:

a) As letras gregas Π e Σ , com ou sem índices, denotarão, respectivamente, derivações e sequência de derivações (incluindo a sequência vazia) em C

b) Π denota uma derivação cuja fórmula final é A

c) $\frac{\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n}{A}$ denota uma derivação, cujas subderivações

imediatas são $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ e A é a fórmula final

d) $r(\Pi)$ denota a última regra de inferência em Π

e) a notação Γ indica que Γ é um conjunto de top-fórmulas de Π

f) a notação $\frac{\Sigma}{\Gamma}$ indica a árvore obtida escrevendo Σ acima de Π

cada top-fórmula de Π , pertencente a Γ

Quando Γ é o conjunto unitário de uma ocorrência de fórmula A em Π , ou quando Γ é um conjunto de ocorrências de fórmulas da mesma forma A , denotaremos, respectivamente, por :

$$\frac{\Sigma}{(A)} \quad \Pi \quad e \quad \frac{\Sigma}{[A]} \quad \Pi$$

g) a notação $\Sigma(t)$, indica que o parâmetro em questão foi substituído pelo termo t , em todas as fórmulas das árvores da sequência Σ

h) o símbolo $\#$ será usado para identidade sintática entre derivações

i) $\Gamma \vdash A$ denota uma derivação de A a partir do conjunto Γ de suposições

Definição I : Uma sequência $A_1, A_2, \dots, A_n$ de ocorrências de fórmulas em uma derivação Π é uma linha em Π , se :

- a) A_1 é uma top-fórmula em Π ;
- b) A_i ocorre imediatamente acima de A_{i+1} em Π , para cada $i < n$ e
- c) A_n é a fórmula final de Π .

Definição II : O Comprimento de uma derivação Π , denotado por $l(\Pi)$, é um número natural, tal que :

a) se Π é uma fórmula, então $l(\Pi) = 1$

b) se Π é
$$\frac{\Pi_1 \ \Pi_2 \dots \Pi_n}{A}$$
,

então $l(\Pi) = l(\Pi_1) + l(\Pi_2) + \dots + l(\Pi_n) + 1$

Usando, nossas convenções, podemos então escrever :

a) $l(\frac{\Pi}{A}) = l(\Pi)$

$$b) l(\frac{\Pi}{A}) = l(\Pi) + 1$$

Definição III : O grau de uma fórmula A , denotado por d(A), é um número natural tal que :

- a) se A é uma fórmula atômica, então d(A) = 0
- b) se A é $C \wedge D$, $C \vee D$, $C \rightarrow D$, $\forall x C(x)$ ou $\exists x C(x)$, então $d(A) = d(C) + d(D) + 1$

Definição IV : Um segmento em uma derivação Π , é uma sequência $\sigma = A_1 A_2 \dots A_n$, de ocorrências consecutivas de fórmulas em uma linha em Π , tal que :

- a) A_1 não é uma conclusão de uma regra de $\vee$ - E ou $\exists$ - E
- b) A_i ($i < n$) é uma premissa menor de uma regra de $\vee$ - E ou $\exists$ - E
- c) A_n não é uma premissa menor de uma regra de $\vee$ - E ou $\exists$ - E

Duas ocorrências de fórmulas são ditas da mesma forma , se elas são ocorrências da mesma fórmula.

É claro que todas as ocorrências de fórmulas em um segmento são da mesma forma .

Se A é uma ocorrência de fórmula na derivação Π , a sub-árvore de Π determinada por A é a árvore obtida de Π removendo todas as ocorrências de fórmulas, com exceção de A e das que estão acima de A.

Seja Π a árvore $\frac{\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n}{A}$ e seja $A_1, A_2, \dots, A_n$,

respectivamente, as fórmulas finais de Π_1 , Π_2 , $\dots$, Π_n . Então, dizemos que $A_1, A_2, \dots, A_n$ ocorrem imediatamente acima de A na ordem da esquerda para a direita, e que A_i ocorre ao lado de A_j ($i, j < n$) .

O grau de um segmento σ , denotado por d(σ), é o grau da fórmula que ocorre em σ .

O comprimento de um segmento σ , denotado por $l(\sigma)$ é o número de ocorrências de fórmulas em σ .

III) DERIVAÇÕES NORMAIS

SEGMENTO MÁXIMO -

Definição : Um segmento $\sigma = A_1 A_2 \dots A_n$ é um segmento máximo quando :

a) $n = 1$

i) $A_1 = A_n$, é a conclusão de uma regra de introdução ou da regra do absurdo intuicionista e, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação

ii) $A_1 = A_n$, é a conclusão de uma aplicação do absurdo clássico e , ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação

iii) $A_1 = A_n$, é a conclusão de uma aplicação do absurdo clássico e , ao mesmo tempo, premissa menor de uma aplicação de $\rightarrow - E$, cuja premissa maior é uma top-fórmula da forma $A_1 \rightarrow \perp$

b) $n > 1$

i) A_n é a conclusão de uma aplicação de $\vee - E$ ou $\exists - E$ e , ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação

ii) A_n é a conclusão de uma aplicação de $\vee - E$ ou $\exists - E$ e, ao mesmo tempo, premissa menor de uma aplicação da regra $\rightarrow - E$, cuja premissa maior é uma top-fórmula da forma $A_n \rightarrow \perp$.

GRAU DE UMA DERIVAÇÃO

Definição : O grau de uma derivação Π , denotado por $d(\Pi)$, é definido como:

$d(\Pi) = \max \{ d(\sigma) : \sigma \text{ é um segmento máximo de tipo } (a - i, ii) \text{ ou } (b - i) \}$

Se Π não contém segmentos máximos, ou se não contém segmentos máximos de tipo $(a - i, ii)$ ou $(b - i)$, então $d(\Pi) = 0$

Os segmentos máximos que consideramos na definição do grau de Π , são aqueles segmentos máximos usuais, definidos por Prawitz

DERIVAÇÃO NORMAL

Uma derivação Π é chamada de normal se e somente se Π não contém segmentos máximos.

Veremos agora como remover os segmentos máximos de uma derivação. Estabelecendo reduções correspondentes a cada forma possível para os segmentos máximos.

IV) REDUÇÕES

As reduções são de três tipos (Pereira [9]) : reduções operacionais, reduções permutativas e reduções do absurdo. As reduções operacionais e permutativas foram introduzidas por Prawitz [11].

Em todas as reduções abaixo, a derivação à direita é uma redução da derivação à esquerda.

REDUÇÕES OPERACIONAIS

1) $\wedge$ - redução

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A1} \quad \frac{\Sigma 2}{A2}}{A1 \wedge A2}$$

A1

$$\frac{\Sigma i}{Ai} \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

2) $\vee$ -redução

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma}{A1} \quad \frac{[A1] \quad \Sigma1}{B} \quad \frac{[A2] \quad \Sigma2}{B} \\
 \hline
 A1 \vee A2 \quad B \quad B \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma}{[A1]} \\
 \frac{\Sigma1}{B} \quad i = 1 \text{ ou } 2
 \end{array}$$

3) $\rightarrow$ -redução

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma1}{A1} \quad \frac{[A1] \quad \Sigma2}{A2} \quad \frac{\Sigma1}{[A1] \quad \Sigma2} \\
 \hline
 A1 \quad A1 \rightarrow A2 \quad A2 \\
 \hline
 A2
 \end{array}$$

4) $\forall$ -redução

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma(a)}{A(a)} \\
 \frac{\forall x A(x)}{A(t)} \\
 \hline
 A(t)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Sigma(t) \\
 \hline
 A(t)
 \end{array}$$

5) $\exists$ -redução

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma1}{A(t)} \quad \frac{[A(a)] \quad \Sigma2(a)}{B} \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad B \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma1}{[A(t)]} \\
 \frac{\Sigma2(t)}{B}
 \end{array}$$

REDUÇÕES PERMUTATIVAS

6) $\exists$ E -redução

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C}}{C \quad \Sigma 4} D$$

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 4}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C} \quad \Sigma 4}{D} D$$

onde C é premissa maior de uma regra de eliminação e $\Sigma 4$ pode ocorrer à esquerda .

7) $\exists$ E -redução

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{C}}{C \quad \Sigma 4} D$$

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \Sigma 4}{D} D$$

onde C é a premissa maior de uma regra de eliminação e $\Sigma 4$ pode ocorrer à esquerda .

REDUÇÕES DO ABSURDO

8)

$$\frac{\frac{[\neg A]^k}{\frac{\Sigma 1}{\perp}} \quad k}{A \quad \Sigma 2} B$$

$$\frac{\frac{A \quad \Sigma 2}{B} \quad \neg B^i}{\perp} \quad \frac{[\neg A]^o}{\Sigma 1} \quad \frac{\perp}{i} B$$

onde : 1) A é premissa maior de uma regra de eliminação

2) $\Sigma 2$ pode ocorrer à esquerda

3) $\Sigma 1^o$ é obtido de $\Sigma 1$, substituindo todas as partes da

forma

$$\frac{\frac{\Sigma 3}{A} \quad \neg A^k}{\perp}$$

por

$$\frac{\frac{\Sigma 3}{A} \quad \Sigma 2}{B \quad \neg B^i}{\perp}$$

9)

$$\frac{[\neg C]}{\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{C \quad \neg C}}{\perp}$$

$$\frac{\Sigma 1}{\perp}$$

10)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{C}}{C \quad \neg C}{\perp}$$

$$\frac{\frac{\Sigma 2}{C} \quad \neg C}{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \perp}{\perp}$$

11)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C}}{C \quad \neg C}{\perp}$$

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\Sigma 2}{C} \quad \neg C}{\perp} \quad \frac{\frac{\Sigma 3}{C} \quad \neg C}{\perp}}{\perp}$$

REDUÇÃO IMEDIATA

Definição: Uma derivação Π' é uma redução imediata de Π se Π' é obtida de Π substituindo uma sub-árvore de Π por sua redução.

REDUTIBILIDADE

Uma derivação Π reduz para Π' , denotado por $\Pi \Rightarrow \Pi'$, se existe uma sequência $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ ($n \geq 1$), tal que:

i) $\Pi_1 = \Pi$

ii) Π_{i+1} é uma redução imediata de Π_i ($i < n$)

iii) $\Pi_n = \Pi'$

A sequência $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ é denominada de sequência de redução para a derivação Π .

Uma derivação Π é normalizável, se Π tem uma sequência de redução finita $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, tal que Π_n é normal.

LEMAS SOBRE REDUTIBILIDADE

Os lemas abaixo, podem ser obtidos diretamente das definições (Prawitz [12]).

LEMA 1 : Se $r(\Pi)$ é uma introdução ou uma aplicação do absurdo, Π é da forma

$$\frac{\Pi'}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{\Pi' \quad \Pi''}{A}, \quad \text{e } \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \text{ é uma}$$

sequência de redução de Π , então cada Π_i termina com a mesma regra que Π , sendo assim da forma

$$\frac{\Pi'_i}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{\Pi'_i \quad \Pi''_i}{A}, \quad \text{respectivamente, e}$$

$\Pi'_1, \Pi'_2, \dots$ e $\Pi''_1, \Pi''_2, \dots$ são também sequências de redução, omitindo possíveis repetições.

LEMA 2 : Se $\Pi_1(a)$ reduz para $\Pi_2(a)$, a não é um parâmetro próprio em $\Pi_1(a)$ e $[A(a)]$ é um conjunto de suposições abertas em $\Pi_1(a)$, então toda derivação

$$\frac{\Sigma}{[A(t)] \quad \Pi_1(t)} \quad \text{reduz para} \quad \frac{\Sigma}{[A(t)] \quad \Pi_2(t)}$$

V-ÁRVORE DE REDUÇÃO -Caracterização informal.

A árvore de redução de uma derivação Π é a árvore cujas linhas são as sequências de redução iniciando de Π .

A árvore de redução das derivações $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ é a árvore construída com as árvores de redução de cada uma das derivações Π_i ($1 \leq i \leq n$) (por exemplo, colocando uma ao lado da outra).

O comprimento de uma árvore de redução é o número de ocorrências de derivações na árvore.

CAPÍTULO II

NORMALIZAÇÃO PARA A LÓGICA CLÁSSICA

O objetivo do capítulo é fornecer uma prova direta do teorema da normalização para a Lógica Clássica de primeira ordem - o sistema C do capítulo anterior.

Utilizando-se das reduções do capítulo I para o sistema C, podemos provar os lemas abaixo :

LEMA 1 : Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash A$, tal que $d(\Pi) = n$ e todo segmento máximo de grau n que contribui para o grau de Π é do tipo (a - 1).

Então, Π se reduz a uma derivação Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash A$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Prova : como em Prawitz [11] .

LEMA 2 : Toda derivação Π tal que $d(\Pi) = 0$, se reduz a uma derivação normal Π' .

Prova : Se Π é normal, então $\Pi' \# \Pi$.

Se Π não é normal, então o resultado é obtido usando como valor de indução para uma derivação Π , o par $\langle d , l \rangle$, onde :

d - é o grau do segmento máximo de maior grau em Π

l - é a soma dos comprimentos dos segmentos máximos de grau d

Escolha um segmento máximo σ , de grau d em Π , tal que não exista outro segmento máximo de grau d acima dele, ou acima de (ou que contém) uma fórmula que ocorre ao lado da última fórmula de σ .

Seja Π_1 a redução de Π . É fácil ver, a partir das reduções do absurdo (9), (10) e (11) , que o valor de indução de Π_1 é menor que o valor de indução de Π . O resultado então é imediato.

LEMA 3 : Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash B$, tal que :

i) $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação , cuja premissa maior A é a última ocorrência de fórmula do único segmento máximo de Π ;

ii) $d(\Pi) > 0$.

Então, Π se reduz a uma derivação Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash B$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Prova : Por indução no comprimento de Π .

1) Se A é do tipo (a - i) - o resultado é obtido diretamente das reduções.

2) Se A é do tipo (b - i) ,.. e se Π é

$$\Pi \# \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{C \vee D} \quad \frac{\frac{\Sigma 2}{A} \quad \frac{\Sigma 3}{A}}{A} \quad \Sigma 4}{B}$$

Π se reduz a Π^* :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{C \vee D} \quad \frac{\frac{\frac{\Sigma 2}{A} \quad \Sigma 4}{B} \quad \frac{\frac{\Sigma 3}{A} \quad \Sigma 4}{B}}{B}}{B}$$

Se $d(\Pi^*) < d(\Pi)$, então $\Pi^* \# \Pi'$

Se $d(\Pi^*) = d(\Pi)$, então pelo menos uma das sub-árvores de Π determinada por uma das premissas menores B , tem a forma do lema. Suponhamos que as duas sub-árvores tenham a forma do lema, os outros casos são similares.

Então, pela hipótese indutiva :

$$\frac{\Sigma 1}{\frac{A \quad \Sigma 4}{B}} \Rightarrow \frac{\Pi 1}{B} \quad i = 2, 3$$

tal que $d(\Pi i) < d(\Pi)$.

Podemos então considerar Π' como :

$$\Pi' \# \frac{\frac{\Sigma 1}{C \vee D} \quad \frac{\Pi 2}{B} \quad \frac{\Pi 3}{B}}{B}$$

logo, $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Obs.: O caso de Π :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x C(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{A}}{A \quad \Sigma 3} \quad B$$

é similar.

3) Se a é do tipo (a - ii), então :

$$\frac{[\neg A]^k \quad \frac{\Sigma 1}{\frac{1}{A} \quad k} \quad \Sigma 2}{B}$$

que se reduz a Π^* :

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \quad \Sigma 2}{B \quad \neg B^i} \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 [\neg A] \\
 \Sigma 1^o \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 B \quad i
 \end{array}$$

onde todas as partes de Π , da forma :

$$\begin{array}{c}
 \Sigma 3 \\
 \hline
 A \quad \neg A^k \\
 \hline
 \perp
 \end{array}$$

foram substituídas por :

$$\begin{array}{c}
 \Sigma 3 \\
 \hline
 \frac{A \quad \Sigma 2}{B \quad \neg B^i} \\
 \hline
 \perp
 \end{array}$$

Os únicos segmentos máximos que podem ocorrer em Π^* são todos dos tipos (a - i) e (b - ii) e os do primeiro tipo têm a forma de A. O resultado segue então do LEMA 1.

TEOREMA DA NORMALIZAÇÃO :

Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash A$, então Π se reduz a uma derivação normal Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash A$.

Prova: Valor de indução : é o ordinal :

$$\omega^{\alpha_1} \cdot \beta_1 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot \beta_n \quad \text{tal que :}$$

$$i) \alpha_1 > \dots > \alpha_n$$

ii) cada α_i ($1 \leq i \leq n$) é o grau de um segmento máximo em Π dos tipos (a - i), (a - ii) ou (b - i), e o grau de cada um desses segmentos máximos é um dos α_i

iii) β_i é o número de segmentos máximos de grau α_i .

Escolha um segmento máximo σ de tipo (a - i), (a - ii) ou (b - i), tal que não exista outro segmento máximo de tipo (a - i), (a - ii) ou (b - i) acima dele, ou acima de uma fórmula que ocorre ao lado da última fórmula de σ .

Então, Π tem a seguinte forma :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \Sigma 2}{(B)} \\ \Pi 1$$

onde A é a última ocorrência de fórmula em σ .

Pelo LEMA 2 :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \Sigma 2}{B} \quad \text{se reduz a} \quad \Pi*$$

$$\frac{\Sigma' 1}{A} \quad \Sigma' 2 \\ B$$

onde $\Sigma' 1$ e $\Sigma' 2$ são normais
A

Usando LEMA 3 , temos :

$$\frac{\begin{array}{c} \Sigma' 1 \\ A \end{array} \quad \Sigma' 2}{B} \quad \text{se reduz a} \quad \begin{array}{c} \Sigma' \\ B \end{array}$$

tal que $d \left(\begin{array}{c} \Sigma' \\ B \end{array} \right) < d(\Pi^*)$.

Então Π se reduz a Π' , onde :

$$\Pi' \# \begin{array}{c} \Sigma' \\ (B) \\ \Pi 1 \end{array}$$

Vemos então que Π' tem valor de indução menor que Π , logo o resultado segue da hipótese indutiva.

CAPÍTULO III

NORMALIZAÇÃO FORTE

INTRODUÇÃO

LEMA GERAL : Seja o par $\langle S, \Rightarrow \rangle$, onde S é um sistema dedutivo formal e $\Rightarrow$ é a redução para as derivações Π e em S , tal que :

- i) Se $\Pi \Rightarrow \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$
- ii) O teorema da normalização é válido em $\langle S, \Rightarrow \rangle$
- iii) O teorema de Church & Rosser (unicidade da forma normal) é válido em $\langle S, \Rightarrow \rangle$.

Então, $\langle S, \Rightarrow \rangle$ é normalizável fortemente .

Prova : Por absurdo.

Suponha que exista uma sequência infinita de reduções $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_m \dots$ em $\langle S, \Rightarrow \rangle$.

De (ii), seja Π a forma normal de Π_1 , e seja $l(\Pi) = n$. Usando (i) podemos escolher na sequência infinita, um certo k (por exemplo, $k = n + 1$) , tal que :

$$(I) \quad l(\Pi_k) > l(\Pi)$$

De (iii), Π também é a forma normal de Π_k , logo de (i) , $l(\Pi_k) < l(\Pi)$. O que contradiz (I) .

Um exemplo do resultado acima, será desenvolvido neste capítulo , usando a técnica de Girard [3].

No artigo de L.C.Pereira [10], encontramos uma aplicação desta técnica para a Lógica Intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas. Algumas necessárias alterações foram feitas nas reduções utilizadas por Pereira , a fim de se obter , diretamente, a normalização através das técnicas usadas em Prawitz [11] .

Construiremos um sistema para a Lógica Clássica de primeira ordem com todos os conectivos lógicos, denominada CCAP, que

satisfaça às condições do teorema acima.

Provaremos, então, o teorema da Normalização Forte para C , fazendo um mapeamento das derivações em C nas em C(AP).

O SISTEMA C(AP)

I) A Linguagem do sistema C(AP) é a desenvolvida no capítulo I , acrescentando dois esquemas de axiomas :

$$1) A \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \rightarrow Px_1 \dots x_n)$$

$$2) \forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \rightarrow Px_1 \dots x_n)$$

Onde A é uma fórmula qualquer e P é uma constante de predicado .

Obs : No caso da fórmula atômica $\perp$, teremos :

$$1) A \rightarrow (\perp \rightarrow \perp)$$

$$2) \perp \rightarrow \perp$$

II) AMPLIAÇÕES - Definiremos certas árvores , chamadas ampliações, APCAB) e APCB) , por indução sobre o comprimento de B .

Seja B uma fórmula atômica $Pt_1 \dots t_n$ e sejam $\Pi(CAB)$ e $\Pi(CB)$ as seguintes derivações :

$$\begin{array}{c} \Pi(CAB) \quad \# \quad \begin{array}{c} A \quad A \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \rightarrow Px_1 \dots x_n) \\ \hline \forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \rightarrow Px_1 \dots x_n) \\ \hline \forall x_2 \dots \forall x_n (Pt_1 \dots x_n \rightarrow Pt_1 \dots x_n) \\ \hline \vdots \\ Pt_1 \dots t_n \rightarrow Pt_1 \dots t_n \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \rightarrow Px_1 \dots x_n)}{\forall x_2 \dots \forall x_n (Pt_1 \dots x_n \rightarrow Pt_1 \dots x_n)} \\
 \hline
 \Pi(B) \# \\
 \vdots \\
 Pt_1 \dots t_n \rightarrow Pt_1 \dots t_n
 \end{array}$$

DEFINIÇÃO 1 : $APCAB$ e $APCB$ são definidas , por indução sobre o comprimento de B da seguinte maneira :

1) Base

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \Pi(CAB) \\ B \quad B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \Pi(CAB) \\ B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \Pi(CAB) \\ B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \\
 APCAB \#
 \end{array}$$

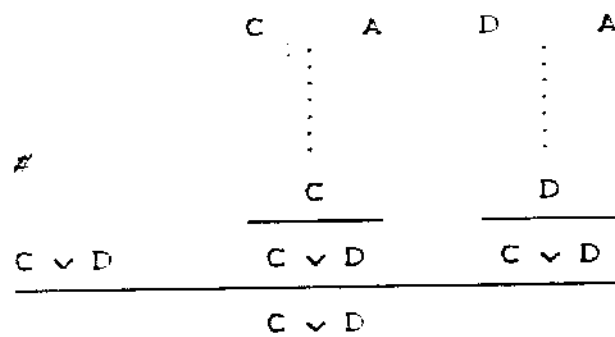
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi(CB) \\ B \quad B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi(CB) \\ B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi(CB) \\ B \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \\
 APCB \#
 \end{array}$$

Denotaremos $APCAB$ e $APCB$, respectivamente por :

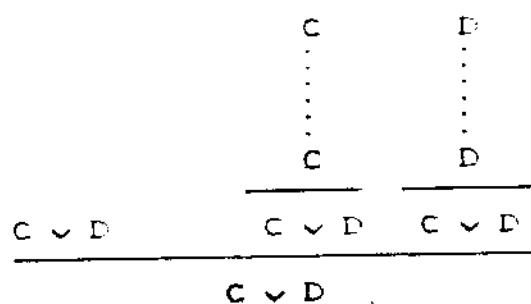
$$\begin{array}{ccc}
 B & A & e \\
 \vdots & & \vdots \\
 & & B \\
 B & & B
 \end{array}$$

2) Se $B \in C \vee D$

APCA $C \vee D \rangle \#$

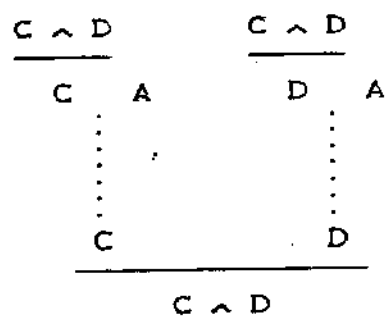


APCC $C \vee D \rangle \#$

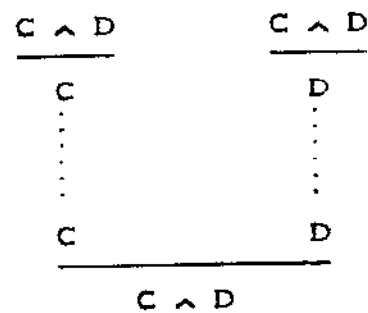


3) Se $B \in C \wedge D$

APCA $C \wedge D \rangle \#$

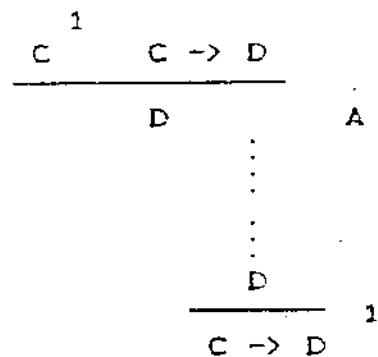


APCC $C \wedge D \rangle \#$

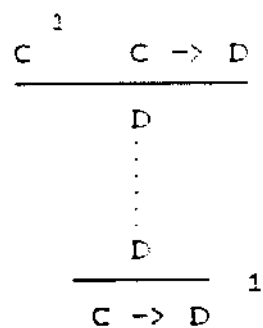


4) Se $B \in C \rightarrow D$

$AP(A \ C \rightarrow D) \neq$

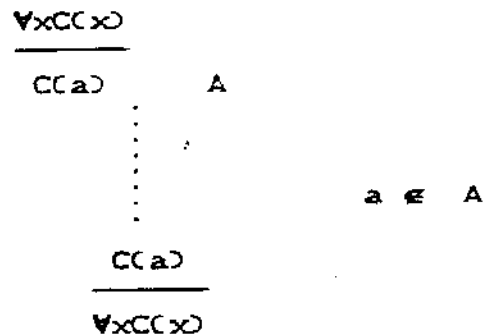


$AP(C \ C \rightarrow D) \neq$

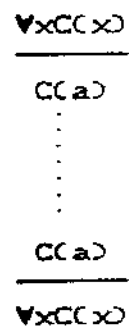


5) Se $B \in \forall x C(x)$

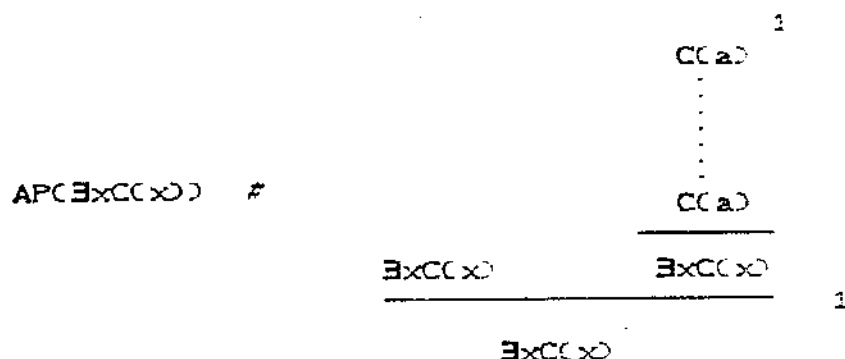
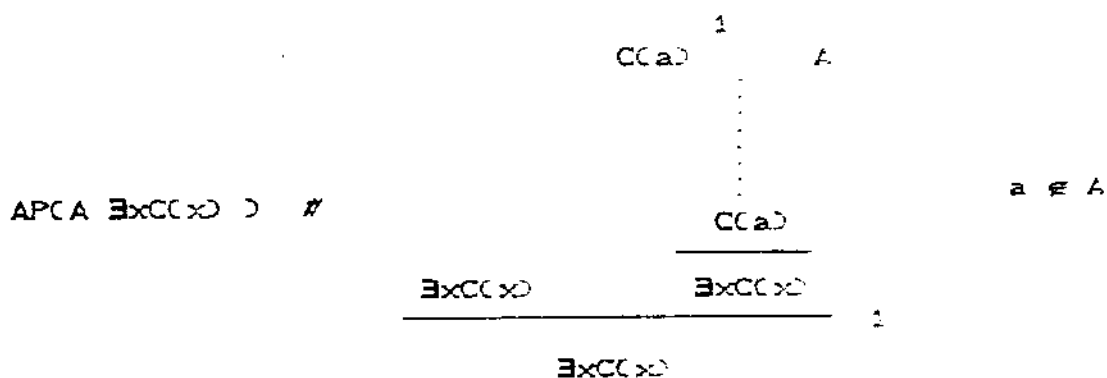
$AP(A \ \forall x C(x)) \neq$



$AP(\forall x C(x)) \neq$



6) Se B é $\exists x C(x)$



DEFINIÇÃO 2: Uma derivação $\Pi(AP)$ é chamada uma ampliação imediata de Π se e somente se $\Pi(AP)$ pode ser obtida de Π por substituição de algumas ocorrências de fórmulas B em Π por $AP(B)$ ou por $AP(AB)$.

DEFINIÇÃO 3: Uma derivação Π^* é uma ampliação de Π se existe uma sequência $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n$ ($n \geq 1$), onde :

- i) $\Pi_1 = \Pi$;
- ii) Π_{i+1} é uma ampliação imediata de Π_i para cada $1 \leq i < n$
- iii) $\Pi_n = \Pi^*$

IIID) BOA FÓRMULA PARA AMPLIAÇÃO

DEFINIÇÃO 4 : Uma ocorrência de fórmula A em uma derivação Π , é chamada de Boa fórmula para ampliação em Π , quando :

- i) A é uma fórmula atômica , ou
- ii) A é uma top-fórmula em Π que não é premissa maior de uma regra de eliminação em Π , ou
- iii) A é consequência de uma das regras $\wedge$ -E , $\rightarrow$ -E ou $\vee$ -E em Π , e não é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação em Π .

TEOREMA : Toda derivação Π que não contém aplicações das regras $\vee$ -E ou $\exists$ -E , possui uma boa-fórmula para ampliação .

Prova : Por indução no número de aplicações de regras de introdução.

Base: Π pode ter as formas : $A, \frac{\Pi_1}{A} \text{ -E}$ ou $\frac{\Pi_1}{A} \text{ -I}_c$, temos

- que :
- 1) por (ii), A é uma boa-fórmula para ampliação em Π ;
 - 2) por (iii) , A é uma boa-fórmula para ampliação em Π , e
 - 3) por (i), $\perp$ é uma boa-fórmula para ampliação em Π .

Passo indutivo : Temos três casos :

1) Se Π termina em eliminação, então Π é da forma $\frac{\Pi_1}{A} \text{ -E}$ e

por (iii) A é uma boa-fórmula para ampliação em Π .

2) Se Π termina numa aplicação do absurdo, então é da forma

$\frac{\Pi_1}{A} \text{ -I}_c$ e por (i) $\perp$ é uma boa-fórmula para ampliação em Π .

3) Se Π termina em introdução, então Π é da forma $\frac{\Pi_1}{A} \text{ -I}$.

Pela hipótese de indução, existe em Π_1 uma boa-fórmula para ampliação $\underline{C}$. É fácil ver que $\underline{C}$ também será uma boa fórmula para ampliação em Π , pois, caso $\underline{C}$ seja por (i), (ii) ou (iii) em Π_1 , também será, respectivamente, por (i), (ii) ou (iii) em Π .

COROLÁRIO: TODA ÁRVORE Π POSSUI UMA BOA-FÓRMULA PARA AMPLIAÇÃO

Prova: Consideremos dois casos :

1) Se Π não contém aplicações de $\vee$ -E ou $\exists$ -E .

É o próprio teorema.

2) Se Π contém aplicações de $\vee$ -e ou $\exists$ -E .

Escolha em Π uma aplicação de $\vee$ -E ou $\exists$ -E tal que não exista acima da primeira ocorrência de fórmula ao lado da premissa maior, nenhuma aplicação das regras de $\vee$ -e ou $\exists$ -E .

Isto é :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\
 \hline
 A \vee B & C & C \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{a) } \Pi \neq \\
 \text{ } \quad \quad \quad (C) \\
 \text{ } \quad \quad \quad \Pi_4
 \end{array}$$

onde em Π_2 não existem aplicações de $\vee$ -E ou $\exists$ -E .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \Pi_1 & \Pi_2 \\
 \hline
 \exists x A(x) & B \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{b) } \Pi \neq \\
 \text{ } \quad \quad \quad (B) \\
 \text{ } \quad \quad \quad \Pi_3
 \end{array}$$

onde em Π_2 não existem aplicações de $\vee$ -E ou $\exists$ -E .

Pelo teorema, temos que existe em Π_2 uma boa-fórmula para ampliação $\underline{D}$. É fácil ver que $\underline{D}$ também é uma boa-fórmula para ampliação em Π .

IV) REDUÇÕES : De (1) a (40) , correspondendo ao conceito de forma normal análogo ao que foi introduzido no capítulo I .

1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{\Sigma 2}{B}}{A \wedge B} \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \vdots \\
 A
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{\Sigma 2}{B}}{A \wedge B} \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{B} \quad \frac{\Sigma 1}{A} \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{\frac{[A] \quad \Sigma 2}{B}}{A \rightarrow B}}{B} \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{[A]} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\Sigma 1}{A(a)}}{\forall x A(x)} \\
 \hline
 A(t)
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1(t)}{A(t)} \\
 \vdots \\
 A(t)
 \end{array}$$

5)

$$\frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{A}}{A \vee B} \quad \frac{[A] \quad \Sigma 2}{C} \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}}{C}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}}{B \rightarrow C} \quad \vdots \quad \frac{[A] \quad \Sigma 2}{C}$$

6)

$$\frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{B}}{A \vee B} \quad \frac{[A] \quad \Sigma 2}{C} \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}}{C}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{B} \quad \frac{[A] \quad \Sigma 2}{C}}{A \rightarrow C} \quad \vdots \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}$$

7)

$$\frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{A}}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}}{C}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\frac{\Pi 1}{D} \quad \frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{[B] \quad \Sigma 3}{C}}{B \rightarrow C}}{C} \quad \vdots \quad \frac{[D] \quad \Pi 2}{C}$$

onde: 1) A não é eliminada em $\Sigma 2$;

ii)

$$\frac{\Sigma 2}{C} \quad \# \quad \frac{\Pi 1}{(D)} \quad \frac{\Pi 2}{C}$$

iii) D é a primeira, de baixo para cima e da linha mais à esquerda, boa-fórmula para ampliação em $\frac{\Sigma 2}{C}$

B)

$$\begin{array}{c} \frac{\Sigma 1}{B} \quad [A] \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C} \\ \hline A \vee B \quad C \quad C \\ \hline C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{\Sigma 1}{A} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

$$\frac{\Pi 1}{D} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (D) \\ \Pi 2 \\ \hline C \end{array}$$

onde : i) B não é eliminada em $\Sigma 3$

ii)

$$\frac{\Sigma 3}{C} \quad \# \quad \frac{\Pi 1}{(D)} \quad \frac{\Pi 2}{C}$$

iii) D é como em (7)

9)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A(t)} \quad [A(a)] \\
 \hline
 \frac{\exists x A(x)}{B}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A(t)} \\
 \vdots \\
 \frac{\Sigma 2(t)}{B}
 \end{array}$$

10)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A(t)} \quad \Sigma 2 \\
 \hline
 \frac{\exists x A(x)}{B}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi 1}{D} \quad \frac{\Sigma 1}{A(t)} \\
 \vdots \\
 \frac{(D) \quad \Pi 2}{B}
 \end{array}$$

onde 1) $A(a)$ não é eliminada em $\Sigma 2$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{B} \quad \# \quad \frac{\Pi 1}{(D) \quad \Pi 2} \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

iii) D é como em (7)

11)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C} \\
 \hline
 \frac{C \quad \Sigma 4}{D}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 4}{D} \quad \frac{\Sigma 3}{C} \quad \frac{\Sigma 4}{D} \\
 \hline
 D
 \end{array}$$

onde C é a premissa maior de uma regra de eliminação.

12)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \hline
 \frac{B}{C} \quad \Sigma 3
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \quad \frac{D}{\Sigma 3} \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

onde : 1) $\Sigma 3 = \Pi 1, \dots, \Pi n$

11)

$$\begin{array}{c}
 D \\
 \vdots \\
 D \\
 \Sigma 3
 \end{array}
 \#
 \begin{array}{c}
 \Sigma \\
 \hline
 (D) \\
 \Pi \dots \Pi n
 \end{array}
 , \text{ isto é }$$

$\Pi 1 \# \begin{array}{c} \Sigma \\ \hline (D) \\ \Pi \end{array}$ e D é como em (7)

13)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \hline
 \frac{B}{C}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

14)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\perp} \\
 \hline
 A \wedge B
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\perp} \quad \frac{\Sigma 1}{\perp} \\
 \hline
 A \wedge B
 \end{array}$$

15)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A \vee B} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A}}{A \vee B}$$

16)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{\exists x A(x)} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A(c)}}{\exists x A(x)}$$

17)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A \rightarrow B} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{B}}{A \rightarrow B}$$

18)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{\forall x A(x)} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A(a)}}{\forall x A(x)} \quad 'a \notin \Sigma 1$$

19)

$$\frac{\frac{[\neg A] \quad k}{\frac{\Sigma 1}{\perp}}}{\frac{A \quad \Sigma 2}{B}} \quad \frac{\frac{A \quad \Sigma 2}{B} \quad \neg B \quad i}{\frac{\perp}{[\neg A] \quad \Sigma 1^0}} \quad \frac{\perp}{B} \quad i$$

onde $\Sigma 1^0$ é obtida de $\Sigma 1$ como no capítulo I, redução (8)

20)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{1}}{C \quad \neg C} \Rightarrow 1$$

$$\frac{\Sigma 1}{1} \dots 1$$

21)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{1}}{C \dots C \quad \neg C} \Rightarrow 1$$

=>

$$\frac{\Sigma 1}{1} \dots \frac{1}{\neg C} \quad \frac{\frac{1}{C} \quad \neg C}{1} \dots 1$$

onde C é $\forall x A(x)$, $A \wedge B$ ou $A \rightarrow B$

22)

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{1}}{C \dots C \quad \neg C} \Rightarrow 1$$

=>

$$\frac{\Sigma 1}{1} \dots \frac{\frac{1}{C} \quad \neg C}{1} \quad \frac{\frac{\Pi 3}{D}}{C \dots C \quad \neg C} \dots 1$$

onde C é como em (21)

23)

$$\begin{array}{c}
 \hline \Sigma 1 \\
 \hline \perp \\
 \hline A \vee B \\
 \vdots \\
 \hline A \vee B \quad \neg(A \vee B) \\
 \hline \perp
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ B \end{array} \\
 \hline \begin{array}{cc} A \vee B & \neg(A \vee B) \end{array} \quad \begin{array}{cc} A \vee B & \neg(A \vee B) \end{array} \\
 \hline \begin{array}{cc} A \vee B & \perp \end{array} \quad \begin{array}{cc} \perp & \perp \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline \Sigma 1 \\
 \hline \perp
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline \perp \\
 \hline \neg(A \vee B)
 \end{array}$$

$\vdots$
 $\perp$

24)

$$\begin{array}{c}
 \hline \Sigma 1 \\
 \hline \perp \\
 \hline A \vee B \\
 \vdots \\
 \hline A \vee B \quad \neg(A \vee B) \\
 \hline \perp
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi 3 \\ \hline D \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi 3 \\ \hline D \end{array} \\
 \hline \begin{array}{cc} A \vee B & \neg(A \vee B) \end{array} \quad \begin{array}{cc} A \vee B & \neg(A \vee B) \end{array} \\
 \hline \begin{array}{cc} A \vee B & \perp \end{array} \quad \begin{array}{cc} \perp & \perp \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline \Sigma 1 \\
 \hline \perp
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline \perp \\
 \hline \neg(A \vee B)
 \end{array}$$

$\vdots$
 $\perp$

25)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{1} \\
 \hline
 \exists x A(x) \\
 \vdots \\
 \frac{\exists x A(x) \quad \neg(\exists x A(x))}{1}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 A(a) \\
 \vdots \\
 A(a) \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad \neg(\exists x A(x)) \\
 \hline
 \frac{\exists x A(x) \quad 1}{1}
 \end{array}$$

26)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{1} \quad \frac{\Pi 3}{D} \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad D \\
 \vdots \\
 \frac{\exists x A(x) \quad \neg(\exists x A(x))}{1}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi 3}{D} \\
 A(a) \\
 \vdots \\
 A(a) \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad \neg(\exists x A(x)) \\
 \hline
 \frac{\exists x A(x) \quad 1}{1}
 \end{array}$$

27)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C} \\
 \hline
 C \quad \neg C \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C \quad \neg C} \quad \frac{\Sigma 3}{C \quad \neg C} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

28)

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$A \vee B$	C	C	$\Pi 1$
C			E
$\vdots$			
			$C \quad \neg C$
			$\perp$

$\Rightarrow$

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$A \vee B$	$C \quad \neg C$	$C \quad \neg C$	
$\perp$			$\perp$

$\Pi 1$
E
$\vdots$
$C \quad \neg C$
$\perp$
$\neg C$

$\vdots$

$\perp$

onde C é $\forall x A(x)$, $A \wedge B$ ou $A \rightarrow B$.

29)

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$A \vee B$	C	C	
$\vdots$			
$C \quad \neg C$			$\perp$

$\Rightarrow$

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$A \vee B$	$C \quad \neg C$	$C \quad \neg C$	
$\perp$			$\perp$

C^1
$\vdots$
$C \quad \neg C$
$\perp$
$\neg C$

$\vdots$

$\perp$

onde C é como em (28).

30)

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$A \vee B$	$C \vee D$	$C \vee D$	$\Pi 3$
$C \vee D$			E
$\vdots$			
			$C \vee D \quad \neg(C \vee D)$
			$\perp$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \quad \Sigma 3 \\
 \hline
 A \vee B \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \Pi 3 \quad \Pi 3 \\
 \hline
 C \quad E \quad D \quad E \\
 \vdots \quad \vdots \\
 C \quad D \\
 \hline
 C \vee D \quad \neg(C \vee D) \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \\
 \hline
 C \vee D \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 \hline
 \neg(C \vee D)
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 31) \quad \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \quad \Sigma 3 \\
 \hline
 A \vee B \quad C \vee D \quad C \vee D \\
 \hline
 C \vee D \\
 \vdots \\
 C \vee D \quad \neg(C \vee D) \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \quad \Sigma 3 \\
 \hline
 A \vee B \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 C \quad D \\
 \vdots \quad \vdots \\
 C \quad D \\
 \hline
 C \vee D \quad \neg(C \vee D) \quad C \vee D \quad \neg(C \vee D) \\
 \hline
 C \vee D \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 \hline
 \neg(C \vee D)
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma 2 \\
 \hline
 \Sigma 1 \quad \exists x(A(x) \rightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B)) \rightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B) \\
 \hline
 A \wedge B \quad 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Sigma 3 \\
 \hline
 \exists x(A(x) \wedge B) \rightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B) \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 C(a) \\
 \vdots \\
 C(a) \\
 \hline
 \exists x(A(x) \wedge B) \rightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B) \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 34) \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \\
 \hline
 \exists x(A(x) \wedge B) \quad B \\
 \hline
 B \quad \neg B \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \Sigma 2 \\
 \hline
 B \quad \neg B \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 35) \\
 \begin{array}{c}
 \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \quad \Pi 3 \\
 \hline
 \exists x(A(x) \wedge B) \quad B \quad E \\
 \hline
 B \quad \vdots \\
 B \quad \neg B \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \Sigma 2 \\
 \hline
 B \quad \neg B \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Pi 3 \\
 \hline
 E \\
 \vdots \\
 B \quad \neg B \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

onde B é $\forall x(A(x))$, $A \wedge B$ ou $A \rightarrow B$

36)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \\
 \hline
 B \\
 \vdots \\
 B \quad \neg B \\
 \hline
 \perp
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{B \quad \neg B} \\
 \hline
 \frac{\exists x A(x) \quad \perp}{\perp}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 B^1 \\
 \vdots \\
 B \quad \neg B \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg B} \quad 1 \\
 \vdots \\
 \perp
 \end{array}$$

onde B é como em (35).

37)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B \vee C} \quad \frac{\Pi 3}{E} \\
 \hline
 B \vee C \\
 \vdots \\
 B \vee C \quad \neg(B \vee C) \\
 \hline
 \perp
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B \vee C \quad \neg(B \vee C)} \\
 \hline
 \frac{\perp}{\perp}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi 3}{E} \quad \frac{\Pi 3}{E} \\
 B \quad C \\
 \vdots \quad \vdots \\
 B \quad C \\
 \hline
 B \vee C \quad \neg(B \vee C) \quad B \vee C \quad \neg(B \vee C) \\
 \hline
 B \vee C \quad \perp \quad \perp \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg(B \vee C)} \quad 1 \\
 \vdots \\
 \perp
 \end{array}$$

38)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B \vee C} \\
 \hline
 B \vee C \\
 \vdots \\
 B \vee C \quad \neg(B \vee C) \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B \vee C \quad \neg(B \vee C)} \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{B \vee C \quad \neg(B \vee C)} \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{B \vee C \quad \neg(B \vee C)} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\vdots$
1

39)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{\exists x B(x)} \quad \Pi 3 \\
 \hline
 \exists x B(x) \\
 \vdots \\
 \exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x) \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{\exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x)} \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Sigma 2}{\exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x)} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$\vdots$
1

a $\notin$ $\Pi 3$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Sigma 1 \\ \hline \exists x A(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma 2 \\ \hline \exists x B(x) \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \exists x B(x) \\ \vdots \\ \exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x) \\ \hline 1 \end{array} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Sigma 2 \\ \hline \exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x) \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists x A(x) \quad 1 \\ \hline 1 \end{array} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} B(a) \\ \vdots \\ B(a) \\ \hline \exists x B(x) \quad \neg \exists x B(x) \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists x B(x) \\ \hline 1 \end{array} \\
 \hline
 \neg \exists x B(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 1 \end{array}$$

V) NORMALIZAÇÃO E UNICIDADE

Teorema: O teorema da normalização e o teorema da unicidade da forma normal (Church & Rosser) são válidos para C(AP).

Prova : i) Normalização - em analogia com o capítulo 2

ii) Church & Rosser - da maneira usual.

Corolário: O sistema C(AP) é normalizável fortemente.

Prova: Examinando as reduções para C(AP), vemos que se $\Pi \Rightarrow \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$. Portanto, as condições (i), (ii) e (iii) do Lema Geral são válidas em C(AP).

VI) MAPEAMENTO DE C EM CCAP)

O teorema abaixo é o enunciado preciso de que qualquer sequência de reduções, para uma dada derivação Π em C, pode ser mapeada em uma sequência de reduções em CCAP).

TEOREMA DO MAPEAMENTO : Se Π se reduz imediatamente a Π' , e seja Π^* uma ampliação de Π , então, existe uma ampliação Π'^* de Π' , tal que Π^* se reduz a Π'^* .

Prova: Por indução no comprimento de Π^* .

Temos dois casos:

Caso (a) : Se Π' é obtida de Π , substituindo uma sub-árvore própria de Π por sua redução imediata.

Se Π é $\underbrace{\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n}_A$, então Π' é $\underbrace{\Pi'_1 \Pi'_2 \dots \Pi'_n}_A$

onde, para algum $i \leq n$, Π_i se reduz imediatamente a Π'_i e, para os outros j ($i \neq j \leq n$) $\Pi'_j = \Pi_j$.

Temos três subcasos :

1) Π^* é $\underbrace{\Pi^*_1 \Pi^*_2 \dots \Pi^*_n}_A$ onde Π^*_i é uma ampliação de Π_i .

Pela hipótese indutiva podemos obter, para o dado i , o Π'^*_i

Seja $\Pi'^* \neq \underbrace{\Pi^*_1 \Pi^*_2 \dots \Pi'^*_i \dots \Pi^*_n}_A$

2) Se Π^* é

$\Pi^* \neq \begin{array}{cc} \Sigma_1 & \Pi_1 \\ A & \underline{B} \\ \vdots & \\ A & \end{array}$

onde Σ_1 é uma ampliação de Π .

Seja $\Pi'*$:

$$\Pi' * \# \begin{array}{c} \Sigma'1 \\ \hline A \quad \frac{\Pi1}{B} \\ \vdots \\ A \end{array}$$

onde $\Sigma'1$ é obtida , aplicando a hipótese indutiva a $\Sigma1$

3) Se $\Pi*$ é :

$$\Pi * \# \begin{array}{c} \Sigma1 \\ \hline A \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \text{onde } \Sigma1 \text{ é como em (2)}$$

Seja

$$\Pi' * \# \begin{array}{c} \Sigma'1 \\ \hline A \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \text{onde } \Sigma'1 \text{ é como em (2)}$$

Caso (b) - Se Π' é obtida por uma redução própria .

Temos vários subcasos :

1) Se

$$\Pi \# \frac{\frac{\Pi1}{A} \quad \frac{\Pi2}{B}}{A \wedge B} \quad \text{então , ,} \quad \Pi' \# \frac{\Pi1}{A}$$

1.1) Se

$$\Pi * \frac{\Pi*1 \quad \Pi*2}{A \wedge B} \quad \text{onde } \Pi*1 \text{ e } \Pi*2 \text{ são, respectivamente,}$$

ampliações de $\frac{\Pi1}{A}$ e $\frac{\Pi2}{B}$

Seja $\Pi'*$:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \\
 \begin{array}{cc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 \\
 A & B \\
 \vdots & \\
 A &
 \end{array}
 \end{array}$$

1.2) Se

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \\
 \begin{array}{ccc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 & \Pi^3 \\
 \hline
 A \wedge B & & D \\
 \vdots & & \\
 A \wedge B & & \\
 \hline
 A & &
 \end{array}
 \end{array}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são como em (1.1)

Pela definição de $AP(D, A \wedge B)$, temos que

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 A
 \end{array} & \begin{array}{c} \Pi^3 \\ D \end{array} & \begin{array}{cc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 A
 \end{array} & \begin{array}{c} \Pi^3 \\ D \end{array} \\
 \vdots & & \vdots & \\
 A & & B & \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \end{array}$$

Seja $\Pi^* \neq$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 \\
 A & B \\
 \vdots & \\
 A & \begin{array}{c} \Pi^3 \\ D \end{array} \\
 \vdots & \\
 A &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \Pi^*1 & \Pi^*2 \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 B
 \end{array} & \begin{array}{c} \Pi^3 \\ D \end{array} \\
 \vdots & \\
 B & \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 A
 \end{array}$$

1.3) Se Π^* é

$$\begin{array}{c} \Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Sigma 1 \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi 3 \\ \hline C \end{array} \\ \vdots \\ A \end{array}$$

onde $\Sigma 1$ é uma ampliação de Π . Seja :

$$\Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Sigma' 1 \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi 3 \\ \hline C \end{array} \\ \vdots \\ A$$

onde $\Sigma' 1$ é obtido de $\Sigma 1$ pela hipótese indutiva.

Obs.: Os casos de $AP(A \wedge B)$ e $AP(A)$ são, respectivamente, similares a (1.2) e (1.3) .

$$\begin{array}{c} 2) \text{ Se } \quad \begin{array}{c} \Pi 1 \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi 2 \\ \hline B \end{array} \\ \hline \Pi \# \quad \begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline B \end{array} \end{array}$$

é similar ao (1).

$$\begin{array}{c} 3) \text{ Se } \quad \begin{array}{c} [A] \\ \hline \Sigma 2 \\ \hline B \end{array} \\ \begin{array}{c} \Sigma 1 \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \hline A \rightarrow B \end{array} \\ \hline \Pi \# \quad \begin{array}{c} A \quad A \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \end{array}$$

então :

$$\Pi' \# \quad \begin{array}{c} \Sigma 1 \\ \hline [A] \\ \hline \Sigma 2 \\ \hline B \end{array}$$

3.1) Se Π^* é

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*2}{A \rightarrow B} \quad \Pi^*1}{B}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de $\frac{\Sigma 1}{A}$ e $\frac{\Sigma 2}{B}$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \# \frac{\begin{array}{c} \Pi^*1 \\ [A] \\ \Pi^*2 \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*1 \\ A \end{array}}{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}$$

3.2) Se Π^* é :

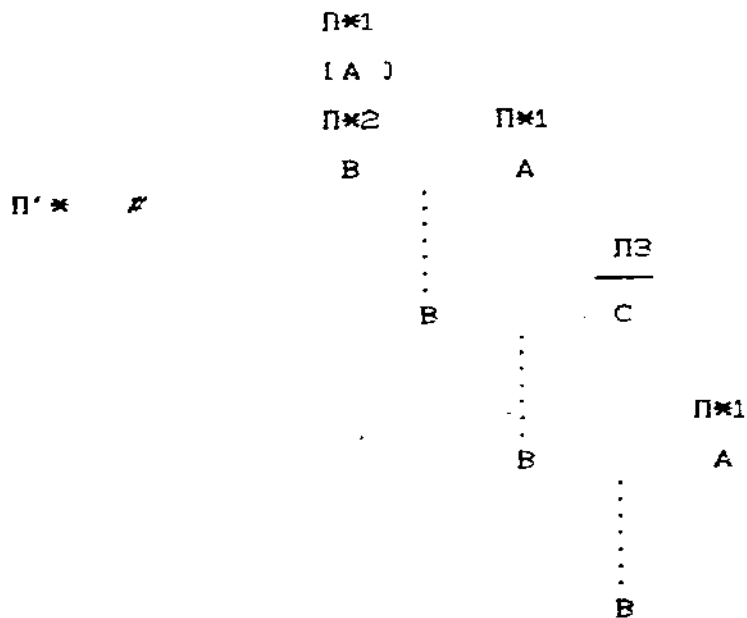
$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*2}{A \rightarrow B} \quad \frac{\Pi 3}{C}}{\frac{\Pi^*1 \quad A \rightarrow B}{B}}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são como em (3.1)

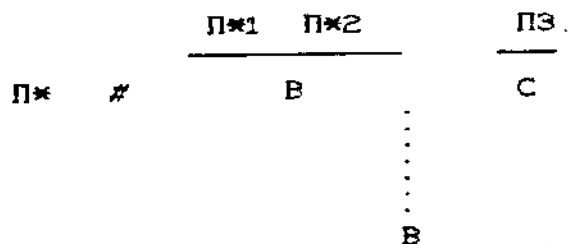
Pela definição de $AP(C, A \rightarrow B)$, temos que

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\frac{\Pi^*2}{A^1 \quad A \rightarrow B} \quad \frac{\Pi 3}{C}}{B} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{\frac{\Pi^*1 \quad A \rightarrow B}{B} \quad 1}$$

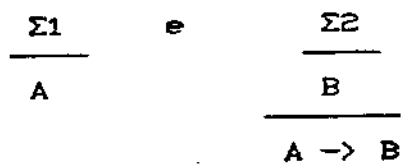
Seja $\Pi'*$:



3.3) Se $\Pi*$ é

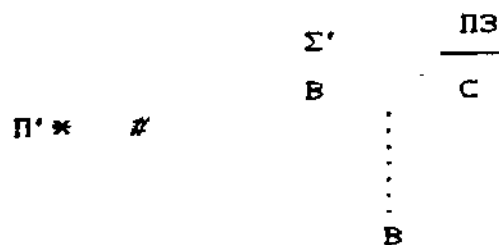


onde $\Pi*1$ e $\Pi*2$ são, respectivamente, ampliações de :



Pela hipótese indutiva, o teorema é válido para :

$\Sigma \quad \# \quad \frac{\Pi*1 \quad \Pi*2}{B}$, então podemos obter o Σ' . Seja $\Pi'*$:



Obs.: Os casos de $AP(A \rightarrow B)$ e $AP(B)$, são , respectivamente,

similares a (3.2) e (3.3) .

4) Se Π é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma 1}{A(a)}}{\frac{\forall x A(x)}{A(t)}} \quad , \text{ então } \Pi' \# \frac{\Sigma 1(t)}{A(t)}$$

4.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^* 1}{\forall x A(x)}}{A(t)} \quad \text{onde } \Pi^* 1 \text{ é uma ampliação de } \frac{\Sigma 1}{A(a)}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \# \frac{\Pi^* 1(t)}{A(t)} \dots A(t)$$

4.2) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^* 1}{\forall x A(x)} \quad \frac{\Pi 2}{C}}{\frac{\forall x A(x)}{A(t)}}$$

Pela definição de APCC $\forall x A(x)$), temos :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\frac{\Pi^* 1}{\forall x A(x)}}{A(a)} \quad \frac{\Pi 2}{C}}{\frac{A(a)}{\forall x A(x)} \quad A(t)} \quad a \notin \frac{\Pi 2}{C}$$

Seja $\Pi^* \#$:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Pi^*1(t) \\ A(t) \\ \vdots \\ A(t) \end{array} \quad \frac{\Pi^2}{C} \\
 \vdots \\
 A(t)
 \end{array}$$

4.3) Se Π^* é

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*1}{A(t)} \quad \frac{\Pi^2}{C} \\
 \vdots \\
 A(t)
 \end{array}
 \quad \text{onde } \Pi^*1 \text{ é uma ampliação de } \frac{\Sigma^1}{A(a)} \quad \frac{\Sigma^1}{\forall x A(x)}$$

Pela hipótese indutiva, obtemos o Σ' , logo :

$$\Pi^* \# \quad \frac{\Sigma'}{A(t)} \quad \frac{\Pi^2}{C} \\
 \vdots \\
 A(t)$$

Obs.: Os casos de $AP(\forall x A(x))$ e $AP(A(t))$ são, respectivamente, similares a (4.2) e (4.3).

5) Se Π é :

$$\Pi \# \quad \frac{\frac{\Sigma^1}{A} \quad [A] \quad [B]}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma^2}{C} \quad \frac{\Sigma^3}{C} \quad \text{então } \Pi' \# \quad \frac{\Sigma^1}{[A]} \quad \frac{\Sigma^2}{C}$$

5.1) Se Π^* é:

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são, respectivamente, ampliações de:

$$\frac{\Sigma 1}{A}, \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma 3}{C}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \# \frac{\Pi^*1 \quad \frac{\Pi^*3}{C}}{A \quad B \rightarrow C} \dots [A] \Pi^*2 \quad C$$

5.2) Se Π^* é:

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\Pi^*4}{D}}{A \vee B \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3} \quad C$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (5.1)

Pela definição de $AP(D \vee A \vee B)$, temos:

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\Pi^*4}{D} \quad A \quad \frac{\Pi^*4}{D} \quad B}{A \vee B} \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C}$$

Seja $\Pi^* :$

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \# \quad \Pi^*1 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ E \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi4 \\ \hline D \end{array} \\ \vdots \\ B \\ \hline A \vee B \\ \hline B \rightarrow (A \vee B) \end{array} \\
 \vdots \\ A \quad \begin{array}{c} \Pi4 \\ \hline D \end{array} \\
 \vdots \\ A \quad \begin{array}{c} \Pi3 \\ \hline B \rightarrow C \end{array} \\
 \vdots \\ [A] \\ \Pi2 \\ C \end{array}$$

5.3) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Pi1 \quad \Pi2 \quad \Pi3 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi4 \\ \hline D \end{array} \\
 \vdots \\
 C$$

onde $\Pi1$, $\Pi2$ e $\Pi3$ são, respectivamente, ampliações de :

$$\begin{array}{c} \Sigma1 \\ \hline A \\ \hline A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma2 \\ \hline C \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Sigma3 \\ \hline C \end{array}$$

Usando novamente a hipótese indutiva, seja :

$$\Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Sigma' \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi4 \\ \hline D \end{array} \\
 \vdots \\
 C$$

Os casos de $AP(A \vee B)$ ou $AP(C)$ são similares a (5.2) e (5.3)

6) Se Π é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma 1}{B} \quad [A] \quad [B]}{A \vee B \quad C \quad C} \\ C$$

é similar ao (5)

7) Se Π é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma 1}{A} \quad \Sigma 2 \quad \Sigma 3}{A \vee B \quad C \quad C} \quad \text{então} \quad \Pi' \# \frac{\Sigma 2}{C} \\ C$$

7.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\Pi^* 1}{A \vee B \quad \Pi^* 2 \quad \Pi^* 3} \\ C$$

onde $\Pi^* 1$, $\Pi^* 2$ e $\Pi^* 3$ são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\Sigma 1}{A}, \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma 3}{C}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \# \frac{\frac{\Pi 1}{D} \quad \frac{\Pi^* 1}{\neg A} \quad \frac{\Pi^* 3}{B \rightarrow C}}{\frac{(D) \quad \Pi 2}{C}} \quad \text{onde} \quad \Pi^* 2 \# \frac{\frac{\Pi 1}{(D)} \quad \Pi 2}{C}$$

7.2) Se Π^* é :

$$\Pi^* \#$$

$$\frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\Pi^*4}{E}}{A \vee B \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3} C$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (7.1)

Usando a definição de $AP(E A \vee B)$, temos :

$$\Pi^* \#$$

$$\frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\frac{\Pi^*4}{E} \quad B}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\Pi^*4}{E}}{A \vee B}}{A \vee B} \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^*$$

$$\frac{\frac{\Pi^*1}{A} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi^*4}{E} \quad B}{A \vee B} \quad B \rightarrow (A \vee B)}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\Pi^*4}{E} \quad A}{A \vee B} \quad \frac{\Pi^*3}{B \rightarrow C} \quad \frac{\Pi^*1}{D} \quad \frac{\Pi^*1}{C(D) \quad \Pi^*2} C}{C(D) \quad \Pi^*2} C$$

onde $\Pi^*2 \#$

$$\frac{\Pi^*1}{C(D) \quad \Pi^*2} C$$

7.3) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C} \quad \frac{\Pi^*4}{D}}{C}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A}}{A \vee B}, \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad e \quad \frac{\Sigma 3}{C}$$

Usando, novamente, a hipótese indutiva :

$$\Pi'^* \# \frac{\frac{\Sigma' \quad \frac{\Pi^*4}{D}}{C}}{C}$$

Obs.: Os casos de $AP(A \vee B)$ e $AP(C)$ são similares a (7.2) e (7.3), respectivamente.

8) Se Π é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{B} \quad [A]}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C}}{C} \quad \text{é similar ao (7)}$$

9) Se Π é :

então Π' é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{A(t)} \quad [A(a)]}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B}}{B} \quad \Pi' \# \frac{\frac{\Sigma 1(t)}{[A(t)]} \quad \frac{\Sigma 2(t)}{B}}{B}$$

9.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1}{\exists x A(x)} \quad \Pi^*2}{B}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de:

$$\frac{\Sigma 1}{A(t)} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma 2}{B}$$

Seja Π'^* :

$$\begin{array}{c} \Pi^*1 \\ A(t) \\ \vdots \\ [A(t)] \\ \Pi^*2(t) \\ B \end{array}$$

$\Pi'^* \neq$

9.2) Se Π^* é :

$$\begin{array}{c} \frac{\Pi^*1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Pi 3}{C} \\ \vdots \\ \frac{\exists x A(x) \quad \Pi^*2}{B} \end{array}$$

$\Pi^* \neq$

onde Π^*1 e Π^*2 são como em (9.1)

Usando a definição de APCC $\exists x A(x)$, temos :

$$\begin{array}{c} \Pi 3 \\ C \\ A(a) \\ \vdots \\ A(a) \\ \frac{\Pi^*1}{\exists x A(x)} \quad \frac{A(a)}{\exists x A(x)} \\ \frac{\exists x A(x) \quad \Pi^*2}{B} \end{array}$$

$\Pi^* \neq$

onde $a \in \frac{\Pi 3}{C}$

Seja Π'^* igual a:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 A(t) \\
 \vdots \\
 A(t) \quad \frac{\Pi^*3}{C} \\
 \vdots \\
 A(t) \\
 \vdots \\
 [A(t)] \\
 \Pi^*2(t) \\
 B
 \end{array}$$

$\Pi^* \neq$

9.3) Se Π^* é :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \quad \frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2}{B} \quad \frac{\Pi^*3}{C} \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma^1}{A(t)}}{\exists x A(x)} \quad e \quad \frac{\Sigma^2}{B}$$

Usando de novo a hipótese indutiva, obtemos :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \quad \frac{\Sigma' \quad \frac{\Pi^*3}{C}}{B} \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

Obs.: Os casos de $AP(\exists x A(x))$ e $AP(B)$ são similares a (9.2) e (9.3).

10) Se Π é :

$$\begin{array}{c} \Sigma 1 \\ \hline \Pi \neq \frac{A(t)}{\exists x A(x)} \\ \hline B \end{array} \quad \text{então } \Pi' : \quad \frac{\Sigma 2}{B} \quad \Pi' \neq$$

10.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^* 1}{\exists x A(x)} \quad \Pi^* 2}{B}$$

onde $\Pi^* 1$ e $\Pi^* 2$ são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\Sigma 1}{A(t)} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma 2}{B}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \neq \frac{\frac{\Pi 1}{D} \quad \frac{\Pi^* 1}{A(t)} \quad \dots \quad A(t)}{(D) \quad \frac{\Pi 2}{B}} \quad \text{onde } \Pi^* 2 \neq \frac{\frac{\Pi 1}{(D)} \quad \Pi 2}{B}$$

10.2) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^* 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Pi 3}{C} \quad \dots \quad \exists x A(x) \quad \Pi^* 2}{B}$$

onde $\Pi^* 1$ e $\Pi^* 2$ são como em (10.1)

Usando a definição de $AP(C \exists x A(x))$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \text{ПЗ} \\
 \hline
 C \\
 \\
 A(a) \quad \vdots \\
 \\
 \text{ПЗ} \\
 a \in \quad \hline C \\
 \\
 \text{П*1} \quad \text{П*2} \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad \exists x A(x) \\
 \hline
 \exists x A(x) \quad \text{П*2} \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

Seja $\Pi' \times$:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* 1 \\
 A(t) \\
 \vdots \\
 A(t) \quad \frac{\Pi 3}{C} \\
 \vdots \\
 A(t) \\
 \vdots \\
 A(t) \\
 \frac{\Pi 1}{D} \quad \vdots \\
 C(D) \quad \text{unde } \Pi^* 2 \neq \\
 \frac{\Pi 2}{B} \quad \frac{\Pi 1}{C(D)} \\
 B \quad B
 \end{array}$$

10.3) Se $\Pi^* \in$:

	П*1	П*2	П3
П* 2	В		С
		В	

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A(t)}}{E \times A(x)} \quad e \quad \frac{\Sigma 2}{B} \quad \text{é similar ao (9.3)}$$

Obs.: Os casos de $AP(\exists x A(x))$ e $AP(B)$ são similares a (10.2) e (10.3).

11) Se Π é :

	$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	
$\Pi \#$	$A \vee B$	C	C	
		C	$\Sigma 4$	
				D

então Π' é :

		$\Sigma 2$		$\Sigma 3$	
$\Pi' \#$	$\Sigma 1$	C	$\Sigma 4$	C	$\Sigma 4$
	$A \vee B$		D		D
					D

onde C é premissa maior de regra de eliminação.

11.1) Se Π^* é :

	$\Pi^* 1$	$\Pi^* 2$	$\Pi^* 3$	
$\Pi^* \#$		C		$\Pi^* 4$
				D

onde $\Pi^* 1$, $\Pi^* 2$, $\Pi^* 3$ e $\Pi^* 4$ são, respectivamente, ampliações de :

$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	$\Sigma 4$
$A \vee B$	C	C	

Seja Π'^* :

		$\Pi^* 2$	$\Pi^* 4$	$\Pi^* 3$	$\Pi^* 4$
$\Pi'^* \#$	$\Pi^* 1$	D		D	
					D

11.2) Se C é $A \vee B$, D é A e $\Sigma 4$ é vazio, então :

Π^* é igual a :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^* \quad \# \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3 \\ \hline A \wedge B \quad \Pi^5 \\ \hline A \quad E \\ \vdots \\ A \quad B \\ \hline A \wedge B \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (11.1)

Seja Π'^* :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi'^* \quad \# \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^*2 \quad \Pi^*3 \\ \hline \Pi^*1 \quad A \quad A \quad \Pi^5 \\ \hline A \quad E \\ \vdots \\ A \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Obs.: Se C é $A \wedge B$, D é B e Σ_4 é vazio, é análogo ao (11.2). Se usarmos o $AP(A \wedge B)$, também será análogo ao (11.2).

11.3) Se C é $A \rightarrow B$, D é B e Σ_4 está à esquerda, então Π^* é :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^* \quad \# \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3 \quad \Pi^5 \\ \hline A \rightarrow B \quad E \\ \vdots \\ \Pi^*4 \quad A \rightarrow B \\ \hline B \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

onde Π^*1 , Π^*2 , Π^*3 e Π^*4 são como em (11.1).

Usando a definição de $AP(E A \rightarrow B)$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\pi^*1 \quad \pi^*2 \quad \pi^*3}{A \quad 1 \quad A \rightarrow B}}{B}}{B} \\
 \vdots \\
 B \\
 \frac{\pi^*4 \quad A \rightarrow B}{B}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\pi^*5}{E} \\
 \\
 \\
 \\
 1 \\
 \frac{A \rightarrow B}{A}
 \end{array}$$

π^* se reduz a :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\pi^*4 \quad \frac{\pi^*1 \quad \pi^*2 \quad \pi^*3}{A \quad A \rightarrow B}}{B}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\pi^*5}{E} \\
 \\
 \vdots \\
 B \\
 \frac{\pi^*4 \quad A}{A} \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

Podemos então considerar o π'^* como :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\pi^*1 \quad \frac{\pi^*4 \quad \pi^*2}{B}}{B} \quad \frac{\pi^*4 \quad \pi^*3}{B}}{B}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\pi^*5}{E} \\
 \\
 \\
 \pi^*4 \\
 A \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}$$

Obs.: O caso de $AP(A \rightarrow B)$ é similar.

11.4) Se C é $M \vee N$

Usando a definição de $AP(C \vee N)$, temos:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Pi^*2 \quad \Pi^*3 \\ \hline \Pi^*1 \quad M \vee N \quad M \vee N \\ \hline M \vee N \end{array} \quad \begin{array}{c} M \\ \vdots \\ M \\ \hline M \vee N \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*5 \quad \Pi^*5 \\ \hline E \quad N \quad E \\ \vdots \\ M \quad N \\ \hline M \vee N \end{array} \\
 \hline
 M \vee N \quad \Pi^*4 \\
 \hline
 D
 \end{array}$$

onde Π^*1 , Π^*2 , Π^*3 e Π^*4 são como em (11.1).

Π' é:

$$\begin{array}{c}
 \Pi' \# \quad \begin{array}{c} \Sigma 1 \quad \Sigma 2 \quad \Sigma 3 \quad \Sigma 4 \\ \hline A \vee B \quad M \vee N \quad M \vee N \quad D \end{array} \\
 \hline
 D
 \end{array}$$

Π^* se reduz a:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \# \quad \begin{array}{c} \Pi^*5 \quad \Pi^*5 \\ \hline M \quad E \quad N \quad E \\ \vdots \\ \Pi^*2 \quad M \quad N \\ \hline M \vee N \quad M \vee N \quad M \vee N \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*5 \quad \Pi^*5 \\ \hline M \quad E \quad N \quad E \\ \vdots \\ \Pi^*3 \quad M \quad N \\ \hline M \vee N \quad M \vee N \quad M \vee N \end{array} \\
 \hline
 \Pi^*1 \quad M \vee N \quad \Pi^*4 \\
 \hline
 M \vee N \quad \Pi^*4 \\
 \hline
 D
 \end{array}$$

Sejam:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^{**}2 \# \quad \begin{array}{c} \Pi^*5 \quad \Pi^*5 \\ \hline M \quad E \quad N \quad E \\ \vdots \\ \Pi^*2 \quad M \quad N \\ \hline M \vee N \quad M \vee N \quad M \vee N \end{array} \quad \text{e} \quad \Pi^{**}3 \# \quad \begin{array}{c} \Pi^*5 \quad \Pi^*5 \\ \hline M \quad E \quad N \quad E \\ \vdots \\ \Pi^*3 \quad M \quad N \\ \hline M \vee N \quad M \vee N \quad M \vee N \end{array} \\
 \hline
 M \vee N \quad M \vee N
 \end{array}$$

Note que Π^{**2} e Π^{**3} são, respectivamente, ampliações de Π^{*2} e Π^{*3} . Podemos então considerar o Π'^* como:

$$\Pi'^* \# \frac{\Pi^{*1} \quad \frac{\Pi^{**2} \quad \Pi^{*4}}{D} \quad \frac{\Pi^{**3} \quad \Pi^{*4}}{D}}{D}$$

Obs.: O caso de $AP(M \vee N)$ é similar.

11.5) Se C é $\forall x A(x)$, D é $C(t)$ e Σ_4 é vazio, então, usando a definição de $AP(E \forall x A(x))$, temos:

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^{*1} \quad \Pi^{*2} \quad \Pi^{*3}}{\frac{\forall x A(x)}{C(a)} \quad \frac{\Pi^5}{E}} \quad \vdots \quad C(a)}{\frac{\forall x A(x)}{C(t)}}$$

onde: 1) $a \in \Pi^{*1}, \Pi^{*2}, \Pi^{*3}$ ou Π^5
E

2) Π^{*1}, Π^{*2} e Π^{*3} são como em (11.1)

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \# \frac{\Pi^{*1} \quad \frac{\neg \Pi^{*2}}{C(t)} \quad \frac{\Pi^{*3}}{C(t)}}{C(t)} \quad \frac{\Pi^5}{E} \quad \vdots \quad C(t)$$

Obs.: O caso de $AP(\forall x A(x))$ é similar.

11.6) Se C é $\exists x C(x)$.

Usando a definição de $AP(E \exists x C(x))$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \quad \begin{array}{c} \Pi^* 1 \quad \frac{\Pi^* 2 \quad \exists x C(x) \quad \Pi^* 3 \quad \exists x C(x)}{\exists x C(x)} \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)} \\ \hline \exists x C(x) \quad \exists x C(x) \\ \hline \exists x C(x) \quad \Pi^* 4 \\ \hline D \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a \in \frac{\Pi^* 5}{E}
 \end{array}$$

Π^* se reduz a:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* 1 \quad \frac{\Pi^* 2 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)} \quad \Pi^* 3 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)}}{\frac{\exists x C(x) \quad \exists x C(x)}{\exists x C(x)} \quad \Pi^* 4} \\
 \hline
 D
 \end{array}$$

Sejam :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^{**} 2 \neq \quad \frac{\Pi^* 2 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)} \quad \Pi^* 3 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)}}{\frac{\exists x C(x) \quad \exists x C(x)}{\exists x C(x)}} \quad \text{e } \Pi^{**} 3 \neq \quad \frac{\Pi^* 3 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)} \quad \Pi^* 4 \quad \frac{\Pi^* 5 \quad C(a) \quad E}{C(a)}}{\frac{\exists x C(x) \quad \exists x C(x)}{\exists x C(x)}}
 \end{array}$$

Note que $\Pi^{**} 2$ e $\Pi^{**} 3$ são, respectivamente, ampliações de $\Pi^* 2$ e $\Pi^* 3$. Podemos, então, considerar o Π'^* como :

$$\begin{array}{c}
 \Pi'^* \neq \quad \frac{\Pi^* 1 \quad \frac{\Pi^{**} 2 \quad \Pi^* 4 \quad \Pi^{**} 3 \quad \Pi^* 4}{D} \quad D}{D}
 \end{array}$$

11.7) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*4}{D} \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{D}$$

onde Π^*1 e Π^*4 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C}}{C} \quad e \quad \Sigma 4$$

Usando a hipótese indutiva, obtemos :

$$\Pi'^* \# \frac{\frac{\Sigma' \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{D}}{D}$$

Obs.: O caso de $AP(D)$ é similar.

12) Se Π é :

então Π' é :

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B}}{B \quad \Sigma 3} \quad C$$

$$\Pi' \# \frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\frac{\Sigma 2}{B} \quad \Sigma 3}{C}}{C}$$

12.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \# \frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2}{B} \quad \Pi^*3}{C}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B} \quad e \quad \Sigma 3$$

Sejam:

1.

$$\begin{array}{c}
 \Pi' * \neq \\
 \frac{\frac{\frac{\Pi * 2}{C} \quad \Pi * 3}{C}}{\Pi * 1} \\
 C
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{c}
 \Pi' * \neq \\
 \frac{\frac{\Pi * 2}{C} \quad \Pi * 1}{C} \\
 C
 \end{array}$$

12.2) Se B é $A \wedge E$, C é A e $\Sigma 3$ é vazio. Usando a definição de $APCE A \wedge B$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \Pi * \neq \\
 \frac{\frac{\frac{\Pi * 1}{A \wedge E} \quad \Pi * 2}{A} \quad \Pi 4}{E} \\
 A
 \end{array}$$

onde $\Pi * 1$ e $\Pi * 2$ são como em (12.1).

Seja $\Pi' * :$

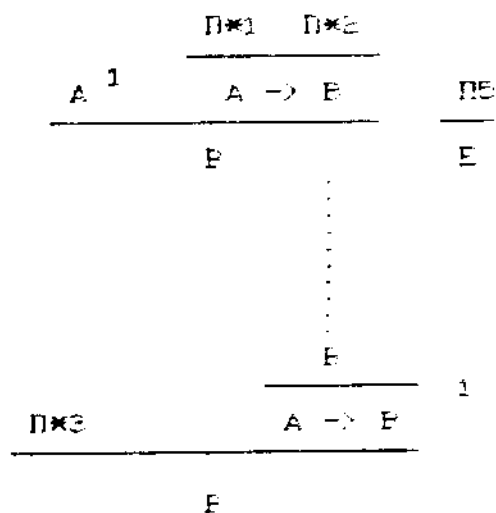
$$\begin{array}{c}
 \Pi' * \neq \\
 \frac{\frac{\frac{\Pi * 2}{A} \quad \Pi * 1}{A} \quad \Pi 4}{E} \\
 A
 \end{array}$$

12.3) Se B é $A \wedge B$ e C é B , é similar ao (12.2).

Obs.: Os casos de $AP(A)$ e $AP(B)$ são similares a (12.2) e (12.3).

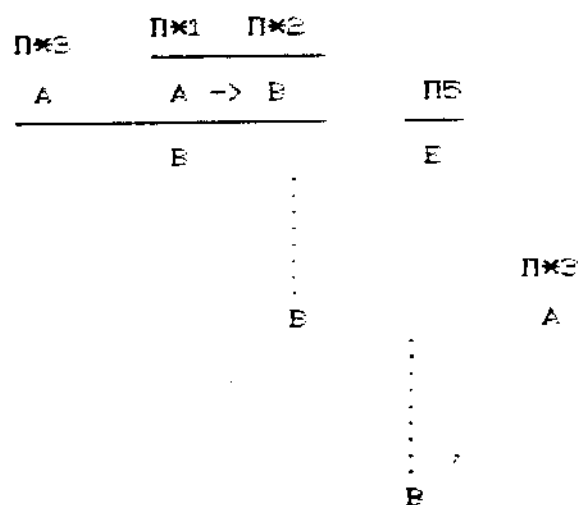
12.4) Se B é $A \rightarrow B$, C é B e $\Sigma 3$ está à esquerda, então, usando a definição de $APCE A \rightarrow B$, temos :

Π^* $\neq$

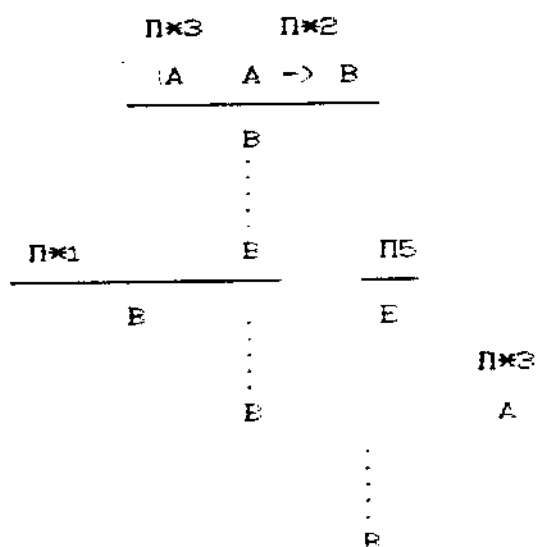


onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (12.1)

Π^* se reduz a :



Então, podemos considerar o Π^* como :



Obs.: O caso de $AP(A \rightarrow B)$ é similar.

12.5) Se B é $\forall x B(x)$, C é $B(t)$ e Σ é vazio, usando a definição de $AP(E \forall x B(x))$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\pi^*1 \quad \pi^*2}{\forall x B(x)} \quad \frac{\pi^5}{E} \\
 \hline
 \pi^* \neq \quad B(a) \quad \vdots \quad E \\
 \quad \quad B(a) \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad \forall x B(x) \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad B(t)
 \end{array}$$

onde : 1) π^*1 e π^*2 são como em (12.1)

2) $a \notin \pi^*1, \pi^*2$ ou $\frac{\pi^5}{E}$

Seja π'^* :

$$\begin{array}{c}
 \pi'^* \neq \quad \frac{\pi^*2}{\forall x B(x)} \quad \vdots \quad \frac{\pi^5}{E} \\
 \quad \quad B(t) \\
 \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \frac{\pi^*1 \quad B(t)}{B(t)} \quad \frac{\pi^5}{E} \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad B(t)
 \end{array}$$

$AP(E \forall x B(x))$ é similar

12.6) Se E e $M \vee N$. Usando a definição de $AP(E, M \vee N)$, temos

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^* \quad \vdots \end{array} \\
 \begin{array}{c} \Pi^* 1 \quad \Pi^* 2 \\ \exists x A(x) \quad M \vee N \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} M \vee N \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} M \vee N \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} M \vee N \end{array} \quad \Pi^* 3
 \end{array}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (12.10).

$$\begin{array}{ccccc} & & & \Sigma \Sigma & \\ & & & \hline \Pi' & \vdash & \Sigma & M \vee N & \Sigma \Sigma \\ & & \hline & & \exists x A(x) & C & \end{array}$$

It se reduce a :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{D} \\
 \vdots \\
 \text{D}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{П5} \\
 \hline
 \text{E}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{N} \\
 \vdots \\
 \text{N}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{П5} \\
 \hline
 \text{E}
 \end{array} \\
 \text{M} \qquad \qquad \qquad \text{M} \qquad \qquad \qquad \text{N} \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \text{П*2} \qquad \qquad \text{П} \qquad \qquad \text{П} \\
 \hline
 \text{M} \vee \text{N} \qquad \text{M} \vee \text{N} \qquad \text{M} \vee \text{N} \\
 \hline
 \text{П*1} \qquad \qquad \qquad \text{M} \quad \text{N} \\
 \hline
 \text{ЭхАСх} \\
 \hline
 \text{M} \vee \text{N} \qquad \qquad \qquad \text{П*3}
 \end{array}$$

onde : D
: D
: D

significa que foi feita a ampliação na boa-fórmula 1

da arvore :

$$\begin{array}{c}
 \frac{M \quad \frac{\pi E}{E}}{\vdots} \\
 \hline
 M \vee E
 \end{array}$$

Seja $\pi^{**}E$:

$$\begin{array}{c}
 \pi^{**}E \quad \frac{\pi^{**}E}{M \vee N} \\
 \frac{\pi^{**}E \quad \frac{\frac{\frac{E}{\vdots} \quad \frac{\pi E}{E}}{M} \quad \frac{\frac{E}{\vdots} \quad \frac{\pi E}{E}}{N}}{M \vee N}}{M \vee N}
 \end{array}$$

Note que $\pi^{**}2$ é uma ampliação de π^*2 . Então, π'^* :

$$\begin{array}{c}
 \pi'^* \quad \frac{\pi^*1 \quad \frac{\pi^{**}2 \quad \pi^*3}{C}}{\exists x A(x) \quad C} \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

Obs.: O caso de $AP(M \vee N)$ é similar.

12.7) Se B é $\exists x B(x)$. Usando a definição de $AP(E \exists x B(x))$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \pi^* \quad \frac{\frac{\pi^*1 \quad \pi^*2}{\exists x A(x) \quad \exists x B(x)} \quad \frac{\frac{B(a) \quad \frac{\frac{\pi^*3}{a \in E} \quad \frac{\pi^*5}{E}}{B(a)}}{\exists x B(x)}}{\exists x B(x)} \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

onde π^*1 , π^*2 e π^*3 são como em (12.1).

На се редовно

Diagram illustrating a three-stage control system for a ship's heading. The system consists of three stages, each with a feedback loop and a feedforward path. The stages are labeled with their respective control and feedforward paths: Π^*1 , Π^*2 , Π^*3 for the control paths and V^*1 , V^*2 , V^*3 for the feedforward paths. The output of the system is labeled C .

Seja $\mathbb{N}^{**}\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 D \\
 \vdots \\
 D \\
 \hline
 E
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 B(a) \\
 \vdots \\
 B(a) \\
 \hline
 \exists x B(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 B(a) \\
 \hline
 \exists x B(x)
 \end{array}$$

$$\frac{\exists x B(x) \quad \exists x B(x)}{\exists x B(x)}$$

onde D
 $\vdots$
 D é análogo ao (12.6)

Note que Π^{**2} é uma ampliação de Π^*2 .

Seja P^* :

$$\begin{array}{r} \text{D} \\ \vdots \\ \text{D} \\ \hline \text{D} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{D} \\ \vdots \\ \text{D} \\ \hline \text{D} \end{array}$$

Obs.: O caso de APCExBC(x) é similar.

12.8. Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{C} \quad \frac{\Pi^*2}{E}}{C}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{F}}{E} \quad e \quad \frac{\Sigma 3}{\exists x A(x)} \quad e \quad \frac{\Sigma 4}{F} \quad \frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2}{C}$$

Novamente, usando a hipótese indutiva em Σ , obtemos :

$$\Pi'^* \neq \frac{\frac{\Sigma'}{C} \quad \frac{\Pi 5}{E}}{C}$$

Obs.: O caso de AP(CC) é similar.

13) Se Π é : então Π' é :

$$\Pi \neq \frac{\frac{\Sigma 1}{\perp}}{A \wedge B} \quad \Pi' \neq \frac{\frac{\Sigma 1}{\perp} \quad \frac{\Sigma 1}{\perp}}{A \wedge B}$$

13.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\Pi^*1}{A \wedge B} \quad \text{onde } \Pi^*1 \text{ é uma ampliação de } \frac{\Sigma 1}{\perp}$$

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{A} \quad \frac{\Pi^*1}{B}}{A \wedge B}$$

13.2) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{A \wedge E}}{\vdots} \quad \frac{\Pi^*2}{E}$$

onde Π^*1 é como em (13.1)

Pela hipótese indutiva temos que $\Sigma \neq \frac{\Pi^*1}{A \wedge E}$ se reduz a Σ'

Seja Π'^* :

$$\Pi'^* \neq \frac{\frac{\Sigma'}{A \wedge E}}{\vdots} \quad \frac{\Pi^*2}{E}$$

Obs.: O caso de $AP(A \wedge B)$ é similar.

14) Se Π é :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{I}}{A \vee E} \quad , \quad \frac{\frac{\Sigma 1}{I}}{\exists x A(x)} \quad , \quad \frac{\frac{\Sigma 1}{I}}{A \rightarrow E} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\Sigma 1}{I}}{\forall x A(x)}$$

é similar ao (13).

15) Se Π é :

então Π' é:

$$\Pi \neq \frac{\frac{\frac{[\neg A]^k}{\Sigma 1}}{I} \quad k}{\frac{A}{\Sigma 2}} \quad \Sigma 2$$

$$\Pi' \neq \frac{\frac{\frac{A \quad \Sigma 2}{B \quad \neg P^1}}{I}}{[\neg A]^k} \quad \Sigma 1^c$$

15.1. Se Π^* é

$$\Pi^* = \frac{\frac{\Pi^*1}{1} + \Pi^*2}{E}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de $\frac{\Sigma 1}{1}$ e $\Sigma 2$.

Π^* se reduz a $\Sigma 4$:

$$\Sigma 4 = \frac{\frac{A + \Pi^*2}{E} - E}{1} = \frac{1 - A + \Pi^*1}{E}$$

Temos de considerar se a ampliação Π^*1 substitui partes de $\frac{\Sigma 1}{1}$

da forma $\frac{\Sigma 3}{A + A}$ por $\Sigma 5$:

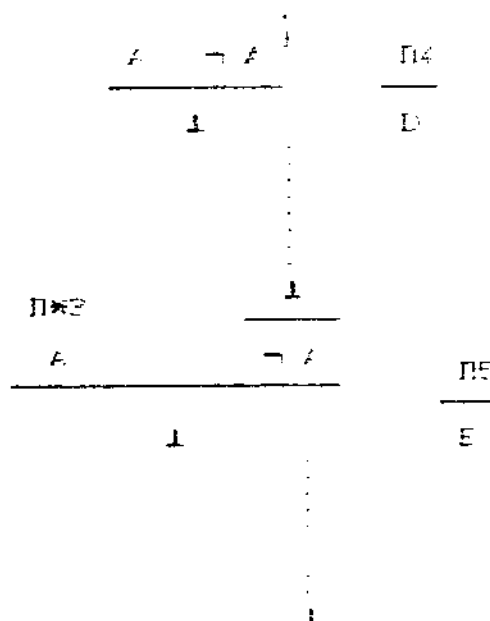
$$\Sigma 5 = \frac{\Pi^*3}{A} \quad \frac{\Pi^*4}{D} \quad \frac{\Pi^5}{E}$$

$\neg A$
 $\vdots$
 $\neg A$

onde Π^*3 é uma ampliação de $\frac{\Sigma 3}{A}$

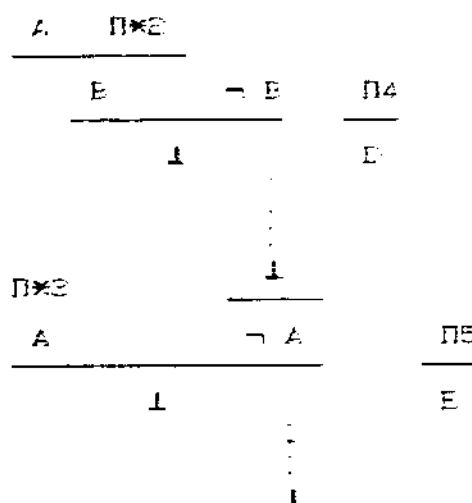
Usando a definição de $APCD \neg A$, temos

$\Sigma 5 \neq$

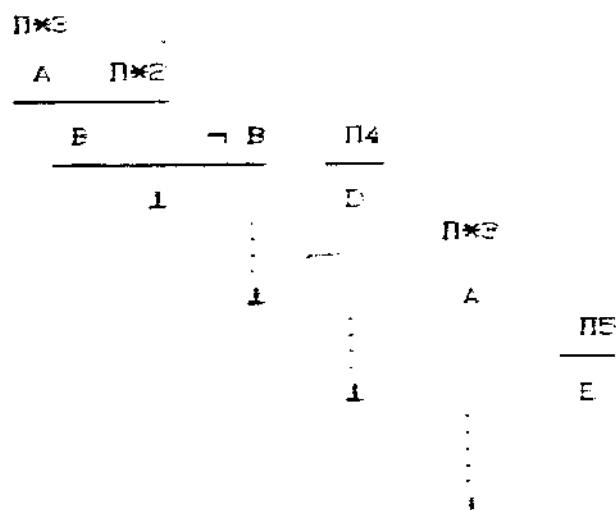


Neste caso, $\Pi * 1^c$ será obtido de $\Pi * 1$, substituindo $\Sigma 5$ por $\Sigma 6$

$\Sigma 6 \neq$



Mas, $\Sigma 6$ se reduz a $\Sigma 6'$:



Veja que $\Sigma 6$ é uma ampliação de :

$$\frac{\frac{\Sigma 6}{\frac{A \quad \Sigma 5}{\frac{E \quad \neg E}{1}}}}{1}$$

Obs.: Os casos de $AP(\neg A)$ e $AP(\perp)$, são similares.

Podemos então considerar o Π^* como :

$$\Pi^* = \frac{\frac{A \quad \Pi^* 2}{\frac{E \quad \neg E}{1}}}{1 \Rightarrow A} \quad \Pi^* 1 \quad \frac{1}{E}$$

onde $\Pi^* 1$ é a redução de $\Pi^* 0$ obtida reduzindo sub-árvores da forma $\Sigma 6$ para $\Sigma 6'$, como feito acima.

É fácil ver, usando o lema 2 (capítulo I), que $\Sigma 4 \Rightarrow \Pi^*$. Logo $\Pi^* \Rightarrow \Pi^*$ e Π^* é uma ampliação de Π^* .

15.2) Se A é $M \wedge N$, B é M e $\Sigma 2$ é vazio, então :

$$\Pi^* = \frac{\frac{\Pi^* 1}{M \wedge N} \quad \frac{\Pi 3}{D}}{\vdots} \quad \frac{M \wedge N}{M}$$

Usando a definição de $AP(D \ M \wedge N)$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*1}{\frac{M \wedge N}{M}} \quad \frac{\Pi^2}{D} \\
 \vdots \\
 M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*1}{\frac{M \wedge N}{N}} \quad \frac{\Pi^2}{D} \\
 \vdots \\
 N
 \end{array} \\
 \hline
 M \wedge N
 \end{array}$$

Então $\Pi^* \neq$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{M \wedge N}{M} \quad \neg M \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \vdash (M \wedge N)
 \end{array}$$

$\Pi^* \neq$:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \text{ e } \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\perp}{M} \quad \vdots \\
 \vdots \\
 M
 \end{array}
 \quad
 \frac{\Pi^2}{D}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*1}{\frac{M \wedge N}{N}} \quad \frac{\Pi^2}{D} \\
 \vdots \\
 N
 \end{array} \\
 \vdots \\
 M
 \end{array}$$

onde $\Pi^*1 \text{ e } \Pi^*2$ é como em (15.1):

15.3) Se A é $M \rightarrow N$, B é N e Σ_2 está à esquerda. Usando a definição de APCE $M \rightarrow N$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^* \neq \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*1}{\frac{M \quad M \rightarrow N}{N}} \quad \frac{\Pi^2}{E} \\
 \vdots \\
 N
 \end{array} \\
 \frac{\Pi^*2}{M} \quad \frac{N}{M \rightarrow N} \\
 \hline
 \vdash
 \end{array}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são como em (15.1)

Π^* se reduz a :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*2 \quad \frac{\Pi^*1}{M \quad M \rightarrow N} \quad \Pi^*3 \\
 \hline
 N \quad \quad \quad E \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 N \quad \quad \quad M \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad N
 \end{array}$$

Podemos considerar o Π'^* como :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*2 \\
 M \quad M \rightarrow N \\
 \hline
 N \quad \quad \neg N^2 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 (\neg CM \rightarrow ND) \\
 \Pi^*1^{o'} \\
 \frac{1}{N} \quad 1 \quad \frac{\Pi^*3}{E} \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 N \quad \quad \quad M \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad N
 \end{array}$$

$\Pi'^* = \pi$

onde $\Pi^*1^{o'}$ é como em (15.1).

Obs .: O caso de $APCM \rightarrow ND$ é similar.

15.4) Se A é $\forall x A(x)$, B é $\neg A(c)$ e $\Sigma 2$ é vazio. Usando a definição de $APCE \forall x A(x)$, temos :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*}{\frac{\forall x A(x)}{A(a)}} \\
 \hline
 \Pi^* \neq \frac{A(a)}{E}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 A(a) \\
 \hline
 \frac{\forall x A(x)}{A(t)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 a \text{ é } \Pi^* \text{ ou } \frac{\Pi^*}{E}
 \end{array}$$

onde Π^* é como em (15.1).

Seja $\Pi^* \neq$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x A(x)}{A(t) \quad \neg A(t)} \\
 \hline
 \frac{1}{\neg \forall x A(x)} \\
 \hline
 \Pi^* \neq \frac{1}{A(t)} \\
 \vdots \\
 A(t)
 \end{array}$$

onde $\Pi^* \neq$ é como em (15.1).

15.5) Se A é $M \vee N$ e Σ é $\frac{\Pi^*}{B} \quad \frac{\Pi^*}{E}$, então :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma}{\frac{1}{M \vee N}} \quad \frac{[M]}{B} \quad \frac{[N]}{E} \\
 \hline
 E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Pi^*}{M \vee N} \quad \frac{\Pi^*}{E} \\
 \hline
 \frac{1}{\neg (M \vee N)} \\
 \hline
 \frac{\Sigma}{E}
 \end{array}$$

Se Π^* é

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{M \vee N} \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{\frac{M \vee N \quad \Pi^*3 \quad \Pi^*4}{E}}$$

onde Π^*1 , Π^*3 e Π^*4 são, respectivamente, ampliações de:

$$\frac{\Sigma}{\perp} \quad \frac{\Pi^*3}{E} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi^*4}{E}$$

Usando a definição de APCE $M \vee N$, temos :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{M \vee N} \quad \frac{\frac{M \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{M} \quad \frac{N \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{N}}{M \vee N} \quad \Pi^*3 \quad \Pi^*4}{E}$$

Π^* se reduz a:

$$\Sigma^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{M \vee N} \quad \frac{\frac{M \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{M} \quad \frac{N \quad \frac{\Pi^*5}{E}}{N}}{M \vee N} \quad \Pi^*3 \quad \Pi^*4}{E}$$

Sejam Π^*6 e Π^*7 :

$$\begin{array}{c}
 \Pi 5 \\
 \hline
 M \quad E \\
 \vdots \\
 M \\
 \hline
 M \vee N \quad \Pi^*3 \quad \Pi^*4 \\
 \hline
 E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Pi 6 \\
 \hline
 N \quad E \\
 \vdots \\
 N \\
 \hline
 M \vee N \quad \Pi^*3 \quad \Pi^*4 \\
 \hline
 E
 \end{array}$$

Usando em $\Pi 5$ as reduções (5) ou (7), obtemos que $\Pi 5 \Rightarrow \Pi^{**}3$, onde $\Pi^{**}3$ é uma ampliação de Π^*3 . E usando em $\Pi 6$ as reduções (6) ou (8), vemos que $\Pi 6 \Rightarrow \Pi^{**}4$, onde $\Pi^{**}4$ é uma ampliação de Π^*4 . Portanto, $\Sigma 5$ se reduz a $\Sigma 6$.

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 \Sigma 6 \neq \frac{M \vee N \quad \Pi^{**}3 \quad \Pi^{**}4}{E}
 \end{array}$$

Podemos considerar o Π^*1 como :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \neq \frac{\frac{M \vee N \quad \Pi^{**}3 \quad \Pi^{**}4}{E} \quad \neg E^1}{\frac{1}{\neg (M \vee N)}} \\
 \frac{1}{\Pi^*1 \quad o'} \\
 \frac{1}{E}
 \end{array}$$

onde $\Pi^*1 \quad o'$ é como em (15.1).

Obs.: O caso de $AP(M \vee N)$ é similar.

15.6) Se A é $\exists x A(x)$. Usando a definição de $AP(\exists x A(x))$, temos:

Obs : O caso de $AP(\exists x)A(x)$ é similar.

15.7) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2}{B} \quad \Pi^*3}{E}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma_1}{\perp}}{A} \quad \epsilon \quad \Sigma_2$$

Usando a hipótese indutiva, obtemos :

$$\Pi'^* \neq \frac{\frac{\Sigma'_1 \quad \Pi^*3}{B} \quad E}{B}$$

16) Se Π é :

então Π' é :

$$\Pi \neq \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\perp}}{C} \quad \neg C}{\perp}$$

$$\Pi' \neq \frac{\Sigma_1}{\perp}$$

16.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\Pi^*1}{C} \quad \neg C}{\perp}$$

onde Π^*1 é uma ampliação de $\frac{\Sigma_1}{\perp}$

Então :

$$\Pi'^* \neq \frac{\Pi^*1}{\perp}$$

16.2) Se C é $\forall x A(x)$, $A \wedge E$ ou $A \rightarrow E$ e $\Pi^* \in$:

$$\begin{array}{c} \Pi^* \neq \\ \frac{\Pi^*1}{C} \quad \frac{\Pi^*3}{D} \\ \vdots \\ \frac{C \quad \neg C}{\perp} \end{array} \quad \text{onde } \Pi^*1 \text{ é como em (16.1)}$$

Usando a redução (22), temos :

$$\begin{array}{c} \Pi^* \neq \\ \frac{\Pi^*1}{C} \quad \frac{\Pi^*3}{D} \\ \vdots \\ \frac{C \quad \neg C}{\perp} \\ \vdots \\ \frac{\perp}{\neg C} \\ \vdots \\ \frac{\neg C}{\perp} \end{array}$$

Obs . : O caso de $AP(C)$ é similar, usando a redução (21).

16.3) Se C é $A \vee B$ e se Π^* é :

$$\begin{array}{c} \Pi^* \neq \\ \frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\Pi^*3}{D} \\ \vdots \\ \frac{A \vee B \quad \neg(A \vee B)}{\perp} \end{array}$$

Usando a redução (24), temos que :

$\Pi' \rightarrow \perp$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \Pi_2 \\
 \hline
 A \quad \vdots \quad E \\
 A \\
 \hline
 A \vee E \rightarrow \neg(A \vee E) \\
 \hline
 A \vee E \quad \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Pi_2 \\
 \hline
 E \quad \vdots \quad E \\
 E \\
 \hline
 A \vee E \rightarrow \neg(A \vee E) \\
 \hline
 \perp
 \end{array} \\
 \hline
 \Pi^* \\
 \perp \quad \vdots \quad \perp \\
 \hline
 \neg(A \vee E)
 \end{array}$$

Obs.: O caso de $AP(A \vee B)$ é similar, usando a redução (23).

16.4) Se C é $\exists x A(x)$ e análogo ao (16.3), usando as reduções (25) e (26)

16.5) Se Π^* é :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 C \quad C \rightarrow \perp \quad \Pi_2 \\
 \hline
 \perp \quad D \\
 \vdots \\
 \perp
 \end{array} \\
 \Pi^* \rightarrow \perp \\
 \Pi^*1 \\
 \begin{array}{c}
 C \quad \vdots \quad \neg C \\
 \hline
 \perp
 \end{array}
 \end{array}$$

onde Π^*1 é uma ampliação de $\Sigma 1$

$$\begin{array}{c}
 \perp \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

Π^* se reduz a $\Sigma 2$:

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 \hline
 C \quad \neg C \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Pi2 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 \Pi3 \quad \neg \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 1
 \end{array}$$

Para hipótese indutiva temos que :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 \hline
 \Pi4 \quad \neg \quad C \quad \neg C \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \text{se reduz a } \Pi4' \quad . \text{ Então, seja } \Pi'^* :$$

$$\begin{array}{c}
 \Pi4' \quad \Pi3 \\
 \hline
 1 \quad 1
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 \Pi'^* \quad \neg \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Pi^*1 \\
 \hline
 C
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 1
 \end{array}$$

16.6) Se Π^* é :

$$\begin{array}{c}
 \Pi^*1 \quad \Pi^*2' \quad \Pi3 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

⋮

$$\begin{array}{c}
 1
 \end{array}$$

onde Π^*1 e Π^*2 são, respectivamente, ampliações de:

$$\begin{array}{c}
 \Sigma \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad
 \neg C$$

Usando a hipótese indutiva, obtemos:

$$\Pi' \neq \perp \quad \frac{\frac{\Sigma'}{\perp} \quad \frac{\Pi_2}{\perp}}{\perp}$$

Obs.: O caso de AP(1) é similar.

17) Se Π é :

$$\Pi \neq \perp \quad \frac{\frac{\Sigma_1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma_2}{C} \quad \frac{\Sigma_3}{C}}{C \quad \neg C} \perp$$

Então Π' é :

$$\Pi' \neq \perp \quad \frac{\frac{\Sigma_1}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\Sigma_2}{C} \quad \neg C}{\perp} \quad \frac{\frac{\Sigma_3}{C} \quad \neg C}{\perp}}{\perp}$$

17.1) Se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \perp \quad \frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C} \quad \neg C}{\perp}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\Sigma_1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma_2}{C} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma_3}{C}$$

Usando a redução (27), temos que :

$$\Pi'^* \neq \perp \quad \frac{\Pi^*1 \quad \frac{\frac{\Pi^*2}{C} \quad \neg C}{\perp} \quad \frac{\frac{\Pi^*3}{C} \quad \neg C}{\perp}}{\perp}$$

17.2) Se C é $\forall x A(x)$, $A \wedge B$ ou $A \rightarrow E$, e se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\frac{\Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3}{C} \quad \frac{\Pi^4}{E}}{C \quad \neg C}}{\perp}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (17.1).

Usando a redução (28), obtemos :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\Pi^*2}{C} \quad \frac{\Pi^*3}{\neg C}}{\perp} \quad \frac{\frac{\Pi^*1}{\perp} \quad \frac{\Pi^*3}{\neg C}}{\perp}}{\perp} \quad \frac{\frac{\frac{\Pi^4}{E}}{C} \quad \frac{\Pi^*3}{\neg C}}{\perp}}{\neg C} \quad \frac{\frac{\frac{\Pi^4}{E}}{C} \quad \frac{\Pi^*3}{\neg C}}{\perp}}$$

Obs.: O caso de $AP(C)$ é similar, usando a redução (29).

17.3) Se C é $M \vee N$, e se Π^* é :

$$\Pi^* \neq \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi^*1}{A \vee B} \quad \frac{\Pi^*2}{M \vee N} \quad \frac{\Pi^*3}{M \vee N}}{M \vee N} \quad \frac{\Pi^3}{E}}{M \vee N \quad \neg (M \vee N)}{\perp}$$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (17.1).

É similar ao (17.2), usando a redução (30).

Obs.: O caso de $AP(M \vee N)$ é similar, usando a redução (31).

17.4) Se C é $\exists x M(x)$ e Π^* é :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^*1 \quad \Pi^*2 \quad \Pi^*3 \\ \hline A \vee B \quad \exists x M(x) \quad \exists x M(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*4 \\ \hline E \end{array} \\
 \hline
 \exists x M(x) \\
 \vdots \\
 \frac{\exists x M(x) \quad \neg(\exists x M(x))}{\perp}
 \end{array}$$

$\perp$

onde Π^*1 , Π^*2 e Π^*3 são como em (17.1).

E análogo ao (17.2) , usando a redução (32).

Obs.: O caso de $AP(\exists x M(x))$ é similar, usando a redução (33).

17.5) Se Π^* é:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} C \quad \neg C \\ \hline \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*2 \\ \hline E \end{array} \\
 \vdots \\
 \begin{array}{c} \Pi^*1 \\ \hline C \quad \neg C \\ \hline \perp \end{array}
 \end{array}$$

onde Π^*1 é uma ampliação de

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Sigma^1 \quad \Sigma^2 \quad \Sigma^3}{\hline} \\
 \frac{A \vee B \quad C \quad C}{\hline} \\
 C
 \end{array}$$

Π^* se reduz a:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \Pi^*1 \\ \hline C \quad \neg C \\ \hline \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*3 \\ \hline E \end{array} \\
 \vdots \\
 \begin{array}{c} \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi^*1 \\ \hline C \end{array} \\
 \vdots \\
 \perp
 \end{array}$$

Usando a hipótese indutiva em $\Pi 5$:

$$\Pi 5 \neq \frac{\Pi * 1}{C \quad \neg C} \quad \text{obtemos o } \Pi' * :$$

$$\perp$$

$$\Pi' * \neq \frac{\Pi 5' \quad \frac{\Pi 3}{E}}{\perp} \quad \Pi * 1$$

$$C$$

$$\perp$$

17.6) Se $\Pi *$ é :

$$\Pi * \neq \frac{\frac{\Pi * 1 \quad \Pi * 2}{\perp} \quad \frac{\Pi 3}{E}}{\perp}$$

onde $\Pi * 1$ e $\Pi * 2$ são, respectivamente, ampliações de :

$$\frac{\frac{\Sigma 1}{A \vee B} \quad \frac{\Sigma 2}{C} \quad \frac{\Sigma 3}{C}}{C} \quad e \quad \neg C$$

Usando a hipótese indutiva em $\Pi 4$:

$$\Pi 4 \neq \frac{\Pi * 1 \quad \Pi * 2}{\perp} \quad \text{obtemos :}$$

$$\Pi' * \neq \frac{\Pi 4' \quad \frac{\Pi 3}{E}}{\perp}$$

$$\perp$$

18) Se Π é :

$$\Pi \neq \frac{\frac{\Sigma 1}{\exists x A(x)} \quad \frac{\Sigma 2}{B}}{\frac{E \quad \neg B}{1}}$$

é similar ao (17), usando as reduções de (34) a (40).

VII) TEOREMA DA NORMALIZAÇÃO FORTE -

O Sistema C é normalizável fortemente.

Prova: Usando o teorema do mapeamento, qualquer sequência de reduções em C pode ser mapeada em uma sequência de reduções em C(AP). O resultado segue diretamente do teorema da normalização forte para C(AP).

NORMALIZAÇÃO FORTE - VALIDADE FORTE

I) Introdução:

O objetivo deste capítulo é obter a Normalização forte para a lógica clássica de primeira ordem, sem reduções permutativas e com todos os conectivos lógicos - Sistema $\underline{C}$. Usando uma propriedade: Validade forte. Isto é:

- i) Definimos uma propriedade - Validade forte (VF), aplicável às derivações do Sistema $\underline{C}$,
- ii) Provamos que toda derivação válida fortemente (VF) é normalizável fortemente;
- iii) Por fim, mostramos que todas as derivações em $\underline{C}$ são válidas fortemente (VF).

Uma propriedade deste tipo, chamada convertibilidade, foi originalmente desenvolvida por Tait [16]. Martin-Lof [7], chamou tal propriedade de computabilidade e Jervell [5] de regularidade.

O conceito de Validade forte que definimos, é uma ampliação do conceito de Validade forte definido em Prawitz [12].

II) Derivação Normal

Usaremos para definir o conceito de forma normal, as reduções operacionais do capítulo I (reduções de (1) a (5)) e a redução para o absurdo clássico, definida por Statman [15]:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 [\neg A]^k \\
 \hline
 \Sigma 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 A \quad \Sigma 2 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 & \Rightarrow &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 A \quad \Sigma 2 \\
 \hline
 B \quad \neg B^1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 [\neg A] \\
 \hline
 \Sigma 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 B \quad 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

onde A é a premissa maior de uma regra de eliminação.

Fórmula Máxima -

Definição : Uma ocorrência de fórmula A em uma derivação Π é denominada fórmula máxima, se e somente se :

- a) A é , ao mesmo tempo, consequência de uma regra de introdução e premissa maior de uma regra de eliminação;
- b) A é, ao mesmo tempo, consequência de uma aplicação do absurdo clássico (ou absurdo intuicionista) e premissa maior de uma regra de eliminação.

Forma Normal -

Definição: Uma derivação Π em C é denominada normal se e somente Π não contém ocorrências de fórmulas máximas.

III) Validade Forte (VF)

Definição : Uma derivação Π em C é fortemente válida (VF) se e somente se :

- 1) $r(\Pi)$ é $\wedge$ -I , $\vee$ -I , $\exists$ -I ou uma aplicação das regras do absurdo e as derivações das premissas de $r(\Pi)$ são (VF);
- 2) $r(\Pi)$ é $\rightarrow$ -I , sendo Π da forma:

$$\Pi \# \frac{\begin{array}{c} [A1] \\ \Pi2 \\ \hline A1 \rightarrow A2 \end{array}}{\quad} \quad \text{e para cada derivação} \quad \frac{\Sigma1}{A1} \quad (VF) , \text{ temos}$$

que : $\frac{\Sigma1}{\begin{array}{c} [A1] \\ \Pi2 \end{array}} \quad \text{é (VF) ;}$

- 3) $r(\Pi)$ é $\forall$ -I e a derivação da premissa de $r(\Pi)$ é (VF), para qualquer substituição do parâmetro próprio de $r(\Pi)$ por um termo t ;
- 4) Se $r(\Pi)$ não é uma introdução, nem uma aplicação das regras do absurdo , e as seguintes condições são satisfeitas :

i) Π é normal ou cada derivação Π' , para qual Π se reduz, é (VF);

ii) Se Π é da forma

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma}{A1 \vee A2}}{E} \quad \frac{\frac{[A1] \quad [A2]}{\Sigma1 \quad \Sigma2}}{E} \quad \text{então} \quad \frac{\Sigma1}{E} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma'1}{[A1] \quad \Sigma1} \quad E$$

são (VF). Onde :

1) $i = 1$ ou 2

2) $\frac{\Sigma'1}{A1}$ é parte de uma derivação Π' para a qual a derivação

$$\frac{\Sigma}{A1 \vee A2} \quad \text{se reduz :}$$

3) $A1$ é a ocorrência de fórmula imediatamente acima de $A1 \vee A2$ ou de um segmento que contém $A1 \vee A2$ como a última ocorrência de fórmula.

iii) Se Π é da forma :

$$\Pi \# \frac{\frac{\Sigma1}{\exists x A(x)} \quad \frac{[A(c)]}{\Sigma2 \quad B}}{E} \quad \text{então} \quad \frac{\Sigma2}{B} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma'1}{[A(t)] \quad \Sigma2(t)} \quad E \quad \text{são (VF)}$$

onde $\Sigma'1$ é como na condição (ii).

LEMA 1 : Se uma derivação $\Pi1$ em C se reduz a uma derivação $\Pi2$ em C , e se $\Pi1$ é (VF), então $\Pi2$ também é (VF).

Prova : Por indução na definição de (VF), usando os lemas (1) e (2) do capítulo I .

TEOREMA 1 - Toda sequência de redução iniciando de uma derivação fortemente válida (VF), termina em uma derivação normal.

Prova: Por indução na definição de fortemente válida, usando o lema (1) do capítulo 1.

LEMA 2: Se uma derivação Π em C é da forma:

$$\frac{A \quad \Pi_1 \quad \Pi_2 \dots \Pi_n}{B} \quad \text{onde } \Pi_1 \quad \Pi_2 \dots \Pi_n \text{ é uma sequência de derivações}$$

fortemente válidas (que podem ocorrer a esquerda de A), e A é a premissa maior de uma regra de eliminação, então Π é (VF).

Prova: Como $r(\Pi)$ é uma eliminação, temos de mostrar que cada redução imediata Π' de Π é (VF).

Valor de indução α : é o comprimento da árvore de redução das derivações das premissas menores de $r(\Pi)$. α é finito pelo Teorema 1

Como A é a premissa maior, então Π' é da forma:

$$\Pi' \neq \frac{A \quad \Pi'_1 \quad \Pi'_2 \dots \Pi'_n}{B} \quad \text{onde, para algum } i \ (i \leq n) \ \Pi'_i \text{ é}$$

uma redução imediata de Π_i , e para os outros $j \ (i \neq j \leq n)$ $\Pi'_j = \Pi_j$.

Usando o lema 1, Π' satisfaz às condições do lema 2. Como o valor de indução α' de Π' é tal que $\alpha' < \alpha$, o resultado segue da hipótese indutiva.

LEMA 3: Uma derivação Π em C tal que $r(\Pi)$ é uma eliminação, é fortemente válida quando:

- i) toda sequência de redução iniciando de uma derivação de uma premissa de $r(\Pi)$, termina em uma derivação normal;
- ii) se $r(\Pi)$ é $\wedge$ -E, $\rightarrow$ -E ou $\forall$ -E, então as derivações das premissas de $r(\Pi)$ são (VF);
- iii) se $r(\Pi)$ é $\vee$ -E ou $\exists$ -E, então a condição (ii) ou (iii),

respectivamente, na definição de (VF) é satisfeita;

iv) se Π é da forma :

$$\frac{\frac{\frac{\Sigma 1}{\vdash A} \vdash}{A} \vdash}{\vdash} \quad \Sigma 2$$

onde A é a premissa maior, então :

$$\begin{array}{c} \Pi \times \pi \\ \frac{\frac{\frac{A \quad \Sigma 2}{\vdash} \quad \vdash \quad \neg \vdash}{\vdash} \quad \vdash}{\vdash A} \quad \Sigma 1 \\ \vdash \end{array} \quad \text{é (VF)}$$

Prova : Valor de indução - é o terno (α, β, γ) , onde :

α - é o comprimento da árvore de redução da derivação da premissa maior de $r(\Pi)$, se existe tal premissa (caso contrário $\alpha = 0$).

β - é o comprimento da derivação da premissa maior de $r(\Pi)$, se existe tal premissa (caso contrário $\beta = 0$).

γ - é o comprimento da árvore de redução das derivações das premissas de $r(\Pi)$.

Pela condição (i) α e γ são finitos.

Como $r(\Pi)$ é uma eliminação, temos que provar, que cada redução imediata Π' de Π é (VF).

Consideremos dois casos :

Caso (a) : Π' é obtida de Π , substituindo uma sub-árvore própria de Π por sua redução imediata. Isto é:

$$\text{se } \Pi \text{ é } \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \dots \quad \Pi_n}{A} \quad \text{então } \Pi' \text{ é } \frac{\Pi'_1 \quad \Pi'_2 \quad \dots \quad \Pi'_n}{A} \quad \text{onde :}$$

para algum i ($1 \leq n$) Π_i se reduz imediatamente a Π'_i , e para os

outras $\beta_1 \neq \beta \leq n$, $\Pi_j = \Pi_j$.

O valor de indução de $\Pi' = (\alpha', \beta', \gamma')$ é menor que (α, β, γ) de Π , pois: $\alpha' < \alpha$ ou $\alpha' = \alpha$ e $\beta' = \beta$ e $\gamma' < \gamma$.

Π' satisfaz a condição (ii), pois Π satisfaz. A condição (iii) é satisfeita por causa do lema 1. Verifiquemos a condição (iii), apenas para o caso de rCPD igual a $\vee\text{-E}$ (o caso de $\exists\text{-E}$ é similar): se Π é :

então Π' é

$$\Pi \neq \frac{\frac{\Sigma}{A1 \vee A2}}{\frac{[A1] \quad [A2]}{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}} \quad E \qquad \Pi' \neq \frac{\frac{\Sigma'}{A1 \vee A2}}{\frac{[A1] \quad [A2]}{\Sigma'_1 \quad \Sigma'_2}} \quad E$$

Como Π satisfaz a condição (iii), então $\frac{\Sigma_1}{E}$ e $\frac{\Sigma_2}{E}$ são (VFD).

logo pelo lema 1 $\frac{\Sigma'_1}{E}$ e $\frac{\Sigma'_2}{E}$ são (VFD).

Falta mostrar que $\frac{\Sigma^*1}{[A1] \quad \Sigma'_1} \quad E$ é (VFD), onde $\frac{\Sigma^*1}{A1}$ é parte

de uma derivação Π^* para a qual a derivação $\frac{\Sigma'}{A1 \vee A2}$ se reduz,

e $A1$ é como se exige na condição.

Como Π satisfaz à condição (iii), temos que

$$\frac{\frac{\Sigma^C_1}{[A1] \quad \Sigma_1}}{E} \quad \text{é (VFD), onde} \quad \frac{\Sigma^C_1}{A1} \quad \text{é parte de uma derivação}$$

Π_1 para qual a derivação $\frac{\Sigma}{A1 \vee A2}$ se reduz, e o $A1$ é como

se exige na condição.

Pela transitividade das reduções, $\frac{\Sigma^*}{A_1}$ também é parte

de Π_1 , logo $\frac{\Sigma^*}{[A_1] \Sigma_1}$ é (VF).
 $\frac{\Sigma_1}{E}$

Como $\frac{\Sigma_1}{E} \Rightarrow \frac{\Sigma'_1}{E}$, usando o lema 2 do capítulo 1 temos

$\frac{\Sigma^*}{[A_1] \Sigma_1} \Rightarrow \frac{\Sigma^*}{[A_1] \Sigma'_1}$
 $\frac{\Sigma_1}{E} \quad \frac{\Sigma'_1}{E}$

Pelo lema 1 :

$\frac{\Sigma^*}{[A_1] \Sigma'_1}$ é (VF). Isto completa a prova de (iii).

Condição (iv) -

Se $\Pi \neq$ $\frac{[\neg A]}{\Sigma_1}$
 $\frac{1}{A \quad \Sigma_2}$
 $\frac{1}{E}$

então Π' pode ser :

1) $\frac{[\neg A]}{\Sigma'_1}$
 $\frac{1}{A \quad \Sigma_2}$ onde $\frac{\Sigma'_1}{1}$ é uma redução imediata de $\frac{\Sigma_1}{1}$
 $\frac{1}{E}$

$$\begin{array}{c}
 \vdash A \quad \Sigma \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 A \quad \Sigma'2 \quad \text{onde } \Sigma'2 \text{ é uma redução imediata de } \Sigma \\
 \hline
 E
 \end{array}$$

Temos de provar que :

$$\begin{array}{cc}
 \text{(a)} \quad \frac{A \quad \Sigma}{E} \quad \frac{}{\neg E} & \text{(b)} \quad \frac{A \quad \Sigma'2}{E} \quad \frac{}{\neg E} \\
 \hline
 \perp & \hline
 \perp \\
 \hline
 \vdash A & \hline
 \vdash A \\
 \hline
 \Sigma'1 & \hline
 \Sigma \\
 \hline
 \perp & \hline
 \perp
 \end{array}$$

são (VF), na hipótese de que :

$$\begin{array}{c}
 A \quad \Sigma \\
 \hline
 E \quad \neg E \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \vdash A \\
 \hline
 \Sigma \\
 \hline
 \perp
 \end{array}
 \quad \text{é (VF)}$$

Vemos que (a) é (VF) usando (c), o lema 2 do capítulo I e o lema 1 (deste capítulo). Temos também que (b) é (VF), usando (c) e o lema 1.

Caso (b) : Π' é uma redução própria de Π .

Temos dois subcasos :

1) a maior premissa de $r(\Pi)$ é conclusão de uma regra de introdução.

Se $r(\Pi)$ é $\wedge$ -E, $\rightarrow$ -E ou $\forall$ -E, então usando a condição (iii) para Π e a definição de (VF), concluímos que Π' é (VF).

Se $r(\Pi)$ é $\vee$ -E ou $\exists$ -E, então usando a condição (iii) para Π

e a reflexividade das reduções, concluímos que Π' é (VFD).

2) a maior premissa $\underline{E}$ de $r(\Pi)$ é conclusão de uma aplicação da regra do absurdo, então, usando a condição (iv) para Π e a definição de (VFD), Π' é (VFD).

IV- VALIDADE FORTE POR SUBSTITUIÇÃO -

A derivação Π^* que resulta de Π , quando :

- i) substituímos parâmetros não próprios de Π por termos, e depois
- ii) substituímos suposições abertas de Π por derivações fortemente válidas dessas suposições.

é denominada resultante de Π por substituição.

Validade forte por substituição -

Definição: Uma derivação Π em C é fortemente válida por substituição (VFS) se e somente se todas as derivações resultantes de Π por substituição são fortemente válidas.

TEOREMA II- Toda derivação Π em C é fortemente válida por substituição.

Prova: Por indução no comprimento de Π .

A base é trivial.

Se $r(\Pi)$ é uma introdução ou uma aplicação das regras do absurdo, então a hipótese indutiva implica imediatamente a condição na definição de (VFD).

Se $r(\Pi)$ é uma eliminação e Π é da forma :

$$\Pi \neq \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \dots \Pi_n}{A}, \text{ então temos de mostrar que}$$

$$\Pi^* \neq \frac{\Pi_1^* \quad \Pi_2^* \dots \Pi_n^*}{A} \quad \text{é fortemente válida}$$

onde Π^* é qualquer resultante de Π por substituição.

Vamos demonstrar que Π^* satisfaz as condições do lema 3.

Como por hipótese indutiva $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ são (VFE) então $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \dots, \Pi_n^*$ são (VFE) e a condição (iii) é satisfeita. E, pelo Teorema 1, a condição (i) também é satisfeita. Usando o lema 1 e a definição de (VFE), temos que a condição (iii) é satisfeita.

Condição (iv):

Se Π é da forma

$$\frac{\frac{\frac{[\neg A]}{\Sigma_1}}{\perp}}{A \quad \Sigma_2} \quad E$$

então Π^* é :

$$\frac{\frac{\frac{[\neg A^*]}{\Sigma_1^*}}{\perp}}{A^* \quad \Sigma_2^*} \quad B^*$$

Temos de mostrar que :

$$\frac{\frac{A^* \quad \Sigma_2^*}{B^* \quad \neg B^*}}{\perp} \quad \frac{[\neg A^*]}{\Sigma_1^*} \quad \perp$$

é (VFE).

Pela hipótese indutiva

$$\frac{\Sigma_1}{\perp}$$

é (VFE), portanto, basta mostrar

que

$$\frac{\frac{A^* \quad \Sigma_2^*}{B^* \quad \neg B^*}}{\perp} \quad \neg A^*$$

é (VFE).

Usando a definição de (VFD), temos então de provar que

$$(I) \quad \frac{\frac{\Sigma}{A^* \quad \Sigma^*}}{B^* \quad \neg B^*}$$

$$\frac{B^* \quad \neg B^*}{\perp}$$

é (VFD), para qualquer derivação

$\perp$

fortemente válida

$$\frac{\Sigma}{A^*}$$

Da hipótese indutiva

$$\frac{A \quad \Sigma}{F}$$

é (VFSD), logo:

$$\frac{\Sigma}{A^* \quad \Sigma^*}$$

é (VFD), para qualquer derivação

$$\frac{\Sigma}{A^*}$$

(VFD).

B^*

Usando o lema 2, obtemos que (I) é (VFD). O que conclui a

prova.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] GANDY , R. O - Proofs of Strong Normalization, em To Haskell Curry : Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, ed. por J. Seldin & J.R. Hindley, Academy Press (1980).
- [2] GENTZEN, G. - The Collected Papers of Gerard Gentzen, ed. por M. E. Szabo, North Holland (1969).
- [3] GIRARD , J.Y - Strong Normalization.
- [4] HERMAN, E. H. - Automatic Theorem Proving : An attempt to improve readability of proofs generated by resolution methods in application of mathematical logic, Proceeding of Latino American Meeting for Mathematical, American Mathematical Society (1980).
- [5] JERVELL, H.R. - A Normalform in first order Arithmetic, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J.E. Fenstad , North Holland , Amsterdam (1971).
- [6] KREISEL, G. - A Survey of Proof Theory II, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J.E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).
- [7] MARTIN-LOF, P. - Hauptsatz for Intuicionistic Theory of Iterated Inductive Definitions, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed por J.E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).
- [8] MARTIN-LOF, P. - Hauptsatz for Theory of Species, em Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. por J.E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).
- [9] PEREIRA, L.C. - On the Estimation of the Length of Normal Derivations, em Akademilitteratur, Stockholm, (1982).
- [10] PEREIRA, L.C. - Normalização Forte para a Lógica Intuicionista

- [11] PRAWITZ, D. - Natural Deduction , Stockholm, (1965).
- [12] PRAWITZ, D. - Ideas and Results in Proof Theory, em Proceedings of the Second Scandinavian Symposium Logic, ed. por J.E. Fenstad, North Holland, Amsterdam (1971).
- [13] PRAWITZ, D. - Validity and Normalizability of Proofs in 1 Order and 2 Order Classical and Intuitionistic Logic ,em Atti del Congresso Nazionale di Logica, Montecatini (1979) , Bibliopolis
- [14] PRAWITZ, D. & MALMSTRÖM, P.E. - A Survey of Some Connections Between Classical Logic, Intuitionistic and Minimal Logic , em Contributions to Mathematical Logic, ed. por A. Schmidt, K. Schütte and H.J. Thiele, North Holland, Amsterdam (1968).
- [15] STATMAN, F. - Structural Complexity of Proofs. PhD. Dissertation , Stanford (1974).
- [16] TAIT, W.W. - Intensional interpretations of functionals of finite type 1, em Journal of Symbolic Logic 32 (1967). 159-212
- [17] TENNANT, N. - A Proof-theoretical Approach to Entailment, em Journal of Philosophical Logic , 9 (1980)