MARIA DA PAZ NUNES DE MEDEIROS

OS TEOREMAS DE INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. JOSÉ ALEXANDRE D. GUERZONI.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 9/12/94.

Novembro de 1994

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL - UNICAMP

M467t

Medeiros, Maria da Paz Nunes de
Os teoremas de incompletude de Godel / Maria da Paz Nunes de Medeiros. -- Campinas, SP : [s.n.], 1994.

Orientador: Jose Alexandre Durry Guerzoni.
Dissertacao (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciencias Humanas.

1. Godel, Kurt, 1906-1978. 2. Matematica - Filosofia. 3. Logica simbolica e matematica. 4. Metamatematica. I. Guerzoni, Jose Alexandre Durry. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciencias Humanas. III. Titulo.

RESUMO

MEDEIROS, Maria da Paz Nunes. *Os Teoremas de Incompletude de Gödel*. Campinas: UNICAMP, 1994, (Dissertação de Mestrado).

Em 1931, Gödel apresentou dois Teoremas de Incompletude que, indiscutivelmente, foram os resultados mais importantes da Lógica no início deste século. Pretende-se, neste trabalho, apresentar uma demonstração detalhada do primeiro teorema, na qual, todas as fórmulas envolvidas sejam explicitadas. Essa demonstração baseia-se na idéia de auto-referência. Considera-se simultaneamente uma teoria formal (Aritmética de Peano) e uma intuitiva (Teoria Intuitiva dos Números) para mostrar, via gödelização, que as propriedades e operações de cunho sintático-morfológico da teoria formal são representáveis nela própria. Garantida essa representação através de um Teorema de Completude Parcial, demonstra-se o primeiro teorema a partir do Lema da Diagonal, para em seguida apresentar a demonstração usual do segundo, que pressupõe a formalização de certas condições de derivabilidade.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 1931, no artigo *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Gödel apresentou dois Teoremas da Incompletude que, indiscutivelmente, foram os resultados mais importantes da Lógica no início deste século. O primeiro teorema, objeto principal deste trabalho, diz, grosso modo, que se uma teoria formalizada satisfaz certas condições, então existe uma determinada fórmula G tal que nem ela nem sua negação são teoremas. Esta fórmula G é uma fórmula que "afirma" sua própria indemonstrabilidade. Já o segundo diz que se a teoria for consistente, então uma certa fórmula que expressa a sua consistência não é teorema. Este teorema pode ser visto como uma formalização do primeiro, na medida que se pode mostrar que G é equivalente à fórmula escolhida para expressar a consistência.

As demonstrações de Gödel baseiam-se na idéia de auto-referência, isto é, de fazer com que o sistema formal expresse aquelas mesmas propriedades e operações que servem para caracterizá-lo. Ora, do ponto de vista da perspectiva usual, os sistemas formais são propostos como formalização de teorias intuitivas anteriores, ou seja, uma vez constituído o sistema formal, a teoria que o motivou, passa a ser vista como determinando um modelo do sistema (seu modelo padrão). Assim, por exemplo, o sistema formal conhecido como Aritmética de Peano pode ser visto como uma formalização possível da Teoria Intuitiva dos Números. Todavia, para melhor compreendermos os teoremas de Gödel, essa perspectiva usual da formalização deve, em certa medida, ser invertida. Eles exigem a consideração simultânea da teoria intuitiva e do sistema formal, sem privilegiar este em detrimento daquela, uma vez que a auto-referência no sistema formal é obtida através da teoria intuitiva. Em um primeiro momento, os objetos simbólicos formais que constituem a teoria formal são representados por objetos da teoria intuitiva, isto é, por números. Conseqüentemente, as propriedades e relações daqueles são mapeados em propriedades e relações destes últimos. Chamaremos essa representação de Gödelização. Em um segundo momento, que podemos chamar de formalização, mostra-se que o sistema formal representa adequadamente estas propriedades e relações numéricas.

Em nossa demonstração, consideraremos a Aritmética de Peano (AP) formalizada no Cálculo de Predicados de Primeira Ordem. Assim, no primeiro capítulo, apresentaremos a linguagem na qual ela será baseada, seus postulados, bem como, proposições que nos informam melhor acerca de sua capacidade dedutiva. Além disso, apresentaremos um Teorema de Completude Parcial que diz respeito a uma classe particular de fórmulas de AP.

Como já falamos, as demonstrações baseiam-se na idéia de auto-referência. Esta auto-referência é esclarecida no segundo capítulo. Inicialmente, a Aritmética de Peano será representada na Teoria Intuitiva dos Números. Em seguida, apresentaremos a formalização desta representação, de tal forma que seja garantida a existência e adequação das fórmulas que expressem as noções sintático-morfológicas que caracterizam AP.

No último capítulo, apresentaremos a demonstração do primeiro teorema, fazendo apelo ao teorema de completude parcial. Em seguida, demonstraremos o segundo, como é usual, a partir de três condições de derivabilidade que serão expostas. Aqui, não apresentaremos de forma rigorosa as demonstrações das condições de derivabilidade envolvidas no segundo teorema. Nas considerações finais, apresentaremos algumas dificuldades encontradas na tentativa de demonstrá-las.

Tendo em vista que, o caminho que escolhemos para obter as demostrações dos teoremas em questão diverge sob alguns aspectos do originalmente apresentado por Gödel (que usa o Teorema da Representação), gostaríamos de esclarecer porque adotaremos tal procedimento.

Ao longo deste trabalho, não faremos alusão a nenhuma teoria da recursão, pois, entendemos que o teorema da representação (toda função recursiva é representável em uma dada aritmética formalizada), não é nem necessário nem suficiente para as demonstrações dos dois Teoremas da Incompletude.

Ora, o Teorema de Completude Parcial, que apresentaremos no primeiro capítulo, nos fornece meios para garantir a representação das fórmulas, definidas no segundo capítulo, que pretendem representar as propriedades e operações morfológicas de AP, haja vista que, segundo nossa definição, elas são, no máximo, fórmulas Σ_1. Desta forma, demonstraremos o Primeiro Teorema da Incompletude sem fazer uso do aparato das funções recursivas. Procedimento similar é adotado por SMULLYAN (1992).

Por outro lado, as demonstrações das condições de derivabilidade exigem que sejam explicitamente determinadas as fórmulas que acima mencionamos, i.e, que expressam as relações numéricas induzidas, via gödelização, pelas propriedades e operações de cunho sintático- morfológico. Em particular, a chamada segunda condição de derivabilidade, ou seja,

(1) $\qquad AP \vdash DEM(\ulcorner A \urcorner) \wedge DEM(\ulcorner A \to B \urcorner) \to DEM(\ulcorner B \urcorner)$,

que é equivalente a

(2) $\qquad AP \vdash \exists x PV(x, \ulcorner A \urcorner) \wedge \exists y PV(y, \ulcorner A \to B \urcorner) \to \exists z PV(z, \ulcorner B \urcorner)$,

um dos pressupostos fundamentais na demonstração do segundo teorema, só pode ser demonstrada um vez conhecida a estrutura interna da fórmula $PV(x,y)$. O Teorema da Representação, juntamente com a prova de que tais relações são recursivas, assegura apenas a existência das fórmulas correspondentes sem, no entanto, indicar quais sejam. Assim, em particular, sabendo que $PV(x,y)$ representa a relação "x é o número de Gödel de uma prova da fórmula cujo número de Gödel é y", podemos inferir apenas que, para quaisquer números naturais **m** e **n**,

$$(3) \qquad AP \vdash PV(\overline{m}, \ulcorner A \rightarrow B \urcorner) \wedge PV(\overline{n}, \ulcorner A \urcorner) \rightarrow \exists z PV(z, \ulcorner B \urcorner),$$

o que é uma afirmação mais fraca do que aquela envolvida em (2). Assim, o terorema da representação não é suficiente para a demonstração do segundo teorema.

Queremos também esclarecer porque, na seção 2.1 do segundo capítulo, usaremos uma função β, análoga à apresentada por SHOENFIELD (1967), na representação de seqüências numéricas por números, ao contrário que do faz o próprio Gödel, 1931 e outros autores que estabelecem esta relação através do produto de potências de números primos, que parece intuitivamente mais simples.

Ao invés de apresentar de maneira explícita, na Teoria Intuitiva dos Números, as noções numéricas que representam, por sua vez, as noções sintáticas de AP, apresentaremos diretamente a formalização delas. Ora, a única maneira que conhecemos de representar explicitamente em uma dada teoria formal a potenciação de números primos é fazendo uso da função β. Assim, como de qualquer forma iríamos precisar nos referir a esta função, a utilizaremos já para associar números a seqüências.

CAPÍTULO I

UM SISTEMA FORMAL

Neste capítulo, introduziremos um sistema formal, denominado AP (Aritmética de Peano), que é uma formalização em primeira ordem da Teoria dos Números. Aqui, além de caracterizarmos esse sistema, apresentaremos algumas de suas propriedades dedutivas e semânticas básicas. Na caracterização do sistema e no estudo de suas propriedades dedutivas tomaremos como base a exposição de MENDELSON (1987, cap. III). No entanto, seremos mais explícitos e rigorosos no tocante aos conceitos sintático-morfológicos empregados nesta caracterização, uma vez que um dos passos centrais da demonstração dos resultados de Gödel consiste exatamente em interpretar estes conceitos em AP.

1 - O SISTEMA FORMAL AP

1.1 - A Linguagem de AP

Os símbolos que formam o vocabulário da linguagem de AP, $\mathscr{L}(AP)$, e suas respectivas categorias gramaticais, são os seguintes:

a) símbolos lógicos

- uma lista infinita de variáveis: "x_1", "x_2", "x_3", ...
- dois conectivos funcionais veritativos: "$\rightarrow$" e "$\sim$"
- um símbolo para quantificação universal: "$\forall$"

b) símbolos próprios

- uma constante individual: "$\overline{0}$"
- um símbolo funcional unário: " ' "
- dois símbolos funcionais binários: "$\oplus$" e "$\odot$"
- um símbolo de predicado binário: "=" [1]

Usaremos as letras latinas minúsculas x, y, z, ..., afetadas ou não por índices, para fazer alusão às variáveis, e as letras latinas e_0, e_1, e_2, ... para indicar *expressões* de $\mathcal{L}$(AP) [2].

Temos as seguintes definições, por indução, dos conceitos de *termo* e *fórmula*.

Termo:

a) a constante individual $\overline{0}$ e as variáveis são termos;

b) se e_1 e e_2 são termos, então e_1', $(e_1 \oplus e_2)$ e $(e_1 \odot e_2)$ são termos;

c) uma expressão é um termo se, e apenas se, for determinada por (a) e (b).

Fórmula:

a) se e_1 e e_2 são termos, então $(e_1 = e_2)$ é uma fórmula (fórmula atômica ou equação);

b) se *A* e *B* são fórmulas e x uma variável, então $\sim A$, $(A \to B)$ e $\forall x A$ são fórmulas;

---

[1] Chamamos atenção para o fato de que o símbolo para identidade, =, será tratado aqui, acompanhando **MENDELSON** (1987), como um símbolo próprio. Veremos, mais adiante, que alguns dos princípios básicos da identidade serão demonstráveis em **AP**. *Cf* teo 1.5 e teo 1.9.

[2] Lembramos que expressões são seqüências finitas quaisquer de símbolos do vocabulário.

c) uma expressão é uma fórmula se, e apenas se, for determinada por (a) e (b).

Observação: os termos $\bar{0}$, $\bar{0}'$, $\bar{0}''$,... são chamados numerais e denotados por $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$,... respectivamente. Em geral, se n é um número natural, $\bar{n}$ indica o termo formado pelo símbolo $\bar{0}$ (zero) seguido de n linhas ('). Usaremos as letras latinas minúsculas t, u, ..., afetadas ou não por índices, para indicar termos. E letras itálicas *A*, *B*, *C*, ..., afetadas ou não por algum tipo de índice, para indicar fórmulas.

Como é usual, dizemos que *a ocorrência de uma variável* x *em uma fórmula A é livre*, se tal ocorrência não se der em uma parte de *A* da forma $\forall xB$. De outro modo, a ocorrência é dita ligada. Assim, uma *sentença* é uma fórmula que não contém ocorrências de variáveis livres.

Também dizemos que *um termo* t *é livre para uma variável* x *em uma fórmula A*, se nenhuma ocorrência livre de x se der em uma parte de *A* da forma $\forall yB$ na qual y é uma variável que ocorre em t.

Notação: empregamos $A(x_1,\ldots,x_n)$ para indicar que as variáveis $x_1,\ldots,x_n$, e eventualmente outras, ocorrem livres em *A*. E, $A(^{x_1}/t_1,\ldots,{}^{x_n}/t_n)$ para indicar o resultado de substituir sucessiva e uniformemente todas as ocorrências livres de $x_1,\ldots,x_n$ por, respectivamente, $t_1,\ldots,t_n$. Ademais, se o contexto deixar claro quais as variáveis que serão substituídas, bem como a ordem das substituições, usaremos $A(t_1,\ldots,t_n)$ em vez de $A(^{x_1}/t_1,\ldots,{}^{x_n}/t_n)$.

1.2 - Os Postulados de AP

a) Axiomas:

- axiomas lógicos (esquemas)

Ax.1) $A \to (B \to A)$

Ax.2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ax.3) $(\sim B \to \sim A) \to ((\sim B \to A) \to B)$

Ax.4) $\forall x A \to A(t)$, se t for livre para x em A.

Ax.5) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$,

se A não contiver ocorrências livres de x

- axiomas próprios

Ap.1) $x_0 = x_1 \to (x_0 = x_2 \to x_1 = x_2)$

Ap.2) $x_0 = x_1 \to x_0' = x_1'$

Ap.3) $\sim(x_0' = \overline{0})$

Ap.4) $x_0' = x_1' \to x_0 = x_1$

Ap.5) $x_0 \oplus \overline{0} = x_0$

Ap.6) $x_0 \oplus x_1' = (x_0 \oplus x_1)'$

Ap.7) $x_0 \circ \overline{0} = \overline{0}$

Ap.8) $x_0 \circ x_1' = (x_0 \circ x_1) \oplus x_0$

Ap.9) $A(\overline{0}) \to \big(\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x)\big)$ [3]

b) Regras de Inferência:

- MP (Modus Ponens)

B segue de $(A \to B)$ e A

- GEN (Generalização)

$\forall x A$ segue de A

---

[3] Observamos que enquanto os postulados (Ap.1) - (Ap.8) são axiomas, o postulado (Ap.9) é um esquema de axioma.

Os conceitos de "ser uma prova" e de "ser um teorema" são definidos, com respeito à AP, segundo o modo corrente na lógica contemporânea de definir tais conceitos para teorias de primeira ordem. Vale dizer, temos as seguintes definições.

Se A for uma fórmula, então uma *prova* de A em AP é uma seqüência de fórmulas $B_1,\ldots,B_n$, onde A é B_n, e para todo i, $1 \le i \le n$, uma das seguintes condições é satisfeita:

a) B_i é um axioma; ou

b) existem $j, l < i$, tais que B_j é $B_l \to B_i$, ou

c) existe $j < i$, tal que B_i é $\forall x B_j$

Uma fórmula A é um *teorema* de AP ($AP \vdash A$) se existir uma prova de A em AP.

2 - REGRAS DERIVADAS E ESQUEMA DE TEOREMAS

Apresentaremos nesta seção algumas proposições de AP que nos informam melhor acerca de sua capacidade dedutiva. Para tanto, como é normal na lógica, faremos uso de alguns símbolos definidos, bem como de algumas noções auxiliares, tais como a de dedução e a de instância tautológica [4].

Recordamos, aqui, as definições dos símbolos não primitivos que empregamos, lembrando que eles funcionam como mera notação abreviativa para fórmulas de AP. [5]

---

[4] Para uma caracterização destas noções veja-se **MENDELSON** (1987, cap. II)

[5] Usaremos "=:" para indicar definições.

$\exists x A \quad =: \quad \sim\forall x \sim A$

$(A \wedge B) \quad =: \quad \sim(A \rightarrow \sim B)$

$(A \vee B) \quad =: \quad (\sim A \rightarrow B)$

$(A \leftrightarrow B) \quad =: \quad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\exists_1 x A(x) \quad =: \quad \exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y)$

$t \neq u \quad =: \quad \sim(t = u)$

$t < u \quad =: \quad \exists z (z \neq \overline{0} \wedge t \oplus z = u)$; onde z é a primeira variável da linguagem que não ocorre nem em t, nem em u.

$DIV(t,s) \quad =: \quad \exists z (t = s \circ z)$; onde z é a primeira variável da linguagem que não ocorre nem em t, nem em s.

PROPOSIÇÃO.

Seja Γ um conjunto de fórmulas e sejam A e B fórmulas tais que existe uma dedução de B a partir de Γ e A, a qual não envolve nenhuma aplicação de GEN cuja variável quantificada ocorre livre em A. Nestas condições temos que:

1) $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (teorema da dedução - TD)

2) $\Gamma, \exists x A \vdash B$, se x não ocorre livre em B (generalização existencial - GE).

Prova.

(1), veja MENDELSON (1987, corolário 2.5, pag. 59); e (2), segue-se de (1), levando em conta entre outros princípios a regra de GEN e Ax.5.

Para facilitar a apresentação das demonstrações, introduziremos uma nova regra, denominada regra C, que, acompanhando MENDELSON (1987), é definida do seguinte modo: estendemos a linguagem adicionando constantes novas. Assim, introduziremos uma nova regra, segundo a qual, $A(b)$ segue de

$\exists x A(x)$, se b for uma constante nova. Definimos, a seguir, uma noção auxiliar de dedução que considera também a regra C.

Existirá uma dedução, com uso da regra C, de A a partir de Γ, $\Gamma \vdash_c A$, se existir uma seqüência de fórmulas $B_1, \ldots, B_n$ tal que B_n é A e as quatro condições seguintes forem satisfeitas:

1) para cada i $\leq$ n,

a) B_i é um axioma de AP, ou

b) B_i pertence a Γ, ou

c) B_i segue de fórmulas precedentes por MP ou GEN, ou

d) existe uma fórmula precedente, $\exists x C(x)$, tal que B_i é $C(b)$, onde b é uma constante nova, que não ocorre em nenhuma das fórmulas anteriores a B_i (regra C);

2) na condição 1(a) podemos usar, como axiomas, todos os axiomas lógicos que envolvem as novas constantes já introduzidas por uma aplicação da condição 1(d);

3) nenhuma aplicação de GEN pode ser feita tendo usado uma variável que é livre em alguma premissa de uma aplicação anterior da regra C;

4) A não contém nenhuma das constantes novas introduzidas na aplicação da regra C.

Desta forma, se $\Gamma \vdash_c A$, então obtemos, como corolário do item (2) da proposição anterior ao substituirmos as constantes novas por variáveis distintas, que $\Gamma \vdash A$.

PROPOSIÇÃO. $\Gamma \vdash A$, se A é uma instância de tautologia (taut.)

Prova. Veja MENDELSON (1987, pag 57).

PROPOSIÇÃO. Para quaisquer termos s, t e u temos que

Ap.1') $AP \vdash t = u \rightarrow (t = s \rightarrow u = s)$

Ap.2') $AP \vdash t = u \rightarrow t' = u'$

Ap.3') $AP \vdash (t' \neq \overline{0})$

Ap.4') $AP \vdash t' = u' \rightarrow t = u$

Ap.5') $AP \vdash t \oplus \overline{0} = t$

Ap.6') $AP \vdash t \oplus u' = (t \oplus u)'$

Ap.7') $AP \vdash t \circ \overline{0} = \overline{0}$

Ap.8') $AP \vdash t \circ u' = (t \circ u) \oplus t$

TEOREMA 1.1 $AP \vdash A(t) \rightarrow \exists x A(x)$, se t é livre para x em A.

TEOREMA 1.2 $AP \vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B)$

TEOREMA 1.3 $AP \vdash \forall x(A \wedge B) \rightarrow (\forall x A \wedge \forall x B)$

TEOREMA 1.4 $AP \vdash A \rightarrow B$, então $AP \vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$

TEOREMA 1.5 $AP \vdash t = t$

TEOREMA 1.6 $AP \vdash t \oplus u = u \oplus t$

TEOREMA 1.7 $AP \vdash s \oplus (t \oplus u) = (s \oplus t) \oplus u$

TEOREMA 1.8 $AP \vdash t = u \rightarrow t \oplus s = u \oplus s$

TEOREMA 1.9 $AP \vdash t = u \rightarrow \left(A(x)^{x}/_{t} \rightarrow A(x)^{x}/_{u}\right)$

TEOREMA 1.10 $AP \vdash t \oplus z = u \oplus z \rightarrow t = u$

TEOREMA 1.11 $AP \vdash t \oplus \overline{1} = t'$

TEOREMA 1.12 $AP \vdash t \oplus u = \overline{0} \rightarrow (t = \overline{0} \wedge u = \overline{0})$

TEOREMA 1.13 $AP \vdash t \neq \overline{0} \rightarrow \exists y(t = y')$, onde y não ocorre em t

TEOREMA 1.14 $AP \vdash \sim(t < t)$

TEOREMA 1.15 $AP \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$, se $m \neq n$

TEOREMA 1.16 $AP \vdash A(\overline{0}) \wedge \ldots \wedge A(\overline{n-1}) \leftrightarrow \forall x(x < \overline{n} \rightarrow A(x))$

TEOREMA 1.17 $AP \vdash \sim(t < \overline{0})$

TEOREMA 1.18 $AP \vdash t < u \rightarrow t < u'$

TEOREMA 1.19 $AP \vdash t = u \rightarrow t < u'$

TEOREMA 1.20 $AP \vdash t < u' \rightarrow (t = u \vee t < u)$

TEOREMA 1.21 $AP \vdash t < u \rightarrow t \neq u$

TEOREMA 1.22 $AP \vdash \overline{0} = t \vee \overline{0} < t$

TEOREMA 1.23 $AP \vdash t < u \rightarrow (t' = u \vee t' < u)$

TEOREMA 1.24 $AP \vdash t \neq u \rightarrow (t < u \vee u < t)$

TEOREMA 1.25 $AP \vdash \forall x(x = y \rightarrow B(x)) \leftrightarrow B(y)$,
se x não é livre em $B(y)$.

TEOREMA 1.26 $AP \vdash \forall x(x < y' \to B) \leftrightarrow$

$\forall x(x = y \to B) \land \forall x(x < y \to B)$

TEOREMA 1.27 $AP \vdash A(x) \land A(y) \land \exists_1 x A(x) \to x = y$

TEOREMA 1.28 $AP \vdash t \leq t \oplus s$

TEOREMA 1.29 $AP \vdash t < s \to (t \oplus \bar{1})(t \oplus \bar{1}) \leq s \odot s$ [6]

TEOREMA 1.30 $AP \vdash t < t \oplus \bar{1}$

TEOREMA 1.31 $AP \vdash t \oplus s = r \oplus s \to t = r$

TEOREMA 1.32 $AP \vdash t < s \land r < u \to t \odot r < s \odot u$

TEOREMA 1.33 $AP \vdash t < s \to t \oplus r < s \oplus r$

TEOREMA 1.34 $AP \vdash t < s \land r < u \to t \oplus r < s \oplus u$

TEOREMA 1.35 $AP \vdash s \neq \bar{0} \land t \odot s = r \odot s \to t = r$

TEOREMA 1.36 $AP \vdash DIV(t,t)$

TEOREMA 1.37 $AP \vdash DIV(t,s) \land DIV(t \oplus r,s) \to DIV(r,s)$

TEOREMA 1.38 $AP \vdash t(s \oplus r) = t \odot s \oplus t \odot r$

TEOREMA 1.39 $AP \vdash t = s \to t \odot r = s \odot r$

TEOREMA 1.40 $AP \vdash DIV(t,s) \to DIV(t \odot r,s)$

TEOREMA 1.41 $AP \vdash t \leq s \land s \leq t \to t = s$

TEOREMA 1.42 $AP \vdash \exists x A(x) \to \exists x(A(x) \land \forall y(y < x \to \sim A(y)))$

(princípio do mínimo)

TEOREMA 1.43 $AP \vdash \exists x(B(x) \land \forall y(y < x \to \sim B(y)) \to$

$\exists_1 x(B(x) \land \forall y(y < x \to \sim B(y))$

TEOREMA 1.44 $AP \vdash v<w \land x<w \to t<u$, se u é $t^{v}/w^{x}/w$

TEOREMA 1.45 $AP \vdash y \neq \bar{0} \land y \neq \bar{1} \to \sim DIV(\bar{1},y)$

TEOREMA 1.46 $AP \vdash \exists x A \to \exists x(A \land \forall y(y < w \land A^{x}/y \to y \leq x))$

TEOREMA 1.47 $AP \vdash \exists y(y \neq \bar{0} \land \forall z(z < x \to DIV(y,z))$

TEOREMA 1.48 $AP \vdash t \oplus u = s \to u \leq s$

TEOREMA 1.49 $AP \vdash t \leq u \land u < s \to t < s$

TEOREMA 1.50 $AP \vdash t \neq u \to \exists x(x \neq \bar{0} \land t = u \oplus x \lor t \oplus x = u))$

TEOREMA 1.51 $AP \vdash t \odot u = \bar{0} \leftrightarrow t = \bar{0} \lor u = \bar{0}$

TEOREMA 1.52 $AP \vdash x = \bar{0} \lor \ldots \lor x = \bar{k} \leftrightarrow x \leq \bar{k}$

TEOREMA 1.53 $AP \vdash t < s \to t < (s \oplus r)$

---

[6] Usaremos $(\ldots)(\ldots)$ no lugar de $(\ldots)\odot(\ldots)$ sempre que o contexto o permitir

TEOREMA 1.54 $AP\vdash t \leq s \rightarrow (s < r \rightarrow t < r)$

TEOREMA 1.55 $AP\vdash \overline{1}\leq x\leq y_1 \oplus \ldots \oplus y_n \leftrightarrow (\exists z(x=z \wedge \overline{1}\leq z\leq y_1)$
$\vee \ldots \vee \exists z(x = z \oplus y_1 \oplus \ldots \oplus y_{n-1} \wedge \overline{1}\leq z\leq y_n)$

TEOREMA 1.56 $AP\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$

TEOREMA 1.57 $AP\vdash \exists_1 xA \rightarrow (A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B))$

TEOREMA 1.58 $AP\vdash \forall x(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (\exists xA \wedge \forall xB \rightarrow C)$,
se x não ocorre livre em C

TEOREMA 1.59 $AP\vdash \exists xA \wedge \forall xB \rightarrow \exists x(A \wedge B)$

TEOREMA 1.60 $AP\vdash \forall y(A \rightarrow \forall x(B \rightarrow C)) \leftrightarrow \forall x(\exists y(A \wedge B) \rightarrow C)$,
se y não ocorre livre em C, nem em A.

Prova.

As demonstrações dos teoremas Ap.1' a Ap.8' e 1.1 a 1.16 podem ser encontradas em MENDELSON (1987, cap. II e III). A seguir, apresentaremos apenas as demonstrações do teoremas 1.17 a 1.27, uma vez que os demais também são mostrados com o mesmo grau de facilidade.

1.17) $AP\vdash \sim(t < 0)$

1) $AP\vdash t\oplus y = \overline{0} \rightarrow (y = \overline{0} \wedge t = \overline{0})$	teo 1.12
2) $AP\vdash y \neq \overline{0} \rightarrow t \oplus y \neq \overline{0}$	1,taut.
3) $AP\vdash \sim(y \neq \overline{0} \wedge t \oplus y = \overline{0})$	2,def.,taut.
4) $AP\vdash \forall y\sim(y \neq \overline{0} \wedge t \oplus y = \overline{0})$	3,GEN
5) $AP\vdash \sim\exists y(y \neq \overline{0} \wedge t \oplus y = \overline{0})$	4,def.,taut.
6) $AP\vdash \sim(t < \overline{0})$	5,def.

1.18) $AP\vdash t < u \rightarrow t < u'$

1) $t < u$	hip.
2) $\exists w(w \neq \overline{0} \wedge w \oplus t = u)$	1,def.
3) $b \neq \overline{0} \wedge b \oplus t = u$	2,regra C
4) $b \oplus \overline{1} \oplus t = u \oplus \overline{1}$	3,taut,teo 1.8, 1.6 e 1.7
5) $b' \oplus t = u'$	4,teo 1.11 e 1.9
6) $b' \neq \overline{0}$	Ap.9'
7) $\exists y(y \neq \overline{0} \wedge y \oplus t = u')$	5,6,taut,teo 1.1

8) $t < u'$ 7,def.

9) $AP \vdash t < u \rightarrow t < u'$ 1-8, TD

1.19) $AP \vdash t = u \rightarrow t < u'$

1) $t = u$ hip.

2) $t \oplus \overline{1} = u \oplus \overline{1}$ 1,teo 1.8

3) $t \oplus \overline{1} = u'$ 2,teo 1.11

4) $\overline{1} \neq \overline{0}$ Ap. 9

5) $\exists w(w \neq \overline{0} \wedge t \oplus w = u')$ 3,4,teo 1.1

6) $t < u'$ 5,def.

7) $AP \vdash t = u \rightarrow t < u'$ 1-6,TD

1.20) $AP \vdash t < u' \rightarrow (t = u \vee t < u)$

1) $t < u'$ hip.

2) $\exists w(w \neq \overline{0} \wedge w \oplus t = u')$ 1,def.

3) $b \neq \overline{0} \wedge t \oplus b = u'$ 2,regra C

4) $b \neq \overline{0} \rightarrow \exists y(b = y')$ teo 1.13

5) $\exists y(b = y')$ 3,4,taut.,MP

6) $b = c'$ 5,regra C

7) $c' \neq \overline{0} \wedge t \oplus c' = u'$ 3,6,teo 1.9

8) $c \oplus \overline{1} \oplus t = u \oplus \overline{1}$ 7,taut.,teo 1.11

9) $t \oplus c = u$ 8,teo 1.10

10) $c = \overline{0}$ hip.aux.

11) $t \oplus \overline{0} = u$ 9,10,teo 1.9

12) $t = u$ 11,ap.5

13) $c = \overline{0} \rightarrow (t = u \vee t < u)$ 10-12,TD,taut.

14) $c \neq \overline{0}$ hip.aux.

15) $t < u$ 9,14,teo 1.1,def.

16) $c \neq \overline{0} \rightarrow (t = u \vee t < u)$ 14,15,TD,taut.

17) $(c = \overline{0} \vee c \neq \overline{0}) \rightarrow (t = u \vee t < u)$ 13,16,taut.

18) $t = u \vee t < u$ 17,taut.

19) $AP \vdash t < u' \rightarrow (t = u \vee t < u)$ 1-18 TD

1.21) $AP \vdash t < u \rightarrow t \neq u$

1) $AP \vdash t = u \rightarrow (\sim(t < t \rightarrow \sim(t < u))$	teo 1.9
2) $AP \vdash \sim(t < t)$	teo 1.14
3) $AP \vdash t = u \rightarrow \sim(t < u)$	1,2,taut.
4) $AP \vdash t < u \rightarrow t \neq u$	3,4,taut.

1.22) $AP \vdash \overline{0} = t \quad V \quad \overline{0} < t$

1) $t \neq \overline{0}$	hip.
2) $\overline{0} \oplus t = t$	Ap. 5′
3) $\exists y(y \neq \overline{0} \wedge \overline{0} \oplus y = t)$	1,2,taut.,teo 1.1
4) $\overline{0} < t$	3,def.
5) $AP \vdash \overline{0} \neq t \rightarrow \overline{0} < t$	1-4 TD
6) $AP \vdash \overline{0} = t \quad V \quad \overline{0} < t$	5,def.

1.23) $AP \vdash t < u \rightarrow (t' = u \quad V \quad t' < u)$

1) $t < u$	hip.
2) $\exists w(w \neq \overline{0} \wedge w \oplus t = u)$	1,def.
3) $b \neq \overline{0} \wedge b \oplus t = u$	2,regra C
4) $b \neq \overline{0} \rightarrow \exists y(b = y')$	teo 1.13
5) $\exists y(b = y')$	3,4,taut.,MP
6) $b = c'$	5,regra C
7) $c' \neq \overline{0} \wedge c' \oplus t = u$	3,6,teo 1.9
8) $c \oplus \overline{1} \oplus t = u$	7,teo 1.11
9) $c \oplus t' = u$	8,taut,teo 1.11
10) $c = \overline{0}$	hip. aux.
11) $t' = u$	9,10,Ap. 5′
12) $c = \overline{0} \rightarrow (t' = u \quad V \quad t' < u)$	10,11 TD, taut.
13) $c \neq \overline{0}$	hip. aux.
14) $\exists \upsilon(\upsilon \neq \overline{0} \wedge \upsilon \oplus t' = u)$	9,13,teo 1.1
15) $t' < u$	14,def.
16) $c \neq \overline{0} \rightarrow (t' = u \quad V \quad t' < u)$	13-15 TD,taut.
17) $t' = u \quad V \quad t' < u$	12,16,taut.

18) $AP \vdash t < u \to (t' = u \lor t' < u)$	1-17 TD

1.24) $AP \vdash t \neq u \to (t < u \lor u < t)$

1) $AP \vdash x = \overline{0} \lor \overline{0} < x$	teo 1.22
2) $AP \vdash x = \overline{0} \lor x < \overline{0} \lor \overline{0} < x$	1,taut.
3) $AP \vdash (x = y \lor x < y) \to x < y'$	teo 1.18 e 1.19,taut.
4) $AP \vdash y < x \to (y' = x \lor y' < x)$	teo 1.23
5) $AP \vdash \forall y(x = y \lor x < y \lor y < x \to x = y' \lor x < y' \lor y' < x)$	3,4,taut.,GEN
6) $AP \vdash \forall y(x = y \lor x < y \lor y < x)$	2,5,Ap.$_9$,MP
7) $AP \vdash t = u \lor t < u \lor u < t$	6,GEN,Ax.$_4$
8) $AP \vdash t \neq u \to (t < u \lor u < t)$	7,def.

1.25) $AP \vdash \forall x(x = y \to B(x)) \leftrightarrow B(y)$,
se x não é livre em $B(y)$.

1) $AP \vdash \forall x(x = y \to B(x)) \to (y = y \to B(y))$	Ax.$_4$
2) $AP \vdash y = y$	teo 1.5
3) $AP \vdash \forall x(x = y \to B(x)) \to B(y)$	1,2,taut.
4) $AP \vdash x = y \to (B(y) \to B(x))$	teo 1.9
5) $AP \vdash B(y) \to (x = y \to B(x))$	4,taut.
6) $AP \vdash \forall x(B(y) \to (x = y \to B(x)))$	5, GEN
7) $AP \vdash B(y) \to \forall x(x = y \to B(x))$	6,Ax.$_5$
8) $AP \vdash \forall x(x = y \to B(x)) \leftrightarrow B(y)$	3,7,taut.

1.26) $AP \vdash \forall x(x < y' \to B) \leftrightarrow \forall x(x = y \to B) \land \forall x(x < y \to B)$

1) $\forall x(x < y' \to B)$	hip.
2) $x < y' \to B$	1,Ax.$_4$
3) $x < y \to x < y'$	teo 1.18
4) $x = y \to x < y'$	teo 1.19
5) $\forall x((x = y \to B) \land (x < y \to B))$	2,3,4,taut.,GEN
6) $\forall x(x = y \to B) \land \forall x(x < y \to B)$	5,teo 1.3

7) $AP \vdash \forall x(x<y' \to B) \to \forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B)$ 1-6, TD

8) $\forall x(x = y \to B) \wedge \forall x(x < y \to B)$ hip.

9) $x = y \to B$ 8, taut., Ax. 4

10) $x < y \to B$ 8, taut., Ax. 4

11) $(x = y \vee x < y) \to B$ 9, 10, taut.

12) $x < y' \to (x = y \vee x < y)$ teo 1.20

13) $\forall x(x < y' \to B)$ 11, 12, taut., GEN

14) $AP \vdash \forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B) \to \forall x(x<y' \to B)$ 8-13, TD

15) $AP \vdash \forall x(x<y' \to B) \leftrightarrow \forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B)$

7, 14, taut.

1.27) $AP \vdash A(x) \wedge A(y) \wedge \exists_1 x A(x) \to x = y$

1) $A(x)$ hip.

2) $A(y)$ hip.

3) $\exists_1 x A(x)$ hip.

4) $\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \to x = y)$ 3, def.

5) $A(x) \wedge A(y) \to x = y$ 4, taut., Ax. 4

6) $x = y$ 1, 2, 5, taut., MP

7) $AP \vdash A(x) \wedge A(y) \wedge \exists_1 x A(x) \to x = y$ 1-6 TD

3 - UM TEOREMA DE COMPLETUDE PARCIAL

Nesta seção mostraremos que AP é completa quando consideramos uma classe particular de fórmulas. Esse resultado de completude parcial, além de seu interesse intrínseco, será utilizado por nós posteriormente. Para apresentá-lo precisaremos de algumas noções auxiliares.

Lembramos que o *modelo padrão* de AP é a estrutura

$$\langle \mathbb{N}, =, +1, +, ., 0 \rangle$$ [7]

na qual $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais (universo da estrutura), = é a relação de igualdade, +1 é a operação que determina o sucessor (a interpretação do símbolo "'"), + é a soma usual, (a interpretação do símbolo "⊕"), . é a multiplicação usual (a interpretação do símbolo "⊙") e, finalmente, 0 é o número zero (a interpretação do símbolo "$\bar{0}$").

Por um abuso de linguagem, comum entre os matemáticos, usaremos $\mathbb{N}$ para designar tanto a estrutura quanto o seu universo, deixando ao contexto determinar qual é o caso.

Facilmente se mostra que $\mathbb{N}$, de fato, é um modelo de AP, i.e. todos os axiomas de AP são verdadeiros nesta estrutura. Conseqüentemente, todos os teoremas de AP são verdadeiros em $\mathbb{N}$.

---

[7] Observamos que estamos usando "=" como símbolo da linguagem formal, bem como para designar sua interpretação no modelo padrão.

Como é costumeiro, diremos que uma fórmula é verdadeira, se ela for verdadeira no modelo padrão.

As fórmulas Σo, são definidas por indução da seguinte maneira:

a) as fórmulas atômicas são fórmulas Σo;

b) se A e B forem fórmulas Σo, então $\sim A$ e $(A \rightarrow B)$ são fórmulas Σo.

c) se A e B forem fórmulas Σo e, além disso, A *for uma fórmula funcional na variável* y [8] que não contiver ocorrências livres da variável x, então $\forall x(\exists y(x<y \wedge A) \rightarrow B)$ é uma fórmula Σo.

Uma fórmula A é Σ_1 se existir uma fórmula Σo, B, tal que $AP \vdash A \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n B$ [9], onde $x_1, \ldots, x_n$ são algumas, eventualmente todas, variáveis livres em B.

LEMA 1.61 Para todo termo t que não contém ocerrências de variáveis, existe um número m tal que

$$AP \vdash t = \overline{m}$$

Prova por indução em t.

i) t é zero

$$AP \vdash t = \overline{0}$$

Hip. de indução: se r e s são termos menos complexo que t e não contêm variáveis, então existem números naturais m e n tais que

$$AP \vdash s = \overline{n} \quad e \quad AP \vdash r = \overline{m}.$$

---

[8] Dizemos que uma fórmula A é funcional na variável x se $AP \vdash \exists_1 x A$

[9] Escrevemos $\exists x_1, \ldots, x_n A$ no lugar de $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$

ii) t é s'

Pela hip. de indução, $AP\vdash s = \overline{n}$. Assim, pelo Ap.2 $AP\vdash s' = \overline{n}'$. Como $AP\vdash \overline{n}' = \overline{n+1}$, temos $AP\vdash s' = \overline{n+1}$. Portanto $AP\vdash t = \overline{n+1}$.

iii) t é $s \oplus r$

Pela hip. de indução $AP\vdash s = \overline{n}$ e $AP\vdash r = \overline{m}$. Logo, $AP\vdash s \oplus r = \overline{n} \oplus r$ e pelo teo 1.9 temos $AP\vdash s \oplus r = \overline{n} \oplus \overline{m}$. Assim, $AP\vdash s \oplus r = \overline{n+m}$. Portanto $AP\vdash t = \overline{n+m}$.

iv) t é $s \odot r$

Pela hip. de indução $AP\vdash s = \overline{n}$ e $AP\vdash r = \overline{m}$. Logo, $AP\vdash s \odot r = \overline{n} \odot r$ e pelo teo 1.9 temos $AP\vdash s \odot r = \overline{n} \odot \overline{m}$. Assim, $AP\vdash s \odot r = \overline{n.m}$. Portanto $AP\vdash t = \overline{n.m}$.

PROPOSIÇÃO 1.62 Seja A uma sentença Σo. Nestas condições temos que

A é verdadeira sse $AP\vdash A$

Prova.

Demonstraremos apenas que se A é verdadeira, então $AP\vdash A$, uma vez que a inversa decorre da correção de AP. Mais exatamente provaremos por indução, a partir da definição de fórmula Σo, o seguinte resultado

(i) se A é verdadeira, então $AP\vdash A$;

(ii) se A é falsa, então $AP\vdash \sim A$

Caso 1) A é da forma $t = u$, onde t e u são termos que não contêm ocorrências de variáveis.

Devemos provar que

se $t = u$ é verdadeiro, então $AP\vdash t = u$;

se $t = u$ é falso, então $AP\vdash t \neq u$.

Ora, segue da definição de verdade (no modelo padrão) que existem números naturais m e n, tais que $t = \overline{m}$ e $u = \overline{n}$ são fórmulas verdadeiras. Assim, pelo lema anterior,

$$AP \vdash t = \overline{m}$$

e

$$AP \vdash u = \overline{n}.$$

Logo, pelos teoremas da identidade

$$AP \vdash t = u \quad \text{sse} \quad AP \vdash \overline{m} = \overline{n}.$$

E, por outro lado, como $t = \overline{m}$ e $u = \overline{n}$ são verdadeiras,

$t = u$ é verdadeira sse $\overline{m} = \overline{n}$ é verdadeira.

Por conseguinte, é suficiente mostrar que

se $\overline{m} = \overline{n}$ é verdadeira, então $AP \vdash \overline{m} = \overline{n}$;

se $\overline{m} = \overline{n}$ é falsa, então $AP \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$.

Suponhamos inicialmente que $\overline{m} = \overline{n}$ é verdadeira. Logo, m é igual a n. Portanto, pelo teo 1.5 temos que $AP \vdash \overline{m} = \overline{n}$, uma vez que neste caso $\overline{m}$ é o mesmo termo que $\overline{n}$. Por outro lado, se a fórmula $\overline{m} = \overline{n}$ é falsa, então m é diferente de n. Assim, pelo teo 1.15 temos que $AP \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$.

Hip. indução:

Se B é uma sentença Σo menos complexa que A, então

se B é verdadeira, então $AP \vdash B$

e

se B é falsa, então $AP \vdash \sim B$

caso 2) A é $\sim B$

i) mostraremos: se $\sim B$ é verdadeira, então $AP \vdash \sim B$

Se $\sim B$ é verdadeira, pela def. de verdade, B é falsa. Assim, pela hip. de indução temos $AP \vdash \sim B$.

ii)Mostraremos: se $\sim B$ é falsa, então $AP \vdash \sim\sim B$

Se $\sim B$ é falsa, pela def. de verdade B é verdadeira. Assim, pela hip. de indução temos $AP \vdash B$. Logo, por taut. $AP \vdash \sim\sim B$.

Caso 3) A é $B \to C$

i) Mostraremos: se $B \to C$ é verdadeira, então $AP \vdash B \to C$

Se $B \to C$ é verdadeira, pela def. de verdade B é falsa ou C é verdadeira. Se B é falsa, pela hip. de indução $AP \vdash \sim B$. Assim, por taut. temos $AP \vdash B \to C$. Por outro lado, se C é verdaderira, pela hip. de indução $AP \vdash C$. Logo, por taut. $AP \vdash B \to C$.

ii) Mostraremos: se $B \to C$ é falsa, então $AP \vdash \sim(B \to C)$.

Se $B \to C$ é falsa, pela def. de verdade B é verdadeira e C é falsa. Assim, pela hip. de indução $AP \vdash B$ e $AP \vdash \sim C$. Logo, por taut. $AP \vdash \sim(B \to C)$.

No caso em que A é da forma $\forall x(\exists y(x < y \wedge B) \to C)$, onde B é funcional em y, faremos uso de uma asserção auxiliar. Observamos, inicialmente, que B não contém ocorrências de outras variáveis, salvo, no máximo, de y, uma vez que A é uma sentença.

ASSERÇÃO. $AP \vdash \exists y(x < y \wedge B) \leftrightarrow x < \overline{n}$, para algum número natural n.

Prova.

Como B é funcional em y,

$$AP \vdash \exists_1 y B,$$

i.e., $AP \vdash \exists y B \wedge \forall x \forall y(B(y) \wedge B(x) \to y = x)$.

Logo, $\exists_1 y B$ é verdadeira e, assim, como no máximo y ocorre livre em B, existe um número natural n, tal que tanto $B^{y}/\overline{n}$ como $\forall y(B(y) \to y = \overline{n})$ são verdadeiras. Logo, como B é Σ_0, por hip. de indução

$$AP \vdash B^{y}/\overline{n}$$

e, como também é funcional

$$AP \vdash \forall y(B(y) \to y = \overline{n}).$$

Portanto, $AP \vdash \exists y(x < y \wedge B) \leftrightarrow x < \overline{n}$.

Caso 4) A é $\forall x(\exists y(x < y \wedge B) \rightarrow C)$

Pela asserção anterior, precisamos mostrar apenas:

i) se $\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$ é verdadeira, então $AP \vdash \forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$.

Se $\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$ é verdadeira, pela def. de verdade $C(\bar{o})$, $C(\bar{1})$, ..., $C(\overline{n-1})$ são verdadeiras, e pela hip. de indução $AP \vdash C(\bar{o}) \wedge C(\bar{1}) \wedge \ldots \wedge C(\overline{n-1})$. Logo pelo teorema 1.16 e MP temos $AP \vdash \forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$.

ii) se $\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$ é falsa, então $AP \vdash \sim\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$

Se $\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$ é falsa, pela def. de verdade, para algum $m < n$, $\bar{m} < \bar{n}$ é verdadeira e $C(\bar{m})$ é falsa. Assim, pela hip. de indução $AP \vdash \bar{m} < \bar{n}$ e $AP \vdash \sim C(\bar{m})$. Logo, por taut. e teo 1.1 $AP \vdash \exists x(x < \bar{n} \wedge \sim C(x))$. Portanto, por def. e taut. temos $AP \vdash \sim\forall x(x < \bar{n} \rightarrow C)$.

PROPOSICÃO 1.63 (Teorema de Completude Parcial)

Se A é uma sentença Σ_1, então A é verdadeira sse $AP \vdash A$

Prova.

Por um lado, se $AP \vdash A$, então A é verdadeira. Por outro, pela definição de fórmula Σ_1, existe uma fórmula Σ_0, B, tal que $AP \vdash A \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n B$. Como A é uma sentença, podemos supor que $x_1, \ldots, x_n$ são as únicas variáveis livres em B. Desse modo, se A for verdadeira, $\exists x_1, \ldots, x_n B$ é verdadeira, e, portanto, existem números naturais $m_1, \ldots, m_n$ tais que $B(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$ é verdadeira. Logo, pela proposição anterior, $AP \vdash B(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$, e pelo teo 1.1 $AP \vdash \exists x_1, \ldots, x_n B$. Portanto $AP \vdash A$.

CAPÍTULO II

REPRESENTABILIDADE

Neste capítulo, mostraremos que AP é capaz de caracterizar, em certo sentido, a si mesmo enquanto um sistema formal; mais precisamente, mostraremos como interpretar no próprio sistema AP os conceitos, de cunho sintático-morfológico, que servem para caracterizá-lo. Para isso, consideramos inicialmente uma representação de AP na Teoria dos Números (não formalizada) e, em seguida, apresentamos a formalização desta representação.

1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para representarmos AP na Teoria dos Números, devemos fazer corresponder números aos símbolos de AP, bem como às suas expressões e provas. Ora, como as expressões de AP são seqüências finitas de símbolos e as provas, seqüências finitas de expressões, uma tal correspondência pode ser obtida ao associarmos números tanto aos símbolos de AP, quanto às seqüências numéricas finitas. Para determinar esta segunda corespondência, entre números e seqüências numéricas, lançaremos mão de uma função numérica caracterizada a partir da função β definida em SHOENFIELD (1987, p.115 ss). Observemos que esta função é análoga à função originalmente introduzida por Gödel para mostrar que, na teoria dos números, as definições por indução de relações numéricas podem ser transformadas em definições explícitas.

2 - ARITMETIZAÇÃO

2.1 - Representação de Seqüências Numéricas.

Além de algumas noções usuais da Teoria dos Números, como as de divisibilidade e primos relativos, que não definiremos aqui, faremos uso de noções peculiares que passamos a caracterizar.

Em primeiro lugar, caracterizamos uma operação binária que associa univocamente a cada par ordenado de números naturais um número natural. Esta função, que indicaremos por **po**, é determinada pela seguinte cláusula: para quaisquer números m e n

$$\mathbf{po}(m,n) = (m + n).(m + n) + m + 1.$$

Com efeito, podemos mostrar que **po** é uma função injetora, i.e, para quaisquer m_1, m_2, n_1 e n_2

se $\mathbf{po}(m_1,n_1) = \mathbf{po}(m_2,n_2)$, então $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$ [1].

Introduziremos, agora, uma relação numérica ternária, que denominaremos α, do seguinte modo: para quaisquer números naturais m, n e k, dizemos que eles estão na relação α se

---

[1] Aqui não procuraremos nem definir rigorosamente as noções que empregamos, nem demonstrar suas propriedades básicas, uma vez que faremos isso oportunamente no sistema formal por nós considerado.

existirem números naturais i e j tais que

$$m = \mathbf{po}(i,j) \text{ e } i \text{ é divisível por } 1+(\mathbf{po}(k,n)+1)j.$$

Escreveremos $\alpha(m,n,k)$ para indicar que os números m, n e k mantêm entre si a relação α. Desse modo, introduzimos a função *parcial* β estipulando que, para quaisquer m e n tais que existe k e $\alpha(m,n,k)$:

$$\beta(m,n) \text{ é o menor } k \text{ tal que } \alpha(m,n,k).$$

Usaremos esta função para associar números a seqüências numéricas, visto ser possível mostrar que, para toda seqüência numérica não vazia $s_0,\ldots,s_n$, existe um m, tal que, para $i \leq n$, $\beta(m,i)$ é s_i.

Agora, para cada seqüência numérica não vazia $s_1,\ldots,s_n$, tomamos a seqüência n, $s_1,\ldots,s_n$ e, desse modo, associamos a $s_1,\ldots,s_n$ o menor número natural m tal que,

$$\beta(m,0)=n \quad \text{e} \quad \beta(m,i)=s_i, \text{ para } 1\leq i\leq n;$$

e, à seqüência vazia, associamos o número zero. Esse número será chamado, então, o *número seqüência* de $s_1,\ldots,s_n$.

2.2 - Gödelização de AP

Acompanhando SHOENFIELD (1967), indicaremos apenas os números que correspondem às variáveis de AP: à i-ésima variável de AP associamos o número 2i. Quanto aos demais símbolos podemos atribuir qualquer número ímpar desde que a símbolos diferentes sejam atribuídos números diferentes.

Observemos que seqüências de símbolos de AP, i.e., expressões, determinam univocamente seqüências numéricas: a uma expressão de AP da forma $e_1, \ldots, e_n$ (onde $e_1, \ldots, e_n$ são símbolos de AP), associamos o número-seqüência da seqüência numérica $s_1, \ldots, s_n$, na qual s_i é o número associado a e_i, para $1 \leq i \leq n$. De maneira análoga, podemos atribuir números a seqüências de fórmulas, e em particular a provas de AP.

Como é usual, chamaremos o número associado a um símbolo (expressão ou prova) de número de Gödel do símbolo (expressão ou prova). Indicaremos por *ns*(u) o número associado ao símbolo u e por $\ulcorner e \urcorner$ [2] o número associado à expressão e. Observamos que, em particular, se e for um símbolo de AP, $\ulcorner e \urcorner$ denota o número-seqüência da seqüência cujo único elemento é o número de Gödel de e. Damos o nome de gödelização a este procedimento de associar números aos elementos da linguagem de AP.

Chamamos atenção para o fato de que a maioria dos autores seguem os originais de Gödel e empregam a fatoração em números primos para representar expressões e seqüências de fórmulas por números. Aqui, no entanto, preferimos seguir SHOENFIELD (1967) pelas razões apresentadas anteriormente.[3]

Relações entre símbolos e expressões de AP induzem, através da gödelização, relações numéricas. Assim, por exemplo, a uma propriedade qualquer de expressões, podemos

---

[2] Usaremos *ns*(u) e $\ulcorner e \urcorner$ também para indicar os numerais que denotam, respectivamente, os números de Gödel de u e e se o contexto não der lugar a dubiedades.

[3] *Cf* Introdução.

associar uma propriedade numérica, a saber, aquela satisfeita exatamente pelos números de Gödel das expressões que têm a propriedade sintática em questão. Neste sentido, podemos dizer que noções sintáticas, que dizem respeito a símbolos e expressões, podem ser representadas por noções numéricas.

Aqui não caracterizaremos de maneira explícita as noções numéricas que representam as noções sintáticas, uma vez que apresentaremos diretamente a formalização delas em AP.

3 - FORMALIZAÇÃO

Para a formalização da representação de AP nele próprio, apresentaremos as definições dos termos e fórmulas que expressam as noções numéricas que representam os conceitos básicos relativos a seqüências numéricas. Em seguida, introduziremos aquelas que representam as propriedades e operações morfológicas de AP. Por último, demonstraremos, em AP, algumas das propriedades básicas dos termos e das fórmulas introduzidas, que serão imprescindíveis para a obtenção dos resultados do próximo capítulo.

3.1 - Definições

Apresentaremos inicialmente aqueles termos e fórmulas que expressam as operações e relações numéricas empregadas na representação de seqüências por números.

Consideramos, então, $n \geq 1$ e $x_1, \ldots, x_n, x, y, v, w, z$ as $n+5$ primeiras variáveis da linguagem.

1) $po(x,y) =: (x \oplus y) \circ (x \oplus y) \oplus x \oplus \overline{1}$

2) $PR(x,y) =: \forall z\left[DIV(z \circ x, y) \rightarrow DIV(z,y)\right] \wedge x \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{0}$

3) $ALFA(x,y,z) =:$

$$\exists v,w_{<x}\left(x = po(v,w) \wedge DIV(v, \overline{1} \oplus (po(z,y) \oplus \overline{1}))\right)^{4}$$

4) $BETA(x,y,z) =: ALFA(x,y,z) \wedge \forall w\left[ALFA(x,y,w) \rightarrow z \leq w\right]$

5) $BETA_n(x,x_1,\ldots,x_n) =:$

$$BETA(x,\overline{0},\overline{n}) \wedge BETA(x,\overline{1},x_1) \wedge \ldots \wedge BETA(x,\overline{n},x_n)$$

Observemos que $po(x,y)$ é um termo de AP, ao passo que as demais expressões acima caracterizadas são fórmulas.

Estamos, agora, em condições de apresentar as fórmulas de AP que expressam as relações numéricas que, por sua vez, representam os conceitos básicos relativos a seqüências numéricas. Para facilitar a compreensão do leitor apresentamos, inicialmente, o conceito que se pretende representar e, em seguida, a fórmula que expressa, como será mostrado posteriormente, a correspondente relação numérica.

Consideremos, então, $n \geq 1$ e $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n, x, y, v, w, z$ as $2n+5$ primeiras variáveis da linguagem.

6) Ser a seqüência vazia.

$N.SEQ_0(x) =: x = \overline{0}$

7) Ser a seqüência cujos elementos são $s_1, \ldots, s_n$.

$N.SEQ_n(y,x_1,\ldots,x_n) =:$

$$BETA_n(y,x_1,\ldots,x_n) \wedge \forall z\left[z < y \rightarrow \sim BETA_n(z,x_1,\ldots,x_n)\right]$$

---

[4] Usaremos $\forall x_{<y}A$ e $\exists x_{<y}A$ como expressões abreviativas de $\forall x(x < y \rightarrow A)$ e $\exists x(x < y \wedge A)$ respectivamente, bem como $\forall x,y_{<w}A$ no lugar de $\forall x_{<w},y_{<w}A$

8) Ser uma seqüência.

$$SEQ(x) =: x=\bar{0} \vee \exists z\,(x\neq\bar{0} \wedge z\neq\bar{0} \wedge BETA(x,\bar{0},z) \wedge$$
$$\forall v_{\bar{1}\leq v\leq z}\exists w_{<x} BETA(x,v,w) \wedge \forall y_{<x}(BETA(y,\bar{0},z) \rightarrow$$
$$\exists v_{\bar{1}\leq v\leq z}\forall w(BETA(x,v,w) \leftrightarrow \sim BETA(y,v,w))))$$

9) Ser o comprimento de uma seqüência.

$$COMP(x,y) =: SEQ(x) \wedge ((x=\bar{0} \wedge y=\bar{0}) \vee (x\neq 0 \wedge BETA(x,\bar{0},y)))$$

10) Ser o i-ésimo elemento de uma seqüência de comprimento maior ou igual a i.

$$PROJ(x,y,z) =: \exists w_{\leq x}(COMP(x,w) \wedge \bar{1}\leq y\leq w \wedge BETA(x,y,z))$$

11) Ser a concatenação de n seqüências.

$$CC_n(x_1,\ldots,x_n,y) =: \exists z_{1\leq x_1}\ldots z_{n\leq x_n}\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}(COMP(x_i,z_i) \wedge$$
$$COMP(y,\sum_{i=1}^{n} z_i)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\forall x_{\bar{1}\leq z\leq z_i}\exists w_{\leq x_i}$$
$$(PROJ(x_i,z,w) \wedge PROJ(y,z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l,w))\Big)\Big)$$ [5]

Apresentaremos as definições das fórmulas de AP que pretendem representar as propriedades e operações morfológicas que empregamos, no cap. I, para a caracterização de AP.

12) Ser uma variável.

$$VAR(x) =: \exists y_{<x}(x = 2y)$$

13) Ser uma expressão constituída por uma única variável.

$$EVAR(x) =: \exists y_{\leq x}N.\,SEQ(\bar{2}y,x).$$

14) Ser uma expressão

---

[5] Notação: Sejam $t_1,\ldots,t_i$ termos quaisquer

$$\sum_{l=1}^{i} t_l = \begin{cases} \bar{0}\,, & \text{se } i=\bar{0} \\ t_1\oplus\ldots\oplus t_l\,, & \text{se } i\neq\bar{0} \end{cases}$$

$EXP(x) =: SEQ(x) \wedge \exists z_{\leq x} COMP(x,z) \wedge \forall w_{\bar{1} \leq v \leq z} \exists y_{\leq x} \big(PROJ(x,w,y) \wedge$

$\big(y = ns(() \vee y = ns()) \vee y = ns(\sim) \vee y = ns(\rightarrow) \vee$

$y = ns(=) \vee y = ns(\bar{0}) \vee y = ns(\oplus) \vee y = ns(\odot) \vee$

$y = ns(') \vee y = ns(\forall) \vee VAR(y)\big)\big)$

15) Ser uma expressão constituída pelo símbolo para soma ladeado por duas expressões.

$SOM(x,y,z) =: EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge EXP(z) \wedge CC_5(\ulcorner(\urcorner, x, \ulcorner\oplus\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, z)$

16) Ser uma expressão constituída pelo símbolo para produto ladeado por duas expressões.

$PROD(x,y,z) =: EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge EXP(z) \wedge CC_5(\ulcorner(\urcorner, x, \ulcorner\odot\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, z)$

17) Ser uma expressão constituída pelo símbolo para sucessor precedido de uma expressão.

$SUC(x,y) =: EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge CC\ (x, \ulcorner'\urcorner, y)$

Introduziremos a fórmula *LIM*, que irá representar uma noção auxiliar que fornece um limite superior para um número seqüência de uma seqüência. Tal noção será usada para caracterizar como Σo as fórmulas que expressam noções tais como "ser um termo" e "ser uma fórmula" [6]

18) $LIM(x,y) =: \big(SEQ(x) \wedge \exists z_{\leq x} \big(COMP(x,z) \wedge SEQ(y) \wedge COMP(y, z\oplus 1)$

$\wedge \forall v_{\bar{1} \leq v \leq z\oplus\bar{1}} PROJ(y, v, x\oplus\bar{1})\big)\big) \vee \big(\sim SEQ(x) \wedge y = \bar{0}\big)$

19) Ser a árvore de geração de um termo.

$A.TERM(x) =: SEQ(x) \wedge \exists x_{1 \leq x} \big(COMP(x, x_1) \wedge$

$\forall y_{1 \leq x_1} \exists y_{\leq x} \big(PROJ(x, y_1, y) \wedge (EVAR(y) \vee y = \ulcorner\bar{0}\urcorner \vee$

$\forall z_1, w_{1 < y_1} \exists z, w_{< y} (PROJ(x, z_1, z) \wedge PROJ(x, w_1, w) \wedge$

$(SOM(z,w,y) \vee PROD(z,w,y) \vee SUC(z,y))))\big)\big)$

---

[6] *Cf* definições 20 e 26

20) Ser um termo.

$$TERM(x) =: \exists y\big(\exists w(y<w \wedge LIM(x,w)) \wedge A.TERM(y) \wedge \exists z_{\leq x}\big(COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x)\big)\big)$$

21) Ser a negação de uma expressão.

$$NEG(x,y) =: EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge CC_4(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner\sim\urcorner, x, \ulcorner)\urcorner, y)$$

22) Ser um condicional formado por duas expressões.

$$IMP(x,y,z) =: EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge EXP(z) \wedge CC_5(\ulcorner(\urcorner, x, \ulcorner\rightarrow\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, z)$$

23) Ser a generalização de uma expressão com respeito a uma variável.

$$GEN(v,x,y) =: VAR(v) \wedge EXP(x) \wedge EXP(y) \wedge \exists z(N.SEQ(v,z) \wedge CC_5(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, z, x, \ulcorner)\urcorner, y)$$

24) Ser uma equação.

$$EQ(x,y,z) =: TERM(x) \wedge TERM(y) \wedge EXP(z) \wedge CC_5(\ulcorner(\urcorner, x, \ulcorner=\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, z)$$

25) Ser a árvore de geração de uma fórmula.

$$A.FLA(x) =: SEQ(x) \wedge \exists x1_{\leq x}\big(COMP(x,x_1) \wedge \forall y1_{\leq x1}\exists y_{\leq x}\big(PROJ(x,y_1,y) \wedge \exists t,u_{<y}(TERM(t) \wedge TERM(u) \wedge EQ(t,u,y)) \vee \exists z_1, w1_{<y1}\exists z,w_{<y}(PROJ(x,z_1,z) \wedge PROJ(x,w_1,w) \wedge (NEG(z,y) \vee IMP(z,w,y) \vee \exists v_{<y}(VAR(v) \wedge GEN(v,z,y))))\big)\big)$$

26) Ser uma fórmula.

$$FLA(x) =: \exists y\big(\exists w\big(y<w \wedge LIM(x,w)) \wedge A.FLA(y) \wedge \exists z_{\leq x}(COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x)\big)\big)$$

27) Ser uma variável que ocorre ligada no i-ésimo lugar de uma fórmula.

$$VLG(v,x,y) =: VAR(v) \wedge FLA(y) \wedge \exists x_1, x_2, x_3, x4_{\leq x}\big(FLA(x_4) \wedge GEN(v,x_3,x_4) \wedge CC_3(x_1,x_4,x_2,y) \wedge \exists x_5 x_{6\leq x}(COMP(x_1,x_5) \wedge COMP(x_4,x_6) \wedge x_5 \oplus \bar{1} \leq x \leq x_5 \oplus x_6)\big).$$

28) Ser uma variável que ocorre livre no i-ésimo lugar de uma fórmula.

$$VLL(v,x,y) =: VAR(v) \wedge FLA(y) \wedge PROJ(y,x,v) \wedge \sim VLG(v,x,y)$$

29) Ser uma variável que ocorre livre em uma fórmula.

$VL(v,y) =: VAR(v) \wedge FLA(y) \wedge \exists x_{<y} VLL(v,x,y)$

30) Ser uma variável que ocorre em um termo.

$VOT(v,x) =: VAR(v) \wedge TERM(x) \wedge \exists z_{\leq x}(COMP(x,z) \wedge \exists y_{\leq z} PROJ(x,y,v))$

31) Ser um termo livre para uma variável em uma fórmula.

$TLP(x,v,y) =: TERM(x) \wedge VAR(v) \wedge FLA(y) \wedge$

$$\forall z_1 z_2 w_{\leq y}\big(FLA(z_1) \wedge FLA(z_2) \wedge VAR(w) \wedge VOT(w,x) \wedge$$

$$GEN(w,z_1,z_2) \wedge \exists x_1 x_{2\,<y} CC(x_1,z_2,x_2,y) \rightarrow \sim VL(v,z_2)\big).$$

32) Ser o resultado de substituir em uma expressão o que ocorre no seu i-ésimo lugar por um termo.

$SU(x,y,z,w) =: EXP(x) \wedge \exists v\,(COMP(x,v) \wedge y \leq v) \wedge TERM(z) \wedge$

$$\exists x_1,\ldots,x_{5\,\leq x}\big(COMP(x_2,x_4) \wedge y = x_4 \oplus \bar{1} \wedge$$

$$PROJ(x,y,x_1) \wedge N.SEQ_1(x_1,x_5) \wedge$$

$$CC(x_2,x_5,x_3,x) \wedge CC(x_2,z,x_3,w)\big)$$

33) Ser o lugar de uma expressão no qual uma variável ocorre livre pela i+1-ésima vez, contando da direita para a esquerda, cujo valor é zero se a variável não ocorre livre na expressão.

$ST(x,v,y,z) =: VAR(v) \wedge EXP(y) \wedge \exists x_1\big(\exists w\big(x_1 < w \wedge LIM(y,w)\big) \wedge$

$$\exists x_{2\,\leq x}\big(SEQ(x_1) \wedge COMP(x_1,x) \wedge COMP(y,x_2) \wedge$$

$$PROJ(x_1,x,z) \wedge \forall x_{3\,\bar{1}\leq x_3 \leq x}\,\exists x_{4\,\leq x_2}(PROJ(x_1,x_3,x_4)$$

$$\wedge (VLL(v,x_4,y) \vee x_4 = \bar{0}) \wedge$$

$$(x_3 = \bar{1} \rightarrow \sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_2 \wedge VLL(v,x_5,y))) \wedge$$

$$(x_3 > \bar{1} \rightarrow (\exists x_{6\,\leq x_2}(PROJ(x_1,x_3 \dot{-} \bar{1},x_6) \wedge x_4 < x_6 \wedge$$

$$\sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_6 \wedge VLL(v,x_5,y)))))\big)\big)$$

34) Ser a quantidade de ocorrências livres de uma variável em uma expressão.

$A(v,x,y) =: VAR(v) \wedge EXP(x) \wedge ST(y,v,x,0) \wedge$

$$\forall w_{\leq x}(ST(w,v,x,0) \rightarrow y \leq w)$$

35) Ser o resultado de substituir em uma expressão as i-ésimas ocorrências livres de uma variável por um termo.

$$SB(x,y,v,w,z) =: EXP(y) \wedge VAR(v) \wedge TERM(w) \wedge EXP(z) \wedge$$

$$\exists x_1 \big(\exists w_1 \big(x_1 < w_1 \wedge LIM(z,w_1)\big) \wedge$$

$$SEQ(x_1) \wedge COMP(x_1,x) \wedge PROJ(x_1,x,z) \wedge$$

$$\forall x_{2\,\bar{1} \le x_2 \le x} \exists x_{3 \le x} \big(PROJ(x_1,x_2,x_3) \wedge (x_2 = \bar{1} \to x_3 = y)$$

$$\wedge (x_2 > \bar{1} \to \exists x_4 (PROJ(x_1, x_2 \dot{-} \bar{1}, x_4) \wedge$$

$$\exists z_1 (ST(x_2,v,y,z_1) \wedge SU(x_4,z_1,w,x_3))))\big)\big)$$

36) Ser o resultado de substituir em uma expressão todas as ocorrências livres de uma variável por um termo.

$$SUB(x,v,y,z) =: EXP(x) \wedge VAR(v) \wedge TERM(y) \wedge EXP(z) \wedge$$

$$\exists w_{\le x} \big(A(v,x,w) \wedge SB(w,x,v,y,z)\big).$$

37) Ser o numeral que designa um número

$$NUM(x,y) =: \exists v \big(\exists w (v < w \wedge LIM(y,w) \wedge SEQ(v) \wedge COMP(v,x \oplus \bar{1})$$

$$\wedge PROJ(v,\bar{1},\ulcorner\bar{0}\urcorner) \wedge PROJ(v,x\oplus\bar{1},y) \wedge \forall z (\bar{1} \le z \le x \to$$

$$\exists w_1 w_2 (PROJ(v,z,w_1) \wedge PROJ(v,z\oplus\bar{1},w_2) \wedge SUC(w_1,w_2)))\big)$$

38) Ser o resultado de substituir em uma expressão todas as ocorrências livres de uma variável por um dado numeral.

$$S(x,v,y,z) =: \exists w \big(SUB(x,v,w,z) \wedge NUM(y,w)\big)$$

39) Ser uma instância do esquema do axioma Ax.1.

$$AX1(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z_{<x} \big(FLA(y) \wedge FLA(z) \wedge$$

$$CC_9(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner(\urcorner, z, \ulcorner\to\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$$

40) Ser uma instância do esquema do axioma Ax.2.

$$AX2(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z,w_{<x} \big(FLA(y) \wedge FLA(z) \wedge FLA(w) \wedge$$

$$CC_{24}(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner(\urcorner, z, \ulcorner\to\urcorner, w, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y,$$

$$\ulcorner\to\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\to\urcorner, w, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$$

41) Ser uma instância do esquema do axioma Ax.3.

$$AX3(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z_{<x} \big(FLA(y) \wedge FLA(z) \wedge$$

$$CC\ (\ulcorner(\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner\sim\urcorner, z, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner\sim\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner\sim\urcorner, z,$$

$$\ulcorner\to\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner\to\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)$$

42) Ser uma instância do esquema do axioma Ax.4.

$AX_4(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,v,w_{<x}(FLA(y) \wedge EVAR(v) \wedge TERM(w)$

$\exists z_{\leq x}\left(SUB_1(y,v,w,z) \wedge CC_7(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, v, y, \ulcorner\rightarrow\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner, x)\right)$

$\wedge\ TLP(w,v,y)$

43) Ser uma instância do esquema do axioma Ax.5.

$AX_5(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z,v,w_{<x}\big(FLA(y) \wedge FLA(z) \wedge VAR(v)$

$N.SEQ(v,w) \quad \wedge \quad C_{17}(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, w, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\rightarrow\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner,$

$\ulcorner\rightarrow\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\rightarrow\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, w, z, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x) \quad \wedge \sim VL(v,y)\big).$

44) Ser um axioma lógico.

$AXl(x) =: AX_1(x) \vee AX_2(x) \vee AX_3(x) \vee AX_4(x) \vee AX_5(x).$

45) Ser uma instância do axioma Ap.1.

$AP_1(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z,w_{<x}\big(EVAR(y) \wedge EVAR(z) \wedge EVAR(w) \wedge$

$CC_{15}(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner=\urcorner, z, \ulcorner\rightarrow\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner=\urcorner, w, \ulcorner\rightarrow\urcorner, z, \ulcorner=\urcorner, w, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$

46) Ser uma instância do axioma Ap.2.

$AP_2(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z_{<x}\ \big(EVAR(y) \wedge EVAR(z) \wedge$

$CC_{11}(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner=\urcorner, z, \ulcorner\rightarrow\urcorner, y, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner=\urcorner, z, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$

47) Ser uma instância do axioma Ap.3.

$AP_3(x) =: FLA(x) \wedge \exists y_{<x}\big(EVAR(y) \wedge$

$CC_9(\ulcorner(\urcorner, \ulcorner\sim\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner 0\urcorner, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$

48) Ser uma instância do axioma Ap.4.

$AP_4(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z_{<x}\big(EVAR(y) \wedge EVAR(z) \wedge$

$CC_{11}(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner=\urcorner, z, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner\rightarrow\urcorner, y, \ulcorner=\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$

49) Ser uma instância do axioma Ap.5.

$AP_5(x) =: FLA(x) \wedge \exists y_{<x}\big(EVAR(y) \wedge CC_7(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\oplus\urcorner, \ulcorner 0\urcorner, \ulcorner=\urcorner, y, \ulcorner)\urcorner, x)$

50) Ser uma instância do axioma Ap.6.

$AP_6(x) =: FLA(x) \wedge \exists y,z_{<x}\ \big(EVAR(y) \wedge EVAR(z) \wedge$

$CC_{13}(\ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\oplus\urcorner, z, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner(\urcorner, y, \ulcorner\oplus\urcorner, z, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner'\urcorner, \ulcorner)\urcorner, x)\big)$

51) Ser uma instância do axioma Ap. 7.

$AP7(x) =: FLA(x) \wedge \exists y_{<x}(EVAR(y) \wedge$

$CC_7(\ulcorner (\urcorner, y, \ulcorner \odot \urcorner, \ulcorner \mathbf{0} \urcorner, \ulcorner = \urcorner, \ulcorner \mathbf{0} \urcorner, \ulcorner) \urcorner, x))$

52) Ser uma instância do axioma Ap. 8.

$AP8(x) =: FLA(x) \wedge \exists y, z_{<x} \big(EVAR(y) \wedge EVAR(z) \wedge$

$CC_{14}(\ulcorner (\urcorner, y, \ulcorner \odot \urcorner, z, \ulcorner ' \urcorner, \ulcorner = \urcorner, \ulcorner (\urcorner, y, \ulcorner \odot \urcorner, z, \ulcorner) \urcorner, \ulcorner \oplus \urcorner, y, \ulcorner) \urcorner, x)\big)$

53) Ser uma instância do esquema do axioma Ap. 9.

$AP9(x) =: FLA(x) \wedge \exists y, v, w_{<x}\big(FLA(y) \wedge N.SEQ(v, w) \wedge$

$\exists z_0 z_1 z_{2 \leq x}\big(SUB1(y, v, \ulcorner \bar{0} \urcorner, z_0) \wedge SUC(w, z_2) \wedge$

$SUB1(y, v, z_2, z_1) \wedge CC_{15}(\ulcorner (\urcorner, z_0, \ulcorner \rightarrow \urcorner, \ulcorner (\urcorner, \ulcorner \forall \urcorner, w, \ulcorner (\urcorner, y,$

$\ulcorner \rightarrow \urcorner, z_1, \ulcorner) \urcorner, \ulcorner \rightarrow \urcorner, \ulcorner \forall \urcorner, w, y, \ulcorner) \urcorner, \ulcorner) \urcorner, x)\big)\big)$

54) Ser um axioma próprio.

$AXP(x) =: AP1(x) \vee AP2(x) \vee AP3(x) \vee AP4(x) \vee AP5(x) \vee AP6(x)$

$\vee AP7(x) \vee AP8(x) \vee AP9(x).$

55) Ser um axioma.

$AX(x) =: AXL(x) \vee AXP(x).$

56) Ser uma prova.

$PROV(x) =: SEQ(x) \wedge \exists x1_{\leq x} \big(COMP(x, x_1) \wedge \forall y_{1 \leq x1} \exists y_{\leq x} \big(PROJ(x, y_1, y)$

$\wedge FLA(y) \wedge (AX(y) \vee \exists z_1, w1_{<y1} \exists z, w_{<y}(PROJ(x, z_1, z) \wedge$

$PROJ(x, w_1, w)) \wedge (IMP(w, y, z) \vee$

$\exists v_{<y}(VAR(v) \wedge GEN(v, z, y))))\big)\big)$

57) Ser uma prova de uma fórmula.

$PV(x, y) =: PROV(x) \wedge \exists z_{\leq x}\big(COMP(x, z) \wedge PROJ(x, z, y)\big)$

58) Ser um teorema.

$DEM(x) =: \exists y PV(y, x)$

3.2 - Propriedades

Apresentaremos algumas das propriedades básicas dos termos e fórmulas que acabamos de definir.

PROPOSIÇÃO 2.1 Sejam $k_1, \ldots, k_n$, m e n números naturais quaisquer.

1) $po(\bar{m},\bar{n}) = \bar{k}$ é verdadeira sse $po(m,n) = k$.

2) $PR(\bar{m},\bar{n})$ é verdadeira sse m e n são primos relativos.

3) $ALFA(\bar{m},\bar{n},\bar{k})$ é verdadeira sse $\alpha(m,n,k)$.

4) $BETA(\bar{m},\bar{n},\bar{k})$ é verdadeira sse $\beta(m,n)$ é k.

5) $BETA_n(\bar{m},\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_n)$ é verdadeira sse $\beta(m,0)$ é n, $\beta(m,1)$ é k_1, ..., e $\beta(m,n)$ é k_n.

6) $N.SEQ_0(\bar{m})$ é verdad. sse m é o número-seqüência de $\langle\ \rangle$

7) $N.SEQ_n(\bar{m},\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_n)$ é verdadeira sse m é o número-seqüência de $\langle k_1,\ldots,k_n \rangle$.

8) $SEQ(\bar{m})$ é verdadeira sse m é um número-seqüência.

9) $COMP(\bar{m},\bar{n})$ é verdadeira sse n é o comprimento da seqüência cujo número-seqüência é m.

10) $PROJ(\bar{m},\bar{n},\bar{k})$ é verdadeira sse k é o n-ésimo elemento da seqüência cujo número-seqüência é m.

11) $CC_n(\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_n,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número-seqüência da concatenação das seqüências cujos números-seqüências são $k_1,\ldots,k_n$.

12) $VAR(\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma variável.

13) $EVAR(\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão constituída apenas por uma variável.

14) $EXP(\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma expressão.

15) $SOM(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão $(e_1 \oplus e_2)$, onde e_1 e e_2 são expressões cujos números de Gödel são respectivamente k_1 e k_2.

16) $PROD(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão $(e_1 \odot e_2)$, onde e_1 e e_2 são expressões

cujos números de Gödel são respctivamente k_1 e k_2.

17) *SUC*$(\bar{k},\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão (e_1'), onde e_1 é a expressão com número de Gödel k.

18) *LIM*$(\bar{m},\bar{n})$ é verdadeira sse n é o número-seqüência da seqüência cujo comprimento é o comprimento da seqüência cujo número-seqüência é m mais um e cujos componentes são o próprio m+1 ou m não é número-seqüência e n = 0.

19) *A.TERM*(m) é verdadeira sse m é o número de Gödel da árvore de geração de um termo.

20) *TERM*$(\bar{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel de um termo.

21) *NEG*$(\bar{k},\bar{m})$ é verdadeira sse m é número de Gödel da expressão $(\sim e_1)$, onde e_1 é a expressão cujo número de Gödel é k.

22) *IMP*$(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão $(e_1 \rightarrow e_2)$, onde e_1 e e_2 são expressões cujos números de Gödel são k_1 e k_2.

23) *GEN*$(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão que é a generalização da expressão com número de Gödel k_2 com respeito a variável com número de Gödel k_1.

24) *EQ*$(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão $(e_1 = e_2)$, onde e_1 e e_2 são termos com números de Gödel k_1 e k_2.

25) *A.FLA*$(\bar{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da árvore de geração de uma fórmula.

26) *FLA*$(\bar{m})$ sse m é o número de Gödel de uma fórmula.

27) *VLGL*$(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3)$ é verdadeira sse a variável com número de Gödel k_1 é ligada no k_2-ésimo lugar da fórmula com número de Gödel k_3.

28) *VLL*$(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3)$ é verdadeira sse a variável com número de Gödel k_1 é livre no k_2-ésimo lugar da fórmula com número de Gödel k_3.

29) $VL(\overline{k}_1, \overline{k}_2,)$ é verdadeira sse a variável com número de Gödel k_1 é livre na fórmula com número de Gödel k_2.

30) $VOT(\overline{k}_1, \overline{k}_2,)$ é verdadeira sse a variável com número de Gödel k_1 ocorre no termo com número de Gödel k_2.

31) $TLP(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3)$ é verdadeira sse o termo com número de Gödel k_1 é livre para a variável com número de Gödel k_2 na fórmula com número de Gödel k_3.

32) $SU(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4)$ é verdadeira sse k_4 é o número de Gödel da expressão que é o resultado de substituir o que ocorre no k_2-ésimo lugar da expressão com número de Gödel k_1 pelo termo com número de Gödel k_3.

33) $ST(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{m})$ é verdadeira sse m é o lugar da expressão com número de Gödel k_3, no qual a variável com número de Gödel k_2 ocorre livre pela k_1+1-ésimao vez, contando da direira para esquerda, ou m = 0, se a variável não ocorre livre na expressão.

34) $A(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de ocorrências livres da variável com número de Gödel k_1 na expresão com número de Gödel k_2.

35) $SB(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4, \overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão que resulta daquela cujo número de Gödel é k_2 ao substituirmos as k_1-últimas ocorrências livres da variável com número de Gödel k_3 pelo termo com número de Gödel k_4.

36) $SUB(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel da expressão que é o resultado de substituir na expressão com número de Gödel k_1 todas as ocorrências livres da variável com número de Gödel k_2 pelo termo com número de Gödel k_3.

37) $NUM(\overline{k}_1, \overline{k}_2)$ é verdadeiro sse k_2 é o número de Gödel do termo $\overline{k}_1$.

38) $S(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{m})$ é verdadeiro sse m é número de Gödel da expressão que é o resultado de substituir na expressão com número de Gödel k_1 todas as ocorrências

livres da variável com número de Gödel k_2 por $\overline{k}_3$ (isto é, pelo numeral $\overline{k}_3$)

39) $AX_1(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instância do esquema do axioma Ax.1.

40) $AX_2(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instância do esquema do axioma Ax.2.

41) $AX_3(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instância do esquema do axioma Ax.3.

42) $AX_4(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instância do esquema do axioma Ax.4.

43) $AX_5(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instância do esquema do axioma Ax.5.

44) $AXL(\overline{m})$ é verdadeira sse é o número de Gödel de um axioma lógico.

45) $AP_1(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.1

46) $AP_2(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.2

47) $AP_3(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.3

48) $AP_4(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.4

49) $AP_5(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.5

50) $AP_6(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.6

51) $AP_7(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.7

52) $AP_8(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel do axioma Ap.8

53) $AP_9(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de uma instácia do esquema do axioma Ap.9.

54) $AXP(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o número de Gödel de um axioma próprio.

55) $AX(\overline{m})$ é verdadeira sse m é o nº de Gödel de um axioma.

56) $PROV(\overline{m})$ é verdad. sse m é o nº de Gödel de uma prova.

57) $PV(\overline{k}_1,\overline{k}_2)$ é verdadeira sse k_1 é o número de Gödel da prova da fórmula com número de Gödel k_2.

Prova. A partir do resultado de MENDELSON (1987,pag 124) de que $AP\vdash \overline{m+n} = \overline{m} \oplus \overline{n}$ e $AP\vdash \overline{m.n} = \overline{m} \odot \overline{n}$, podemos mostrar que

i) $\quad \overline{m} \oplus \overline{n} = \overline{k}$ é verdadeira sse $m + n = k$.

ii) $\quad \overline{m} \odot \overline{n} = \overline{k}$ é verdadeira sse $m \cdot n = k$.

Por outro lado, observamos que cada item é conseqüência de (i), (ii) ou dos anteriores, considerando, eventualmente, os seguintes fatos: se $\beta(m,n)=k$, então $k < m$ e para todo $k_1, \ldots, k_n$ existe um m tal que $\beta(m,0)=n$, $\beta(m,1)=k_1, \ldots, \beta(m,n)=k_n$.

Para quaisquer termos s, s_1, s_2, t, t_1, t_2, u, r temos que

TEOREMA 2.2 $\quad AP\vdash po(t_1,s_1) = po(t_2,s_2) \rightarrow (t_1 = t_2 \wedge s_1 = s_2)$

TEOREMA 2.3 $\quad AP\vdash t < u \rightarrow po(t,s) < po(u,s)$

TEOREMA 2.4 $\quad AP\vdash t < s \wedge u < r \rightarrow po(t,u) < po(s,r)$

TEOREMA 2.5 $\quad AP\vdash \exists z(po(x,y) = z)$

TEOREMA 2.6 $\quad AP\vdash PR(t,s) \rightarrow PR(s,t)$

TEOREMA 2.7 $\quad AP\vdash t\neq\overline{0} \wedge s\neq\overline{0} \wedge DIV(s,t) \rightarrow PR(\overline{1} \oplus (u\oplus t)s, \overline{1}\oplus us)$

TEOREMA 2.8 $\quad AP\vdash \exists z\big(\forall x(x < w \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y((\forall x(x < w \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1}) \rightarrow \sim DIV(z,y))\big)$

TEOREMA 2.9 $\quad AP\vdash \forall v\forall x(A \rightarrow v<w \wedge x<w) \rightarrow \exists z(\forall v\forall x(A \rightarrow DIV(z,t)) \wedge \forall y(y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \wedge \forall v\forall x(A \rightarrow PR(t,y)) \rightarrow \sim DIV(z,y)))$

TEOREMA 2.10 $\quad AP\vdash BETA(t,u,s_1) \wedge BETA(t,u,s_2) \rightarrow s_1 = s_2$

TEOREMA 2.11 $\quad AP\vdash \forall v\forall x(A \rightarrow v < w_1 \wedge x < w_1) \rightarrow \exists y\forall v\forall x(A \rightarrow BETA(y,v,x))$ [7]

TEOREMA 2.12 $\quad AP\vdash \forall x_1,\ldots x_n \exists y(BETA(y,0,n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} BETA(y,i,x_i))$

TEOREMA 2.13 $\quad AP\vdash \exists_1 yN.\, SEQ_n(y,x_1,\ldots,x_n)$

TEOREMA 2.14 $\quad AP\vdash SEQ(x) \rightarrow \exists_1 zCOMP(x,z)$

TEOREMA 2.15 $\quad AP\vdash COMP(x,w) \wedge 1\leq y\leq w \rightarrow \exists_1 zPROJ(x,y,z)$

---

[7] Este esquema nos possibilita mostrar algumas propriedades que dizem respeito a seqüências numéricas finitas, se tomarmos como A a fórmula que expressa a seqüência desejada. Veja, por exemplo, os esquemas 2.12 e 2.16 (e suas demonstrações) que são, respectivamente, a formalização das propriedades "para toda seqüência numérica, existe um número que a representa" e "existe uma seqüência que é a concatenação de outras seqüências finitas".

TEOREMA 2.16 AP$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i) \rightarrow \exists_1 y CC(x_1, \ldots x_n, y)$

TEOREMA 2.17 AP$\vdash COMP(x,z) \rightarrow \exists_1 y LIM(x,y)$

TEOREMA 2.18 AP$\vdash A.TERM(y) \wedge LIM(x,w) \wedge$

$\exists z_{\leq x}(COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x)) \rightarrow y < w$

TEOREMA 2.19 AP$\vdash ST(x,v,y,z_1) \wedge ST(x,v,y,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

TEOREMA 2.20 AP$\vdash SB(x,y,v,w,z_1) \wedge SB(x,y,v,w,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

TEOREMA 2.21 AP$\vdash SUB(x,y,v,z_1) \wedge SUB(x,y,v,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

TEOREMA 2.22 AP$\vdash \exists_1 y NUM(x,y)$

TEOREMA 2.23 AP$\vdash \exists_1 z S(x,v,y,z)$

A seguir, demonstraremos os teoremas acima citados.

teo 2.2 AP$\vdash po(t_1,s_1) = po(t_2,s_2) \rightarrow (t_1 = t_2 \wedge s_1 = s_2)$

Prova.

1) $po(t_1,s_1) = po(t_2,s_2)$ hip.

2) $t_1 \oplus s_1 \neq t_2 \oplus s_2 \vee t_1 \oplus s_1 = t_2 \oplus s_2$ taut.

3) $t_1 \oplus s_1 \neq t_2 \oplus s_2$ hip.aux.

4) $t_1 \oplus s_1 < t_2 \oplus s_2 \vee t_2 \oplus s_2 < t_1 \oplus s_1$ 3,teo 1.24,MP

5) $t_1 \oplus s_1 < t_2 \oplus s_2$ hip.aux.

6) $po(t_1,s_1) = (t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus t_1 \oplus \overline{1}$ def.po,teo 1.5

7) $(t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus t_1 \oplus \overline{1} \leq (t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus \overline{2}(t_1 \oplus s_1) \oplus \overline{1}$ teo 1.28

8 $(t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus \overline{2}(t_1 \oplus s_1) \oplus \overline{1} \leq (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2)$ 5,teo 1.29

9) $(t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) < (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \overline{1}$ teo 1.30,1.53

10) $(t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \overline{1} = po(t_2,s_2)$ def. po,teo 1.5

11) $po(t_1,s_1) < po(t_2,s_2)$ 6-10 teo 1.54,1.9

12) $po(t_1,s_1) \neq po(t_2,s_2)$ 11,teo 1.21

13) $t_1 = t_2 \wedge s_1 = s_2$ 1,12 taut.

14) $t_1 \oplus s_1 < t_2 \oplus s_2 \rightarrow t_1 = t_2 \wedge s_1 = s_2$ 5-13 TD

15) $t_2 \oplus s_2 < t_1 \oplus s_1$ hip.aux.

16) $po(t_2,s_2) = (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \overline{1}$ def.de po

17) $(t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \overline{1} \leq (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus \overline{2}(t_2 \oplus s_2) \oplus \overline{1}$ teo 1.28

18) $(t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus \bar{2}(t_2 \oplus s_2) \oplus \bar{1} \le (t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1)$ 15, teo 1.29

19) $(t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) < (t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus t_1 \oplus \bar{1}$ teo 1.53

20) $(t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus t_1 \oplus \bar{1} = po(t_1, s_1)$ def. de *po*

21) $po(t_2, s_2) < po(t_1, s_1)$ 18-20, teo 1,54,1.9

22) $po(t_2, s_2) \neq po(t_1, s_1)$ 21, teo 1.21

23) $t_1 = t_2 \ \wedge \ s_1 = s_2$ 1,22,taut.

24) $t_2 \oplus s_2 < t_1 \oplus s_1 \ \rightarrow \ t_1 = t_2 \ \wedge \ s_1 = s_2$ 15-23 TD

25) $t_1 \oplus s_1 \neq t_2 \oplus s_2 \ \rightarrow \ t_1 = t_2 \ \wedge \ s_1 = s_2$ 3-24,taut,TD

26) $t_1 \oplus s_1 = t_2 \oplus s_2$ hip. aux.

27) $(t_1 \oplus s_1)(t_1 \oplus s_1) \oplus t_1 \oplus \bar{1} = (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \bar{1}$ 1,def.

28) $(t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_1 \oplus \bar{1} = (t_2 \oplus s_2)(t_2 \oplus s_2) \oplus t_2 \oplus \bar{1}$ 26,27,teo 1.9

29) $t_1 = t_2$ 28,teo 1.31

30) $t_2 \oplus s_1 = t_2 \oplus s_2$ 26,29,teo 1.9

31) $s_1 = s_2$ 30,teo 1.31

32) $t_1 \oplus s_1 = t_2 \oplus s_2 \ \rightarrow \ t_1 = t_2 \ \wedge \ s_1 = s_2$ 26-31,taut,TD

33) $t_1 = t_2 \ \wedge \ s_1 = s_2$ 2,25,32,taut.

34) $AP \vdash \ po(t_1, s_1) = po(t_2, s_2) \rightarrow t_1 = t_2 \wedge s_1 = s_2$ 1-33,TD

teo 2.3 $AP \vdash t < u \ \rightarrow po(t,s) < po(u,s)$

Prova.

1) $t < u$ hip.

2) $t \oplus s < u \oplus s$ 1,teo 1.33

3) $(t \oplus s)(t \oplus s) < (u \oplus s)(u \oplus s)$ 2,teo 1.32

4) $(t \oplus s)(t \oplus s) \oplus t \oplus \bar{1} < (u \oplus s)(u \oplus s) \oplus u \oplus \bar{1}$ 1,3,teo1.32,1.34

5) $po(t,s) < po(u,s)$ 4,def de *po*

6) $AP \vdash t < u \ \rightarrow \ po(t,s) < po(u,s)$ 1-6,TD

teo 2.4 $AP\vdash t < s \wedge u < r \rightarrow po(t,u) < po(s,r)$

Prova.

1) $t < s \wedge u < r$ hip.

2) $t \oplus u < s \oplus r$ 1,teo 1.34

3) $(t \oplus u)(t \oplus u) < (s \oplus r)(s \oplus r)$ 2,teo 1.32

4) $(t \oplus u)(t \oplus u) \oplus t \oplus \overline{1} < (s \oplus r)(s \oplus r) \oplus s \oplus \overline{1}$

1.3,teo 1.33,1.34

5) $po(t,u) < po(s,r)$ 4,def.

6) $AP\vdash t < s \wedge u < r \rightarrow po(t,u) < po(s,r)$ 1-5 TD

teo 2.5 $AP\vdash \exists z(po(x,y) = z)$

Prova.

1) $AP\vdash po(x,y) = po(x,y)$ teo 1.5

2) $AP\vdash \exists z(po(x,y) = z)$ 1,teo 1.1

teo 2.6 $AP\vdash PR(t,s) \rightarrow PR(s,t)$

Prova.

1) $PR(t,s)$ hip.

2) $\forall x(DIV(xt,s) \rightarrow DIV(x,s)) \wedge t \neq \overline{0} \wedge s \neq \overline{0}$ 1,def. *PR*

3) $DIV(ys,t)$ hip.

4) $\exists x(ys = xt)$ 3,def. de *DIV*

5) $ys = xt$ 4,regra C

6) $\exists y(xt = ys)$ 5,teo 1.1

7) $DIV(xt,s)$ 6,def de *DIV*

8) $DIV(x,s)$ 2,7,Ax.4,MP

9) $\exists w(x = sw)$ 8,def de *DIV*

10) $x = sw$ 8,regra C

11) $ys = swt$ 5,10,teo 1.9

12) $y = wt$ 2,11,teo.1.35

13) $DIV(y,t)$ 12,teo 1.1,def de *DIV*

14) $PR(s,t)$ 3-13,TD,GEN, def.

15) $AP\vdash PR(t,s) \rightarrow PR(s,t)$ 1-14,TD

teo 2.7 $AP \vdash t \neq \overline{0} \wedge s \neq \overline{0} \wedge DIV(s,t) \rightarrow$

$PR(1 \oplus (u \oplus t)s,\ 1 \oplus us)$

Prova

1) $t \neq \overline{0} \wedge s \neq \overline{0} \wedge DIV(s,t)$	hip.
2) $DIV(x \oplus xus, s) \rightarrow DIV(x,s)$	teo 1.36,1.40,1.37
3) $\forall x(DIV(x(\overline{1} \oplus us),s) \rightarrow DIV(x,s))$	2,teo 1.38,1.9,GEN
4) $(\overline{1} \oplus us) \neq \overline{0}$	Ap.3, teo 1.11
5) $PR(\overline{1} \oplus us, s)$	1,3,4 def. *PR*
6) $PR(s, \overline{1} \oplus us)$	5,teo 2.6
7) $DIV(x(\overline{1} \oplus (u \oplus t)s), \overline{1} \oplus us)$	hip.
8) $DIV(x(\overline{1} \oplus us) \oplus xts, \overline{1} \oplus us)$	7,teo 1.38,1.9
9) $DIV(xts, \overline{1} \oplus us)$	8,teo 1.36,1.40,1.37
10) $\forall z(DIV(zs, \overline{1} \oplus us) \rightarrow DIV(z, \overline{1} \oplus us)$	6,def de *PR*
11) $DIV((xt, \overline{1} \oplus us)$	9,10,Ax.4 MP
12) $\exists y(xt = (\overline{1} \oplus us)y)$	11,def *de DIV*
13) $\exists z(s = tz)$	1,def *de DIV*
14) $xt = (\overline{1} \oplus us)y$	12,regra C
15) $s = tz$	13,regra C
16) $xs = xtz$	15, teo 1.39
17) $xs = (\overline{1} \oplus us)yz$	14,16,teo 1.9
18) $DIV(xs, \overline{1} \oplus us)$	17,teo 1.1,def. de *DIV*
19) $\forall x(DIV(xs, \overline{1} \oplus us) \rightarrow DIV(x, \overline{1} \oplus us)$	6,def.de *PR*
20) $DIV(x, \overline{1} \oplus us)$	18,19,Ax.4, MP
21) $PR(\overline{1} \oplus (u \oplus t)s,\ \overline{1} \oplus u$	7-20,TD,GEN,def. de *PR*
22) $AP \vdash t \neq \overline{0} \wedge s \neq \overline{0} \wedge DIV(s,t) \rightarrow PR(\overline{1} \oplus (u \oplus t)s, \overline{1} \oplus us)$	1-21,TD

teo 2.8 $AP \vdash \exists z\big(\forall x(x < w \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge$

$\forall y(\forall x((x < w \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq 0 \wedge y \neq 1) \rightarrow$

$\sim DIV(z,y))\big)$

Prova.

Faremos a demonstração deste teorema usandoo axioma Ap.9, onde $F(w)$ é a fórmula $\exists z(\forall x(x < w \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge$

$\forall y(\forall x(x < w \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(z,y)))$.
Assim, na linha (5) obteremos $F(\overline{0})$ e na linha (34), $\forall w(F(w) \to F(w'))$.

1) $AP \vdash \sim(x < \overline{0} \wedge A)$ — teo 1.17, taut.

2) $AP \vdash \forall x(x < \overline{0} \wedge A \to DIV(\overline{1},x))$ — 1, taut., GEN

3) $AP \vdash y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(\overline{1},y)$ — teo 1.45

4) $AP \vdash \forall y(\forall x(x < \overline{0} \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(\overline{1},y))$ — 3, taut., GEN

5) $AP \vdash \exists z(\forall x(x < \overline{0} \wedge A \to DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < \overline{0} \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(z,y)))$ — 2, 4, taut., teo 1.1

6) $\forall x \sim(x < w' \wedge A)$ — hip. aux.

7) $\forall x(x < w' \wedge A \to DIV(\overline{1},x))$ — 6, Ax. 4, taut., GEN

8) $\forall y(\forall x(x < w' \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(\overline{1},y))$ — 3, taut., GEN

9) $\exists z(\forall x(x < w' \wedge A \to DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w' \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(z,y)))$ — 7, 8, taut., teo 1.1

10) $AP \vdash \forall x \sim(x < w' \wedge A) \to \exists z(\forall x(x < w' \wedge A \to DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w' \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(z,y)))$ — 6-9, TD

11) $\exists x(x < w' \wedge A)$ — hip. Aux.

12) $v < w' \wedge A^{x}/v \wedge \forall x(x < w' \wedge A \to x \leq v)$ — 11, teo 1.46, regra C

13) $x < w' \wedge A$ — hip.

14) $v \leq w$ — 12, teo 1.20

15) $x = w \to v \leq x$ — 14, teo 1.9, taut.

16) $x = w \to x = v$ — 12, 13, 15, teo, 1.41, taut.

17) $x = w \to DIV(zv,x)$ — 16, teo 1.36, 1.40, 1.9, taut.

18) $\forall x(x < w \wedge A \to DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w \wedge A \to PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \to \sim DIV(z,y)))$ — hip.

19) $x < w \to DIV(z,x)$ — 13, 18, Ax. 4, taut.

20) $x < w \to DIV(zv,x)$ — 19 teo 1.40

21) $DIV(zv,x)$ — 13, 17, 20, teo 1.20

22) $\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow DIV(zv,x))$ 13-21, TD, GEN

23) $\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1}$ hip.

24) $v < w' \wedge A^{x}/v \rightarrow PR(v,y)$ 23, taut., Ax. 4

25) $PR(v,y)$ 12, 24, taut.

26) $DIV(zv,y) \rightarrow DIV(z,y)$ 25, def. de PR, Ax. 4

27) $\forall x(x < w \wedge A \rightarrow PR(x,y))$ 23, Ax. 4, teo 1.18, GEN

28) $\sim DIV(z,y)$ 18, 23, 27, taut.

29) $\sim DIV(zv,y)$ 26, 28 taut.

30) $\forall y(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(zv,y))$
23-29, TD, GEN

31) $\exists z(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$ 22, 30, taut, teo 1.1

32) $\exists x(x < w' \wedge A) \rightarrow \exists z(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x<w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$
11-31 TD

33) $\exists z(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$ 10, 32 taut.

34) $AP\vdash \forall w(\exists z(\forall x(x<w \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))) \rightarrow (\exists z(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x < w' \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y))))$ 18-33, TD, GEN

35) $AP\vdash \exists z(\forall x(x < w \wedge A \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x<w \wedge A \rightarrow PR(x,y)) \wedge y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$
5, 34, Ap. 9, MP, Ax. 4

teo 2.9 $AP\vdash \forall v\forall x(A \rightarrow v<w \wedge x<w) \rightarrow \exists z(\forall v\forall x(A \rightarrow DIV(z,t)) \wedge \forall y(y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \wedge \forall v\forall x(A \rightarrow PR(t,y)) \rightarrow \sim DIV(z,y)))$

Prova. Seja u o termo $t^{v}/w\ {}^{x}/w$

0) $AP\vdash \exists z(\forall x(x<w \wedge B \rightarrow DIV(z,x)) \wedge \forall y(\forall x(x<w \wedge B \rightarrow PR(x,y)) \wedge y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$ teo 2.8

1) $\forall x_1(x_1 < u \wedge \exists v\exists x(A \wedge t = x_1) \rightarrow DIV(z,x_1)) \wedge \forall y(\forall x_1(x_1 < u \wedge \exists v\exists x(A \wedge t = x_1) \rightarrow PR(x_1,y)) \wedge y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \rightarrow \sim DIV(z,y)))$ 0, regra C, onde B é $\exists v\exists x(A \wedge t = x_1)$

2) $\forall v\forall x(A \rightarrow v < w \wedge x < w)$ hip.

3) $v < w \;\wedge\; x < w \;\rightarrow\; t < u$ teo 1.44

4) $\forall v \forall x (A \rightarrow t < u)$ 2,3,Ax.4,taut.,GEN

5) $t < u \;\wedge\; \exists v \exists x (A \wedge t = t) \rightarrow DIV(z,t)$ 1,Ax.4,taut.

6) A hip.

7) $t < u$ 4,6,Ax.4,taut.

8) $\exists v \exists x (A \wedge t = t)$ 6,taut.,teo 1.1,teo 1.5

9) $DIV(z,t)$ 5,7,8,taut.

10) $\forall v \forall x (A \rightarrow DIV(z,t))$ 6-9,TD

11) $y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \wedge \forall v \forall x (A \rightarrow PR(t,y))$ hip.

12) $t = x_1 \rightarrow (PR(t,y) \rightarrow PR(x_1,y)$ teo 1.9

13) $\exists v \exists x (A \wedge t=x_1) \rightarrow PR(x_1,y)$ 11,12 taut,Ax4,teo 1.1

14) $\forall x_1 (x_1 < u \;\wedge\; \exists v \exists x (A \wedge t=x_1) \rightarrow PR(x_1,y))$ 14,taut,GEN

15) $\sim DIV(z,y)$ 1,11,15,taut.,Ax.4

16) $\forall y(y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \wedge \forall v \forall x (A \rightarrow PR(t,y)) \rightarrow \sim DIV(z,y))$

11-15,TD,GEN

17) $\exists z (\forall v \forall x (A \rightarrow DIV(z,t)) \;\wedge\; \forall y (y \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{1} \wedge$
$\forall v \forall x (A \rightarrow PR(t,y)) \rightarrow \sim DIV(z,y)))$ 10,16,taut,teo 1.1

19) $AP \vdash \forall v \forall x (A \rightarrow v < w \;\wedge\; x < w) \rightarrow \exists z (\forall v \forall x (A \rightarrow DIV(z,t))$
$\wedge \forall y (y\neq\overline{0} \wedge y\neq\overline{1} \wedge \forall v \forall x (A \rightarrow PR(t,y)) \rightarrow \sim DIV(z,y)))$

2-17,TD

teo 2.10 $AP \vdash BETA(t,u,s_1) \wedge BETA(t,u,s_2) \rightarrow s_1 = s_2$

Prova.

1) $BETA(t,u,s_1) \wedge BETA(t,u,s_2)$ hip.

2) $ALFA(t,u,s_1) \wedge \forall x (ALFA(t,u,x) \rightarrow s_1 \leq x)$ 1,taut,def.*BETA*

3) $ALFA(t,u,s_2) \wedge \forall x (ALFA(t,u,x) \rightarrow s_2 \leq x)$ 1,taut.,def.*BETA*

4) $s_1 \leq s_2$ 2,Ax.4,taut.

5) $s_2 \leq s_1$ 3,Ax.4,taut.

6) $s_1 = s_2$ 4,5,teo 1.41

7) $AP \vdash BETA(t,u,s_1) \wedge BETA(t,u,s_2) \rightarrow s_1 = s_2$ 1-6,TD

teo 2.11 $AP \vdash \forall v \forall x(A \to v < w_1 \wedge x < w_1) \to$
$\exists y \forall v \forall x(A \to BETA(y,v,x))$

Prova. Seja t o termo $\left(\bar{1} \oplus (po(x,v) \oplus \bar{1})z_2\right)$

0) $\forall v \forall x(A \to v < w_1 \wedge x < w_1)$ hip.

1) $\forall v \forall x(A \to po(x,v) < po(w_1,w_1))$ 0,teo 2.4

2) $z_2 \neq \bar{0} \wedge \forall w(w < po(w_1,w_1) \to DIV(z_2,w))$ teo 1.47,regra C

3) $\forall v \forall x(A \to DIV(z,t) \wedge \forall y_1\left(y_1 \neq \bar{0} \wedge y_1 \neq \bar{1} \wedge\right.$
$\left.\forall v \forall x(A \to PR(t,y_1)) \to \sim DIV(z,y_1)\right)$ 0,teo 2.9,regra C

4) $y = po(z,z_2)$ teo 2.5,regra C

5) A hip.

6) $po(x,v) < po(w_1,w_1)$ 1,5,Ax.4,taut.

7) $DIV(z,t)$ 3,5,Ax.4,MP

8) $y_1 < po(w_1,w_1)$ hip.aux.

9) $y_1 \oplus w = po(x,v) \wedge w \neq \bar{0}$ hip.aux.

10) $w < po(w_1,w_1)$ 6,9,teo 1.48,1.49

11) $DIV(z_2,w)$ 2,10,Ax.4

12) $PR\left(\bar{1} \oplus ((y_1 \oplus \bar{1}) \oplus w)z_2, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2\right)$ 2,9,11,teo 2.7

13) $PR\left(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2\right)$ 9,12,teo 1.9

14) $y_1 \oplus w = po(x,v) \wedge w \neq \bar{0} \to PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$ 9,13,TD

15) $y_1 = po(x,v) \oplus w \wedge w \neq \bar{0}$ hip.aux.

16) $w < po(w_1,w_1)$ 8,15,teo 1.48 e 1.49

17) $DIV(z_2,w)$ 2,16,Ax.4

18) $PR(\bar{1} \oplus (po(x,v) \oplus \bar{1})z_2, 1 \oplus (po(x,v) \oplus \bar{1} \oplus w)z_2)$
2,15,17,teo 2.6 e 2.7

19) $PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$ 18,15,teo 1.9

20) $y_1 = po(x,v) \oplus w \wedge w \neq \bar{0} \to PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$ 15-19,TD

21) $\exists w\left(w \neq \bar{0} \wedge (y_1 = po(x,v) \oplus w) \vee y_1 \oplus w = po(x,v)\right) \to$
$PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$ 14,20,teo 1.1

22) $y_1 \neq po(x,v) \to PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$ 21,teo 1.50,taut.

23) $y_1 < po(w_1,w_1) \to \left(y_1 \neq po(x,v) \to PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)\right)$
8-22,TD

24) $\left(A \to PR(t, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)\right) \to \sim DIV(z, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2)$
2,3,Ax.4,teo 1.51,Ap.9

25) $y_1 < po(w_1,w_1) \wedge (y_1 \neq po(x,v)) \to \sim DIV(z, \bar{1} \oplus (y_1 \oplus \bar{1})z_2))$

23,24,taut.

26) $\forall y_1(y_1 < po(w_1,w_1) \wedge (y_1 \neq po(x,v)) \rightarrow$

$\sim DIV(z,\overline{1} \oplus (y_1 \oplus \overline{1})z_2))$ 25,GEN

27) $po(y_1,v) < po(w_1,w_1) \wedge (po(y_1,v) \neq po(x,v)) \rightarrow$

$\sim DIV(z,\overline{1} \oplus (po(y_1,v) \oplus \overline{1})z_2)$ 26,Ax.4

28) $y_1 < x \rightarrow (po(y_1,v) \neq po(x,v))$ teo 2.2,teo 1.21

29) $y_1 < x \rightarrow po(y_1,v) < po(w_1,w_1)$ 6,teo 2.3

30) $y_1 < x \rightarrow \sim DIV(z,\overline{1} \oplus (po(y_1,v) \oplus \overline{1})z_2)$ 27,28,29,taut.

31) $\forall y_1\left(DIV(z,\overline{1} \oplus (po(y_1,v) \oplus \overline{1})z_2) \rightarrow x \leq y_1\right)$

30,teo 1.24,taut,GEN

32) $y = po(z_3,z_4)$ hip.aux.

33) $z = z_3 \wedge z_2 = z_4$ 4,32,teo 2.2

34) $DIV(z_3,\overline{1} \oplus (po(y_1,v) \oplus \overline{1})z_4) \rightarrow x \leq y_1$ 31,33,Ax4,teo 1.9

35) $\forall y_1\left(\exists z,z_2(y = po(z,z_2) \wedge DIV(z,\overline{1} \oplus (po(y_1,v) \oplus \overline{1})z_2))\right.$

$\left.\rightarrow x \leq y_1\right)$ 32-34,TD,GEN,teo 1.56

36) $\forall y_1\left(ALFA(y,v,y_1) \rightarrow x \leq y_1\right)$ 35, def de *ALFA*

37) $ALFA(y,v,x) \wedge \forall y_1\left(ALFA(y,v,y_1) \rightarrow x \leq y_1\right)$ 4,7,36,teo 1.1

38) $BETA(y,v,x)$ 37,def.de *BETA*

39) $\exists y\forall v\forall x(A \rightarrow BETA(y,v,x))$ 5-38,TD,GEN,teo 1.1

40) $AP \vdash \forall v\forall x(A \rightarrow v < w_1 \wedge x < w_1) \rightarrow \exists y\forall v\forall x(A \rightarrow BETA(y,v,x))$

1-39,TD

teo 2.12 $AP \vdash \forall x_1,\ldots x_n \exists y(BETA(y,\overline{0},\overline{n}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} BETA(y,\overline{i},x_i))$

Prova.

1) $AP \vdash (v = \overline{0} \wedge x = \overline{n}) \vee (v = \overline{1} \wedge x = x_1) \vee \ldots \vee (v = \overline{n} \wedge x = x_n) \rightarrow$

$v < x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \overline{n} \oplus \overline{1} \wedge x < x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \overline{n} \oplus \overline{1}$

teo 1.30,taut.

2) $AP \vdash \exists y\forall v\forall x(v = \overline{0} \wedge x = \overline{n}) \vee \ldots \vee (v = \overline{n} \wedge x = x_n) \rightarrow$

$BETA(y,v,x))$ 1,GEN,teo 2.11,taut.

3) $AP \vdash \forall v\forall x(v = \overline{0} \wedge x = \overline{n}) \vee \ldots \vee (v = \overline{n} \wedge x = x_n) \rightarrow$

$BETA(y,v,x))$ 2,regra C

4) $AP \vdash (\overline{0} = \overline{0} \wedge \overline{n} = \overline{n}) \vee \ldots \vee (\overline{0} = \overline{n} \wedge \overline{n} = x_n)$ teo 1.5,taut

5) $AP \vdash BETA(y,\overline{0},\overline{n})$ 3,4,Ax.4,taut.

6) $AP\vdash \bigwedge_{i=1}^{n}(\bar{i}=\bar{0} \wedge x=\bar{n}) \vee \ldots \vee (\bar{i}=\bar{n} \wedge x_i=x_n)$ teo 1.5, taut.

7) $AP\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} BETA(y,\bar{1},x_i)$ 3,6, Ax. 4, taut.

8) $AP\vdash \forall x_1,\ldots x_n \exists y(BETA(y,\bar{0},\bar{n}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} BETA(y,\bar{1},x_i))$

5,7, teo 1.1, GEN

teo 2.13 $AP\vdash \exists_1 yN.\, SEQ_n(y,x_1,\ldots,x_n)$

Prova.

1) $AP\vdash \forall x_1,\ldots,x_n \exists y BETA_n(y,x_1,\ldots,x_n)$ teo 1.12

2) $AP\vdash \exists y\big(BETA_n(y,x_1,\ldots,x_n) \wedge \forall z(z < y \rightarrow$
$\sim BETA_n(z,x_1,\ldots,x_n)\big)$ 1, Ax. 4, teo 1.42

3) $AP\vdash \exists_1 y\big(BETA_n(y,x_1,\ldots,x_n) \wedge \forall z(z < y \rightarrow$
$\sim BETA_n(y,x_1,\ldots,x_n))\big)$ 3, teo 1.43

4) $AP\vdash \exists_1 yN.\, SEQ_n(y,x_1,\ldots,x_n)$ 3, def.

teo 2.14 $AP\vdash SEQ(x) \rightarrow \exists_1 zCOMP(x,z)$

Prova.

Assumimos como hipótese que $SEQ(x)$. Logo, por tautologias e teoremas 1.1 e 2.10 temos $\exists_1 zCOMP(x,z)$. Portanto, por TD

$$AP\vdash SEQ(x) \rightarrow \exists_1 zCOMP(x,z).$$

teo 2.15 $AP\vdash COMP(x,w) \wedge \bar{1}\leq y\leq w \rightarrow \exists_1 zPROJ(x,y,z)$

Prova.

Assumimos como hipótese que $COMP(x,w)$ e $\bar{1}\leq y\leq w$. logo, pela def de $COMP$ temos que $SEQ(x)$. Assim por tautologias e teoremas 1.1 e 2.10 teomos $\exists_1 zPROJ(x,y,z)$. Logo por TD

$$AP\vdash COMP(x,w) \wedge \bar{1}\leq y\leq w \rightarrow \exists_1 zPROJ(x,y,z).$$

teo 2.16 $AP\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i) \to \exists_1 y CC(x_1,\ldots x_n,y)$

Prova.

Caso 1) $x_i = \overline{0}$, para todo i, $1\le i\le n$.

Pela def de *COMP* temos que $COMP(\overline{0},\overline{0})$. Assim, por tautologias, teoremas 1.9 e Ap.5' obteremos

$$AP\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i) \to \exists_1 y CC(x_1,\ldots x_n,y).$$

Caso 2) $x_i \ne \overline{0}$, para algum i, $1\le i\le n$.

a) Mostraremos $AP\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i) \to \exists y CC(x_1,\ldots x_n,y)$

Seja *A* a fórmula

$$(v=\overline{0} \wedge w=\sum_{i=1}^{n} z_i) \vee \bigvee_{i=1}^{n}\Big(\exists z(\overline{1}\le z\le z_i \wedge v= z\oplus\sum_{l=1}^{i-1} z_l \wedge BETA(x_i,z,w)\Big)$$

e seja w_1 o termo $(\sum_{i=1} z_i\oplus x_1\oplus\ldots\oplus x_n\oplus \overline{1})$.

Pelo teorema 1.30 e taut. temos $AP\vdash A \to v < w_1 \wedge w < w_1$.

Assim, por GEN, teorema 2.11 e regra C, temos

(1) $$AP\vdash \forall v,w\big(A \to BETA(y,v,w)\big).$$

Instanciando em (1) v por $\overline{0}$ e w por $\sum_{i=1}^{n} z_i$ obteremos

(2) $$BETA(y,\overline{0},\sum_{i=1}^{n} z_i)$$

a partir do teo. 1.5 e tautologia. Logo, pela definição de *BETA*, teo 1.11 e Ap.3'

(3) $$y \ne \overline{0}.$$

Assumimos como hipótese

(4) $$\bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i)$$

e

(5) $$\overline{1} \le v \le \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Assim, pelo teorema 1.55, def. de *SEQ*, regra C e tautologias, temos

$$\bigvee_{i=1}^{n}\Big(\exists z(\overline{1}\le z\le z_i \wedge v = z \oplus\sum_{l=1}^{i-1} z_l \wedge BETA(x_i,z,w)\Big),$$

logo, de (1), Ax.4, taut., teo 1.1, hip (5), TD e GEN,

$$(6) \qquad \forall v\Big(\bar{1} \le v \le \sum_{i=1}^{n} z_i \rightarrow \exists w BETA(y,v,w)\Big).$$

E, a partir de (2), (6), teo 1.1 e 1.42 e taut., temos

$$(7) \quad \forall y_{1_{<y}}\Big(BETA(y_1,\bar{0},\sum_{i=1}^{n} z_i) \rightarrow \exists v(\bar{1}\le v\le \sum_{i=1}^{n} z_i \wedge \forall w(BETA(y,v,w) \leftrightarrow \sim BETA(y_1,v,w))\Big).$$

Assim, por (2), (3), (6), (7), taut. e teo. 1.1 temos que *SEQ*(y), e portanto, pela hipótese (4), teo 2.14, (2), (3) e tautologia

$$(8) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(COMP(x_i,z_i) \wedge COMP(y,\sum_{i=1}^{n} z_i)\Big).$$

Novamente pela hipótese (4) e def. de *SEQ*, temos

$$(9) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(COMP(x_i,z_i) \wedge \forall z_{\bar{1}\le z\le z_i} \exists w BETA(x_i,z,w)\Big).$$

Se assumirmos como hipótese

$$(10) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\bar{1}\le z\le z_i\Big),$$

temos a partir de (9) e regra C

$$(11) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(BETA(x_i,z,w) \wedge w\le x_i\Big), \quad \text{e}$$

$$(12) \qquad \bar{1} \le z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l \le \sum_{i=1}^{n} z_i$$

a parir dos teoremas 1.5 e 1.55 e taut. Logo, instanciando em (1) v por $z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l$ e w por ele próprio, e tautologia, teremos

$$(13) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} BETA(y, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l, w).$$

Assim, de (8),(10) - (13), taut, TD e teo 1.1 temos

$$(14) \quad \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\forall z_{\bar{1}\le z\le z_i} \exists w_{\le x_i}(PROJ(x_i,z,w) \wedge PROJ(y, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l, w))\Big).$$

Portanto, por (4), (8), (14), taut., teo 1.1 e TD, temos

$$AP \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} SEQ(x_i) \rightarrow \exists y CC(x_1, \ldots x_n, y).$$

b) Mostraremos

$$\forall y_1, y_2 \big(CC(x_1, \ldots x_n, y_1) \wedge CC(x_1, \ldots x_n, y_2) \rightarrow y_1 = y_2\big)$$

Assumimos como hip. que

$$CC(x_1, \ldots x_n, y_1) \wedge \; CC(x_1, \ldots x_n, y_2).$$

Logo pela def. de *CC* temos

$$(1) \; \exists z_1{}_{\leq x_1} \ldots z_n{}_{\leq x_n} \Big((COMP(x_i, z_i) \wedge COMP(y_1, \sum_{i=1}^{n} z_i)) \wedge$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\forall z_{\bar{1} \leq z \leq z_i} \exists w_{\leq x_i} (PROJ(x_i, z, w) \wedge PROJ(y_1, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l, w))) \Big)$$

e

$$(2) \; \exists v_1{}_{\leq x_1} \ldots v_n{}_{\leq x_n} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (COMP(x_i, v_i) \wedge COMP(y_2, \sum_{i=1}^{n} v_i)) \wedge$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\forall z_{\bar{1} \leq z \leq v_i} \exists w_{\leq x_i} (PROJ(x_i, z, w) \wedge PROJ(y_2, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} v_l, w))) \Big).$$

Por (1), (2) taut e unicidade de *COMP*, $z_i = v_i$, para $1 \leq i \leq n$. Logo, pelo teo 1.9 e tautologia

$$(3) \qquad COMP(y_2, \sum_{i=1}^{n} z_i).$$

Novamente de (1), (2), unicidade de *PROJ* e taut. temos

$$(4) \; \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\forall z_{\bar{1} \leq z \leq z_i} \exists w_{\leq x_i} (PROJ(y_1, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l, w) \leftrightarrow$$

$$PROJ(y_1, z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l, w))\Big).$$

Vamos supor que $y_1 \neq y_2$, i.e. $y_1 < y_2$ ou $y_2 < y_1$. Assumimos inicialmete que $y_2 < y_1$. Logo, como $SEQ(y_1)$, por def. de *SEQ*, Ax.4 e taut. temos

$$(5) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(COMP(y_2, \sum_{i=1}^{n} z_i) \rightarrow$$

$$(\exists v_{\bar{1} \leq v \leq \sum_{i=1}^{n} z_i} \forall w (PROJ(y_1, v, w) \leftrightarrow \sim PROJ(y_2, v, w)))\Big).$$

Levando em consideração o fato de que

$$\overline{1} \leq z \leq z_i \leftrightarrow \overline{1} \leq z \oplus \sum_{l=1}^{i-1} z_l \leq \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

a partir de (3), (4) e (5) chegaremos a uma contradição. Logo, $y_1 = y_2$. Por outro lado, se $y_1 < y_2$, pelo mesmo procedimento, então $y_1 = y_2$. Portanto, por TD e GEN, temos

$$AP \vdash \forall y_1, y_2 \big(CC(x_1, \ldots x_n, y_1) \wedge CC(x_1, \ldots x_n, y_2) \rightarrow y_1 = y_2 \big).$$

teo 2.17 $AP \vdash COMP(x,z) \rightarrow \exists_1 y LIM(x,y)$

Prova.

Seja A a fórmula

$$\big((v = \overline{0} \wedge w = z \oplus \overline{1}) \vee (\overline{1} \leq v \leq z \oplus \overline{1} \wedge w = x \oplus \overline{1}) \big)$$

e seja w_1 o termo $(x \oplus z \oplus \overline{2})$.

Pelo teo 1.30 e taut., $AP \vdash A \rightarrow v \leq w_1 \wedge w \leq w_1$. Assim, por GEN, teorema 2.11 e regra C, temos

(1) $$AP \vdash \forall v, w \big(A \rightarrow BETA(y, v, w) \big).$$

Assumimos $COMP(x,z)$ como hipótese. Instanciando em (1) v por $\overline{0}$ e w por $z \oplus \overline{1}$, temos a partir do teo 1.5 e taut.,

(2) $$BETA(y, \overline{0}, z \oplus \overline{1}).$$

Logo, pela def. de $BETA$, teo 1.11 e Ap.3'

(3) $$y \neq \overline{0}.$$

Instanciando em (1), agora, v por ele próprio e w por $x \oplus \overline{1}$, por tautologia, obtemos

(4) $$\overline{1} \leq v \leq z \oplus \overline{1} \rightarrow BETA(y, v, x \oplus \overline{1}).$$

E, a partir de (2), (4) teo 1.42, 1.1, taut, e GEN temos

(5) $$\forall y_{1 \leq y} \big(BETA(y_1, \overline{0}, z \oplus \overline{1}) \rightarrow \exists v (\overline{1} \leq v \leq z \oplus \overline{1} \wedge \forall w (BETA(y, v, w) \leftrightarrow \sim BETA(y_1, v, w))) \big).$$

Assim, por (2), ..., (5), teo 1.1, taut, e o fato de que $z \oplus \overline{1} \neq \overline{0}$

(6) $$COMP(y, z \oplus \overline{1}) \wedge SEQ(y).$$

De (2), teoremas 1.48 e 1.49, def. de *BETA* e tautologia

(7) $$z\oplus\overline{1} < y$$

E, de (4), (6), (7) teo 1.1, taut e GEN

(8) $$\forall v_{\overline{1}\leq v\leq z\oplus\overline{1}} \neg PROJ(y, v, x\oplus\overline{1}).$$

A partir da hipótese, e teo 1.48 e 1.49 temos

(9) $$z < x.$$

Portanto, a partir da hip., (6), (7), (8), (9) taut, teo 1.13 e TD

(10) $$AP\vdash COMP(x, z) \rightarrow \exists y LIM(x, y).$$

Vamos mostrar que $AP\vdash LIM(x, y_1) \wedge LIM(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

1º Caso) Assumimos com hipótese

11) $$SEQ(x) \wedge COMP(x, z_1) \wedge SEQ(y_1) \wedge COMP(y_1, z_1) \wedge \forall v_{\overline{1}\leq v\leq z1} PROJ(y_1, v, x)$$

e

(12) $$SEQ(x) \wedge COMP(x, z_2) \wedge SEQ(y_2) \wedge COMP(y_2, z_2) \wedge \forall v_{\overline{1}\leq v\leq z2} PROJ(y_2, v, x).$$

Pela unicidade de *COMP*, $z_1 = z_2$. Logo, por (11), (12), teo 1.9 e taut.,

(13) $$COMP(y_2, z_1)$$

e

(14) $$\forall v_{1\leq v\leq z1}\big(PROJ(y_1, v, x) \leftrightarrow PROJ(y_2, v, x)\big).$$

Vamos supor que $y_1 \neq y_2$, i.e. $y_1 < y_2$ ou $y_2 < y_1$. Assumimos inicialmete que $y_2 < y_1$. Logo, como $SEQ(y_1)$, por def. de *SEQ*, Ax.4 e taut., temos

(15) $$COMP(y_2, z_1) \rightarrow \exists v_{1\leq v\leq z1}\big(PROJ(y_1, v, x) \leftrightarrow \sim PROJ(y_2, v, x)\big).$$

A partir de (13), (14) e (15) chegaremos a uma contradição. Logo, $y_1 = y_2$. Por outro lado, se $y_1 < y_2$, pelo mesmo procedimento, então $y_1 = y_2$. Logo, por (11), (12), tautologia e TD

(16) $AP \vdash \big(COMP(x,z_1) \wedge SEQ(y_1) \wedge COMP(y_1,z_1) \wedge$

$\forall v_{1 \le v \le z1}^{-} PROJ(y_1,v,x)\big) \quad \wedge \quad \big(COMP(x,z_2) \wedge SEQ(y_2) \wedge$

$COMP(y_2,z_2) \wedge \quad \forall v_{1 \le v \le z2}^{-} PROJ(y_2,v,x)\big) \quad \to \quad y_1 = y_2.$

2º Caso) De tautologias, dentre elas $(A \wedge \sim A \to B)$, obtemos

(17) $AP \vdash \quad \big(SEQ(x) \wedge COMP(x,z_1) \wedge SEQ(y_1) \wedge COMP(y_1,z_1) \wedge$

$\forall v_{1 \le v \le z1}^{-} PROJ(y_1,v,x)\big) \quad \wedge \quad \big(\sim SEQ(x) \wedge y_2 = \overline{0}\big) \to$

$y_1 = y_2.$

3º Caso) Usando o mesmo procedimento para mostrar (17), obtemos

(18) $AP \vdash \big(\sim SEQ(x) \wedge y_1 = \overline{0}\big) \quad \wedge \quad \big(SEQ(x) \wedge COMP(x,z_1) \wedge$

$SEQ(y_1) \wedge \quad COMP(y_1,z_1) \wedge \forall v_{1 \le v \le z1}^{-} PROJ(y_1,v,x)\big) \quad \to$

$y_1 = y_2.$

4º Caso) A partir de Ap.1' e tautologias, temos que

(19) $AP \vdash \big(\sim SEQ(x) \wedge y_1 = \overline{0}\big) \wedge \big(\sim SEQ(x) \wedge y_2 = \overline{0}\big) \to y_1 = y_2.$

Logo, de (16) - (19), taut. e def. de LIM, temos

(20) $$AP \vdash LIM(x,y_1) \wedge LIM(x,y_2) \to y_1 = y_2.$$

Portanto, de (10), (20), GEN e taut., temos o desejado,

$$AP \vdash COMP(x,z) \to \exists_1 y LIM(x,y).$$

teo 2.18 $AP \vdash A.TERM(y) \wedge LIM(x,w) \wedge \exists z_{\le x}(COMP(y,z) \wedge$

$PROJ(y,z,x)) \quad \to \quad y < w$

Prova.

Assumimos por hipótese que

(1) $A.TERM(y) \wedge LIM(x,w) \wedge \exists z_{\le x}(COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x)).$

Logo, pela definição de $A.TERM$ e taut

(2) $SEQ(y)$,

e, pela definição de *LIM*, regra C e taut.

(3) $SEQ(w) \wedge COMP(x,z_1) \wedge COMP(w,z_1 \oplus \overline{1}) \wedge$
$\forall v\left(\overline{1} \leq v \leq z_1 \oplus \overline{1} \rightarrow PROJ(w,v,x \oplus \overline{1})\right)$.

A partir da definição de *A.TERM* podemos mostrar facilmente que

(4) $A.TERM(y) \wedge COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x) \rightarrow$
$(COMP(x,z_1) \rightarrow z_1 \leq z) \wedge \forall v_{\overline{1} \leq v \leq z}(PROJ(y,v,x_1) \rightarrow x_1 \leq x)$.

Assim, de (1), (3), (4), taut., teo 1.30, teo 1.49 e GEN

(5) $\forall z,z_2\left(COMP(y,z) \wedge COMP(w,z_2) \rightarrow z < z_2\right) \wedge$
$\forall v,x_1,x_2\left(PROJ(w,v,x_2) \wedge PROJ(y,v,x_1) \rightarrow x_1 < x_2\right)$.

Por outro lado, a partir de algumas propriedades de *BETA* e *po* e do teo 2.4 entre outros, podemos mostrar que

(6) $SEQ(y) \wedge SEQ(w) \wedge$

$\forall z,x_1,x_2\left(PROJ(y,z,x_1) \wedge PROJ(w,z,x_2) \rightarrow x_1 < x_2\right) \wedge$

$\forall z,z_2\left(COMP(y,z) \wedge COMP(w,z_2) \rightarrow z < z_2\right) \rightarrow y < w$

Portanto, de (1), (2), (3), (6), taut e TD, temos

$A.TER(y) \wedge LIM(x,w) \wedge \exists z_{\leq x}(COMP(y,z) \wedge PROJ(y,z,x)) \rightarrow y < w$.

teo 2.19 $AP \vdash ST(x,v,y,z_1) \wedge ST(x,v,y,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

Prova.

Vamos assumir por hipótese que $ST(x,y,v,z_1)$ e $ST(x,y,v,z_2)$. Logo,

(1) $VAR(v) \wedge EXP(y) \wedge \exists x_1\left(\exists w\left(x_1 < w \wedge LIM(y,w)\right) \wedge\right.$

$\exists x2_{\leq x}\left(SEQ(x_1) \wedge COMP(x_1,x) \wedge COMP(y,x_2) \wedge PROJ(x_1,x,z)\right.$

$\wedge \forall x3_{\overline{1} \leq x3 \leq x} \exists x_{4 \leq x2}(PROJ(x_1,x_3,x_4) \wedge (VLL(v,x_4,y) \vee x_4 = \overline{0})$

$\wedge (x_3 = \overline{1} \rightarrow \sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_2 \wedge VLL(v,x_5,y))) \wedge (x_3 > \overline{1} \rightarrow$

$(\exists x_{6 \leq x2}(PROJ(x_1,x_3 \dot{-} \overline{1},x_6) \wedge x_4 < x_6 \wedge$

$\sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_6 \wedge VLL(v, x_5, y))))\big)\big]$

(2) $VAR(v) \wedge EXP(y) \wedge \exists y_1\big(\exists w\big(y_1 < w \wedge LIM(y, w)\big) \wedge$

$\exists x2_{\le x}\big(SEQ(y_1) \wedge COMP(y_1, x) \wedge COMP(y, x_2) \wedge PROJ(y_1, x, z)$

$\wedge \forall x3_{\bar{1}\le x3\le x}\exists x_{4\le x2}(PROJ(y_1, x_3, x_4) \wedge (VLL(v, x_4, y) \vee x_4 = \bar{0})$

$\wedge (x_3 = \bar{1} \rightarrow \sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_2 \wedge VLL(v, x_5, y))) \wedge (x_3 > \bar{1} \rightarrow$

$(\exists x_{6\le x2}(PROJ(y_1, x_3 \dot{-} \bar{1}, x_6) \wedge x_4 < x_6 \wedge$

$\sim\exists x_5(x_4 < x_5 < x_6 \wedge VLL(v, x_5, y))))\big)\big]$

Assim, por (1), (2), taut, Ax. da indução e toremas 1.9, 2.15 e 2.16 temos

(4) $\forall x_3(\bar{1}\le x_3 \le x \rightarrow \big(PROJ(x_1, x_3, x_4) \leftrightarrow PROJ(y_1, x_3, x_4)\big)$.

De (2), regra C e tautologia

(5) $COMP(y_1, x)$.

Vamos supor que $x_1 \neq y_1$, i.e., $x_1 < y_1$ ou $y_1 < x_1$. Assumimos inicialmente que $y_1 < x_1$. Logo, como $SEQ(x_1)$, por def. de SEQ, Ax.4 e taut., temos

(6) $COMP(y_1, x) \rightarrow \exists x3_{\bar{1}\le x3\le x}\big(PROJ(x_1, x_3, x_4) \leftrightarrow PROJ(y_1, x_3, x_4)\big)$.

A partir de (4), (5) e (6) chegaremos a uma contradição. Logo, $x_1 = y_1$. Por outro lado, se $x_1 < y_1$, pelo mesmo procedimento, então $x_1 = y_1$. Logo, por TD e GEN temos

$$AP \vdash ST(x, v, y, z_1) \wedge ST(x, v, y, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$$

teo 2.20 $AP \vdash SB(x, y, v, w, z_1) \wedge SB(x, y, v, w, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

Prova.

Assumindo $SB(x, y, v, w, z_1)$ e $SB(x, y, v, w, z_2)$ como hipótese temos

(1) $EXP(y) \wedge VAR(v) \wedge TER(w) \wedge EXP(z) \wedge \exists x_1\big(\exists w_1\big(x_1 < w_1 \wedge$

$LIM(z, w_1)\big) \wedge SEQ(x_1) \wedge COMP(x_1, x) \wedge PROJ(x_1, x, z) \wedge$

$\forall x2_{\bar{1}\le x2\le x}\exists x3_{\le x}\big(PROJ(x_1, x_2, x_3) \wedge (x_2 = \bar{1} \rightarrow x_3 = y) \wedge$

$(x_2 > \bar{1} \rightarrow \exists x_4(PROJ(x_1, x_2 \dot{-} \bar{1}, x_4) \wedge \exists z_1(ST(x_2, v, y, z_1) \wedge$

$SU(x_4, z_1, w, x_3)))))\big]\big]$

(2) $EXP(y) \wedge VAR(v) \wedge TER(w) \wedge EXP(z) \wedge \exists y_1\big(\exists w_1\big(y_1 < w_1 \wedge LIM(z, w_1)\big) \wedge SEQ(y_1) \wedge COMP(y_1, x) \wedge PROJ(y_1, x, z) \wedge \forall x_{2\,\bar{1} \le x_2 \le x} \exists x_{3\, \le x}\big(PROJ(y_1, x_2, x_3) \wedge (x_2 = \bar{1} \rightarrow x_3 = y) \wedge (x_2 > \bar{1} \rightarrow \exists x_4(PROJ(y_1, x_2 \dot{-} \bar{1}, x_4) \wedge \exists z_1(ST(x_2, v, y, z_1) \wedge SU(x_4, z_1, w, x_3)))))\big]\big]$

A partir dos teoremas 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 e 1.9 e taut, facilmente se mostra que

(3) $AP \vdash SU(x, y, v, z_1) \wedge SU(x, y, v, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

Assim, por (1),(2) e (3), taut, unicidade de ST, Ax. da indução e teo 1.9, e 2.15, temos

(4) $\forall x_2(\bar{1} \le x_2 \le x \rightarrow \big(PROJ(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow PROJ(y_1, x_2, x_3)\big).$

De (2), regra C e tautologia

(5) $COMP(y_1, x).$

Vamos supor que $x_1 \ne y_1$, i.e., $x_1 < y_1$ ou $y_1 < x_1$. Assumimos inicialmente que $y_1 < x_1$. Logo, como $SEQ(x_1)$, por def. de SEQ, Ax.4 e taut., temos

(6) $COMP(y_1, x) \rightarrow \exists x_{2\,\bar{1} \le x_2 \le x}\big(PROJ(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow PROJ(y_1, x_2, x_3)\big).$

A partir de (4), (5) e (6) chegaremos a uma contradição. Logo, $x_1 = y_1$. Por outro lado, se $x_1 < y_1$, pelo mesmo procedimento, então $x_1 = y_1$. Logo, por TD e GEN temos

$$AP \vdash SB(x, y, v, w, z_1) \wedge SB(x, y, v, w, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$$

teo 2.21 $AP \vdash SUB(x, y, v, z_1) \wedge SUB(x, y, v, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

Prova.

Assumiremos $SUB(x, y, v, z_1)$ e $SUB(x, y, v, z_2)$ como hipótese. Logo,

(1) $EXP(x) \wedge VAR(v) \wedge TER(y) \wedge EXP(z) \wedge \exists w_{\le x}(A(v, x, w) \wedge SB(w, x, v, y, z\ )$

e

(2) $EXP(x) \wedge VAR(v) \wedge TER(y) \wedge EXP(z) \wedge \exists w_{\leq x}\big(A(v,x,w) \wedge SB(w,x,v,y,z_2)\big)$.

A partir do Ax.4, teo 1.24 e taut e do fato que

$$AP \vdash ST(w,v,x,\overline{0}) \rightarrow w < x$$

facilmente se mostra que

(3) $$AP \vdash A(v,x,w_1) \wedge A(v,x,w_2) \rightarrow w_1 = w_2$$

Assim, por (1), (2), (3), unicidade de SB, teo 1.9 e taut., temos

(4) $$z_1 = z_2.$$

Portanto, por TD

$$AP \vdash SUB(x,y,v,z_1) \wedge SUB(x,y,v,z_2) \rightarrow z_1 = z_2$$

teo 2.22 $AP \vdash \exists_1 y NUM(x,y)$

Prova.

a) Mostraremos, inicialmente, que $AP \vdash \exists y NUM(x,y)$, usando o axioma da indução, Ap.9, lembrando que $AP \vdash x' = x \oplus 1$.

Pelo teorema 2.13 $AP \vdash \exists v N.SEQ_1(v, \ulcorner\overline{0}\urcorner)$. Logo,

(1) $$SEQ(v) \wedge COMP(v,\overline{1}) \wedge PROJ(v,\overline{1},\ulcorner\overline{0}\urcorner).$$

Como $\sim(\overline{1} \leq z \leq \overline{0})$, por tautologia, teo 1.1 e GEN

(2) $\forall z_{\overline{1} \leq z \leq \overline{0}} \exists w_1, w_2 \big(PROJ(v,z,w_1) \wedge PROJ(v,z\oplus\overline{1},w_2) \wedge SUC(w_1,w_2)\big)$.

De (1), (2), taut e def. de $A.TERM$, temos que $A.TERM(v)$, e pelo teorema 2.17, $AP \vdash \exists w LIM(\ulcorner\overline{0}\urcorner, w)$. Logo, por (1),teo 2.18 e taut

(3) $$v < w \wedge LIM(\ulcorner\overline{0}\urcorner, w).$$

Portanto, por (1), (2), (3), taut e teo 1.1

(4) $$\exists y NUM(\overline{0}, y).$$

Assumimos $\exists y NUM(x,y)$ como hipótese. Logo, pela regra C e taut.,

(5) $SEQ(v) \wedge COMP(v, x\oplus 1) \wedge PROJ(v, 1, \ulcorner 0 \urcorner) \wedge PROJ(v, x\oplus 1, y)$

$\wedge\ \forall z\, \big(\bar{1} \le z \le x\oplus\bar{1} \to$

$\exists w_1, w_2 (PROJ(v, z, w_1) \wedge PROJ(v, z\oplus\bar{1}, w_2) \wedge SUC(w_1, w_2))\big)$.

Pelo teo 2.16, def. de *SUC* e taut.

(6) $\exists y_1 SUC(y, y_1)$ e $\exists v_1 CC_2(v, y_1, v_1)$.

Assim, pela def. de *CC*, regra C e taut., temos

(7) $SEQ(v_1) \wedge COMP(v_1, x\oplus\bar{2}) \wedge PROJ(v_1, \bar{1}, \ulcorner\bar{0}\urcorner) \wedge$

$PROJ(v_1, x\oplus\bar{1}, y) \wedge PROJ(v_1, x\oplus\bar{2}, y_1)$.

Logo, de (5), (6), regra C, (7), taut., teo 1.1 e GEN

(8) $\forall z\, \big(\bar{1} \le z \le x\oplus\bar{2} \to \exists w_1, w_2 (PROJ(v_1, z, w_1) \wedge PROJ(v_1, z\oplus\bar{1}, w_2) \wedge$

$SUC(w_1, w_2))\big)$.

De (5), taut e def. *A.TERM*, temos que $A.TERM(v_1)$, e pelo teo 2.17, $\exists w LIM(y_1, w)$. Logo, por (5), teo 2.18 e taut

(9) $$v_1 < w \wedge LIM(y_1 w).$$

Assim, por (7), (8), taut. e teo 1.1

(10) $$\exists y NUM(x\oplus\bar{1}, y).$$

Portando, a partir da nossa hip., (10), TD, GEN, (4), Ap.9 e Ax.4

$$AP \vdash \exists y NUM(x, y).$$

b) Mostraremos $AP \vdash \forall y_1, y_2 \big(NUM(x, y_1) \wedge NUM(x, y_2) \to y_1 = y_2\big)$.

Assumimos $NUM(x, y_1)$ e $NUM(x, y_2)$ como hipóteses. Logo,

(1) $\exists v_1 \big(\exists w (v_1 < w \wedge LIM(y_1, w) \wedge SEQ(v_1) \wedge COMP(v_1, x\oplus\bar{1}) \wedge$

$PROJ(v_1, \bar{1}, \ulcorner\bar{0}\urcorner) \wedge PROJ(v_1, x\oplus\bar{1}, y_1) \wedge \forall z (\bar{1} \le z \le x \to$

$\exists w_1 w_2 (PROJ(v_1, z, w_1) \wedge PROJ(v_1, z\oplus\bar{1}, w_2) \wedge SUC(w_1, w_2)))\big)$

e

(2) $\exists v_2 \big(\exists w (v_2 < w \wedge LIM(y_2, w) \wedge SEQ(v_2) \wedge COMP(v_2, x\oplus\bar{1}) \wedge$

$PROJ(v_2, \bar{1}, \ulcorner\bar{0}\urcorner) \wedge PROJ(v_2, x\oplus\bar{1}, y_2) \wedge \forall z (\bar{1} \le z \le x \to$

$\exists w_1 w_2 (PROJ(v_2, z, w_1) \wedge PROJ(v_2, z\oplus\overline{1}, w_2) \wedge SUC(w_1, w_2)))\big)$.

A partir de (1), (2), Ax.4, teo 1.52, 2.16 e 1.9, def *SUC* e taut,

(3) $\forall z(\overline{1}\leq z\leq x\oplus\overline{1} \rightarrow \big(PROJ(v_1, z, w_1) \leftrightarrow PROJ(v_2, z, w_1)\big)$.

De (2), regra C e tautologia

(4) $$COMP(v_2, x\oplus\overline{1}).$$

Vamos supor que $v_1 \neq v_2$, i.e., $v_1 < v_2$ ou $v_2 < v_1$. Assumimos inicialmente que $v_2 < v_1$. Logo, como $SEQ(v_1)$, por def. de *SEQ*, Ax.4 e taut., temos

(5) $COMP(v_2, x\oplus\overline{1}) \rightarrow \exists z_{\overline{1}\leq z\leq x\oplus\overline{1}}\big(PROJ(v_1, z, w_1) \leftrightarrow$
$\sim PROJ(v_2, z, w_1)\big)$.

A partir de (3), (4) e (5) chegaremos a uma contradição. Logo, $v_1 = v_2$. Por outro lado, se $v_1 < v_2$, pelo mesmo procedimento, então $v_1 = v_2$. Logo, por TD e GEN temos

$$AP \vdash \forall y_1, y_2 \big(NUM(x, y_1) \wedge NUM(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2\big).$$

teo 2.23 $AP \vdash S(x, v, y, z_1) \wedge S(x, v, y, z_2) \rightarrow z_1 = z_2$

Prova.

Se assumirmos $S(x, v, y, z_1)$ e $S(x, v, y, z_2)$ como hip., temos

(1) $$\exists w_1 \big(SUB(x, v, w_1, z_1) \wedge NUM(y, w_1)\big)$$

e

(2) $$\exists w_2 \big(SUB(x, v, w_2, z_2) \wedge NUM(y, w_2)\big).$$

Por (1), (2) e unicidaade de *NUM* temos que $w_1 = w_2$. logo,

(3) $$SUB(x, v, w_1, z_2).$$

Pela unicidade de *SUB*, (1) e (3), $z_1 = z_2$. Logo, por TD

$$AP \vdash S(x, v, y, z_1) \wedge S(x, v, y, z_2) \rightarrow z_1 = z_2.$$

CAPÍTULO III

OS TEOREMAS DA INCOMPLETUDE

Apresentaremos, neste capítulo, o primeiro e o segundo teoremas da incompletude de Gödel juntamente com alguns resultados preliminares que possibilitarão o desenvolvimento de suas demonstrações.

1 - PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE

Enunciaremos e demonstraremos, de forma precisa, o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel. Precisamos antes de algumas noções e lemas auxiliares, os quais passamos a apresentar.

LEMA 3.1 (Lema da diagonal)

Para qualquer fórmula $B(x)$ na qual x é a única variável livre, existe uma fórmula fechada A tal que

$$AP \vdash A \leftrightarrow B(\ulcorner A \urcorner)$$

Prova.

Consideremos $C(x)$ a fórmula $\forall y(S(x, \ulcorner x \urcorner, x, y) \rightarrow B(y))$ e seja m o número de Gödel desta fórmula. Mostraremos

$$AP \vdash A \leftrightarrow B(\ulcorner A \urcorner),$$

onde A é a fórmula $C(\bar{m})$,

1) A hip.

2) $\forall y(S(\bar{m}, \ulcorner x \urcorner, \bar{m}, y) \rightarrow B(y))$ 1, def. acima

3) $S(\ulcorner C(x)\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \bar{m}, \ulcorner C(\bar{m})\urcorner) \rightarrow B(\ulcorner C(\bar{m})\urcorner)$ 2, Ax. 4, escolha de m

4) $S(\ulcorner C(x)\urcorner, \ulcorner x\urcorner, m, \ulcorner C(m)\urcorner)$ prop 2.1 (38), prop. 1.63

5) $B(\ulcorner C(\bar{m})\urcorner)$ 3, 4, taut.

6) $AP \vdash A \rightarrow B(\ulcorner A\urcorner)$ 1-5 TD, escolha de A

7) $S(\bar{m}, \ulcorner x\urcorner, \bar{m}, y)$ hip.

8) $S(\ulcorner C(x)\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \bar{m}, y)$ 2, escolha de m

9) $S(\ulcorner C(x)\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \bar{m}, \ulcorner C(\bar{m})\urcorner)$ teo. 2.1 (38), prop. 1.63

10) $y = \ulcorner C(\bar{m})\urcorner$ 8, 9, teo 2.23, Ax. 4, taut.

11) $B(\ulcorner A\urcorner)$ hip.

12) $B(y)$ 10, 11, teo 1.9, escolha de A

13) $\forall y(S(\bar{m}, \ulcorner x\urcorner, \bar{m}, y) \rightarrow B(y))$ 7-12 TD, GEN

14) $AP \vdash B(\ulcorner A\urcorner) \rightarrow A$ 11-13 TD

15) $AP \vdash A \leftrightarrow B(\ulcorner A\urcorner)$ 6, 14, taut.

DEFINIÇÕES

Def 3.1 Uma teoria é *consistente* se nela não pudermos provar uma contradição, ou seja, uma fórmula e sua negação.[1]

Def 3.2 Uma teoria T é *ω-consistente* se para toda fórmula $A(x)$ de T, temos que: se $T \vdash A(\bar{k})$, para todo número k, então $T \nvdash \exists x \sim A(x)$

LEMA 3.2 Se AP é ω-consistente, então AP é consistente.

Prova

Assumimos por hipótese que AP é ω-consistente. Sejam $B(x)$ uma fórmula qualquer de AP com x livre, e $A(x)$ a fórmula

$$\sim(B(x) \wedge \sim B(x))$$

Assim, $A(\mathbf{n})$ é uma instância de tautologia. Logo,

[1] Isto equivale a dizer que em uma teoria consistente não provamos qualquer fórmula. Em particular, AP é consistente se $AP \nvdash \bar{0} = \bar{1}$.

$$AP \vdash A(n), \text{ para todo } n.$$

Pela ω-consistência de AP, temos

$$AP \nvdash \exists x \sim A(x).$$

Portanto, AP é consistente.

TEOREMA 3.3 (Primeiro Teorema da Incompletude)

Existe uma fórmula G em AP tal que:

(a) se AP é consistente, então $AP \nvdash G$;

(b) se AP é ω-consistente, então $AP \nvdash \sim G$.

Logo, se AP é ω-consistente nem G nem $\sim G$ são demonstráveis em AP.

Demonstração.

Seja $B(y)$ a fórmula $\forall x \sim PV(x, y)$, onde y é a única variável livre. Pelo lema 3.1 existe uma fórmula fechada G tal que:

$$\text{(i)} \quad AP \vdash G \leftrightarrow \forall x \sim PV(x, \ulcorner G \urcorner)$$

Demonstraremos (a) por contraposição.

1) $AP \vdash G$ hip.

Então existe uma prova de G.

Seja q o número de Gödel dessa prova.

2) $AP \vdash PV(\overline{q}, \ulcorner G \urcorner)$ teo 2.1 (57), prop. 1.63

3) $AP \vdash \forall x \sim PV(x, \ulcorner G \urcorner)$ 1, (i), taut.

4) $AP \vdash \sim PV(\overline{q}, \ulcorner G \urcorner)$ 3, Ax.4

5) AP não é consistente 2,4 def. de consistêcia

Se $AP \vdash G$, então AP não é consistente

Logo, se AP é consistente, então $AP \nvdash G$

Demonstraremos (b) por redução ao absurdo.

1) AP é ω-consistente hip.

2) $AP \vdash \sim G$ hip. absurda

3) $AP \vdash \exists x PV(x, \ulcorner G \urcorner)$ 2,(i), taut.

4) AP é consistente 1, lema 3.2

5) $AP \nvdash G$ 2,4 def. consistência.

Então não existe uma prova de G em AP.

6) AP$\vdash \sim PV(\bar{k},\ulcorner G\urcorner)$, para todo k teo 2.1 (57), prop. 1.63

7) AP$\nvdash \exists x PV(x,\ulcorner G\urcorner)$ 1,6 def ω-consistência

Pelas linhas (3) e (7) chegamos a um absurdo. Logo, nossa segunda hipótese é falsa, ou seja, AP$\nvdash \sim G$. Assim, se AP é ω-consistente então AP$\nvdash \sim G$

Portanto, por (a), (b), e lema 3.2 temos que se AP é ω-consistente então nem G nem sua negação são demonstráveis em AP.

2 - SEGUNDO TEOREMA DA INCOMPLETUDE

As demonstrações usuais do Segundo Teorema da Incompletude, como por exemplo, BOOLOS (1979), lançam mão das seguintes condições de derivabilidade:

(D1) se AP$\vdash A$, então AP$\vdash DEM(\ulcorner A\urcorner)$,

(D2) AP$\vdash DEM(\ulcorner A\urcorner) \wedge DEM(\ulcorner A \rightarrow B\urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner B\urcorner)$,

(D3) AP$\vdash DEM(\ulcorner A\urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner DEM(\ulcorner A\urcorner)\urcorner)$,

onde A e B são sentenças.

Não explicitaremos aqui as demonstrações de tais condições, pois, no próximo capítulo apontaremos um possível caminho, bem como as dificuldades encontradas na tentativa de demonstrá-las.

Com as três condições de derivabilidade, acima mencionadas, seremos capazes de formalizar a primeira etapa do primeiro teorema, i.e., se AP é consistente, então G não é teorema de AP. Lembramos que a fórmula $\forall x \sim PV(x,y)$ é equivalente a $\sim DEM(y)$, onde y é a única variável livre. Mais precisamente, mostraremos:

TEOREMA 3.4 $AP \vdash \sim DEM(\ulcorner 0=1 \urcorner) \rightarrow \sim DEM(\ulcorner G \urcorner)$

Prova

1) $AP \vdash G \leftrightarrow \sim DEM(\ulcorner G \urcorner)$	lema 3.1
2) $AP \vdash DEM(\ulcorner DEM(\ulcorner G \urcorner) \urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner \sim G \urcorner)$	1,(D1),(D2),taut.
3) $AP \vdash DEM(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner DEM(\ulcorner G \urcorner) \urcorner)$	(D3)
4) $AP \vdash DEM(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner \sim G \urcorner)$	2,3 taut.
5) $AP \vdash G \rightarrow (\sim G \rightarrow \overline{0}=\overline{1})$	taut.
6) $AP \vdash DEM(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow (DEM(\ulcorner \sim G \urcorner) \rightarrow DEM(\ulcorner \overline{0}=\overline{1} \urcorner)$	5,(D1),(D2)
7) $AP \vdash \sim DEM(\ulcorner \overline{0}=\overline{1} \urcorner) \rightarrow \sim DEM(\ulcorner G \urcorner)$	4,6,taut.

TEOREMA 3.5 (Segundo Teorema da Incompletude)

Se AP é consistente, então $AP \nvdash CON_{AP}$

onde, CON_{AP} é a fórmula $\sim DEM(\ulcorner \overline{0}=\overline{1} \urcorner)$

Demonstração.

1) $AP \vdash CON_{AP}$	hip.
2) $AP \vdash \sim DEM(\ulcorner 0=1 \urcorner)$	1, def CON_{AP}
3) $AP \vdash \sim DEM(\ulcorner G \urcorner)$	2,teo 3.4,taut.
4) $AP \vdash G \leftrightarrow \sim DEM(\ulcorner G \urcorner)$	lema 3.1
5) $AP \vdash G$	3,4 taut.
6) AP não é consistente	5, teo 3.3 (a)

Se $AP \vdash CON_{AP}$, então AP não é consistente

Logo, se AP é consistente, então $AP \nvdash CON_{AP}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro capítulo, apresentamos e estudamos de maneira detalhada um sistema formal para a Teoria dos Números, a saber, o sistema AP. Mostramos então que tal sistema é suficientemente forte para demonstrar todos as sentenças verdadeiras de uma certa classe (as sentenças Σ_1). Esse resultado nos assegura que as fórmulas definidas no segundo capítulo representam adequadamente, no sistema formal, as propriedades sintático-morfológicas que o caracterizam. De posse dessa representação foi possível mostrar, no terceiro capítulo, que o sistema não é suficientemente forte para decidir *todas* as sentenças, i.e., o primeiro teorema de Gödel. Nessa demonstração, ao invés de apelarmos à Teoria das Funções Recursivas, optamos por caracterizar explicitamente as fórmulas de AP envolvidas na representação de sua sintaxe. Tal caminho, aparentemente mais complexo, visava tornar possível uma demonstração rigorosa e completa do segundo teorema, a qual não pode ser dada a partir apenas do Teorema da Representação para as funções recursivas[1]. Com efeito, era nossa pretenção apresentar neste

---

[1] *Cf* introdução

trabalho tal demonstração. No entanto, no capítulo anterior, apresentamos a demonstração do segundo teorema acompanhando as exposições usuais (como, por exemplo, a de BOOLOS (1979) e MENDELSON (1987)) a partir das condições de Hilbert-Bernays-Löb. A demonstração de que AP de fato satisfaz tais condições dá lugar a séries dificuldades, que discutiremos a seguir.

1. A condição D1

A condição de derivabilidade, D1,

$$\text{se } AP \vdash A, \text{ então } AP \vdash DEM(\ulcorner A \urcorner)$$

pode ser facilmente demonstrada, a partir do Teorema de Completude Parcial, 1.63, da seguinte maneira:

Prova.

1) $AP \vdash A$ — hip.

Então existe uma prova de A.

Seja p o número de Gödel dessa prova

2) $AP \vdash PV(\bar{p}, \ulcorner A \urcorner)$ — 1, teo 2.1(57), prop 1.63

3) $AP \vdash \exists x PV(x, \ulcorner A \urcorner)$ — 2, teo 1.1

4) $AP \vdash DEM(\ulcorner A \urcorner)$ — 3, def. de DEM

logo, se $AP \vdash A$, então $AP \vdash DEM(\ulcorner A \urcorner)$.

2. O emprego de nocões auxiliares nas demonstrações usuais de D2 e D3, em particular de D2' e D3'

Usualmente, procura-se demonstrar D2 e D3, a partir de uma formulação mais geral dessas condições que contemple também fórmulas abertas. Observemos que, ainda que A seja também uma fórmula aberta, $DEM(\ulcorner A \urcorner)$ é uma sentença. Assim, para que seja possível levar em conta as eventuais variáveis livres em uma fórmula, intruduz-se algumas noções auxiliares que apresentamos a seguir.

DEFINIÇÕES:

(1) Para toda fórmula A, definimos $SUB*(\ulcorner A \urcorner, y)$ como segue:

caso 1) A não contém ocorrências de variáveis livres

$$SUB*(\ulcorner A \urcorner, y) =: \quad y = \ulcorner A \urcorner.$$

caso 2) A contém ocorrências de variáveis livres

$$SUB*(\ulcorner A \urcorner, y) =: \exists y_1 \ldots \exists y_{n-1} \big(S(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner v_1 \urcorner, v_1, y_1) \wedge$$
$$S(y_1, \ulcorner v_2 \urcorner, v_2, y_2) \wedge, \ldots, \wedge \; S(y_{n-1}, \ulcorner v_n \urcorner, v_n, y) \big),$$

onde $v_1, \ldots, v_n$ são todas as variáveis livres de A e $y_1, \ldots, y_{n-1}$ são, nesta ordem, as n-1 primeiras variáveis da linguagem de AP distintas de $v_1, \ldots, v_n$.

(2) Sejam A uma fórmula contendo uma variável livre e F uma fórmula qualquer,

$$A[F] =: \exists y \big(A(y) \wedge SUB*(\ulcorner F \urcorner, y) \big),$$

onde y é a primeira variável que não ocorre em A, nem em F.

Observemos que D2 e D3 decorrem imediatamente de

(D2') $\qquad AP \vdash DEM[A] \wedge DEM[A \rightarrow B] \rightarrow DEM[B]$,

(D3') $\qquad AP \vdash DEM[A] \rightarrow DEM[DEM[A]]$

e do resultado

(3) $AP \vdash DEM[A] \leftrightarrow DEM(\ulcorner A \urcorner)$, se A é uma sentença.

A demonstração de (3) é a seguinte:

1) $DEM[A]$	hip.
2) $DEM(y) \wedge SUB*(\ulcorner A \urcorner, y)$	1, def (2), regra C, taut.
3) $y = \ulcorner A \urcorner$	2, def (1)
4) $DEM(\ulcorner A \urcorner)$	2, 3, teo 1.9, taut.
5) $DEM[A] \rightarrow DEM(\ulcorner A \urcorner)$	1-4 TD
6) $DEM(\ulcorner A \urcorner)$	hip.
7) $\ulcorner A \urcorner = \ulcorner A \urcorner$	teo 1.5
8) $SUB*(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner A \urcorner)$	7, def. (1)
9) $\exists y\left(DEM(y) \wedge SUB*(\ulcorner A \urcorner, y)\right)$	6, 8. taut., teo 1.1
10) $DEM[A]$	9, def (2), taut.
11) $AP \vdash DEM[A] \leftrightarrow DEM(\ulcorner A \urcorner)$	5, 6-10 TD, taut.

3. As dificuldades em demonstrar D2'

Uma possível demonstração da condição D2', como veremos a seguir, depende da possibilidade de mostrar que a propriedade sintático-morfológica

(4) $$DEM(x) \wedge DEM(y) \wedge IMP(x, z, y) \rightarrow DEM(z)$$

seja um teorema de AP, bem como, da demonstração dos resultados auxiliares

(5) $$AP \vdash SUB*(\ulcorner A \urcorner, x) \wedge SUB*(\ulcorner A \urcorner, y) \rightarrow x = y$$

e

(6) $$AP \vdash IMP([A], [B], [A \rightarrow B]),$$

onde (5) é mostrado facilmente a partir do teorema 2.23 e (6) depende da possibilidade de mostrar que algumas propriedades sintático- morfológicas são teoremas, a saber

(7) $$SUB(x_1, v, w, x) \wedge SUB(y_1, v, w, y) \wedge SUB(z_1, v, w, z) \wedge IMP(x_1, y_1, z_1) \rightarrow IMP(x, y, z),$$

(8) $SUB(x,v,y,z) \wedge \sim VL(w,x) \wedge \sim VOT(w,y) \rightarrow \sim VL(w,z)$,

e

(9) $\sim VL(v,x) \rightarrow SUB(x,v,w,x)$.

Supondo satisfeitas tais condições, D2' poderia ser demonstrada da seguinte maneira, ou seja,

$$AP\vdash DEM[A] \wedge DEM[A \rightarrow B] \rightarrow DEM[B]$$

Prova.

1)	$DEM[A]$	hip.
2)	$\exists x_1(DEM(x_1) \wedge SUB*(\ulcorner A\urcorner, x_1))$	1,def (2)
3)	$DEM(x_1) \wedge SUB*(\ulcorner A\urcorner, x_1)$	2,regra C
4)	$DEM[A\rightarrow B]$	hip.
5)	$\exists y_1(DEM(y_1) \wedge SUB*(\ulcorner A\rightarrow B\urcorner, y_1))$	4,def (2)
6)	$DEM(y_1) \wedge SUB*(\ulcorner A\rightarrow B\urcorner, y_1)$	5,regra C
7)	$IMP([A],[B],[A\rightarrow B])$	(6)
8)	$IMP(x,z,y) \wedge SUB*(\ulcorner A\urcorner, x) \wedge SUB*(\ulcorner B\urcorner, z) \wedge$ $SUB*(\ulcorner A\rightarrow B\urcorner, y)$	7,def (2),regra C
9)	$x_1 = x$	3,8,taut.,(5),teo 1.27
10)	$y_1 = y$	6,8,taut.,(5),teo 1.27
11)	$DEM(x)$	3,9,taut,teo 1.9
12)	$DEM(y)$	6,10,taut,teo 1.9
13)	$DEM(x) \wedge DEM(y) \wedge IMP(x,z,y) \rightarrow DEM(z)$	(4)
14)	$DEM(z)$	8,11,12,13,taut.
15)	$\exists z(DEM(z) \wedge SUB*(\ulcorner B\urcorner, z))$	8,14,taut,teo 1.1
16)	$DEM[B]$	15,def (2)
17)	$DEM[A] \wedge DEM[A\rightarrow B] \rightarrow DEM[B]$	1-16 TD

4. As dificuldades em demonstrar D3'

4.1 D3' como um caso particular de uma nova formulação de Σ_1-completude, envolvendo variáveis livres

A demonstração de D3' é uma conseqüência imediata da Σ_1-completude formalizada:

(10) se A é uma fórmula Σ_1, então $AP\vdash A \rightarrow DEM[A]$,

visto que $DEM[A]$ é uma fórmula Σ_1.

Observamos que, para demonstrarmos a Σ_1-completude, é suficiente mostrar que para qualquer fórmula Σ_0, A

(11) $A \rightarrow DEM[A]$ e $\sim A \rightarrow DEM[\sim A]$

são teoremas, bem como a seguinte variante de (D1),

(D1') se $AP\vdash A$, então $AP\vdash DEM[A]$,

além da condição (D2'). Pois, neste caso, se A é uma fórmula Σ_0 e $x_1,\ldots,x_n$ são todas as variáveis que ocorrem livres em A, então

$$AP\vdash \exists x_1,\ldots,x_n A \rightarrow DEM[\exists x_1,\ldots,x_n A]$$

Prova.

1)	$A \rightarrow \exists x_1,\ldots,x_n A$	teo 1.1
2)	$DEM[A] \rightarrow DEM[\exists x_1,\ldots,x_n A]$	1, (D1'), (D2')
3)	$\exists x_1,\ldots,x_n DEM[A] \rightarrow DEM[\exists x_1,\ldots,x_n A]$	2, teo 1.4
4)	$A \rightarrow DEM[A]$	(11)
5)	$\exists x_1,\ldots,x_n A \rightarrow \exists x_1,\ldots,x_n DEM[A]$	4, teo 1.4
6)	$\exists x_1,\ldots,x_n A \rightarrow DEM[\exists x_1,\ldots,x_n A]$	3,5, taut.

Por outro lado, (11) pode ser demonstrado por indução na complexidade das fórmulas, se for possivel demonstrar que, para quaisquer termos t e u ,

(12) $t=u \rightarrow DEM[t=u]$

e

(13) $t\neq u \rightarrow DEM[t\neq u]$

são teoremas, pois neste caso, (12) e (13) forneceriam a base da indução, enquanto que, no passo indutivo, o único caso mais difícil seria aquele na qual A é da forma

$$\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B),$$

onde C é uma fórmula que não contém ocorrência livre da variável x e, além disso, é funcional na variável y. Vejamos sua deonstração:

i) Mostraremos

$$AP \vdash \forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B) \to DEM[\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)]$$

Prova usando o Ap.ρ, onde $A(y)$ é a fórmula

$$\forall x(x<y \to B) \to DEM[\forall x(x<y \to B)]$$

1) $\sim(x<\overline{0})$ teo 1.17

2) $\sim(x<\overline{0}) \to (x<\overline{0} \to B)$ taut.

3) $\forall x(x<\overline{0} \to B)$ 1,2 taut., GEN

4) $DEM[\forall x(x<\overline{0} \to B)]$ 3,(D1')

5) $\forall x(x<\overline{0} \to B) \to DEM[\forall x(x<\overline{0} \to B)]$ 4, taut.

6) $B(y) \to DEM[B(y)]$ hip. ind.

7) $\forall x(x=y \to B) \leftrightarrow B(y)$ teo 1.25

8) $DEM[B(y)] \to DEM[\forall x(x=y \to B)]$ 7, (D1'),(D2')

9) $\forall x(x=y \to B) \to DEM[\forall x(x=y \to B)]$ 6,7,8, taut.

10) $\forall x(x<y' \to B) \to \forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B)$

teo 1,26,taut.

11) $\forall x(x<y' \to B) \to DEM[\forall x(x=y \to B)] \wedge \forall x(x<y \to B)$

9,10 taut.

12) $(\forall x(x<y \to B) \to DEM[\forall x(x<y \to B)]) \to (\forall x(x<y' \to B)$

$\to DEM[\forall x(x=y \to B)] \wedge DEM[\forall x(x<y \to B)])$ 11,taut.

13) $\forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B) \to \forall x(x<y' \to B)$

teo 1.26,taut.

14) $DEM[\forall x(x=y \to B) \wedge \forall x(x<y \to B)] \to$

$DEM[\forall x(x<y' \to B)]$ 13,(D1')(D2')

15) $AP \vdash (\forall x(x<y \to B) \to DEM[\forall x(x<y \to B)] \to$

$(\forall x(x<y' \to B) \to DEM[\forall x(x<y' \to B)])$

12,14,D1',D2',taut.

16) $AP \vdash \forall y((\forall x(x<y \to B) \to DEM[\forall x(x<y \to B)]) \to$

$(\forall x(x<y' \to B) \to DEM[\forall x(x<y' \to B)]))$ 15, GEN

17) $\forall x(x<y \to B) \to DEM[\forall x(x<y \to B)]$ 5, 16, Ap. $\wp$, MP, Ax. 4

18) $\sim C \to DEM[\sim C]$ hipótese de indução

19) $(C \to \forall x(x<y \to B)) \to DEM[C \to \forall x(x<y \to B)]$
17, 18, taut., (D1'), (D2')

20) $C \to DEM[C]$ hipótese de indução

21) $C \wedge (C \to \forall x(x<y \to B)) \to DEM[C \wedge C \to \forall x(x<y \to B)]$
19, 20, taut., (D1'), (D2')

22) $\exists_1 yC$ funcionalidade de C

23) $\exists_1 yC \to \big(C \wedge (C \to \forall x(x<y \to B)) \to$
$\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))\big)$ teo 1.57

24) $DEM[C \wedge (C \to \forall x(x<y \to B))] \to$
$DEM[\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$ 22, 23, taut., D1', D2'

25) $C \wedge (C \to \forall x(x<y \to B)) \to DEM[\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$
21, 24, taut.

26) $\exists yC \wedge \forall y(C \to \forall x(x<y \to B)) \to$
$DEM[\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$ 27, GEN, teo 1.58, taut.

27) $\forall y(C \to \forall x(x<y \to B)) \to DEM[\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$
22, 26, taut.

28) $\forall y(C \to \forall x(x<y \to B)) \leftrightarrow \forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)$
teo 1.60

29) $\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B) \to DEM[\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)]$
27, 28, taut., (D1'), (D2')

ii) Mostraremos

$AP \vdash \sim\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B) \to DEM[\sim\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)]$

1) $\sim B \to DEM[\sim B]$ hip. ind.

2) $x<y \to DEM[x<y]$ (12), taut, teo 1.17 - 1.20

3) $x<y \wedge \sim B \to DEM[x<y] \wedge DEM[\sim B]$ 1, 2, taut.

4) $\exists x(x<y \wedge \sim B) \to \exists x(DEM[x<y] \wedge DEM[\sim B])$ 3, teo 1.4

5) $\exists x(x<y \wedge \sim B) \leftrightarrow \sim\forall x(x<y \to B)$ def., taut.

6) $(x<y \wedge \sim B) \to \sim\forall x(x<y \to B)$ Ax. 4, taut.

7) $DEM[x<y \wedge \sim B] \to DEM[\sim\forall x(x<y \to B)]$ 6, D1', D2'

8) $DEM[x<y] \wedge DEM[\sim B] \to DEM[\sim\forall x(x<y \to B)]$ 7, 8, taut.

9) $\exists x(DEM[x<y] \wedge DEM[\sim B]) \to DEM[\sim\forall x(x<y \to B)]$
8, teo 1.4

10) $\sim\forall x(x<y \to B) \to DEM[\sim\forall x(x<y \to B)]$ 4,5,9, taut.

11) $C \to DEM[C]$ hipótese de indução

12) $\exists y(C \wedge \sim\forall x(x<y \to B)) \leftrightarrow \sim\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))$
taut, def.

13) $DEM[C \wedge \sim\forall x(x<y \to B)] \to DEM[\sim\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$
12, taut., teo 1.1, D1', D2'

14) $C \wedge \sim\forall x(x<y \to B) \to DEM[C \wedge \sim\forall x(x<y \to B)]$
10, 11, D1', D2'

15) $\exists y(C \wedge \sim\forall x(x<y \to B)) \to DEM[\sim\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$
13, 14, taut, teo 1.4

16) $\sim\forall y(C \to \forall x(x<y \to B)) \to DEM[\sim\forall y(C \to \forall x(x<y \to B))]$
12, 15, taut.

17) $\forall y(C \to \forall x(x<y \to B)) \leftrightarrow \forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)$
teo 1.60

18) $\sim\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B) \to DEM[\sim\forall x(\exists y(C \wedge x<y) \to B)]$
16, 17, taut., (D1'), (D2')

4.2 As dificuldades em demonstrar D1'

A demonstração de D1' decorre essencialmente de D1 e da possibilidade de mostrar que a fórmula

(14) $$DEM(\ulcorner A \urcorner) \to DEM[A]$$

seja teorema.

A dificuldade, entretanto, está em mostrar que a propriedade sintático-morfológica

(15) $$DEM(y) \wedge TLP(w,v,y) \wedge SUB(y,v,w,z) \to DEM(z)$$

é teorema, fato esse que permitiria demonstrar (14).

4.3 As dificuldades em demonstrar o esquema $t=u \rightarrow DEM[t=u]$

Dentre as dificuldades encontradas para mostrar as condições de derivabilidade, estamos diante da situação mais problemática, tendo em vista que, até então, as fórmulas que admitimos serem demonstráveis são noções sintáticas que valem em quelquer cálculo de predicados de primeira ordem, enquanto, para demonstrar que as fórmulas (12) e (13), i.e.,

$$t=u \rightarrow DEM[t=u] \quad \text{e} \quad t\neq u \rightarrow DEM[t\neq u]$$

são teoremas, uma alternativa seria mostrar previamente que

(16) $$AP\vdash (DEM[F])^{x}/t \leftrightarrow DEM[F^{x}/t].$$

A seguir mostraremos (12) e (13), pressupondo (16):

$AP\vdash t=u \rightarrow DEM[t=u]$

Prova

1)	$AP\vdash x=x$	teo 1.5
2)	$AP\vdash DEM[x=x]$	1, (D1') [2]
3)	$AP\vdash x=y \rightarrow (DEM[x=z]\ ^{z}/x \rightarrow DEM[x=z]\ ^{z}/y)$	teo 1.9
4)	$AP\vdash x=y \rightarrow DEM[x=y]$	2,3, taut,(16)
5)	$AP\vdash t=u \rightarrow DEM[t=u]$	4,GEN,Ax.4, (16)

[2] Chamamos atenção que **(D1')** e **(D2')** não são regras de **AP**. **Assim**, $DEM[x=x]$ é um teorema de **AP** porque a fórmula $x=x$ também o é. **De** modo geral, usaremos **(D1')** e **(D2')** como "regra de inferência" somente quando temos um teorema como antecedente.

AP$\vdash$ $t \neq u \rightarrow DEM[t \neq u]$

Prova usando o axioma Ap.$\wp$, onde $A(y)$ é a fórmula

$$x < y \rightarrow DEM[x<y].$$

1)	AP$\vdash$ $\sim(x<\overline{0})$	teo 1.17
2)	AP$\vdash$ $\sim(x<\overline{0}) \rightarrow ((x<\overline{0}) \rightarrow DEM[x<\overline{0}])$	taut.
3)	AP$\vdash$ $x<\overline{0} \rightarrow DEM[x<\overline{0}]$	1,2, taut.
4)	$x<y \rightarrow DEM[x<y]$	hip.
5)	$x<y \rightarrow x<y'$	teo 1.18
6)	$DEM[x<y] \rightarrow DEM[x<y']$	5, (D1'), (D2')
7)	$x<y \rightarrow DEM[x<y']$	4,6, taut.
8)	$x=y \rightarrow DEM[x=y]$	(12)
9)	$x=y \rightarrow x<y'$	teo 1.19
10)	$DEM[x=y] \rightarrow DEM[x<y']$	9, (D1'), (D2')
11)	$x<y \vee x=y \rightarrow DEM[x<y']$	7,8,10, taut.
12)	$x<y' \rightarrow x<y \vee x=y$	teo 1.20
13)	$x<y' \rightarrow DEM[x<y']$	11,12, taut.
14)	AP$\vdash$ $\forall y((x<y \rightarrow DEM[x<y]) \rightarrow (x<y' \rightarrow DEM[x<y']))$	4-13 TD, GEN
15)	AP$\vdash$ $x<y \rightarrow DEM[x<y]$	3,14, Ap.$\wp$,MP, Ax.4
16)	AP$\vdash$ $y<x \rightarrow DEM[y<x]$	15,GEN,Ax.4, (16)
17)	AP$\vdash$ $x<y \rightarrow x \neq y$	teo 1.21
18)	AP$\vdash$ $y<x \rightarrow x \neq y$	teo 1.21
19)	AP$\vdash$ $DEM[x<y] \rightarrow DEM[x \neq y]$	17, (D1'), (D2')
20)	AP$\vdash$ $DEM[y<x] \rightarrow DEM[x \neq y]$	18, (D1'), (D2')
21)	AP$\vdash$ $x \neq y \rightarrow x<y \vee y<x$	teo 1.24
22)	AP$\vdash$ $x \neq y \rightarrow DEM[x \neq y]$	15,16,19,20,20,21 taut.
23)	AP$\vdash$ $t \neq u \rightarrow DEM[t \neq u]$	22,GEN,Ax.4,(16)

Resumindo, uma demonstração completa do segundo teorema seria possível se pudermos demonstrar que as seguintes fórmulas,

$$DEM(x) \wedge DEM(y) \wedge IMP(x,z,y) \rightarrow DEM(z),$$

$$SUB(x_1,v,w,x) \wedge SUB(y_1,v,w,y) \wedge SUB(z_1,v,w,z) \wedge IMP(x_1,y_1,z_1) \rightarrow IMP(x,y,z),$$

$$SUB(x,v,y,z) \wedge {\sim}VL(w,x) \wedge {\sim}VOT(w,y) \rightarrow {\sim}VL(w,z),$$

$${\sim}VL(v,x) \rightarrow SUB(x,v,w,x),$$

$$DEM(y) \wedge TLP(w,v,y) \wedge SUB(y,v,w,z) \rightarrow DEM(z) \quad \text{e}$$

$$(DEM[F])^{x}/t \leftrightarrow DEM[F^{x}/t],$$

são teoremas de AP. Observemos que tais propriedades expressam propriedades sintático-morfológicas de AP. Ao invés de demonstrar cada uma delas, talvez seja mais interessante, formalizar a metateoria de AP e mostrar, por um lado, que tal metateoria formal é completa em certo sentido, e por outro, que ela pode ser interpretada, em um sentido rigoroso, em AP. Tarefa que deixamos para um próximo trabalho.

BIBLIOGRAFIA

GÖDEL, Kurt. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I*. in- Collected Works, vol.I, New York: Clarendon, 1986, p 145-195.

------------- *On Undecidable Propositions of Formal MathematicalSystems*, in - Collected Works, vol.I, New York: Clarendon, 1986,pp 346-372.

BOOLOS, G. *Peano Arithmetic*. in - The Unprovability of Consistency, Cambridge: Cambridge University, 1979, p 34-45.

FEFERMAN, S. *Arithmetization of Metamathematics in a general Setting*, "Fundamenta Mathematicae", 49, 1960, p 35-92.

HILBERT, David & BERNAYS, Paul. *Grundlagen der Mathematic I*. 2. ed. aum. e rev., Berlin: Springer-Verlag, 1934.

JEROSLOW, R. G., *Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivabity Conditions for Goedel's Second Incompleteness Theorem.* "J.S.L.", 38(3), 1973, p 359-367.

KNEALE, Willian & KNEALE, Marta. *O Desenvolvimento da Lógica.* Tradução de M.S.Lourenço, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

MENDELSON, Elliot. *Introduction to Mathematical Logic.* 3. ed. California, Wadsworth, 1987.

PEANO, Giuseppe. *Formulario Mathematico.* Roma: Cremonese, 1960,

SHOENFIELD, J. S. *Mathematical Logic.* Reading: Mass., Addisson-Wesley, 1967.

SMORYSNSKI, C. *The Incompleteness Theorems.* in - BARWISE, J. *Handbook of Mathematical Logic.* Amsterdam: North-Holland, 1977, p 821-865

SMULLYAN, Raymond M. *Goedel's Incompleteness Theorems.* New York: Oxford University, 1992.

WANG, Hao. *The Axiomatization of Arithmtic.* "The Journal of Symbolic Logic", 22 No. 2, 1957, p 145-159.