

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS
HUMANAS

Tese de doutorado

A aplicabilidade da matemática à física

Ricardo Mendes Grande

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jairo José da Silva

**TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS
HUMANAS DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM FILOSOFIA.**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
RICARDO MENDES GRANDE EM 21 DE SETEMBRO DE 2011, E ORIENTADA PELO PROF.DR.
JAIRÓ JOSÉ DA SILVA**

CPG, ___/___/___

Campinas - SP

Setembro 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
CECÍLIA MARIA JORGE NICOLAU – CRB8/3387 – BIBLIOTECA DO IFCH UNICAMP

Grande, Ricardo Mendes, 1978-

G763a A aplicabilidade da matemática à física / Ricardo Mendes Grande. - -
Campinas, SP : [s. n.], 2011.

Orientador: Jairo José da Silva.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Filosofia e Ciências Humanas.

1. Matemática - Filosofia. 2. Epistemologia. 3. Mecânica quântica. I.

Silva, Jairo José da. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informação para Biblioteca Digital

Título em Inglês: The applicability of mathematics to physics

Palavras-chave em inglês:

Mathematics - Philosophy

Epistemology

Quantum mechanics

Área de concentração: Filosofia

Titulação: Doutor em Filosofia

Banca examinadora:

Jairo José da Silva [Orientador]

Décio Krause

César Rogério de Oliveira

Ricardo Pereira Tassinari

Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Data da defesa: 21-09-2011

Programa de Pós-Graduação: Filosofia



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em 21 de setembro de 2011, considerou o candidato RICARDO MENDES GRANDE aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Jairo José da Silva

Handwritten signature of Prof. Dr. Jairo José da Silva in blue ink, written over a horizontal line.

Profª. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Handwritten signature of Profª. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano in blue ink, written over a horizontal line.

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Handwritten signature of Prof. Dr. César Rogério de Oliveira in blue ink, written over a horizontal line.

Prof. Dr. Ricardo Pereira Tassinari

Handwritten signature of Prof. Dr. Ricardo Pereira Tassinari in blue ink, written over a horizontal line.

Prof. Dr. Décio Krause

Handwritten signature of Prof. Dr. Décio Krause in blue ink, written over a horizontal line.

Agradecimentos

Agradeço à **Fapesp** (processo 2007/59606-4) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Gostaria de mostrar minha imensa gratidão ao professor Jairo José da Silva por ter aceitado me orientar neste trabalho de doutorado. Agradeço aos membros titulares (e suplentes) da banca por terem aceitado compô-la, em especial, ao professor Décio Krause, pois suas críticas ao meu trabalho foram muito relevantes para a redação final da tese. Expresso meu carinho e admiração pelo professor César Rogério de Oliveira que tem acompanhado de perto meus estudos desde o mestrado e pela professora Ítala Maria L. D'Ottaviano. Sou grato ao professor Eloésio Paulo pela revisão da minha tese e aulas de redação.

Pela amizade e apoio, agradeço aos meus colegas Leandro Suguitani, Fábio Bertato, Newton Peron, Luiz Henrique, Ramon, Carolina Guidoti, Thaís H. Smilgys, e à queridíssima Doroteya Angelova. Também sou muito grato à secretária Sônia Beatriz do IFCH e a todos os funcionários do CLE, em especial ao Daniel Sílvio, Émerson Francisco e aos professores Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio e à professora Ítala, pois me aceitaram como estudante de doutorado no CLE.

Dedico esta tese à minha mãe - Maria Eugênia Mendes -, à professora Ítala, à professora Rita Zorzenon da UFPE e ao *espírito imortal* da música de Mozart e Bach. Finalmente, à memória de Francine Ragonha e do cientista Carl Sagan (foi por meio da leitura do livro *Cosmos* que realmente me interessei por estudar matemática, física e filosofia).

Resumo

O propósito deste trabalho é mostrar o porquê de conceitos matemáticos serem úteis à descrição de fenômenos da nossa realidade empírica sem termos de nos comprometer com a existência de objetos abstratos. Por meio da análise do desenvolvimento da mecânica quântica não-relativística de Werner Heisenberg, procuramos mostrar como se dá relação entre os conceitos da matemática pura e os conceitos da mecânica quântica. Após a análise da tese de Mark Steiner a respeito da aplicabilidade da matemática à física, expomos nosso ponto de vista com base em algumas das idéias estruturalistas elaboradas por Jairo José da Silva.

Abstract

The purpose of this work is to show why mathematical concepts are useful to describe phenomena of our empirical reality without having to commit ourselves to the existence of abstract objects. By analyzing the development of Heisenberg's non-relativistic quantum mechanics, we show how mathematical and quantum mechanical concepts are related to each other. After the analysis of Mark Steiner's thesis on the applicability of mathematics, we expose our own point of view, which was based on some ideas on structuralism due to Jairo José da Silva.

Sumário

Introdução.....	13
-----------------	----

Capítulo 1º

Primeira seção

1.1	A mecânica quântica no sentido heisenbergeriano.....	17
1.11	O átomo de Bohr.....	19
1.12	Werner Heisenberg.....	24
1.13	O princípio de Bohr em um artigo de Born.....	27
1.14	Rumo à cinemática quântica de Heisenberg.....	33

Segunda seção

1.2	A mecânica quântica no sentido de Dirac.....	45
1.21	Introdução às equações fundamentais da mecânica quântica.....	46
1.22	A equação de Heisenberg.....	48
1.23	Analogia quântica.....	50

Terceira seção

1.3	Entre a física e a matemática.....	57
1.31	Revedo a antiga teoria quântica.....	58
1.32	Heisenberg, Born e Jordan.....	64

Quarta seção

1.4	Do significado físico dos termos matemáticos.....	83
1.41	Analogia quântica revisitada.....	84
1.412	Do significado dos operadores de momento e de posição.....	90
1.42	Estrutura axiomática da mecânica quântica.....	97

Capítulo 2º

2.1	A aplicabilidade da matemática de acordo com Mark Steiner.....	107
2.11	Objetivos de Steiner.....	107
2.111	Primeiro objetivo de Steiner.....	108
2.1111	Primeira parte: análise da aplicabilidade semântica.....	108
2.11111	O problema semântico.....	112
2.1112	Segunda parte: análise da aplicabilidade descritiva.....	118
2.112	Segundo objetivo de Steiner.....	126

2.1121	Steiner e o mistério da quantização.....	128
2.12	Análise do argumento de Steiner.....	136

Capítulo 3º

3.1	A aplicabilidade da matemática do ponto de vista do estruturalismo.....	139
3.11	Aspectos fundamentais do estruturalismo de da Silva.....	140
3.12	Extensão de linguagens matemáticas.....	155
3.13	A percepção é estruturante.....	156
3.14	Números existem?.....	172
3.15	A equação de Dirac e o papel heurístico da matemática.....	180
1.16	o argumento de Quine.....	195

Conclusões.....	205
-----------------	-----

Apêndices

1.1	Cômputo das frequências e amplitudes.....	209
1.2	Princípios básicos da mecânica quântica não-relativística.....	213
1.3	O teorema de Ehrenfest.....	215
3.1	Riemann e Helmholtz.....	219
3.2	A aplicabilidade da matemática de acordo com Hartry Field.....	229

Referências bibliográficas.....	243
---------------------------------	-----

Introdução

A aplicabilidade da matemática à física é o tema¹ deste trabalho de doutorado. A mecânica quântica não-relativística desenvolvida por Werner Heisenberg será o ponto de partida² de nossos estudos. Analisaremos no primeiro capítulo deste trabalho o desenvolvimento da teoria de Heisenberg³. Mostraremos, então, como se dá a relação entre os termos matemáticos e os conceitos físicos descritos por esses termos. Dividimos em quatro seções o primeiro capítulo desta tese.

Na primeira seção, nos deteremos no desenvolvimento histórico da mecânica quântica de Heisenberg. Na segunda, veremos como Paul Dirac foi capaz de estender as idéias de Werner Heisenberg ao desenvolver um processo conhecido por *quantização canônica*. A escolha da teoria

¹Nosso trabalho é de epistemologia da matemática. Não visamos discutir questões da filosofia da física, e.g., ontologia da mecânica quântica (seja qual for a formulação ou interpretação da teoria). Com relação à filosofia da física, mencionaremos apenas o que considerarmos relevante para o nosso trabalho. Ao nos referirmos à mecânica quântica de Heisenberg ou Dirac, sempre teremos em mente a interpretação de Copenhague sugerida por Heisenberg ou Born. Agradecemos ao professor Krause por suas críticas pontuais e observações referentes à filosofia da física e da matemática.

²A conclusão a que queremos chegar a respeito do trabalho de Heisenberg é que a matemática utilizada na formulação de sua teoria quântica somente expressou dados da experiência empírica e hipóteses físicas. O estudo da teoria quântica de Heisenberg será propedêutico à compreensão da relação entre os objetos abstratos da matemática e os conceitos físicos descritos por tais objetos.

³Mencionaremos também aspectos básicos de outras teorias como as teorias da relatividade de Einstein e a mecânica quântica relativística de Dirac. É importante dizer que não é possível discutir com detalhes todas essas teorias. Nós apenas as citaremos à medida que acharmos conveniente e seremos mais detalhistas somente ao analisarmos a teoria de Heisenberg. Também é conveniente dizer que há várias teorias da física que se aplicam à descrição de fenômenos do mundo atômico, muitas das quais poderiam ser ditas *mecânicas quânticas*. Não parece ser o caso de haver uma única teoria quântica não-relativística, mas várias, e.g., mecânica quântica de Bohm, Heisenberg, Schrödinger, Feynman, Nelson, etc. Há ainda várias outras maneiras de se *fazer mecânica quântica*, dentre as quais se destacam o processo de quantização geométrica, quantização canônica, quantização via espaço de fases, formulação variacional, etc. E não há evidência (e.g., uma demonstração) de que todas essas formulações da teoria sejam matematicamente equivalentes. Notemos também que determinados conceitos físicos não são necessariamente equivalentes em teorias distintas da física. Por exemplo, as noções de espaço em teoria da relatividade e mecânica quântica não-relativística não são equivalentes, pois o espaço é newtoniano na última delas.

desenvolvida por Heisenberg, preterindo as de Schrödinger e Feynman, deve-se ao fato de ela ter uma relação *mais próxima* com a mecânica clássica, o que pode ser expresso de maneira simples pelo teorema de Eherenfest. Tal teorema relaciona a teoria de Heisenberg com a mecânica clássica⁴ e será analisado no apêndice 1.3. Nas seções terceira e quarta, mostraremos precisamente como os conceitos matemáticos são utilizados na formulação da mecânica quântica.

No segundo capítulo discutiremos o trabalho de Mark Steiner⁵ a respeito da aplicabilidade da matemática. No terceiro capítulo é que desenvolveremos com precisão nosso ponto de vista filosófico a respeito da aplicabilidade da matemática à física. Veremos como é possível utilizar algumas das idéias de Jairo José da Silva para explicar o porquê de a matemática ser tão útil à fundamentação de teorias físicas. Mostraremos que não é necessário que objetos matemáticos *existam* (independentemente dos matemáticos e de suas teorias) para que a matemática seja útil na descrição de fenômenos da nossa realidade empírica. Veremos no terceiro capítulo o que Quine nos tem a dizer a respeito da aplicabilidade da matemática, e no apêndice 3.3, analisaremos a teoria nominalista de Hartry Field.

⁴Entendemos por mecânica clássica a mecânica de Newton (e suas elaborações lagrangeana e hamiltoniana, ou de Hamilton-Jacobi), a teoria do eletromagnetismo de Maxwell (KOMPANEYETS, A.S. *Theoretical physics*, cap. 1 e 2) e a estatística desenvolvida por Boltzmann, Maxwell e outros. (HUANG, K. *Statistical mechanics*, p. 3-32 e 55-106) É importante dizer que, de acordo com a mecânica clássica, seria inevitável o colapso da órbita de um elétron em movimento circular ao redor de um núcleo atômico. Claro que elétrons não orbitam núcleos atômicos no *sentido clássico* i.e., não é verdade que a analogia entre o sistema atômico (e.g., núcleo + elétron) e o sistema constituído por um planeta que orbita uma estrela seja correta.

⁵O trabalho de Steiner nos ajudará a compreender alguns aspectos elementares da aplicabilidade da matemática e também será útil para entendermos o realismo de Frege/Steiner.

Observações técnicas

Quanto aos capítulos (seções e subseções), nos referiremos a eles por meio de uma justaposição de números (à Wittgenstein), e.g., 1.23 (terceira subseção da segunda seção do primeiro capítulo). Quanto aos apêndices à nossa tese, nos referiremos a eles por meio de dois números, e.g., 3.1 (*primeiro apêndice ao terceiro capítulo*). É importante notar que utilizamos muitas notas de rodapé, o que pode tornar a leitura desta tese um *pouco cansativa*.

Capítulo 1º

Primeira seção

1.1 A mecânica quântica no sentido heisenbergeriano⁶

Mostraremos nesta seção como Heisenberg chegou à primeira formulação da teoria quântica⁷. Nas seções terceira e quarta veremos com detalhes como se dá a relação entre os termos matemáticos e os dados da experiência empírica. Ainda nas seções terceira e quarta começaremos a expor nosso ponto de vista filosófico a respeito da aplicabilidade da matemática. Visando compreender o trabalho de Heisenberg, partiremos de textos de Bohr e Born, cujos reflexos no trabalho de Werner Heisenberg foram relevantes. Discutiremos o trabalho de Dirac na segunda seção deste primeiro capítulo. Em ambas as seções, toda análise física e matemática será feita dentro do contexto⁸ em que os textos foram escritos, pois não é de nosso interesse analisar os artigos dos criadores da mecânica quântica no nível da matemática pura. Nossa análise da história e dos fundamentos da mecânica quântica é

⁶Veremos exatamente como Heisenberg desenvolveu a primeira mecânica quântica não-relativística em seu artigo seminal “Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations”. Visamos entender a criação da teoria de Heisenberg no contexto do seu desenvolvimento, i.e., não estamos interessados em fundamentar matematicamente a mecânica quântica não-relativística, por exemplo, não mencionaremos muitos conceitos da teoria de medida de Lebesgue, os quais seriam importantes para a fundamentação matemática da mecânica quântica de Heisenberg (e Dirac).

⁷Para a finalidade de entender a aplicabilidade da matemática, cremos que não seja relevante nos determos na análise de interpretações da mecânica quântica. Nós adotaremos implicitamente a interpretação estatística da mecânica quântica devida a Heisenberg, a qual seria a base da *interpretação de Copenhague*. (HEISENBERG, W. *The physical principles of the quantum theory* p. 55-65 e FOCK, W. A. *Princípios de mecânica quântica* p. 88-98)

⁸Ou seja, é importante enfatizar que não visamos desenvolver com detalhes todos os conceitos matemáticos necessários à fundamentação matemática da mecânica quântica de Heisenberg.

propedêutica à defesa de nosso ponto de vista filosófico que será elaborada no capítulo 3º.

A mecânica quântica desenvolvida por Heisenberg distancia-se da antiga teoria quântica, da qual falaremos em breve, em um sentido bastante específico: no nível atômico, a mecânica clássica é falsa. A antiga teoria quântica fazia uso explícito de várias leis da mecânica clássica, como as do eletromagnetismo. Visando elaborar uma teoria livre de qualquer preconceito oriundo de uma teoria clássica e que fosse coerente com os experimentos, Heisenberg propôs que somente *observáveis* deveriam ser levados em conta na formulação da teoria. Por estes termos, o físico alemão tinha em mente qualquer grandeza que pudesse ser medida empiricamente, por exemplo, *freqüências e níveis de energia*. (DUGAS, R. *A history of mechanics* p. 571)

Quanto às limitações da antiga teoria quântica, Heisenberg nos diz que “é bem conhecido que as regras formais utilizadas para o cálculo de quantidades observáveis tais como a energia do átomo de hidrogênio podem ser seriamente criticadas em razão de elas conterem, como elementos básicos, relações entre quantidades que aparentemente não são observáveis em princípio, e.g., posição (...) do elétron”⁹.

Pela citação acima, notamos a insatisfação de Heisenberg com a *antiga teoria quântica*¹⁰ do átomo de hidrogênio. A fim de que possamos entender as críticas de Heisenberg, é necessário que nos detenhamos em alguns aspectos básicos da antiga teoria, em especial no modelo atômico de Bohr. Niels Bohr foi quem criou o primeiro modelo atômico

⁹(HEISENBERG, W. “Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations” Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics* p. 261). Referências em que os artigos citados se encontram em outras obras serão complementadas em notas de rodapé.

¹⁰Por *antiga teoria quântica*, entendemos a teoria atômica que surgiu em 1900 com Max Planck, e que se estendeu até *meados* de 1925, ano em que Heisenberg publicaria seu artigo seminal.

compatível com os dados da experiência empírica. Tal modelo só se aplicava ao átomo de hidrogênio e ficou conhecido como *átomo de Bohr*. Ao hélio, segundo elemento da tabela periódica – logo após o hidrogênio –, o modelo de Bohr não mais se aplicava.

1.11 O átomo de Bohr

Antes de analisarmos as limitações do modelo atômico de Bohr, veremos, de modo didático, como se *constrói* tal modelo. Para isso nos guiaremos pelo texto de estrutura quântica da matéria escrito por José Leite Lopes (LOPES, J.L. *A estrutura quântica da matéria*, cap. 19).

Precisamos de dois postulados básicos para a construção do modelo atômico de Bohr¹¹.

1-As trajetórias dos elétrons no átomo de hidrogênio são aquelas cujo momento angular é um múltiplo inteiro de \hbar (constante de Planck dividida por 2π).

Tal postulado nos permite escrever:

$$mvr = n \hbar$$

Para a massa m do elétron em movimento circular uniforme ao redor do núcleo, r -raio da órbita; v -velocidade linear do elétron, n -um número natural ($n \neq 0$), e mvr , a expressão clássica para o momento angular.

O primeiro postulado nos diz que o elétron do átomo de hidrogênio só pode descrever certas órbitas ao redor do núcleo atômico. Diz-se que o momento angular do elétron é quantizado. À época de Bohr, *quantizar* era sinônimo de *ser múltiplo inteiro*. Daí segue o termo *órbitas discretas*, ou *níveis discretos* de energia.

¹¹Esta descrição é didática e simplificada.

Vejamos o segundo postulado.

2-Quando o elétron descreve uma órbita estacionária, o átomo não emite nem absorve qualquer radiação. A emissão (ou absorção) de radiação é determinada pela passagem de uma órbita de energia E_p a uma outra de energia menor (ou maior) E_q . A frequência da radiação emitida ou absorvida é dada por:

$$\nu_{pq} = \frac{E_q - E_p}{\hbar}$$

O segundo postulado nos diz¹² que somente quando o elétron passa de uma órbita estacionária à outra é que o sistema atômico emite (ou absorve) energia. A frequência referente à transição é dada pela diferença entre as energias de cada órbita estacionária dividida por uma constante. Vejamos, então, como utilizar os dois postulados devidos a Bohr.

Classicamente¹³, uma partícula de massa m , velocidade v , carga elétrica e e que descreve uma trajetória circular de raio r_n em torno de um corpo massivo, sujeita a uma força atrativa¹⁴, deve satisfazer a:

Resultante das forças = força de Coulomb

¹²No segundo postulado, a matemática expressa propriedades de dados da experiência. Sabia-se que o espectro do átomo de hidrogênio era formado por certas *linhas espectrais*, cujo padrão sugeria que o sistema atômico só poderia existir em determinados níveis de energia. A relação matemática para o cálculo da frequência reflete a propriedade empírica que afirma que a energia deve ser quantizada. Tal relação foi primeiramente postulada por Max Planck. Diremos um pouco mais a respeito de Planck na seção terceira. Mas é importante adiantar que Planck chegou à quantização da energia visando explicar a absorção de energia pela matéria, e não a estabilidade atômica.

¹³Lembre-mos de que, de acordo com a eletrodinâmica de Maxwell, um elétron em órbita circular (ou elíptica) ao redor de um núcleo deveria irradiar. Isso implicaria em órbitas cujos raios seriam cada vez menores, e, conseqüentemente, o sistema núcleo-elétron seria instável.

¹⁴Estamos nos limitando ao caso de órbitas circulares e da força de Coulomb. Nesse exemplo, deve haver equilíbrio entre a força centrífuga e a atração coulombiana exercida pelo núcleo, a qual é descrita pela expressão acima.

$$\frac{mv^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_n^2}$$

para ϵ -constante de permissividade elétrica.

Se utilizarmos o primeiro postulado de Bohr em conjunto com a última expressão, podemos calcular o raio da órbita do elétron, i.e., tomamos

$$mvr_n = n \hbar$$

$$\frac{mv^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_n^2} *$$

Combinadas, as expressões acima nos permitem escrever, para $Z = \frac{1}{4\pi\epsilon}$:

$$v = \frac{2\pi e^2 Z}{hn}$$

Utilizando mais uma vez, $mvr_n = n \hbar$, e escrevendo para v , $v = \frac{n \hbar}{mr_n}$, podemos substituir esta última expressão em *, a fim de obtermos:

$$r_n = n^2 h^2 / 4\pi^2 Z e m^2$$

Calculamos, então, o raio da órbita referente à energia E_n . Tal expressão nos permite obter uma fórmula para o cômputo de E_n , i.e.,

$$E_n = -\frac{q^2}{r_n}$$

Visto que E_n é um observável, pode-se verificar se os valores previstos pelo modelo de Bohr correspondem àqueles medidos em laboratório. Verifica-se que o modelo de Bohr prevê corretamente os valores para E_n para o caso do átomo de hidrogênio.

Em seu trabalho, Bohr¹⁵ postula que “um sistema atômico pode, e somente pode, existir permanentemente em certos estados correspondentes a series descontínuas de valores para sua energia (...). Esses estados serão ditos *estados estacionários* do sistema”. De acordo com a teoria clássica do eletromagnetismo, um elétron em movimento (circular, por exemplo) ao redor de um núcleo atômico deveria *irradiar*. A emissão de energia em forma de radiação implicaria órbitas cujos raios seriam cada vez menores, e após certo intervalo de tempo, o colapso da órbita do elétron seria inevitável. Daí segue a necessidade de Bohr postular que o sistema atômico só poder existir permanentemente em certas órbitas fixas, estacionárias.

Por *série descontínua de valores para sua energia*¹⁶, o físico dinamarquês entende aquela que se refere à transição do elétron de um nível de energia a outro, o que não se dá de acordo com a teoria clássica do eletromagnetismo. De acordo com o eletromagnetismo clássico, as transições de um nível de energia a outro sempre ocorreriam de modo contínuo¹⁷. Esse primeiro postulado, o qual Bohr insere nos seus *princípios gerais*¹⁸ da antiga teoria quântica, foi a maneira encontrada para explicar a estabilidade da matéria. Do fato de só serem observados certos níveis específicos de energia nos espectros atômicos (ver DUGAS, R., *op. cit.*, p. 535-536), Bohr postula que as transições entre dois níveis energéticos deverão ser descontínuas.

O segundo *princípio geral* simplesmente nos dirá que a radiação absorvida (ou emitida) durante uma transição entre dois estados

¹⁵(BOHR, N. “On the quantum theory of line spectra” Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 97)

¹⁶Para o átomo de hidrogênio, são ditas *séries de Balmer*.

¹⁷Notemos que o termo *contínuo* refere-se à energia do sistema atômico e não ao espaço (ou espaço-tempo).

¹⁸Ver a nota de rodapé anterior.

estacionários é *unifrequentic*¹⁹, e que sua frequência ν é dada por $E' - E'' = h\nu$, dita *lei de Planck*, sendo E', E'' , as energias de dois estados estacionários e h , a constante de Planck, i.e, um número real.

Em seu artigo de 1914 (DUGAS, R., *op. cit.*, p. 536), Bohr utiliza outros três postulados para construir seu modelo atômico. Exige-se também que as leis da mecânica clássica sejam válidas²⁰ para o caso de o elétron estar em uma órbita estacionária. Já para o caso de uma transição de um nível energético a outro, tais leis clássicas deixariam de ser válidas - pois a transição seria descontínua. Finalmente, As duas últimas exigências impostas por Bohr referem-se à quantização do momento angular do elétron. À época de Bohr, como dissemos, *quantizar* era sinônimo de *discretizar*, no sentido de *ser múltiplo inteiro* de certa quantidade.

Das duas últimas exigências citadas e que se referem ao momento angular do elétron, a primeira se restringe a órbitas circulares. No caso geral, para órbitas elípticas, deveríamos escrever²¹

$$\frac{W}{\omega} = n \frac{h}{2}$$

A última imposição de Bohr nos diz que o estado permanente de todo sistema atômico²² é determinado pelo fato de cada elétron ter o momento angular quantizado (i.e, ser múltiplo inteiro de $\hbar = \frac{1}{2\pi}h$). A diferença entre as duas últimas assunções é sutil. O *estado permanente* é

¹⁹Obviamente, *unifrequentic* não é um termo existente em Português ou Inglês. Van der Waerden utiliza-o para dizer que a frequência é única, dados os níveis iniciais e finais de energia.

²⁰Bohr sabia que, de acordo com mecânica clássica, o movimento circular de um elétron ao redor de um núcleo era instável. Essa *aparente contradição* (oriunda da suposição de que as leis da mecânica clássica eram válidas para a construção do seu modelo atômico) só foi eliminada com a criação da mecânica quântica de Heisenberg em 1925.

²¹Para $\frac{W}{\omega}$, a razão entre a energia total do sistema W e a frequência angular ω .

²²"*permanent*" state of every atomic system.(DUGAS, R., *op. cit.*, p. 536)

aquele que corresponde ao máximo de energia que um átomo pode emitir; o último postulado se diferencia do anterior por não se referir a sistemas com um único elétron, mas a quaisquer sistemas atômicos. Vejamos os sucessos da teoria de Bohr, embora ela estivesse mergulhada em inconsistências teóricas.

Bohr²³ foi capaz de explicar os resultados obtidos empiricamente por Balmer²⁴, além de ter permitido o cálculo da constante de Rydberg pela primeira vez.

Quanto à teoria de Heisenberg, ele foi guiado por um princípio heurístico cuja função era relacionar sua teoria quântica com a teoria clássica, conhecido por *princípio da correspondência de Bohr* – do qual falaremos muito em breve. A partir de agora, entenderemos por mecânica quântica a teoria desenvolvida por Heisenberg.

1.12 Werner Heisenberg

George Mackey, em seu texto *Mathematical foundations of quantum mechanics*, nos diz que Heisenberg desenvolveu sua teoria “by vague and mystical but inspired heuristic reasoning”. (MACKEY, G., *op. cit.*, p. 99) Se *mystical* for traduzido por *vago*²⁵ cremos que a observação de

²³Enfatizemos que, além de fazer uso de quantidades que não podiam ser observadas empiricamente, tais como a posição de um elétron em uma *órbita*, o modelo atômico de Bohr estava repleto de inconsistências teóricas. Lembremo-nos de que a mecânica quântica de Heisenberg se dissociará da antiga teoria quântica no sentido explícito de que *a mecânica clássica não é válida na escala atômica*²³. (PIZA, A.F.R. de T. *Mecânica quântica*, p. 17)

²⁴As *Séries de Balmer* referem-se aos níveis de energia para o caso do átomo de hidrogênio. Para detalhes técnicos, indicamos os textos citados de Dugas (DUGAS, R., *op. cit.*, p. 537-538) e Lopes (LOPES, J.L *A estrutura quântica da matéria*, p. 390).

²⁵Ou nebuloso. Queremos evitar o termo “místico”, pois não parece ser o que Mackey tem em mente quanto ao trabalho de Heisenberg. O próprio desenvolvimento do trabalho de Werner Heisenberg não parece suportar uma interpretação mística, como veremos.

Mackey²⁶ faça sentido. Heisenberg não é preciso na formulação matemática da teoria, muito menos nas analogias *via princípio de Bohr*. Werner Heisenberg foi aluno de Sommerfeld em Munique e frequentou Göttingen no verão de 1922, ocasião do *Bohr-Festspiele*. No inverno de 1922-23, trabalhou com Max Born, ainda em Göttingen. Em 1923 retornou a Munique visando concluir sua tese de doutorado²⁷. Em sua primeira correspondência com Wolfgang Pauli (VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 23), Heisenberg já demonstrava interesse em compreender como se dava a absorção de energia pela matéria. Mas foi em julho de 1925 que Heisenberg concluiu o artigo que conteria sua formulação matemática da mecânica quântica, cujo título era “Reinterpretação quântica de relações cinemáticas e mecânicas”, como veremos a seguir.

Heisenberg²⁸ começaria sua *reinterpretação* com a seguinte afirmação: “O presente trabalho visa estabelecer uma base para a mecânica quântica teórica fundada exclusivamente nas relações entre quantidades que em princípio são observáveis”. O físico alemão é explícito quanto ao propósito de seu artigo, i.e., desenvolver uma base (matemática) para a mecânica quântica que parta apenas de grandezas medidas empiricamente – fato que já enfatizamos²⁹. Quanto ao termo

²⁶Mostraremos como o físico alemão chegou à sua teoria, e não como Mackey *acha* que ele deveria ter procedido. Não é de nosso interesse preencher as lacunas matemáticas deixadas pelos físicos – se é que todas as lacunas podem ser preenchidas.

²⁷Heisenberg estudou em seu doutorado um problema de hidrodinâmica (VAN DER WAERDEN, B.L. *op. cit.*, p. 19).

²⁸(HEISENBERG, W. “Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations” Em VAN DER WAERDEN, *op. cit.*, p. 261).

²⁹Vemos a nítida influência de algum pragmatismo aqui. Heisenberg nos diz em um artigo sobre pragmatismo e física atômica que “Na física teórica, nosso primeiro passo é combinar os resultados dos experimentos e as fórmulas, de modo a chegar a uma descrição fenomenológica dos processos envolvidos”. (HEISENBERG, W. *A parte e o todo*, p. 119) Claro que há várias escolas filosóficas (distintas) conhecidas por pragmatismo, e cremos que Heisenberg tenha sido influenciado pela *escola de Ernst Mach*.

*kinematic*³⁰ presente no título de seu artigo, o autor visa criar uma *cinemática quântica*.

Heisenberg exigiu também que o princípio da correspondência de Bohr fosse uma condição necessária ao desenvolvimento de sua cinemática. O princípio de Bohr será o elo entre a nova teoria quântica e as teorias clássicas da mecânica, pois a nova teoria quântica não deveria estar em desacordo com a mecânica clássica quanto à descrição macroscópica³¹ da realidade empírica. E ainda, quanto à relação entre as teorias clássica e quântica, van der Waerden nos diz, em sua análise histórica da criação do princípio da correspondência, que “para grandes números quânticos os resultados obtidos deveriam convergir para aqueles obtidos em mecânica clássica”. Por *grandes números quânticos*, o autor entende *sistemas físicos* constituídos de vários átomos. A idéia é simples, visto que “para sistemas físicos constituídos de várias partículas, o *comportamento* do sistema é descrito pela mecânica clássica”. (VAN DER WAERDEN, B.L., *op. cit.*, p. 7-9) Vejamos, a partir de um artigo de Born, o significado e a aplicação do princípio da correspondência de Bohr.

³⁰A teoria de Bohr fazia uso explícito de conceitos da eletrodinâmica de Maxwell, tais como *força centrípeta*. Bohr foi explícito quanto ao uso do termo *dinâmico* em seu modelo atômico: “O equilíbrio dinâmico de um sistema em um estado estacionário é governado pelas leis ordinárias da mecânica, mas essas leis não são válidas no caso de transição de um estado estacionário a outro”. (DUGAS, R., *op. cit.*, p. 536)

³¹Claro que a mecânica quântica foi desenvolvida para se aplicar ao nível microscópico de descrição física, e a mecânica clássica, ao macroscópico. Mas seria de esperar que, para um número elevado de partículas, a teoria quântica reproduzisse resultados da teoria clássica.

1.13 O princípio de Bohr em um artigo de Born

Vejamos, então, o princípio heurístico devido a Niels Bohr³². Partiremos de um artigo de Max Born para que possamos compreender o princípio da correspondência. Optamos por esta abordagem porque Bohr nunca enunciou de modo rigoroso seu princípio. O artigo de Born também nos será muito útil à compreensão do trabalho de Heisenberg. Em sua aplicação do princípio, Born utiliza a idéia da *reinterpretação quântica* que vingaria com o trabalho de Heisenberg. Sigamos, então, com o artigo³³ “Quantum mechanics” de Born, ao qual nos referiremos citando seus parágrafos numerados.

No § 1, Born elabora uma breve, precisa e clara exposição da *teoria clássica da perturbação*. A idéia central do artigo consiste em tratar a interação entre um átomo e a radiação oriunda de uma fonte externa, e.g., um campo³⁴. As equações fundamentais da mecânica clássica para um sistema de n graus de liberdade podem ser escritas pelo conhecido *modo canônico mc*:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, j = 1, \dots, n$$

H é a função hamiltoniana clássica. Os termos q_j são ditos *variáveis generalizadas*, cujos momentos conjugados são denotados por p_j .

³²O físico dinamarquês nunca foi preciso ao enunciar o seu princípio, tal como nos conta van der Waerden em “História do princípio da correspondência”. (VAN DER WAERDEN, B.L., *op. cit.*, p. 7-8) Bohr queria um elo entre a mecânica clássica e a antiga teoria quântica.

³³(BORN, M. “Quantum theory” Em VAN DER WAERDEN, *op. cit.*, p. 181-198). A fim de sermos precisos, elaboraremos algumas notas técnicas. É sempre ilustrativo seguir Born, pois ele é bastante claro e objetivo em suas observações e no uso das expressões matemáticas.

³⁴Para um estudo pormenorizado da teoria clássica da perturbação, indicamos o texto de Goldstein (GOLDSTEIN, H. E POOLE, C. E SAFCKO, J. *Classical mechanics*, p. 527-532). Para uma introdução à teoria quântica da perturbação, indicamos Piza (PIZA, A.F.R. de T. *Mecânica quântica*, cap. 4).

Born denota a função *hamiltoniana clássica* de um sistema físico sujeito a forças externas por

$H_0 = H_0(\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_n^0, J_1^0, \dots, J_n^0)$, para as variáveis ω_i^0 e J_i^0 de *ação-ângulo* do sistema³⁵.

De modo sucinto, uma *perturbação* é uma função H_1 das mesmas variáveis de H_0 , cuja dimensão (física) é de energia. Exige-se também que H_1 tenha módulo *suficientemente menor* que o módulo de H_0 para cada $(\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_n^0, J_1^0, \dots, J_n^0)$ no domínio de H_1 e de H_0 . Utiliza-se o método perturbativo para o estudo de pequenas variações nos níveis de energia de um sistema, cuja hamiltoniana *não-perturbada* é H_0 .

A *hamiltoniana geral* é definida por Born do seguinte modo: $H = H_0 + \lambda H_1$, sendo λ um parâmetro real. Born assume que a interação entre os sistemas seja mediada por uma força externa que possa ser expressa por uma serie de Fourier. Supõe-se também que a função perturbadora possa ser escrita por meio de uma série de Fourier, i.e.,³⁶

$$\sum_{\tau} C_{\tau} e^{2\pi i(\omega_0 \tau)}$$

Para $(\omega_0 \tau) = \sum_{i=1}^n \omega_i^0 \tau_i$, e $\tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ ($\tau_i \in \mathbb{N}$)

C_{τ} -coeficientes reais.

³⁵Estas últimas são obtidas por meio de certas operações conhecidas por *transformações canônicas*, as quais deixam invariantes as relações definidas por *mc*. Sem detalhes técnicos, tais variáveis (ditas de *ação-ângulo*) são funções lineares do tempo (ver LINDSAY, R.B. E MARGENAU, H. *Foundations of physics*, p. 154-158). Mackey tratará de modo rigoroso a teoria em questão. (MACKEY, *op. cit.*, cap. 1)

³⁶A soma é realizada sobre um conjunto de vários índices, o que quer dizer que a notação é condensada. Poderíamos ter usado n símbolos de somatório.

O fato de podermos expandir as funções por meio de séries de Fourier segue da hipótese de que a interação é periódica³⁷. Estamos assumindo que $\omega_i^0 = \nu_i t$, sendo o conjunto formado pelos ν_i ($\nu_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i^0}$) utilizado para denotar as *frequências naturais* do sistema. Assumamos também que o conjunto das frequências naturais satisfaça à seguinte propriedade: nenhum dos termos referentes às frequências naturais pode ser obtido como combinação linear dos demais para coeficientes que pertençam ao conjunto dos números naturais. Definamos o termo: $(\nu\tau) = \nu_0\tau_0 + \nu_1\tau_1 + \dots + \nu_n\tau_n$ que é necessariamente (e trivialmente) não-nulo para sistemas em que pelo menos um dos termos ν_i seja não-nulo. Essas definições são necessárias para que possamos compreender o artigo de Born.

Born pretende mostrar (§2 de *Quantum mechanics*) que o problema da interação entre energia e matéria pode ser tratado pela teoria clássica das perturbações. O trabalho de Born é de 1922 e o tratamento dado à interação só seria compreendido alguns anos mais tarde. Isso se daria com Feynman. (MEHRA, J. *The beat of a different drum: the life and science of Richard Feynman*, p. 107-116) Para seus propósitos, ou seja, mostrar que era possível reinterpretar termos presentes em equações da teoria clássica de modo coerente com os experimentos, Born obteve sucesso. Dentro do contexto de reinterpretação de termos, Born mostra que a teoria clássica³⁸ da dispersão (ou espalhamento) pode ser analisada via teoria das perturbações.

³⁷As séries de Fourier são uma ferramenta matemática útil para a descrição de propriedades empíricas e leis físicas dotadas de alguma *periodicidade*. Os termos referentes a *senos* e *co-senos* presentes nas séries são os responsáveis pela periodicidade destas, pois as funções trigonométricas são periódicas.

³⁸Tanto Heisenberg quanto Born conheciam a lei de Kramers da emissão/absorção de energia pela matéria, a qual mencionaremos adiante.

Vimos que Bohr havia postulado uma expressão para o cômputo da frequência referente à transição de um elétron entre dois níveis, cujas energias eram $W(n)$ e $W(n')$:

$$\nu(n, n') = \frac{1}{h} [W(n) - W(n')]$$

O termo clássico³⁹, cuja dimensão é de *freqüência*, aparece na expansão por série da função perturbadora como: $(\nu\tau) = \nu_0\tau_0 + \nu_1\tau_1 + \dots + \nu_n\tau_n$.

Born visa compreender a relação entre os termos clássicos e os quânticos. Em princípio, ele supõe (§3 de seu artigo) que a transição entre dois estados estacionários de energia, $n_k \rightarrow n_{k'} = n_k + \tau_k$, se dê de *modo linear*. Por *linear*, ele entende que J_k seja linear em μ , i.e., $J_k = h(n_k + \mu\tau_k)$, $0 \leq \mu \leq 1$. Temos que n_k e $n_k + \tau_k = n_{k'}$ são números quânticos e que estão associados, respectivamente, às órbitas inicial e final.

Tomando J_k como *linear em μ* , Born procedeu da seguinte maneira:

$$(\nu\tau) = \sum_k \nu_k \tau_k = \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \tau_k = \frac{1}{h} \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \frac{\partial J_k}{\partial \mu} = \frac{1}{h} \frac{dH_0}{d\mu}$$

Onde usamos $\nu_k = \frac{\partial H_0}{\partial J_k}$.

Também sabemos que é válida:

$$\nu(n + \tau, n) = \frac{1}{h} [H_0(n + \tau) - H_0(n)]$$

Finalmente, para as frequências clássica e quântica, Born sugerirá a seguinte relação:

³⁹Ver Goldstein (GOLDSTEIN, H. E POOLE, C. E SAFCKO, J. *op. cit.*, p. 527-532 e p. 460) para a dedução da expressão clássica para a frequência.

$$\nu(n + \tau, n) = \int_0^1 (\nu\tau) d\mu$$

Não utilizamos o termo *inferirá*, mas *sugerirá*, pelo fato de Born não ter ciência de algo (um teorema, por exemplo) que relacione as teorias clássica e quântica.

Quanto às expressões para o computo das frequências clássica e quântica, Born nos diz (ainda no §3, p. 190) que

A frequência real (quântica) (...) é a ‘média linear’ da frequência clássica correspondente. Alternativamente, pode-se dizer que os modos pelos quais $\nu(n + \tau, n)$ e $(\nu\tau)$ são obtidos de H_1 se dão como que em uma relação de coeficientes diferenciais para diferença de coeficientes.

O físico alemão é claro quanto à comparação entre as duas teorias. Em teoria clássica, $(\nu\tau)$ é dada por $\frac{1}{h} \frac{dH_0}{d\mu}$, um termo “diferencial”. Já em teoria quântica, $\nu(n + \tau, n)$ é uma “diferença entre quocientes”, i.e., $\frac{1}{h} [H_0(n + \tau) - H_0(n)]$. No primeiro caso, temos transições contínuas entre níveis de energia; no segundo, descontínuas – neste caso, o quociente é 1.

Em seguida, Born tenta generalizar sua *hipótese de reinterpretação*. A nosso ver, o que segue é mais uma conclusão que uma generalização. Partindo da hipótese de que o termo responsável pela interação entre os dois sistemas físicos é dado pela função perturbadora H_1 (mais precisamente, λH_1), o físico nos diz na página 190 (§3) que

A fim de encontrar a lei que rege a interação, procuramos pela lei correspondente aos harmônicos principais no modelo do movimento. Entretanto, buscamos uma descrição da energia perturbada na qual ela surja como a soma das contribuições dos harmônicos

principais. Mas isso é exatamente o que nossa fórmula básica⁴⁰ (16) faz. Além do mais, ela tem a mesma forma que a expressão para frequência ($\nu\tau$) e é caracterizada pelo operador $\sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial J_k} = \frac{1}{h} \frac{d}{d\mu}$.

Em teoria clássica, basta saber como os harmônicos principais (frequências fundamentais, *higher harmonics*) variam para que seja possível determinar a *lei* de interação entre os sistemas⁴¹. Esse é exatamente o sentido da citação acima. Born continua: “Somos, então, forçados a adotar a regra em que temos que substituir uma quantidade calculada classicamente, sempre que tiver a forma

$$\sum_{\tau} \tau_k \frac{\partial \Phi}{\partial J_k} = \frac{1}{h} \frac{d\Phi}{d\mu}$$

Pela média linear, ou diferença de quocientes

$$\int_0^1 \sum_{\tau} \tau_k \frac{\partial \Phi}{\partial J_k} d\mu = \frac{1}{h} [\Phi(n + \tau) - \Phi]$$

A última citação repete o que foi feito por Born, sendo que Φ denota uma função arbitrária cuja dimensão é de energia. Sabe⁴²-se que à função clássica H_0 corresponderá um operador diferencial. Até aquele momento, nenhum físico sabia como o termo Φ deveria ser interpretado. Mas podemos ver em Born um *prelúdio* ao trabalho de Heisenberg, e neste último, veremos a indicação nítida de um caminho rumo à *quantização canônica*.

Em suma, vimos uma exemplificação clara do princípio de Bohr em um artigo de Born. Uma lição importante que deve ser tirada do

⁴⁰Por fórmula (16), Born refere-se a um caso particular da expressão para o computo da frequência quântica, a qual é obtida pela aplicação do método perturbativo clássico ao problema da emissão de energia.

⁴¹Isso via teoria das perturbações, cuja finalidade é a obtenção de algum tipo de descrição aproximada do fenômeno.

⁴²Born não sabia a que *objetos matemáticos* deveriam corresponder os termos reinterpretados.

trabalho de Born é que a mecânica clássica deve, sim, admitir algum tipo de relação com a quântica. O princípio de Bohr, mesmo que *impreciso* quanto à relação entre as teorias, mostrou-se relevante para os fundadores da mecânica quântica, visto que eles precisavam se guiar por algo. Além disso, a *nova teoria* deveria reproduzir a *antiga* de acordo com algum tipo de *limite*. O teorema de Ehrenfest (ver apêndice 1.3) ilustrará a relação entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. Sigamos, então, com o trabalho de Werner Heisenberg.

1.14 Rumo à cinemática quântica de Heisenberg

Heisenberg adotará a expressão do oscilador harmônico clássico em uma dimensão como ponto de partida para sua reinterpretação matemática dos *termos clássicos*. Tal expressão é:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \text{ (ohc)}$$

Na equação acima, $f(x)$ denota (de acordo com teoria clássica) uma função da posição $x(t)$ de uma partícula. Heisenberg se propôs a tarefa de reinterpretar o termo x , de modo que a expressão acima se aplicasse à descrição correta dos fenômenos atômicos. Dissemos que x não deveria referir-se diretamente à posição da partícula no sentido clássico, visto que a posição da partícula não era um *observável*.

O modelo do oscilador harmônico era bastante conhecido por Heisenberg, pois era o *modelo canônico* utilizado pelos físicos ao desenvolverem a teoria clássica da dispersão. (VAN DER WAERDEN, B.L. *op. cit.*, p. 9) A expressão $\ddot{x} + f(x) = 0$ surge de modo natural em mecânica clássica para o seguinte problema (em uma única dimensão). A

aplicação da segunda lei de Newton ao movimento de uma partícula de massa m presa a uma mola de constante elástica k nos leva a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = kx \text{ ou, } m\ddot{x} = kx$$

Visto que o termo x era utilizado para descrever a posição de uma partícula em movimento oscilatório (periódico), o uso da expressão acima parecia *óbvio*. Assim, o átomo de hidrogênio era entendido⁴³ como um sistema do tipo *massa-mola*.

Aplicada ao problema da emissão de energia, sabemos que a expressão ohc – no contexto clássico – admite a seguinte solução⁴⁴:

$$x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$$

Para $-\infty < \alpha < \infty$, $\alpha, n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ (ver VAN DER WAERDEN, B.L. *op. cit.*, p. 29).

Os coeficientes $a(n)_{\alpha}$ denotam as amplitudes da oscilação. Pensemos em um átomo cujo único elétron esteja em um nível de energia denotada por E_n , sendo n o número natural (quântico) associado àquele nível. Lembremo-nos da regra de quantização do momento angular devida a Bohr. Ela nos diz que a ação J é dada por⁴⁵: $J = nh$. Enfatizemos que ω_n é a frequência clássica, e que dependia do número (quântico) n na descrição de Bohr. Temos também que $a(n)_{\alpha} =$

⁴³Veremos no capítulo 2º que a descrição de um sistema físico por um modelo matemático requer dois atos mentais, i.e, um *ato de abstração* e outro *de idealização*. No caso do movimento do elétron, a abstração se caracteriza pelo isolamento das propriedades relevantes à descrição do movimento, e.g., a periodicidade do movimento. Ela pode ser analisada matematicamente por meio do modelo do oscilador. O elétron é visto como um *ponto material* que oscila ao redor de outro ponto material, o núcleo. Quanto à idealização, são desprezadas as dimensões físicas das partículas, i.e., desprezam-se as diferenças entre o modelo matemático e o modelo físico. No caso do movimento do elétron, Heisenberg solucionou o problema para o caso não-relativístico. Quanto à absorção de energia pela matéria, foi Feynman quem propôs a primeira solução efetiva.

⁴⁴Dadas as condições de contorno específicas, as quais surgem das hipóteses físicas, como a da quantização do momento angular.

⁴⁵Os demais termos já foram definidos ao examinarmos o trabalho de Born.

$a^*(n)_\alpha$ (i.e., $a(n)_\alpha$ é um número real para cada α e n). Isto se deve à condição $a^*(n)_\alpha = a(n)_{-\alpha}$, conhecida por *condição de realidade*, pois as amplitudes das oscilações não podem ser números complexos. Tal condição é claramente uma hipótese física, pois sabemos que toda medida efetuada em laboratório deve necessariamente ser descrita por um número real (no caso, racional).

Tanto no contexto da mecânica clássica, quanto naquele da teoria de Bohr, a solução x é interpretada como posição da partícula, uma função do tempo. O que se tem é que a equação do movimento $\ddot{x} + f(x) = 0$ pode ser resolvida, no sentido da antiga teoria quântica, com a condição *extra* de que $J = nh$. Esta condição é conhecida por *condição quântica*. (JAMMER, M. *The conceptual development of quantum mechanics*, p. 202) Mas a solução dada pela teoria quântica de Bohr só se aplicava ao caso do átomo de hidrogênio. Retomemos, então, a solução para a equação do oscilador.

$$x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$$

Em mecânica clássica, $\omega_n\alpha$ se refere à frequência de oscilação (da partícula) e está associada ao estado de energia do sistema físico. Na teoria de Bohr, a única diferença se devia ao fato de a frequência ser quantizada. Mas, o modo de se adicionar frequências, isso de acordo com a teoria de Bohr, era incompatível com a lei de Ritz-Rydberg, a qual concordava com os valores (empiricamente) medidos para a adição das frequências quânticas. Na antiga teoria quântica, sendo α e β dois números naturais (relacionados a duas frequências fundamentais associadas ao nível n), a fórmula para adição de frequências era dada por (ver DUGAS, R. *A history of mechanics*, p. 572):

$$\omega(n, \alpha) + \omega(n, \beta) = \omega(n, \alpha + \beta)$$

para

$$\omega(n, \alpha) = \omega_n \alpha$$

$$\omega(n, \beta) = \omega_n \beta$$

$$\omega(n, \alpha + \beta) = \omega_n(\alpha + \beta)$$

Mas a lei de Ritz-Rydberg nos dizia que, para $\omega(n, m) = \frac{2\pi}{h}(H(n) - H(m))$ (DUGAS, *op. cit.*, p. 572), deveríamos ter:

$$\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

ou

$$\omega(n - \beta, n - \alpha - \beta) + \omega(n, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

Notemos que, na expressão acima, os índices dentro dos parênteses se relacionam a frequências de transição entre estados. É fácil mostrar que, se interpretados classicamente, os termos referentes às frequências em ohc não⁴⁶ satisfazem à lei de Ritz-Rydberg (RR) quanto à adição. Mas a lei RR já era bem estabelecida, e no que se referia aos termos $\omega(n, n - \alpha)$, Heisenberg sabia como manipulá-los algebricamente. Restava entender como os *novos termos* referentes às amplitudes clássicas $a(n)_\alpha$ deveriam ser compreendidos e manipulados algebricamente. Vimos que, para as frequências, precisávamos de uma *lei aditiva*⁴⁷, pois os termos surgiam nos expoentes da solução para o oscilador, i.e., $e^{ti\omega_n\alpha}$. Quanto às amplitudes⁴⁸, a regra deve ser *multiplicativa*. Para ver isso, procederemos da mesma maneira que Heisenberg para *descobrir* como as amplitudes deveriam ser

⁴⁶Para isso, basta, tomar “o quadrado de x ” na expressão solução para ohc. Veremos que foi esse o caminho seguido por Heisenberg para elaborar sua regra de multiplicação de *variáveis quânticas*.

⁴⁷Vimos que tal lei foi obtida empiricamente *a priori*.

⁴⁸Evitaremos dizer “termos referentes às amplitudes”. Claro que *amplitude* é uma grandeza física, enquanto o termo referente à amplitude é um símbolo matemático.

multiplicadas, i.e., tomaremos o quadrado da solução do oscilador. Vejamos, então, como Heisenberg procedeu em seu trabalho.

Seja a solução para ohc:

$$x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n \alpha}$$

Dentro do contexto clássico, ao tomarmos “quadrado de x ”, obteremos:

$$x^2 = \sum_{\beta} b(n)_{\beta} e^{ti\omega_n \beta t}$$

$$\text{para } b(n)_{\beta} e^{ti\omega_n \beta t} = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} a(n)_{\beta-\alpha} e^{ti\omega_n[(\alpha+\beta)-\alpha]t}$$

Mas como fazer que, no expoente, a adição de frequências satisfaça à lei RR⁴⁹?

Heisenberg propôs a seguinte substituição:

$$a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n \alpha} \rightarrow a(n, n - \alpha) e^{ti\omega(n, n - \alpha)t}$$

E, procedendo do mesmo modo quanto aos $b(n)_{\beta} e^{ti\omega_n \beta t}$, sugeriu que:

$$b(n, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} = \sum_{\alpha} a(n, n - \alpha) a(n - \alpha, n - \beta) e^{ti\omega(n, n - \beta)t}$$

Recordemos que $-\infty < \alpha < \infty$.

Se for correto o procedimento de substituição que Heisenberg propôs, os coeficientes $c(n, n - \beta)$ de x^n ($n = 3$, para a expressão

⁴⁹ $\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$, ou
 $\omega(n - \beta, n - \alpha - \beta) + \omega(n, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$.

abaixo) deveriam satisfazer a uma regra não-comutativa para seu produto⁵⁰, i.e, (DUGAS, *op. cit.*, p. 573):

$$c(n, n - \beta) = \sum_{\alpha} a(n, n - \alpha)b(n - \alpha, n - \beta)$$

Classicamente, o cômputo de produtos de coeficientes satisfazia a uma álgebra comutativa, o que não parecia ser sugerido pela expressão acima. Heisenberg notou que, para uma função $f(x(t))$ que pudesse ser expandida via série de Fourier, sendo seus coeficientes denotados pelos $a(n, n - \alpha)$, e uma $g(x(t))$ expressa por uma série cujos coeficientes fossem $b(n - \alpha, n - \beta)$, seria possível que $fg - gf \neq 0(x(t))$ - sendo esta última a *função nula*. Born e Jordan mostraram que a *álgebra* de Heisenberg satisfazia às mesmas propriedades que a álgebra de matrizes. (VAN DER WAERDEN, B.L, *op. cit.*, p. 38)

Descoberto como manipular algebricamente as amplitudes e frequências, restava calculá-las e mostrar que as previsões teóricas correspondiam às empíricas. Vimos que, na antiga teoria quântica, precisava-se da condição *extra* de quantização da ação, além da *condição de realidade* (isso para se obter uma solução para a expressão do oscilador). Na teoria de Heisenberg, as condições de quantização e realidade serão mantidas. Vejamos o modo pelo qual Heisenberg resolveu o problema modelado pela expressão do oscilador. Mais uma vez, foi através de uma reinterpretação de termos que Heisenberg procedeu.

Vejamos primeiramente a parte relacionada à antiga teoria quântica. Sejam, respectivamente, x e $p = m\dot{x}$ as expressões para a posição e momento linear referentes ao modelo do oscilador harmônico clássico:

⁵⁰A regra para obtenção dos $c(n, n - \beta)$ é dita multiplicação de Heisenberg.

$$x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$$

$$m\dot{x} = m \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} i \omega_n \alpha e^{ti\omega_n\alpha}$$

Heisenberg integrou a última expressão para um período e obteve:

$$\oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} a(n)_{-\alpha} i \omega_n \alpha^2$$

Desde que é sempre válida a condição de realidade: $a(n)_{-\alpha} = a^*(n)_{\alpha}$, seguirá que

$$\oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{\alpha} \|a(n)_{\alpha}\|^2 \omega_n \alpha^2$$

Da quantização da ação, podemos escrever:

$$\frac{d}{dn}(nh) = \frac{d}{dn} \oint m\dot{x}dx$$

Utilizando a expressão

$$\oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{\alpha} \|a(n)_{\alpha}\|^2 \omega_n \alpha^2,$$

concluiremos que

$$h = 2\pi m \sum_{\alpha} \alpha \frac{d}{dn} (\alpha \omega_n \|a(n)_{\alpha}\|^2)$$

Mostramos que Max Born havia sugerido uma reinterpretação de *coeficientes diferenciais* como *diferenças entre quocientes*. Foi o caminho sugerido por Born que Heisenberg trilhou. Para a tarefa que se propôs, Heisenberg obteve primeiramente uma expressão para h que estivesse de acordo com a lei RR⁵¹ e com sua proposta de reinterpretação dos

⁵¹Relacionada à lei RR, estava a Lei de kramers, a qual era dada por:

$$P = E \frac{e^2}{4\pi^2 m} (\sum_i \frac{f_i}{v_i^2 - v} - \sum_j \frac{f_j}{v_j^2 - v}),$$

coeficientes. O análogo quântico que Heisenberg propõe para h partiria do uso da expressão clássica para h e da sugestão de Born. Notemos que, na expressão $h = 2\pi m \sum_{\alpha} \alpha \frac{d}{dn} (\alpha \omega_n \|a(n)_{\alpha}\|^2)$, aparecem os *termos diferenciais* a que Born se referiu. O *análogo quântico*⁵² da expressão para h obtido por Heisenberg foi

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha} (\|a(n, n + \alpha)\|^2 \omega(n, n + \alpha) - \|a(n, n - \alpha)\|^2 \omega(n, n - \alpha))$$

Na expressão acima, temos uma *diferença entre termos* (com quociente igual à unidade) para o caso quântico. Heisenberg sabia que a expressão dada pela antiga teoria quântica para h era uma maneira de se reescrever a hipótese de quantização da ação⁵³. Ora, desde que a hipótese de quantização do momento angular da antiga teoria quântica era válida para o caso do átomo de hidrogênio, a teoria de Heisenberg deveria reproduzir a antiga teoria de alguma maneira. Finalmente, todo o trabalho de Heisenberg teria sido em vão se sua reinterpretação das amplitudes e frequências fosse incompatível com os dados experimentais. O último passo dado por ele foi mostrar como os $a(n, n + \alpha)$ e $\omega(n, n + \alpha)$ poderiam ser calculados. Restava comparar as previsões teóricas com os dados existentes. Sabemos que a teoria de

sendo P , módulo do vetor de polarização devido a um campo elétrico, E , módulo do vetor campo elétrico, v_i , frequências de absorção (para j , emissão) e f_i , amplitudes relacionadas às frequências de absorção (idem para j). Pensemos que a energia é emitida/absorvida pela matéria via radiação (no contexto da discussão que fizemos do artigo de Born). A força externa \vec{F} a que Born se referiu pode ser pensada como devida à presença de um campo elétrico \vec{E} , cujo módulo é E , sendo a força dada por $\vec{F} = q\vec{E}$ (para uma carga elétrica pontual q , ou uma distribuição homogênea de cargas). A relação de Kramers pode ser entendida do seguinte modo: a razão $\frac{P}{E}$ nos permite calcular a energia absorvida pela matéria em uma dada direção determinada pelo vetor $\vec{P} = \epsilon\vec{E}$. Para a expressão de Kramers, no contexto do trabalho de Heisenberg, ver (HEISENBERG, W. "Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations" Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 14 e 268).

⁵²Mais uma vez, vemos que a proposta de Heisenberg ilustra a utilização da matemática para expressar leis físicas e dados empíricos, i.e, quantização da ação definida pela expressão de h , e a lei de Ritz-Rydberg, respectivamente.

⁵³Dugas refere-se à analogia entre as expressões para h por *analogia quântica*. (DUGAS, R. *A history of mechanics*, p. 574)

Heisenberg foi capaz de descrever com grande precisão os dados da experiência empírica para o caso do movimento (não-relativístico) do elétron. No apêndice 1.1, mostraremos como foi possível o cômputo das frequências e amplitudes por Heisenberg. Agora, faremos uma breve análise do trabalho de Heisenberg e da relação entre as hipóteses⁵⁴ físicas nele utilizadas e os termos matemáticos empregados para expressar tais hipóteses.

Heisenberg assumiu que, no nível atômico, as leis clássicas da física não eram válidas. Visto que os físicos não têm acesso *direto*⁵⁵ aos níveis atômico e subatômico, ele assumiu que somente grandezas empiricamente observáveis deveriam entrar na formulação de sua teoria. Sabemos que, na expressão clássica do oscilador harmônico $\ddot{x} + f(x) = 0$, o termo $x(t)$ se refere à posição de uma partícula em determinado instante de tempo. Também é sabido que a posição de um elétron não é uma grandeza medida (diretamente) pelos físicos. Heisenberg percebeu que seria necessária alguma reinterpretação da equação do oscilador para que ela pudesse ser aplicada à descrição e previsão dos fenômenos quânticos. A teoria de Heisenberg também deveria reproduzir os resultados obtidos pela teoria de Bohr para o caso do átomo de hidrogênio. Niels Bohr havia formulado um princípio heurístico cuja finalidade era guiar o físico no desenvolvimento da antiga teoria quântica. Por meio do trabalho de Born, mostramos o *bom funcionamento* do princípio da correspondência de Bohr. Retomemos as principais hipóteses físicas concernentes ao modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio.

⁵⁴Apenas nos deteremos nas hipóteses mais fundamentais, visto que já analisamos com detalhes a criação da teoria quântica por Heisenberg.

⁵⁵Pelos cinco sentidos básicos da nossa percepção empírica.

Hipótese física 1: o sistema atômico⁵⁶ é composto por um núcleo central e um elétron que orbita (periodicamente) o núcleo.

A hipótese 1 nos permite utilizar o modelo do oscilador harmônico para descrever o movimento orbital do elétron. Lembremo-nos de que, à época da criação da mecânica quântica, a expressão do oscilador era uma maneira *standard* de descrever movimentos oscilatórios. No caso do oscilador em uma dimensão, o elétron é entendido como uma pequena massa presa ao núcleo por uma mola. A solução geral para a equação do oscilador, vimos que era $x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$. Para o cálculo dos $a(n)_{\alpha}$ e dos $\omega_n\alpha$, fez-se necessária a introdução de algumas hipóteses físicas auxiliares. Vejamos tais hipóteses.

Hipóteses físicas auxiliares

- (i) Hipótese de quantização: o momento angular do elétron é quantizado. Escreve-se para a ação $J, J = nh$.
- (ii) Hipótese (condição) de realidade: os valores referentes às amplitudes são números reais. Escreve-se: $a^*(n)_{\alpha} = a(n)_{-\alpha}$, ou $a(n)_{\alpha} = a^*(n)_{\alpha}$.
- (iii) Hipótese de transição⁵⁷: a frequência referente à transição de um elétron entre dois níveis cujas energias são $W(n)$ e $W(n')$ é dada por: $\nu(n, n') = \frac{1}{h} [W(n) - W(n')]$.

A partir⁵⁸ da hipótese física 1 e das hipóteses auxiliares, Bohr foi capaz de obter os níveis de energia corretos para o caso do espectro do

⁵⁶Sem perda de generalidade, analisaremos o caso em uma única dimensão.

⁵⁷Foi Planck quem primeiramente postulou que a energia deveria satisfazer a $W = nh$, embora estejamos nos referindo à formulação de Bohr.

átomo de hidrogênio. Já Heisenberg, conhecedor das limitações do modelo de Bohr, propôs-se a tarefa de criar uma nova teoria quântica que se aplicasse não somente ao átomo de hidrogênio. Vimos que os passos percorridos por Heisenberg foram guiados pelo princípio de Bohr e pela lei de Ritz-Rydberg. Vimos também que a expressão $x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n \alpha}$ foi preservada de modo a ser reinterpretada. Visando reinterpretar essa expressão, Heisenberg recorreu também a leis obtidas empiricamente, como aquela que regia a adição de frequências e que sabemos ser a lei de Ritz-Rydberg (RR). Lembremo-nos, mais uma vez, de que tal lei se escreve da seguinte maneira:

$$\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

ou

$$\omega(n - \beta, n - \alpha) + \omega(n, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

Guiado por RR, Heisenberg propôs que os coeficientes presentes em $x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n \alpha}$ fossem reescritos da seguinte maneira:

$$a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n \alpha} \rightarrow a(n, n - \alpha) e^{ti\omega(n, n - \alpha)}$$

Dissemos que a substituição acima implicaria⁵⁹ uma álgebra não-comutativa quanto à multiplicação das amplitudes. Quanto à utilidade da matemática na formulação da teoria de Heisenberg, vejamos algumas conclusões que podemos elaborar.

- 1- A matemática foi utilizada para descrever leis e hipóteses físicas.

Afirmamos que o modelo do oscilador harmônico era amplamente utilizado pelos físicos do começo do século XX para o estudo da absorção

⁵⁸Claro que havia outras hipóteses envolvidas na formulação do modelo de Bohr.

⁵⁹Claro que pode haver exemplos específicos em que coeficientes satisfaçam a uma álgebra multiplicativa comutativa.

de radiação pela matéria. Quanto às hipóteses⁶⁰ físicas de *movimento periódico, quantização do momento angular e realidade*, vimos como todas elas foram descritas matematicamente.

2- A matemática foi utilizada para descrição de aspectos da experiência empírica.

Dentre os aspectos da experiência, a lei RR ilustra o uso da matemática em sua formulação. Mas não dissemos quais aspectos da experiência empírica a matemática descreve. Nossa posição filosófica é que a matemática reflete apenas propriedades *estruturais*⁶¹ da experiência. Ora, a invenção da mecânica quântica no sentido de Heisenberg partiu de dados experimentais e hipóteses físicas. A matemática foi utilizada para expressar propriedades estruturais da experiência empírica e leis físicas. Na terceira seção, ao analisarmos a relação entre os termos matemáticos, as hipóteses físicas e os dados da experiência, nós introduziremos nosso ponto de vista filosófico com algum detalhe. Mas somente no terceiro capítulo, após termos analisado teorias específicas da aplicabilidade da matemática, é que defenderemos nosso ponto de vista com mais especificidade. Na próxima seção, analisaremos a criação do processo de quantização de Dirac.

⁶⁰Mencionaremos apenas algumas, mas é claro que nos referimos a todas as hipóteses físicas, e não somente àquelas que mencionamos na conclusão.

⁶¹Para nós, a matemática não é a ciência de um tipo particular de objetos, mas o estudo de propriedades estruturais de domínios formais de objetos. As propriedades estruturais serão aquelas descritas em uma linguagem formal. Veremos na seção 3ª que da Silva defende um tipo interessante de filosofia estruturalista da matemática cuja formulação se encontra em seu artigo “Structuralism and the applicability of mathematics”, o qual será fundamental para nossa argumentação filosófica.

Segunda seção

1.2 A mecânica quântica no sentido de Dirac⁶²

Nesta seção analisaremos o artigo “The fundamental equations of quantum mechanics”, no qual se encontra a formulação de Dirac da mecânica quântica⁶³.

A respeito da origem de seu trabalho, Dirac nos diz que

Em julho de 1925 Heisenberg veio a Cambridge e deu palestras no clube Kapitza, mas eu não estive presente nas palestras e não sabia de nada a respeito. A primeira vez que ouvi falar das novas idéias de Heisenberg foi no começo de Setembro, quando R. H. Fowler me cedeu os rascunhos do artigo de Heisenberg⁶⁴. Em princípio, não pude entender muita coisa, mas após cerca de duas semanas, eu percebi que ele continha a chave para o problema da mecânica quântica. Então, eu segui com o trabalho sozinho. (VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 41)

Nesta citação, transcrita de um diálogo entre Dirac e van der Waerden, o físico britânico nos diz que foi influenciado diretamente pelo trabalho de Heisenberg.

⁶²A partir dos trabalhos de Heisenberg e Dirac, seremos capazes de analisar alguns dos principais argumentos de Steiner a respeito da aplicabilidade da matemática. Mostraremos que Steiner faz uma falsificação grosseira da história do desenvolvimento da teoria quântica de Heisenberg e Dirac. Na parte final da tese, proporemos uma explicação mais razoável (que aquela proposta por Steiner) para a aplicabilidade da matemática.

⁶³(DIRAC, P.A.M. “The fundamental equations of quantum mechanics” Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 307-320)

⁶⁴Dirac refere-se ao trabalho “Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations”. Ver (VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 261).

1.21 Introdução às *equações fundamentais da mecânica quântica*⁶⁵

Logo na introdução de seu artigo⁶⁶ (§1, p. 307), Dirac nos diz que “em um artigo⁶⁷ recente, Heisenberg desenvolveu uma nova teoria que sugere não serem as equações da mecânica clássica erradas, mas as operações matemáticas pelas quais os resultados são deduzidos é que necessitam de modificação”. Vimos que Heisenberg manteve a equação clássica do oscilador harmônico, visando reinterpretar as amplitudes de oscilação presentes na solução de $\ddot{x} - f(x) = 0$. Quanto às amplitudes, o modo de multiplicá-las foi modificado, como mostramos. Sigamos com o artigo de Dirac

No §2 (p. 308-311), Dirac elaborou um brevíssimo resumo das idéias de Heisenberg. Omitiremos tal sumário, dada a análise que fizemos do trabalho de Heisenberg na seção anterior.

Em §3(p. 311), Dirac introduz a *diferenciação quântica* (quantum differentiation). Ele utiliza o termo *variáveis quânticas* para denotar as *funções* com que a teoria quântica lida, mas sem ser claro quanto a que *variáveis* se refere. É sabido⁶⁸ que tais *variáveis quânticas* são operadores autoadjuntos (em geral, não-limitados), cujos domínios são espaços de funções denominados *Espaços de Hilbert*⁶⁹.

⁶⁵Veremos que o termo em itálico se refere ao título do artigo em que Dirac cria o processo de quantização canônica.

⁶⁶Nós nos referiremos ao artigo de Dirac somente pelo parágrafo e pela página.

⁶⁷Mais uma vez Dirac se refere ao artigo seminal de Heisenberg, “Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations”, que analisamos na primeira seção.

⁶⁸Foi o matemático húngaro Jon Von Neumann quem mostrou com rigor matemático a relação entre os operadores lineares e os observáveis, elaborando de modo rigoroso uma teoria matemática da mecânica quântica. (VON NEUMANN, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics*)

⁶⁹Na realidade, os domínios matemáticos em questão são espaços de funções generalizadas, ditos Espaços de Schwartz, ou das distribuições temperadas. Esse fato é

Dirac visava definir um tipo de diferenciação com relação a *variáveis quânticas arbitrárias*⁷⁰. No trabalho de Heisenberg, todas as diferenciações se davam com respeito ao parâmetro *tempo*. Já Dirac nos diz (§3, p. 311): “Nós determinaremos agora a operação quântica $\frac{\partial}{\partial v}$ mais geral que satisfaz às leis

$$\frac{d}{dv}(x + y) = \frac{d}{dv}x + \frac{d}{dv}y$$

e

$$\frac{d}{dv}(xy) = \frac{d}{dv}x \cdot y + x \frac{d}{dv}y "$$

Por v , Dirac entende uma variável arbitrária pertencente ao domínio das variáveis quânticas. O propósito de Dirac é claro, i.e., determinar qual a *forma* mais geral da *operação quântica de derivação* $\frac{\partial}{\partial v}$ e a que variáveis⁷¹ tal operação se aplica. Veremos que a operação a que Dirac se refere implicará a *equação de Heisenberg*. Dirac não nos diz o

interessante, pois Steiner acreditava que a teoria quântica poderia ter sido elaborada via análise puramente formal de estruturas matemáticas, e.g., espaços de Hilbert.

⁷⁰De modo bastante simplificado, o trabalho de Heisenberg sugeria o uso de funções polinomiais das novas variáveis, denominadas operadores momento (ou de momento) e posição (ou de posição). A solução para a equação do oscilador será dita operador de posição, uma das variáveis de que dependerão as variáveis quânticas a que Dirac se refere. A outra variável será o operador de momento. Um operador linear A é uma transformação linear $A: V \rightarrow V$. De maneira sucinta, para espaços vetoriais arbitrários, um operador linear (limitado, *a priori*) é definido por uma regra funcional $A: V \rightarrow V$ e um conjunto $dom A \subset V$, que é o domínio do operador A , e que deve ser subespaço vetorial de V . Sempre nos referiremos aos operadores somente pelas regras funcionais que os definem. Se A é um operador linear em um espaço vetorial V (e.g., sobre o corpo dos números complexos) munido do produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$, dizemos que A^\dagger é o operador adjunto de A se for válida a identidade:

$$\langle Af | g \rangle = \langle f | A^\dagger g \rangle$$

Dizemos que A é autoadjunto se ele coincidir com seu operador adjunto A^\dagger , i.e., $dom A = dom A^\dagger$, e $Af = A^\dagger f$ para todo f no domínio dos operadores.

⁷¹De modo preciso, que variáveis podem ser diferenciadas e com relação a que parâmetros? Sabemos que as variáveis quânticas não-relativísticas são funções polinomiais dos operadores de momento e de posição.

porquê de acreditar que basta satisfazer as duas regras acima para que a operação mais geral a que se refere possa ser obtida. Nota-se que ele parece requerer uma *quantidade mínima* de princípios que rejam as variáveis novas, além de manter uma estrutura matemática (cálculo diferencial) já conhecida por ele.

A primeira regra de diferenciação que Dirac postula para as variáveis quânticas exige que (§3, p. 311): “as amplitudes das componentes⁷² de $\frac{dx}{dv}$ devem ser funções lineares⁷³ de $x...$ ” Tal regra simplesmente nos diz que a derivação deve ser *linear* com relação às variáveis no domínio do operador de diferenciação.

A segunda regra de diferenciação que Dirac enuncia é conhecida por *regra de Leibniz*. Esta regra, quando utilizada no contexto do trabalho do Dirac, é de grande relevância para obtenção da equação de Heisenberg, como veremos em seguida.

1.22 A equação de Heisenberg

Analisemos, então, como Dirac determinou a *operação geral* a que se referia, e, sem perda de generalidade, a partir de um caso particular.

Seja a equação para um oscilador harmônico: $\ddot{q}(t) - mf(q) = 0$. Sabemos que

$$H = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2, \text{ para } f(q) = -m\omega_0^2 q$$

Escrevamos: $p = m\dot{q}$

⁷²Dirac se referirá inicialmente a $x + y$ por x .

⁷³Dirac escreverá: $\frac{dx}{dv}(nm) = \sum_{nm} a(nm, n'm') x(n', m')$. Ele denota os termos relacionados às amplitudes por $a(nm; n'm')$, para um conjunto de quatro índices, todos números naturais. Não lemos mn como o produto dos índices, mas como sua justaposição. Os índices $n'm'$ referem-se às derivadas. Seguiremos a notação de Born, que é mais simples e bem difundida na comunidade científica. Born escreverá $x(nm)$ (ou $x(n, m)$) para as amplitudes. (VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 41)

Prova-se (PIZA, A.F.R. de T. *Mecânica quântica*, p. 18-19) a seguinte identidade (id):

$$p(n, n - k) = im\omega(n, n - k)q(n, n - k)$$

Usemos a seguinte notação:

$$q = \{q_{nm}e^{i\omega_{nm}t}\}, p = \{p_{nm}e^{i\omega_{nm}t}\}$$

Também é importante lembrarmos de que a condição de quantização do momento angular pode ser escrita por

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha} (\|a(n, n + \alpha)\|^2 \omega(n, n + \alpha) - \|a(n, n - \alpha)\|^2 \omega(n, n - \alpha))$$

$$\text{para } a(n, m) = q_{nm} \text{ e } \omega_{nm} = \omega(n, m)$$

Utilizando a identidade id e a condição de quantização acima, prova-se também a identidade⁷⁴:

$$\sum_k p_{nk}q_{kn} - q_{nk}p_{kn} = \frac{h}{2\pi i} (*)$$

Escrevamos, em notação matricial, para uma variável quântica arbitrária⁷⁵ g :

$$g = g(p, q) = \{g_{nm}e^{i\omega_{nm}t}\}$$

E, pela segunda regra de diferenciação quântica (aplicada a g), é possível demonstrar (PIZA, A.F.R. de T. *Mecânica quântica*, p. 25) que

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{dg}{dt} = Hg - gH$$

⁷⁴Neste momento, basta saber da existência de (*). Nós nos referiremos a ela novamente em breve.

⁷⁵Funções polinomiais das variáveis *de posição e momento quânticos* eram as *candidatas naturais* a variáveis quânticas, conforme mencionamos acima em outra nota de rodapé.

A expressão acima recebe o nome de *equação de Heisenberg*. Tal equação aparece nos trabalhos de Born (com Jordan) e de Dirac de modo independente – ver, respectivamente, (VAN DER WAERDEN, B.L (*op. cit.*), p. 288 e 312). Deveremos ter, então, que a variação temporal de qualquer⁷⁶ variável quântica do tipo $g(p, q)$ poderá ser calculada pela equação de Heisenberg. E, finalmente, a operação geral que Dirac procurava será dada por:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{i}{\hbar} (Hg - gH) = \frac{i}{\hbar} [H, g]$$

$$[H, g] = (Hg - gH)$$

Vejamos, agora, o processo de comparação entre a mecânica clássica e a mecânica quântica que culminaria na quantização canônica.

1.23 Analogia quântica

Dirac visava descobrir “a que a expressão⁷⁷ $(xy - yx)$ corresponderia na teoria clássica” (§4, p. 313). Ele buscou interpretar a expressão $[x, y]$ visando aplicá-la à descrição correta dos processos quânticos. Quanto à estratégia seguida por Dirac para conhecer o significado físico dos comutadores, nós a chamaremos de *analogia quântica*. Diremos *analogia*, pois a elaboração do processo de quantização canônica partiu da comparação entre os colchetes⁷⁸ de Poisson e os comutadores. Sigamos, então, com o trabalho referente à quantização canônica de Paul Adrien Maurice Dirac.

⁷⁶Em mecânica quântica não-relativística.

⁷⁷Vimos que $[x, y] = xy - yx$. Esta expressão é dita comutador quântico, ou simplesmente, comutador.

⁷⁸ $\{u, v\} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right)$ Colchetes de Poisson para as variáveis clássicas $u(q_j, p_j)$ e $v(q_j, p_j)$.

Quanto à notação, os termos $x(n, n - \alpha)$ se referirão à amplitude de transição de um estado estacionário de energia E_n para outro de energia $E_{n-\alpha}$. Isto para os termos $x(n, n - \alpha)$ referentes à variável quântica x . Para a variável quântica y , escreveremos $y(n, n - \alpha - \beta)$, evidentemente. Dirac assumirá também que n , α e β são números naturais que deverão satisfazer à seguinte propriedade: $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \ll |n|$. Dirac requererá que os termos $x(n, n - \alpha)$ e $y(n, n - \alpha)$ sejam funções diferenciáveis com relação à variável contínua $J = n\hbar$. Assim, ele poderá escrever as duas relações abaixo, que denotaremos por ρ :

$$x(n, n - \alpha) - x(n - \beta, n - \alpha - \beta) \approx \hbar\beta \frac{dx(n, n - \alpha)}{dJ}$$

$$y(n, n - \beta) - y(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \approx \hbar\alpha \frac{dy(n, n - \beta)}{dJ}$$

Heisenberg sabia que $xy \neq yx$, mas não conhecia o significado físico da diferença $xy - yx$. Notemos que estamos restringindo nossa análise aos termos $x(n, n - \alpha)$, $y(n, n - \beta)$, coeficientes referentes às séries de Fourier para x e y , respectivamente. A solução para $xy - yx$ é uma série infinita, por isso Dirac se deteve somente naquilo que era relevante para a sua análise. Não é difícil mostrar⁷⁹ que, ao tomarmos o produto de Heisenberg para x e y (i.e., $xy - yx$), haverá um termo⁸⁰ correspondente à diferença entre os seguintes termos abaixo:

$$\delta xy = (x_{n, n-\alpha} - x_{n-\beta, n-\alpha-\beta})(y_{n-\alpha, n-\beta-\alpha})e^{i(\alpha+\beta)\theta t}$$

$$\delta yx = (y_{n, n-\beta} - y_{n-\alpha, n-\beta-\alpha})(x_{n-\beta, n-\beta-\alpha})e^{i(\alpha+\beta)\theta t}$$

Estamos adotando uma notação mais conveniente, a mesma que foi utilizada por Dirac, *a posteriori*, i.e.,

⁷⁹Ver (MCCUBBIN, N.A. *Beauty in physics: the legacy of Paul Dirac*, §2).

⁸⁰O termo ao qual nos referimos é $\Delta = \delta xy - \delta yx$.

$$x(n, n - \alpha) = x_{n, n - \alpha}$$

A expressão do produto pode ser simplificada pelo uso das relações ρ para os dois termos (respectivamente). Nossa nova relação ϱ será:

$$\delta xy = \hbar \frac{dx_{n, n - \alpha}}{dJ} e^{i\alpha\theta t} y_{n - \alpha, n - \beta - \alpha} \beta e^{i\beta\theta t}$$

$$\delta yx = \hbar \frac{dy_{n, n - \beta}}{dJ} e^{i\beta\theta t} x_{n - \beta, n - \alpha - \beta} \alpha e^{i\alpha\theta t}$$

Se tomarmos $\omega = \theta t$, poderemos escrever:

$$\alpha e^{i\alpha\theta t} = -i \frac{d}{d\omega} e^{i\alpha\theta t}$$

$$\beta e^{i\beta\theta t} = -i \frac{d}{d\omega} e^{i\beta\theta t}$$

Da relação ϱ e pela última expressão acima, obtemos uma nova relação σ :

$$\delta xy = -i\hbar \frac{dx_{n, n - \alpha}}{dJ} e^{i\alpha\theta t} y_{n - \alpha, n - \beta - \alpha} \frac{d}{d\omega} e^{i\beta\theta t}$$

$$\delta yx = -i\hbar \frac{dy_{n, n - \beta}}{dJ} e^{i\beta\theta t} x_{n - \beta, n - \alpha - \beta} \frac{d}{d\omega} e^{i\alpha\theta t}$$

Agora⁸¹, escrevemos $n - \beta - \alpha = m$. Em seguida, supomos que $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \ll |n|$. Dirac *pede* também que aceitemos que ω e J sejam os análogos quânticos das variáveis clássicas de ação-ângulo. Para

⁸¹É claro que a fundamentação matemática rigorosa deve ser elaborada via algum tipo de *limite conveniente*, mas sabemos que o princípio de Bohr é uma regra heurística. E por *limite conveniente*, nenhum físico definiu precisamente, e de modo geral, como calcular tal limite.

obtermos o termo nm da expressão⁸² oriunda do produto de Heisenberg, devemos somar sobre os índices α e β – com a condição $n - \beta - \alpha = m$ – imposta pela *construção do produto de Heisenberg*.

Finalmente, supomos que $X(t)$ ⁸³ seja o análogo clássico do termo $x_{n,n-\alpha}$, isso ao tomarmos os colchetes de Poisson, e para o caso de a soma ser feita sobre o índice α ($-\infty < \alpha < \infty$). Em suma, teremos⁸⁴ que:

$$\{X, Y\} = -i\hbar\left(\frac{\partial X}{\partial j} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial j} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right), \text{ para}$$

$$\{u, v\} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j}\right) \text{ Colchetes de Poisson}$$

O processo de quantização de que tanto falamos é, por definição, a regra que associa a cada variável clássica um operador auto-adjunto, que será denominado variável quântica. Quanto aos detalhes matemáticos, indicamos⁸⁵ o texto de Isham, *Lectures on quantum theory*, no qual é elaborada a definição matemática de quantização. Vejamos um exemplo para ilustrar o processo de analogia quântica que levou à quantização canônica.

⁸²Lembremo-nos de que é $\Delta = \delta xy - \delta yx$ que surge no produto.

⁸³É pelo princípio de Bohr que Dirac sugere ser $X(t)$ o análogo quântico de $x_{n,n-\alpha} e^{i\alpha\theta t}$ e $x_{n-\beta,n-\alpha-\beta} \frac{d}{d\omega} e^{i\alpha\theta t}$, o análogo de $\frac{\partial x}{\partial \omega}$. Idem para $Y(t)$ e $y_{n-\alpha,m}$. Notemos que não é necessário que toda operação matemática tenha significado físico. O princípio de Bohr se refere somente à existência de uma relação entre a teoria clássica e a quântica. Não há exigência de que todas as etapas envolvidas em um suposto processo de limite matemático sejam passíveis de interpretação física. Veremos no segundo capítulo, ao discutirmos o trabalho de Mark Steiner, que há operações matemáticas, mesmo em mecânica clássica, que não se referem a nada no nosso mundo físico.

⁸⁴De maneira simplificada, teremos justamente as bases do processo de quantização, i.e., reinterpretam-se as variáveis clássicas e o colchete de Poisson por variáveis quânticas e comutadores, respectivamente. Claro que estamos omitindo os detalhes referentes à fundamentação matemática rigorosa, que seria elaborada alguns anos mais tarde. Nós afirmamos (no começo da primeira seção) que nos deteríamos nos artigos dos físicos no contexto em que foram criados, e não no contexto da matemática pura. Isham discutirá com detalhes o processo matemático de quantização canônica, como definir as condições de contorno, etc. (ISHAM, C.J. *Lectures on quantum theory – mathematical and structural foundations*, p. 89-97)

⁸⁵Ver a referência anterior.

Tomemos as variáveis clássicas u e v (funções diferenciáveis com relação à posição x e ao momento linear na direção de x). Escrevamos:

$$u = u(x, p_x) \text{ e } v = v(x, p_x)$$

Pela aplicação do processo de analogia quântica às variáveis acima, obteremos a identidade (*), da qual falamos anteriormente, i.e.,

$$\{u, v\} = i\hbar$$

Naquela ocasião, a identidade foi denotada por

$$\sum_k p_{nk} q_{kn} - q_{nk} p_{kn} = \frac{h}{2\pi i} \quad (*)$$

A obtenção da expressão acima por um processo geral foi uma clara indicação de que Dirac estava no caminho correto. Logo ao elaborar a analogia entre os colchetes clássicos de Poisson e os comutadores, Dirac escreveu (para duas variáveis quânticas arbitrárias x, y):

$$xy - yx = \frac{i\hbar}{2\pi} [x, y]$$

Encerremos esta seção com a comparação entre os novos colchetes (comutadores)⁸⁶ e os colchetes de Poisson. Para variáveis clássicas conjugadas p_r e q_s , os colchetes de Poisson satisfazem (r e s elementos de um conjunto de índices arbitrário) a

$$\{p_r, q_s\} = \delta_{rs}$$

$$\{q_r, q_s\} = 0$$

$$\{p_r, p_s\} = 0$$

Dirac sugerirá as seguintes relações para o caso de p_r, q_s serem variáveis quânticas análogas às clássicas:

⁸⁶Comutadores serão interpretados como funções de operadores lineares.

$$[q_s, p_r] = \delta_{rs} \frac{i\hbar}{2\pi}$$

$$[q_s, q_r] = 0$$

$$[p_s, p_r] = 0$$

Sem dúvida, podem parecer vagas expressões do tipo *análogos quânticos das variáveis clássicas*. Dirac chega a referir-se a um possível limite em que $\hbar \rightarrow 0$ para saber se as expressões clássicas poderiam ser obtidas das suas análogas quânticas (§4, p. 315). Notemos que \hbar é uma constante e que Dirac não diz o que entende pelo limite $\hbar \rightarrow 0$. Encerramos aqui a discussão de como Dirac foi capaz de generalizar a teoria de Heisenberg. Assim, teoria quântica, para nós, até aqui, é a teoria desenvolvida por Heisenberg e posteriormente por Dirac. No próximo capítulo, mostraremos a análise que Steiner faz do funcionamento e da invenção do processo de quantização canônica, isso após termos discutido sua teoria da aplicabilidade da matemática.

Terceira seção

1.3 Entre a física e a matemática

Ilustramos com detalhes como Heisenberg elaborou sua versão da mecânica quântica. Em seguida, discutimos como Dirac criou o processo de quantização canônica. Nesta, e na próxima seção, nós nos deteremos nos aspectos referentes à relação entre os termos matemáticos presentes na teoria de Heisenberg e o *mundo físico*. Começaremos pela antiga teoria quântica devida a Planck e Bohr, seguiremos, então, em direção ao trabalho de Heisenberg. Veremos o porquê da utilização de determinada estrutura matemática na formulação da teoria quântica em discussão⁸⁷.

Nosso **objetivo central** é mostrar que a matematização da mecânica quântica seguiu naturalmente de idéias físicas e fatos empíricos e que a matemática utilizada na formulação da mecânica quântica de Heisenberg apenas reflete propriedades estruturais⁸⁸ da

⁸⁷Por questões históricas, optamos por discutir com mais detalhes a abordagem de Heisenberg.

⁸⁸Para nós, a experiência é estruturante, i.e, a própria percepção envolve um ato mental pelo qual impomos uma estrutura àquilo que é percebido. Nosso ponto de vista filosófico quanto à natureza da matemática é conhecido por *estruturalismo*, o qual foi criado por Bourbaki. Estamos interessados em um tipo específico de estruturalismo defendido por da Silva, i.e, que “estruturalismo (...) é a visão de que a matemática não é a ciência de um tipo particular de objetos (os objetos matemáticos usuais, tais como, tipicamente, números, conjuntos ou formas geométricas), mas o estudo de propriedades estruturais de domínios arbitrários de entidades, independentemente de sua natureza ou estatuto ontológico (existindo de maneira real, meramente pressupostos ou somente intencionais)”. (DA SILVA, J.J. *Structuralism and the applicability of mathematics* p. 1) De modo preciso, “uma teoria formal (...) é uma descrição de propriedades estruturais compartilhadas por todos os seus modelos (uma teoria interpretada, por outro lado, é uma descrição estrutural de um modelo particularmente pretendido)”. (*Idem Ibidem* p. 5) Estas propriedades (ou relações) devem ser passíveis de descrição em uma linguagem formal. No caso dos axiomas de Peano, as propriedades estruturais são aquelas dadas pelos axiomas não-interpretados. No caso de uma lei física, tomemos uma relação famosa, dita lei de Planck. Ela estabelece que a radiação é absorvida através de pacotes discretos de energia, os *quanta de energia*. E é dada por: $E_n = nvh$, para o número inteiro n , a constante de Planck h - um número real, e ν , a frequência da radiação absorvida (a qual é representada

experiência. Começemos, agora, nossa discussão com a análise da física atômica, dita antiga teoria quântica.

1.31 Revendo a antiga teoria quântica

A antiga teoria quântica visava explicar os fenômenos referentes à absorção/emissão de energia (via radiação) pela matéria. Utilizando a expressão do oscilador harmônico, os físicos do final do século XIX desenvolveram algumas expressões para explicar como a energia era absorvida ou emitida pelos corpos materiais. Para entendermos melhor a questão, consideremos o caso de um corpo em equilíbrio com a radiação, de modo que toda a energia absorvida pelo corpo seja convertida em energia térmica. Em 1889, Kirchhoff demonstrou que a razão entre a energia absorvida E_ν e o coeficiente de absorção⁸⁹ A_ν - isso para uma frequência determinada ν - deveria satisfazer a seguinte relação (para a temperatura T):

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = J(\nu, T)$$

A expressão acima nos diz que a razão entre a energia absorvida e o coeficiente de absorção só depende da frequência de absorção e da temperatura. Ora, não era óbvio que tal razão independesse das características físicas do corpo, sendo que o resultado acima é conhecido

também por um número real). Ao escrevermos a expressão acima, estamos apenas representando matematicamente a lei de Planck. Ela (aparentemente) se aplica a todos corpos físicos do universo, e somente nos diz a forma pela qual a radiação é absorvida por um corpo. Matematicamente, estamos lidando com álgebra de números reais, nada mais.

⁸⁹O coeficiente de absorção mede a que extensão um determinado material absorve energia. Ele depende da natureza física do material, de suas dimensões e pode variar de acordo com a frequência da radiação absorvida. O que independe da natureza física do material é justamente a razão entre a energia absorvida e o coeficiente de absorção (a uma frequência fixa ν).

por teorema⁹⁰ de Kirchhoff. Foi ele quem cunhou o termo⁹¹ *corpo negro*, ao qual os físicos da época de Planck muito se referiam. Kirchhoff definiu o corpo negro por aquele cujo coeficiente de absorção A_ν é igual à unidade⁹² para todo ν . Neste caso, $J(\nu, T) = E_\nu$, i.e., $J(\nu, T)$ mede a capacidade de emissão/absorção de energia do corpo negro. E também é válido que $J(\nu, t) = c \frac{1}{8\pi} \rho(\nu, T)$, sendo ρ a densidade de energia por unidade de volume à frequência ν , conhecida por *densidade espectral*.

Em 1896, Wien⁹³ obteve $\rho(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}}$ - para α, β coeficientes a serem determinados empiricamente. A lei de Wien se aplicava perfeitamente à descrição e previsão de fenômenos referentes à absorção de energia para comprimentos de onda no intervalo de 1 a $8\mu\text{m}$ (T entre 400 e 1600K). Para valores de comprimento de onda entre 12 e $18\mu\text{m}$ (T entre 300 e 1650K), verificou-se que a lei de Wien falhava. (PAIS, A. *Sutil é o Sr - a ciência e a vida de Einstein* p. 433) Foi Planck

⁹⁰É curioso que Kirchhoff estabeleceu seu teorema partindo de que a violação da expressão $\frac{E_\nu}{A_\nu} = J(\nu, T)$ implicaria na possibilidade de um *perpetuum mobile* (ver PAIS, A. *Sutil é o Sr-a vida e a ciência de Albert Einstein* p. 432)

⁹¹Claro que não há corpos perfeitamente negros na natureza. Kirchhoff elaborou uma definição operacional para *corpo negro*, i.e., “Dado um espaço fechado por corpos em temperatura igual, através dos quais não pode penetrar radiação, cada feixe de radiação no interior deste espaço é constituído, com respeito à qualidade e à intensidade, como se tivesse origem num corpo completamente negro à mesma temperatura”. (PAIS, A. *Sutil é o Senhor - a ciência e a vida de Einstein*, p. 432) Coube aos físicos experimentais construir aparatos que se aproximassem de um corpo negro ideal e criar detectores de radiação com sensibilidade adequada.

⁹² $A_\nu = 1$ significa que o material absorve integralmente a radiação para toda frequência ν . Lembremo-nos de que supomos que toda energia absorvida via radiação é convertida em energia térmica.

⁹³À época de Planck havia duas expressões para o cálculo dos valores da energia absorvida por um sistema físico. Uma delas era a lei de Rayleigh-Jeans (RJ). Ela se aplicava somente a fenômenos cujas frequências pertenciam a uma determinada parte do espectro, ditas baixas frequências. Rayleigh e Jeans fundamentaram sua lei na teoria do eletromagnetismo de Maxwell e mecânica de Newton. A lei RJ previa que a densidade de energia emitida (por um corpo negro) em um intervalo de tempo finito deveria ser infinita. Tal previsão estava em completo desacordo com o que se observava, por razões bastante óbvias. Para uma discussão precisa das leis clássicas da radiação, de suas limitações, e a que parte do espectro de frequências se aplicam, ver (LOPES, J. L. *A estrutura quântica da matéria*, p. 355-363) e (BOHM, D. *Quantum theory*, p. 56).

quem obteve uma expressão que se aplicava a todas as faixas de valores referentes ao comprimento de onda da radiação absorvida.

A lei de Wien assumia que a energia absorvida se dava de maneira contínua, hipótese que Planck teve que abandonar. Para Planck, a absorção se daria através de *pacotes discretos de energia* ditos *quanta de energia*. O postulado que afirma que a energia é absorvida de maneira discreta permitiu que Planck escrevesse: $E = nh\nu = nE_0$ para um valor fixo E_0 de energia. Ora, a matemática empregada na lei de Planck expressa exatamente as relações estruturais relacionadas à experiência empírica e hipóteses físicas feitas a respeito da experiência. Neste caso, a hipótese física nos diz que a energia é absorvida através de pacotes discretos de energia, os quais são denotados por um múltiplo inteiro de $h\nu$. Visto que a lei de Planck prevê os valores corretos para E , ela expressa corretamente os dados da experiência empírica. Utilizando ω para denotar a frequência⁹⁴ de emissão/absorção de energia referente à transição de um sistema físico de um nível de energia E' para outro E'' , podemos escrever:

$$E' - E'' = h\omega$$

A expressão acima nos diz que “a diferença de energia entre dois estados (ou níveis de energia) caracterizados por E' e E'' é um múltiplo de ω ”. A constante h recebe o nome de *constante de Planck*. Relembremo-nos, agora, do átomo de Bohr, que foi um dos passos⁹⁵ mais importantes no desenvolvimento da antiga teoria quântica.

⁹⁴Frequência relativa à cada linha do espectro de um átomo para os valores E', E'' referentes a dois níveis arbitrários de energia. Veremos, adiante, como caracterizar cada nível de energia através das linhas espectrais. Escreveremos $h\omega_{ik} = E_i - E_k$ ou $\omega(i, k)$, em geral.

⁹⁵Omitimos outras etapas importantes no desenvolvimento da antiga teoria quântica, como o trabalho de Einstein sobre calores específicos e sua análise do efeito foto-elétrico, pois não foram *explicitamente* utilizados por Heisenberg na formulação de sua teoria quântica.

Para o caso do átomo de hidrogênio, podemos imaginar o sistema átomo-elétron como um sistema constituído de um núcleo que é orbitado por um único elétron. O modelo de Bohr é elaborado a partir de um conjunto de postulados, os quais um determinado⁹⁶ sistema atômico deveria satisfazer, como sabemos⁹⁷. Dentre eles, os mais importantes são:

- I- que um sistema atômico pode existir apenas permanentemente em um série descontínua de estados estacionários;
- II- que a radiação absorvida ou emitida durante uma transição entre dois estados estacionários apresenta uma frequência ω dada por $E' - E'' = h\omega$.

O postulado I (como vimos na primeira seção) nos diz que o sistema núcleo/elétron só pode existir em determinados estados de energia. Já -o segundo postulado - dá a relação entre a energia e a frequência para o caso da transição do sistema atômico de um nível de energia para outro. Para várias transições consecutivas de um mesmo sistema para vários níveis distintos de energia, nenhum dos postulados acima nos diz como obter os valores referentes às frequências de transição. Ora, não bastava simplesmente adicionar as frequências como se fossem números reais, pois o resultado estaria em completo desacordo com os dados experimentais. Como vimos na primeira seção, a lei de Ritz-Rydberg foi elaborada visando explicar como adicionar valores obtidos empiricamente para as frequências. Vejamos, agora, o que determina uma órbita estacionária.

⁹⁶Bohr se refere ao caso do átomo de hidrogênio.

⁹⁷(VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 5)

A cada nível energético de um sistema atômico está associada uma *linha espectral*⁹⁸. Desde que as linhas podem ser caracterizadas por suas *intensidades e fases*⁹⁹, cada órbita estacionária fica determinada¹⁰⁰ pelo conhecimento da fase e intensidade da oscilação referente a ela. É por isso que Heisenberg e Born nos dizem que “o conjunto de todas as linhas¹⁰¹ [espectrais] do átomo será melhor descrito ao se especificar um arranjo quadrático (esquema)” para cada termo referente a cada possível transição entre duas órbitas. (BORN, M. E HEISENBERG, W. *Quantum Theory*, p. 410) O arranjo a que os físicos se referem é o seguinte:

$$\begin{pmatrix} a_{11}e^{2\pi i\omega_{11}t} & a_{12}e^{2\pi i\omega_{12}t} \dots & \\ a_{21}e^{2\pi i\omega_{21}t} & a_{22}e^{2\pi i\omega_{22}t} \ddots & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

Observemos que os termos $a_{ij}e^{2\pi i\omega_{ij}t}$ são funções complexas. Tais termos se originam da solução de $\ddot{x} + f(x) = 0$ via séries de Fourier.

Podemos dizer, então, que a tabela¹⁰² acima contém termos referentes às amplitudes a_{ij} , frequências de transição ω_{ij} e números

⁹⁸Para o problema da absorção de energia pela matéria, observam-se, e.g., em uma chapa fotográfica, várias linhas referentes aos níveis energéticos em que se dá a absorção. Tais linhas recebem o nome de *linhas espectrais*. Em mecânica quântica, além da amplitude e da frequência, para caracterizar os níveis de energia associados a cada linha, são necessários números naturais (ditos *quânticos*) referentes a cada estado do sistema físico. A antiga teoria quântica já indicava essa dependência, como vimos no caso do átomo de Bohr.

⁹⁹As fases são os termos que contêm as frequências $\omega_{ik} = E_i - E_k$ como expoentes, e.g., $e^{2\pi i\omega_{ij}t}$. Podemos, sem perda de generalidade, caracterizar o sistema atômico tanto por suas *amplitudes e frequências* quanto por suas *amplitudes e fases*.

¹⁰⁰Claro que a determinação da órbita também requer o conhecimento do número quântico associado a ela.

¹⁰¹As notas entre colchetes são de nossa autoria.

¹⁰²A tabela deverá condensar toda informação a respeito do sistema físico. E, *a priori*, a tabela acima não é mais que um modo conveniente de se expressar os dados da experiência empírica. Observou-se, *a posteriori*, ser possível extrair via álgebra matricial algum tipo de informação da tabela. O que queremos dizer é que foi possível interpretar a tabela acima como uma matriz sobre um determinado conjunto, i.e., como um determinado tipo de função.

quânticos¹⁰³. Vimos, na primeira seção, que Heisenberg partiu da expressão do oscilador harmônico $\ddot{x} + f(x) = 0$ no contexto da física clássica, cuja solução era dada por:

$$x = x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$$

No contexto da antiga teoria quântica, os coeficientes $a(n)_{\alpha}$ se referem às amplitudes (intensidades) da oscilação. Nesse caso (unidimensional), o elétron do átomo de hidrogênio é tido como um corpo preso ao núcleo por uma mola, de modo a oscilar *ao redor do núcleo*. Denotamos a energia associada a cada *órbita* por E_n , sendo n número o número quântico associado ao nível energético E_n . A fase da oscilação é denotada por $e^{ti\omega_n\alpha}$, sendo ω_n a frequência (clássica) da oscilação, e t , o parâmetro *tempo*. Ainda com relação à tabela acima, estamos denotando os coeficientes $a(n, m)$ e $\omega(n, \alpha)$ por a_{nm} e $\omega_{n\alpha}$, respectivamente.

A lei clássica para adição de frequências, $\omega(n, \alpha) + \omega(n, \beta) = \omega(n, \alpha + \beta)$, previa valores incompatíveis com aqueles obtidos empiricamente. Heisenberg procurou reinterpretar os termos presentes na expressão $x(n, t) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} e^{ti\omega_n\alpha}$ de modo que os termos referentes às frequências satisfizessem a expressão que previa os valores corretos para sua adição, i.e., a lei RR. A teoria de Heisenberg deveria também incorporar o fato de as amplitudes dependerem dos níveis de energia associados aos estados inicial e final (de uma transição). A lei RR nos diz que:

$$\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

Vimos, na primeira seção, que Heisenberg propôs a seguinte substituição:

¹⁰³Os números quânticos aparecerão como os índices i, j em cada a_{ij} e ω_{ij} .

$$a(n)_\alpha e^{ti\omega_n\alpha} \rightarrow a(n, n - \alpha) e^{ti\omega(n, n - \alpha)}$$

Ora, desde que os termos relacionados às frequências deveriam se referir à diferença $E_n - E_{n-\alpha}$, era razoável escrever $a(n, n - \alpha)$ para a amplitude, pois ela também dependeria da diferença entre os estados inicial e final de energia. Feita esta substituição, Heisenberg mostrou¹⁰⁴ como os coeficientes deveriam ser multiplicados. Para o caso de os termos $a(n, n - \alpha)$ serem entendidos como elementos de uma matriz quadrada (de dimensão infinita), o modo de multiplicá-los seria equivalente ao *produto matricial*. Foi Born quem interpretou a multiplicação de Heisenberg como multiplicação de matrizes. Deste modo, foi possível interpretar a tabela anterior como uma matriz, e não somente como um amontoado de dados distribuídos em um arranjo bidimensional. Vejamos algo mais a respeito da multiplicação de Heisenberg e da utilização de matrizes para a formulação da mecânica quântica.

1.32 Heisenberg, Born e Jordan

Born e Jordan mostraram que a multiplicação de Heisenberg era *equivalente*¹⁰⁵ ao produto matricial. Façamos, então, um brevíssimo resumo do artigo de Born, cujo título¹⁰⁶ é *On quantum Mechanics*. Quanto aos detalhes técnicos mais importantes, estes foram discutidos à ocasião em que analisamos a equação¹⁰⁷ de Heisenberg. Aliás, o trabalho de Born e Jordan está repleto de afirmações cujas demonstrações¹⁰⁸ só

¹⁰⁴Discutimos como Heisenberg obteve uma expressão para o produto de coeficientes referentes às amplitudes para um caso particular, i.e, $c(n, n - \beta) = \sum_\alpha a(n, n - \alpha)b(n - \alpha, n - \beta)$.

¹⁰⁵Isomorfa, i.e, a álgebra subjacente ao produto de Heisenberg era isomorfa àquela subjacente ao produto matricial.

¹⁰⁶(BORN, M. E JORDAN, P. "On quantum mechanics" Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics* p. 277-306)

¹⁰⁷Ver a seção referente ao processo de quantização de Dirac.

¹⁰⁸Inclusive a hipótese de que a multiplicação de Heisenberg é equivalente ao produto matricial requereu uma demonstração rigorosa. O que Born e Jordan fizeram foi

foram elaboradas com rigor alguns anos mais tarde. Sigamos, então, com um sumário do trabalho de Born e Jordan.

Podemos dizer que Pascual Jordan e Max Born conseguiram chegar aos seguintes resultados:

- 1- a multiplicação obtida por Heisenberg é equivalente à multiplicação de matrizes;
- 2- é válida a fórmula¹⁰⁹: $pq - qp = -i\hbar Id$;
- 3- é válida a conservação da energia;
- 4- as condições¹¹⁰ de quantização (da frequência) devidas a Bohr podem ser justificadas matematicamente;
- 5- é possível¹¹¹ quantizar as componentes do campo eletromagnético, desde que elas sejam caracterizadas como matrizes.

Born foi responsável por 1 e 2. Pascual Jordan por¹¹² 3, 4 e 5.

Quanto a 3, precisamos fazer uma breve observação. Sabemos que, classicamente, a energia de um sistema físico constituído por uma

mostrar que é razoável assumir que p e q , dados por suas componentes, podem ser entendidos como matrizes quadradas de dimensão infinita. Aceito isso, eles demonstraram a identidade 2, o princípio 3 e as condições de Bohr referentes à quantização da ação. Os autores não deram uma demonstração matemática da equivalência entre o produto de Heisenberg e o de matrizes. Sabemos também que não é verdade que os termos referentes à posição e momento são *matrizes quadradas de dimensão infinita*, cuja álgebra é equivalente àquela de matrizes quadradas de dimensão finita. Podemos dizer que, em alguns casos bastante específicos, é possível representar algumas variáveis quânticas por meio de matrizes quadradas de dimensão infinita. As variáveis quânticas referentes ao momento e posição de uma partícula são operadores lineares definidos em certos espaços vetoriais específicos. Foi Jon Von Neumann (VON NEUMANN, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics*) quem demonstrou como os termos p e q deveriam ser interpretados.

¹⁰⁹ $Id(f(x)) = f(x)$ é o operador *identidade*.

¹¹⁰ $\hbar\omega_{ik} = E_i - E_k$

¹¹¹ Deveríamos dizer que é um problema *tratável*, pois Feynman, Schwinger e Tomonoga é que elaboraram uma teoria quântica do eletromagnetismo, isso alguns anos após o artigo de Born e Jordan.

¹¹² Ver (VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, p. 38).

partícula de massa m - e que esteja sob a ação do potencial¹¹³ U - é dada por *energia cinética* mais *energia potencial*:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + U(q)$$

Born e Jordan assumem que a energia do sistema quântico é dada pela mesma expressão¹¹⁴, desde que tomemos¹¹⁵:

$$q = q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}, p = p(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$$

Para evitar ambiguidade, escreveremos $q(nm)$, e não, $q(n, m)$. Caso houvesse o termo $n - \alpha$, optaríamos pela segunda notação -idem para $\omega(nm)$. E quanto a $q = q(nm)e^{2\pi i\theta\omega(nm)t}$, a expressão deve ser lida como “ q é uma matriz quadrada de dimensão infinita, cuja representação é dada pelos termos $q(nm)$ referentes à n -ésima linha e m -ésima coluna”, sendo $U(q)$ e p^2 funções das matrizes q e p , respectivamente.

Vimos como Dirac justificou esse¹¹⁶ procedimento a partir do trabalho de Heisenberg. No contexto da teoria quântica de Heisenberg, a energia do sistema é uma função de p e q , matrizes cuja dimensão é infinita - que serão interpretadas corretamente (por Jon Von Neumann) como operadores lineares.

Do trabalho de Heisenberg¹¹⁷, é sabido que:

¹¹³Conservativo, i.e., que é função somente da posição q da partícula para as coordenadas conjugadas p e q .

¹¹⁴No caso, por uma expressão que é escrita do mesmo modo, mas os termos se referem a outras entidades matemáticas, cuja álgebra subjacente é distinta.

¹¹⁵Quanto aos termos acima, nós já os analisamos na primeira seção. É importante notar que os autores se referem às componentes de q e p como elementos de uma matriz.

¹¹⁶Nós nos referimos à substituição sugerida por Heisenberg que culminaria no processo de quantização canônica desenvolvido por Paul Dirac.

¹¹⁷No contexto da antiga teoria quântica, escrevemos que: $a^*(n)_\alpha = a(n)_{-\alpha}$. Desde Bohr, havia indicações de que os coeficientes deveriam satisfazer à condição, à qual nos referimos por *condição de realidade*. No contexto de Heisenberg, $a(n, m) = a^*(n, m)$, na notação que utilizamos naquela ocasião.

$$q(nm)q(mn) = |q(nm)|^2$$

Os coeficientes $q(nm)$ são números complexos, os quais surgem da solução por série de Fourier para a expressão do oscilador harmônico. Sabemos também que as frequências $h\omega(nm)$ estão associadas às transições entre estados de energia e que são números reais¹¹⁸, pois fazem parte das grandezas observáveis sob as quais Heisenberg erigiu sua teoria. Podemos escrever, então, que a expressão $\omega(nm)$ abaixo é um número (real para cada n e m , números naturais).

$$h\omega(nm) = E_n - E_m$$

Também é válido que:

$$\omega(n, m) = -\omega(m, n)$$

$$\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

Com relação à multiplicação de Heisenberg, dois fatos foram fundamentais para seu desenvolvimento, sendo eles:

- 1- assunção de que o análogo¹¹⁹ quântico de $q_n(\alpha)$ é $q(n, n - \alpha)$. Esta hipótese se baseia na preservação da forma da solução da equação para o oscilador harmônico, cujos coeficientes foram reinterpretados;
- 2- a lei de Ritz-Rydberg. Esta hipótese é empírica.

Vejamos que, ao escrever o termo $q(n, n - \alpha)e^{2\pi i\omega(n, n - \alpha)t}$, referente ao estado $E_{n, n - \alpha}$, a fim de que possamos obter o termo referente ao estado $E_{n, n - \beta}$ (i.e., $q(n, n - \beta)e^{2\pi i\omega(n, n - \beta)t}$) é razoável multiplicar o primeiro termo por $q(n - \alpha, n - \beta)e^{2\pi i\omega(n - \alpha, n - \beta)t}$. Ora,

¹¹⁸Mais precisamente, racionais.

¹¹⁹ $a(n)_\alpha e^{ti\omega_n\alpha} \rightarrow a(n, n - \alpha)e^{ti\omega(n, n - \alpha)}$ foi a expressão que utilizamos anteriormente, para sermos precisos.

esta hipótese sugere a multiplicação dos termos de amplitude para satisfazer a lei de Ritz-Rydberg. Aceitas a substituição sugerida por Heisenberg e a lei de Ritz-Rydberg, seremos levados necessariamente¹²⁰ a uma álgebra multiplicativa não-comutativa. Aliás, dissemos que Heisenberg tomou o quadrado do termo-solução para o oscilador harmônico a fim de desenvolver uma fórmula para a multiplicação das amplitudes $q(n, n - \beta)$. Vejamos, então, que a álgebra subjacente à manipulação dos termos de amplitude é essencialmente não-comutativa.

Escrevamos a solução para q via componentes:

$$q = q(t) = q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$$

Sabemos que a derivada de $q(t) = q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$ deve ser $\dot{q}(t) = 2\pi i\omega(nm)[q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}]$. Utilizando as relações¹²¹ que os termos $\omega(nm)$ devem satisfazer, veremos que **não é necessário** que:

$$\dot{q}(t)q(t) - q(t)\dot{q}(t) = 0$$

Ora, é fácil ver que, com o auxílio da hipótese de Bohr para quantização da frequência $\omega(nm)$:

$$\dot{q}(t) = 2\pi i\omega(nm)[q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}] = \frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)[q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}]$$

Entretanto, sob a hipótese de a matriz H (referente aos valores de energia) ser diagonal¹²², teremos que:

¹²⁰Evidentemente, pode haver casos específicos em que a multiplicação seja comutativa, mas a álgebra subjacente à multiplicação de Heisenberg é essencialmente não-comutativa.

¹²¹Basicamente, a relação, ou condição de quantização de Bohr e a lei RR.

¹²²Resumidamente, temos uma função matricial $g = g(p, q)$ de modo que $(\frac{dg}{dt})_{nm} = 2\pi i(\omega(n, n)g(n, m))$. Se $\omega(n, m) \neq 0$ para $n \neq m$, a condição $\frac{dg}{dt} = 0$ requererá que $g(n, m) = \delta_{nm}g(n, n)$, i.e., que g seja diagonal. Ora, Heisenberg aceitou a condição de Planck (e Bohr) de que a energia do sistema era *discretizada*. Assim, é razoável que matrizes diagonais possam ser úteis à descrição do sistema físico. As matrizes serão, posteriormente, interpretadas como representações de operadores diferenciais autoadjuntos. Operadores

$$\dot{q}(t) = \frac{2\pi i}{h} (Hq - qH)$$

Desta expressão, à qual nos referimos anteriormente por equação de Heisenberg, vemos que:

$$(Hq - qH) = 0 \leftrightarrow \dot{q}(t) = 0$$

Sabemos que $q(t)$ é o análogo quântico da posição de uma partícula (hipótese da substituição de Heisenberg) e que, em geral, não é uma função constante¹²³ no tempo, o que justifica o caráter não comutativo da álgebra de Heisenberg. Born conhecia a álgebra matricial, como ele mesmo nos diz, i.e.,

Em uma manhã (...) de repente, eu vi tudo claro: a multiplicação simbólica de Heisenberg não era nada mais que o cálculo matricial, bem conhecido por mim desde meus anos de estudante. (VAN DE WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, volume V, p. 37)

Mencionamos este segundo modo de entender a multiplicação de Heisenberg, pois ele nos leva naturalmente a uma formulação simples do princípio conservação da energia, o qual foi demonstrado por Born e Jordan. De modo sucinto, se a energia é constante no tempo, a derivada da matriz¹²⁴ referente ao operador de energia deve ser nula (e vice-versa).

Nós nos referimos a p , q como matrizes quadradas infinitas e a H e A como funções polinomiais delas - isso no contexto do trabalho de Born

autoadjuntos admitem sempre uma base ortonormal de autovetores. Visto que seus autovalores são todos números reais, fica garantida a *condição de realidade* (a que nos referimos na primeira seção). A cada estado de energia, associaremos, então, um determinado autovalor do operador diferencial, no caso, o operador de energia, dito hamiltoniano. Também sabemos que a autovalores distintos estão associados autovetores distintos - propriedade refletida matematicamente pela ortogonalidade dos autovetores.

¹²³Os elétrons *transitam* de um nível de energia a outro, o que faz com o que o termo solução da equação do oscilador harmônico não seja constante no tempo.

¹²⁴Sabemos que o operador de energia é uma função das variáveis quânticas de posição e momento $H = H(p, q)$.

e Heisenberg. À época da criação da mecânica quântica, não se sabia exatamente como interpretar aqueles termos. Resta, agora, saber qual a relação entre os termos $q(nm)$ e a experiência.

Born e Jordan nos dizem que $|q(nm)|^2$ “é uma medida de probabilidades de transições $n \leftrightarrow m$ ”. (BORN, M. E JORDAN, P. “On quantum mechanics” p. 287-306) Primeiramente, eles não demonstram tal resultado. Sabemos que essa é a interpretação aceita pela comunidade científica desde a sugestão de Born. Vejamos como entender a afirmação acima no contexto do nosso trabalho.

À energia¹²⁵ de um sistema físico estará associada uma matriz $H = (E_{n,m})_{n \times m}$ contendo os valores referentes aos possíveis níveis de energia desse sistema. Neste caso, há um número E_{nm} associado a cada nível de energia que, aparentemente, depende de dois índices, i.e, n e m . Porém, se assumirmos, seguindo Born e Heisenberg (BORN, M. E HEISENBERG, W. *Quantum Theory*, p. 411-412), que todos os níveis de energia são distintos¹²⁶ e não-nulos, é possível escrever a matriz $H = (E_{n,m})_{n \times m}$ em sua forma diagonal $H = (E_{n,n})_{n \times n} = (E_n)_n$. Vejamos quais hipóteses físicas estão sendo assumidas para que se possa escrever H em sua forma diagonal.

- 1- Estamos nos referindo somente à parte *discreta* do sistema;
- 2- Estamos assumindo que cada frequência ω_{nm} é não-nula, visto que aceitamos a hipótese de Planck, i.e., $h\omega_{nm} = E_{nn} - E_{mm}$. Ora, se todos os termos E_{nn} são distintos e não-nulos, é necessário que o termo $h\omega_{nn}$ seja sempre não-nulo.

¹²⁵Estamos pensando somente na parte referente ao espectro discreto, pois queremos evitar o uso excessivo de formalismos.

¹²⁶Quanto a mesmos valores de energia para estados distintos, o físico se refere a *estados degenerados*. Se tivermos uma função clássica (referente à energia) do tipo pqp , ela é equivalente a p^2q . Mas, no contexto da mecânica quântica, elas representarão operadores lineares distintos, pois os termos p e q não comutam. Nesse contexto, pode haver ambiguidade, mas não é de nosso interesse discutir como resolver tais ambiguidades.

Nós nos referiremos, a partir de agora, a $|E_n\rangle$ como sendo o *estado físico*¹²⁷ do sistema, cuja energia é denotada por E_n . Escrevamos para H :

$$\begin{pmatrix} E_1 & \cdots & \\ \vdots & E_n & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

Procuremos, então, entender o porquê do uso da álgebra linear (rigorosamente falando, análise funcional) ser tão profícuo na fundamentação matemática da teoria quântica. Escrevamos para o vetor coluna $|E_n\rangle$,

$$|E_n\rangle = (0, 0, \dots, E_n, \dots 0)^t$$

Caso tomemos o produto¹²⁸ da matriz H pelo vetor $|E_n\rangle$, denotada por $H|E_n\rangle$, obteremos:

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$$

Visamos entender $|E_n\rangle$ como um vetor, ou melhor, como autovetor (não-nulo) do operador H , sendo E_n um determinado autovalor associado a $|E_n\rangle$. Para isso, sigamos com nossa abordagem heurística. Tomemos o conjunto $\{|E_n\rangle\}$ de todos os vetores $|E_n\rangle$. Sabemos que tal conjunto é, em princípio, de cardinalidade infinita (enumerável). Queremos escrever (partindo da hipótese de que os E_n são grandezas empiricamente mensuráveis) para um vetor arbitrário $|f\rangle$,

$$|f\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle$$

¹²⁷Estado físico é um “ente primitivo” para nós.

¹²⁸O produto de uma matriz infinita por um vetor coluna com *infinitas entradas* nulas, excetuando-se uma. Estamos *abusando* da notação no sentido de não termos demonstrado que as regras de multiplicação referentes à teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita se aplicam àquela de dimensão infinita.

Para isso, seria necessário que $\{E_n\}$ fosse uma base¹²⁹ para certo espaço vetorial \mathcal{H} sobre determinado corpo k . Ainda não podemos afirmar que classe de espaços vetoriais seria adequada para o nosso caso, mas sabemos que:

- 1- a dimensão do espaço deve ser infinita;
- 2- cada c_n deve pertencer a k .

Toda a nossa discussão partiu do exemplo do oscilador harmônico no contexto da teoria de Heisenberg. Achamos bastante didático seguir tal exemplo. Também sabemos que a solução para a equação do oscilador harmônico é dada (em sua forma matricial) por:

$$a(t) = a(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$$

$$\text{Vimos que } \omega(nm) = \omega(nn) = \omega(n) = \frac{1}{h}E_n.$$

Entretanto, na forma de somatório, para $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, teremos:

$$a(t) = \sum_n a(nm)e^{2\pi i\frac{1}{\hbar}E_n t} = \sum_n a(nm)e^{i\frac{1}{\hbar}E_n t}$$

Sabemos também que os termos E_n são dados empíricos e que não observamos a posição $a(t)$. Heisenberg procurou desenvolver uma teoria baseada somente em quantidades que pudessem ser observadas. Seria razoável, então, tentar expressar as demais quantidades (e.g, $a(t)$) partindo apenas do que é observado¹³⁰ empiricamente, i.e., por meio de uma expressão do tipo:

¹²⁹A base será ortogonal, visto que os estados de energia são todos dois a dois distintos. Desde que o módulo de cada vetor que representa um estado é finito, poderemos afirmar que a base deverá ser ortonormal.

¹³⁰Claro que o físico não observa os coeficientes da expressão acima, mas somente os valores referentes às energias. Em princípio, cada coeficiente é uma função complexa, pois esperamos poder expressar a solução $a(t)$ em função dos vetores referentes aos estados

$$\sum_n c_n(E) |E_n\rangle$$

Sugerimos que é razoável supor $|E_n\rangle$ como um vetor, mesmo sem sabermos (ainda) a que espaço vetorial V ele pertencerá e sobre qual corpo estará definido V . Sabemos que a matriz correspondente ao operador de energia deve ser autoadjunta, visto que H é autoadjunto. Também sabemos que os espaços vetoriais requeridos pela mecânica quântica deverão ser de dimensão infinita. Será razoável, então, tomar os elementos do corpo k como funções complexas, pois (para espaços de dimensão infinita) a definição de operador adjunto requererá a utilização de números complexos. Teremos, então, que cada¹³¹ $c_n(E)$ será uma função do parâmetro t cuja imagem (fixado t) será um número complexo.

Quanto a H , dissemos que ele deve ser uma função polinomial de q e de \dot{q} . Notemos que, para que a energia se conserve¹³², é necessário que a derivada temporal de $H(t)$ seja nula. Pela equação de Heisenberg, deveríamos ter (para $A = H$):

$$\dot{A}(t) = [H, A] = 0$$

Notemos que, para $H = p^2q$, é fácil mostrar¹³³ para o caso de H ser uma função de variáveis clássicas que a sua derivada é nula. Todavia, no contexto quântico, isto não ocorre, pois há mais de uma maneira de se escrever o análogo quântico de H , i.e., pqp e p^2q - que classicamente são indistinguíveis, mas não, quanticamente. Por outro lado, Born e Jordan

físicos associados aos termos E_n . Também é verdade que a solução para $a(t)$ via série de Fourier requer (para o caso geral) que os coeficientes sejam complexos.

¹³¹Estamos omitindo o parâmetro t na notação.

¹³²Espera-se que a energia se conserve, pois não há nenhuma indicação empírica de que isso não ocorra.

¹³³Se H é uma função das variáveis clássicas de posição e momento, os colchetes de Poisson para H nos permitem mostrar que $\frac{dH}{dt} = 0$.

perceberam que, no contexto quântico, $H' = \frac{1}{2}(p^2q + qp^2)$ deveria satisfazer a seguinte identidade:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H'}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H'}{\partial q}$$

E mais, H' teria derivada nula (com relação ao tempo), diferentemente de H .

Classicamente, H e H' levam às mesmas equações de movimento. Esse resultado sugeriu a Born e Jordan o seguinte teorema:

Para cada função $H(p, q)$, pode ser associada uma função $H'(p, q)$, de modo que H' e H levam às mesmas equações¹³⁴ do movimento e para as quais H denota a energia que é constante no tempo e satisfaz a condição de frequência. (BORN, M. E JORDAN, P. "On quantum mechanics", p. 294)

Eliminada a ambiguidade quanto à utilização da função hamiltoniana (clássica) como um uma *variável quântica*, sigamos com a interpretação de $q(t) = q(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$. Sabemos que $q(t)$ denota (em notação matricial) a solução para a equação do oscilador harmônico. Nós nos referiremos a ela por:

$$a(t) = a(nm)e^{2\pi i\omega(nm)t}$$

$$\text{Vimos que } \omega(nm) = \omega(nn) = \omega(n) = \frac{1}{h}E_n$$

Assim, para $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, teremos:

$$a(t) = \sum_n a(nm)e^{2\pi i\frac{1}{\hbar}E_n t} = \sum_n a(nm)e^{i\frac{1}{\hbar}E_n t}$$

¹³⁴Born e Jordan se referem aos análogos quânticos de $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

No contexto clássico, sabemos que as variáveis conjugadas p, q são aquelas cujas componentes p_j, q_j se relacionam por:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Para o caso quântico, tomando q por a , sugerimos que:

$$\dot{p} = -i\hbar \frac{\partial H}{\partial a}$$

Ora, por substituição direta, prova-se¹³⁵ que:

$$[p, a] = -i\hbar$$

Vimos que a mecânica quântica de Heisenberg partiu de dados empíricos e da hipótese de substituição dos coeficientes clássicos da série de Fourier para OHC. A fim de ser coerente com sua hipótese, seria (no mínimo!) razoável que Heisenberg supusesse que

$$\dot{p} = -i\hbar \frac{\partial H}{\partial a}$$

pois é necessário satisfazer a expressão:

$$[p, a] = -i\hbar$$

Ou melhor¹³⁶,

$$\frac{i}{\hbar} [p, a] = 1$$

A expressão para a energia¹³⁷ do oscilador terá a *mesma forma*, e a relação acima será satisfeita, desde que p seja dado pela expressão:

¹³⁵O comutador “[]”, claro que entendemos: $[p, q] = pq - qp$

¹³⁶Na expressão, 1 é operador identidade (também denotado por Id).

$$p = -\frac{i}{\hbar} \frac{d}{da}$$

Para uma função φ no domínio de p e a , é fácil ver, que:

$$\frac{i}{\hbar} [p, a]\varphi = \varphi$$

Retomando o caso do oscilador harmônico simples, é possível escrever¹³⁸:

$$\dot{p} = -m\omega_0^2 a$$

$$\dot{a} = \frac{p}{m}$$

Mas como resolver a expressão acima para as variáveis quânticas de modo que a solução para $a(t)$ (e $p(t)$) dependa somente dos valores de energia E_n e dos autovetores aos quais esses valores estão associados? Lembremo-nos de que $a(t)$ não é um observável, pois não é possível *ver* a posição de um elétron que orbita o núcleo de hidrogênio. Vimos que: $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$. H é compreendido como uma *regra operando* em $|E_n\rangle$, sendo o resultado dessa operação, $E_n|E_n\rangle$. O termo E_n é um

¹³⁷Se repararmos na expressão para energia do oscilador harmônico clássico (OH), sua energia clássica é dada por

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2$$

e a variável clássica p é

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial a} = -(p \frac{\partial p}{\partial a} + \omega_0^2 a) = -\omega_0^2 a$$

O desenvolvimento da teoria de Heisenberg partiu da expressão clássica para OHC. Sem perda de generalidade, escrevamos:

$$\ddot{a} + \omega_0^2 a = 0$$

ou

$$\dot{p} = -\omega_0^2 a$$

¹³⁸Enfatizemos que, no contexto quântico, os termos p e x deverão ser operadores autoadjuntos, e que estamos apenas abordando de modo heurístico o problema, i.e., estamos investigando que forma p deve assumir. Na próxima seção, seremos mais rigorosos.

número real¹³⁹ e positivo, pois somente valores dessa natureza podem ser medidos empiricamente. A fim de que os autovalores associados aos autovetores do operador de energia H sejam sempre um número real, será suficiente que H seja um operador autoadjunto, pois nosso espaço vetorial será definido sobre o corpo dos números complexos. Antes de seguirmos com a discussão referente às duas equações acima, resumiremos o que discutimos até aqui.

1- Vimos que os termos $|E_n\rangle$ podem ser entendidos como autovetores associados aos autovalores E_n (números reais). Mais precisamente, cada $|E_n\rangle$ será um autovetor do operador de energia H , que admitiremos ser autoadjunto, dada a natureza dos E_n . Sabemos também que a escolha de operadores autoadjuntos para a fundamentação da mecânica quântica garante a condição de realidade. Também é verdade que a teoria dos operadores autoadjuntos pode ser estendida a espaços de dimensão infinita;

2- Para soluções do tipo $a(t) = \sum_n c_n(E) |E_n\rangle$, os termos $c_n(E)$ deverão ser, em princípio, números (funções de) complexos, pois a teoria dos operadores autoadjuntos em espaços de dimensão infinita requer a introdução de números complexos;

3- Sabemos que há, *a priori*, infinitos $|E_n\rangle$.

Nossa abordagem heurística nos leva a sugerir o seguinte:

$\{|E_n\rangle\}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre o corpo dos números complexos. H é um operador autoadjunto, cujos autovetores são exatamente os vetores $|E_n\rangle$. Também é sabido que $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$, i.e., E_n é o autovalor associado ao autovetor $|E_n\rangle$. Está implícita a suposição de que o conjunto de autovetores forma uma base para o

¹³⁹Sabemos que é um número racional.

espaço vetorial complexo associado aos termos $|E_n\rangle$, pois queremos desenvolver a teoria quântica a partir dos observáveis. Ora, operadores autoadjuntos admitem bases cujos autovetores são ortonormais e garantem que a condição de realidade seja satisfeita. Vejamos o que pode ser dito a respeito dos espaços vetoriais que constituirão o domínio dos operadores autoadjuntos, cujos vetores serão exatamente os $|E_n\rangle$.

É importante deixarmos **evidente** que o espaço vetorial \mathcal{H} a que nos referimos deve:

- a) Ser gerado pelos vetores $|E_n\rangle$, autovetores de H , operador autoadjunto;
- b) Ser definido sobre o corpo dos números complexos;
- c) Ter dimensão infinita;
- d) Ser um espaço vetorial dotado de um produto interno, pois será necessário falar em comprimento de um vetor.

Também podemos requerer que $a(t) = \sum_n c_n(E) |E_n\rangle$ não divirja. Desde que $c_n(E)$ é um número complexo para cada n , seria de se esperar que - para que a série acima não divirja: $\sum_n |c_n(E)| < \infty$. Para que possamos falar em convergência¹⁴⁰ da série $a(t) = \sum_n c_n(E) |E_n\rangle$, faz-se necessário falar em *norma* do vetor $|E_n\rangle$. Estamos, assim, *caminhando* para a utilização de um espaço vetorial complexo *normado* cuja dimensão é infinita. Desde que todo produto escalar define uma norma, admitamos que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ seja um produto escalar cujo domínio é $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e cuja imagem esteja contida em \mathbb{C} . Sem perda de generalidade, assumamos que $\{|E_n\rangle\}$ é base ortogonal, pois os termos E_n são todos (dois a dois) distintos. Também conhecemos o resultado matemático que afirma que autovetores $|E_i\rangle$ e $|E_j\rangle$ (de um mesmo operador H) associados, respectivamente, a autovalores distintos E_i e E_j são ortogonais. Podemos admitir que a base $\{|E_n\rangle\}$ é uma ortonormal, pois as séries

¹⁴⁰Convergência para um elemento do espaço vetorial, claro.

$a(t) = \sum_n c_n(E) |E_n\rangle$ serão convergentes¹⁴¹. Mas, convergentes em que sentido? Precisamos especificar o módulo de um vetor em \mathcal{H} .

Ora, $a(t)$ será um vetor de \mathcal{H} . Desde que **estamos assumindo a existência** de um produto escalar, seu módulo (ao quadrado) será dado por

$$\langle a(t) | a(t) \rangle = \sum_n c_n(E) c_n^*(E) \langle E_n | E_n \rangle$$

Nosso conjunto de vetores é ortonormal, o que significa que

$$\langle E_n | E_m \rangle = \delta_{nm}$$

para as funções $c_n(E) c_n^*(E) = |c_n(E)|^2$. Lembremo-nos também de que omitimos o parâmetro t em cada $c_n(E)$. Poderíamos ter escrito $c_n(t)$, mas queríamos enfatizar a dependência dos coeficientes com relação às medidas elaboradas pelo físico! Então, devemos ter que:

$$\sum_n |c_n(E)|^2 < \infty$$

Um resultado da análise funcional nos diz que: se $\{|E_n\rangle\}$ é base ortonormal para um espaço vetorial \mathcal{H} ¹⁴² dotado de um produto interno, em que toda sequência (de Cauchy) convirja (na norma dada pelo produto interno) para um elemento do espaço, então é válido que:

¹⁴¹O módulo de cada $|E_n\rangle$ é finito, mas a convergência das séries é um resultado mais forte, pois implica a *finitude* de cada $|E_n\rangle$. De qualquer maneira, partimos da hipótese física de que os valores assumidos cada E_n são finitos.

¹⁴²De modo preciso, o resultado se aplica ao subespaço \mathcal{H}^1 ($\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$) fechado e separável de funções complexas diferenciáveis (definidas em \mathbb{R}) e do tipo *quadrado integrável*. Há ainda a restrição de que \mathcal{H}^1 se refira somente aos vetores relacionados aos valores discretos de energia, que é nosso caso de estudo. Para detalhes técnicos, deixaremos referências. Omitiremos definições básicas que (praticamente) nada acrescentariam ao nosso trabalho, como aquelas de sequência de Cauchy, espaço vetorial fechado, separável etc. Para o resultado acima, ver (PRUGOVECKY, E. *Quantum mechanics in Hilbert spaces*, p. 51).

$$\sum_n |c_n(E)|^2 < \infty$$

So far, so good desde que admitamos que \mathcal{H} ¹⁴³ seja o espaço vetorial que satisfaça às propriedades supramencionadas. Tal espaço¹⁴⁴ recebe o nome de **espaço de Hilbert**. H opera do seguinte modo:

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$$

E para $H(|E_n\rangle + |E_m\rangle)$, o que devemos obter? Sabemos que $|E_n\rangle + |E_m\rangle$ é necessariamente um vetor de \mathcal{H} e que H está associado (em princípio) à matriz referente aos valores de energia. É verdade que a toda matriz¹⁴⁵ (quadrada, no nosso caso), é possível associar uma transformação linear. Neste sentido, para $c \in \mathbb{C}$,

$$H(|E_n\rangle + |E_m\rangle) = H|E_n\rangle + H|E_m\rangle$$

$$H(c|E_n\rangle) = cH|E_n\rangle$$

Entretanto, H será um operador linear autoadjunto definido em \mathcal{H} . Agora, falta mostrar que é possível expressar $a(t)$ como função de grandezas observáveis, i.e,

$$a(t) = \sum_n a(nm) e^{i\frac{1}{\hbar}E_n t}$$

Para o oscilador harmônico simples, sabemos que

¹⁴³Precisamente, \mathcal{H}^1 da nota de rodapé da página anterior.

¹⁴⁴A partir daqui assumiremos que o espaço vetorial \mathcal{H} em que é formulada mecânica quântica de Heisenberg é um espaço vetorial normado completo com relação à norma oriunda de um produto interno, sendo infinita a dimensão do espaço, i.e., \mathcal{H} é um **espaço de Hilbert**.

¹⁴⁵Enfatizemos que estamos nos referindo à álgebra linear de espaços vetoriais de dimensão finita, isso a fim de investigar os *possíveis candidatos* a H , \mathcal{H} , etc. Claro que, para o caso dos espaços de Hilbert, há vários resultados referentes a espaços vetoriais de dimensão finita que deixarão de ser válidos. E lembremo-nos de que os físicos da época de Heisenberg, antes de Jon Von Neumann, raciocinavam em termos de matrizes quadradas de dimensão infinita. Faltava o rigor da teoria dos espaços de Hilbert.

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2$$

Ora, para o caso de a e p serem autoadjuntos, podemos seguir¹⁴⁶ Paul Dirac e escrever a e p em função de grandezas observáveis. Vejamos como proceder.

Para o oscilador harmônico, é válido que:

$$\dot{p} = -m\omega_0^2 a$$

$$\dot{a} = \frac{p}{m}$$

Bem, a solução para $a(t)$ é dada¹⁴⁷ por

$$a(t) + \frac{ip(t)}{m\omega_0} = a(0)e^{-i\omega_0 t} + i \frac{p(0)}{m\omega_0} e^{-i\omega_0 t}$$

$$a(t) - \frac{ip(t)}{m\omega_0} = a(0)e^{-i\omega_0 t} - i \frac{p(0)}{m\omega_0} e^{-i\omega_0 t}$$

E que pode ser escrita como

$$a(t) = a(0) \cos \omega_0 t + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Desde que é válida a lei de Planck ¹⁴⁸, o resultado acima sugere ser possível escrever $a(t)$ em função dos valores de energia medidos!

Em suma, sem fundamentar a mecânica quântica de modo estritamente matemático, ilustramos como certos conceitos, e.g., vetor, espaço vetorial de dimensão infinita, autovalor, autovetor e operador

¹⁴⁶Na realidade, estamos seguindo a narrativa que Sakurai faz ao se referir à solução obtida por Dirac. (SAKURAI, J.J. *Modern Quantum Mechanics* p. 89-97)

¹⁴⁷ $p(t) = -m\omega_0 a(0) \sin \omega_0 t + p(0) \cos \omega_0 t$

¹⁴⁸Notemos que, inicialmente, $\hbar\omega_n = E_n$. Mas, para o caso do oscilador harmônico simples, o que se tem é: $\hbar(n + \frac{1}{2})\omega_0 = E_n$. O termo n continua sendo um número inteiro. Prova-se que ele é necessariamente positivo.

linear podem ser relevantes para a descrição e fundamentação matemática da mecânica quântica de Heisenberg. Na primeira seção de nosso trabalho, vimos como Heisenberg desenvolveu a mecânica quântica a partir da reinterpretação dos termos referentes à solução do oscilador harmônico clássico. Na segunda seção, analisamos o trabalho de Dirac referente à quantização canônica. Nesta seção, nós nos preocupamos somente com o modo pelo qual os conceitos matemáticos podem ser introduzidos na teoria; não nos aprofundamos na relação entre os termos matemáticos e seus significados físicos. Veremos essa relação de modo mais preciso na próxima seção.

Quarta seção

1.4 Do significado físico dos termos matemáticos

Na seção anterior, analisamos como determinados termos matemáticos poderiam ser úteis na formulação da teoria de Heisenberg. Nesta seção, nós discutiremos o significado físico dos operadores¹⁴⁹ lineares em mecânica quântica. Quando necessário, introduziremos conceitos relevantes da mecânica quântica de Schrödinger¹⁵⁰, como *função de onda*. Encerraremos a seção com a análise de uma possível fundamentação axiomática básica da mecânica quântica.

Vimos que é possível expressar $a(t)$ pelos termos $|E_n\rangle$, os quais entendemos como autovetores de H , sendo cada E_n um autovalor associado ao seu respectivo autovetor $|E_n\rangle$. Isto nos sugere que, pelo menos para o operador de energia H :

*Os autovalores associados aos autovetores do operador de energia são os valores que a grandeza física **energia** pode tomar nas condições criadas pela sua medição.*

Desde que os valores observados para qualquer grandeza física são números reais, devemos exigir que:

¹⁴⁹E de alguns outros termos matemáticos associados aos operadores. Lembremo-nos de que: uma transformação linear é uma relação funcional $T:V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais V e W (ambos sobre o mesmo corpo Γ) que satisfaz:

$$T(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = T(\vec{u}) + \lambda T(\vec{v})$$

Lembremo-nos de que um operador linear O é uma transformação linear $O:V \rightarrow V$. De modo rigoroso, para espaços vetoriais arbitrários, um operador linear é definido por uma regra funcional $O:V \rightarrow V$ e um conjunto $dom\ O \subset V$, que é o domínio do operador O , e que deve ser subespaço vetorial de V . Dado um operador linear O , pode-se querer saber se existe algum vetor \vec{f} no $dom\ O$ que satisfaça: $O(\vec{f}) = \lambda\vec{f}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$. Tal equação recebe o nome de *equação de autovalores*, para λ , um *autovalor* associado ao *autovetor* \vec{f} . Os autovetores de O serão exatamente os termos que satisfizerem a equação de autovalor. Lembremo-nos de que os autovetores deverão ser todos distintos do vetor nulo.

¹⁵⁰Não demonstraremos a equivalência (matemática) entre as teorias de Schrödinger e de Heisenberg, apenas tomaremos tal fato como certo.

*Uma grandeza física real deve ser descrita por um operador cujos autovalores sempre sejam números reais¹⁵¹ positivos, i.e, um **operador**¹⁵² **autoadjunto**.*

A grandeza física à qual nos referimos acima será denominada *observável*. Nessa direção, a todo observável o associaremos um operador¹⁵³ autoadjunto O . Veremos, na parte final da seção, que a relação entre observáveis e operadores será garantida por meio de um postulado. Retomemos a questão do significado de $a(t)$ e $p(t)$.

1.41 Analogia quântica (revisitada)

A fim de que possamos ser rigorosos quanto à interpretação dos operadores $a(t)$ e $p(t)$, é necessária uma breve incursão pela mecânica clássica. Queremos encontrar um operador de modo que as relações entre as grandezas físicas possam ser *reproduzidas* pelas relações entre os operadores (de posição $a(t)$ e de momento $p(t)$). Para isso, veremos que a analogia¹⁵⁴ com a mecânica clássica será fundamental. Retomemos a notação padrão $q(t)$ para a variável clássica *posição*.

Em mecânica clássica, sabemos que qualquer sistema mecânico pode ser descrito pelo conjunto de variáveis canônicas, i.e., aquele das coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n e dos momentos generalizados p_1, p_2, \dots, p_n . Tais variáveis devem satisfazer as equações de Hamilton, cuja *forma canônica* é, para $k = 1, 2, \dots, n$ e para a função hamiltoniana clássica (energia mecânica do sistema):

¹⁵¹Claro que toda medida é expressa por um número racional.

¹⁵²O que é relevante para nossa discussão é que o conjunto de autovalores associados aos autovetores de um operador autoadjunto são números reais.

¹⁵³Há operadores lineares que não correspondem a observáveis. Entretanto a relação entre observáveis e operadores não é biunívoca.

¹⁵⁴Discutimos como Heisenberg desenvolveu sua teoria e como Dirac elaborou o processo de quantização canônica via *analogias*. Agora, seremos mais precisos quanto ao funcionamento das analogias em mecânica quântica.

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Seja $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t)$ uma função diferenciável.

Assim, podemos escrever:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right)$$

Utilizando as equações de Hamilton, teremos que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

Define-se, então:

$$\{H, F\} \equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

$\{H, F\}$ é dito *colchete de Poisson* para o par (de grandezas associadas a) H e F . De modo genérico, para funções¹⁵⁵ G e F escreve-se:

$$\{F, G\} \equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

Uma propriedade assaz importante¹⁵⁶ dos colchetes de Poisson é que eles são *invariantes por quaisquer transformações que preservem a forma canônica das equações de Hamilton*. De modo simplificado, sempre que as equações de Hamilton puderem ser escritas da maneira definida anteriormente, o modo de se calcular o colchete de Poisson entre duas

¹⁵⁵Funções diferenciáveis de q_k, p_k, t . É claro que o matemático pode estudar propriedades dos colchetes de Poisson sem se preocupar se as funções F e G estão associadas a grandezas físicas ou não.

¹⁵⁶Importante para a formulação da teoria. É sempre *interessante* conhecer as transformações que deixam invariante determinado grupo de equações. No caso da mecânica clássica, desde que as equações possam ser escritas de acordo com as equações de Hamilton, o modo de se calcular os colchetes de Poisson será dado por uma expressão canônica.

funções de q_k, p_k e t será dado pela última expressão acima. Outras propriedades dos colchetes são:

$$P1: \{F, G\} = -\{G, F\}$$

E para uma constante arbitrária c :

$$P2: \{F, c\} = 0$$

Também são válidas:

$$P3: \{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\}$$

$$P4: \{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2$$

$$P5: \{F, \{G, L\}\} + \{L, \{F, G\}\} + \{G\{L, F\}\} = 0$$

Para o conjunto das coordenadas e momentos, teremos:

$$\{q_k, q_l\} = 0, \{p_k, p_l\} = 0, \{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$$

Sabemos que Dirac encontrou o análogo quântico para os colchetes de Poisson. Vejamos, então, como é possível obter o equivalente quântico dos colchetes¹⁵⁷.

Suponhamos que os termos F, G se refiram a *objetos matemáticos* que não comutam. Utilizando $P4$, podemos escrever:

$$P6: \{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_1 \{G, F_2\}$$

$$P7: \{F, G_1 G_2\} = G_1 \{F, G_2\} + F \{G_1, G_2\}$$

¹⁵⁷É importante perceber que estamos partindo da preservação de relações entre variáveis clássicas e procurando seus análogos quânticos. Claro que a reinterpretação dos termos pode requerer algumas alterações técnicas. No caso da expressão para a energia do oscilador harmônico clássico, a relação é expressa por funções reais. No caso quântico, por operadores autoadjuntos ou funções destes operadores.

Suponhamos que a ordem pela qual se multiplicam F e G coincida com $P4$. Em mecânica clássica, os termos F, G comutam, e neste sentido, $P4$ corresponderá (para $G = H$) à diferenciação de F com relação ao tempo. E em mecânica quântica? Neste caso, para que possamos falar da diferenciação com relação ao tempo, far-se-á mister preservar a ordem da multiplicação dos termos F, G , pois eles se referirão a operadores, cuja álgebra é essencialmente não-comutativa. Vejamos, então, como obter o análogo quântico dos colchetes de Poisson.

Primeiramente, façamos $G = G_1G_2$ em $P6$ e utilizemos $P7$ para reescrever $P6$:

$$\{F_1F_2, G_1G_2\} = F_1G_1\{F_2, G_2\} + F_1\{F_2G_1\}G_2 + G_1\{F_1, G_2\}F_2 + \{F_1, G_1\}F_2G_2$$

Analogamente, escrevamos $F = F_1F_2$ em $P7$, e utilizemos $P6$ para reescrever $P7$:

$$\{F_1F_2, G_1G_2\} = G_1F_1\{G_2, F_2\} + G_1\{F_1, G_2\}F_2 + F_1\{F_2, G_1\}G_2 + \{F_1, G_1\}F_2G_2$$

Igualando as expressões acima, obtemos:

$$(F_1G_1 - G_1F_1)\{F_2, G_2\} = \{F_1, G_1\}(F_2G_2 - G_2F_2)$$

Esta expressão se converterá¹⁵⁸ em uma identidade se pudermos escrever, para operadores arbitrários F, G :

$$\{F, G\} = C\{FG - GF\}$$

Na última expressão, C deverá¹⁵⁹ ser um operador com a propriedade de comutar com qualquer outro operador. Ora, o único operador matemático que satisfaz a tal propriedade é o *operador de multiplicação por uma constante c* . E demonstra-se que a constante c é

¹⁵⁸Este resultado é verificado por manipulação algébrica das expressões.

¹⁵⁹A fim de que seja satisfeita a identidade.

necessariamente um número imaginário puro¹⁶⁰. Além disso, se F e G forem autoadjuntos, $\{F, G\} = C\{FG - GF\}$ também o será. Neste sentido, o colchete de Poisson $\{F, G\}$ cujos termos denotam duas grandezas *físicas reais* deve se referir a uma grandeza física real. De modo preciso, o comutador de operadores F, G (que se referem, respectivamente, aos observáveis f, g) será um operador O relacionado ao observável¹⁶¹ o .

Denotemos, então, por $[,]$, os nossos novos colchetes. Escrevamos para os operadores autoadjuntos F e G , para o número real r e a unidade imaginária i :

$$[F, G] = ri(FG - GF)$$

Ainda quanto aos operadores de posição e de momento, é usual escrever as componentes do operador de posição x do seguinte modo: x_1, x_2, x_3 . Muitos autores utilizam \hat{x} , sendo que ‘^’ é utilizado para diferenciar as variáveis clássicas das quânticas. Para o operador de momento, escreve-se p_1, p_2, p_3 ou, respectivamente, p_x, p_y, p_z .

Sabemos¹⁶² que o operador de energia H é uma função polinomial de x e p . Se tomarmos a variável x (de posição) por *variável independente*, o *operador de posição* será necessariamente do tipo de *multiplicação pela variável de posição*. De modo mais preciso: *imposta a*

¹⁶⁰Poderíamos utilizar este resultado para justificar a necessidade de introdução de números complexos na formulação matemática da mecânica quântica. À ocasião em que mencionamos a necessidade de introduzirmos números complexos, apenas nos referimos aos coeficientes da solução da série de Fourier para o oscilador. Ora, em mecânica clássica se utiliza também a solução via série de Fourier e os coeficientes de amplitude são números reais. Neste sentido, não basta dizer que a solução via séries de Fourier implica a necessidade de se utilizar números complexos na fundamentação da teoria. Mas agora temos razões suficientes para utilizá-los.

¹⁶¹Claro que a determinação de o dependerá do conhecimento de f e g . Tudo que podemos dizer é que os autovalores de $[F, G] = O$ nos darão os valores relacionados às possíveis medidas referentes ao observável o .

¹⁶²Discutimos o processo de quantização canônica na 2ª seção. Vimos que o operador de energia pode ser obtido da expressão clássica da energia pela reinterpretação dos termos presentes nesta expressão. Esses termos são funções polinomiais das variáveis clássicas *momento* e *posição*.

condição física de que os autovalores do operador relacionado à variável independente devam coincidir com os valores da grandeza física associada àquela mesma variável, demonstra-se¹⁶³ que o operador relacionado à variável independente é do tipo de multiplicação pela variável (em uma representação apropriada, evidentemente).

Ora, este resultado acima nos diz que a *forma do operador* dependerá da escolha da variável independente. Enfatizemos a relevância física do fato de que os autovalores do operador referente a determinada grandeza física devem corresponder aos valores medidos para aquela grandeza. E nos lembremos da relevância de os operadores serem autoadjuntos! É importante fazer a ressalva de que não é qualquer variável que pode ser escolhida como independente, pois os operadores das variáveis independentes deverão comutar entre si. No caso do operador de posição para o elétron (do átomo de hidrogênio) em 3 dimensões, teremos três operadores associados à posição do elétron, um para cada grau de liberdade da partícula, i.e., x_1, x_2, x_3 se referirão aos operadores para as três componentes do operador de posição para nosso lépton¹⁶⁴.

Com o intuito de adaptar os colchetes de Poisson para o caso da mecânica quântica, deveremos requerer que

$$[x_k, x_l] = 0, [p_k, p_l] = 0, [p_k, x_l] = \hbar i \delta_{kl}$$

As expressões acima nos permitem dizer que tanto as componentes do operador de posição quanto aquelas do operador de momento podem

¹⁶³(FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 32-34).

¹⁶⁴A título de ilustração, os elétrons pertencem à família dos léptons. Outros exemplos de léptons são: múon, tau, neutrino do elétron, neutrino do múon, neutrino do tau. Além dos léptons, há os mésons e os bárions. Mésons e bárions são constituídos por quarks (e antiquarks), enquanto os léptons não possuem estrutura interna, pelo que se sabe nos dias de hoje. Há uma outra maneira de classificar as partículas (e sistemas de partículas) e que se baseia no tipo de estatística a que a partícula obedece. Nesta classificação, as partículas são divididas em dois grupos: férmions e bósons. (CHUNG, K.C. *Introdução à física nuclear* p. 14)

ser tomadas (nunca simultaneamente) por independentes. É óbvio que precisamos optar por somente um conjunto de coordenadas independentes, pois: $[p_k, x_l] = r i \delta_{kl}$ (verifica-se que $r = -\hbar$).

Dissemos que, para satisfazer $[p_k, x_l] = -i\hbar\delta_{kl}$, poderíamos tomar $p_k = -\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Também poderíamos nos perguntar se há alguma expressão π_k mais geral para p_k . Demonstra¹⁶⁵-se que é possível reduzir π_k à forma

$$p_k = -\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$$

1.412 Do significado dos operadores de momento e posição

Obtidas as expressões para os operadores de momento e de posição, resta saber o que elas precisamente significam. Em princípio, a posição de uma partícula pode ser observada em mecânica clássica, o que não se dá em mecânica quântica. Vejamos como a expressão acima para o operador de momento pode ser útil para entendermos como relacionar os operadores matemáticos às medidas efetuadas no âmbito da física.

Para o operador de momento, uma solução ψ^k ($k = 1,2,3$) para a equação de autovalor deve satisfazer a

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^k}{\partial x_k} = p_k \psi^k$$

¹⁶⁵Aliás, para $\pi_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} + \varkappa_k$, de modo que $[\varkappa_k, x_k] = 0$, teremos que π_k será um candidato a *operador de momento*. Requeremos que cada \varkappa_k seja autoadjunto. A partir das relações de comutação entre π_k , demonstra-se que cada \varkappa_k deve satisfazer, para uma função fixa f , a $\varkappa_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Seguirá, então, $p_k = \exp\left(\frac{i}{\hbar} f\right) \pi_k \exp\left(-\frac{i}{\hbar} f\right)$. Para detalhes técnicos, ver (FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 48-49).

A expressão $\psi = ce^{\frac{i}{\hbar}(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)}$ é solução (simultânea) da última equação para $k = 1,2,3$ para uma constante¹⁶⁶ c . A função $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3)$ recebe o nome de *função de onda*. Ela descreverá o estado físico do sistema quântico. Vejamos que tipo de informação ψ pode nos dar a respeito sobre o estado de um sistema.

Seja λ autovalor de um operador L , o qual está associado¹⁶⁷ a uma grandeza física arbitrária l . Podemos escrever¹⁶⁸, para qualquer λ (no caso de pertencer ao espectro contínuo) de L :

$$\lambda = \frac{\int \psi^* L \psi d\chi}{\int \psi^* \psi d\chi}$$

A expressão acima nos diz que os autovalores do operador L podem ser obtidos por uma fórmula determinada, desde que conheçamos ψ . Temos, então, que o estado do sistema físico será determinado por ψ . Resta sabermos exatamente como obter informações a partir de ψ .

Até aqui, nossa discussão tem sido bastante abstrata, pois ψ surgiu como solução para expressões do tipo: $-i\hbar \frac{\partial \psi^k}{\partial x_k} = p_k \psi^k$. Suponhamos, agora, que

$$\psi^k = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}^k$$

para cada ψ_{α}^k no domínio de p_k , de modo que o conjunto de todas ψ_{α}^k seja uma base de autofunções do operador p_k . Escrevamos: $p_k \psi_{\alpha}^k = b_{\alpha} \psi_{\alpha}^k$.

¹⁶⁶É fácil mostrar que $c = (\frac{1}{2h\pi})^{3/2}$. (FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 51-52)

¹⁶⁷Veremos na seção referente à axiomática da mecânica quântica como se associa um operador a uma grandeza física.

¹⁶⁸Para $\lambda = \frac{\int \psi^* L \psi d\chi}{\int \psi^* \psi d\chi}$, a integração é na medida de Riemann-Stieltjes. Para a demonstração da expressão e demais detalhes técnicos, ver (FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 29-31).

Para $\psi = \psi^k$ e $L = p_k$, a expressão $\lambda = \frac{\int \psi^* L \psi d\chi}{\int \psi^* \psi d\chi}$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\int \psi^* L \psi d\chi}{\int \psi^* \psi d\chi} = \sum_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 b_{\alpha}$$

Sem perda¹⁶⁹ de generalidade, desde que $\int \psi^* \psi d\chi < \infty$, podemos escrever:

$$\int \psi^* L \psi d\chi = \sum_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 b_{\alpha}$$

A expressão acima pode ser lida como um caso particular do seguinte teorema:

$\int \psi^ L \psi d\chi$ é o valor médio do operador L para a média calculada sobre todos possíveis autovalores de L . (LINDSAY, R.B. e MARGENAU, H. *Foundations of physics*, p. 413)*

É importante dizer que o teorema acima *não surge do nada*. O físico atento (e conhecedor da teoria básica das distribuições de probabilidade em mecânica clássica¹⁷⁰) estaria acostumado com expressões do tipo: $\sum_{\alpha} f(x_{\alpha}) \omega(x_{\alpha})$. Estas expressões, para $\sum_{\alpha} \omega(x_{\alpha}) = 1$ e $f(x_{\alpha})$, denotam exatamente o valor médio (esperado) \bar{f} para a função $f(x_{\alpha})$. A expressão $\sum_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 b_{\alpha}$, para $\sum_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 = 1$, poderia ser interpretada como valor esperado para o operador de momento, desde que $|a_{\alpha}|^2$ definisse uma distribuição de probabilidade para os autovalores b_{α} . Resumidamente, cada $|a_{\alpha}|^2$ poderá ser interpretado como relativo à probabilidade de se

¹⁶⁹Estamos abusando da notação, pois para escrevermos $\int \psi^* \psi d\chi = 1$ teríamos que redefinir ψ . Neste caso, escreveríamos também que: $\sum_{\alpha} |a_{\alpha}|^2 = 1$.

¹⁷⁰Vemos, mais uma vez, que o desenvolvimento da mecânica se deu na direção de *preservação de estruturas clássicas*. No caso de Heisenberg, ele manteve a expressão para o oscilador harmônico cuja solução foi obtida por séries de Fourier.

obter (empiricamente) b_α , se $|a_\alpha|^2$ definir uma distribuição de probabilidade dos b_α . De modo preciso, demonstra-se que – vistos os termos a_α como função de b_α –, $|a_\alpha|^2$ define uma distribuição de probabilidade de b_α - onde $|a_\alpha|^2$ se referirá à probabilidade de se medir b_α . (LINDSAY, R.B. E MARGENAU, H. *Foundations of physics*, p. 414)

Assim, $|a_\alpha|^2$ fará o papel de $\omega(x_\alpha)$ na expressão clássica $(\sum_\alpha f(x_\alpha) \omega(x_\alpha))$. No nosso exemplo, b_α é autovalor de p_k associado a ψ_α^k . Nossa análise se baseou no estudo das autofunções de p_k , ditas funções de onda. Quanto ao operador de posição x , podemos dizer algo similar. Para $L = x$ em $\int \psi^* L \psi d\chi$, esta expressão se refere ao valor esperado para o operador de posição, para autofunções no domínio de x que satisfizerem a

$$x\psi_\alpha = \lambda_\alpha\psi_\alpha$$

Até aqui, a conclusão a que podemos chegar é que o tipo de informação que pode ser obtida da função de onda é de natureza estatística. No caso, podemos conhecer os valores esperados para os operadores de momento e de posição. Quanto a estes operadores, sabemos que não comutam. E qual a relação entre a não-comutatividade dos operadores e as medidas feitas em laboratório? De modo geral, qual a relação entre a não-comutatividade e o tipo de informação que pode ser obtida empiricamente?

Sejam dois operadores lineares L e M e o conjunto de todas $\psi = \psi(x)$ que forem autofunções¹⁷¹ simultâneas dos operadores L e M , i.e., $L\psi = \lambda\psi$, $M\psi = \mu\psi$, para autovalores λ e μ de L e M , respectivamente.

Se ψ é autofunção de ambos os operadores e o conjunto de todas as autofunções for base tanto para o espaço de autofunções de L quanto

¹⁷¹ x é somente uma variável independente.

para o espaço de autofunções de M , é fácil mostrar que $LM = ML$. (FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 54)

De maneira ilustrativa, para cada autofunção ψ simultânea de L e M podemos escrever:

$$ML\psi = \lambda\mu\psi$$

$$LM\psi = \lambda\mu\psi$$

E conseqüentemente, $ML\psi(x; \mu, \lambda) = LM\psi(x; \mu, \lambda)$

Suponhamos que toda ψ possa¹⁷² ser decomposta da seguinte forma:

$$\psi(x) = \sum_{\mu, \lambda} c(\mu, \lambda)\psi(x; \mu, \lambda)$$

Se for o caso de toda autofunção de L e toda autofunção de M poder ser escrita como combinação linear de autofunções simultâneas de L e M , podemos afirmar que (desde que as séries de funções sejam convergentes¹⁷³):

$$ML \sum_{\mu, \lambda} c(\mu, \lambda)\psi(x; \mu, \lambda) = LM \sum_{\mu, \lambda} c(\mu, \lambda)\psi(x; \mu, \lambda)$$

Ou seja, $ML = LM$.

A recíproca deste resultado é válida também, i.e., se os operadores comutarem, eles terão autofunções comuns. (FOCK, V.A. *Princípios de mecânica quântica*, p. 54-55).

¹⁷²Vamos supor que o espaço de funções ψ é um espaço vetorial (sobre determinado corpo, cujos coeficientes são denotados por $c(\mu, \lambda)$) cuja base é dada pelas funções $\psi(x; \mu, \lambda)$.

¹⁷³Nosso espaço de funções deverá ser dotado de um produto interno e completo com relação à norma oriunda do produto. Mais uma vez fica evidente a necessidade de se utilizar espaços de Hilbert na formulação matemática da teoria quântica de Heisenberg.

Vimos que é possível obter informação a partir de autofunções de operadores. Se os operadores comutarem, eles admitirão autofunções comuns. Assim, podemos dizer que

O significado físico da comutatividade dos operadores expressa a possibilidade de medição simultânea das grandezas físicas correspondentes aos operadores.

Quanto à não-comutatividade, segue-se também que

O significado físico da não-comutatividade dos operadores expressa a impossibilidade de medição simultânea das grandezas físicas correspondentes aos operadores.

Vejamos algo a respeito de operadores A e B que não comutam. Sejam $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ os valores esperados¹⁷⁴ para A e B , respectivamente.

Definamos os operadores:

$$\Delta A = A - \langle A \rangle$$

$$\Delta B = B - \langle B \rangle$$

É fácil mostrar que

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \|\langle [A, B] \rangle\|^2$$

$(\Delta A)^2$ recebe o nome de *dispersão com relação a A* (analogamente, $(\Delta B)^2$ é dito *dispersão com relação a B*). Fisicamente, $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ expressa a incerteza com relação à medida referente à grandeza física denotada pelo operador A . A expressão acima nos diz que, para operadores que

¹⁷⁴ $\langle G \rangle$ nos dá o valor esperado para determinado operador G , e ΔG é um operador definido pela diferença entre o operador G e o operador de multiplicação por $\langle G \rangle$. O *valor esperado* de uma variável F utilizada para denotar uma grandeza física f é a soma dos produtos de cada valor f_i tomado por essa grandeza pela probabilidade p_i de ocorrência da grandeza, i.e., $\langle F \rangle = \sum_i p_i f_i$.

não comutam, o produto das incertezas denotado por $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle$ é maior que ou igual a uma quarta parte do quadrado do módulo do valor esperado para o comutador $[A, B]$. Desde que $[A, B] \neq 0$ (operador identicamente nulo), o produto $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle$ é necessariamente não-nulo. Para¹⁷⁵ $A = x, B = p_x$, verifica-se que:

$$\langle\Delta x^2\rangle\langle\Delta p_x^2\rangle \geq \frac{1}{4}\hbar^2$$

No caso da mecânica quântica, as desigualdades referentes aos produtos entre os valores esperados para as dispersões (referentes a operadores que não comutam) recebem o nome de *relações*¹⁷⁶ *de incerteza de Heisenberg*. Antes de seguirmos com a discussão da axiomática da mecânica quântica, diremos algo a respeito da evolução temporal de um sistema quântico.

Se A é um observável, sabemos que $\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$, para o operador de energia H . Vimos (nas segunda e terceira seções) como Dirac chegou à equação de Heisenberg. Partindo dos colchetes de Poisson, é possível justificar a expressão acima, dita *equação de Heisenberg*, de um modo mais rigoroso que aquele adotado por Dirac. A solução para a equação de Heisenberg é, obviamente, uma expressão para a evolução temporal de um sistema físico-quântico. Da equação de Heisenberg, é possível chegar à celebrada equação de Schrödinger. Aliás, Fock nos mostra como obter ambas as equações de Schrödinger e Heisenberg a partir da reinterpretação¹⁷⁷ dos colchetes de Poisson. (FOCK, V.A. *Princípios de*

¹⁷⁵ x é a componente no eixo dos x do operador de posição (referente, por exemplo, a um elétron) e p_x a componente em x do operador de momento.

¹⁷⁶Moyses Nussenzveig mostrou que há casos em que o termo multiplicativo $\frac{1}{4}$ precisa ser corrigido. Quanto ao conteúdo físico das relações de incerteza, nada muda. Assim, o resultado obtido por Nussenzveig não constitui uma violação física das relações de Heisenberg, mas nos diz que *o mundo físico* não precisa se adequar a relações matemáticas que não são passíveis de reformulação.

¹⁷⁷Fock obterá uma expressão equivalente para a equação de Heisenberg, mesmo que não se refira a ela como tal. Em seguida, obterá a equação de Schrödinger.

mecânica quântica, p. 71-76) A equação de Schrödinger se escreve da seguinte maneira:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

Ela nos diz que a taxa de variação temporal da função de onda ψ com relação ao tempo é obtida pela aplicação do operador de energia em ψ .

Vejamos, agora, como tudo que dissemos até aqui sobre a relação entre os conceitos da física e da matemática pode ser *condensado* de modo axiomático.

1.42 Estrutura axiomática da mecânica quântica

A mecânica quântica admite várias formulações matemáticas. Dentre as mais conhecidas, temos as formulações matemáticas de Heisenberg, Schrödinger e Feynman¹⁷⁸. Cada teoria é elaborada de acordo com um conjunto específico de postulados. Esse conjunto pode depender explicitamente da formulação adotada, e.g., no caso da teoria de Schrödinger, postula-se que a evolução de um sistema físico é dada pela evolução temporal da função de onda do sistema. Esta função deverá satisfizer determinada equação, dita equação de Schrödinger. Pelos fatos de as teorias de Schrödinger e de Heisenberg serem

¹⁷⁸Foi em sua tese de doutorado que Feynman desenvolveu uma nova formulação matemática da mecânica quântica. Mas, foi em um texto consagrado cujo título é *Quantum mechanics and path integrals* que Feynman popularizou dentre os físicos sua abordagem da mecânica quântica. (FEYNMAN, R.P. AND HIBBS, A.R. *Quantum mechanics and path integrals*) Costuma-se chamar de “formalismo integral da mecânica quântica” a formulação de Feynman, dado o uso de “integrais de trajetórias” pelo físico norte-americano. É importante dizer que a teoria de Feynman é matematicamente equivalente àquela desenvolvida por Erwin Schrödinger. A demonstração da equivalência matemática das teorias requereria muitos detalhes, mas, simplificadamente, Feynman mostra como obter o formalismo básico de sua teoria a partir da função de onda ψ em seu texto *Quantum mechanics and path integrals* (p. 57-62) e Michio Kaku (*Quantum field theory* p. 272-273) demonstra como é possível obter a equação de Schrödinger a partir da teoria de Feynman.

matematicamente equivalentes e de os axiomas que enunciaremos serem aplicáveis às duas teorias, não nos preocuparemos em dizer que estamos nos referindo a essa ou àquela teoria. Nós nos referiremos à teoria simplesmente por *mecânica quântica*.

Os axiomas da mecânica quântica devem ser entendidos como *regras* para se formular uma teoria física da estrutura atômica da matéria. Essas regras não são arbitrárias, pois, quanto ao trabalho de Heisenberg, elas foram *sugeridas*¹⁷⁹ ao físico pela experiência e linha de pesquisa adotada¹⁸⁰. Vejamos então, um conjunto plausível¹⁸¹ de axiomas (ou postulados) para a mecânica quântica.

O primeiro postulado nos diz que

“Para todo estado de um sistema físico existe uma função ψ atribuída a ele, de modo a defini-lo”¹⁸².

De acordo com o postulado¹⁸³ acima, a função de onda define o estado de um sistema físico. Vimos que a função de onda de um sistema permite que calculemos os valores médios (ou esperados) para os operadores de momento e de posição. Assim, conhecida a função de onda, toda informação que puder ser obtida a respeito do estado do sistema físico deve estar nela contida.

¹⁷⁹Existe uma *intenção* quanto à formulação de uma teoria científica. A partir de Descartes, Galileu e Kepler, a ciência seguiu os rumos da *matematização da natureza*.

¹⁸⁰Além da hipótese de que somente grandezas empiricamente medidas deveriam entrar na formulação da teoria, Heisenberg se guiou pela reinterpretação de termos presentes em equações da mecânica clássica, como vimos.

¹⁸¹Ou seja, um conjunto de axiomas (ou postulados) que permitam desenvolver a mecânica quântica. Optaremos pelo termo *postulado*.

¹⁸²(DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 1) O primeiro postulado não nos diz que existe uma relação biunívoca entre estados físicos e funções, pois um estado físico poderá ter muitas funções que o descreva.

¹⁸³Tal postulado se insere no contexto da interpretação de Copenhague da mecânica quântica. Para a finalidade de compreender a aplicabilidade da matemática, não nos parecer ser relevante discutir outras interpretações da mecânica quântica.

Denotemos por $\psi_f(x, t)$ a função de onda relacionada ao estado físico $|f\rangle$ no instante t , sendo x a variável independente (e referente ao operador de posição). De modo mais preciso, escreveremos $|f, t\rangle$ para o estado físico, caso seja necessário. Na notação de Dirac¹⁸⁴, a função ψ é definida pelo produto escalar:

$$\psi_f(x, t) = \langle x|f, t\rangle$$

O termo $\langle x|$ é o vetor bra associado ao autovetor ket $|x\rangle$ do operador de posição x .

O valor esperado do operador de posição (para $|f, t\rangle$) é denotado (na notação de Dirac¹⁸⁵) por:

$$\langle x \rangle \equiv \langle f|x|f \rangle = \int dx \langle f|x|f \rangle \langle x|f \rangle$$

É costume reescrever a expressão acima, utilizando, a equação de autovalor $x|x\rangle = x|x\rangle$:

$$\int dx \langle f|x|x|f \rangle \langle x|f \rangle = \int dx x |\langle x|f \rangle|^2$$

$$\text{Assim, } \langle x \rangle = \int dx x |\langle x|f \rangle|^2 = \int dx x |\psi_f(x, t)|^2$$

¹⁸⁴De maneira simplificada, os termos $|\alpha\rangle$ se referem a *vetores de estado* (vetores do tipo *ket*). Eles são algebricamente manipulados como vetores. Quanto aos termos $\langle\alpha|$, são ditos vetores do tipo *bra*. A cada ket, está associado um único bra, e vice-versa. Esta associação é dita correspondência dual. Em análise funcional, tal correspondência é garantida pelo lema de Riesz, desde que os espaços sejam de Hilbert. Vetores do tipo bra são termos análogos aos funcionais lineares, dado um espaço vetorial sobre um corpo. A justaposição $\langle\alpha|\beta\rangle$ denotará o produto escalar $|\alpha\rangle$ de por $|\beta\rangle$, enquanto $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ é entendida como um operador linear que projeta a componente de um vetor $|\omega\rangle$ na direção de $\langle\alpha|$. No caso, $(|\alpha\rangle\langle\alpha|)|\omega\rangle$ é a componente de $|\omega\rangle$ na direção de $|\alpha\rangle$. Todas as definições e notações acima podem ser rigorosamente justificadas, e para isso remetemos ao primeiro capítulo do texto de Sakurai. (SAKURAI, J.J. *Modern quantum mechanics*)

¹⁸⁵Utilizaremos $Id = \int dx |x\rangle\langle x|$, que é a resolução da identidade, mas para o caso contínuo, sendo a integração efetuada em toda reta real. O termo dx se refere à medida de Lebesgue. Por questões de simplicidade, não escreveremos sempre $|f, t\rangle$, mas somente quando quisermos enfatizar a dependência temporal.

Também sabemos que, para um estado descrito por $|f\rangle = \sum_n c_n |f_n\rangle$,

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

De modo análogo (ao caso discreto), foi Max Born quem sugeriu que $\int dx |\psi_f(x, t)|^2 = 1$. Ora, aqui vemos novamente surgir a *sugestão* (mais tarde, exigência) de que a função de onda deve ser do tipo *de quadrado integrável*, ou seja:

$$\int dx |\psi_f(x, t)|^2 < \infty$$

Se a função de onda $\psi_f(x, t)$ satisfizer a condição acima, poderemos redefini-la por $\Psi(x, t)$, i.e.,

$$\Psi(x, t) = \frac{\psi_f(x, t)}{\int dx |\psi_f(x, t)|^2}$$

assim:

$$\int dx |\Psi(x, t)|^2 = 1$$

Conclusões¹⁸⁶

- 1- A função de onda deve ser do tipo *de quadrado integrável* (na medida de Lebesgue);

¹⁸⁶Escrevemos em itálico o termo “conclusões”, pois são sugestões de *possíveis caminhos* a serem seguidos pelo físico para a fundamentação matemática da mecânica quântica. Outras conclusões, um pouco mais técnicas, mas relevantes para a fundamentação matemática da teoria em espaços de Hilbert, são:

3-as funções de onda devem ser limitadas em todo espaço de definição. Essa afirmação é simples, pois não fosse o caso, não seriam do tipo quadrado integrável;

4-as funções de onda devem ser contínuas, assim como suas derivadas parciais.

5-as densidades de probabilidades, e.g., $|\langle x|f\rangle|^2$, devem ser definidas para todo espaço, no caso, a reta real.

2 - A probabilidade de se encontrar uma partícula em todo o espaço deve ser igual a 1. Faz-se necessário dizer que estamos supondo que não há criação nem aniquilação de partículas e que a probabilidade se conserva, i.e., é sempre igual a 1. E quanto à conservação da probabilidade, veremos, mais adiante, um axioma que a implicará diretamente. Sigamos com outro postulado.

Nosso segundo postulado é:

“Se \mathcal{H}_1 é o espaço de Hilbert associado ao sistema físico S_1 , e \mathcal{H}_2 é o espaço de Hilbert associado ao sistema físico S_2 , outro sistema físico, o sistema composto $S_1 + S_2$ estará associado ao produto tensorial dos espaços de Hilbert, i.e., $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ”. (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 6)

Primeiramente, sabemos que sistemas físicos podem interagir uns com os outros, e.g., um átomo de hidrogênio pode colidir com outro da mesma natureza. Neste caso, temos mais de um sistema físico, e a cada sistema deveremos ter uma função de onda associada. A fim de que possamos obter uma expressão para a função de onda do sistema resultante da interação, necessitaremos de algum meio para obter tal expressão. O postulado acima nos dará esse meio. Vejamos como.

Lembremo-nos de que, anteriormente, buscamos soluções ψ_α^k para $p_k \psi_\alpha^k = b_\alpha \psi_\alpha^k$. Estas funções permitem-nos escrever:

$$\psi^k = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}^k$$

Na expressão acima, ψ^k deverá ser autofunção simultânea dos operadores de momento e de posição. Sabemos também que as funções ψ_{α}^k devem satisfazer a algumas propriedades, e.g., $\int dx |\psi_{\alpha}^k(x, t)|^2 < \infty$ e que é possível *estruturar* o espaço (vetorial sobre os complexos) de

funções ψ_α^k de quadrado integrável de modo a satisfazer (naturalmente) a todos os axiomas de um espaço de Hilbert.

No nosso exemplo referente ao elétron do átomo de hidrogênio, temos um sistema físico bastante simples. Caso quiséssemos estudar algum tipo de interação mais complexa entre dois sistemas físicos, seria necessário entender como os sistemas interagem e como é possível descrever matematicamente a interação. O axioma acima nos diz que a estrutura dada pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert referentes aos sistemas em estudo é adequada para se estruturar matematicamente o problema da interação entre dois sistemas quânticos.

Com relação às funções de onda (não-nulas) ψ_1 e ψ_2 definidas em \mathcal{H}_1 e ϕ_1 e ϕ_2 em \mathcal{H}_2 , o postulado¹⁸⁷ acima nos permite escrever para o sistema composto que sua função de onda será obtida pelo produto tensorial das funções de onda dos sistemas que interagem. A expressão $\psi_1 \otimes \phi_1$ significará que o sistema S_1 está no estado descrito por ψ_1 e, simultaneamente¹⁸⁸, S_2 se encontra no estado descrito por ϕ_1 . O mesmo é válido para $\psi_2 \otimes \phi_2$. Por *simultaneamente*, entendemos *no mesmo*

¹⁸⁷Tal postulado permite escrever algo anti-intuitivo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \otimes \phi_1 \pm \psi_2 \otimes \phi_2)$$

Claro que não é algo que observamos no nosso cotidiano, i.e., “sistema 1 no estado 1 e sistema dois no estado 1 e, simultaneamente, sistema 1 no estado 2 e sistema 2 no estado 2”. Mas não é de nosso interesse discutir a existência de tais estados ditos *entangled states*. Basta saber que são fisicamente possíveis. E é importante notar que o segundo postulado não deve ser confundido com o princípio da superposição, pois neste último caso, teremos vetores de estado em um mesmo espaço de Hilbert e que podem ser adicionados.

instante de tempo, pois estamos lidando com mecânica quântica não-relativística. Sigamos com outro postulado.

O terceiro postulado nos diz:

“A todo observável de um sistema físico está associado um operador autoadjunto (ou hermiteano) e que admite um conjunto completo de autofunções”¹⁸⁹.

Por observável¹⁹⁰, entendemos “qualquer quantidade física que possa ser medida por um procedimento empírico”. (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 7) Mostramos que operadores autoadjuntos são úteis para a fundamentação matemática da teoria quântica desenvolvida por Heisenberg. O espectro de operadores autoadjuntos é formado por números reais, o que faz com que seja possível relacionar os elementos do espectro de certo operador com medidas efetuadas em laboratório. Visto que já dissemos como os operadores entram na formulação da mecânica quântica, seguiremos como o quarto postulado.

Esse postulado nos permitirá desenvolver uma dinâmica quântica. Do fato de estados físicos *evoluírem no tempo* seguirá a necessidade de descrever matematicamente tal evolução.

¹⁸⁹(DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 7)

¹⁹⁰Dentre os observáveis, mencionamos *posição, momento, energia*. Pensemos em um exemplo ilustrativo. Seja um elétron que viaja em linha reta e que tem sua trajetória alterada devido à presença de um campo elétrico, isso ao passar por um capacitor de placas paralelas. O capacitor funciona como o *análogo físico* do operador linear que age na função de onda do elétron ao passar da região livre de campo em direção àquela com a presença de campo elétrico. Cremos que tal exemplo seja bastante esclarecedor, desde que já mostramos anteriormente o porquê de se utilizarem operadores lineares para fundamentar a teoria quântica.

“A evolução temporal de um sistema quântico é governada por uma transformação unitária” (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 7)

O postulado acima nos permitirá dizer que, se o vetor de estado $\psi(t)$ descreve o estado físico de um sistema no instante t , então o vetor de estado no instante $\psi(t + \Delta t)$ é obtido do estado inicial por uma transformação unitária $U(t + \Delta t, t)$, ou¹⁹¹:

$$\psi(t + \Delta t) = U(t + \Delta t, t)\psi(t)$$

Primeiramente, a *unitariedade* de $U(t + \Delta t, t)$ é requerida para que norma dos vetores seja preservada pela transformação¹⁹². U é unitária se a transformação adjunta U^* coincidir com sua (de U) inversa, i.e., $U^* = U^{-1}$. Ao exigir que a evolução temporal seja dada por uma transformação unitária, teremos conservação de probabilidade, i.e.,

$$\psi(t + \Delta t) = U(t + \Delta t, t)\psi(t) \rightarrow \|\psi(t + \Delta t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2$$

Lembremo-nos de que mencionamos acima, ao analisarmos o primeiro postulado da teoria, a necessidade de que a *probabilidade total seja conservada*. O postulado acima nos garantirá essa conservação.

O último postulado que enunciamos nos permite deduzir a seguinte expressão (para um operador auto-adjunto H)¹⁹³:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

¹⁹¹É importante explicar que estamos omitindo alguns detalhes matemáticos aqui. Lembremo-nos de que estamos assumindo que as formulações de Heisenberg e Schrödinger da mecânica quântica são matematicamente equivalentes. Assim não haverá problema em interpretar uma solução ψ de $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ por meio da expressão:

$$\psi(t + \Delta t) = U(t + \Delta t, t)\psi(t).$$

¹⁹²A transformação $U(t, t_0)$ deverá satisfazer a $U(t, t) = 1$ (operador identidade) e a $U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0)$.

¹⁹³(DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 17-18)

Tal expressão ainda não é a equação de Schrödinger, pois falta encontrar o operador H presente na expressão. Prova-se que H é o operador¹⁹⁴ de energia. (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics* p. 17-20) De posse desta informação, podemos dizer que a expressão acima é a conhecida equação de Schrödinger. Com os quatro axiomas até aqui enunciados, podemos desenvolver tanto a mecânica quântica no sentido de Schrödinger quanto no de Heisenberg se adicionarmos a eles um quinto postulado.

O quinto (e último) postulado nos dirá que:

“Como resultado de um processo de medidas efetuadas sobre um observável f , obter-se-ão somente os autovalores do operador Hermiteano¹⁹⁵ F associado ao observável. A probabilidade de se obter um autovalor f_k correspondendo ao espectro discreto é $|c_k|^2$, enquanto a probabilidade de se obter um autovalor f_α correspondente ao espectro contínuo em um intervalo $d\alpha$ é $|c_\alpha|^2 d\alpha$ ”.

Tal postulado generaliza o que foi dito a respeito da associação de operadores autoadjuntos a medidas feitas em laboratórios. O postulado 3 nos permite associar operadores a observáveis, e o postulado 5 nos dá o significado preciso da *relação* entre os autovalores do operador e as medidas empíricas. Façamos agora um brevíssimo *quadro resumo* do que foi dito a respeito da relação entre os termos matemáticos e sua relação com as grandezas físicas. Desde que, além dos postulados, há princípios físicos implícitos na formulação matemática da mecânica quântica, deixaremos para o apêndice 1.2 a discussão desses princípios. Também discutiremos (no apêndice 1.3) um resultado interessante e que nos

¹⁹⁴Steiner considerará espantoso o fato de H ser exatamente o operador de energia. Para ser preciso, ele escreveu: “Eu digo ‘mágico.’”. Retomaremos esta questão ao analisarmos como Steiner explica a aplicabilidade da matemática à física. (STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, p. 136)

¹⁹⁵Estamos utilizando *hermiteano* como sinônimo de autoadjunto.

remete à idéia de *preservar estruturas matemáticas a fim de desenvolver teorias físicas*. É o caso do teorema de Ehrenfest.

Matemática	Física
Operador linear ¹⁹⁶ L	Observável=Grandeza física l
Autovalores λ de L	Valores esperados da grandeza física
Autovetores de L	Auto-estados, ou simplesmente estados possíveis (ou próprios) do sistema físico
Comutatividade de dois operadores L, F	Observação simultânea das grandezas físicas l, f associadas (respectivamente) aos operadores
Quadrado do módulo de ψ	Densidade de probabilidade
Normalização $\int dx \Psi(x, t) ^2 = 1$	A soma das probabilidades deve ser igual a 1
Ortogonalidade de funções, $\int \psi \varphi^* dx = 0$	Incompatibilidade dos estados denotados por ψ e φ
Sistema completo de autofunções $\psi(x, \lambda)$	Os valores λ são os únicos possíveis
Integral $\int \varphi^* L \psi dx$	Valor esperado de uma grandeza física (λ) no estado φ

¹⁹⁶Lembremo-nos de que a relação não é biunívoca. Ver (MEHRA, J. *The quantum principle* p. 12)

Capítulo 2º

2.1 A aplicabilidade da matemática de acordo com Mark Steiner

Neste capítulo, analisaremos os argumentos de Steiner a respeito da aplicabilidade da matemática à descrição de fenômenos físicos (com ênfase na aplicabilidade da matemática à mecânica quântica¹⁹⁷). Optamos por analisar o trabalho de Steiner pelo fato de ele ter mostrado a importância filosófica da questão da aplicabilidade da matemática, isso ao elaborar uma resposta para o porquê de a matemática ser útil à descrição de fenômenos da física, como veremos. Coube também a Steiner trazer¹⁹⁸ à discussão acadêmica algumas das idéias de E. Wigner, cuja elaboração se deu em um famoso artigo¹⁹⁹, “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”. Grande parte dos argumentos de Steiner se encontra em seu livro *The Applicability of mathematics as a philosophical problem*. Vejamos quais objetivos Steiner tinha em mente ao escrever esse livro.

2.11 Objetivos de Steiner

Na seção introdutória de seu texto, Steiner nos diz que dividirá o livro *The applicability of mathematics as a philosophical problem* em duas partes. O objetivo da primeira parte é examinar, em seus aspectos mais gerais, a aplicabilidade da matemática às ciências naturais, ou seja: “O

¹⁹⁷ Por mecânica quântica, em cada análise dos argumentos de Steiner, deixaremos claro de que teoria estaremos falando, i.e, se aquela elaborada por Schrödinger, por Heisenberg ou por Dirac. Sabemos que as teorias de Schrödinger e Heisenberg são matematicamente equivalentes. Vimos que a teoria de Dirac foi elaborada visando estender a de Heisenberg. Sem perda de generalidade, assumimos que a teoria não-relativística de Dirac é equivalente à teoria de Heisenberg.

¹⁹⁸ Talvez Steiner não tenha sido o primeiro a levantar o problema da aplicabilidade no contexto do trabalho de Wigner, mas foi - aparentemente-, quem o fez primeiramente com muita competência.

¹⁹⁹ WIGNER, E. (1960).

primeiro²⁰⁰ é examinar os modos pelos quais a matemática é dita ser aplicável às ciências naturais ou, se você preferir, ao mundo empírico”. (STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, p. 1)

O segundo objetivo de Steiner é *explorar* as possíveis implicações (para nossa visão de mundo) que a *aplicabilidade*²⁰¹ da matemática pode ter, i.e., “explorar as suas²⁰² implicações para nossa visão de universo”. (STEINER, *op. cit.*, p. 2) Analisemos, então, cada objetivo de Steiner.

2.111 Primeiro objetivo de Steiner

Dividiremos em duas partes a análise do primeiro objetivo de Steiner: na primeira parte, nos deteremos na análise da aplicabilidade semântica da matemática; na segunda, discutiremos a aplicabilidade descritiva da matemática.

2.1111 Primeira parte: análise da aplicabilidade semântica da matemática.

Começemos com uma pergunta: o que é aplicar a matemática às ciências empíricas? Em seus aspectos mais gerais, a aplicação da matemática se caracteriza pela utilização de algum tipo de raciocínio²⁰³ que requeira conceitos da matemática²⁰⁴. Estes conceitos são úteis à

²⁰⁰Steiner indicará dois modos de aplicar a matemática à realidade empírica. Ele se referirá a um modo como “aplicabilidade semântica da matemática” e ao outro como “aplicabilidade descritiva da matemática”. O primeiro modo se referirá à aplicabilidade da aritmética e o segundo, ao uso de ramos mais elaborados da matemática pura, como a análise funcional subjacente à mecânica quântica de Dirac.

²⁰¹Ou melhor, entender que implicações para nossa visão podem seguir de “o fato de conceitos matemáticos serem úteis à descrição de fenômenos da física”.

²⁰²Da aplicabilidade da matemática.

²⁰³Veremos que, no caso da mecânica quântica, os raciocínios envolvem necessariamente o uso de símbolos matemáticos. Poderíamos estar utilizando algum tipo de raciocínio matemático em uma discussão *puramente verbal*. Veremos que raciocínios dedutivos não são suficientes para compreendermos a aplicabilidade da matemática.

²⁰⁴Não é de nosso interesse caracterizar o que é “matemática” ou “matemática pura/aplicada”. Christopher Pincock, em seu artigo “Towards a philosophy of applied

descrição de fenômenos de nossa experiência empírica e à elaboração de inferências²⁰⁵ (a partir de certas hipóteses). Chamaremos de *dedutivo* o tipo de raciocínio matemático utilizado na elaboração de inferências, e de *descritivo* aquele relacionado à descrição (de fenômenos físicos, por exemplo). Antes de analisarmos o que Steiner nos tem a dizer, nós nos deteremos em alguns aspectos básicos referentes a deduções e descrições.

Quanto à dedução²⁰⁶, Bertrand Russell nos diz que é:

...um processo²⁰⁷ pelo qual passamos do conhecimento de certa proposição, a premissa, para o conhecimento de outra proposição, a conclusão. Mas não devemos considerar tal processo uma dedução *lógica*, isto é, a menos que haja uma relação entre premissa e conclusão e que tenhamos o direito de acreditar na conclusão se soubermos ser a premissa verdadeira. (RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*, p. 140)

E quanto à palavra *descrição*, Steiner a utilizará em vários contextos distintos; dentre eles, para descrever a forma espacial de uma folha, i.e., “Benoit Mandelbrot argumenta que a natureza é melhor descrita por curvas infinitamente descontínuas, não suaves por partes”. (STEINER, M., *op. cit.*, p. 31)

mathematics”, deter-se-á na caracterização da matemática aplicada. (Em BUENO, O. e LINNEBO, Ø. *New waves in philosophy of mathematics* p. 173-194)

²⁰⁵Inferências relacionadas a fatos do nosso cotidiano, como veremos em seguida.

²⁰⁶Steiner refere-se à *dedução* exatamente no sentido acima tanto no contexto da ciência empírica quanto em matemática: “usar (...) premissas para elaborar conclusões”. (STEINER, *op. cit.*, p. 16)

²⁰⁷Para nossos propósitos podemos nos restringir à seguinte definição de dedução: uma dedução (formal) de φ a partir de um conjunto finito de hipóteses Δ é uma sequência de fórmulas $\omega_1, \dots, \omega_n$ tais que $\omega_n = \varphi$, sendo que para cada índice $i \leq n$, devemos ter que: ou ω_i pertence a $\Delta \cup \tau$, sendo τ um conjunto infinito de axiomas lógicos; ou, para j e k menores que i , ω_i é obtido por *modus ponens* de ω_j e ω_k . Notemos que há outros tipos de regras de inferências e que não é necessário restringir a definição de dedução a conjuntos finitos de hipóteses. Também é importante notar que não é de nosso interesse analisar a *lógica indutiva*, na qual as premissas não implicam dedutivamente as conclusões.

Faltou mencionar que todos os conjuntos de índices são subconjuntos dos números naturais e que $\varphi, \omega_i (i = 1, \dots, n)$ são sentenças bem formadas em uma determinada linguagem lógica. Ver (ENDERTON, H.B. *A mathematical Introduction to mathematical logic*, p. 103).

Pensemos na descrição da forma espacial de uma folha por *curvas suaves*²⁰⁸. Neste sentido, *descrever* se refere ao processo pelo qual uma determinada função real (que admita uma expansão em série de Taylor de ordem arbitrária) descreve uma curva no plano que representa determinadas propriedades da folha. E nos perguntamos, que propriedades? A *forma espacial* da folha, por exemplo, que é uma *propriedade abstraída*²⁰⁹ do objeto.

Primeiramente, o raciocínio empregado na descrição da forma espacial da folha por uma curva matemática não²¹⁰ é simplesmente dedutivo. O que se tem é um *processo de abstração*. Abstrair significa “considerar isoladamente um ou mais elementos de um todo; separar, apartar”. (*Novo Dicionário Aurélio*, p. 13 1ª edição) Separam-se as propriedades consideradas relevantes à *descrição* da folha (no caso, à descrição de sua forma). Utilizam-se conceitos matemáticos, por exemplo, de uma curva que pode ser descrita por uma função infinitamente diferenciável. Em seguida, supõe-se que a curva *modele* a folha. Quanto a esta última operação, nós a chamaremos de *idealização*. Em suma, na operação de idealização, desprezamos as diferenças entre o objeto da nossa percepção empírica e sua descrição. Uma descrição (via conceitos matemáticos) envolve uma operação de abstração e outra de idealização. E os *aspectos descritivos* são exatamente aqueles que se referem à abstração e à idealização. Quanto à abstração, há dois tipos,

²⁰⁸Pensemos, sem perda de generalidade, em curvas descritas por funções reais infinitamente diferenciáveis. Não é de nosso interesse contrapor a descrição da forma espacial de uma folha por funções contínuas àquela descrição por funções descontínuas sugerida por Mandelbrot. O que nos interessa aqui é saber que é possível descrever matematicamente a forma de uma determinada folha.

²⁰⁹Ou simplesmente separada, analisada separadamente.

²¹⁰É necessário dizer que não estamos afirmando que raciocínios descritivos não envolvam algum tipo de raciocínio dedutivo. O que queremos dizer é que há raciocínios que não podem ser caracterizados por *puramente dedutivos*. Acreditamos que, mesmo em um raciocínio aparentemente descritivo, haja necessariamente algum tipo de dedução envolvida em sua elaboração.

aos quais nos referiremos por²¹¹ *abstração matemática* e por *abstração comum*. Vejamos o que os distingue.

Ao olharmos para uma flor cujas pétalas são vermelhas, podemos *imaginar* a flor isoladamente sob o aspecto *cor*. Se tivermos outra flor, podemos querer saber se as duas flores apresentam a mesma cor, ou seja, se são *idênticas* com relação ao *aspecto cor*. Neste caso, a *comparação veio após o ato de separação*. Quando o processo de abstração se dá desta maneira, dizemos que a abstração é *comum*. Já na abstração matemática, o processo se dá na *ordem inversa*, ou seja, “igualdade é primária”, e os “aspectos referentes à ocorrência ou não de igualdade, são derivados posteriormente da relação de igualdade” (WEYL, H. *Philosophy of mathematics and natural sciences*, p. 11). Quanto à abstração (matemática), Weyl nos diz, ao citar Leibniz: “Ela (a mente)²¹² procura uma identidade, algo com o qual o mesmo se daria e imagina em um estado fora do contexto original”. (WEYL, H., *op. cit.*, p. 11) Para nós, a abstração é uma operação mental pela qual determinado aspecto físico de um objeto (ou fenômeno físico) é separado para que possa ser analisado isoladamente. Cremos que a diferença entre os tipos de abstração esteja clara e, em geral, nos referiremos aos processos de abstração simplesmente pelo termo *abstração*.

Quanto à idealização, pensemos novamente no caso da descrição da forma espacial da folha por uma curva contínua. Sabemos que folhas são objetos da nossa realidade empírica e que são constituídas de átomos de carbono, hidrogênio e oxigênio, dentre outros. Se pensarmos na borda da folha, é sabido que há uma quantidade finita de átomos presentes em sua constituição, pois a quantidade de partículas no nosso universo observável é finita. Já a curva descrita pela função real (contínua) é

²¹¹Ora, é verdade que não há consenso sobre o que é uma *teoria geral da abstração*. Para nossos propósitos, nossa caracterização (sugerida por Weyl) será suficiente.

²¹²Observação minha.

constituída de uma quantidade infinita de pontos. E a operação de idealização se dá no sentido de supormos que a curva descrita pela função descreva a borda da folha. De modo geral, ao descrevermos um objeto (ou um fenômeno físico), a idealização é exatamente a operação mental pela qual desconsideramos as diferenças entre o objeto da nossa experiência empírica e aquele que é descrito matematicamente. Sigamos, então, com o primeiro objetivo de Steiner, que é compreender a aplicabilidade da aritmética, com cuja análise ele visa solucionar um problema dito *semântico*, o qual veremos em seguida.

2.11111 O problema semântico

A *aplicabilidade semântica da matemática* está relacionada ao uso de sentenças da aritmética na elaboração de inferências a respeito de fatos da nossa experiência empírica²¹³. O termo *semântico* se referirá a um *problema* (dito *semântico*), o qual será introduzido a partir do exemplo abaixo.

Suponhamos haver somente cinco maçãs e sete peras em uma mesa, e que maçãs e peras sejam objetos distintos. Agora, façamos o seguinte raciocínio: desde que “ $5 + 7 = 12$ ”, podemos dizer que “há doze objetos na mesa” é uma sentença verdadeira. Quanto a este raciocínio, Steiner nos diz:

Mas um problema semântico *surge!* Na afirmação ‘ $7 + 5 = 12$ ’ da *matemática pura*, o numeral 7 é utilizado para nomear um objeto matemático, o número 7; mas em ‘sete maçãs estavam sobre a mesa’ o termo ‘sete’ parece ser um predicado que caracteriza as maçãs. Esse equívoco destrói a validade do argumento(...) (*idem, ibidem*)

²¹³Estamos nos referindo ao uso de sentenças da aritmética em expressões que Steiner chama de “mixed context”, as quais são sentenças que envolvem “ao mesmo tempo um vocabulário não-matemático e um vocabulário matemático”, e.g., “existem 12 frutas sobre uma mesa”. (STEINER, *op. cit.*, p. 16)

O “equivoco” a que Steiner se refere é o que chamamos de *problema semântico*, um problema de referência. Em princípio, o termo numérico 7 e “sete” parecem não se referir aos *mesmos objetos*²¹⁴. Por mera formalidade, diremos que “sete” é o *correlato*²¹⁵ (na linguagem natural) do termo numérico 7.

Dada uma sentença mista²¹⁶, definimos²¹⁷ o *problema semântico* como aquele em que um termo numérico e seu correlato não se referem aos mesmos objetos. Também definimos *aplicabilidade semântica da matemática*²¹⁸ como aquela que visa explicar o uso de sentenças da aritmética (dos números naturais) na elaboração²¹⁹ de inferências²²⁰ em raciocínios do nosso cotidiano. Vejamos a solução de Steiner²²¹ para o problema semântico.

No nosso exemplo, vimos que *cinco* era o *número de maçãs sobre a mesa*. Neste caso, estamos fazendo o *uso adjetivo*²²² do numeral cinco. Já

²¹⁴Vejamos outro caso. O mesmo ocorre no seguinte exemplo, que tiramos de Russell. (RUSSELL, B. *The principles of mathematics* p. 44-45) Se escrevermos “esse é o um” e “1 é um número”, temos que, no primeiro caso, *um* está tendo a função de adjetivar (predicar) esse. No segundo caso, 1 está em uma relação de predicação.

²¹⁵Para o termo numérico *n*, definimos de modo *análogo* o correlato de *n*.

²¹⁶Sentenças do tipo *Mixed context*, i.e., sentenças formuladas em uma linguagem natural, mas que contêm termos numéricos. É claro que, no contexto do nosso trabalho, estamos pensando necessariamente em uma sentença que contenha um termo numérico e seu correlato.

²¹⁷Steiner nota, corretamente, que “o problema é encontrar uma interpretação constante para todos os contextos – mistos e puros – nos quais o vocabulário numérico ocorre”. Por contexto *puro*, ele se refere ao contexto da linguagem matemática. (Para o contexto *misto*, ver a nota de rodapé anterior STEINER, *op. cit.*, p. 16)

²¹⁸Na aplicabilidade semântica, os termos aritméticos estão sempre interpretados, e.g., 5 e 7 (“cinco maçãs” e “sete peras”). Quando os termos não estão interpretados, chamamos a aplicabilidade de *formal*. Está totalmente fora de nossos propósitos analisar o que é uma interpretação para uma linguagem. Apenas deixaremos referências, se necessário.

²¹⁹Tendo em vista solucionar o problema semântico.

²²⁰Utilizamos a expressão elaboração de inferências, pois, dos aspectos dedutivo e descritivo, somente o primeiro é tocado pela aplicabilidade semântica.

²²¹Steiner nos diz que “Frege apontou esse problema semântico e o resolveu”. (STEINER, *op. cit.*, p. 17) Assim, a solução que exporemos se deveu a Frege.

²²²*Uso adjetivo*, pois *cinco* é utilizado *como que* estivesse *adjetivando* o conceito *maçãs sobre a mesa*.

em “ $5 + 7 = 12$ ”, nós nos referimos ao *objeto matemático*, o número 5, daí seu *uso substantivo*²²³. Veremos que a solução de Steiner se baseará na redução do uso adjetivo ao uso substantivo dos termos numéricos. Quanto a isto, da Silva nos diz (ao se referir a Frege e tomando o conceito²²⁴ “maçãs sobre uma mesa”):

...para ele, números são atributos de conceitos. Se dissermos que há cinco maçãs sobre uma mesa, estamos dizendo que cinco é o número de maçãs sobre a mesa. Na primeira formulação, temos uma formulação *adjetiva*, já na segunda, uma do tipo *substantiva*²²⁵. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 128)

A solução de Steiner, visando à redução do uso adjetivo ao uso substantivo, partirá da *definição de número natural*²²⁶ devida a Frege (para *número de um conceito*). Vejamo-la, então.

Tomemos um conceito arbitrário *C*. Assumamos que “A todo conceito corresponde a totalidade de objetos aos quais ele se aplica, sua extensão”. (DA SILVA, *op. cit.*, p. 132) Definamos, então, o “número de *C* como a extensão do conceito, ou ‘o conceito cuja extensão está em correspondência biunívoca com a extensão de *C*’”. Esta é a *definição de*

²²³ *Uso substantivo*, pois cinco se refere a um objeto matemático, i.e., o número cinco.

²²⁴ Para nós, *conceito* é o que certas coleções têm em comum. Tomemos o exemplo *homens*. *Humanidade* é algo comum a todos os homens, no caso, um conceito.

²²⁵ Pois o termo *cinco* funciona como adjetivo na primeira, e obviamente, como substantivo na segunda.

²²⁶ Em seu *Introdução à filosofia matemática*, Russell nos diz: “Número é o que é característico de números, como homem é o que é característico de homens (...) um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número”. (RUSSELL, *op. cit.*, p. 18-24) Russell definirá número via classes ou coleções, i.e., “o número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela”, sendo “similar” sinônimo de “equinúmero”. Vejamos um exemplo. Seja um país em que somente são permitidas uniões monogâmicas do tipo heterossexual. Nesse país, a cada marido corresponde uma única esposa (e vice-versa). Marido e esposa formam uma coleção constituída de dois elementos. E o número dois é algo comum a todos os casais nesse país, caracterizando certas coleções, isto é, todas aquelas que têm aquela quantidade de elementos. Veremos que Frege define o número de um conceito.

número²²⁷ de acordo com Frege. Mostremos, então, como é possível resolver²²⁸ o problema semântico por meio da definição de número dada por Frege.

Escrevamos “o número de *Fs* é *m*”, sendo que *F* significa *frutas sobre a mesa* (“é” significa “igualdade”). Escrevamos a afirmação “o número de *Fs* é *m*” do seguinte modo:

$$NxFx = m$$

É importante notar que estamos interpretando atribuições numéricas como predicções, ou seja, “a quantidade de objetos *x* que cai sobre o predicado *F* é *m*”. É importante notar que a atribuição numérica não é um objeto físico e que a predicção é de segunda ordem, sendo *m* parte da predicção. Temos que *m* é um numeral, cujos referentes são *números*. Assim, aos moldes fregeanos (e com uma notação adequada), podemos escrever a dedução *da*

$$\forall A \forall P (NxAx = m \wedge NxPx = n \wedge \exists x (Ax \wedge Px) \rightarrow Nx(Ax \vee Px) = n + m)$$

para “*A*” significando “maçãs sobre a mesa” e “*P*”, “peras sobre a mesa”²²⁹. De posse de *da*, Steiner se vê no direito de reivindicar uma solução para o problema semântico. Com base em sua suposta solução (feita a “redução” do uso adjetivo das asserções numéricas ao uso substantivo), o *problema de referência* parece²³⁰ estar resolvido.

²²⁷Frege nos diz o seguinte quanto à definição de número: “Defino pois: o número que convém ao conceito *F* é a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito *F*’”. (FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*, p. 257-258)

²²⁸“Frege apontou esse problema semântico e o resolveu”. (STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, p. 17)

²²⁹Obviamente, precisamos usar *modus ponens* para inferir que há *n + m* objetos sobre a mesa. E isso encerra esta parte que se refere especificamente ao problema semântico.

²³⁰Pincock não concorda com Steiner. Ele nos diz que, para que a solução para o problema semântico seja aceitável, Steiner (ou Frege) deveria ter mostrado que é sempre possível reduzir o uso adjetivo ao uso substantivo. E nos diz que “Infelizmente, Steiner não

Teçamos alguns comentários sobre o trabalho de Frege e a solução a que Steiner se refere.

Sabemos que conceitos²³¹ caracterizam objetos da nossa realidade empírica²³², e a totalidade de objetos aos quais se aplicam os conceitos é dita *a extensão do conceito*, i.e., seu número. Também sabemos que *objetos matemáticos*²³³ não participam de nossas experiências empíricas. E nos perguntamos, então: como objetos matemáticos podem ser úteis à nossa compreensão²³⁴ da realidade empírica? Steiner afirma que é por meio do uso de conceitos e nos diz:

As leis numéricas (...) não são realmente aplicáveis às coisas externas; elas não são leis da natureza. Elas são, entretanto, aplicáveis a proposições a respeito das coisas no mundo externo: elas são leis das leis da natureza. (STEINER, *op. cit.*, p. 22)

Quanto à citação acima, ela se refere à aplicabilidade semântica, mas, de acordo com Steiner, não deixa de ser válida para explicar o uso de conceitos matemáticos arbitrários. Ele nos perguntará: “como entidades abstratas podem se referir ao mundo da física?” A resposta de Frege²³⁵ foi: elas não se referem. Elas se referem às leis do mundo, não

nos deu nenhuma razão para preferir sua estratégia fregeana a uma estratégia adjetiva”. (PINCOCK, C. *Mathematics and scientific representation*, p. 287)

²³¹Russell analisa com rigor a diferença entre termos que se referem a *objetos* e termos que se referem a *conceitos* em seu *Principles of mathematics*. É importante mencionar que dentre os *conceitos* encontram-se os *predicados* (RUSSELL, B. *The principles of mathematics*, p. 44)

²³²Estamos nos restringindo a conceitos que caracterizam objetos da nossa percepção empírica. Evidentemente números naturais não pertencem à nossa realidade empírica, embora possam ser vistos também como conceitos.

²³³Frege acreditava que números eram objetos; no caso, *objetos lógicos*. Steiner nos diz com relação ao trabalho de Frege: “A interpretação – válida – de Frege da aritmética demanda a existência de objetos (números, conjuntos)”. (STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, p. 19) Ainda com relação ao trabalho de Frege, da Silva nos diz: “Mostrar que o uso adjetivo de termos numéricos pode ser reduzido ao seu uso substantivo – mas não vice-versa – desempenha um papel fundamental no argumento de Frege de que números são objetos (...)”. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 129)

²³⁴Mesmo que ainda não tenhamos analisado o uso de conceitos matemáticos para descrever aspectos da realidade, sabemos da utilidade daqueles conceitos.

²³⁵Em seu *Os fundamentos da aritmética*, Frege nos diz que “as leis numéricas não são propriamente aplicáveis às coisas exteriores: não são leis da natureza. São porém

ao mundo”. (SEINER, *op. cit.*, p. 47) Ora, se os conceitos funcionam como um meio intermediário entre os objetos da nossa experiência e os objetos da matemática, que outros problemas restariam não solucionados com relação à aplicabilidade da matemática? De acordo com Steiner, Frege resolveu todos os problemas referentes à aplicação da matemática? Ele nos diz que “Não. Frege deixou problemas (...) esses serão os meus problemas”. (STEINER, *op. cit.*, p. 25)

Vimos até agora que, de acordo com Steiner, Frege resolveu o problema da aplicabilidade semântica da matemática. Quanto à possibilidade de objetos abstratos serem úteis para a compreensão de fenômenos de nossa realidade, Steiner nos diz que Frege resolveu esse problema também, mesmo que não tenha sido enfático em sua solução. “Frege os²³⁶ solucionou. Entretanto, Frege nunca deu ênfase a sua solução”. (STEINER, *op. cit.*, p. 19) Precisamente, que problemas Frege não resolveu? Steiner nos diz que:

Frege lida com a aplicabilidade *semântica* de *teoremas* matemáticos; eu me deterei na aplicabilidade *descritiva* – a adequação de *conceitos* matemáticos (específicos) na descrição e *previsão correta* dos fenômenos físicos. (STEINER, *op. cit.*, p. 25)

Antes de seguirmos com a aplicabilidade descritiva da matemática, vejamos o que Pincock nos tem a dizer a respeito da solução proposta por Steiner.

Vimos que, via determinada definição de número natural, a solução de Frege visava reduzir o uso adjetivo de termos numéricos (em sentenças mistas) ao uso substantivo. Pincock²³⁷ nota que, para que a solução de Frege seja plausível, é necessário que a redução do uso

aplicáveis a juízos que valem para coisas do mundo exterior: são leis das leis da natureza”. (FREGE, G. *Fundamentos da aritmética*, p. 270)

²³⁶Steiner se refere a eles como “problemas metafísicos”. (Steiner, *op. cit.*, p. 19)

²³⁷Pincock também nos diz que “Steiner não deu nenhuma razão para preferirmos sua estratégia fregeana a uma estratégia adjetiva. Até que ele faça isso, eu insistiria que o problema semântico permanece sem solução”. (PINCOCK, *op. cit.*, p. 287)

adjetivo ao substantivo seja sempre factível. Mas “nem Frege nem Steiner provêm evidências para esse tipo de conclusão”. (PINCOCK, C. *Mathematics and scientific representation*, p. 287) Independentemente de o problema semântico estar resolvido (ou não), a questão da aplicabilidade da matemática não se reduz à análise do modo pelo qual são construídas linguagens, pois a aritmética dos números naturais é apenas uma *pequena parte* da matemática. Steiner sabia das limitações da solução de Frege, tanto que ele se propôs a tarefa de resolver aquilo que Frege não solucionou. Para isso, Steiner indicou duas maneiras de aplicar a matemática, ditas *aplicabilidade semântica* e *aplicabilidade descritiva*. Vejamos agora a última delas.

2.1112 Segunda parte: análise da aplicabilidade descritiva²³⁸ da matemática.

Vimos que, quanto à aplicabilidade da matemática, há dois tipos de aspectos com os quais devemos nos preocupar: dedutivos e descritivos. À aplicabilidade semântica coube a análise dos aspectos dedutivos. Vejamos, então, como os aspectos descritivos se diferenciam dos dedutivos, e também a caracterização da aplicabilidade descritiva de acordo com Steiner.

²³⁸Primeiramente, Steiner nos diz que a diferença entre aplicabilidade semântica e descritiva é que a primeira lida com os aspectos gerais da aplicabilidade e a segunda, com os específicos. Nossa análise do trabalho de Steiner nos leva a crer que a diferença entre os modos de aplicar a matemática esteja na caracterização via aspectos descritivos e dedutivos, i.e., “enquanto, para Frege, aplicar significa “deduzir por meios de”, para mim, significará “descrever por meios de”. Outro motivo que parece ter levado Steiner a analisar a aplicabilidade como semântica e descritiva nos parece ser a solução do *problema metafísico da aplicabilidade*, i.e., aquele que lida com a questão de entender como entidades abstratas podem se relacionar ao mundo da física. Vimos que, para Steiner, esse problema foi resolvido por Frege, isto é: “ A resposta de Frege foi: eles não se relacionam. Eles estão relacionados às leis do mundo, não ao mundo”. (STEINER, *op. cit.*, p. 47)

No caso do uso de sentenças da aritmética na elaboração de inferências²³⁹, vimos que havia um problema semântico envolvido. A solução para aquele problema dependeu exclusivamente da definição de número de Frege. Com o intuito de compreender outros aspectos da aplicabilidade da matemática, Steiner nos dirá qual é a diferença entre a aplicabilidade semântica e descritiva. Ele afirmará que “Enquanto para Frege, aplicar significava ‘deduzir por meios de’, para mim, significará ‘descrever por meios de’”. (STEINER, *op. cit.*, p. 2)²⁴⁰ De acordo com Steiner, podemos dizer que a aplicabilidade semântica é caracterizada exclusivamente por aspectos dedutivos, enquanto a aplicabilidade descritiva será caracterizada por outros aspectos (veremos, muito em breve, que o exemplo da quantização canônica, de acordo com a narrativa de Steiner, envolve aspectos que não são dedutivos). A *aplicabilidade descritiva*²⁴¹ da matemática visa explicar o porquê de conceitos matemáticos²⁴² específicos serem úteis na descrição e previsão de fenômenos²⁴³ físicos da nossa experiência empírica (Steiner, no segundo capítulo de seu livro, mencionará²⁴⁴ muitos exemplos de conceitos matemáticos úteis em física). Desde que saibamos que conceitos matemáticos são úteis, precisamos entender o porquê de serem úteis.

²³⁹Inferências a respeito de fatos do nosso cotidiano. Conforme vimos no nosso exemplo a respeito de frutas sobre uma mesa.

²⁴⁰A citação de Steiner não significa que, quanto à descrição e previsão de fenômenos em física, os aspectos dedutivos. Definimos os aspectos dedutivos e descritivos logo no começo da discussão da análise semântica.

²⁴¹Mark Steiner não define o que é *descrever*. Assim, demos uma definição para *descrição* em uma nota na seção referente à aplicabilidade semântica. Claro que nossa definição é geral o suficiente para se aplicar aos exemplos que Steiner menciona em seu texto.

²⁴²Steiner se refere somente a conceitos específicos.

²⁴³Além de fenômenos da mecânica quântica não-relativística de Dirac e Heisenberg, analisaremos a criação da equação relativística para o elétron.

²⁴⁴Nosso intuito é entender o que ele entende por aplicabilidade descritiva, e não analisar seus exemplos.

Steiner não elabora²⁴⁵ uma *teoria geral* que explique o porquê de conceitos específicos serem úteis à descrição e previsão de fenômenos em ciências empíricas. O que ele nos pergunta é “Por que os conceitos específicos e até mesmo formalismos matemáticos são úteis na descrição da realidade empírica?” Sua resposta é que o problema “deve ser resolvido conceito por conceito²⁴⁶”. (STEINER, *op. cit.*, p. 47) Se o problema deve ser resolvido conceito por conceito, parece-nos que Steiner acredita que para todo conceito matemático aplicável a uma teoria científica deva existir uma maneira de dizer, em termos não-matemáticos, o que o conceito matemático significa. Steiner se coloca a seguinte questão:

“podemos dizer – em termos não matemáticos – o que o mundo deve ser de modo que as deduções válidas da aritmética possam ser efetivas para se fazer previsões?”. (STEINER, *op. cit.*, p. 24)

Mark Steiner não restringirá, obviamente, sua discussão a conceitos aritméticos. Desde que a aplicabilidade da aritmética foi discutida anteriormente (ao analisarmos a aplicabilidade semântica), agora nós nos deteremos em conceitos mais específicos (que aqueles aritméticos, e.g., adição e multiplicação). Vejamos o exemplo da *linearidade*. Steiner nos diz que

A linearidade é aplicável à medida que, e apenas na medida em que, o princípio da superposição seja válido, e na medida em que a natureza opere de maneira suave, ou – pelo menos – suave por partes. (STEINER, *op. cit.*, p. 32)

²⁴⁵Se aceitarmos que conceitos funcionam como liame entre os objetos abstratos e objetos da nossa experiência empírica e que todo conceito matemático pode ser formulado em uma linguagem não-matemática, é possível argumentar que Steiner tem uma teoria geral da aplicabilidade de conceitos matemáticos. Mas o fato de termos que analisar *conceito por conceito* o porquê de se poder aplicar a matemática é que nos leva a dizer que Steiner não tem uma teoria geral da aplicabilidade.

²⁴⁶“piecemeal for each concept” é a expressão que Steiner usa e que significa, literalmente, “de modo fragmentado pra cada conceito” Preferimos “conceito por conceito”, pois ele se refere à análise de cada conceito separadamente. (STEINER, *op. cit.*, p. 47)

O princípio da superposição a que o filósofo Mark Steiner se refere²⁴⁷ nos diz que “causas ligadas operam como se estivessem separadas”. (STEINER, *op. cit.*, p. 30) Tomemos um exemplo para esclarecer o uso do conceito de linearidade em física newtoniana. Seja o movimento de um projétil em duas dimensões. Podemos²⁴⁸ separar o movimento do projétil em suas componentes vertical e horizontal. No primeiro caso, para um corpo lançado a partir do solo, sendo θ o ângulo de lançamento (formado com o horizonte), podemos escrever para a parte²⁴⁹ vertical $y(t)$ do movimento do corpo:

$$y(t) = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Para o movimento horizontal²⁵⁰, teremos que:

$$x(t) = v_{0x}t$$

Neste caso, a velocidade do projétil é dada por:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

Esta expressão é a maneira matemática de expressar que os movimentos horizontal e vertical podem ser analisados separadamente (e independentemente²⁵¹). Neste caso específico, o princípio recebe o nome de *princípio de Galileu*. Tal princípio é de natureza física e se refere à decomposição do movimento. Há inúmeros exemplos da utilização do

²⁴⁷“joint causes operate each though the others were not present”.

²⁴⁸O que permite analisar separadamente o movimento em suas componentes é o princípio da superposição. Claro que, ao separarmos o movimento em horizontal e vertical, estamos aceitando tal princípio.

²⁴⁹ g, v_{0y}, t se referem, respectivamente, à aceleração da gravidade, componente vertical da velocidade de lançamento e parâmetro tempo.

²⁵⁰ v_{0x} é a componente horizontal da velocidade de lançamento.

²⁵¹Poderia ser o caso de haver algum fator de interferência, e, mesmo que o fenômeno pudesse ser analisado de acordo com suas partes, estas poderiam ser dependentes umas das outras. É o que ocorre em fenômenos quânticos, e.g., o que deu origem ao conhecido paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (E.P.R) (BOHM, D. *Quantum theory*, p. 611-619)

princípio da superposição na descrição de fenômenos físicos por conceitos matemáticos. Poderíamos²⁵² mencionar a utilização de equações diferenciais para descrever uma vasta quantidade de fenômenos. Mas o que é importante para nossa discussão é saber se é verdade que, para todo conceito matemático aplicável a uma teoria física, tal conceito admite um *análogo físico*, i.e., se ele pode ser enunciado em uma linguagem não-matemática. No caso da linearidade, tínhamos o princípio de Galileu como análogo físico do princípio matemático de linearidade. Mostraremos que não é verdade que todo conceito matemático aplicável admita um conceito (análogo) físico, mas vejamos com um pouco mais de precisão como se dá a aplicabilidade descritiva da matemática. No caso da aplicabilidade descritiva da matemática, ela se dá por uma *identificação* entre *estruturas*²⁵³. Vejamos em que sentido se dá tal identificação.

Dissemos que, ao descrever determinado fenômeno físico, o cientista separa aquelas propriedades que são tidas como relevantes à descrição do fenômeno em questão. Mostramos que via abstração e idealização é que se dá o processo de descrição. A matemática se aplica precisamente à realidade²⁵⁴ abstraída e idealizada pelos cientistas. Mais precisamente, identificam-se estruturas matemáticas à estrutura daquela realidade. Retomemos o exemplo da utilização do conceito de linearidade para ilustrarmos como se dá a aplicabilidade descritiva da matemática. Para descrever o movimento de projéteis em duas

²⁵²Não faltam exemplos em que equações diferenciais lineares são utilizadas. A equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial de segunda ordem e linear com relação às componentes espaciais.

²⁵³Resumidamente, seja um sistema estruturado de objetos S dado por um conjunto de objetos, os quais satisfazem determinadas relações, i.e., $S = \langle \text{objetos}, \text{relações} \rangle$. A estrutura de S ($EST.S$) é a coleção de todos sistemas de objetos isomorfos. Pode-se dizer que uma estrutura é o *aspecto comum* de sistemas (abstratos) estruturados de objetos. E a matemática não se aplica à realidade, mas à estrutura da realidade percebida!

²⁵⁴Tal realidade é estruturante, como veremos no capítulo terceiro. Notemos que a aplicabilidade descritiva da matemática se caracterizará pela *identificação* entre a estrutura da realidade como é percebida por nós e estruturas matemáticas.

dimensões, a direção, o sentido e a intensidade da velocidade do projétil são identificados com um vetor. O princípio de Galileu permite utilizar o conceito de linearidade, como vimos²⁵⁵ anteriormente. É importante caracterizar a aplicabilidade descritiva por meio de algumas etapas. Vejamo²⁵⁶-las.

- 1) Abstração e idealização: os aspectos relevantes à descrição são separados por um sujeito (o matemático, físico, químico, etc.). Tal sujeito é ATIVO²⁵⁷ no sentido de participar da estruturação da realidade dita percebida. Nesta primeira etapa, é assaz importante mencionar que o sujeito só pode se referir à realidade tal qual percebida por ele. Isso é equivalente a dizer que temos que fazer a distinção entre *realidade percebida* e *realidade em si*. A matemática se aplica exatamente à estrutura da realidade²⁵⁸ percebida.
- 2) A aplicação de conceitos matemáticos à estrutura da realidade percebida se dá pela identificação entre a estrutura imposta por nós à realidade e estruturas matemáticas. Estas últimas são inventadas arbitrariamente²⁵⁹ pelos matemáticos.

²⁵⁵A abstração e idealização se dão ao considerarmos o projétil como um ponto material. Em muitas aplicações práticas, desconsidera-se o atrito entre o objeto lançado e o ar. É óbvio que projéteis são objetos macroscópicos dotados de massa e que estão sujeitos a forças de atrito.

²⁵⁶Neste caso, partiremos da realidade idealizada e abstraída em direção à utilização de estruturas matemáticas. No fim do capítulo, após termos analisado a narrativa de Steiner da invenção do processo de quantização, nós discutiremos como é possível utilizar estruturas matemáticas para a elaboração de inferências a respeito da estrutura da realidade empírica.

²⁵⁷Veremos no próximo capítulo que concordamos (em partes) com Kant quanto à imposição de uma *moldura* à realidade percebida.

²⁵⁸Ora, para o realista empirista, existe uma realidade em si, sendo que tal realidade é exatamente aquela que é percebida por nós. Nós não partilhamos dessa tese. Para a finalidade de entender a aplicabilidade da matemática, basta nos determos no que é percebido por nós, isso sem termos de nos comprometer com a hipótese de que *existe uma realidade em si*, que é sobre o que versa a tese realista.

²⁵⁹O matemático pode sempre se perguntar se é possível estender determinada estrutura a outros domínios abstratos mais gerais. Pensemos em números complexos $(x_1 + ix_2)$ como pares ordenados (x_1, x_2) que podem ser adicionados e multiplicados de

Vejamos um pouco mais a utilização de conceitos matemáticos específicos para a descrição de fenômenos físicos. Dissemos que conceitos matemáticos podem ser criados arbitrariamente (e poderia ser o caso de muitos conceitos não terem utilidade²⁶⁰). Quanto aos conceitos úteis, tomaremos como exemplo o rotacional de um campo vetorial utilizado em um caso específico dentro da mecânica de fluidos.

Todo fluido é dotado de uma determinada propriedade física dita viscosidade²⁶¹. O movimento de um fluido arbitrário é descrito por uma expressão bastante complicada conhecida por *equação de Navier-Stokes*. Para o caso de fluidos irrotacionais²⁶², é possível obter uma *equação*

uma maneira específica. Por que não pensar em n-uplas ordenadas de números do tipo (x_1, x_2, \dots, x_n) ? Neste caso, o próprio sistema notacional pode ser útil ao matemático para a invenção de novas estruturas matemáticas. É sabido que a invenção dos quaternions por Hamilton não foi motivada por nenhum fato empírico, mas por curiosidade matemática. Quaternions são objetos do tipo (x_1, x_2, x_3, x_4) (ou $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$) que podem ser identificados com quádruplas de números reais sujeitas a regras específicas de adição e multiplicação.

²⁶⁰Entender as regras de um jogo de xadrez parece não ter utilidade para a descrição de fenômenos da nossa realidade empírica. Mas, poderia ser o caso de alguma espécie de outra galáxia tentar nos atacar e que seus habitantes se movam de acordo com as regras que ditam o movimento das peças de um jogo de xadrez. Ainda com relação ao xadrez, suponhamos que haja uma *estratégia vencedora* e que essa estratégia exiba algum tipo de simetria matemática. Suponhamos que o número mínimo de jogadas requeridas para que a *estratégia vencedora* possa ser efetuada seja 7. Para Steiner, um *teorema* referente ao número mínimo de jogadas envolvidas nessa estratégia não seria um “teorema da matemática”. O exemplo que ele utiliza é o seguinte: “por que não é um teorema da matemática, o ‘teorema’ que afirma (...) dois cavalos não podem ser compelidos contra um rei?”. (STEINER, *op. cit.*, p. 63) E, na página 66, ele nos pergunta: “por que xadrez é um jogo e os espaços de Hilbert, matemática?” A resposta dele é “estética”. A nosso ver, *teoremas* que lidem com aspectos do xadrez são teoremas da matemática. O motivo de Steiner mencionar esse exemplo do jogo de xadrez é que ele acredita que os conceitos matemáticos são criados por impulsos estéticos nos seres humanos. Esse é o próximo tópico de nossa discussão.

²⁶¹Tomamos emprestado de Pincock o exemplo que menciona a viscosidade de um fluido e a equação não-linear de Navier-Stokes.

²⁶²Na realidade, há várias equações de Navier-Stokes, e o que se tem, então, é um conjunto de equações. Elas são derivadas dos princípios de conservação de energia, momento linear, momento angular e conservação da massa. As equações são bastante complicadas, embora, simplificada, possamos escrever: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \wp + \rho \vec{f}$, para a pressão estática p , a velocidade do fluido \vec{v} , a densidade do fluido ρ , vetor força \vec{f} . \wp é o traço de um determinado tensor. $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ é a derivada material de \vec{v} com relação ao tempo. ∇ é o conhecido *operador gradiente*, e $\nabla \cdot$ é conhecido por *divergente*. A equação acima é

linear para o movimento do fluido. Mas, para fluidos irrotacionais, a viscosidade²⁶³ deve ser nula, algo que não se observa na natureza. Todo fluido existente na natureza é dotado de viscosidade não-nula. A equação para fluidos irrotacionais pode ser obtida por um *processo de limite* no qual a viscosidade do fluido deve tender a zero. Mas essa operação não admite análogo físico, como nota Pincock²⁶⁴. A operação pela qual uma equação linear é obtida (ao se tomar o limite para a viscosidade tendendo a zero) é somente uma etapa auxiliar na obtenção da expressão linear. Não há nenhuma operação física referente a tal processo, muito menos um conceito físico referente ao processo em que um fluido cuja viscosidade é não-nula possa se converter em um fluido dotado de viscosidade nula. Podemos dizer, então, que não é o caso de todo conceito matemático ter um correlato físico. Vejamos algo mais a respeito da invenção de conceitos matemáticos úteis em física (e de acordo com Mark Steiner).

Sabemos que há muitos conceitos matemáticos úteis, como é o caso de operadores lineares definidos em espaços de Hilbert, fibrados (STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, p. 33), linearidade (STEINER, *op. cit.*, p. 30). Quanto à invenção de conceitos matemáticos pelos cientistas, vejamos o que Mark Steiner nos diz, isso por meio de um argumento retirado de Wigner. (STEINER, *op. cit.*, p. 46) Vejamo-lo.

- (1) Conceitos matemáticos surgem de impulsos estéticos nos humanos.
- (2) Não é razoável de se esperar que o que surge de impulsos estéticos em humanos possa ser significativamente efetivo em física.

não-linear. Para fluidos irrotacionais, ditos newtonianos, a expressão admite uma forma muito mais simples.

²⁶³A viscosidade (cinemática) τ de um fluido é dada por: $\tau = \frac{\mu}{\rho}$, sendo μ o coeficiente de viscosidade do fluido e ρ , sua densidade.

²⁶⁴Ele nos diz que “esta transformação matemática não corresponde a nenhuma propriedade física do movimento de fluido”. (PINCOCK, C. *Mathematics and scientific representation*, p. 300)

- (3) Mas um grande número desses conceitos é *significativamente* efetivo em física.
- (4) Entretanto, conceitos matemáticos são desarrazoadamente efetivos em física.

Dissemos que Steiner não tem uma teoria que explique o porquê de os conceitos matemáticos específicos serem úteis. O que mais se aproxima de uma teoria da aplicabilidade dos conceitos de acordo com Steiner partia da hipótese de que para todo conceito matemático há um conceito análogo físico. Vimos que tal hipótese é falsa. Quanto à invenção de conceitos pelos matemáticos, Steiner é mais ousado ao afirmar que o matemático procede de modo análogo ao artista, i.e., “(...) como o matemático – de modo mais próximo ao do artista que do explorador –, ao dar as costas para a natureza, pode chegar às mais apropriadas descrições dela?” (STEINER, *op. cit.*, p. 47) Afirmamos também que, além de não ter uma explicação para a aplicabilidade de conceitos específicos, Steiner considera desarrazoada a efetividade dos conceitos matemáticos em física. Mas desarrazoada com relação a que explicação? Isso nos levará ao segundo objetivo do livro de Steiner, i.e., o de “explorar suas²⁶⁵ implicações para nossa visão de mundo”. (STEINER, *op. cit.*, p. 2)

2.112 Segundo objetivo de Steiner

Na seção anterior, deixamos a pergunta: “desarrazoada (efetividade dos conceitos) com relação a que explicação?” Desarrazoada com relação à determinada *explicação (hipótese) naturalista*. Tal hipótese naturalista deve basear-se na suposição de que a espécie humana se desenvolveu (por um processo de seleção natural) de modo a ter a habilidade de conjecturar as leis da física²⁶⁶. Mas em que se sustenta a tese de Steiner

²⁶⁵Da aplicabilidade de conceitos matemáticos

²⁶⁶Steiner nos diz que o naturalismo se opõe ao antropocentrismo, i.e., “eu vejo o naturalismo, entretanto, na oposição ao antropocentrismo – o ensinamento de que a raça humana é de algum modo privilegiada, central ao esquema das coisas”. (STEINER, *op. cit.*, p. 55) É curioso que na mesma página dessa citação, Steiner se referirá ao naturalismo como “mais uma ideologia que uma tese...” e, quanto ao antropocentrismo, por

de que não há uma explicação razoável para a aplicação de conceitos matemáticos em física atômica? Veremos isso com a análise que ele faz do desenvolvimento do processo de quantização canônica. Antes, enunciemos explicitamente o segundo objetivo de Steiner.

Steiner nos diz que o segundo objetivo de seu livro é explorar as implicações da aplicabilidade da matemática à nossa visão de mundo. Por *nossa visão de mundo*, ele nos diz “o mundo, em outras palavras, nos parece ‘amigável’ ”²⁶⁷. (STEINER, *op. cit.*, p. 176) E nesta mesma citação, ao mencionar o sucesso do processo de quantização canônica, ele concluirá que “isso é um desafio ao naturalismo”. Veremos também que tal *desafio* surgiria²⁶⁸, caso aceitássemos a narrativa que ele faz da criação e do funcionamento do processo de quantização. Vejamos, agora, alguns exemplos referentes à mecânica quântica que Steiner utiliza.

Dentre os exemplos²⁶⁹ mencionados por Steiner, cremos que os mais relevantes sejam a criação do processo de quantização de Dirac e a

ensinamento. Ora, o naturalismo é uma tese sustentável, i.e., de que o homem não tem um papel fundamental no *esquema das coisas*. A partir de Copérnico, o homem deixou de habitar o centro do universo, e neste sentido, o papel do homem no *esquema das coisas* tornou-se periférico. É sabido que nossa galáxia é somente uma dentre 100 bilhões de outras galáxias, e nosso sol, um dentre cerca de 100 bilhões de 100 bilhões de estrelas. Steiner parece estar mais preocupado com alguma variante de tese de que o homem possa ter evoluído por seleção natural e desenvolvido a habilidade para fazer matemática pura que com o fato de o planeta Terra ser somente um pálido ponto azul no universo observável. Sustentamos esta visão, pois, ao se referir ao filósofo Peirce, Steiner nos diz que “Até Peirce (assim como John Locke) era pessimista com relação à habilidade da espécie humana ser capaz de conjecturar as leis do átomo. A evolução, ele argumenta, não poderia ter equipado a espécie humana com a habilidade de descobrir as leis que se referem a objetos que não fazem parte do nosso dia-a-dia. (Esse era exatamente o argumento de Locke, exceto que ele dizia “Deus” em vez de “Evolução”) (STEINER, *op. cit.*, p. 3)

²⁶⁷Em suma, a tese de Steiner é que “a natureza não é indiferente à presença de seres humanos”. Claro que não nos deteremos nas crenças específicas do filósofo, mas somente nos argumentos. No nosso caso, os que se referem à mecânica quântica.

²⁶⁸Caso a narrativa de Steiner da invenção do processo de quantização canônica fosse historicamente correta, ainda poderíamos explicar o uso de analogias formais em física sem termos que renunciar a hipóteses naturalistas. Veremos isso no final da tese, ao analisarmos as idéias de da Silva.

²⁶⁹Sendo que os exemplos referentes ao desenvolvimento da mecânica quântica de Dirac são os mais importantes, desde que átomos e elétrons não fazem parte das nossas experiências empíricas básicas. Quanto à aplicabilidade de conceitos matemáticos, sejam

invenção da equação de Dirac. Discutiremos ambos os exemplos de modo detalhado. Na segunda seção, mostramos como Dirac elaborou o processo de quantização canônica. Nas seções terceira e quarta, mostramos como é possível obter as regras de quantização a partir da mecânica clássica de Poisson. Quanto à equação de Dirac, veremos como o físico inglês a desenvolveu e em que medida Steiner está correto quanto à invenção da equação relativística do elétron. Sigamos, então, com a análise que Steiner faz da invenção do processo de quantização.

2.1121 Steiner e o mistério da quantização

Dissemos que a argumentação de Steiner se baseia em exemplos, dos quais o principal é a invenção do processo de quantização canônica. Steiner nos diz, logo na primeira linha do capítulo 6º, que “talvez o mais flagrante uso do raciocínio formalista em física seja a tentativa bem-sucedida dos físicos para ‘adivinhar’ as leis de sistemas quânticos, estratégia conhecida por ‘quantização’”. (STEINER, *op. cit.*, p. 136) Por *raciocínio formalista*²⁷⁰, Steiner entende qualquer raciocínio que utilize *analogias formalistas*. Apesar de não definir *analogia*, ele nos diz:

inventados por impulsos estéticos, ou não, veremos que a tese de Steiner não se apoiará nesse critério; ela se apoiará na narrativa de como o processo de quantização e a equação de Dirac foram desenvolvidos. Aliás, não vemos relação alguma entre a invenção do conceito e sua aplicabilidade. Steiner também não nos diz qual a relação. Ele supõe que conceitos matemáticos sejam criados por impulsos estéticos. Mas não define nem se detém em analisar o que é “estético”. Para Steiner, resultados a respeito do jogo de xadrez não seriam classificados como “teoremas matemáticos”. Mas isso é uma questão de “estética”. Cremos que seja uma convenção motivada por não haver aplicação para aqueles resultados. Mas, se houvesse uma nação alienígena invadindo a Terra, e que se movesse como peças do xadrez, poderia ser o caso de dizermos que “resultados sobre xadrez são teoremas matemáticos”.

²⁷⁰Ele usa o termo “pythagorean reasoning” na quarta página, sendo o raciocínio formalista um tipo de “raciocínio pitagórico”. E um raciocínio pitagórico é aquele que utiliza *analogias pitagóricas*. E nos diz “Por uma analogia ou taxonomia ‘pitagórica’ no instante t , eu quero dizer uma analogia matemática entre leis físicas (ou outras descrições) não parafraseáveis em uma linguagem não matemática no instante t ” (pag.54). Discutiremos

Por uma analogia ou taxonomia ‘formalista’ no instante t , eu quero dizer uma que se baseie mais na sintaxe, ou até mesmo na ortografia da *linguagem* ou *notação* das teorias físicas, que naquilo (se houver algo) que ela possa expressar. (STEINER, *op. cit.*, p. 54)

Vejamos, primeiramente, em que contextos ele usa o termo *analogia*, antes de tentarmos entender o que é uma *analogia formalista*. A citação acima dá ênfase exagerada à sintaxe da linguagem em que é elaborada a analogia, referindo-se inclusive à ortografia!

Na terceira página da introdução de seu livro, Steiner utiliza o termo “analogia” pela primeira vez ao dizer: “Como, então, os cientistas chegaram às leis atômicas e subatômicas da natureza? Minha resposta: analogia matemática”. Ainda nessa página ele nos diz: “essas analogias foram frequentemente pitagóricas, o que quer dizer que não poderiam ser expressas em outra linguagem que não fosse a matemática pura”. Na página seguinte, ele usa a expressão “analogias entre estruturas” ao se referir ao uso do princípio da correspondência de Bohr. Ele nos diz que o átomo de Bohr ilustra o uso uma analogia, pois “mesmo onde as analogias assumiram a forma de modelos físicos aparentes (como, por exemplo, o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio)”. E nos perguntamos, então: o que é²⁷¹ uma *analogia* para Steiner? Vejamos.

Quanto ao átomo de Bohr, a analogia se dá entre o movimento de um elétron ao redor do núcleo e o movimento de um planeta ao redor do sol. Não se tem uma analogia formalista no sentido da definição de Steiner. A comparação não se baseia especificamente na sintaxe da linguagem, mas na suposição de que o elétron seja *entendido* como um *pequeno errante* que orbita o núcleo atômico (o análogo do sol), de modo que tudo que o físico saiba do movimento orbital de planetas ao redor do

em breve as definições de Steiner relevantes para a compreensão de nosso texto. Precisamos entender, primeiramente, o que é uma analogia para Steiner.

²⁷¹Parece-nos que Bunge tinha razão ao dizer que “A analogia, como o porquinho da Índia, encontra-se em todas as casas e todo o mundo admira sua fertilidade, mas ninguém a examina com cuidado...”. (BUNGE, M. *Física e filosofia*, p. 265)

sol possa ser *transferido* para o estudo do movimento do elétron. Sigamos, então, com o que é uma analogia, e em que sentido podemos interpretar analogia formalista de modo a sermos fiéis à narrativa que Steiner faz da invenção do processo de quantização.

Vejamos algumas definições de analogia no *Novo Dicionário Aurélio* (p.92):

1-Ponto de semelhança entre coisas diferentes. 2-Semelhança, similitude, aparência... 6-Relação entre dois fenômenos físicos distintos que podem ser descritos por um formalismo matemático idêntico²⁷².

Das definições acima, as duas primeiras são muito gerais e caracterizam uma vasta gama de raciocínios por comparação. Quanto ao uso que Steiner faz de *analogia*, citamos apenas alguns exemplos, mas ela (a analogia) aparece muitas vezes em seu texto e em vários contextos distintos. Vimos que, no caso do átomo de Bohr, ele se refere a um modelo físico, i.e., o sistema “átomo/elétron” que é descrito como um *sistema planetário*²⁷³. Já no caso da quantização canônica, a definição de Steiner para analogia formalista parece se adequar melhor²⁷⁴, mesmo que o processo independa *da ortografia da linguagem*. Para Steiner, o papel da sintaxe parece ser fundamental na discussão da quantização. É claro que uma notação adequada pode ajudar na manipulação dos símbolos que se referem a determinados conceitos, mas isso não se refere à ortografia, e sim somente à *dinâmica simbólica*, i.e., como os

²⁷²Bunge dividirá as analogias em *formais* e *substanciais*, mas essa divisão não acrescenta muito à nossa discussão, embora seja importante mencionar tal distinção. (BUNGE, M. *op. cit.*, p. 266)

²⁷³Steiner utiliza exatamente a expressão “planetary system”. (STEINER, *op. cit.*, p. 3)

²⁷⁴Pois a analogia se dá entre teorias e via notação! “ Formulam-se equações por analogia à forma matemática das equações, mesmo se pouca, ou nenhuma, motivação física existir para a analogia”. (STEINER, *op. cit.*, p. 94) Entendemos “forma matemática das equações” como a própria *equação*. No caso do oscilador harmônico, vimos como Heisenberg procedeu ao manter a equação do oscilador e reinterpretar os termos referentes à posição e ao momento.

símbolos permitem que os conceitos sejam manipulados. Quanto à sintaxe, vimos que as regras de quantização podem ser obtidas por meio de manipulações algébricas convenientes. Mostramos nas seções terceira e quarta como é possível obter as regras de quantização através da preservação de expressões da mecânica clássica (via colchetes de Poisson). De modo preciso, algumas relações entre termos são preservadas, outras, reinterpretadas. No caso do desenvolvimento da teoria de Heisenberg, a expressão referente ao oscilador harmônico foi preservada e os coeficientes da solução em série de Fourier foram reinterpretados. A reinterpretação foi motivada por fatores empíricos, como vimos. *A preservação da estrutura clássica das expressões é sempre uma tentativa natural a ser seguida pelo físico desbravador de novas áreas do conhecimento. Para o cientista treinado, é sempre conveniente lidar com expressões matemáticas conhecidas. Vejamos agora o caso da analogia entre as teorias de Poisson e Dirac.*

No caso da quantização, a comparação se dá entre formulações (ou formalismos) de teorias, no caso a teoria de Poisson e a teoria quântica de Dirac. E de acordo com Steiner, foi por uma *analogia formal* que se deu a quantização canônica. Nós diremos, a partir de agora, que *analogia* não é nada mais que um *raciocínio por comparação*. Uma analogia formalista deverá ser aquela em que a sintaxe seja fundamental para a comparação. Sigamos, então, com a comparação entre as teorias clássica e quântica de acordo com Steiner.

Quanto ao processo de quantização, Mark Steiner nos diz que:

Essa estratégia começa ao se assumir que o sistema obedece às leis clássicas – uma falsa premissa, claro. Então a descrição clássica é convertida (por meio de transformações sintáticas) em uma verdadeira descrição quântica do mesmo sistema. (STEINER, *op. cit.*, p. 136)

O exemplo que Steiner utiliza é a derivação²⁷⁵ da equação de Schrödinger. Quanto a ela, ele afirmará que:

A resposta formalista de Schrödinger – para um sistema não-relativístico – foi a que a comunidade de físicos aceitou no fim de 1926. Para derivar uma equação quântica para um sistema (e.g., um átomo), finge-se que o sistema obedeça à mecânica clássica, escreve-se a equação clássica da energia para tal sistema e então ‘quantiza-se’ a equação. Isso é feito pela substituição das variáveis na equação por operadores quânticos, chegando assim ao hamiltoniano H . (STEINER, *op. cit.*, p. 138)

Mostremos com algum detalhe o que Steiner nos diz na citação acima. Escrevamos para uma *partícula (clássica) livre*²⁷⁶ com momento linear \vec{p} e massa (não-nula) m , sendo sua energia mecânica²⁷⁷ E :

$$E = \frac{1}{2m} p^2$$

Para Steiner, o processo de quantização canônica parte da hipótese de que a expressão clássica se aplica ao sistema quântico. Em seguida, efetuam-se substituições sintáticas, que para nosso exemplo, são:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ P &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Se escrevermos H para o *análogo quântico*²⁷⁸ de E , e ψ para uma função no domínio de H (ψ diferenciável com relação a t), obteremos a equação abaixo, conhecida por equação de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

²⁷⁵ Derivação de acordo com a narrativa de Steiner, não de acordo com o modo pelo qual Schrödinger obteve sua equação.

²⁷⁶ Partícula livre, isso é, livre da ação de forças.

²⁷⁷ Para $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ em um sistema cartesiano ortogonal.

²⁷⁸ A expressão que se obtém quando são efetuadas as substituições a que Steiner se refere.

Agora, vejamos como que Steiner utiliza o processo acima para lançar um desafio às teorias naturalistas. Para ele, vimos que o processo de quantização canônico foi desenvolvido por *analogias formalistas*. Mesmo que ele não seja claro quanto ao uso do termo *analogia* e que a definição de *analogia formalista* seja obscura, daremos a seguinte interpretação para o caso específico do processo de quantização canônica.

Um raciocínio por comparação entre formulações de teorias e que se dá via reinterpretação de expressões clássicas. De modo preciso, as variáveis clássicas, funções reais (ou complexas), são substituídas por variáveis quânticas, operadores lineares.

O exemplo da derivação da equação acima nos leva a entender “substituições sintáticas” por “reinterpretação dos termos” (por exemplo, aqueles que estão presentes na expressão $E = \frac{1}{2m} p^2$). Na nossa interpretação do que Steiner entende por analogia formalista, não incluímos que a reinterpretação seja guiada por dados empíricos, pois, para ele, o processo de quantização se baseia²⁷⁹ na notação e nas regras para manipulação dos termos, i.e, *regras sintáticas*. E quanto ao termo “ortografia”, nós simplesmente o ignoraremos. Enfatizemos que, no caso da quantização, a comparação se dará entre a formulação da mecânica clássica por colchetes de Poisson e a formulação da mecânica quântica de Dirac²⁸⁰.

²⁷⁹É importante sermos fiéis ao trabalho de Steiner, pois ele nunca diz que é somente por analogias formalistas que a *descoberta* de leis ocorre, mas que foi daquele modo que se deu a invenção da quantização.

²⁸⁰Mesmo que uma *comparação entre teorias* possa ser um termo problemático, essa definição ilustra o que Steiner entende por analogia formalista. Outro problema é que Schrödinger não desenvolveu sua equação por substituições sintáticas e a comparação entre a teoria de Dirac e de Poisson surgiu em outro contexto, no caso Dirac se baseou no trabalho de Heisenberg, como mostramos no capítulo 2º.

Falta enunciar o argumento de Steiner que, segundo ele, coloca um desafio às teorias naturalistas. Para isso, precisamos fazer a seguinte ressalva: Steiner utilizará o termo *analogia pitagórica* em sua argumentação. Bem, sua definição para uma analogia pitagórica é:

Por uma analogia ou taxonomia ‘pitagórica’ no instante t , eu quero dizer uma analogia matemática entre leis físicas (ou outras descrições) não parafraseáveis em uma linguagem não matemática no instante t . (STEINER, *op. cit.*, p. 54)

Agora, Mark Steiner se refere a uma comparação entre *leis* ou *outras descrições* em que é imprescindível o uso de linguagem matemática. Essa definição não é menos problemática que a de *analogia formalista* (que é um tipo de analogia pitagórica²⁸¹). Mas, para o entendimento do argumento de Steiner, podemos tomar analogias formalistas como sinônimas de pitagóricas, pois o exemplo de analogia que ele utiliza é do tipo formalista. O aspecto *pitagórico* denota uma estratégia *antropocêntrica*, visto que a elaboração das leis físicas a que Steiner se refere deveu-se à manipulação sintática de símbolos matemáticos. Ele nos diz até mesmo que “em alguns casos notáveis²⁸², a notação matemática (...) sustentou as analogias utilizadas nas descobertas físicas”. (STEINER, *op. cit.*, p. 4) Sigamos com o argumento de Steiner.

Para Steiner, a utilização de analogias formalistas é uma *estratégia pitagórica* e estas, por sua vez, são *antropocêntricas*, isto é, “uma estratégia pitagórica é uma estratégia que não pode evitar ser uma estratégia *antropocêntrica*”. Sendo que

²⁸¹Ele diz, para as analogias formalistas, que “esse é um caso especial das analogias pitagóricas”. (STEINER, *op. cit.*, p. 6)

²⁸²Dentre os *casos notáveis*, Steiner menciona vários outros além do processo de quantização canônica, como a teoria dos quarks de Murray Gell-Mann. (STEINER, *op. cit.*, p. 4)

...uma estratégia antropocêntrica é aquela que só faz sentido se o estrategista acreditar, seja implicitamente ou inconscientemente, que a espécie humana tem um lugar especial no esquema das coisas. (STEINER, *op. cit.*, p. 5)

E visto que “...para o naturalista, *analogias* antropocêntricas são inválidas”, já que “hipóteses antropocêntricas não fazem sentido²⁸³” (*idem*, p. 143), os físicos que fizerem uso do processo de quantização “estão implicitamente indo além do naturalismo²⁸⁴. (*idem*, p. 145)

Com base nas citações acima, podemos escrever o argumento de Steiner do seguinte modo:

No desenvolvimento da mecânica quântica, os físicos fizeram uso explícito de analogias formais para elaborar as leis que regem o movimento dos átomos. O processo de quantização canônica desenvolvido por Dirac ilustra como obter as leis que regem o movimento atômico via manipulação simbólica de expressões da mecânica clássica. E o processo de quantização é um exemplo explícito do uso de analogias formais pelos físicos.

Desde que analogias formais são estratégias “antropocêntricas” e que essas estratégias não fazem sentido para o naturalista, os físicos que utilizarem o processo de quantização canônica estarão implicitamente “indo além do naturalismo”. É justamente esta a leitura que fazemos do argumento de Steiner, com base em citações e coerente com o objetivo central do livro do filósofo.

²⁸³Ele usa o termo “unprojectibles”.

²⁸⁴Um pouco mais adiante, Steiner nos diz que “a história do processo de quantização reforça a tese desse livro (...) o mundo, em outras palavras, parece ser ‘amigável’. Isso é um desafio ao naturalismo’. (STEINER, *op. cit.*, p. 176)

2.12 Análise do argumento de Steiner

Vimos que Steiner nos diz que o processo de quantização canônica começa “ao se assumir que o sistema obedece às leis clássicas – uma falsa premissa, claro”. Retomemos o desenvolvimento da mecânica quântica para ver que não é verdade o que Steiner nos diz.

A primeira hipótese assumida por Heisenberg na busca da sua cinemática quântica foi que “a mecânica clássica é falsa quando aplicada ao nível atômico”. Exatamente a hipótese oposta àquela que Steiner menciona. Sabemos também que a quantização canônica foi elaborada por Dirac a partir da leitura do trabalho de Heisenberg. De modo bastante resumido, mas coerente com os fatos históricos (ver seções primeira e segunda), o que ocorreu pode ser dito da seguinte maneira: Bohr propôs um princípio de correspondência entre a mecânica clássica e a antiga teoria quântica. Born mostrou que era possível estabelecer uma relação entre as frequências previstas pela mecânica clássica e a antiga teoria quântica²⁸⁵. Em seguida, coube a Heisenberg a criação da teoria quântica²⁸⁶. Por fim, Dirac, inspirado pelo trabalho de Heisenberg²⁸⁷, procurou encontrar uma reinterpretação para os colchetes de Poisson da mecânica clássica²⁸⁸.

Foi Dirac²⁸⁹ quem disse que “Nós consideraremos agora a que a expressão $(xy - yx)$ corresponde na teoria clássica”. Finalmente, analisamos como Dirac chegou à seguinte sugestão de reinterpretação dos colchetes de Poisson:

²⁸⁵Vimos, na ocasião que a relação era: $\nu(n + \tau, n) = \int_0^1 (\nu\tau) d\mu$.

²⁸⁶Que partiu do princípio de Bohr e da premissa de que somente *observáveis* entrariam na formulação da teoria.

²⁸⁷E Heisenberg, inspirado pelo trabalho de Born que já mencionamos.

²⁸⁸Temos que as variáveis p_j, q_j são ditas canônicas conjugadas²⁸⁸; u, v são funções diferenciáveis com relação àquelas variáveis.

²⁸⁹(DIRAC, P.A.M. “The fundamental equations of quantum mechanics”. Em VAN DER WERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics*, p. 313).

$$\{X, Y\} = -i\hbar \left(\frac{\partial X}{\partial j} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial j} \frac{\partial X}{\partial \theta} \right)$$

Parece-nos *natural* a proposta de Dirac. Se Heisenberg elaborou uma teoria partindo de uma comparação com a mecânica clássica, por que não seguir com comparações mais gerais? Desde que a mecânica clássica admite uma formulação via colchetes de Poisson, não nos parece desarrazoada a abordagem de Dirac.

A conclusão a que chegamos é que não foi por analogia formalista²⁹⁰ que o processo de quantização²⁹¹ canônica se desenvolveu.

²⁹⁰Vimos que Steiner não é preciso quanto às definições. Mas é importante dizer que não foi por algum tipo de manipulação sintática que o processo de quantização foi desenvolvido. Steiner narra a história “do fim para o começo”. Ele parte de como os físicos utilizam o processo de quantização. Mencionemos que há casos em que a quantização canônica, e.g., efeito Aharonov-Bohm (GRANDE, R.M. *O efeito Aharonov-Bohm*) não se aplica, e que nesses casos se faz necessário um novo método de quantização. Para nossos propósitos, basta que saibamos da existência de casos em que a invenção de Dirac requer modificações.

²⁹¹Embora tenhamos optado pela análise do desenvolvimento da mecânica quântica de Heisenberg, vejamos (de maneira simplificada) como obter a equação de Schrödinger por meio de um processo de analogia (que não é formal) entre a mecânica de partículas e a mecânica ondulatória. É importante notar que não discutiremos o modo pelo qual Schrödinger procedeu para obter uma equação para o movimento do elétron. Resumidamente, tomemos a relação de Planck para a energia $H: H = h\nu$. Einstein havia associado um momento \vec{p} (de módulo p) a cada partícula de luz por meio da expressão: $p = \frac{\text{Energia}}{\text{velocidade}} = \frac{H}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ (c denota a velocidade da luz, e λ , o comprimento de onda). E, para cada componente p_j de \vec{p} , teremos: $p_j = \frac{h}{\lambda^2} \lambda_j$. Seja $b_j = \frac{\lambda_j}{\lambda^2}$ (tal termo é dito *número de onda*). Enfim, podemos escrever as relações: $\vec{p} = h\vec{b}$ e $p_j = hb_j$ (ditas *relações de Planck para o momento*). Também é sabido que a energia (clássica) H de uma partícula é dada pela soma das parcelas *cinética* ($\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 p_j^2$) e *potencial* (U), ou seja: $H = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 p_j^2 + U(q_1, q_2, q_3)$. U é uma função da posição $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ da partícula ($U = 0$ para o caso de uma partícula livre). Assumiremos $U = \text{constante}$. De Broglie associou *uma onda* (de comprimento λ) a uma partícula. O comprimento de onda λ seria obtido por meio da expressão $p = h/\lambda$. Seria razoável, então, tentar obter uma equação de onda (ou equação para uma onda) a partir de uma equação para partículas. Pelas relações de Planck para energia e momento é possível escrever: $h\nu = \frac{h^2}{2m} \sum_{i=1}^3 b_i^2 + U$ (E1). Esta expressão contém termos referentes à frequência ν e números de onda b_j . Ora, esboçamos, então, um modo de obter um tipo de expressão para uma onda a partir de uma expressão para uma partícula. Assumamos que a onda possa ser descrita por uma função complexa do tipo $\psi = \psi_0 \exp 2\pi i (\sum_{j=1}^3 q_j b_j - \nu t)$ para as constantes ν , b_j associadas à expressão E1 e $\psi_0 = \psi(0)$. Esta assunção nos permite obter as seguintes expressões para as derivadas de

O exemplo que Steiner utiliza para a derivação da equação de Schrödinger também não ilustra como a equação foi desenvolvida. Schrödinger, Klein e Gordon notaram que era possível efetuar as substituições indicadas por Steiner somente após o desenvolvimento da equação.

O processo de quantização canônica que Dirac desenvolveu se refere a uma reinterpretação dos colchetes de Poisson e foi elaborado com base na teoria de Heisenberg, não na de Schrödinger. Vemos, assim, que a narrativa de Steiner é equivocada do ponto de vista do desenvolvimento do processo de quantização.

Encerramos, então, a análise²⁹² do trabalho de Steiner. Após termos analisado a criação da equação de Dirac, nós nos deteremos na análise do caráter heurístico da aplicabilidade da matemática. De maneira resumida, mostraremos como é possível partir do estudo de estruturas matemáticas e chegar à previsão de fatos relacionados à experiência²⁹³ empírica.

ψ : $\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = b_k \psi$, $(1/2\pi i)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} = b_k^2 \psi$ e $-\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = v \psi$. Enfim, multiplicando ambos os lados de E1 por ψ e utilizando as últimas relações acima, obteremos a equação de Schrödinger $\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m(2\pi i)^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} \right) + U \psi$. Podemos, então, justificar a obtenção de tal equação por meio de uma analogia entre a mecânica de partículas e a mecânica ondulatória. Obviamente tal analogia não é formal, pois parte das relações de Planck (para energia e momento) e da pressuposição de que a cada partícula é possível associar uma determinada onda. Lembremo-nos de que assumimos U como sendo constante no tempo! Para o caso geral de U não ser constante e para uma discussão detalhada desse processo de analogia entre a mecânica clássica e quântica, ver (REICHEMBACH, H. *Philosophic foundations of quantum mechanics* p. 66-72).

²⁹²A criação da equação de Dirac é outro exemplo que Steiner analisa, mas sua argumentação se baseia em sua própria narrativa da invenção do processo de quantização canônica, a qual é incorreta. Assim, não nos deteremos em sua análise da criação da equação de Dirac.

²⁹³De modo preciso, veremos como é possível descobrir somente fatos estruturais a respeito de nossa realidade empírica.

Capítulo 3º

3.1 A aplicabilidade da matemática do ponto de vista do estruturalismo

Começamos este capítulo com a recapitulação dos objetivos centrais de nosso trabalho. Visamos concluir que:

1-a matemática utilizada na formulação da mecânica quântica de Heisenberg expressou somente dados empíricos e hipóteses físicas;

2-é possível explicar o porquê de a matemática se aplicar à descrição dos fenômenos físicos sem assumirmos a hipótese de que os objetos matemáticos existam²⁹⁴;

3-o uso e o sucesso das analogias²⁹⁵ formais no contexto da teoria de Dirac podem ser justificados de acordo com a teoria estruturalista sugerida²⁹⁶ por da Silva, a qual analisaremos em breve;

4-o argumento da indispensabilidade de Quine não é convincente. Ele será formulado e discutido na parte final da tese.

Quanto a 1, mostramos no primeiro capítulo de nosso trabalho como a teoria de Heisenberg foi desenvolvida. Já no segundo capítulo, ilustramos como é possível justificar a introdução de determinados

²⁹⁴No sentido do realismo/platonismo.

²⁹⁵Lembre-mos de que não foi por analogia formal (no sentido de Steiner) que se desenvolveu o processo de quantização canônica. Mostraremos que se fosse o caso de a quantização se dar por um processo de analogia formal, também seria possível explicar o porquê de o raciocínio puramente simbólico poder ser útil para a previsão de novos fenômenos físicos. Isso sem termos que assumir as hipóteses de Steiner, i.e., de que o universo é *user friendly* e de que os objetos matemáticos necessariamente existem. Analisaremos, então, o desenvolvimento da equação de Dirac.

²⁹⁶Sabemos que a abordagem estruturalista da filosofia da matemática se originou do trabalho de pesquisadores de um grupo denominado Bourbaki. Em nosso trabalho nos deteremos especificamente no tipo de estruturalismo elaborado por da Silva.

conceitos e estruturas matemáticas suficientes à formulação da teoria quântica de Heisenberg e Dirac. Retomaremos²⁹⁷ a hipótese 1 tão logo tenhamos discutido algumas das idéias fundamentais de Jairo José da Silva referentes à aplicabilidade da matemática.

3.11 Aspectos essenciais do estruturalismo de da Silva

Dissemos que nossa abordagem se baseará em idéias de da Silva²⁹⁸. Mencionaremos, mesmo que sucintamente, algo referente à explicação de Chihara²⁹⁹ para o problema da aplicabilidade. A escolha das teorias de da Silva e Chihara se deveu ao fato de ambos os filósofos adotarem uma abordagem estruturalista da filosofia da matemática e por não partilharem da tese de que objetos matemáticos existem³⁰⁰

²⁹⁷Veremos como é possível obter o formalismo matemático básico para a mecânica quântica a partir da análise do texto *The principles of quantum mechanics* de Paul Dirac.

²⁹⁸(DA SILVA, J.J. "Structuralism and the applicability of mathematics" Em *SI. Essays in non-Empiricist rigorous philosophy* p. 229-253)

²⁹⁹(CHIHARA, C. S. *A structural account of mathematics*). Veremos também (no apêndice 3.3) como Hartry Field (em seu *Science without numbers*) visa explicar a aplicabilidade da matemática à física.

³⁰⁰Quanto ao platonismo/realismo, Chihara nos diz que "Na filosofia da matemática, o realista mantém que os objetos matemáticos existem; o nominalista toma a posição oposta de que tais coisas não existem". (CHIHARA, C. S. *A structural account of mathematics* p. 6) É importante dizer que não defenderemos o ponto de vista dito nominalismo e que é adotado por Chihara. Ele nos diz que "o tipo de nominalismo que tenho em mente é um anti-realismo (platonismo)". (*Idem, Ibidem* p. 6) De maneira mais precisa, Chihara se refere a "reconstruções nominalistas da matemática que não requerem a existência de objetos matemáticos que o matemático é capaz, de alguma maneira, de descobrir". (*Idem*, p. 7) A reconstrução de Chihara, dita teoria da construtibilidade, versa sobre "sentenças abertas: ela nos diz que sentenças abertas (de um certo tipo) são construtíveis e como estas sentenças abertas construtíveis estariam relacionadas umas às outras (...)". (*Idem*, p. 170) A linguagem lógica utilizada por Chihara é de primeira ordem. Além dos quantificadores universal e existencial, a teoria de Chihara requer uma nova classe de quantificadores, ditos *quantificadores construtíveis*. Ele nos diz que "Quantificadores construtíveis são sequências de símbolos primitivos: ou $(C -)$ ou $(A -)$, onde $'-'$ deve ser preenchido por uma variável de um tipo apropriado. Usando $'\Psi\phi'$ para abreviar $'\phi'$ satisfaz Ψ' , $'C\phi\Psi\phi'$ pode ser entendido por dizer: é possível construir uma sentença aberta Φ tal que Φ satisfaz Ψ , enquanto que $A\phi\Psi\phi$ pode ser entendido por dizer: toda sentença aberta ϕ que pode ser construída é tal que ϕ satisfaz Ψ ". (*Idem*, p. 170) Pelo termo "*é possível*", Chihara nos diz que se refere à "possibilidade conceitual". "Um tipo de possibilidade metafísica, até onde ela estiver concernida com *como o mundo poderia ter sido*". (*Idem*, p. 170)

independentemente de nós (e das teorias matemáticas em que são utilizados). Quanto ao termo *estruturalismo*, visto que há várias posições filosóficas caracterizadas por tal termo, vejamos o que é estruturalismo para nós.

Concordamos com da Silva em que o

...estruturalismo³⁰¹ (...) é a visão de que a matemática não é a ciência de um tipo particular de objetos (os objetos matemáticos usuais, tais como, tipicamente, números, conjuntos ou formas geométricas), mas o estudo de propriedades estruturais de domínios arbitrários de entidades, independentemente de sua natureza ou estatuto³⁰² ontológico (existindo de maneira real, meramente pressupostos ou somente intencionais). (DA SILVA, J.J. “Structuralism and the applicability of mathematics” p. 229)

Ora, uma estrutura³⁰³ é um domínio³⁰⁴ de objetos com uma ou mais relações nesse domínio. De maneira mais precisa, a matemática se caracteriza pelo estudo de *domínios formais*. Sendo que

Um *domínio formal* (uma variedade) é essencialmente um sistema estruturado de objetos materialmente (em particular, quantitativamente) indeterminados (i.e., objetos indeterminados quanto à natureza e quantidade); suas relações estruturantes sendo

³⁰¹A noção de estrutura se deve a Bourbaki. (BOURBAKI, N. “The architecture or mathematics” Em. EWALD, W. *From Kant to Gauss* p. 1269) O tipo de estruturalismo que nos interessa é aquele desenvolvido por Da Silva. Lembremo-nos de que *Bourbaki* é um termo que denota um grupo de matemáticos que visava fundamentar a matemática na teoria dos conjuntos Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha (ZFC).

³⁰²Status.

³⁰³Estamos definindo *estrutura* de uma maneira bastante ampla. Da Silva nos diria que “Estruturas podem ser caracterizadas como aspectos abstratos formais comuns de domínios isomorfos”. (DA SILVA, J.J. “Structuralism and the applicability of mathematics p. 232) É sabido que há outras maneiras específicas de definir estruturas, como o faz Resnik ao se referir a padrões (patterns) “consistindo de um ou mais objetos que chamo de posições e que permanecem em várias relações”. Em seguida, Resnik dirá o que entende por *objeto* no contexto de sua teoria estruturalista. (RESNIK, M. *Mathematics as a science of patterns* p. 203) Não é de nosso interesse analisar várias teorias estruturalistas como a de Resnik ou de Shapiro. (SHAPIRO, S. *Philosophy of mathematics: structure and ontology*) Para nossos propósitos, bastará a teoria de da Silva.

³⁰⁴No caso, não precisamos dizer o que são os objetos no domínio de uma estrutura. E também não é necessário dizer que propriedades os objetos devem ter, ou que relações físicas, espaciais ou temporais existem entre os objetos. Os objetos matemáticos serão somente os suportes das operações matemáticas definidas em certo domínio.

caracterizadas apenas formalmente, independentemente da natureza particular de seus objetos. Outro modo de definir este conceito é o seguinte: um domínio formal é simplesmente um domínio objetual tomado como o representante da classe todos os domínios isomorfos a ele (...). (DA SILVA, J.J. *Mathematics and the crisis of science*, p. 2)

A noção que da Silva nos dá de estruturalismo, de acordo com as citações acima, sugere que a matemática não tem um objeto de estudo cuja natureza ontológica seja relevante – pelo menos para nossa análise da aplicabilidade. De modo sucinto, o que é relevante para a matemática são as *propriedades estruturais* dos domínios de objetos, não os objetos propriamente ditos³⁰⁵. E as propriedades estruturais são aquelas que só envolvem relações estruturantes³⁰⁶ que possam ser descritas plenamente em uma linguagem³⁰⁷ formal. Se tomarmos os axiomas de Peano como exemplo, as relações estruturantes serão aquelas dadas pelos axiomas não interpretados. Vejamos tais axiomas.

- (a) **0** é um **número**.
- (b) O **sucessor** de qualquer **número** é um **número**.
- (c) **0** não é **sucessor** de nenhum **número**.
- (d) Se os **sucessores** de dois **números** são iguais, esses **números** são iguais.
- (e) Se um conjunto de **números** contém **0** e o **sucessor** de qualquer **número** nele contido, então ele contém todos os **números**.

³⁰⁵Tal visão se deve originalmente a Bourbaki. Ver (BOURBAKI, N. “The architecture of mathematics” Em EWALD, W. *From Kant to Hilbert* p. 1268)

³⁰⁶Argumentaremos, mais adiante, que a nossa percepção da realidade é estruturante, i.e., nós impomos uma estrutura àquilo que é percebido.

³⁰⁷Os axiomas de Peano podem ser escritos em uma linguagem cujos símbolos são **0** (símbolo para uma constante), **S** (símbolo para a função *sucessor*), **+**, **.** (símbolos para funções binárias referentes à adição e multiplicação respectivamente), **<** (símbolo para o predicado binário cujo significado é *menor que*). Enfim, uma linguagem formal (de primeira ordem) consiste em símbolos lógicos (parênteses, símbolos para conectivos, variáveis, etc) e parâmetros (símbolos para quantificadores, predicadores, constantes, funções). Claro que há linguagens de ordens superiores, mas não é relevante para o nosso trabalho nos determos nesse tipo de discussão. Na formulação acima, a afirmação (e) está expressa em uma linguagem de segunda ordem. Para nossa discussão, o que é importante saber é que os axiomas podem ser interpretados de mais de uma maneira, e é irrelevante se estão formulados em uma linguagem de primeira ou segunda ordem.

Seguindo da Silva, “se os termos em negrito são entendidos segundo seu significado habitual, os axiomas (a)-(e) são asserções *verdadeiras* sobre os números naturais”. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 185) Mas é necessário que os axiomas acima se refiram a números? A resposta³⁰⁸ é NÃO. Vejamos o porquê.

Pensemos em *sequências de barras* (denotemo-las por $////$). Para nós, a sequência de barras vazia é denotada por “0”, a sequência / por “1”, // por “2”. O símbolo “+” significará justaposição de barras, i.e., “1 + 2 = 3” denotará a justaposição de / e // a fim de obtermos: $///$. O sucessor σ^+ de uma sequência de barras arbitrária σ nada mais é que o elemento obtido pela justaposição de uma barra à sequência original σ . É fácil ver que a adição é comutativa, e não é difícil mostrar que todos os axiomas de Peano são verdadeiros para o caso de nosso exemplo. Temos, então, a aritmética das sequências de barra.

Tomemos a expressão “5 + 7 = 12”. No caso da aritmética das sequências de barra, teremos a justaposição das sequências $/////$ e $////////$. Neste caso, “5” e “7” não se referem a objetos abstratos que não podemos apreender. E, para fins de aplicação de sentenças³⁰⁹ da aritmética em uma inferência, notaremos que não será necessário que existam números. Perguntamo-nos, então: que propriedades dos números³¹⁰ estaríamos utilizando em uma inferência como aquela utilizada por Steiner (ao concluir que havia 12 frutas sobre a mesa)?

³⁰⁸ Aliás, a resposta acima se deve a David Hilbert. Hilbert mostrou que os termos presentes nos axiomas de uma teoria matemática podiam ter mais de uma interpretação. (HILBERT, D. “On the concept of number ” Em. EWALD, W. *From Kant to Hilbert* p. 1089-1095)

³⁰⁹ Ver o capítulo 2º, em que analisamos o trabalho de Mark Steiner.

³¹⁰ Atribuídas a sequências de barras, ou a qualquer objeto que seja *suporte* para as operações que puderem ser provadas pelos axiomas de Peano.

Parece-nos que somente as ditas propriedades estruturais, pelo menos para o caso do exemplo³¹¹ de Steiner.

O estudo das propriedades estruturais de domínios arbitrários de objetos caracteriza o que da Silva chama de *teorias formais*. Mais precisamente,

...uma teoria formal (...) é uma descrição de propriedades estruturais compartilhadas por todos os seus modelos (uma teoria interpretada³¹², por outro lado, é uma descrição estrutural de um modelo particularmente pretendido). (DA SILVA, J.J. *Structuralism and applicability of mathematics*, p. 233)

Na geometria euclidiana, por exemplo, os termos presentes nos axiomas³¹³ da teoria estão todos interpretados. Mas um geômetra não precisa interpretar *ponto* como uma posição no espaço físico para estudar geometria como *ciência pura* e deduzir algumas dentre as possíveis consequências lógicas obtíveis de um determinado conjunto

³¹¹Ora, se pensarmos no exemplo que retiramos de Steiner e na interpretação dos axiomas de Peano de acordo como sugerimos acima (a partir das idéias de Hilbert), temos que assumir que sequências de barras existam para que possamos utilizar uma sentença do tipo $5 + 7 = 12$? As sequências a que nos referimos existem como marcas no papel, evidentemente, e nos as visualizamos, por exemplo, *ad oculi*, isso ao contarmos a quantidade de barras presente em cada sequência. Enfim, a conclusão de que $5 + 7 = 12$ independe do estatuto ontológico dos axiomas de Peano, i.e., tais axiomas, quando não-interpretados, não se referem a números. Aliás, eles não se referem a absolutamente nada. E lembremo-nos de que foi David Hilbert quem apontou que não é necessário que os axiomas de uma teoria da matemática se refiram necessariamente a algum tipo de objeto. (ver nota 298)

³¹²Por questões didáticas, vamos distinguir entre teorias axiomáticas interpretadas e não-interpretadas. As primeiras são aquelas “cujas asserções têm significado determinado e descrevem um domínio especificado de objetos (...) como a teoria de *Os elementos*, de Euclides”. As segundas “podem ser vistas como uma sucessão de símbolos da linguagem em que a teoria é expressa”. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 185-186) É importante dizer que teorias não-interpretadas sequer são verdadeiras ou falsas, pois somente sentenças de uma teoria interpretada são passíveis de serem verdadeiras, ou não. Da Silva nos diz que “teorias axiomatizadas no contexto de sistemas formais não tratam a rigor de nada; não têm um objeto determinado, nem lhes cabe uma noção de verdade”. (DA SILVA, J.J. *Idem*, p. 212) Não se faz necessário que a matemática seja verdadeira no sentido que Quine requererá, como veremos ao discutirmos o dito *argumento da indispensabilidade*.

³¹³Para os axiomas da geometria euclidiana, ver (LINDSAY, R.B e MARGENAU, H. *Foundations of physics*, p. 63-64).

de axiomas. A presença de termos indefinidos nas teorias matemáticas faz com que possamos interpretá-los de acordo com a necessidade de se aplicar a teoria em estudo³¹⁴. Cohen defende a posição de que a geometria estudada do ponto de vista lógico, em que os axiomas não são interpretados, deve ser encarada como pertencente à matemática pura. Se estudada como “descrição da natureza do espaço”, ela pertence à matemática aplicada. (COHEN, M. R. *Reason and nature*, p. 179) Ahamos pertinente tal distinção.

Ainda com relação à geometria de Euclides, ela é utilizada na descrição³¹⁵ de fenômenos físicos em mecânica newtoniana. Em física newtoniana, o deslocamento de um corpo³¹⁶ entre dois pontos é calculado a partir da expressão³¹⁷ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Ora, até a invenção das teorias da relatividade de Einstein, poucos³¹⁸ físicos, matemáticos e filósofos duvidavam de que a geometria subjacente à descrição do espaço físico era essencialmente euclidiana. Mais precisamente, antes do advento da teoria geral da relatividade, as geometrias não-euclidianas eram tidas como exercícios matemáticos

³¹⁴Estamos assumindo serem as teorias consistentes. Não estamos dizendo que teorias inconsistentes não são úteis. Parece haver inconsistências nas ditas “teorias quânticas de campo”. Mas claro que podemos nos referir somente a uma *parte menor* de uma teoria, caso ela seja inconsistente, e nos determos em uma *subteoria* consistente da teoria. Retomaremos esta questão na parte final deste capítulo ao analisarmos o argumento da indispensabilidade.

³¹⁵Enfatizemos que a geometria se aplica aos modelos da realidade empírica que os cientistas desenvolvem e que são utilizados para descrever os fenômenos físicos.

³¹⁶Mais precisamente, estamos nos referindo ao caso de um corpo cujas dimensões físicas são pequenas com relação ao deslocamento, o qual é denominado *ponto material*. De modo geral, corpos cujas dimensões podem ser ignoradas na análise de determinado problema físico são ditos pontos materiais. É sabido que corpos (materiais) são dotados de massa, mas a expressão para o cálculo da distância entre dois pontos não contém nenhum termo referente à massa de um corpo que se desloca entre aqueles pontos. Obviamente o *ponto* da geometria euclidiana não tem massa e corpos materiais não são pontos. Temos aqui uma operação de idealização.

³¹⁷De modo preciso, a expressão ds é dita *diferencial da função distância s*. Esta função s , no contexto da teoria de Newton, recebe o nome de métrica euclidiana.

³¹⁸Dentre os que se deram o trabalho de questionar se a *natureza* do espaço físico era euclidiana, destacam-se Gauss, Helmholtz e Riemann.

sem aplicações à física. As proposições da geometria não-euclidiana³¹⁹ não pareciam se referir a algo da nossa possível experiência empírica.

Sabemos que a invenção das geometrias não-euclidianas é um assunto da época do matemático Carl Friedrich Gauss, provável criador³²⁰ do primeiro sistema geométrico que não satisfazia ao quinto axioma de Euclides³²¹. É possível que Gauss tenha sentido algum receio de publicar seu trabalho seminal sobre geometrias não-euclidianas devido a possíveis polêmicas com intelectuais de sua época, dentre eles, o filósofo alemão Kant. Quanto à geometria do espaço da intuição, é fato que “(...) Kant acreditava ter uma estrutura intrinsecamente euclidiana”. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 104) Kant poderia afirmar que geometrias não-euclidianas não seriam mais que exercícios lógicos e que não poderiam referir-se a algo do nosso mundo físico. Porém, a história da física nos mostrou exatamente o contrário. As geometrias não-euclidianas são tão *verdadeiras* quanto a geometria euclidiana. O

³¹⁹Quanto à possibilidade de se construir uma geometria não-euclidiana, Cohen nos diz que “Cayley, Klein e Whitehead mostraram que para toda proposição na geometria Euclidiana existe uma correspondente nas geometrias Lobatchevskiana e Riemanniana, de modo que se houver uma inconsistência em uma das últimas, isto também deve ser encontrado na primeira”. (COHEN, M R. *Reason and nature*, p. 174) O que Cohen nos diz é verdadeiro se restrito ao caso de um *tipo* de consistência dita *relativa*. Enfim, se nesse sentido, as geometrias são equi-consistentes, talvez seja uma questão de conveniência qual geometria deve ser adotada para a descrição de determinado fenômeno físico. Além do resultado a que Cohen se refere, Cayley estudou, nos diz Russell, a “teoria projetiva da distância e ângulo” em seu *Sixth memoir upon quantics* de 1859. O mesmo o fez Klein, cujo trabalho se encontra nos *Math. Annalen* Vols. IV, VI, VII, XXXVI - ver (RUSSELL, B. *Principles of mathematics*, p. 422). Whitehead foi coautor de Russell em seu famoso *Principia*. Quanto aos termos *Lobachevskian* e *Riemannian*, sabemos que Lobatchevsky foi um matemático russo que mostrou ser possível conceber geometrias nas quais o quinto postulado de Euclides não era válido. Faltou mencionar o nome de Bolyai, matemático húngaro, que é também considerado um dos inventores das geometrias não-euclidianas. E quanto à natureza do nosso espaço físico, veremos no apêndice 3.1 que Riemann argumentou ser nossa geometria do espaço somente uma dentre muitas outras matematicamente possíveis.

³²⁰Lobatchevsky foi o primeiro matemático a publicar um trabalho no qual o quinto axioma de Euclides não era válido, embora seja sabido que Gauss foi o primeiro matemático a conceber sistemas geométricos não-euclidianos.

³²¹De modo bastante simplificado, “dados uma reta r e um ponto P não-pertencente à reta, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r ”. É importante dizer que esta formulação do axioma não é a que Euclides utilizou em seu texto *Os Elementos*.

exemplo mais conhecido do uso de geometria não-euclidiana se deveu às teorias da relatividade de Einstein. Vejamos, então, algo a respeito das teorias de Newton e Einstein.

Na física newtoniana, o movimento é descrito por três leis. A segunda lei de Newton é aquela que nos interessa aqui. Ela nos diz que a componente em x da força resultante aplicada à partícula P dotada de massa m e aceleração $\frac{d^2x}{dt^2}$ é dada (no instante de tempo t) por f_x , sendo $f_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$. O termo m é interpretado como uma constante (positiva) e que se refere à massa da partícula. A derivada segunda da função que nos dá a posição $x(t)$ da partícula, $\frac{d^2x}{dt^2}$, refere-se à aceleração instantânea da partícula no eixo- x . O termo f_x denotará, então, uma componente do vetor força resultante que *atua* na partícula de massa m . Para o movimento em três dimensões, escrevemos o termo (f_x, f_y, f_z) para a força resultante \vec{f} na partícula P . E o termo t denota o parâmetro tempo. Em mecânica clássica, o tempo *flui* da mesma maneira em qualquer referencial inercial³²².

Historicamente, Albert Einstein desenvolveu primeiro a teoria restrita da relatividade. Foi em 1905 em um artigo cujo título era “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento” que surgiu aquela que viria ser conhecida por teoria restrita³²³ ou teoria especial da relatividade.

³²² Quanto ao termo *referencial inercial*, Landau nos diz que “Para estudarmos os fenômenos mecânicos, precisamos escolher um **sistema de referência**. As leis do movimento não têm, em geral, a mesma forma em sistemas de referência diferentes. Se adotarmos um sistema de referência qualquer, é possível que as leis de fenômenos muito simples assumam formas extremamente complicadas. Em relação a um sistema de referência qualquer, o espaço não é homogêneo nem isotrópico. Isso significa que mesmo no caso de um corpo não interagir com outro, as suas diferentes posições no espaço e as suas diversas orientações não serão equivalentes do ponto de vista mecânico”. (LANDAU, L.D. E LIFCHITZ, E. *Mecânica*, p. 10) Referencial Inercial será exatamente um meio homogêneo e isotrópico, no qual as leis de Newton são válidas. Por termo homogêneo entendemos invariante por translações, e por isotrópico, invariante por rotações.

³²³ De maneira sucinta, porém precisa, a teoria restrita parte de dois princípios, que denominaremos (a) e (b).

Hermann Minkowsky, em seu belo artigo³²⁴ “Space and time”, estabeleceu as bases da geometria subjacente à teoria restrita da relatividade. No contexto de nosso trabalho, iremos apenas contrapor de modo simplificado as teorias de Einstein³²⁵ e Newton visando entender a

a) Princípio da relatividade (covariância das leis da física) – as leis que governam os fenômenos físicos são as mesmas em quaisquer dois sistemas de referência relacionados um ao outro por uma translação uniforme linear. (DUGAS, R. *A history of mechanics*, p. 474)

b) Constância da velocidade da luz – “a velocidade da luz é independente de sua fonte”. (PAULI, W. *Theory of relativity*, p. 5) Costuma-se dizer que a velocidade da luz, denotada por c , assume o mesmo valor em todos referenciais inerciais. A partir de (a) e (b) é possível derivar a matemática básica da teoria restrita da relatividade, a qual parte de um conjunto de transformações denominadas *transformações de Lorentz*. Simplificadamente, elas refletem o fato de observadores que se movem a velocidades distintas medirem valores distintos de distância e tempo. Os observadores deverão se deslocar a velocidades constantes e em linhas retas. Quanto a (b), à época de Einstein, não havia evidência da existência de partículas que pudessem se deslocar a velocidades superiores àquela da luz. Porém, nos dias de hoje, há pesquisadores do CERN que questionam sua validade, visto que medidas efetuadas com neutrinos sugeririam que tais partículas poderiam se deslocar a velocidades superiores a c . Visto que ainda não há consenso (nem referências suficientes) sobre os resultados a respeito das medidas elaboradas por pesquisadores do CERN, é mister esperar por novos experimentos pra que se possa saber se (b) foi violado, ou não.

³²⁴ Ele começa seu artigo com a seguinte proposição: “As visões de espaço e tempo que eu desejo estabelecer perante vocês surgiram do solo da física experimental, e aí encontram sua força. Elas são radicais. Doravante o espaço por si mesmo, e o tempo por si mesmo, estão fadados a desaparecer como meras sombras, e somente um tipo de união deles preservará uma realidade independente”. (MINKOWSKY, H. “Space and time” Em LORENTZ, H.A e EINSTEIN, A. e WEYL, H. e MINKOWSKY, H. *The principle of relativity*, p. 45). A fusão (união, a que Minkowsky se refere) de espaço e tempo em espaçotempo pode ser expressa do seguinte modo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2 c^2 dt^2$$

Na expressão acima, temos um meio para efetuar o cômputo da distância ds entre dois pontos (ditos *eventos*) em um espaçotempo de quatro dimensões, conhecido por espaçotempo de Minkowsky. Ele é descrito por elementos espaciais denotados por x, y, z e o elemento temporal t . A separação espacial entre os eventos é denotada por três componentes espaciais, i.e., dx, dy, dz . A separação temporal é denotada por dt . Na expressão acima para ds^2 , notemos que dt está sendo multiplicado pela velocidade da luz c e pela unidade imaginária i . Resumidamente, o produto de *tempo* por *velocidade* tem dimensão de *espaço*. A unidade imaginária surge por questões técnicas que não interessam à nossa discussão. E é um fato conhecido dos físicos e matemáticos que a geometria de Minkowsky é essencialmente não-euclidiana.

³²⁵ No caso mais amplo, i.e., da teoria geral da relatividade, Einstein assume que “as leis da natureza devem ser de modo que elas sejam equivalentes em todos sistemas de referência; i.e, que elas sejam covariantes sob qualquer mudança de coordenadas”. É sabido que os sistemas de referência em questão devem poder ser associados por um tipo *específico de transformação*. De maneira intuitiva, na teoria geral, as transformações entre sistemas de referencia devem ser tais que “a teoria especial da relatividade deve ser válida para toda região infinitamente pequena do mundo quadridimensional, isso após um sistema de referência adequado ter sido escolhido”. (DUGAS, R. *A history of mechanics*, p. 504) Historicamente, o princípio mais geral (que regeria as transformações de coordenadas

aplicabilidade da geometria à descrição do espaço (ou espaçotempo) da física. Sigamos com esse propósito.

De acordo com teoria restrita da relatividade, a velocidade da luz é finita e seu módulo tem o mesmo valor em todos referenciais inerciais³²⁶. Por meio desta hipótese e da hipótese de *covariância das leis da física* (ver nota de rodapé 29), Wolfgang Pauli nos mostra como os postulados da relatividade restrita nos levam *naturalmente* ao uso de uma métrica não-euclidiana para a descrição dos fenômenos físicos, a qual é exatamente a métrica estudada na geometria de Minkowsky. (PAULI, W. *Theory of relativity*, p. 4-20) O fato de a geometria euclidiana parecer-nos mais *natural*³²⁷ que outras geometrias provém da nossa experiência empírica. Vejamos, então, algumas observações que podemos tecer a respeito dessas notas sobre geometrias e teorias físicas.

Dissemos anteriormente que o geômetra não precisa interpretar *ponto* como posição³²⁸ no espaço físico³²⁹. Vimos, inclusive, que Cohen sugere ser a distinção entre matemática aplicada e pura equivalente àquela entre *teorias interpretadas* e *teorias não interpretadas*. Desde que David Hilbert desenvolveu a primeira axiomática para a geometria euclidiana, cremos que seja razoável aceitar a sugestão de Cohen. É sabido que o estudo de geometria – vista como ciência pura – não requer

entre sistemas de referencias) recebeu o nome de *principio de equivalência*. Devido à complexidade matemática da teoria geral da relatividade, nós nos deteremos com um pouco mais de detalhes somente na teoria restrita.

³²⁶Conforme vimos na nota 322, *Referencial inercial* é o sistema de referência que torna válidas as leis de Newton, de modo que as expressões sejam invariantes por *transformações de Galileu*, as quais refletem a isotropia e homogeneidade do sistema de referência. Sabemos também que *Isotrópico* significa invariante por rotações, e *homogêneo*, invariante por translações. Notemos que tais hipóteses são físicas.

³²⁷A respeito da origem e significado dos postulados geométricos, deixaremos uma breve discussão no apêndice 3.1, no qual analisaremos um artigo de Helmholtz e outro de Riemann.

³²⁸Aliás, tal interpretação não é intuitiva, pois a entidade geométrica *ponto* não é um fato (ou objeto) da nossa experiência empírica.

³²⁹Estamos nos referindo ao espaço da mecânica clássica que deve ser homogêneo e isotrópico.

nenhuma aplicação ou interpretação dos termos presentes nos axiomas da teoria. Aliás, interpretações de entidades matemáticas são sugeridas, em geral, pelo matemático que visa aplicar a teoria. Ora, não subjaz à estrutura formal de uma teoria nenhuma indicação de como interpretar determinado termo ou axioma da teoria. Uma primeira observação que elaboramos é que podemos dividir a matemática em pura e aplicada de acordo com Morris Cohen. Nossa segunda observação requererá uma breve nota sobre as teorias da gravitação de Newton e Einstein. Sigamos com ela.

Quanto à teoria da gravitação de Newton, assume-se a existência de uma força³³⁰ atrativa entre quaisquer dois corpos massivos no universo. Tal força tem módulo expresso, exceto de uma constante multiplicativa, pelo produto das massas dos planetas dividido pela distância quadrática entre os centros de massa dos planetas. A teoria de Newton é de natureza vetorial, visto que os entes matemáticos que representam as forças são vetores. É costume escrevermos para a força gravitacional entre dois corpos de massas m, M separados por uma distância³³¹ r , sendo G uma constante e \vec{u} , um *versor* (vetor cujo módulo é 1, i.e., $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, para $r = \|\vec{r}\|$)

$$\vec{f} = G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

Em geral, a aplicação da segunda lei de Newton ao problema de um corpo de massa m que orbita outro cuja massa é M se resume em encontrar o termo $x = x(t)$ na equação: $f_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = G \frac{Mm}{x^2}$. Na teoria newtoniana, a geometria é euclidiana, como dissemos. *Força* é uma

³³⁰“The areas, which revolving bodies described by radii drawn to an immovable centre of force do lie in the same immovable planes, and are proportional to the times in which they are described”. (NEWTON, I. “Principia” Em HAWKING, S.W (editor) *Over the shoulders of the giants*, p. 765)

³³¹ $\vec{r} = (x, y, z)$.

entidade física presente na teoria do físico inglês, e os vetores são os entes matemáticos que as representam. Já na teoria da gravitação de Einstein, os entes matemáticos receberão outra³³² denominação, i.e., serão chamados de *tensores*³³³. Na mecânica clássica, a distância entre dois pontos no espaço físico é calculada³³⁴ por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Esta expressão é somente uma dentre as várias que podem ser obtidas dentre aquelas dadas por:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx_i dx_j$$

A fim de que a expressão acima faça³³⁵ sentido, é mister que sejam impostas condições aos termos g_{ij}, dx_i, dx_j . Deixaremos os detalhes técnicos de lado – para isso, ver (PAULI, W. *Theory of relativity*, p. 22-41). Enfatizemos que a interpretação dos termos g_{ij}, dx_i, dx_j não está explícita em ds^2 . Para que esta última expressão possa ser entendida como uma métrica, ela deverá satisfazer a algumas propriedades, as quais serão impostas pelo matemático e que não estão subentendidas em

³³²É um fato conhecido dos matemáticos que os vetores podem ser vistos como um tipo particular de tensor. O que é importante é sabermos que, na teoria de Einstein, são necessários outros objetos matemáticos para o desenvolvimento da teoria. Uma observação importante que devemos fazer é que a teoria dos tensores incorpora a dos vetores. De modo mais preciso, um vetor pode ser identificado com um tensor. Podemos dizer que o *espaço matemático dos tensores* contém uma cópia isomorfa do espaço dos vetores. Neste sentido, a análise tensorial estende a vetorial.

³³³Imaginemos que x^μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) sejam coordenadas arbitrárias (cartesianas, ou não) de um ponto P no sistema de coordenadas S . Suponhamos que S' seja outro sistema de coordenadas do mesmo ponto P , sendo que as componentes x'^μ de P em S' sejam funções daquelas componentes de P em S . Em notação matemática, escreve-se: $x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha)$. Esta expressão transforma as coordenadas de P em S nas coordenadas de P em S' . De acordo com a *regra de mudança de coordenadas* de S para S' , é que se classifica o *objeto matemático* (sujeito à regra) como sendo um vetor, tensor, spinor, etc. O conceito de tensor é introduzido visando estender o de vetor por meio da introdução de regras mais gerais de mudanças de coordenadas.

³³⁴Mais uma vez estamos nos referindo ao quadrado da diferencial da função distância (ou métrica) s , i.e., $ds = (dx, dy, dz)$.

³³⁵Mais precisamente, a fim de que a expressão seja uma função denominada *distância* ou métrica, é necessário impor restrições (matemáticas) aos termos presentes na expressão. A análise de tais restrições não nos interessa no contexto do presente trabalho.

ds^2 . Claro que, para que tal expressão seja aplicável às ciências empíricas, serão necessárias também imposições de natureza física. Para uma discussão técnica, deixamos mais uma vez o excelente texto de Pauli, cuja análise³³⁶ matemática da última expressão se encontrará nas seções contidas nas páginas de 34 a 41 do seu *Theory or relativity*.

No caso da teoria de Einstein, a matemática subjacente é mais complexa e envolve aqueles objetos matemáticos ditos tensores. Na teoria de Newton, dissemos que há a entidade física *força*. Na teoria de Einstein, algo diferente³³⁷ ocorre.

Em teoria geral da relatividade, fala-se em curvatura³³⁸ de um espaço-tempo quadridimensional, dada por um tensor, não por um número real (Pauli discutirá isso em detalhes na obra citada, p. 41-44). E, com relação ao termo *curvatura*, vejamos algo.

Quando o físico diz (em teoria geral da relatividade) que “o espaço (espaço-tempo) físico é curvo”, ele quer dizer que o modo de se calcular a distância entre *dois pontos*³³⁹ requer uma expressão que não é aquela dada pela métrica euclidiana. Isso pode ser dito de um modo mais

³³⁶Em seguida, até a página 62, Wolfgang Pauli discutirá algumas aplicações das métricas não-euclidianas (a problemas físicos), sendo que, na página 48, ele analisará a geometria euclidiana como um caso particular. A métrica euclidiana é aquela dada por $ds^2 = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx_i dx_j = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. Enfatizemos que a matemática (aplicada) visa buscar estruturas cada vez mais complexas para que mais fenômenos possam ser descritos matematicamente. No exemplo acima, a métrica euclidiana é somente uma dentre uma imensa quantidade de expressões. A geometria euclidiana é somente *mais uma* geometria. Para o caso euclidiano, identifica-se $g_{ij} = \delta_{ij}$ (tensor delta de Kronecker, i.e.), i.e., $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, e igual a 0 para todos outros casos, sendo que $i, j = 1, 2, 3, 4$.

³³⁷É importante notar que é possível falar em teoria einsteiniana da gravitação e forças em um mesmo contexto, mas esta descrição é apenas uma maneira bastante restrita de se estudar a teoria de Einstein.

³³⁸Na teoria de Newton, a curvatura do espaço é nula, o que é caracterizado pela expressão $g_{ij} = \delta_{ij}$.

³³⁹O termo técnico correto é *evento*. À época da publicação de seu livro *Theory of relativity*, Pauli utilizava o termo *world point* para qualquer ponto no espaço quadridimensional, i.e., dado por suas 3 coordenadas espaciais e uma temporal. (PAULI, W. *Theory of relativity*, p. 21)

preciso e elaborado pelo uso do termo *curvatura gaussiana*. A curvatura gaussiana de uma esfera (uma superfície bidimensional)³⁴⁰ de raio finito (não-nulo) r é dada por $\frac{1}{r^2}$. No caso, $\frac{1}{r}$ é a curvatura de um círculo no plano, e a curvatura gaussiana é o produto de $\frac{1}{r}$ por $\frac{1}{r}$. Cada um desses termos recebe o nome de *curvatura principal* (ou *curvatura*³⁴¹ *de Euler*). É um fato matemático que o produto das curvaturas principais é igual à curvatura gaussiana. De modo bastante simplificado (e para o exemplo acima) a curvatura gaussiana mede o *quanto a esfera deixa de ser plana*. Neste caso, uma esfera não pode ser deformada continuamente até se transformar em uma superfície plana, diferentemente de uma superfície cilíndrica (finita, por exemplo), cuja curvatura gaussiana é nula. Um cilindro pode ser *visto* como um segmento finito de reta que percorre uma circunferência perpendicularmente ao plano que contém a circunferência. E as curvaturas principais do cilindro são devidas às curvaturas de uma circunferência, $\frac{1}{r}$, e de uma reta, que é nula. Assim, é nula a curvatura gaussiana.

Enquanto na teoria de Newton a resultante de forças em um corpo determinará seu movimento no espaço físico, na teoria de Einstein a curvatura do espaçotempo é que será a responsável pela trajetória seguida por um corpo. Neste sentido, a gravidade é produto da curvatura do espaço, não sendo oriunda de uma força no sentido newtoniano. Enfim, é importante dizer que as teorias de Newton e Einstein não

³⁴⁰Pensemos que a esfera se encontra em \mathbb{R}^3 (espaço tridimensional), mesmo sabendo que a curvatura é uma propriedade intrínseca, i.e., ela não depende de medidas elaboradas externamente à superfície. Esse resultado referente à curvatura de uma superfície é dito *Teorema Egrégio de Gauss*.

³⁴¹A curvatura gaussiana de uma superfície bidimensional pode ser obtida pelo produto das curvaturas de duas curvas específicas contidas na superfície, ditas curvaturas principais. Quanto aos detalhes técnicos referentes ao termo *curvatura principal*, ver (ARAÚJO, P.V. *Geometria diferencial*, p. 41). Basta sabermos que *curvatura principal* se refere a curvas, e curvatura gaussiana, a superfícies. E não definimos matematicamente o que são curvas e superfícies, pois tais termos nos parecem bastante intuitivos. Somente ao analisarmos os artigos de Riemann e Helmholtz é que seremos mais precisos quanto a esses termos.

diferirão somente na fundamentação matemática e na interpretação física, mas também nas previsões. Um exemplo muito conhecido é o caso do movimento do periélio³⁴² de mercúrio, cuja análise se mostrou difícil³⁴³ dentro da teoria newtoniana. A teoria de Einstein levou aos resultados observados³⁴⁴ dentro das margens de erro. Agora podemos fazer nossa segunda observação sobre geometrias no contexto de nosso trabalho.

A observação a que nos referimos acima é que a geometria euclidiana não é necessariamente a geometria intrínseca³⁴⁵ do nosso espaço da percepção empírica. Ela é somente uma dentre várias possíveis. É importante lembrarmos de que a métrica euclidiana é somente uma dentre todas que puderem ser obtidas por $ds^2 = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx_i dx_j$. Ora, a fim de que tal expressão seja uma métrica, dissemos serem necessárias algumas imposições de ordem matemática. Para que seja aplicável, é necessário que os termos sejam interpretados fisicamente, como dissemos também. E finalmente, observemos que ambas as teorias de Einstein e Newton são legítimas teorias da gravitação. Mesmo que a teoria de Newton seja mais limitada, ela é muito mais *simples*, i.e, é mais fácil elaborar cálculos com vetores do que com tensores. Para contextos em que efeitos relativísticos puderem ser desprezados, a teoria de Newton será aplicável sem problema algum.

³⁴²Periélio é a posição da órbita de um planeta que se encontra mais próxima do sol.

³⁴³Neste caso, talvez fosse possível *remendar* a teoria de Newton para explicar o avanço do periélio de mercúrio, mas a teoria de Einstein levou às predições corretas sem precisar de alterações. Neste sentido, a teoria de Einstein se mostrou mais simples. Temos um exemplo claro de quão ilusório é um critério de simplicidade em física, que parte da hipótese de ser a geometria euclidiana sempre preferível às demais

³⁴⁴Houve quem contestasse os resultados obtidos por Eddington em Porto Príncipe quanto ao avanço do periélio de mercúrio, mas é fato aceito que a teoria geral leva a previsões corretas quanto ao fenômeno em questão.

³⁴⁵Ora, sequer sabemos se existe tal geometria intrínseca. Diremos algo a respeito disso no apêndice 3.1, ao discutirmos artigos de Helmholtz e Riemman.

3.12 Extensão de linguagens matemáticas

Nossa última observação se refere ao desenvolvimento da matemática. É sabido que todo vetor pode ser identificado com um tensor. Neste sentido, a teoria dos tensores estende a teoria dos vetores. Ora, desde que ambas as teorias vetorial e tensorial podem ser formuladas em uma mesma³⁴⁶ linguagem matemática, a teoria mais geral estende trivialmente aquela que for mais restrita. Um exemplo mais simples é o de um número real r que pode ser identificado com um número complexo do tipo $z = r + i0$. Neste caso, a teoria dos números complexos também estende a teoria dos reais, i.e, o conjunto dos complexos contém uma cópia isomorfa do conjunto dos reais.

Em suma, concordamos com Granger que

Toda ciência se produz numa linguagem, ou seja, mais geralmente num sistema simbólico (...). O uso de um sistema simbólico não é apenas um traço acessório e secundário do conhecimento científico. Só pode haver ciência, no sentido estrito do termo, expressa, ou seja, que represente seus objetos em um sistema simbólico. (GRANGER, G.G. *A ciência e as ciências*, p. 52)

Em alguns contextos, o cientista visa elaborar linguagens (formais) cada vez *mais ricas*³⁴⁷ a fim de sempre poder descrever um número maior fenômenos físicos. No caso do corpo³⁴⁸ dos complexos, a linguagem é *mais rica no sentido de conter mais símbolos* (e.g., i de modo que $i^2 = -1$) e de *permitir que o matemático possa efetuar operações que não podiam ser elaboradas dentro da linguagem do corpo dos reais*. O

³⁴⁶É evidente que pode ser necessária a inclusão de novos símbolos na linguagem da teoria mais *rica*. No nosso exemplo, a teoria dos tensores é a teoria mais rica, ou mais geral.

³⁴⁷Claro que não estamos nos referindo a qualquer tipo de linguagem. Estamos pensando no contexto da lógica em que uma linguagem L estende outra I .

³⁴⁸Tanto os números reais quanto os complexos satisfazem a todos os axiomas da *teoria de corpos*. Neste sentido, a estrutura algébrica dita *corpo* é geral o bastante para descrever tanto o conjunto dos reais quanto o dos complexos.

teorema³⁴⁹ fundamental da álgebra, por exemplo, é formulado na linguagem dos números reais, mas é necessariamente demonstrado no contexto dos números complexos. Por vezes, é importante ao matemático construir domínios³⁵⁰ mais ricos, de modo que seja possível obter sub-domínios que sejam cópias isomorfas³⁵¹ daqueles domínios estendidos. É exatamente o que se observa no caso dos números complexos. Sigamos, então, com a questão da aplicabilidade no contexto da mecânica quântica. Indicaremos agora como obter o formalismo básico da mecânica quântica³⁵² de Heisenberg a partir de um exemplo simples.

3.13 A percepção é estruturante

Lembre-mos de que também visamos mostrar que:

- i- nossa percepção da realidade empírica é estruturante;

³⁴⁹O teorema diz que *toda equação algébrica de grau n a coeficientes reais admite n soluções*. Foi o brilhante Carl Friedrich Gauss quem demonstrou tal teorema, isso em sua tese de doutorado. Aliás, Gauss daria outras demonstrações do teorema ao longo de sua vida.

³⁵⁰Estamos nos referindo a domínios (matemáticos) estruturados. Em princípio, precisamos de um conjunto não-vazio de objetos (o domínio de objetos) e de relações estruturais. Da Silva nos dirá que "*Propriedades estruturais* são propriedades de um domínio que 1) envolvem somente suas relações estruturais e 2) podem ser completamente expressas formalmente (i.e., propriedades estruturais são propriedades formais) (...) Estruturas podem ser caracterizadas como aspectos abstratos formais comuns de domínios isomorfos". (DA SILVA, J.J. *Structuralism and the applicability of mathematics*, p. 232)

³⁵¹Um caso interessante em que temos *domínios isomorfos* é aquele do conjunto de vetores no plano e o conjunto dos números complexos. No primeiro caso, temos uma interpretação geométrica para cada vetor. É sabido que todo número complexo pode ser visto como um par ordenado (a, b) . Interpretados de maneira conveniente, os axiomas referentes à adição e multiplicação de números complexos se referirão à adição e produto escalar entre vetores.

³⁵²Resolvemos analisar outra maneira de justificar a utilização de certas estruturas matemáticas na formulação da mecânica quântica para ilustrarmos melhor nossa visão de como a matemática se aplica à física. Heisenberg criou a teoria, como vimos, por meio de várias analogias. Já a análise de Dirac, por ser posterior àquela do físico alemão, é mais didática – como veremos.

- ii- a matemática é utilizada para a descrição de fenômenos físicos de duas maneiras: expressa dados da experiência e leis da física – tese que já foi discutida, e que retomaremos.

Tomemos, então, o seguinte experimento físico. Seja um cristal homogêneo feito de certo material (e.g., turmalina³⁵³). É sabido que, quando iluminado por um feixe de luz, o cristal desvia-o de um modo específico. Se o feixe (planar³⁵⁴) é emitido formando um ângulo α (não-nulo) com o eixo óptico³⁵⁵ do cristal, observam-se duas situações excludentes: aparecimento³⁵⁶ de uma marca pontual em um detector (e.g., uma chapa fotográfica) ou o não-aparecimento da marca.

Para cada ângulo α entre o eixo óptico e a inclinação do feixe, observa-se que *uma fração*³⁵⁷ (do feixe) proporcional a $\sin^2 \alpha$ é observada na chapa fotográfica. Agora, para um único fóton, o que se pode dizer? Primeiramente, é importante saber que é possível elaborar o experimento para o caso de um único fóton.

³⁵³Um cristal composto de alumínio, ferro, sódio e alguns outros elementos, mas que se comporta como um material homogêneo.

³⁵⁴O feixe e o eixo óptico do cristal deverão estar contidos em um mesmo plano.

³⁵⁵Direção em que os raios são transmitidos com a mesma velocidade.

³⁵⁶Claro que estamos omitindo os detalhes referentes à realização do experimento.

³⁵⁷Não é rigoroso o uso do termo *uma fração do feixe*. O que estamos querendo dizer é que, para o caso de se poder realizar o experimento várias vezes, o número de casos em que se observa a presença de uma marca no detector é proporcional a $\sin^2 \alpha$ e ao número de vezes em que se efetuou o experimento. O que será relevante para nossa discussão é o experimento com uma única partícula, i.e., estamos imaginando o feixe de luz como sendo constituído de partículas. É muito importante notar que se tivermos um feixe de fótons dividido em duas componentes de intensidades distintas (de luz), poderia ser o caso de fótons de um feixe interferir com fótons do outro - o que nunca é observado neste nosso experimento. Mais precisamente, se assumirmos que a intensidade de um feixe possa sempre ser analisada pelo número total de fótons do feixe, poderia ser o caso de, devido a interferências, o cientista encontrar um número maior de fótons no detector que aquele presente no feixe inicial. Isto contraria o princípio conservação da energia. O que se faz em teoria quântica é atribuir probabilidades a cada fóton individual, e não ao feixe visto como *um todo*. A cada fóton estará associada uma função que nos dará a probabilidade de encontrá-lo em dado *estado*, i.e., presente na chapa, ou ausente. Faltou dizer que um fóton *só interfere consigo mesmo*, nunca com outro fóton. Mas, visto que no contexto da discussão a hipótese parece razoável, pois estamos nos colocando na posição de questionar a validade de hipóteses formuladas no contexto da mecânica clássica.

Para o experimento com um único fóton, a situação em que se observa a marca no detector é proporcional ao $\sin^2\alpha$ – sendo o não-aparecimento da marca na chapa fotográfica proporcional a $1 - \cos^2\alpha$. Este resultado é estranho, se visto de acordo com a mecânica clássica. Desde que é possível realizar o experimento para o caso de um único fóton³⁵⁸, a única descrição probabilística compatível com a mecânica clássica nos diria que, conhecidas as condições iniciais do fóton, é possível prever (com certeza) se haverá presença ou ausência de uma marca no detector. E é sabido que tal descrição clássica não é coerente com o que se observa. Excetuando-se o caso de o fóton ser emitido perpendicularmente ou paralelamente ao eixo óptico do cristal, não é possível dizer com certeza o resultado final do experimento. Se o fóton for emitido ortogonalmente ao eixo óptico, o resultado é a ausência de marca no detector. Se for emitido paralelamente, é certa a presença da marca no detector. Estes são os únicos casos de certeza. Isso sugere a introdução de termos referentes a probabilidades, mas de um modo distinto daquele da mecânica clássica, pois parece haver uma noção de probabilidade intrínseca³⁵⁹ à detecção do *estado* do fóton. Ora, visamos preservar a individualidade³⁶⁰ do fóton, i.e., se aceitarmos a hipótese física de que ele é uma partícula, somos obrigados a aceitar que não podemos saber precisamente quando é que vamos encontrar uma marca

³⁵⁸Sabemos que a luz pode ser analisada tanto do ponto de vista ondulatório quanto daquele da mecânica de partículas. Neste segundo caso, as *partículas constituintes da luz* recebem o nome de fótons. E o experimento acima pode ser elaborado tanto para um feixe de fótons quanto para um único fóton.

³⁵⁹Em mecânica clássica, conhecidas as condições iniciais do movimento de uma partícula, é possível dizer com certeza o estado final da partícula. Observemos que *estado físico* é tomado como um ente primitivo para nós. Apenas utilizaremos símbolos para denotar os dois possíveis estados do fóton, i.e, presença ou ausência de marca no detector.

³⁶⁰Não faria sentido dizer que *um pedaço* do fóton é desviado e outro, não. “Uma fração de um fóton nunca é observada”, diz Dirac. ([DIRAC, P.A.M. *Principles of quantum mechanics*, p. 2) O que se observa, no caso de um único fóton, é a presença (ou ausência) da partícula no detector, nada mais. Sua energia, no primeiro caso, é a energia total do fóton emitido. Observemos também que não é de nosso interesse discutir aqui outro aspecto interessante da teoria quântica, que é o estudo das propriedades ondulatórias da luz. Em princípio, tomamos a luz como constituída de fótons, sendo estes, partículas.

no detector ou não. Desde que a descrição clássica é incompatível com o que se observa, seria mister buscar uma outra descrição.

Continuando a explorar nosso exemplo, façamos a seguinte analogia: utilizemos o símbolo $|0\rangle$ para denotar o caso em que não houver marca na chapa fotográfica, e³⁶¹ $|1\rangle$, para o caso em que ocorrer marca na chapa. Ora, sabemos que, exceto em dois casos isolados, sempre haverá uma probabilidade associada à medição do estado final do fóton no nosso detector. Visto que não podemos ter certeza sobre o resultado final do experimento, seria útil pensar em termos de uma espécie de sobreposição³⁶² dos estados (no sentido da coexistência dos estados) $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Visamos entender o fóton como uma partícula que existe em um estado de superposição, o qual é – de alguma maneira – intermediário³⁶³ entre $|1\rangle$ e $|0\rangle$. A fim de que possamos definir um estado intermediário, é razoável saber como *adicionar*³⁶⁴ $|1\rangle$ e $|0\rangle$. O mínimo que devemos esperar é que a *adição de estados físicos seja um estado físico*.

³⁶¹Estamos utilizando $|1\rangle$ para indicar, tanto antes quanto depois da medida, o estado do fóton, mesmo que, após a medida, tudo que tenhamos seja uma marca na chapa. Também é verdade que sempre que o fóton estiver em $|1\rangle$, observaremos uma marca na chapa, e sempre que a observarmos, poderemos afirmar que ele estava em $|1\rangle$.

³⁶²Primeiramente, não parece ser o caso de observarmos objetos em estado de superposição, embora não possamos excluir tal possibilidade. Mas, quanto ao nosso experimento, fótons não são observados diretamente, e não podemos saber realmente se eles existem em um estado de superposição, ou não. No caso do fóton, se quiséssemos *observá-lo* diretamente, seria necessário iluminá-lo com algum tipo de feixe de luz. Feito isto, estaríamos causando uma interferência no estado inicial do fóton. O que importa ao físico é se as hipóteses físicas levam a previsões corretas ou não. Se for o caso de haver acordo entre as previsões e as medições, mesmo que nunca possamos saber como é a realidade material, tudo se passa como se a realidade fosse de acordo com as hipóteses elaboradas a seu respeito. E é isso que importa ao físico. Veremos que o objeto de estudo das ciências empíricas, em particular da física, são as propriedades estruturais do mundo (ou da realidade – se é que existe uma), e não as propriedades materiais.

³⁶³Veremos, em breve, o que é este *estado intermediário*.

³⁶⁴Tal idéia de *adicionar* estados de modo a obtermos um estado intermediário já soa como uma *hipótese estatística*, isso no sentido de *ponderarmos* de algum modo os estados iniciais de modo a obtermos um estado intermediário.

Até aqui, estamos dizendo que sempre que tomarmos dois estados físicos e os virmos como superpostos, a superposição é outro estado físico. Neste sentido, dizemos que a *adição* de estados físicos deve resultar em outro estado físico. O que estamos afirmando é que os termos que representam os estados devem satisfazer a um tipo de propriedade de fechamento com relação à adição, i.e., a *soma de estados físicos é um estado físico*. Claro que a adição se aplica aos termos que denotam os estados físicos. Sabemos haver inúmeras estruturas matemáticas que são fechadas com relação à adição. Dentre elas, encontram-se o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, reais, matrizes finitas, tensores. Mas sabemos que, para uma descrição precisa do fenômeno, devemos introduzir os termos referentes às frequências com que se observa, ou não, a marca no detector. Nós nos referiremos a eles, respectivamente, por λ e β .

Em termos matemáticos, devemos ter que $|0\rangle + |1\rangle = |2\rangle \in S$ sempre que $|0\rangle \in S$ e $|1\rangle \in S$, onde “ $\in S$ ” significa “é um estado físico”. Claro que ainda não sabemos exatamente o que significa “+” na equação acima. Ora, também é necessário poder introduzir os termos relacionados às frequências, os quais são funções do ângulo³⁶⁵ α .

Sabemos que estados físicos e frequências de ocorrência desses estados são fatos distintos. Assim, se quisermos ser mais precisos quanto à descrição do experimento, é necessário incluir outros termos relacionados às probabilidades de se observar (ou não) o fóton no detector. Utilizemos, então, as letras λ e μ a que nos referimos acima, mesmo que não tenhamos dito (ainda) como elas se relacionam³⁶⁶ às

³⁶⁵ $\sin^2 \alpha$ e $1 - \sin^2 \alpha$, como vimos anteriormente.

³⁶⁶Deixaremos a maior parte dos detalhes técnicos do texto de Dirac como referência, pois vimos a relação entre os conceitos da matemática e a mecânica quântica nas seções 3ª e 4ª do capítulo 1º. Mostramos como Heisenberg desenvolveu a teoria quântica. O texto de Dirac, por ser bastante didático, nos pareceu de interesse. Nós o utilizaremos para elaborar nossa discussão a respeito de a realidade física ser estruturante,

probabilidades de se observar (ou não) a presença da marca no detector. Escrevamos $\lambda|0\rangle + \mu|1\rangle = |2\rangle$. Neste caso, entendemos esta expressão do seguinte modo: sempre que $\lambda|0\rangle$ e $\mu|1\rangle$ denotarem estados físicos, $\lambda|0\rangle + \mu|1\rangle = |2\rangle$ também denotará um estado físico. Mesmo que não tenhamos definido o que é a superposição de termos $\lambda|0\rangle$ e $\mu|1\rangle$, o físico-matemático com o mínimo de treino em álgebra linear sabe que seria razoável pensar na estrutura matemática de espaços vetoriais para descrever o experimento acima. Vejamos o porquê disso.

Vetores $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são elementos de um conjunto \mathcal{H} dito espaço vetorial³⁶⁷ (sobre o corpo k). É sabido que vetores podem ser adicionados (entre si) e multiplicados por elementos do corpo k , ditos escalares. A adição de vetores é um vetor e o produto de um vetor por um escalar é também um vetor. Enfim, vetores denotarão estados e escalares se referirão aos termos associados às probabilidades de ocorrência de tais estados. Vejamos, então, como é possível sugerir o uso da estrutura matemática de espaços vetoriais para a fundamentação básica da mecânica quântica.

Dissemos que estados físicos e probabilidades se referiam a *fatós* distintos. Em geral, vetores e escalares são objetos matemáticos de naturezas distintas³⁶⁸. Ora, se sugerirmos que $|0\rangle$ seja denotado por um vetor \mathbf{v}_0 , e $|1\rangle$ por \mathbf{v}_1 , seria de se esperar que λ e μ se referissem a elementos de k , isso para podermos escrever $\lambda\mathbf{v}_0 + \mu\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, sendo \mathbf{v}_2

i.e, nós atribuímos a ela uma estrutura ao observarmos. Apenas nos deteremos no que for fundamental à discussão do nosso exemplo. Para este caso, a probabilidade de se encontrar o fóton no estado $|1\rangle$ (para o estado $|2\rangle$ ser um vetor de comprimento unitário) é dada por λ^2 . Analogamente, β^2 para $|0\rangle$.

³⁶⁷Não é de nosso interesse discutir a teoria básica dos espaços vetoriais. Apenas definiremos aquilo que for relevante para nosso trabalho, pois não queremos introduzir detalhes que apenas dificultariam a compreensão da nossa tese. Até aqui, basta saber, intuitivamente, que vetores podem ser adicionados e multiplicados de modo a descrever corretamente o experimento de interferência do fóton com o cristal.

³⁶⁸Claro que há casos em que vetores e escalares são elementos de um mesmo conjunto, como é o caso do espaço vetorial dos números reais sobre o corpo dos reais.

utilizado para denotar $|2\rangle$. Neste contexto específico, podemos dizer que “+” se refere à adição de vetores, e a sobreposição de termos λv_0 (μv_1) à multiplicação de um vetor por um escalar. O conjunto de todos³⁶⁹ os estados físicos será descrito por um conjunto de vetores. Para nosso exemplo, temos somente dois estados possíveis. São eles $|1\rangle$ e $|0\rangle$. Estes estados nunca são observados simultaneamente, e neste sentido, são *independentes*. Matematicamente³⁷⁰, diz-se que são denotados por vetores *linearmente independentes*.

Nosso exemplo se refere a um experimento limitado à medição de dois estados³⁷¹. Mostramos na 4ª seção do capítulo 1º que é infinito o número dos possíveis estados físicos relacionados à energia de um sistema atômico simples. Ora, neste caso é razoável utilizarmos um espaço vetorial (sobre o corpo dos complexos³⁷²) cuja dimensão é infinita. Ainda no contexto do experimento, sabemos que o fóton é descrito matematicamente pelo vetor $\lambda v_0 + \mu v_1 = v_2$. É sabido que somente um estado é observado no detector. Sabemos também que é necessário descrever matematicamente³⁷³ o que é observado empiricamente, caso queiramos ser precisos na descrição do

³⁶⁹No nosso exemplo, temos apenas dois estados, mesmo que seja infinito o conjunto de números reais relacionados a $\sin^2 \alpha$ e $1 - \sin^2 \alpha$. Neste caso, teremos um espaço vetorial constituído de dois vetores sobre o corpo dos números complexos. Vimos na quarta seção do capítulo 1º o porquê da utilização de números complexos. Mesmo no caso de haver somente dois estados possíveis, a utilização de números complexos pode ser necessária. Para ver isso, deixamos a título de referencia o texto *Modern quantum mechanics*, de Sakurai. No primeiro capítulo, Sakurai discutirá o conhecido exemplo do spin do elétron, que requer a utilização de um espaço vetorial de duas dimensões sobre o corpo dos complexos.

³⁷⁰De maneira bastante simplificada, um conjunto de dois vetores (não-nulos) é linearmente independente se um vetor do conjunto não for múltiplo do outro.

³⁷¹Nós também diremos, de modo indistinto, *estados medidos, observados, detectados*.

³⁷²Há trabalhos técnicos em que se procura desenvolver um tipo de mecânica quântica em que o corpo sobre o qual se define o espaço vetorial é o conjunto dos quaternions. Mas, isso não é de relevância alguma para nosso trabalho, e parece que sequer é relevante para a fundamentação matemática da mecânica quântica.

³⁷³Dirac também sabia. Lembremo-nos que estamos seguindo o texto *The principles of quantum mechanics*, de Paul Dirac.

experimento e na fundamentação da teoria quântica. De posse de uma álgebra (vetorial) para descrever os estados, Dirac visará obter uma *álgebra dos observáveis*³⁷⁴. Antes de seguirmos com tal álgebra, resumamos o que foi dito a respeito da análise do experimento acima e analisemos com um pouco mais de profundidade as hipóteses (i) e (ii) mencionadas anteriormente.

Partimos de um exemplo referente a um experimento físico que não admitia uma explicação no contexto da física clássica. Indicamos como conceitos elementares da matemática (e.g., vetor) podem ser utilizados na descrição do experimento de espalhamento de um fóton por um cristal. A hipótese física de que o fóton existe em superposição dos estados indicados por $|1\rangle$ e $|0\rangle$ recebe o nome de *princípio da superposição*. Por meio deste princípio é que podemos escrever a seguinte expressão: $\lambda|0\rangle + \mu|1\rangle = |2\rangle$. Dissemos que tínhamos o intuito de analisar duas hipóteses, as quais denotamos por (i) e (ii). A primeira delas se referia ao fato de a *percepção ser estruturante*. E a segunda nos dizia algo que dissemos anteriormente, i.e., que a matemática expressa corretamente os dados da experiência empírica e hipóteses físicas.

Quanto a (i), partilhamos da visão de que as ciências empíricas se aplicam à realidade como a percebemos. Ora, nossa visão está próxima daquela partilhada por Kant. Vejamos, por meio de uma exposição bastante simplificada, algumas das idéias do filósofo alemão que julgamos relevantes para nosso trabalho.

³⁷⁴Definimos na seção 4ª do capítulo 1º o que é um observável e sua relação com as medidas elaboradas pelos físicos. No contexto do experimento de interferência, suporemos que essas e definições são conhecidas pelo leitor. Notemos que o exemplo acima se refere a fótons, aos quais não se aplica a equação de Schrödinger, mas de Klein-Gordon. Nosso exemplo é propedêutico à compreensão de como o físico pode proceder visando *matematizar a natureza*.

Kant³⁷⁵ tratava asserções gerais como atribuições de um predicado (p) a um sujeito (S), i.e., S é p. E quanto às asserções matemáticas, de modo preciso, as sentenças (verdadeiras) serão divididas em analíticas e sintéticas (*a priori* e *a posteriori*). Kant se referia às asserções por *juízos*. De modo esquemático, temos que:

1-Os juízos podem ser de dois tipos: analíticos e sintéticos. Juízos sintéticos são divididos em dois grupos, i.e., sintéticos *a priori* e sintéticos *a posteriori*. Juízos analíticos são aqueles em que a idéia denotada pelo predicado está contida na idéia denotada pelo sujeito. Juízos sintéticos são aqueles em que tal relação não ocorre. Verdades sintéticas *a priori* são aquelas em que a idéia denotada pelo sujeito não contém aquela denotada pelo predicado e que não são empiricamente demonstráveis. Já as verdades sintéticas *a posteriori* são aquelas cuja idéia denotada pelo sujeito também não está contida naquela denotada pelo predicado, mas que podem ser empiricamente verificadas (estas são as *verdades de fato* de Leibniz³⁷⁶). A filosofia (da *Crítica da razão pura*) de Kant foi elaborada para explicar a possibilidade dos juízos sintéticos *a priori*.

2-A forma dos enunciados, segundo Kant, dá-se pela cópula de um predicado a *seu* sujeito. O sujeito e o predicado referem-se a ideias dos objetos representados em nossas consciências. No caso analítico, a representação denotada pelo sujeito do enunciado contém aquela denotada pelo predicado.

³⁷⁵Kant e Leibniz. E nós nos referimos a afirmações que podem ser enunciadas em uma linguagem e se referir à nossa realidade empírica ou somente a fatos da matemática pura.

³⁷⁶Para Leibniz, as asserções verdadeiras se dividiam em dois grupos complementares: verdades de fato e verdades da razão. As verdades da razão são aquelas cujas negações são contradições lógicas. As verdades de fato são asserções cuja negação não implica uma contradição lógica. As primeiras são verdadeiras em todos os mundos possíveis. Retomaremos esta discussão sobre Leibniz adiante, mas somente em notas de rodapé.

3-Além da análise dos conceitos envolvidos em um enunciado sintético, a fim de se conhecer a veracidade do enunciado, far-se-ia necessária sua verificação. No caso da geometria, a construção geométrica é a verificação. No caso da aritmética, a contagem. Mas não é possível verificar que *a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos* para todos os triângulos. Também não é verdade que o simples fato de *7 maçãs juntadas a 5 peras nos darem 12 frutas* é suficiente para concluirmos que é sempre verdadeira a sentença aritmética $5 + 7 = 12$.

4-A *intuição sensível* denota os dados dos sentidos; já a *sensibilidade* é a capacidade de sermos afetados pelo mundo por meio dos sentidos. A sensibilidade empírica é a solução para a possibilidade dos juízos sintéticos *a posteriori*. Já os juízos sintéticos *a priori* dependem de outro tipo de intuição, ditas *intuições puras*. As intuições sensíveis são apresentadas sempre no espaço e no tempo. Estes se impõem aos dados sensoriais como sua forma, sendo a *forma a priori* de toda intuição sensível possível. Espaço e tempo são os moldes que revestem toda intuição sensível.

5-Espaço e tempo são intuições puras. As verificações³⁷⁷ matemáticas se dão na intuição pura. Desde que espaço e tempo são as formas necessárias de toda experiência, e sendo a matemática a ciência, por excelência, do espaço e do tempo, nossa experiência é automaticamente *matematizável*. Isto se dá pelo fato de **nosso mundo** ser um *mundo espaçotemporal*.

³⁷⁷ Quanto à intuição sensível, sabemos que, de acordo com Kant, é necessária a ligação dos conceitos ao sensível a fim de que algo possa fazer parte da nossa experiência. Os próprios objetos matemáticos seriam também construídos a partir das formas a priori, espaciais e temporais da intuição sensível. Números imaginários, por exemplo, que não podem ser construídos em nossa intuição sensível, seriam objetos impossíveis para Kant.

6-O conhecimento matemático é fundado na construção³⁷⁸ de conceitos aos quais nos referimos por símbolos. Estes devem se referir a algo, no caso, a objetos que deverão ser representados na intuição sensível ou na pura. É relevante dizer que a filosofia kantiana nunca eliminou as dúvidas sobre a natureza sintética da aritmética. Ela era incapaz de lidar com números irracionais e imaginários, pois estes não podem ser construídos na intuição pura³⁷⁹. Se a geometria é a *moldura* que impomos às representações do espaço físico, não é óbvio que a aritmética seja aquela imposta às nossas representações do tempo. Houve quem pensou (e.g., Frege) que a geometria seguia os moldes kantianos e que aritmética se daria de acordo com uma *moldura* leibniziana³⁸⁰. Mas, do trabalho de Kant, vemos em que medida ele nos é útil.

³⁷⁸Especificamente falando, “Construir um conceito é apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde”. (KANT, I. “Crítica da razão pura” p. 580. Em DA SILVA, J.J. *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl*, p. 40) E no caso da matemática, “...os conceitos devem estar imediatamente presentes in concreto na intuição pura”. (*Idem, ibidem* p. 41)

³⁷⁹Imaginemos, então, o fatorial de um cardinal transfinito, e.g., no fatorial de $\aleph_{\pi+1}^n$. Tais entidades são legítimas, como nos mostrou Cantor.

³⁸⁰De modo esquemático, para Leibniz, retomando a divisão entre verdades de fato e da razão:

1-as asserções verdadeiras se dividem em dois grupos complementares: verdades de fato e verdades da razão. As verdades da razão são aquelas cujas negações são contradições lógicas. Já as verdades de fato são asserções cuja negação não implica uma contradição lógica. As primeiras são verdadeiras em todos os mundos possíveis .

2-Para Leibniz, uma asserção pode ser analisada como a atribuição de um predicado a um sujeito. Uma asserção verdadeira é aquela em que o predicado está contido no sujeito.

3-Leibniz diferenciará verdades logicamente necessárias de verdades contingentes. As verdades da matemática são verdades da razão, assim, necessárias e *a priori*.

4-Para Leibniz, toda identidade matemática pode ser reduzida a uma instância do princípio de identidade $a = a$. A matemática é, para ele, uma coleção de tautologias. Ele acreditava que toda asserção matemática verdadeira é sempre uma instância do princípio da identidade; inclusive os axiomas da geometria euclidiana deveriam ser redutíveis a instâncias do princípio da identidade.

5-As verdades matemáticas estariam dormentes na mente humana, tendo chegado lá por vontade de Deus. E para Leibniz, “Deus, por seu turno, não imprimiu a matemática apenas na alma humana, mas também na natureza”. (DA SILVA, J.J. *Filosofias da matemática*, p. 92)

Concordamos com Kant que a própria percepção envolve a imposição de uma *forma* àquilo que é percebido. Na visão kantiana, o objeto de nossas representações³⁸¹ mentais não é criado pelas *formas a priori do entendimento*, mas moldado de acordo com elas. Ruscio nos diria que (quanto à posição kantiana)

Transposta em uma linguagem, esta posição conduz a: linguagem contém formas; estas formas funcionam como formas de objetos: é então a linguagem que dá forma ao objeto do qual se fala. (RUSCIO, A. “Pensée formelle et symbolisme chez Gilles Gaston Granger” p. 62 Em *Alguns aspectos do pensamento formal-homenagem a Gilles Gaston Granger*)

Embora não estejamos preocupados com uma abordagem linguística das críticas kantianas, como é o caso de Ruscio, parece-nos relevante esta última citação. Vejamos o porquê.

Kant restringia à intuição pura as verificações matemáticas. E é neste sentido que discordamos do filósofo alemão. Para nós, a matemática não pode restringir-se à intuição pura, pois há conceitos que não podem ser construídos nessa intuição³⁸², como por exemplo a raiz quadrada de um número negativo. Para nós, há outros tipos de intuição, como por exemplo a *intuição formal* ou *simbólica*. Esta³⁸³ intuição é

³⁸¹ Quanto às representações mentais de um sujeito consciente, a “estrutura transcendental do sujeito consciente (formas a priori da sensibilidade e conceitos puros do entendimento) constituem um conjunto de formas presentes a priori no sujeito; essas formas determinam os modos segundo os quais o real (...) receberá a forma de um objeto, forma de ligação a outros objetos (...)” (RUSCIO, A. *Pensée formelle et symbolisme chez Gilles Gaston Granger*, p. 61). Concordamos com Ruscio e Kant, mas não restringimos à intuição pura a construção matemática.

³⁸² Quanto à filosofia transcendental de Kant, Granger opina que “(...) pode-se dizer que a filosofia transcendental tentava introduzir um conteúdo formal no próprio nível do sensível, por meio das formas a priori da sensibilidade (...) (GRANGER, G.G. *Por um conhecimento filosófico*, p. 32). Granger refere-se à tese de que “(...) o elemento sensível fundamental do conhecimento manifesta-se ao mesmo tempo como um conteúdo objetivo, desvinculado de toda referência aos atos de percepção do sujeito e, como substitutivo, ou ao menos a réplica exata, na percepção, do que seria, na linguagem, um certo tipo de símbolo” (*Idem*, p. 33).

³⁸³ À intuição formal associamos um tipo específico de conhecimento dito *simbólico*, i.e., “O conhecimento simbólico tem a ver *exclusivamente* com o modo pelo qual os objetos se relacionam uns com os outros independentemente de suas naturezas particulares ou da natureza particular das operações e relações envolvidas, i.e., com as propriedades formais

constituída por tudo aquilo que puder ser representado³⁸⁴ em uma linguagem formal. No caso dos números complexos, eles são construídos na intuição formal. E, quanto à citação acima de Ruscio, os objetos da matemática são representados (ou constituídos) em uma linguagem puramente formal. Cremos que esteja claro nosso ponto de vista e que é possível seguir com (ii).

Quanto à utilização da matemática para descrever o estado do fóton no experimento de dispersão da luz pelo cristal, o físico parte de dados obtidos empiricamente. Via experimentos é que se chega à conclusão de que, mesmo sendo conhecido o estado inicial da partícula de luz, não é possível ter certeza do seu estado final. Vimos que há sempre uma probabilidade *intrínseca* relacionada à medição do estado do fóton. A hipótese física relevante e que permite a utilização da álgebra vetorial elementar para a descrição do experimento é o princípio³⁸⁵ da superposição. Ora, ao utilizar uma estrutura de espaço vetorial para a análise/descrição do experimento, o físico estará de posse de uma ferramenta matemática muito *mais rica* que aquela dada pela mera utilização de funções trigonométricas (e.g., $\sin^2 \alpha$). Neste último caso, elas servem somente para a descrição de resultados obtidos empiricamente. Pela utilização de vetores, o físico poderá *adicionar*³⁸⁶

de variedades matemáticas gerais de determinado tipo; ele nos diz absolutamente nada a respeito da *natureza específica* dos objetos das variedades.” (DA SILVA, J.J. *Away from the facts - Husserl on symbolic knowledge* p. 22) Os objetos da intuição formal são denotados, obviamente, por símbolos. Estes últimos são os suportes de determinadas operações (matemáticas) exequíveis no contexto de um sistema formal. Para fins da aplicabilidade, exigiremos que as teorias formuladas em linguagens formais sejam consistentes ou que *partes* dessas teorias o sejam.

³⁸⁴Para fins da aplicabilidade, exigiremos que as teorias formuladas em linguagens formais sejam consistentes ou que *partes* dessas teorias o sejam.

³⁸⁵O princípio da superposição também “leva a uma teoria matemática na qual as equações que definem um estado são lineares nas incógnitas”. (DIRAC, P.A.M. *The principles of quantum mechanics*, p. 14) Vimos nas seções 3ª e 4ª do capítulo 1º como a teoria dos operadores lineares é útil à fundamentação da mecânica quântica. Essa última citação nos diz que o princípio da superposição nos leva naturalmente à formulação matemática que discutimos no capítulo 1º.

³⁸⁶Obviamente, o físico adiciona termos matemáticos referentes aos estados.

estados e mesmo elaborar previsões teóricas dentro dessa estrutura matemática. Paul Dirac nos mostrará com algum detalhe (mas sem muito rigor matemático) como obter a estrutura matemática básica da mecânica quântica não-relativística³⁸⁷. Para nós, apenas alguns detalhes básicos da análise de Dirac serão relevantes à nossa discussão. Vejamos, então.

Dirac chamava de *vetor do tipo ket* (ou somente *ket*) os termos que denotavam os estados físicos, i.e., termos do tipo $|\alpha_j\rangle$ (para um índice arbitrário j). Dirac introduzirá também vetores que ele chamará de *bra*, e que serão denotados por $\langle\alpha_k|$. Faltava relacionar os vetores do tipo *bra* àqueles do tipo *ket*. Dirac conhecia um teorema matemático da álgebra linear³⁸⁸ que relacionava vetores e funcionais lineares. É importante lembrar que vimos a definição de operador linear no capítulo 1º. Já um funcional linear φ é uma transformação linear cujo domínio é um espaço vetorial \mathcal{H} e contradomínio é o corpo³⁸⁹ k sobre o qual \mathcal{H} é definido. Em notação³⁹⁰ matemática, escrevemos $\varphi:\mathcal{H} \rightarrow k$, de modo que $\varphi(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w})$. É sabido³⁹¹ que para todo vetor \mathbf{v} pertencente a um espaço de Hilbert³⁹², há um único funcional linear $\varphi_{\mathbf{v}}$ de modo que a ação do funcional em um vetor \mathbf{w} de \mathcal{H} é dada pelo produto escalar de \mathbf{v} por \mathbf{w} , i.e., $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Na notação de Dirac, o produto escalar é denotado

³⁸⁷Dirac analisará, posteriormente, a equação relativística para o elétron do átomo de hidrogênio, a qual recebe o nome de *equação de Dirac*.

³⁸⁸Claro que nos referimos ao teorema de Riesz, que é válido para qualquer espaço de Hilbert, não se limitando a espaços vetoriais de dimensão finita.

³⁸⁹Ou seja, se \mathcal{H} é um espaço vetorial sobre o corpo k , um funcional linear é uma transformação linear do espaço vetorial \mathcal{H} em k , sendo que k é visto como espaço vetorial sobre si mesmo.

³⁹⁰No contexto da matemática pura, é costume utilizar \mathbf{v} ou \vec{v} para denotar um vetor. Somente escreveremos $|\alpha_j\rangle$ quando estivermos nos referindo a estados físicos. A diferença é simples, pois vetores \mathbf{v} e $\lambda\mathbf{v}$ (para λ e \mathbf{v} não-nulos) denotam vetores distintos, enquanto $\lambda|\alpha_j\rangle$ e $|\alpha_j\rangle$ denotarão exatamente o mesmo estado físico.

³⁹¹Via teorema de Riesz.

³⁹²Na seção terceira do capítulo primeiro discutimos o porquê de se utilizar espaços vetoriais de dimensão infinita dotados de um produto interno e que são completos com relação à norma oriunda desse produto. Como sabemos, tais espaços são ditos espaços de Hilbert.

por $\langle v|w\rangle$, e o elo entre *bras* e *kets* é dado por um princípio³⁹³ dito *princípio de dualidade*. Vejamos, então, apenas de maneira intuitiva³⁹⁴, como surgem as noções de operadores lineares e autovalores e autovetores no contexto da mecânica quântica.

Sejam $|\alpha\rangle$ e $|\alpha'\rangle$ estados físicos arbitrários. Por meio de uma operação O , associemos a eles determinados estados físicos $|F_\alpha\rangle$ e $|G_{\alpha'}\rangle$, respectivamente. Suponhamos que à soma de $|\alpha\rangle + |\alpha'\rangle$ esteja associada $|F_\alpha\rangle + |G_{\alpha'}\rangle$ - tal associação também deve se dar pela operação O . Assumamos que $|F_\alpha\rangle + |G_{\alpha'}\rangle$ denota um estado físico. Exigiremos também que $\lambda|\alpha\rangle$ seja levado em $\lambda|F_\alpha\rangle$ por O . Vejamos, então, intuitivamente, a noção de operador linear.

Coloquemos a questão da seguinte maneira: $O|\alpha\rangle = |F_\alpha\rangle$, $O|\alpha'\rangle = |G_{\alpha'}\rangle$ de modo que $O(\lambda|\alpha\rangle + |\alpha'\rangle) = \lambda O|\alpha\rangle + O|\alpha'\rangle$. Essa hipótese a respeito de O é coerente com o princípio da superposição e nos permite (permitiria) introduzir a noção de operador linear, autovalores e autovetores e elaborar uma discussão da relação entre conceitos matemáticos e dados da experiência empírica como fizemos na terceira³⁹⁵ seção do capítulo primeiro. E nesse contexto, O denotará um

³⁹³Tal princípio exerce o papel do teorema de Riesz. De maneira sucinta, o teorema de Riesz permite associar a cada vetor \vec{v} do espaço de Hilbert \mathcal{H} o funcional linear $\varphi_{\vec{v}}(\cdot) = \langle \vec{v} | \cdot \rangle$. O princípio dual permitirá associar a cada vetor do tipo ket $|\alpha_i\rangle$ um único vetor do tipo bra $\langle \alpha_i |$. Precisamente, o princípio dual nos diz que o dual da soma de *kets* $\lambda_i |\alpha_i\rangle + \nu_k |\alpha_k\rangle$ é dado por $\lambda_i^* \langle \alpha_i | + \nu_k^* \langle \alpha_k |$

³⁹⁴Visto que já discutimos no capítulo 1º, com precisão, a relação entre os termos matemáticos e as grandezas empíricas.

³⁹⁵Na seção terceira mostramos o porquê de se utilizar espaços de Hilbert (p. 51 da terceira seção), operadores autoadjuntos (p. 63). No caso da análise desenvolvida por Dirac em seu *Principles of quantum mechanics*, nós não a seguiremos passo a passo, pois estaríamos reescrevendo as seções terceira e quarta deste trabalho. Lembremo-nos de que o exemplo acima se refere ao movimento um fóton, ao qual a equação de Schrödinger não se aplica! Claro que Dirac sabia deste fato e apenas utilizou o exemplo referente ao fóton em seu *principles of quantum mechanics* para justificar a utilização do princípio da superposição na elaboração de uma teoria quântica, mesmo sem dizer qual formulação da teoria ele tinha em mente. No capítulo 5º de seu texto é que Dirac discutirá a formulação de Schrödinger.

operador linear. Quanto à análise subsequente à fundamentação matemática da teoria quântica, ela seria exatamente³⁹⁶ aquela que elaboramos na terceira seção do capítulo primeiro do nosso trabalho. Enfim, chegaríamos ao porquê de se utilizarem espaços vetoriais de dimensão infinita, números complexos e outros conceitos matemáticas na fundamentação matemática da mecânica quântica não-relativística. É exatamente isso o que Dirac fará nos capítulos de 1º a 5º de seu *Principles of quantum mechanics*. No capítulo 5º é que Dirac analisará a equação de Schrödinger. Tal equação, como sabemos, nos permite desenvolver uma dinâmica quântica, i.e., possibilita a análise de como os estados físicos evoluem no tempo.

No contexto da criação da teoria quântica por Heisenberg, o que tínhamos era (de acordo com as seções 1ª e 2ª do capítulo 1º):

1-dados empíricos que não eram corretamente descritos pela antiga teoria quântica de Bohr, Einstein, Planck, Sommerfeld e muitos outros; Heisenberg simplesmente aceitou que a física clássica não se aplicava à descrição dos fenômenos no nível atômico;

2-uma expressão para o oscilador harmônico que não mais se aplicava à descrição correta dos fenômenos atômicos, pois incluía termos que não podiam ser observados diretamente pelos físicos. Dentre eles, a posição de uma partícula. Heisenberg reinterpretou a expressão para o oscilador clássico. Para isso, foi guiado pelo princípio heurístico da correspondência de Bohr, dados³⁹⁷ empíricos e hipóteses físicas, como por exemplo a lei de Planck.

³⁹⁶Ou seja, mostraríamos que O pode ser entendido como um operador autoadjunto associado a um determinado observável, sendo que vetores de um espaço de Hilbert denotariam os estados físicos $|\alpha\rangle$ e $|\alpha'\rangle$. Enfim, chegaríamos à utilidade (em mecânica quântica) do conceito de autovetor, autovalor, etc.

³⁹⁷A lei de Ritz-Rydberg expressava como adicionar as frequências quânticas.

Em seguida, mostramos que Dirac foi capaz de estender a teoria de Heisenberg, obtendo também a equação que leva o nome deste físico alemão. Vimos que Born e Jordan mostraram a relevância da álgebra de matrizes para a fundamentação matemática da teoria criada por Werner Heisenberg. Essa discussão sumariza com precisão a hipótese que denominamos de (ii). Vejamos, agora, o que da Silva nos diz a respeito da existência de objetos abstrata e sua relevância para a epistemologia da matemática.

3.14 Números *existem* ?

Quanto aos objetivos traçados para este capítulo, cremos que 1 tenha sido atingido. Quanto a 2, i.e., à ontologia, o tipo de caracterização que da Silva nos dá do estruturalismo nos remete à visão de que ele

...não nega a existência de objetos matemáticos usuais; ele somente clama que matemática não está *particularmente* interessada neles (...) i.e., o conhecimento matemático não é um conhecimento, ou pelo menos – não exclusivamente – de um tipo particular de objetos. Objetos matemáticos, se eles existem, são somente os suportes de estruturas matemáticas (...). Em uma casca de noz³⁹⁸, teorias matemáticas são somente descrições estruturais de domínios arbitrários de objetos³⁹⁹. (DA SILVA, J.J. “Structuralism and the applicability of mathematics” p. 229)

Pelo menos para fins de aplicação da matemática, é irrelevante se os objetos matemáticos existem⁴⁰⁰ de acordo com os realistas ou não. da Silva ainda nos diz que

³⁹⁸“In a nutshell”. Optamos por traduzir de modo literal.

³⁹⁹Da Silva usa “arbitrary objetal domains”. Optamos por evitar “objetal” devido a peculiaridades da língua portuguesa.

⁴⁰⁰Para Poincaré, “A palavra ‘existência’ não tem o mesmo significado quando ela se refere a uma entidade matemática ou quando se refere a um objeto material. Uma entidade matemática existe desde que não haja uma contradição implicada em sua definição, ou em si mesma, ou com a proposição previamente admitida”. (CHIHARA, C.S *A structural account of mathematics*, p. 17) Para Hilbert, “Se atributos contraditórios são dados a um conceito, eu digo que matematicamente o conceito não existe. Assim, por exemplo, um número real cujo quadrado é -1 não existe matematicamente. Mas se puder

...os ditos objetos matemáticos exercem, não mais que o papel de suporte para as estruturas matemáticas, e que a utilidade da matemática jaz em sua habilidade de prover conhecimento formal⁴⁰¹, aplicável em princípio a *qualquer* contexto material. (DA SILVA, J.J. *On the nature of mathematical knowledge*, p. 5)

O conhecimento que a teoria formal⁴⁰² da aritmética pode nos dar a respeito de seus objetos de estudo é que eles possuem todas, e somente

ser provado que atributos dados ao conceito nunca podem levar a uma contradição pela aplicação de um número finito de inferências lógicas, eu digo que a existência matemática do conceito (por exemplo, de um número ou uma função que satisfaça a certas condições) é entretanto provada. No caso anterior, onde nós nos concernimos (*sic*) com os axiomas dos números reais na aritmética, a prova da consistência dos axiomas é ao mesmo tempo a prova da existência matemática do sistema completo de números reais ou do contínuo". (*Idem*, p. 18) Para ambos os matemáticos, existir é equivalente a estar livre de contradições. Poincaré é bastante claro em sua citação, independentemente do contexto matemático em que nos refiramos à existência de objetos matemáticos. Quanto a Hilbert, mencionemos uma citação devida a da Silva, e com a qual concordamos: "No caso de definições por sistema de postulados, dizemos que o termo definido existe (no caso de uma noção ou termo geral, quando pudermos tomá-la extensivamente e afirmar que o que existe é sua extensão estendida como um objeto) quando o sistema é consistente e toda sua extensão por adjunção de sentenças já admitidas também o é". (DA SILVA, J.J. *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl*, p. 15) Mencionemos, finalmente, a noção de *existência* devida a Newton da Costa. Da Costa desenvolveu um tipo de lógica dita *paraconsistente* e mostrou que a *trivialização* de uma determinada teoria matemática não segue necessariamente da existência de uma *contradição* na teoria. Entretanto, de acordo com da Costa, pode-se definir *existência* por *não-trivialização*. (ver GOMES, E.L. E D'OTTAVIANO, I. M. "Aristotles theory of deduction and paraconsistency" Em *Principia – revista internacional de filosofia* p. 89-90) A respeito da origem e desenvolvimento das lógicas não-clássicas, ver (D'OTTAVIANO, I. M. L. "A Lógica Clássica e o Surgimento das Lógicas Não-Clássicas" Em *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea* p. 11-16).

⁴⁰¹Ora, é claro que não estamos dizendo que a formalização de teorias matemáticas é relevante para que sejam aplicáveis. Um exemplo é a matemática desenvolvida pelos babilônios, a qual era aplicável a problemas elementares, e.g., o cálculo do volume de certos sólidos, e que não tinha absolutamente nada de formal. O que da Silva quer dizer é que o único tipo de conhecimento que a matemática pode nos dar é formal.

⁴⁰²Estamos pensando no conjunto de axiomas não interpretados. Em uma teoria puramente formal, podemos dizer que os objetos existem, mas somente *intencionalmente*. Números naturais, por exemplo, podem ser entendidos como existindo à medida que são úteis em uma teoria matemática (aritmética) e que haja acordo dentre os membros da comunidade científica que pratica aquela ciência. E tal acordo não é um *contrato social*, obviamente, mas a constatação da utilidade os elementos da teoria pelos membros da comunidade científica. Quanto à existência intencional daqueles objetos, ela também está amarrada à consistência lógica. Da Silva nos dirá que "A existência matemática está (...) amarrada de modo íntimo à consistência lógica, assim como Hilbert e Poincaré, dentre muitos, queriam. Entendo que Frege não está muito distante desta perspectiva. O dito princípio do contexto, afinal de contas, nos diz para não perguntar pelo significado de um termo fora do contexto em que ele ocorra. Números são, para Frege, objetos lógicos que existem à medida que eles ocorrem como referentes de termos numéricos no contexto

aquelas, propriedades atribuídas a eles pelos axiomas. A fim de deixarmos clara a idéia de propriedades formais dos objetos, tomemos um exemplo bastante conhecido, a invenção dos números complexos. Ora, veremos que os números complexos exemplificam com clareza a nossa posição de que os objetos matemáticos funcionam exatamente como alicerces para operações (ou estruturas) matemáticas.

Sabemos que a expressão $x^2 + 4 = 0$ admite exatamente duas soluções, i.e, $x_1 = +\sqrt{-4}$ e $x_2 = -\sqrt{-4}$. Também é sabido que não é possível obter uma solução para tal expressão em termos de números reais, pois não existe um número real cujo quadrado seja igual a -4 . Isso felizmente não impossibilitou o desenvolvimento da matemática à época⁴⁰³ de Cardano e Bombelli. Vejamos, então, como é possível lidar com o problema da raiz quadrada de número negativo em um contexto puramente simbólico. Se introduzirmos o símbolo i com a propriedade de $i^2 = -1$ e levarmos-se em conta somente a solução positiva da equação anterior, poderemos escrever:

$$x = \sqrt[2]{4i^2} = 2i$$

Temos na expressão acima a mera justaposição de símbolos, i.e., $2i$. A princípio, sequer falamos na multiplicação do número real 2 por i , embora estejamos operando com os símbolos como se fossem fatores do produto de um número real por i , e embora não saibamos a que classe de números pertencerá i . A expressão $x^2 + 4$ que tomamos é bastante simples, e apenas nos sugeriu a inserção de um símbolo para indicar a raiz quadrada de -1 . Visto que a justaposição de 2 e i nos leva a crer que é possível multiplicar números reais arbitrários b por i , é razoável que

daquilo que Frege tomou por uma teoria lógica, aritmética". (DA SILVA, J.J. *On the nature of mathematical knowledge*, p. 3, nota de rodapé)

⁴⁰³ Não discutiremos aspectos históricos do desenvolvimento da teoria dos números imaginários, apenas mencionaremos aquilo que for relevante para nossa discussão, i.e., o desenvolvimento de uma *álgebra de números complexos*, que exemplificará nossa noção de formal.

pensemos também na adição de números reais a por bi . Claro que esses objetos não podem ser números reais, pois tais números não podem ser soluções de equações do tipo $x^2 - b^2i^2 = 0$. É, então, razoável⁴⁰⁴ assumir que a adição entre números reais e os novos objetos possa ser denotada por $a + bi$. Chamemos a parte denotada por a de *real*, e aquela denotada por bi , de *imaginária*.

Do fato de as partes real e imaginária serem de *naturezas distintas*⁴⁰⁵, suponhamos que a adição de dois objetos denotados por $a + bi$ e $z + wi$ satisfaça a

$$(a + bi) + (z + wi) = (a + z) + (b + w)i$$

Para a multiplicação, visto que sabemos adicionar os novos objetos e que $i^2 = -1$, a fim de sermos coerentes com a definição de adição e de quadrado da unidade imaginária i é razoável sugerir⁴⁰⁶ que

$$(a + bi) \cdot (z + wi) = (az - bw) + (aw + bz)i$$

Nós omitimos, de maneira propositada, algumas *passagens* relevantes⁴⁰⁷. Na nossa definição de adição⁴⁰⁸ está implícita a associatividade da operação. Já na expressão referente à multiplicação, estão implícitas⁴⁰⁹ outras propriedades, como a distributividade da

⁴⁰⁴É importante dizer que estamos apenas *investigando* como entender os novos objetos da teoria, e que não estamos dando definições rigorosas. Estas podem ser encontradas em qualquer livro introdutório sobre variáveis complexas.

⁴⁰⁵No sentido de que o quadrado de um número real é sempre positivo, o que não é verdadeiro com relação à parte imaginária.

⁴⁰⁶Em geral não utilizamos nenhum símbolo para a multiplicação de números, mas somente a justaposição dos símbolos. Para fins de clareza (no contexto acima), denotamos a multiplicação entre números complexos por “.”.

⁴⁰⁷Por exemplo, ao escrevermos $x = \sqrt[2]{4i^2} = 2i$, claro que operamos a expressão da seguinte maneira: $x = \sqrt[2]{a^2b^2} = \sqrt[2]{a^2}\sqrt[2]{b^2} = ab$.

⁴⁰⁸A verificação da associatividade da operação é um fato trivial.

⁴⁰⁹Esta nossa investigação apenas indica um caminho a ser seguido. Haveria várias lacunas a serem preenchidas, caso quiséssemos estudar de modo preciso os objetos do tipo $z + wi$. Se quisermos caracterizar de modo rigoroso estes novos objetos, que chamamos de

multiplicação pela adição. Da nossa investigação intuitiva, podemos *imaginar* que os números complexos $z + wi$ deverão satisfazer algumas propriedades que mencionaremos agora.

Primeiramente, z é um número real, w é um número real e i , um objeto que deve satisfazer a $i^2 = -1$. Chamaremos tal objeto i de *unidade imaginária*. E chamaremos os objetos do tipo $z + wi$ de números complexos. Queremos que a adição de dois números complexos seja associativa e que a multiplicação seja distributiva com relação à adição. Na nossa análise da multiplicação⁴¹⁰, assumimos (implicitamente) não somente a distributividade da multiplicação pela adição, mas a comutatividade (e associatividade) da multiplicação ao escrevermos para a parcela $biwi$ seu correspondente $-bw$. Até aqui, parece-nos razoável sugerir os seguintes axiomas:

1-a adição e a multiplicação de dois números complexos são comutativas;

2-a adição e a multiplicação de dois números complexos são associativas;

3-a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Ora, do fato de os números reais poderem ser obtidos⁴¹¹ pela *anulação* da parte imaginária, podemos postular que $a + 0i = a + 0 = a$. Sabemos que 1 é o elemento neutro (dito unidade) da multiplicação dos reais e 0, o elemento neutro da adição. No caso dos números complexos,

números complexos, é razoável proceder exatamente da maneira pela qual os matemáticos fazem, i.e, dar os axiomas que devem satisfazer aos números complexos.

⁴¹⁰Para o caso da adição, obviamente separamos os termos para reorganizá-los em $(a + z) + (b + w)i$.

⁴¹¹De modo preciso, os números complexos contêm uma cópia isomorfa dos números reais. O conjunto dos reais é isomorfo ao conjunto dos números complexos da forma $x + 0i$.

$0 + 0i$ é o elemento neutro da adição e $1 + 0i$, o elemento neutro da multiplicação. Em suma, podemos escrever:

4- $0 + 0i$ é o elemento unidade da operação de adição entre números complexos.

5- $1 + 0i$ é o elemento unidade da operação de multiplicação entre números complexos.

Também é razoável definir, dado $z = a + bi$, o inverso aditivo de z por $w = -1(a + bi) = -a - bi$. Assim, $z + w = 0 + 0i$. Prova-se, com base no que foi definido até aqui, que w é o único número complexo que satisfaz à última expressão. Assim, podemos dizer:

6- Para todo z , existe um único w , de modo a satisfazer a $z + w = 0 + 0i$.

É menos óbvio o modo de definir o inverso multiplicativo w de $z = a + bi$, i.e., $w = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi)$. Visto que $\frac{1}{a^2+b^2}$ deve ser um número real, devemos requerer que $a^2 + b^2$ não seja nulo. Mas é simples mostrar que $z.w = 1 + 0i$. Se definirmos, então, $w = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi)$ como o inverso multiplicativo de z , podemos provar (de maneira simples) que ele é único. Portanto, escrevemos:

7- Para todo $z = a + bi$, existe um único $w = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi)$ que satisfaz $zw = 1$.

Os axiomas acima⁴¹³ caracterizam os ditos números complexos. Vimos que, por meio de uma investigação preliminar, podemos simplesmente operar com os símbolos de acordo com certas regras. Da Silva nos diz que "(...) a noção de número imaginário surgiu de uma

⁴¹²Omitiremos, a partir de agora, $0i$

⁴¹³Faltou mencionar que é necessário que o corpo seja algebricamente fechado!

decisão ‘irresponsável’ e absolutamente livre de justificativa de conferir dignidade a operações simbólicas sem sentido”. (DA SILVA, J.J. *On the nature of mathematical knowledge*, p. 9) Quanto aos números complexos, é bastante claro que são suportes para determinadas operações algébricas. Ora, historicamente os números complexos foram inventados pelos matemáticos visando resolver equações algébricas. Na citação acima de da Silva, cremos que *livre de justificativa* se refira à questão de o conceito de número imaginário ter alguma relação com nossa intuição sensível. É fato que eles não têm relação com tal intuição e que serviram apenas como ponto de apoio para a realização de operações⁴¹⁴ que não podiam ser efetuadas no conjunto dos números reais. É nesse sentido que os números ditos imaginários existem como suportes⁴¹⁵ das estruturas em que se efetuam determinadas operações. E com relação aos números naturais? Vejamos, inclusive na análise de Frege, o que é relevante para a caracterização de tais objetos.

Por trás da definição de Frege está a idéia de *coleções equinúmericas*. Vimos, na seção referente ao trabalho de Steiner, que Frege define *número de um conceito*. Na mesma direção, Russell definirá um número natural (*o número de uma classe*⁴¹⁶) como *a classe de todas as classes que satisfizerem à propriedade P*, sendo esta propriedade aquela de as classes serem *similares* (equinúmericas). Podemos dizer, por

⁴¹⁴As operações matemáticas a que os números complexos devem satisfazer caracterizam a estrutura algébrica dita corpo. O conjunto dos reais também pode ser visto como um corpo. Mesmo que ambos os conjuntos possam ser exemplos de corpos, o conjunto dos complexos é mais rico que o dos reais no sentido de sua linguagem conter mais símbolos e permitir a realização de operações outrora impossíveis no conjunto dos reais. De maneira técnica, diz-se que o corpo dos complexos é uma *extensão algébrica* daquele dos reais. É costume escrevermos que $\mathbb{C} = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}\}$. Também é costume dizer que \mathbb{C} é o fecho algébrico de $\mathbb{R}[i]$. Quanto à terminologia, basta que saibamos de sua existência.

⁴¹⁵Nós diremos *suportes das estruturas* ou das *operações*, isso sem perda de generalidade e precisão.

⁴¹⁶Para a definição de classe, ver (RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*, p. 19).

exemplo, que o número 2 é o número da classe de todos os casais⁴¹⁷. Ora, para cada marido existe uma única pessoa, dita esposa, que está na relação de *casamento* com seu cônjuge. E não é preciso saber quantos casais há no mundo para falarmos do número da classe de todos os casais. Basta que a relação seja biunívoca⁴¹⁸. Neste sentido de coleções equinúmericas, estamos pensando em números naturais como os aspectos comuns àquelas coleções. Mas, é razoável definir número natural por meio daqueles aspectos? E por que operar somente os aspectos comuns àquelas coleções pode ser útil? Da Silva nos diz que

Isto funciona porque o domínio de números e operações conceituais é isomorfo àquele de numerais e operações simbólicas. Podemos calcular simbolicamente 'jogando com símbolos'. (DA SILVA, J. J. *On the nature of mathematical knowledge*, p. 8)

De modo preciso, o que se dá é que substituem-se números por numerais e operações numéricas por operações simbólicas. Estas são *operações equivalentes*, pois o domínio de todos números (naturais) é isomorfo ao de numerais, e aquele de operações numéricas ao de operações simbólicas.

A conclusão a que chegamos a partir desta análise da natureza de um número (seja complexo, real ou natural) é que existem⁴¹⁹ no contexto

⁴¹⁷Claro que no sentido de a palavra *casal* se referir a um homem e uma mulher nascidos em um país cujas leis não permitem a poligamia, além da ressalva de que o termo *casal* só se aplica a indivíduos que estejam vivos.

⁴¹⁸Poderíamos falar em casais de pavões, anões.

⁴¹⁹Quanto à existência de números, da Silva nos diz também que "A resposta *óbvia* é sim, eles existem; nós realmente falamos deles, investigamos suas propriedades (em particular, suas propriedades estruturais), nós mesmos os utilizamos na vida prática e na ciência". Em seguida nos diz que "acredito que foi Husserl quem deu a melhor resposta à questão: objetos matemáticos são um tipo de objetos intencionais, constituídos ou intuitivamente, em experiências conscientes como abstração, idealização e identificação com base no material extraído do 'mundo de vida' (*Lebenswelt*), ou mais representativamente, por meio, seja de conceitos (objetos matemáticos tidos simplesmente como objetos que caem sob conceitos determinados) ou sistemas simbólicos (...)". (DA SILVA, J. J. *Structuralism and the applicability of mathematics*, p. 229) Esta citação ficará clara no contexto da discussão acima, mesmo sendo ela bastante precisa e já tendo nós discutido os processos de abstração e idealização em matemática no capítulo 2º.

de serem os suportes de operações que caracterizam certas estruturas matemáticas. Vimos no capítulo 1º como foi criado o processo de quantização canônica. Discutimos no capítulo 2º as idéias de Steiner a respeito da quantização canônica e em que sentido discordamos de sua abordagem. Veremos, agora, como é possível explicar o uso de analogias formais em mecânica quântica. Sigamos, então, com o tópico 3 que mencionamos no começo deste capítulo.

3.15 A equação de Dirac e o papel heurístico da matemática

Retomemos o exemplo de um suposto uso de analogia formal, a que se referiu Mark Steiner e que analisamos no segundo capítulo deste trabalho. Vimos que, para o caso de uma partícula livre em mecânica clássica, cuja energia cinética era dada por $E = \frac{1}{2m}p^2$, era possível elaborar as substituições: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $P \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, isso para obtermos $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$. Mostramos que a narrativa (feita por Steiner) de como se dá o processo de quantização canônica se baseia em hipóteses falsas e em uma distorção histórica do desenvolvimento de tal processo. Também dissemos que a equação de Schrödinger, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$, não foi desenvolvida por analogia formal. Agora, tomemos um outro exemplo em que uma suposta mera manipulação simbólica de termos teria levado o físico a descobertas. Tal exemplo é a invenção da equação de Dirac. Steiner⁴²⁰ se deterá também na criação dessa equação.

É sabido que a equação de Schrödinger não é uma equação relativística para o elétron. Dirac se propôs o problema de achar uma equação para o elétron que estivesse de acordo com os princípios da teoria restrita da relatividade de Einstein. Por meio de tal equação, Dirac

⁴²⁰A narrativa de Steiner concernente à invenção da equação de Dirac se baseia também em uma distorção histórica de como se deram os fatos.

previu⁴²¹ a existência de antipartículas, que para muitos físicos foi elaborada via mera manipulação de símbolos matemáticos. Ora, desde que os físicos sabiam que era possível obter a equação de Schrödinger pela substituição que vimos acima, alguns físicos, dentre eles Klein, Gordon e Schrödinger, efetuaram as mesmas substituições *supra* indicadas, mas para a equação $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Esta equação é a versão relativística para a energia do elétron.

As substituições sugeridas, tomadas aqui *ao pé da letra*, nos levam a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{\hbar^2}m^2c^4\right)\psi = 0$$

Tal expressão recebe o nome de *Equação de Klein-Gordon*(KG). Mas qual o problema com ela? Não é uma equação relativística? Sim, mas não é compatível com a equação de Schrödinger, pois nesta última equação, a dependência em relação ao tempo é de primeira⁴²² ordem, ou seja: $\frac{\partial}{\partial t}$ – diferentemente do que se dá com a expressão acima de Klein e Gordon.

Outro *problema* com a equação de Klein-Gordon é que ela não é invariante por *transformações*⁴²³ de Lorentz. Em princípio, tal equação foi descartada. Vejamos, então, o caso da invenção da equação de Dirac.

⁴²¹Antes da descoberta do pósitron em 1932 por Carl Anderson, sequer Dirac sabia realmente o que havia previsto. Na realidade, Dirac aceitou a hipótese de que partículas de energia negativa poderiam existir, como veremos muito em breve. Posteriormente, verificou-se ser possível identificar uma das soluções da equação de Dirac como descrevendo o movimento de uma partícula de massa e spin idênticos ao do elétron, mas carga q oposta àquela do elétron, i.e, $q = +1$. Tal partícula receberia o nome de pósitron, e sua descoberta seria o coroamento do trabalho de Paul Adrien Maurice Dirac.

⁴²²Ora, a dependência temporal denotada $\frac{\partial}{\partial t}$ nos diz que é possível determinar a função de onda da partícula para qualquer instante de tempo a partir do conhecimento da função de onda em qualquer outro instante arbitrário de tempo. Isso não seria válido para o caso de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, que requereria o conhecimento de um maior número de condições referentes à função de onda.

⁴²³As transformações de Lorentz descrevem, no contexto da teoria restrita da relatividade, como as medidas de espaço e de tempo feitas por dois observadores em movimento se relacionam. Elas refletem o fato de observadores que se deslocam a

Em seu artigo seminal, intitulado de *The quantum theory of electron*, Dirac analisará as dificuldades oriundas do uso de KG , e perceberá⁴²⁴ que uma equação relativística para o elétron deveria ser linear com relação ao parâmetro t . Vimos que, no desenvolvimento do processo de quantização canônica, Dirac obteve, primeiramente, a equação de Heisenberg visando elaborar uma operação de diferenciação quântica. Dentre as hipóteses utilizadas pelo físico britânico para a obtenção de diferenciação, lembremos que ele exigiu que aquela operação deveria satisfazer a um determinado critério de linearidade. Por um lado, do ponto de vista da teoria quântica, far-se-ia mister manter o critério de linearidade. Por outro lado, i.e., aquele referente à teoria restrita da relatividade, Dirac sabia que as transformações de Lorentz também eram lineares. Entretanto, seria razoável que uma expressão que descrevesse o movimento do elétron e que fosse compatível com ambas a teorias, da relatividade e mecânica quântica, satisfizesse a algum critério de linearidade com relação aos parâmetros t e x . E, assim, parece-nos bastante plausível a hipótese de linearidade da equação que Dirac visava desenvolver.

Da natureza *quadrática* de KG (e da expressão para a energia relativística do elétron), Dirac percebeu que tanto partículas de carga negativa $-e$ como de carga positiva e poderiam ser descritas por uma mesma equação. Vejamos exatamente o que ele nos diz.

“A equação relativística correta deve poder ser separada em duas partes que não se combinem, e que se refiram respectivamente à carga $-e$ e à carga e ”. (DIRAC, P.A.M. *Quantum theory of the electron*, p. 612)

velocidades distintas medirem valores distintos para espaço e tempo. É importante dizer que o termo *relativístico* não se restringe à invariância por transformações de Lorentz. Tanto é verdade que KG é uma equação (relativística) para partículas de spin zero, mas no contexto da teoria quântica de campos.

⁴²⁴(DIRAC, P.A.M. “Quantum theory of the electron” Em *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, Vol. 117, No. 778 (Feb. 1, 1928), p. 610-624).

Ainda com relação à equação KG , Dirac notará que na possibilidade de se obter expressões idênticas para partículas de carga e e $-e$, caso se aceitasse KG , algo *estranho* poderia ocorrer. Para o caso de KG se aplicar à descrição do movimento de partículas de carga negativa (os elétrons), seria de esperar que suas cargas elétricas pudessem ser invertidas sob a hipótese de pequenas⁴²⁵ perturbações arbitrárias. Mas tal fenômeno não era observado. Disso Dirac notará que as soluções para energias de valores negativos e positivos deveriam, em princípio, poder ser separadas em duas partes que não se combinassem (“two non-combining sets”). Vemos uma indicação clara de que algo deveria ser feito para que se separasse a expressão descritora do movimento do elétron em duas equações. Vejamos, então, como Dirac procedeu em seu artigo, no qual as hipóteses de linearidade e de fatoração (separação das equações) foram fundamentais.

Quanto à hipótese de linearidade, ao buscar a expressão matemática propriamente dita, Dirac vai nos dizer explicitamente que a equação deve ser linear em t , i.e., “desde que o hamiltoniano que buscamos deve ser linear com relação a p_0 , ela também deve ser linear com relação a p_1, p_2, p_3 ”. (DIRAC, P.A.M. *The quantum theory of the electron*, p. 613) Ora, o operador hamiltoniano deve ser linear com relação a todas os termos p_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Estes se referem às componentes do *quadrivetor* momento relativístico. Em suma, Dirac se propôs a tarefa de encontrar, a partir da equação KG , uma expressão da forma $(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc)\psi = 0$.

Outra hipótese que Dirac usará é a de que os coeficientes α_i ($i = 1, \dots, 4$) não deveriam depender das componentes de momento

⁴²⁵ Este fato é um pouco técnico e deixamos referências apenas. Para nós, o que é relevante é que Dirac tinha motivos para fatorar a equação de Klein-Gordon a fim de obter sua equação relativística para o elétron.

$p_j (j = 1, \dots, 4)$ ⁴²⁶. Disso decorrerá que os coeficientes deverão comutar com as componentes de posição $x_k (k = 1, \dots, 4)$, para $x_4 = ict$. Lembremo-nos de que x_j e p_k não comutam. Da hipótese **física** de restringirmos a análise a uma partícula livre, i.e., no vácuo, seria de esperar que o hamiltoniano não dependesse das componentes espaciais (e temporais). Isso decorre da hipótese de isotropia e homogeneidade do espaço, que por sua vez implicaria que os coeficientes α_i deveriam comutar com as componentes p_j . Feitas todas essas hipóteses físicas, somente então Dirac prosseguiu com a manipulação algébrica para obter uma expressão relativística para o elétron. Mais uma vez, enfatizamos que não foi por analogia formal que a expressão foi desenvolvida. (DIRAC, P.A.M. *The quantum theory of the electron*, p. 613) Vejamos de maneira muito resumida a abordagem algébrica de Dirac.

Dirac conhecia a seguinte expressão:

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as matrizes de Pauli e $p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$, para $j = 1, 2, 3$.

Dirac supôs ser possível escrever

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + mc^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$$

E se perguntou a que condições cada coeficiente α_i teria que satisfazer para que a expressão acima fizesse sentido. Após uma empreitada algébrica, o físico britânico descobriu que cada α_i deveria ser uma matriz do tipo 4x4. Somente então Dirac foi capaz de chegar à famosa equação que recebe seu próprio nome e que foi originalmente escrita assim:

⁴²⁶Fato oriundo da mecânica quântica não-relativística para as variáveis dinâmicas.

$$(p_0 + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc)\psi = 0$$

Vejamos agora algumas das previsões que puderam ser elaboradas pelo uso da equação relativística para o elétron.

1-Ela se aplica ao movimento do elétron e é uma equação relativística⁴²⁷ invariante por transformações de Lorentz;

2-Pela equação de Dirac foi possível prever a existência de partículas de energia negativa. Dirac não sabia, *a priori*, o processo envolvido na produção de tais partículas em um laboratório e sequer o que tais partículas significariam;

3-A equação de Dirac só se aplica a partículas de spin $\frac{1}{2}$. (A equação de Klein-Gordon mostrou-se perfeita para a descrição do movimento de partículas de spin nulo);

4-Somente com o advento da eletrodinâmica quântica foi possível compreender a interação entre matéria e energia no nível microscópico.

Quanto a 1, vimos que o físico inglês exigiu que a equação fosse linear e pudesse ser obtida pela fatoração da equação *KG*, a qual é obtida da expressão relativística para a energia de uma partícula. Logo, não é desarrazoado que a equação seja invariante por transformações de Lorentz.

Quanto a 2, é muito importante sermos precisos neste ponto. Anderson detectou em 1932 uma partícula de carga positiva, spin $\frac{1}{2}$, massa idêntica à do elétron e que era produzida por meio de colisões entre partículas em aceleradores. Tal partícula recebeu o nome de pósitron. A produção de pósitrons estava sempre acompanhada da produção de um elétron. Apenas após a descoberta do pósitron, buscou-

⁴²⁷Lembremo-nos que *KG* é uma equação relativística e não é invariante por transformações de Lorentz. De modo preciso, *KG* é uma equação de campo.

se uma interpretação para a equação de Dirac que fosse coerente com a existência⁴²⁸ de pósitrons e elétrons. Ora, Dirac não sabia exatamente o que seria uma partícula cuja energia fosse negativa. Ele procurou desenvolver um modelo físico compatível com a detecção, mesmo que indireta, de tais partículas. O que é importante para a nossa discussão é que, ao fatorar KG , Dirac notou que, para obter uma solução para $\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + mc^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$ seria necessário que os termos α_i fossem, pelo menos, objetos matemáticos quadridimensionais. Se escrevermos $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ para uma solução arbitrária da equação de Dirac, poderia ser o caso de algumas componentes de Ψ serem destituídas de significado físico. Se não existissem pósitrons, é sabido que somente duas componentes de Ψ seriam úteis à descrição de problemas físicos; digamos, ψ_1, ψ_2 . Mas, restaria sempre a possibilidade de as duas componentes restantes ψ_3, ψ_4 poderem ser aplicadas a algum problema físico. O desenvolvimento da física experimental poderia levar o físico à utilização destas últimas duas componentes. Foi exatamente isso que ocorreu com relação à equação de Dirac.

A teoria relativística de Dirac tem por base duas teorias: relatividade especial e mecânica quântica não-relativística. A primeira descreve fenômenos no espaçotempo físico. A segunda refere-se à estrutura da matéria. Ora, as duas teorias são suficientemente gerais

⁴²⁸É sabido que os físicos somente medem valores positivos para energias de partículas. Dirac havia proposto uma explicação para o caso de soluções que pudessem ser interpretadas como descrevendo partículas de energia negativa. Ele imaginou a existência de um *poço de partículas* de energia negativa completamente preenchido e que satisfizessem ao princípio de exclusão de Pauli. Tal princípio nos diz, de maneira simplificada, que para partículas de spin 1/2 há somente uma partícula em cada vaga. Caso surgisse alguma *vaga* no poço, isso poderia ser interpretado como o aparecimento de uma partícula de mesma massa, spin e carga invertida. E, assim, seria possível detectar indiretamente o pósitron. Claro que a sugestão de Dirac está repleta de inconsistências, pois ele nunca disse a origem e nem *onde* estaria tal poço de partículas.

para englobar grande parte dos fenômenos físicos possíveis⁴²⁹. Não nos parece desarrazoado que haja concordância entre experimentos e previsões elaboradas no contexto de uma teoria que vise unificar duas teorias fundamentais. A própria estrutura matemática subjacente à unificação das teorias deve ser rica o suficiente para englobar ambas as teorias. Também não é desarrazoado que em tal estrutura matemática haja termos não interpretados, como ψ_3, ψ_4 acima. Em um determinado contexto, esses termos podem vir a ser interpretados fisicamente (ou não). Mostramos no capítulo 2º que há termos matemáticos que não precisam ser interpretados fisicamente, ou sequer o podem ser. Vejamos as conclusões a que podemos chegar com relação à invenção da equação de Dirac no contexto da nossa discussão sobre o uso de analogias formais.

Primeiramente, é necessário repetir que Dirac desenvolveu uma equação relativística para o elétron a partir de algumas hipóteses. Dentre elas, a hipótese de linearidade e de fatoração de KG . A obtenção de uma equação relativística para o elétron que satisfizesse as hipóteses acima requeria que os coeficientes α_i fossem matrizes do tipo 4×4 , como dissemos. Em princípio, duas componentes de uma possível solução $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ para a equação de Dirac pareciam ser destituídas de significado físico – a menos que se assumisse a possibilidade de existência de partículas de energia negativa. É fato que a própria notação⁴³⁰, em que os termos ψ_i funcionam como os suportes de

⁴²⁹Espaço, tempo e matéria são os elementos mais gerais com os quais uma teoria física pode lidar.

⁴³⁰Tomemos um exemplo mais simples, i.e., o algoritmo da multiplicação de números inteiros. Seja $89 \cdot 3 = 267$. Agora, escrevamos $89 \cdot 33 = 89 \cdot (30 + 3) = 2670 + 267 = 2937$. Ora, é conhecido de estudantes do ensino fundamental um arranjo bidimensional para obter o produto de 89 por 33 e que reflete exatamente a última operação efetuada. Tal algoritmo utiliza o sistema de notação decimal e permite a geração *indefinida* de números (*a priori, ao infinito*). De maneira simplificada, é sempre possível acrescentar mais um número 3 à operação acima, i.e., $89 \cdot 3, 89 \cdot 33, 89 \cdot 333, 89 \cdot 3333$. Da Silva nos diria que “De acordo com Husserl, nós somos capazes *simultaneamente* de produzir conceitos numéricos, e por meio de sistemas notacionais – que são, claro, sistemas simbólicos, de

determinadas operações, auxilia o físico na elaboração de previsões. Mesmo que a teoria de Dirac não represente o que Steiner chamou de analogia formal, não vemos nenhum problema em justificar o uso de analogias formais na previsão de novos fenômenos físicos. As analogias formais partem do pressuposto de *preservação de forma*, ou, mais especificamente, de algum tipo de estrutura matemática de uma teoria física. Claro que novas relações são definidas e a estrutura matemática é, de algum modo, enriquecida ou estendida. Novos termos são inseridos, novas relações são definidas e surge a possibilidade de realização de novas previsões. Pode ser o caso de algumas previsões vingarem e de termos matemáticos serem interpretados no contexto de alguma teoria física. E isso justifica o porquê de não ser *miraculoso* o fato da

representar simbolicamente os números que eles caracterizam”. (DA SILVA, J.J. *Away from the facts-Husserl on symbolic knowledge* p. 13) e continua na página seguinte “Nós formamos conceitos numéricos simultaneamente com representações simbólicas dos números que eles denotam”. Ora, sistemas notacionais (e.g., o algoritmo de multiplicação que citamos) são utilizados na *geração* de novos números, estando estes associados univocamente às operações efetuadas no contexto do sistema de notação e das quais eles são gerados. Também é claro que somente operamos com números à medida que operamos com suas representações em um sistema notacional. E quanto ao fato de os números gerados em um sistema de notação serem úteis em tarefas básicas do nosso cotidiano (e.g., contagem), podemos dizer que “Desde que o domínio de números e aquele dos símbolos são isomorfos, manipulando símbolos corretamente podemos produzir resultados numéricos corretos”. (*Idem, Ibidem* p. 14)

Outro exemplo importante, mas em um contexto completamente diferente, se deve à teoria de Linus Pauling para os orbitais atômicos. Visto que, para átomos contendo vários elétrons, pode ser bastante complicado obter uma solução para a equação de Schrödinger, omitiremos os detalhes técnicos subjacentes à análise desse exemplo. De maneira assaz simplificada, um átomo *A* é um sistema físico constituído de prótons, elétrons e nêutrons. O número atômico de um átomo *A* (não-ionizado) é dado pela quantidade de elétrons que orbitam o núcleo atômico. Por definição, *orbital atômico* é a região física em que é mais provável detectar um elétron específico de certo átomo *A*. O orbital é caracterizado por números ditos *quânticos*. Tais números surgem naturalmente ao se buscar soluções para a equação de Schrödinger pelo método matemático de separações de variáveis, sendo esses números determinados parâmetros necessários à obtenção da solução. Dado um número atômico, Linus Pauling desenvolveu um diagrama (um arranjo bidimensional) para descrever o orbital atômico relacionado a um elétron arbitrário de um átomo qualquer. Teoricamente, a teoria de Pauling não descarta a existência de elementos de elevados números atômicos, mesmo que muitos deles não tenham sido observados empiricamente. Pode ser que tais elementos nunca sejam observados, mas haverá sempre a possibilidade de serem detectados com o desenvolvimento da química e da física. E, neste último caso, não seria um milagre a concordância entre as previsões teóricas e os experimentos relacionados à descoberta de novos elementos químicos.

possibilidade de alguma teoria física obtida por analogia formal ser um dia útil à ciência. Antes de discutirmos o argumento da indispensabilidade de Quine, é necessário analisar com algum detalhe o aspecto heurístico da matemática, ao qual nos referimos no final do capítulo 2º. Dividiremos nossa análise em algumas etapas. Sigamos com elas. Em seguida, mostraremos como tais etapas nos serão úteis à compreensão do aspecto heurístico da matemática.

1- Aplicação da matemática a si mesma. Vejamos por meio de um exemplo como tal aplicação se dá.

É sabido de estudantes dos cursos de matemática (física, engenharia, etc.) que é possível utilizar a teoria dos números complexos para resolver vários problemas formulados na linguagem dos números reais. Dentre esses problemas, destaca-se o cálculo de integrais reais. Seja, por exemplo, a integral real $I_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$. Podemos definir a seguinte integral complexa: $I_{\mathbb{C}} = \int_{-r}^r \frac{1}{x^2+a^2} dx + \oint \frac{1}{z^2+a^2} dz$, sendo esta última integral calculada sobre o contorno de um semicírculo de raio r ($r \neq 0$). Sem entrarmos em detalhes técnicos, é possível demonstrar que $I_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{a}$, se $a > 0$, ou $I_{\mathbb{R}} = -\frac{\pi}{a}$, para $a < 0$. No caso desse exemplo do cálculo da integral $I_{\mathbb{R}}$, ela é exatamente a componente real da integral complexa obtida pelo processo de limite: $I' = \lim_{r \rightarrow \infty} I_{\mathbb{C}}$. De modo preciso, efetua-se o cálculo de $I_{\mathbb{R}}$ em um contexto *mais amplo* (i.e, $I_{\mathbb{R}}$ é calculada como *parte* de uma integral complexa), e o resultado obtido é *transferido* para o contexto particular. Visto que o conjunto dos complexos contém aquele dos reais como uma cópia isomorfa e que a componente complexa (ou, parte imaginária) de I' é nula, *transfere-se* por meio de um isomorfismo o resultado obtido no contexto mais amplo para aquele particular. Precisamente, identifica-se a integral complexa I' com a integral real $I_{\mathbb{R}}$. Lembremo-nos também de que todo número real r pode ser identificado com um número complexo do tipo $z = r + i0$.

2- Interpretação de estruturas matemáticas.

Vimos no exemplo acima como a matemática pode ser aplicada a si mesma. Nesse exemplo, utilizamos o fato de que toda propriedade que puder ser demonstrada para números complexos do tipo⁴³¹ $z = r + i0$, poderá ser transferida (via isomorfismo) para números reais. Enfim, um número complexo z do tipo acima é interpretado como um número real r . E o que isso pode nos dizer a respeito do aspecto heurístico da matemática? Vejamos.

Suponhamos que, visando estudar um determinado problema físico, o cientista utilize uma teoria específica da física que esteja elaborada em uma linguagem matemática L . Nada impedirá um matemático de procurar por uma linguagem formal⁴³² L' que estenda L . Tomemos, por exemplo, a mecânica quântica não-relativística de Schrödinger elaborada no contexto da teoria matemática dos operadores lineares. Vimos que é possível obter a equação de Schrödinger por meio da reinterpretação de determinadas expressões da mecânica clássica, e.g., $E = \frac{p^2}{2m}$.

Sabemos que, via equação de Schrödinger, é possível desenvolver uma cinemática quântica não-relativística. Visando elaborar uma mecânica quântica relativística, vimos como Dirac foi capaz de desenvolver uma equação relativística que se aplica ao movimento do elétron. No contexto da matemática pura, dissemos que uma possível solução Ψ para $\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + mc^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$ requereria que os termos α_i fossem matrizes do tipo 4×4 . A solução Ψ

⁴³¹Ou para algum $z' = a + b_n i$, de modo que $b_n \rightarrow 0$ por algum processo de limite para $n \rightarrow 0$, como no exemplo sobre integrais.

⁴³²Seremos precisos com relação à *extensão de linguagens formais* no final de nosso trabalho. Neste momento, basta saber que linguagens matemáticas podem ser estendidas pela inserção de símbolos para objetos e relações. Para a linguagem obtida L' obtida a partir da linguagem (inicial) L , devemos ter que toda sentença verdadeira φ formulada em L deve permanecer verdadeira em L' .

recebe o nome de *spinor*⁴³³ (ou *espinor a quatro componentes*) e será representada da seguinte maneira:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, é importante notar que a solução Ψ , antes de interpretada, não se refere a absolutamente nada de nossa experiência empírica. Somente após os termos serem interpretados de algum modo conveniente é que o físico pode dizer que as componentes $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ referem-se ao movimento de uma partícula relativística de carga negativa dotada de energia positiva. E⁴³⁴ $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ poderia ser interpretada de modo a se referir a uma partícula cuja energia seria negativa? Em princípio, χ poderia não ser passível de interpretação, mas não seria *miraculoso*⁴³⁵, caso viesse a ser interpretada de modo a se referir a algo do nosso mundo físico. Sabemos que Dirac sugeriu que χ poderia se referir ao movimento de uma partícula de carga positiva e energia negativa por meio de um modelo físico fictício⁴³⁶. Dirac sugere o seguinte:

⁴³³ Assim como os tensores, espinores são objetos matemáticos dotados de componentes. O modo pelo qual as componentes se transformam sob mudanças arbitrárias de coordenadas determinará se determinado objeto é um tensor ou um espinor. A diferença entre tensores e espinores é que as componentes dos espinores admitem *inversão de sinal* ao findar de determinadas transformações. De maneira simples, pode ocorrer inversão da *direção* de alguma componente de um espinor após a aplicação de uma mudança de coordenadas. Para detalhes técnicos, ver: (DIRAC, P.A.M. *Spinors in Hilbert spaces* p. 26)

⁴³⁴ φ e χ devem satisfazer, respectivamente, às equações (de Weyl-Dirac):

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi + c\sigma \cdot (i\hbar \nabla) \varphi = m_0 c^2 \chi$ e $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi - c\sigma \cdot (i\hbar \nabla) \chi = m_0 c^2 \varphi$ sendo que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Os termos σ_i são matrizes do tipo 2×2 conhecidos por *matrizes de Pauli*. Já os termos φ e χ recebem o nome de *espinores (a duas componentes) de Weyl*.

⁴³⁵ Veremos, em breve, o porquê de não ser desarrazoado que o espinor χ possa ser interpretado de modo a referir a algo da nossa realidade física.

⁴³⁶ Retiramos a citação acima do ensaio *Antimatter*. (ver MAURICE, J. "Antimatter" Em PAIS, A. E MAURICE, J. E OLIVE, I. D. E ATYIAH, S. *Paul Dirac – the man and his work* p. 50)

Aceitemos que, no universo como o conhecemos, quase todos os estados de energia negativa estejam preenchidos e que sua distribuição de carga não seja detectável devido a sua homogeneidade sobre o espaço. Nesse caso, qualquer estado não-preenchido representa uma quebra de tal uniformidade. Isso apareceria como um buraco e seria possível admitir que esses buracos são pósitrons. O princípio da exclusão de Pauli afirma que qualquer estado dinâmico disponível a um elétron pode ser ocupado por somente uma partícula. Um elétron não pode, entretanto, liberar energia ao passar para um estado de energia inferior que já estiver ocupado. (JACOB, M. "Antimater" p. 50)

Ora, de acordo com a sugestão de Paul Dirac, o problema de *detecção* de partículas de energias negativas estaria resolvido, pois o *buraco* ao qual Dirac se refere agiria como uma partícula de carga positiva, energia positiva e massa igual a do elétron. Sempre que um buraco surgisse, ele seria preenchido por um elétron e o par elétron/pósitron (o dito *buraco*) se aniquilaria de modo a liberar energia em forma de partículas energéticas (em geral, fótons), as quais seriam detectadas experimentalmente. Sabido como um pósitron poderia, em princípio, ser detectado, sigamos com nosso objetivo de explicar o porquê de a matemática (e.g., via teoria de espinores de Dirac) ser útil à previsão de novos fenômenos físicos.

A linguagem matemática em que é formulada a teoria dos espinores é muito mais rica que a linguagem em que é formulada a teoria dos vetores. Ao elaborar cálculos no contexto da teoria dos espinores, o físico pode chegar a conclusões não obteníveis *a priori* na linguagem da teoria dos vetores. O físico pode, inclusive, chegar a conclusões referentes à teoria dos vetores. Vimos acima como é possível resolver uma integral real por meio da utilização de técnicas referentes à solução de integrais complexos. Nesse caso, a matemática foi aplicada a si mesma e nenhuma descoberta científica (e.g., de uma partícula) foi realizada. Vejamos, então, o porquê de ser possível elaborar descobertas científicas a partir

da manipulação de símbolos a partir da análise da invenção da equação de Dirac.

No caso da mecânica quântica relativística, uma solução Ψ para a equação de Dirac deve ser necessariamente dotada de quatro⁴³⁷ componentes, como sabemos. A própria notação pode sugerir ao físico algumas perguntas do tipo: é possível interpretar $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ de modo que $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ tenha algum significado físico? Aliás, é sempre possível elaborar perguntas a respeito do significado físico de termos. E muitas vezes, o físico pode se deparar com teorias cujos modelos físicos não refletem⁴³⁸ propriedades do nosso universo observável. E quando às soluções φ e χ , Leite Lopes nos diz que, de acordo com Feynman:

...se um elétron com energia E se propaga com momento linear \vec{p} para o futuro, um elétron com energia negativa $-E$ se propaga com impulso $-\vec{p}$ e este equivale a uma partícula, de carga oposta à do elétron, propagando-se para o futuro com energia positiva e impulso \vec{p} . (LEITE LOPES, J. *A estrutura quântica da matéria* p. 786)

Na citação acima, considera-se, primeiramente, que a componente χ de Ψ se refira a um elétron de energia negativa que se move em *direção ao passado*. Em seguida, mostra-se que é possível interpretar χ de modo

⁴³⁷De maneira precisa, 4 é o número mínimo de dimensões das matrizes α_i requerido para que seja possível obter uma solução matemática para $\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + mc^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$. É importante dizer que não estamos afirmando que pode haver soluções para o caso de qualquer número natural n ($n \geq 4$) de dimensões. Existem restrições matemáticas à obtenção de soluções, as quais não são de nosso interesse.

⁴³⁸Um exemplo bastante conhecido é dito “universo de Gödel”. É sabido que o lógico austríaco Kurt Gödel obteve soluções exatas para as equações de campo de Einstein. Tais soluções podem ser interpretadas de modo a descreverem um universo físico de 4 dimensões que é homogêneo e anisotrópico. A distância entre dois eventos no universo de Gödel é calculada por: $ds^2 = a^2 [dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x} dy^2 + dz^2 - (e^x dy + c dt)^2]$ - para a constante a . No universo de Gödel, uma pessoa pode influenciar seu próprio passado, pois, em tal universo, é possível construir uma família de curvas ditas *curvas fechadas do tipo tempo*. Outra propriedade matemática interessante do universo de Gödel é que ele descreve um meio fluido no qual a matéria está em rotação. É sabido que Einstein considerou interessante a solução de Gödel, mas a descartou por não descrever algo que se pareça com nosso universo observável. Para detalhes matemáticos, ver (STEPHANI, H. *General relativity*, p. 288)

a se referir a uma partícula de energia positiva que se propaga para o futuro, sendo sua massa idêntica a do elétron, e sua carga oposta àquela do elétron. Ora, é irrelevante se pósitrons são elétrons que viajam para o passado, ou elétrons de carga positiva que viajam para o futuro. O que importa é o que os físicos medem nos laboratórios, e para ambas as interpretações, as previsões são exatamente as mesmas. Visto que a matemática é útil para descrever propriedades estruturais da realidade empírica, não é por meio de cálculos matemáticos que os cientistas poderão dizer *exatamente o que é um pósitron*.

A abordagem estruturalista sugerida por da Silva (que mencionamos ao longo deste capítulo) nos permite explicar mostrar o porquê de a matemática ser útil à previsão de novos fenômenos. De modo preciso, a matemática nos permite elaborar previsões puramente estruturais a respeito da nossa realidade empírica. Podemos dizer que:

- 1- O matemático estende teorias matemáticas pela inserção de símbolos para objetos e relações entre objetos, não importando o motivo pelo qual ele é levado a elaborar teorias mais complexas. Não cabe a nós a análise da invenção de estruturas matemáticas, basta sabermos que matemáticos as criam arbitrariamente;
- 2- As teorias matemáticas obtidas pela extensão de antigas teorias podem permitir ao matemático a solução de problemas matemáticos insolúveis no contexto da antiga teoria. Também pode ser o caso de as novas teorias conterem termos matemáticos passíveis de interpretação física. Neste caso, cabe aos físicos testarem a validade, ou não, de hipóteses referentes à interpretação desses termos matemáticos;
- 3- A matemática pode ser útil à descoberta de fatos estruturais da realidade empírica. Desde que nossa percepção da realidade é

estruturante, e que a matemática é uma ciência que trata de estruturas, é razoável que a matemática se aplique à descrição de propriedades da nossa realidade percebida. Enfatizemos que não partilhamos das posições empirista, realista, ou da vertente dita realismo-empirista. Para nós, a visão de que a matemática é uma ciência puramente estrutural, aliada ao fato de nossa percepção da realidade ser estruturante são suficientes para explicar a aplicabilidade da matemática à física;

- 4- Não podemos afirmar que existe uma relação de isomorfismo entre os modelos das teorias matemáticas e aqueles referentes à estrutura da realidade empírica. Se fosse o caso de a relação ser de isomorfismo, seria natural que todo termo matemático em uma teoria admitisse uma interpretação física. Ora, é sabido que não é verdade que toda teoria matemática contenha termos passíveis de interpretação física;
- 5- Visto que a relação entre nossas teorias matemáticas e a estrutura da realidade não é de isomorfismo, pode ser o caso de muitos termos matemáticos não se referirem a nada. Isso não impede o físico de elaborar hipóteses. Foi exatamente isso que Dirac fez. Anderson testou a hipótese de Dirac a respeito da existência de pósitrons.

3.16 O argumento de Quine

Enfim, discutido o aspecto heurístico da matemática, sigamos com a análise do argumento de Quine, como dissemos no começo deste capítulo.

Primeiramente, é importante dizer que não há um único *argumento da indispensabilidade*. Colyvan⁴³⁹ analisará com detalhes vários desses argumentos em seu texto *The indispensability of mathematics*. A nós,

⁴³⁹(COLYVAN, M. *The indispensability of mathematics*).

cabará somente a análise de uma variação do argumento de Quine, dito *argumento da indispensabilidade de Quine-Putnam*. A escolha da análise desse argumento se justificará pelo fato de ele ser bastante geral e abranger aspectos da maioria dos ditos argumentos de indispensabilidade.

Resnik nos dirá, com relação a Quine e Putnam, que

...eles mantêm que aplicar a matemática é uma parte *indispensável* da prática científica. Primeiramente, a linguagem matemática é necessária para prover os cientistas de um aparato para representar descobertas científicas. Referindo-se a objetos é possível aos cientistas a introdução de conceitos como aceleração e vetor de estado em física (...). Em segundo lugar, as leis matemáticas são requeridas para elaborar conclusões não-matemáticas a partir de assunções não-matemáticas que foram formuladas com o auxílio de um vocabulário matemático. Eliminar a matemática seria drasticamente prejudicial à ciência. (RESNIK, M. *Mathematics as a science of patterns*, p. 43)

Em seguida, na mesma página, Resnik nos dirá que

Quine e Putnam enfatizam que, ao usar terminologia matemáticas e premissas, os cientistas não estão meramente usando o formalismo da matemática, *eles estão pressupondo a existência dos objetos matemáticos e a verdade dos princípios matemáticos*.

Antes de discutirmos estas opiniões de Resnik, vejamos como ele enuncia o argumento de Quine-Putnam, ao qual nos referiremos por QP.

Resnik enuncia a tese⁴⁴⁰ da indispensabilidade dividindo-a em três tópicos. Vejamo-los.

“Indispensabilidade: referir a objetos matemáticos e invocar princípios matemáticos é indispensável à prática das ciências naturais”.

“Holismo confirmacional: A evidência observacional para uma teoria científica depende do aparato teórico como um todo assim como das hipóteses individuais constituintes”.

⁴⁴⁰Diremos *argumento* ou *tese* da indispensabilidade.

“*Naturalismo*: a ciência natural é nosso último árbitro de verdade e existência”.
(RESNIK, M. *Mathematics as a science of patterns*, p. 45)

A tese sumarizada nos três itens acima pode ser entendida da seguinte maneira: a matemática é indispensável à ciência, e qualquer evidência para uma teoria científica será também uma evidência para a veracidade do aparato matemático em que a teoria é formulada. Colocado de outra maneira, temos que as ciências naturais são o nosso melhor meio de julgar a verdade e existência de objetos. Ora, aceitas as duas primeiras hipóteses, a veracidade de teorias matemáticas e existência de objetos abstratos ficam à mercê de teorias físicas. Começamos, então, nossa discussão com a análise das citações anteriores do livro de Resnik.

Aceitamos que a matemática é uma ferramenta indispensável⁴⁴¹ à formulação de teorias da física moderna. E é razoável a afirmação de que a ciência atual não pode ser elaborada sem a utilização de uma linguagem matemática. Dissemos que a matemática descreve dados empíricos e leis físicas, mas não aceitamos que, para fins de aplicabilidade de estruturas matemáticas à física, é necessário que objetos matemáticos existam. Veremos, muito em breve, em que medida nós não concordamos com QP.

A física matemática propriamente dita nasceu⁴⁴² com o trabalho de Isaac Newton. É sabido que foi principalmente sobre os ombros dos

⁴⁴¹Alguém poderia dizer que a matemática é uma ferramenta extremamente conveniente, e no momento, indispensável. Claro que não podemos afirmar que a matemática sempre será indispensável ao estudo de fenômenos físicos.

⁴⁴²É sabido que Descartes (no livro 2º de seu *Princípios da filosofia*) enunciou leis do movimento e colisão de corpos. É assaz relevante dizer que, ao pressupor que o espaço físico podia ser visto como *extensão*, ele estava possibilitando a geometrização da física. Também é mister dizer que Kepler elaborou três leis referentes ao movimento orbital dos planetas, as quais seriam muito importantes para o desenvolvimento de uma mecânica dos corpos celestes. E finalmente, mencionemos o físico Galileu Galilei, cuja descrição matemática do movimento de queda livre marca o surgimento da ciência moderna propriamente dita.

gigantes Galileu, Kepler e Descartes que Newton erigiu seu monumental *Principia*. Antes da criação de uma física matemática, o conhecimento científico era essencialmente qualitativo. Ora, dissemos no capítulo 2º que há dois processos referentes à utilização de conceitos matemáticos em ciências empíricas. São eles a abstração e a idealização⁴⁴³. Por meio deles, são isolados os aspectos relevantes à descrição matemática, *ficando de fora* os aspectos qualitativos. O sucesso da utilização da matemática em ciências empíricas é, em grande medida, devido à peculiaridade de a matemática se referir ao estudo de propriedades formais ou estruturais de certos domínios de objetos. O surgimento da ciência moderna está atrelado à utilização da matemática na descrição das leis da física e de experimentos. Quanto a isso, somos remetidos ao desenvolvimento da física matemática moderna, cujas bases foram lançadas a partir dos trabalhos promissores de Kepler, Descartes e Galileu. Vejamos um exemplo bastante ilustrativo, que deixará claro o tipo de descrição com o qual a matemática se ocupa.

Dissemos anteriormente que a lei da gravitação de Newton nos mostra como é possível descrever o movimento de um sistema constituído de dois planetas de massas m e M , sujeitos a uma força gravitacional \vec{F} cujo módulo é $\|\vec{F}\| = G \frac{mM}{r^2}$. Suponhamos $m < M$ e tomemos o centro de massa do planeta de massa M como origem de nosso sistema de referência. É possível mostrar que a órbita de m ao redor de M estará confinada⁴⁴⁴ a um determinado plano e será descrita por uma elipse⁴⁴⁵. Tal curva pode ser imaginada de uma maneira

⁴⁴³Da Silva, em *Mathematics and the crisis of science*, deter-se-á na análise destes processos sob o ponto de vista de Husserl. A crise a que Husserl se refere não reside especificamente na utilização da matemática em ciências empíricas, mas no fato de se acreditar que as entidades matemáticas existam independentemente das teorias em que são construídas.

⁴⁴⁴Isso pode ser dito de uma maneira mais elegante: “o momento angular do sistema se conserva”.

⁴⁴⁵Elipses são curvas geométricas e são úteis em outras áreas do conhecimento científico, como na estatística, análise do crescimento de bactérias, teoria do caos.

bastante simples. Tomemos três pontos distintos A, B, C em um plano, de modo que não haja uma reta que os contenha. Seja r a distância (euclidiana) do ponto C ao ponto A , e s a distância de C a B . Imaginemos todos os pontos C' de modo que a soma das distâncias de C' a A e C' a B seja sempre igual a $r + s$. O conjunto de todos esses pontos determina um *lugar geométrico*, que será uma curva planar dita elipse.

É possível determinar uma expressão geral para qualquer elipse gerada pelo método anterior. Sem perda de generalidade⁴⁴⁶, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2$ é a equação de uma elipse. Ora, a elipse é uma curva bidimensional que pode ser determinada pelo procedimento construtivo acima. E o que isso tem a ver com a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2$? Se tomarmos todos os pontos do tipo (x, y) que satisfizerem à última equação, obteremos exatamente a mesma curva que pode ser construída pelo método acima. Temos aqui duas maneiras de nos referirmos à mesma figura geométrica. Construída uma curva geométrica pelo procedimento anterior, é possível determinar a equação que descreve tal curva. Determinada tal expressão, é possível obter a curva pelo conjunto dos (x, y) que satisfizerem à equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2$. Para cada curva dita elipse, essas determinações são unívocas, i.e., dado um procedimento específico para se construir a curva, existe uma única expressão $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2$ que descreve tal curva, sendo a recíproca verdadeira. Temos, então, duas maneiras *equivalentes* de nos referirmos à elipse. Aliás, o que se tem são duas descrições

Movimento de planetas e crescimento de bactérias não parecem ter *nada em comum*, em princípio. De modo preciso, *materialmente*, eles não têm nada em comum. Mas nada impede que determinadas curvas matemáticas possam ser úteis ao estudo do crescimento de bactérias.

⁴⁴⁶Em um sistema cartesiano ortogonal, e para números reais positivos a, b, d . Claro que estamos supondo que a elipse tem sua equação geral reduzida à forma acima.

(isomorfas) de uma determinada curva⁴⁴⁷ geométrica. E o que isso tem a ver com a teoria de Newton?

No caso da teoria de Newton, não importa de que material é composto cada planeta. Suponhamos que, por algum motivo arbitrário, o planeta cuja massa denotamos por m seja constituído essencialmente de ferro e o planeta cuja massa era M seja constituído de argônio. A curva que o planeta de massa m descreveria ao redor do planeta de massa M seria uma elipse⁴⁴⁸ e . Suponhamos conhecer outros dois planetas constituídos de sódio e carbono, respectivamente, sendo suas massas m e M , estando eles sujeitos à força gravitacional newtoniana. A órbita do planeta de massa m ao redor daquele de massa M seria dada pela mesma expressão para e . Para a determinação de e , basta conhecer m, M, r , além da constante gravitacional G . Também estamos assumindo ser *universal* a constante G . Realmente, não é relevante o conhecimento das propriedades materiais dos planetas, pois a matemática é uma ciência puramente estrutural e os aspectos com que se detém são apenas domínios formais. Também não seria desarrazoado que a expressão para uma curva elíptica pudesse ser útil em outro contexto, e.g., o estudo do crescimento de bactérias - claro que a matemática *pouco se importa* com as bactérias⁴⁴⁹. Retomemos, então, o argumento QP.

⁴⁴⁷Mais uma vez, é importante lembrarmos de René Descartes. Foi ele quem possibilitou a análise de problemas geométricos por meio de equações algébricas. Essa análise é possível desde que haja uma operação de isomorfismo entre a geometria e álgebra. No caso da descrição de uma curva por uma equação, o isomorfismo *capta* exatamente o que é comum às descrições algébricas e geométricas, i.e., a *forma matemática* da curva. No caso da elipse, essa forma pode ser escrita tanto por meio de uma equação quanto pela construção geométrica a que nos referimos.

⁴⁴⁸Claro que estamos supondo que a lei da gravitação de Newton se aplique a todos os corpos materiais do planeta.

⁴⁴⁹Suponhamos, por algum motivo arbitrário, haver uma espécie de bactéria cuja taxa de crescimento satisfaça a uma equação diferencial do tipo $\frac{dq}{dt} = \frac{K}{q^2}$, para q a quantidade de bactérias em um instante t e K uma constante positiva. A expressão para $q = q(t)$ será dada por uma elipse.

No contexto da ciência atual, é correto dizer que a matemática é indispensável às ciências empíricas. E quanto à segunda hipótese da tese QP, não é verdade que a confirmação de uma hipótese científica engloba a verificação de toda a estrutura teórica subjacente. Vejamos isso por meio de um exemplo bastante conhecido pelos físicos modernos. É sabido haver teorias físicas muito mais complexas que a mecânica quântica⁴⁵⁰ não-relativística e a versão relativística de Dirac. Dentre estas, destacam-se as teorias estudadas por Michio Kaku em seu texto *Quantum Field theory – a modern introduction*, ditas teorias quânticas de campo. Lembremo-nos de que Richard Feynman desenvolveu uma teoria da interação entre energia e matéria, amplamente conhecida por eletrodinâmica⁴⁵¹ quântica. Kaku a analisará no capítulo 7º de seu texto tal teoria⁴⁵². Na página 213, ele se deterá em um tipo bastante específico de eletrodinâmica quântica denominada *teoria não-renormalizável*. De maneira simplificada (e sem rigor matemático), vejamos o que é uma teoria não-renormalizável.

Em princípio, sabemos que os físicos utilizam números racionais para descrever medidas empíricas. E é óbvio que toda medida é necessariamente expressa por um número finito. Seria razoável exigir que uma formulação matemática coerente com uma teoria física não admitisse termos de ordem infinita. A formulação matemática da teoria quântica (na década de 30 do século XX) que tratava da interação entre energia e matéria previa termos de ordem infinita⁴⁵³. O processo de

⁴⁵⁰De Heisenberg/Dirac.

⁴⁵¹Não foi Feynman quem propôs a primeira teoria dita eletrodinâmica quântica. Dirac, Heisenberg, Pauli e muitos outros físicos também tentaram elaborar uma teoria da interação entre energia e matéria.

⁴⁵²Existem vários tipos de teorias quânticas de campo denominadas *eletrodinâmica quântica*.

⁴⁵³Tais divergências ocorriam ao se aplicar a teoria a fenômenos referentes à absorção de energia cuja frequência estivesse contida na parte do espectro conhecida por *radiação ultravioleta*.

renormalização⁴⁵⁴ foi criado por Feynman⁴⁵⁵ para eliminar *divergências matemáticas* presentes na formulação da teoria da interação entre energia e matéria. Também é sabido haver teorias⁴⁵⁶ cujos termos infinitos não podem ser eliminados por um procedimento matemático. Por outro lado, muitas dessas teorias não-renormalizáveis são aplicáveis à descrição de fenômenos físicos. Vejamos simplificadamente como tais teorias servem para refutar parte do argumento QP.

Vejamos, então, o porquê de a confirmação de uma teoria física não implicar a confirmação de todo aparato teórico subjacente à teoria. Seja o caso de uma teoria não-renormalizável. É sabido também que há uma concordância⁴⁵⁷ entre experimentos e a teoria matemática da eletrodinâmica quântica⁴⁵⁸ da ordem de 11 casas decimais, tanto para teorias renormalizáveis quanto para não-renormalizáveis. Ora, dissemos que o físico só utiliza números finitos para descrever suas medidas. No caso das teorias não-renormalizáveis, é absurdo supor que os termos de ordem infinita tenham qualquer significado físico, ou que o aparato matemático seja, de alguma maneira, *verdadeiro*. Vejamos agora a parte de QP em que se assume que as teorias físicas são o árbitro supremo dos julgamentos que podemos emitir sobre o mundo.

É importante enfatizar que as teorias físicas são falsificações da nossa percepção empírica. No caso da teoria de Newton, um referencial inercial é um meio isotrópico e homogêneo, como dissemos

⁴⁵⁴Para nossos propósitos, *renormalização* não será mais que um procedimento matemático criado para eliminar divergências matemáticas em teorias físicas.

⁴⁵⁵Schwinger e Tomonaga desenvolveram o processo de maneira independente de Feynman, e foi Dyson quem mostrou a equivalência matemática dos trabalhos dos três físicos em questão.

⁴⁵⁶Ver (KAKU, M. *Introduction to quantum field theory*, p. 213).

⁴⁵⁷Ver (PENROSE, R. "Quantum theory of spacetime" Em HAWKING, S.W. e PENROSE, R. *The nature of spacetime*, p. 78). Penrose nos dirá que, para o caso da teoria geral da relatividade, chega a 14 casas decimais a concordância.

⁴⁵⁸Independentemente de ser renormalizável ou não. Também é importante dizer que não há uma justificativa matemática que estabeleça com rigor o(s) processo(s) de renormalização.

anteriormente. Mas é óbvio que o espaço da nossa percepção visual não é nem homogêneo nem isotrópico. Por exemplo, ao olharmos para uma casa distante e para um lápis encostado em nosso nariz, o lápis nos parecerá maior que a casa. À medida que nos aproximarmos da casa, de modo a ficarmos muito próximos dela, ela nos parecerá maior que o lápis. Assim, podemos notar que o espaço de nossa percepção visual não é homogêneo. A matemática se aplica⁴⁵⁹ ao modelo físico que utilizamos para descrever aquilo que é dito ser nossa realidade empírica. As teorias físicas estão distantes de serem *verdadeiras* descrições dessa realidade. E vejamos também que uma teoria matemática não precisa sequer ser *verdadeira*⁴⁶⁰.

Dissemos que há teorias matemáticas puramente formais, i.e., não-interpretadas. Bem, tomemos os axiomas de Peano mais uma vez. Tais axiomas caracterizam uma determinada estrutura matemática que pode ser interpretada de modo a referir-se a números naturais. Ela também pode referir-se a sequências de barras, como dissemos. E a aritmética dos números naturais é aplicável à contagem, por exemplo, como vimos no capítulo 2. Mas o fato de podermos concluir que há 12 frutas sobre uma mesa, a partir de sabermos que havia 5 peras e 7 maçãs sobre tal mesa, não nos permite dizer que os números 5 e 7 existem. Ora, a mesma inferência a respeito da quantidade de frutas sobre a mesa pode ser elaborada a partir da aritmética de sequências de barras. E para isso bastam as propriedades que chamamos de estruturais, como foi dito anteriormente.

⁴⁵⁹Resumidamente, se quisermos descrever o movimento de uma mosca que voa em uma sala, utilizaremos noções como de *ponto material*, *velocidade instantânea*, *referencial inercial*. Isso no contexto da descrição física. No âmbito da matemática, utilizaremos geometria euclidiana para falar de ponto, cálculo diferencial para falar de velocidade instantânea e o conjunto \mathbb{R}^3 para descrever o espaço físico em 3 dimensões.

⁴⁶⁰Teorias matemáticas puramente formais, i.e., não interpretadas, não são nem verdadeiras nem falsas!

Enfim, das hipóteses de QP, concordamos parcialmente com a primeira, reformulando-a da seguinte maneira: matemática é indispensável à ciência moderna tal como ela é feita nos dias de hoje. E lembremo-nos, claro, de que a *matematização da natureza* tem suas raízes nos trabalhos de Descartes, Kepler e Galileu. Mas a indispensabilidade da matemática se deve ao fato de a *comunidade científica* ter optado por uma descrição quantitativa da natureza em detrimento da qualitativa.

Conclusões

Neste trabalho, procuramos mostrar como é possível explicar a utilidade da matemática em física sem termos de nos comprometer com hipóteses realistas⁴⁶¹ quanto à natureza da matemática. Precisamente, visamos argumentar que não é desarrazoada⁴⁶² a efetividade de conceitos matemáticos na formulação matemática da mecânica quântica não⁴⁶³-relativística desenvolvida primeiramente por Heisenberg.

Também mostramos que a hipótese de Steiner de que nosso universo é *amistoso* (“user friendly”⁴⁶⁴) é desnecessária para explicarmos o quão prolíficos são os conceitos matemáticos empregados em teorias científicas. Enfim, foi no capítulo 3º deste trabalho que nos detivemos em uma discussão um pouco mais filosófica da aplicabilidade da matemática. Fomos guiados por algumas das idéias de Jairo José da Silva a respeito da natureza do conhecimento matemático.

Enfatizemos que os conceitos matemáticos são utilizados para a elaboração modelos físicos da realidade empírica. Mais precisamente, a matemática é útil à descrição de aspectos formais⁴⁶⁵ dessa realidade. As teorias físicas são as redes que *lançamos* para compreender a realidade que percebemos, sendo que elas “podem expressar somente

⁴⁶¹De modo geral, *teorias platônicas*.

⁴⁶²Wigner diria ser “desarrazoado” o fato de muitos dos conceitos da matemática serem úteis à descrição e previsão de fenômenos da nossa realidade empírica. Para ele, era um “milagre”, “um presente maravilhoso que não entendemos e não merecemos” o fato de a matemática ser útil à formulação de teorias físicas tão prolíficas como aquelas do século passado (e.g., mecânica quântica de Heisenberg). (WIGNER, E.P. “The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences” Em *Communications on pure and applied mathematics*, vol.13, 1960)

⁴⁶³Vimos também a criação da equação relativística do elétron no contexto da mecânica quântica relativística desenvolvida por Dirac.

⁴⁶⁴Vimos que foi Mark Steiner quem sugeriu a hipótese antinaturalista, que diz não ser nosso universo indiferente à presença de seres humanos.

⁴⁶⁵Invariantes por isomorfismos. Lembremo-nos de que uma teoria formal é uma descrição de propriedades estruturais partilhadas por todos os seus modelos.

propriedades *formais* de seus domínios, as quais podem subsistir em vários contextos distintos”. (DA SILVA, J.J. *On the effectiveness of mathematics in natural sciences* p. 8) Ilustramos (ver capítulo 2º) como os processos de abstração e idealização são uteis à formulação de uma teoria física. Por meio destes dois últimos processos, *separam-se* as propriedades relevantes à formulação de uma teoria física. A matemática se aplica a uma *descrição estrutural*⁴⁶⁶ da realidade empírica. Ora, se a matemática se aplica a descrições de propriedades formais da realidade empírica, é razoável dizer que o problema da aplicabilidade da matemática à física nos remeterá à aplicabilidade da matemática a si⁴⁶⁷ mesma. Podemos, então, sumarizar nossa tese a respeito da aplicabilidade da matemática da seguinte⁴⁶⁸ maneira:

- i) Nossa percepção da realidade é estruturante. Isso quer dizer que impomos⁴⁶⁹ uma estrutura à realidade percebida;
- ii) As teorias físicas são descrições puramente estruturais da realidade empírica, e toda atividade científica visa à criação e linguagens formais cada vez mais ricas;
- iii) A matemática se aplica às teorias físicas, i.e., ela se aplica a descrições de aspectos estruturais da realidade empírica. Via

⁴⁶⁶Tomemos o caso da mecânica de Newton. Os conceitos da geometria euclidiana se aplicam com grande exatidão a uma descrição bastante específica da realidade empírica. Essa descrição requer a utilização de conceitos assaz relevantes como o de referencial inercial (i.e., um meio isotrópico e homogêneo). Sabemos que nossa realidade empírica não é exatamente o meio isotrópico e homogêneo da mecânica clássica. Mas sabemos também que os conceitos da geometria euclidiana se aplicam à descrição física da realidade empírica, não à realidade *propriamente dita*.

⁴⁶⁷Pois a matemática é uma teoria que lida essencialmente com o estudo de estruturas e a nossa percepção da realidade empírica é estruturante.

⁴⁶⁸Nossa tese se coloca em posição *diametralmente oposta* àquela assumida por Steiner e que nos diz que nosso universo é *user friendly*.

⁴⁶⁹Não importa o que *a realidade seja*, pois o conhecimento que temos dela é necessariamente limitado pelos sentidos da percepção empírica (dos quais somos literalmente reféns). E, nesse caminho de impormos uma estrutura à realidade, estamos necessariamente partindo de uma hipótese transcendental muito próxima daquela de Kant, a qual mencionamos no capítulo 3º. Isso ao discutirmos aspectos elementares da filosofia do pensador alemão.

- abstração e idealização são construídos os modelos físicos aos quais as estruturas matemáticas se aplicarão;
- iv) O aspecto descritivo da matemática se refere à identificação entre estruturas matemáticas e a estrutura da realidade empírica;
- v) A compreensão do aspecto heurístico da matemática nos remeterá à questão da aplicabilidade da matemática a si mesma.

Vejamos um exemplo⁴⁷⁰ bastante elementar para analisarmos com um pouco de rigor a última⁴⁷¹ das afirmações acima. Sejam D e D' domínios estruturados⁴⁷². Seja L_D a linguagem formal (sintaticamente completa⁴⁷³) em que toda sentença φ possa ser interpretada no contexto do domínio D . Tomemos ⁴⁷⁴ $L_{D'}$ por uma linguagem formal que estenda L_D . Suponha que D seja um modelo da teoria⁴⁷⁵ T . Se D' é modelo de uma teoria T' que é uma extensão consistente de T , e se φ é verdadeira

⁴⁷⁰Nosso exemplo é uma adaptação de outro (exemplo), o qual encontramos em um texto de da Silva. (DA SILVA, J.J. *On the effectiveness of mathematics* p. 11-12)

⁴⁷¹As demais afirmações foram discutidas de maneira enfática nos capítulos 1º, 2º e 3º deste nosso trabalho.

⁴⁷²Vimos no capítulo anterior que um domínio estruturado é um conjunto não-vazio em que são definidas determinadas relações entre os elementos do conjunto.

⁴⁷³Uma linguagem L em que é possível demonstrar a veracidade ou falsidade de toda sentença φ que puder ser enunciada nela. Estamos nos restringindo a um caso bastante específico. Claro que as teorias não precisam ser completas e nem mesmo suas extensões serão necessariamente conservativas. Para a discussão de casos mais gerais que aquele que analisamos, ver (DA SILVA, *op. cit.*, p. 11).

⁴⁷⁴ $L_{D'}$ é obtida de L_D pela adição de símbolos e relações de modo que D' seja um domínio estruturado mais rico que D , de modo que toda asserção verdadeira em T seja verdadeira em T' .

⁴⁷⁵No contexto de nossa discussão, uma teoria é o conjunto de todas as proposições obtíveis por meio de derivações lógicas. Russell nos diria (ao se referir à matemática) que é “a classe de todas as proposições da forma $p \rightarrow q$, onde p e q são proposições contendo uma ou mais variáveis...” (RUSSELL, B. *The principles of mathematics*, p. 3).

em T' , então φ deverá ser necessariamente verdadeira⁴⁷⁶ em T . Mas em que sentido esse exemplo é útil para esclarecer (iv)?

Dissemos⁴⁷⁷ que a criação de linguagens formais é relevante para a utilização da matemática em ciências empíricas. Elaborada uma linguagem L_D para a formulação de determinada teoria T , pode ser o caso de tal linguagem não ser *suficientemente rica* para a finalidade de se obter o maior número de sentenças⁴⁷⁸ verdadeiras de T . Ora, é razoável que se desenvolva uma linguagem $L_{D'}$ que estenda L_D (de acordo com o que foi dito no parágrafo anterior). Para ilustrar esse processo de extensão de teorias, e visando encerrar nossa discussão, observemos que foram discutidos (no capítulo 3º) dois exemplos desse processo de desenvolvimento da ciência. Um desses exemplos⁴⁷⁹ é a invenção⁴⁸⁰ dos números complexos. Vimos que a linguagem $L_{\mathbb{R}}$ (na qual a teoria dos números reais foi desenvolvida) é estendida pela inserção de um símbolo⁴⁸¹ para $\sqrt{-1}$ no domínio (dos números reais \mathbb{R}). Mencionamos o teorema fundamental da álgebra, o qual pode ser formulado no contexto de \mathbb{R} , mas é necessariamente demonstrado no contexto de \mathbb{C} .

⁴⁷⁶Claro que supomos ser φ sempre interpretável em ambos os contextos referentes às teorias T' e T .

⁴⁷⁷Aliás, Gilles Gaston Granger discutirá essa tese em seu livro *A ciência e as ciências*.

⁴⁷⁸Para o caso de linguagens de primeira ordem, sabemos da existência de um teorema de completude que relaciona sentenças verdadeiras a teoremas.

⁴⁷⁹O outro exemplo é a utilização da teoria dos tensores em teoria geral da relatividade, sendo que um todo vetor pode ser identificado com um determinado tensor.

⁴⁸⁰Vimos no capítulo 3º como é possível calcular $I_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$ como parte real de $I_{\mathbb{C}} = \int_{-r}^r \frac{1}{x^2+a^2} dx + \oint \frac{1}{z^2+a^2} dz$.

⁴⁸¹Vimos também, no capítulo 3º, como pode ser justificada a introdução de regras (via axiomas) na formulação da teoria dos números complexos.

Apêndice 1.1

Cômputo das freqüências e amplitudes

A fim de determinar os termos relacionados às amplitudes e freqüências, Heisenberg introduziu a hipótese de existência de um *normal state*, i.e, um estado físico fundamental no qual não há emissão de energia via radiação⁴⁸². Tal estado é descrito do seguinte modo:

$$a(n, n - \alpha) = 0, \text{ para } n = n_0 \text{ e } \alpha > 0$$

A existência de um estado fundamental é necessária para a determinação das amplitudes. Por exemplo, se tomarmos $f(x) = -k_0x$, poderemos escrever, onde $k_0 = m\omega_0^2$, os termos da série de Fourier terão como coeficientes:

$$\{a(n, n + \alpha)e^{ti\omega(n, n + \alpha)}\}$$

Mas, a solução para o oscilador harmônico com a função acima admite um único termo na solução (é óbvio que as hipóteses físicas nos dão as condições de contorno). Da existência de um único termo na expansão em série de Fourier, é plausível assumir que somente $a(n, n \pm 1) \neq 0$. Usando a existência de um estado fundamental (condição de contorno), temos que: $a(n, n - 1) = 0$.

Agora, substituindo $a(n, n + \alpha)e^{ti\omega(n, n + \alpha)}$ na equação do movimento (para o único termo não-nulo), obtemos que

$$\omega(n, n \pm 1) = \mp \omega_0.$$

⁴⁸²Dugas usa o termo *normal* (DUGAS, R. *A history of mechanics* p. 574), já van der Waerden, *ground state* (VAN DER WAERDEN, B.L *A source book of quantum mechanics* p.35). Piza se refere a ele como *estado estacionário 'fundamental'*, termo que utilizaremos (PIZA, AF.R. *Mecânica quântica*, p. 21).

Usemos agora a condição de quantização:

$$h = 2\pi m \sum_{\alpha} (\|a(n, n + \alpha)\|^2 \omega(n, n + \alpha) - \|a(n, n - \alpha)\|^2 \omega(n, n - \alpha))$$

Para $n = 0$, teremos:

$$\|a(0,1)\|^2 = \frac{h}{4\pi m \omega_0}$$

Analogamente, para $n = 1$, obteremos:

$$\|a(1,2)\|^2 - \|a(1,0)\|^2 = \frac{h}{4\pi m \omega_0}$$

De $\omega(1,0) = \omega_0$ e $\omega(0,1) = -\omega_0$, é fácil concluir que $\|a(0,1)\|^2 = \|a(1,0)\|^2$. Tal igualdade pode ser entendida fisicamente se nos lembramos de que $a^*(n)_{\alpha} = a(n)_{-\alpha}$, que se traduzirá, para esse caso particular, por: $a(1,0) = a^*(0,1)$.

Por fim, teremos que:

$$\|a(1,2)\|^2 = 2 \frac{h}{4\pi m \omega_0}$$

Devemos notar que a condição de quantização é que estabelece uma relação de recorrência entre os coeficientes $a(n, n + \alpha)$ da série de Fourier. Heisenberg seguirá o procedimento acima para a determinação dos termos relacionados às amplitudes e frequências, mas para um caso geral.

O cômputo dos termos de frequência e amplitude que Heisenberg efetua parte da seguinte função $f(x) = \omega_0 x + \lambda x^2$ (oscilador harmônico amortecido).

O procedimento é exatamente o mesmo para o nosso caso, para o qual $f(x) = -k_0x$. No nosso exemplo, faltou mostrarmos como se calcula a energia total do sistema físico. Vejamos, então.

Parte-se da expressão da energia para o oscilador, que para nosso caso:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{m}{2}\omega_0x^2(t)$$

Repete-se o procedimento utilizado na obtenção dos termos $a(n, n + \alpha)$, agora para a obtenção dos termos $\dot{a}(n, n + \alpha)$. Por fim, obtém⁴⁸³-se:

$$E(n, n - k) = (n + \frac{1}{2}) \frac{h}{2\pi} \delta_{k,0}$$

Comparemos, a título de ilustração, as expressões previstas para as energias clássicas e quânticas:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{m}{2}\omega_0x^2(t) - \text{energia clássica do sistema.}$$

$$E(n, n - k) = (n + \frac{1}{2}) \frac{h\omega_0}{2\pi} \delta_{k,0} - \text{energia quântica do sistema.}$$

Faltou mencionar algo? SIM.

$$E_n = n \frac{h\omega_0}{2\pi} - \text{energia prevista pela antiga teoria quântica.}$$

A primeira das três expressões prevê valores incompatíveis com a experiência. A segunda se aplica ao átomo de hidrogênio, sendo incompatível com os resultados referentes ao espectro do átomo de hélio. A terceira é compatível com os experimentos. É necessário

⁴⁸³ $\delta_{k,0}$ será utilizado para denotar o tensor simétrico dito *delta de Kronecker*.

observar que a descrição de Heisenberg só se aplica a sistemas físicos em que efeitos relativísticos possam ser ignorados. Encerremos este apêndice com um quadro ilustrativo da relação entre as hipóteses físicas e os termos matemáticos relacionados ao computo das frequências e amplitudes.

Hipóteses físicas	Termos matemáticos
Existência de um estado fundamental	$a(n, n - \alpha) = 0$, para $n = n_0$ e $\alpha > 0$
Condição (hipótese) de realidade	$a^*(n)_\alpha = a(n)_{-\alpha}$
Hipótese de quantização	$J = nh$

Apêndice 1.2

Princípios básicos da mecânica quântica não-relativística

Neste apêndice nós nos deteremos em alguns dos princípios da mecânica quântica, os quais são assumidos implicitamente ao se formular matematicamente a teoria.

Princípio do espaço e tempo:

*O espaço é homogêneo, isotrópico e de curvatura nula, o que significa que o espaço é euclidiano. O tempo é homogêneo. (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 4)*

Em mecânica quântica não-relativística, os fenômenos físicos são descritos em espaço e tempo newtonianos. Em mecânica clássica, tal princípio está contido na Lei da Inércia.

Princípio da relatividade de Galileu:

*As leis da física são covariantes por transformações de Galileu. (DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics* p. 4)*

Tal princípio básico nos diz que não são incluídos possíveis efeitos oriundos da teoria restrita da relatividade. Cremos que tal princípio seja óbvio por si mesmo.

Sakai (em DOROBANTU, V. *The postulates of quantum mechanics*, p. 5) inclui o princípio da mínima ação de Hamilton como princípio da mecânica quântica. Podemos pensar essa inclusão por duas maneiras. Primeiramente, do mesmo modo que ocorre em mecânica clássica, na formulação da teoria via princípio de Hamilton. É nesse sentido que

Sakai inclui o princípio de Hamilton. Poder-se-ia pensar em uma formulação da mecânica quântica via *integrais de trajetórias*. Nesta formulação, o princípio de mínima ação é utilizado de maneira bastante particular. Deixamos como referência a tese de doutorado de Feynman (FEYMMAN, R.P. *A new approach to Quantum Theory*), na qual tal formulação foi desenvolvida pela primeira vez.

Por fim, os demais princípios básicos a que Sakai se refere são: superposição, probabilidade e indestrutibilidade. Com exceção do princípio da superposição, os demais não requerem esclarecimentos, pois o *princípio da probabilidade* é equivalente à interpretação que demos aos autovalores dos operadores lineares. O *princípio da indestrutibilidade* nos diz que não há criação nem aniquilação de partículas.

O *princípio da superposição* nos permite elaborar a seguinte associação entre estados físicos e vetores:

$$|f\rangle = \sum_n c_n |f_n\rangle$$

Dirac utiliza (no primeiro capítulo de seu texto *The principles of quantum mechanics*) o princípio da superposição como propedêutica ao uso de vetores para o estudo de estados físicos. Tal princípio nos diz que um sistema físico pode existir em uma superposição de estados, nada mais.

Sabemos que um estado físico pode ser representado por um vetor $|f\rangle$, denotado por uma combinação linear de outros vetores, no caso os vetores de uma base para o espaço vetorial.

Apêndice 1.3

O teorema de Ehrenfest

Neste apêndice, analisaremos (de maneira bastante simplificada) o teorema de Ehrenfest. É sabido que a utilização da estrutura matemática subjacente à formulação da mecânica clássica por colchetes de Poisson nos permite ilustrar como obter o *análogo quântico* dos colchetes, ditos comutadores. O teorema de Ehrenfest nos mostrará como obter uma expressão análoga à segunda lei de Newton para um sistema quântico. Vejamos, então, como obter a segunda lei de Newton no contexto da mecânica quântica.

Seja uma partícula livre, i.e., aquela cuja energia clássica é dada por $E = \frac{1}{2m} p_x^2$. Tomemos a substituição⁴⁸⁴

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

O hamiltoniano quântico será dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2$$

Visto que não utilizamos a notação ' \hat{L} ' em nosso texto, omitiremos o '^'. Conhecido o operador hamiltoniano H , podemos escrever (na descrição de Heisenberg):

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_x, H]$$

⁴⁸⁴Com um domínio $dom p_x$ específico, por exemplo, o espaço das funções de quadrado integrável em \mathbb{R} .

É verdade que $\frac{dp_x}{dt} = 0$, pois p_x comuta com qualquer função polinomial de p_x . Assim, p_x será uma *constante do movimento*.

Analogamente, para x (o operador de posição), sem muito *esforço algébrico*, podemos mostrar que (SAKURAI, J.J. *Modern quantum mechanics*, p. 85):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{m} i\hbar p_x$$

Para $p_x(t) = p_x(0)$, obteremos:

$$x(t) = x(0) + \frac{p_x}{m}(0)t$$

Se nos detivermos no caso de uma *partícula clássica* cuja energia contenha um termo $V(x)$, denotando um potencial⁴⁸⁵, o hamiltoniano quântico poderá ser obtido pela substituição $p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ mais a hipótese⁴⁸⁶ de que $V(x)$ é uma função do operador x . O operador H se escreverá, então, como

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + V(x)$$

Se utilizarmos duas vezes a equação de Heisenberg para x , obteremos (SAKURAI, J.J. *Modern quantum mechanics*, p. 86):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

⁴⁸⁵Uma função com dimensões de energia e que, para nossos propósitos, só dependa da posição da partícula.

⁴⁸⁶A definição precisa de função de um operador requereria conhecimento da análise de Fourier e pode ser encontrada em (JÚNIOR, R.I. *Tópicos na equação de Schrödinger*, p. 43).

Tal expressão se assemelha à segunda lei de Newton, mas, para que possamos traçar uma analogia com base no princípio da correspondência de Bohr, efetuaremos o seguinte procedimento (tomando os *valores esperados* para os termos da igualdade):

$$m \left\langle \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

Tal expressão nos diz que, exceto nas constantes multiplicativas, o *valor esperado do operador derivada segunda de x com relação ao tempo* é o *valor esperado do operador derivada de V com relação a x* . Mas, sob pressupostos físicos plausíveis, poderemos escrever (SAKURAI, J.J. *Modern quantum mechanics*, p. 87):

$$m \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

A expressão acima foi obtida por Ehrenfest. Ela nos dá uma versão da segunda lei de Newton para os valores médios do operador x e de $\frac{\partial V}{\partial x}$. Tal resultado é o que chamamos de teorema de Ehrenfest. Ele está em completo acordo com o princípio da correspondência de Bohr, o qual nos diz, que para sistemas com vários graus de liberdade, as expressões da mecânica quântica devem se reduzir àquelas da mecânica clássica. Claro que tal resultado não diz que a teoria clássica é consequência da quântica, mas que existe uma relação *plausível* entre elas.

Observação final:

A mecânica quântica de Heisenberg foi desenvolvida por meio de um *processo de preservação de estrutura clássica*, no sentido de que certas expressões fossem mantidas sob a condição de serem reinterpretadas. O princípio de Bohr e a hipótese de que somente grandezas observáveis deveriam ser tomadas como necessárias ao desenvolvimento da teoria levaram à formulação da mecânica quântica

de Heisenberg, cujo desenvolvimento posterior levaria ao processo de quantização canônica de Dirac. Para uma descrição mais detalhada do processo de quantização, recomendamos o bom texto de mecânica quântica de Isham. (ISHAM, C.J. *Lectures on quantum theory-mathematical and structural foundations*, seção 5.2).

Apêndice 3.1

Riemann e Helmholtz

Neste apêndice, analisaremos algumas idéias contidas em dois artigos que consideramos muito importantes para nossa compreensão da relação entre geometria e o espaço da nossa percepção empírica. Mais precisamente, o que nos interessa é o porquê de a geometria euclidiana nos parecer mais *natural* que as não-euclidianas, isso do ponto de vista da sua aplicabilidade à descrição de fenômenos relacionados à nossa percepção espacial. Os artigos a que nos referiremos são “On the hypothesis which lie at the bases of geometry”, de Riemann,⁴⁸⁷ e “The origin and meaning of geometrical axioms”, de Helmholtz⁴⁸⁸. Começemos pelo excelente artigo de Riemann⁴⁸⁹.

Riemann visa analisar algumas propriedades métricas de superfícies geométricas, que, no caso geral, são chamadas de *variedades*⁴⁹⁰. Antes de começar sua análise das propriedades métricas que julga mais importantes, ele indicará dois tipos distintos de *variedades*⁴⁹¹. Em geral, o termo *variedade* é introduzido pelo matemático em geometria diferencial visando generalizar o conceito de

⁴⁸⁷(RIEMANN, B. “On the hypothesis which lie at the bases of geometry” Em HAWKING, S.W. *God created the integers*, p.865-876).

⁴⁸⁸(HELMHOLTZ, H. V. “The origin and meaning of geometrical axioms” Em EWALD, W. *From Kant to Hilbert*, p. 663-689).

⁴⁸⁹Mesmo que o espaço da nossa percepção, o espaço físico e o espaço matemático sejam distintos, nós utilizaremos os termos espaço físico, espaço geométrico e espaço da percepção como sinônimos no contexto desta discussão do artigo de Riemann. Para fins de aplicabilidade da matemática, é importante fazer distinções, mas, para a mera análise do artigo de Riemann, tal distinção seria supérflua. Riemann está interessado em entender a *natureza* das relações métricas em variedades e sua relação com nosso espaço físico.

⁴⁹⁰É importante dizer que o termo *variedade* não se restringe a superfícies geométricas.

⁴⁹¹Manifold é o termo utilizado para *variedade*. Um subconjunto finito dos números naturais pode ser visto como uma variedade discreta, dada uma definição razoável e geral. Mas isso é pouco relevante para nossa discussão.

superfície⁴⁹². Obviamente, o matemático pode interessar-se pelo estudo de propriedades das variedades ditas discretas, em oposição àquelas superfícies estudadas em geometria diferencial, que são contínuas. Para o caso do estudo das variedades, sejam discretas (e.g., conjunto dos números naturais) ou contínuas, é importante poder classificá-las. Para isso, será necessário poder compará-las. A comparação será feita por algum método de contagem para o caso das variedades discretas. Já para o caso contínuo, ela se dará por meio de medidas sobre as superfícies, por exemplo, tomado um determinado *padrão de medida*. Em sua análise do conceito de variedades contínuas, Riemann se interessará particularmente pela relação métrica dita *distância entre dois pontos*⁴⁹³.

Quanto à relação de distância, Riemann perceberá que – fixada uma posição na superfície (ou variedade) – é necessário obter uma expressão para o computo da distância entre dois pontos pertencentes à superfície. Ele sabia que

⁴⁹²Intuitivamente, uma superfície de duas dimensões imersa em um espaço de 3 dimensões é um conjunto localmente *equivalente* a um subconjunto de um espaço de duas dimensões. Pensemos em um cilindro. Se tomarmos um ponto p sobre a superfície cilíndrica e nos restringimos a uma vizinhança de p , tal vizinhança se *comportará* como um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Neste caso, visto que a curvatura gaussiana do cilindro é nula em todos os pontos, é possível, inclusive, deformar continuamente a vizinhança de p de modo a obter uma superfície plana. Tecnicamente, uma superfície (regular) bidimensional é um subconjunto Σ de \mathbb{R}^3 sujeito à seguinte definição: para todo $p \in \Sigma$ existem uma vizinhança aberta de p , $V_p \subseteq \mathbb{R}^3$, um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e uma bijeção $\varphi: U \rightarrow V_p \cap \Sigma$, de modo que φ é um homomorfismo de classe C^∞ , e para todo $q \in U$, a matriz jacobiana $J\varphi(q)$ tem posto dois.

⁴⁹³Dado um conjunto não vazio X , uma função $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma *distância* se satisfizer, para quaisquer $x, y, z \in X$, dois a dois distintos, às seguintes propriedades: (i) $d(x, x) = 0$, (ii) $d(x, y) = d(y, x) > 0$, (iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. De maneira intuitiva, para três elementos de X , dois a dois distintos, (i) nos diz que a distância de um ponto a si mesmo é nula; (ii) nos diz que a distância de x a y é idêntica à distância de y a x , sendo sempre não nula; (iii) nos diz que a distância de x a z é sempre menor (ou igual) que a distância de x a y adicionada àquela de y a z . Isso é bastante intuitivo, pois, para nos deslocarmos de uma cidade A até uma outra cidade B, deveremos percorrer uma distância menor (ou igual) àquela referente ao deslocamento de A até B, mas passando por uma cidade arbitrária C. Se C estiver no *caminho natural* de A até B, a distância $D(A,C)+D(C,B)=D(A,B)$. Em todos os outros casos, a igualdade não será válida. Aqui o termo D denota a distância euclidiana, por exemplo.

...desde que a posição de um ponto em uma variedade n -dimensional pode ser conseqüentemente expressa por meio de n variáveis⁴⁹⁴ x_1, x_2, \dots, x_n , a determinação de uma linha vem a dar essas quantidades como função de uma variável”, e tinha em mente que “o problema consiste em estabelecer uma expressão matemática para o comprimento da linha (...) (RIEMANN, B. “On the hypothesis which lie at the bases of geometry” Em HAWKING, S.W *op. cit.* p. 869).

Por *linha*, entendemos uma curva contínua arbitrária sobre uma superfície n -dimensional. Nesta citação, vemos claramente que Riemann visava encontrar uma expressão para o cômputo da distância entre dois pontos arbitrários em uma variedade. Ele considerará, então, vários tipos de expressões matemáticas, sendo que, para o caso geral de variedades n -dimensionais, ele será capaz de escrever a seguinte expressão para o quadrado da diferencial da métrica s .

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

E quanto à classificação das superfícies, as variedades em que for válido o teorema de Pitágoras, i.e., $ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$, serão ditas *flat*, ou de *curvatura-nula* (curvatura gaussiana da variedade). Com relação ao nosso espaço físico, seria razoável querermos saber qual expressão⁴⁹⁵

⁴⁹⁴Primeiramente, Riemann discute em seu artigo porque que n coordenadas são suficientes para a determinação da posição de um ponto em uma superfície (ou variedade). Mas isso não é relevante para nossa discussão. Uma superfície n -dimensional, definida de modo rigoroso, é dada por um subconjunto M de \mathbb{R}^n se para todo ponto $x \in M$ existirem um conjunto aberto U contendo x , um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e um *difeomorfismo* $h: U \rightarrow V$ tal que $h(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V: y_{k+1} = \dots = y^n = 0\}$. Tal definição nos quer dizer que (a menos de um *difeomorfismo*) $U \cap V$ pode ser visto como $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Claro que estamos lidando com variedades contínuas, mas no caso das discretas precisaríamos efetuar algumas modificações, no entanto irrelevantes para nossa discussão. E notemos que Riemann não se preocupa em demonstrar que nosso espaço é tridimensional, pois isso é uma hipótese! Quanto a esta hipótese, nos diria Borel, chamando-a de primeira hipótese: “a primeira hipótese consiste na assunção de que é possível definir no espaço um sistema de coordenadas em três dimensões, u, v, w ...” (BOREL, E. *Space and time*, p. 202)

⁴⁹⁵Lembremo-nos de que, no caso da teoria geral da relatividade, fala-se em distância entre dois eventos no espaço-tempo. Na frase acima, nós escrevemos “qual a melhor expressão para o cálculo da distância entre dois pontos” e não especificamos “quais dois

descreve com maior precisão a distância entre dois pontos naquele espaço. Para isso, seria necessário saber se nosso espaço físico é curvo⁴⁹⁶ ou não.

Quanto à curvatura do nosso espaço⁴⁹⁷ físico, Riemann nos dirá de maneira explícita⁴⁹⁸ que

Se supusermos que corpos existam independentemente da posição, a curvatura é constante em toda parte (...) mas, se essa independência não existir, nós não podemos tecer conclusões partindo das relações métricas de grande escala até aquelas de pequena escala. (RIEMANN, B. "On the hypothesis which lie at the bases of geometry" Em HAWKING, S.W *op. cit.*, p. 875)

Ora, tal observação parece-nos *profética* em dois sentidos. Por um lado, de acordo com a teoria geral da relatividade, a distribuição de matéria no espaçotempo físico será responsável pela curvatura dele. A gravidade é consequência de tal distribuição de matéria. *Trocando em miúdos*, a matéria *diz* para o espaço como se curvar, e dessa curvatura surge a gravidade, a qual *diz* para os corpos como se mover. Por outro lado, nos perguntamos a respeito do sentido de expressões do tipo "a distância entre duas partículas subatômicas". Quanto à primeira observação, o que estamos dizendo é que Riemann já havia percebido que as relações métricas em uma variedade arbitrária n -dimensional

pontos". Ora, a teoria de Einstein surgiu alguns anos após o trabalho de Riemann, e no contexto do trabalho deste último, poderíamos dizer "distância entre dois pontos no espaço físico", simplesmente.

⁴⁹⁶Uma primeira tentativa para se saber se nosso espaço físico é curvo ou não seria por meio do cálculo da soma dos ângulos internos de triângulos construídos sobre a superfície da Terra. Se houvesse desvios significativos de 180 graus, os matemáticos poderiam desconfiar da hipótese de a geometria euclidiana ser a geometria do nosso espaço da percepção empírica.

⁴⁹⁷Não nos esqueçamos de que não é de nosso interesse discutir a diferença entre espaço físico e espaço da percepção empírica no contexto do trabalho de Riemann.

⁴⁹⁸Riemann é bastante preciso em suas observações, alertando-nos para o fato de que elas são válidas desde que assumamos que a métrica (sua diferencial) ds dependa linearmente de cada diferencial dx_i , sendo esta uma função contínua de $x_i (i = 1, \dots, n)$. Também nos alerta para o fato de que as variedades não são passíveis de *deformações* descontínuas.

dependeriam de um fato físico, i.e., de a presença de corpos no espaço afetar, ou não, o modo de se calcular a distância entre pontos no espaço. Quanto à segunda observação, não é um fato da nossa percepção empírica que nos permitirá dizer qual a *melhor geometria* a ser utilizada na descrição do mundo microscópico. Enfim, visto que estamos nos detendo na relação entre o espaço físico (no nível da nossa percepção sensorial), deixaremos de lado as especulações sobre a geometria do mundo microscópico. Vejamos agora um exemplo que consideramos esclarecedor.

Suponhamos que a distância entre dois pontos A e B sobre uma haste rígida dependa da posição da haste no espaço. Tomemos dois casos. Primeiramente, suponhamos que a haste esteja na superfície da Terra. No segundo caso, assumamos que ela esteja próxima a um corpo celeste muitas milhares de vezes mais maciço que o nosso planeta Terra. Hoje é sabido⁴⁹⁹ que a distância entre os pontos A e B não será⁵⁰⁰ a mesma para o caso de uma medida elaborada na superfície da Terra e outra elaborada próxima a um corpo muito mais maciço – caso seja possível efetuar e comparar as medidas, obviamente. Riemann percebeu que nosso espaço físico é somente um dentre vários outros possíveis – pelo menos, *teoricamente possíveis*. Se for o caso de a geometria do

⁴⁹⁹Deixamos a excelente análise de Pauli sobre a relação precisa entre a métrica do espaço e a distribuição de matéria. (PAULI, W. *The theory of relativity*, p. 145-149). Poderíamos mencionar casos bastante atípicos, como aqueles previstos por Hawking e Ellis em seu *Large scale structure of spacetime*, mas apenas sugerimos, a título de curiosidade, esse texto, cujo grau de abstração matemática é elevadíssimo, mas os resultados não são menos complexos. Ele se refere à teoria de Hawking dos buracos negros, regiões do espaço-tempo onde as relações métricas seriam alteradas de modo drástico. Uma discussão mais atual e filosófica, não menos profunda, encontra-se no conjunto de palestras de Hawking (em coautoria com Roger Penrose), cujo título é *A natureza do espaço-tempo*, mais precisamente na primeira palestra de Hawking.

⁵⁰⁰É evidente que estamos simplificando ao extremo a discussão a fim de evitarmos tecnicidades matemáticas. Stephen Hawking e George Ellis elaborarão um estudo muito aprofundado, assaz técnico, e delicado a respeito da relação entre a geometria e a presença de corpos maciços no espaço-tempo em *Large scale structure of spacetime*. O texto em si é de leitura *pouco digerível*, isso no sentido de estar repleto de detalhes técnicos. Os autores partem da geometria diferencial básica e chegam à teoria dos buracos negros em relatividade geral.

espaçotempo ser determinada pela distribuição de matéria nele, não teremos por que acreditar que a geometria euclidiana nos proverá da melhor descrição das relações espaçotemporais de nosso universo perceptível em todos os níveis de descrição. Neste sentido, nada impede as relações métricas de serem completamente diferentes no nível subatômico da matéria. Caberá somente à experiência a decisão sobre a natureza de nosso espaço físico. Assim, parece-nos não ser cabível a afirmação de que o espaço de nossa percepção será – *a priori*⁵⁰¹ – euclidiano. Vejamos agora, resumidamente também, o que Helmholtz nos diz, em seu artigo, referentemente ao espaço da nossa percepção⁵⁰² e à utilização da geometria euclidiana para descrevê-lo.

O ponto central das indagações de Helmholtz⁵⁰³ será norteado pela afirmação de que

O alicerce de toda prova pelo método de Euclides consiste em estabelecer a congruência de retas, ângulos, figuras planas, sólidos, etc. Para que a congruência seja

⁵⁰¹Curiosamente, vemos no texto de Ewald que Gauss escreveu: “E inclusive em Kant não se observa melhora no assunto; sua distinção entre proposições analíticas e sintéticas me parece ser uma trivialidade ou falsa”. Quanto ao *assunto* em questão, Gauss se refere às definições dadas por filósofos “que deixam o cabelo de pé”. Ele havia se referido a Hegel, Schelling, Nees von Esenbeck e Platão, mas colocou Aristóteles como exceção. (EWALD, W. *From Kant to Hilbert*, p. 293) Em geral, concordamos com Gauss no que concerne a Hegel.

⁵⁰²No livro editado por Ewald mencionado na citação anterior, há uma tradução para o Inglês do texto de Helmholtz. É essa a versão que utilizaremos em nossa discussão, à qual nos referiremos como na nota acima, mas tendo em mente o título do artigo editado, “*The origin and meaning of geometrical axioms*”.

⁵⁰³Margenau e Lindsay nos dizem, quanto à geometria euclidiana, cujo espaço é aquele em que “é possível construir uma teoria na qual os conceitos são pontos, retas, planos, etc, que são abstrações feitas a partir de hastes e chapas*, etc, e pela assunção de que certos postulados parecerão operacionalmente razoáveis para deduzir os resultados de medidas feitos em hastes rígidas e corpos rígidos. Esta teoria é geometria, o tipo particular que parece melhor moldar os experimentos sobre corpos reais é a geometria de Euclides”. (LINDSAY, R. B. E MARGENAU, H. *Foundations of physics*, p. 63) Veremos que Helmholtz também atribui o fato de a geometria euclidiana ser *aparentemente* a mais intuitiva às nossas experiências sensíveis. E quanto ao termo que traduzimos por “chapas”, os autores acima usam *sheet*, que é frequentemente traduzido por *folhas*, isso para folhas de papel como, por exemplo, as de sulfite. Mas, pra evitar ambiguidade com a palavra *leaf*, traduzimos por *chapa*, tradução que também está de acordo com aquelas sugeridas por dicionários e reflete o que os autores têm em mente.

correta, supõe-se que as figuras geométricas podem ser aplicáveis umas às outras, obviamente sem modificar suas formas e dimensões. (HELMHOLTZ, H. VON. “The origin and meaning of geometrical axioms” Em EWALD, *op. cit.*, p. 667)

O “método de Euclides” a que Helmholtz se refere é exatamente o de supor que duas figuras são congruentes se puderem ser superpostas (obviamente, de modo que coincidam). E a essa suposição subjaz algo que não é mencionado por Euclides. Primeiramente, que as figuras (as retas, os sólidos) podem ser transladadas (se necessário, rotacionadas) de modo a não sofrerem deformações. Mas essas exigências de *invariância por translações* e por *rotações* são hipóteses sobre o mundo físico. Vejamos isso por meio de um exemplo

Suponhamos haver seres bidimensionais⁵⁰⁴ dotados de inteligência. Partindo de medidas feitas em seu mundo, eles poderiam ser levados a algumas conclusões elementares. Se sempre constatarem que duas retas paralelas podem ser prolongadas (dentro dos limites da observação) de modo a nunca se encontrarem, eles terão evidências de que seu mundo é plano – pelo menos, localmente⁵⁰⁵. Se seguissem com medidas, e tivessem dados suficientes para concluir que a soma dos ângulos de um triângulo é 360 graus, suas conclusões seriam ainda mais plausíveis. Mais uma vez, localmente, a geometria desenvolvida por aqueles habitantes haveria de concordar com a nossa geometria euclidiana plana. Caso eles habitassem a superfície de uma esfera, suas conclusões seriam distintas. A soma dos ângulos internos do triângulo seria sempre maior que 360 graus, por exemplo. Mas é importante dizer também que, a partir de medidas efetuadas em seu universo, aqueles seres poderiam

⁵⁰⁴ Adaptamos o exemplo acima de Helmholtz.

⁵⁰⁵ No caso, dentro dos limites da observação e para todos os propósitos práticos.

desenvolver sua geometria de modo independente de tudo que pudesse haver *fora*⁵⁰⁶ de seu mundo⁵⁰⁷.

Retomando a hipótese de Helmholtz de que figuras podem ser superpostas, imaginemos um mundo deformável, como uma geléia, cujos seres se estendam pelo meio que habitam. Tomemos, mais especificamente, um exemplo retirado do reino dos protozoários. Seja o caso de uma ameba, cujo movimento para obter *alimento* se dê pela emissão de pseudópodos. Tal movimento é caracterizado pela deformação do corpo do protozoário. A forma geométrica do animal não é invariante, como a de um triângulo que é utilizado em demonstração arbitrária de certo teorema da geometria de Euclides. Para seres deformáveis, habitantes de meios gelatinosos, o próprio termo *linha reta* poderia ter um significado bastante distinto (no caso de eles serem capazes de formulá-lo). Para nossa discussão, o importante é notarmos que, de acordo com Helmholtz,

...os axiomas da geometria euclidiana, tomados por si mesmos, fora de toda conexão com proposições mecânicas, não representam relações de coisas reais. Quando assim, isolados, se nós os considerarmos, segundo Kant, como formas *a priori* da intuição transcendentalmente dados, eles constituem uma forma dentro da qual qualquer conteúdo empírico se encaixará, e que, entretanto, não limita de nenhum modo ou determina de antemão a natureza do conteúdo. Isto é verdade, entretanto, não somente dos axiomas de Euclides, mas também dos axiomas da geometria esférica e pseudoesférica. (HELMHOLTZ, H. von. "The origin and meaning of geometrical axioms" Em EWALD, *op. cit.*, p. 663-689)

⁵⁰⁶Supondo que tal afirmação faça algum sentido, pelo menos para nós, pois, para tais habitantes, "fora" talvez fosse destituído de qualquer sentido.

⁵⁰⁷Esse é o conteúdo do belíssimo Teorema Egrégio de Gauss. De modo bastante simplificado, ele nos diz que a curvatura de uma variedade pode ser determinada a partir de medidas elaboradas na variedade. Assim, a geometria (local) fica totalmente determinada por essas medidas. É claro que poderia ser o caso de haver um universo cuja curvatura variasse de ponto a ponto, mas pensemos, de modo simplificado, que a curvatura seja (localmente) constante.

Em suma, é possível estudar geometria de modo isolado de qualquer aplicação física (mecânica, por exemplo). Tal estudo é de interesse do matemático puro. Cabe a ele saber que consequências seguirão de certas hipóteses e axiomas. E, estudada dessa maneira, a geometria não precisa ter a menor conexão com nosso mundo das percepções⁵⁰⁸. Em segundo lugar, se os axiomas da geometria euclidiana servem como moldura para conteúdos empíricos, eles não são os únicos⁵⁰⁹. A segunda e última conclusão a que chega Helmholtz é que “Se tal sistema fosse tomado como uma forma transcendental de intuição e pensamento, deveria haver uma harmonia pré-estabelecida entre forma e realidade”. (HELMHOLTZ, H. VON. “The origin and meaning of geometrical axioms” Em EWALD, *op. cit.*, p. 689)

Quanto à conclusão acima, Helmholtz tem em mente que os princípios que regem a geometria são inferidos da experiência, sendo assim nela validados. Neste sentido, concordamos com Helmholtz. Mas discordamos dele em outro aspecto. Ora, a filosofia kantiana nos parece um excelente guia para a compreensão da aplicabilidade da matemática, feitas algumas ressalvas, claro. É mister, a nosso ver, acrescentar outros tipos de intuição, e.g, intuição formal, como vimos ao mencionar o trabalho de da Silva. Uma *revisão* do trabalho de Kant possivelmente nos mostraria a grande relevância do pensamento do filósofo alemão em toda filosofia ocidental posterior a ele. E também não é verdade que deve haver alguma harmonia pré-estabelecida entre forma e realidade no idealismo de Kant.

⁵⁰⁸O matemático pode inventar geometrias arbitrárias. Ele pode definir uma maneira arbitrária de medir distâncias entre dois “pontos”, definir uma expressão matemática que seja uma métrica e desenvolver uma geometria. Uma pessoa imaginativa e ociosa poderia pensar em uma *geometria das cores*, procurar definir *distância entre duas cores* e ficar *brincando* com as consequências teóricas de seu *mundo geométrico*.

⁵⁰⁹Helmholtz discutirá com algum detalhe tal afirmação. Para isso, deixamos seu artigo para maiores detalhes. Na versão editada por Ewald, há um apêndice interessante com algumas notas técnicas também.

Apêndice 3.2

A aplicabilidade da matemática de acordo com Hartry Field

Neste apêndice analisaremos as idéias fundamentais de Hartry Field a respeito da aplicabilidade da matemática. Nós restringiremos nossa análise a seu livro⁵¹⁰ *Science without numbers*.

Hartry Field se propôs a tarefa de explicar a aplicabilidade da matemática à física de modo que nenhuma menção a objetos matemáticos fosse feita. É sabido que nossas melhores teorias físicas estão fundamentadas em teorias matemáticas, e que, nestas últimas, há referência explícita a números, funções, espaços vetoriais etc. Field está interessado em uma das variantes do argumento da indispensabilidade de Quine⁵¹¹, a qual pode ser colocada da seguinte maneira: desde que nossas teorias científicas requerem necessariamente que nos refiramos a

⁵¹⁰Field escreveu outros trabalhos sobre a aplicabilidade da matemática, dentre eles um livro (publicado em 1989) cujo título é *Realism, mathematics and modality*. Mesmo que consideremos interessantes alguns desses trabalhos, eles não solucionaram os principais problemas referentes à teoria de Field que mencionaremos neste apêndice. Para uma discussão detalhada de *Realism, mathematics and modality*, ver (CHIHARA, C. *A structural account of mathematics*, p. 320).

⁵¹¹Marcus Russell coloca o *argumento da indispensabilidade de Quine (-Putnam)* da seguinte maneira: “Deveríamos acreditar que objetos matemáticos existem, visto que nossas melhores teorias científicas necessariamente se referem a eles”. (RUSSELL, M. *Why the indispensability argument does not justify belief in mathematical objects*, p. 4) Conforme dissemos, há vários argumentos de indispensabilidade, sendo que algumas variações visam concluir que a *matemática empregada em uma teoria científica é verdadeira*. Quanto a isso, Field diria que “O mais difícil em mostrar que a aplicação da matemática não requer que a matemática aplicada seja verdadeira é mostrar que entidades matemáticas são teoricamente dispensáveis enquanto que as entidades teóricas em ciência não o são”. (FIELD, H. *Science without numbers*, p. viii, prefácio) Entidades teóricas são aquelas empregadas na formulação de teorias científicas, e.g., partículas subatômicas, quarks etc. Enfim, lembremo-nos de que mostramos no capítulo terceiro, que uma teoria matemática não-interpretada não é verdadeira nem falsa.

entidades⁵¹² abstratas, estas entidades devem existir. Field nos dirá explicitamente que

Eu não proponho reinterpretar qualquer parte da matemática clássica; em vez disso, proponho mostrar que a matemática necessária para a aplicação ao mundo físico não inclui nada que mesmo à primeira vista contenha referência a entidades⁵¹³ abstratas (quantificações sobre) como números, funções ou conjuntos. (FIELD, H., *op. cit.*, p. 2)

Field visa minar o argumento de Quine mostrando que não é necessário fazer menção a objetos matemáticos na formulação de teorias físicas. Observemos que a abordagem de Field nos levará a entender a matemática, nos diria Chihara⁵¹⁴, como um *extrator de suco*, i.e., um instrumento para obtenção de conclusões a partir de certas premissas⁵¹⁵.

Antes de seguirmos com a análise do trabalho de Field, precisamos fazer algumas ressalvas. Na última citação, Field não é preciso ao utilizar a expressão *mundo físico*⁵¹⁶. Ora, se estiver referindo-se à nossa

⁵¹²Ou a quantificações *sobre* tais entidades. Estamos entendendo “entidades abstratas” como sinônimo de “objetos matemáticos”.

⁵¹³Field *usa e abusa* da expressão *entidades abstratas* em seu livro. Excetuando-se o caso em que estivermos utilizando uma passagem de seu texto, procuraremos evitar tal *abuso*.

⁵¹⁴“A matemática é então um extrator de suco”. (CHIHARA, C. S. *A structural account of mathematics* p. 111) Embora não gostemos do termo *extrator de suco*, optamos por mantê-lo em nosso texto.

⁵¹⁵Field se referirá a premissas (e conclusões) enunciáveis em um determinado tipo de teoria, que será denominada nominalista, como veremos adiante.

⁵¹⁶Para ilustrar sua teoria, Field utilizará a teoria da gravitação de Newton. Ora, poder-se-ia objetar nossa afirmação de que Hartry Field não é preciso quanto à expressão *mundo físico* com base no exemplo que ele próprio utiliza. Mas é somente no capítulo oitavo de *Science without numbers* que o filósofo norte-americano lança mão de seu exemplo. Mesmo neste capítulo, Field não nos diz o que entende por *mundo físico*, mas tudo nos levar a crer que ele se refere aos modelos físicos da realidade empírica. No capítulo quarto, intitulado “Nominalism and the structure of physical space”, Field diz que “a estrutura do espaço físico é um assunto empírico”. (FIELD, *op. cit.*, p. 31) De maneira precisa, os modelos físicos da estrutura do espaço da nossa percepção são sugeridos pela nossa percepção empírica. Nós discutimos tal fato no apêndice 3.1. Enfim, entenderemos que Field se refere aos modelos físicos da percepção. Finalmente, lembremo-nos de que nosso estudo de caso se refere à matemática utilizada na fundamentação da mecânica quântica, sendo esta teoria também estudada via modelos físicos. No caso de Heisenberg, vimos que o físico alemão utilizou o modelo do oscilador harmônico.

realidade empírica, é óbvio que a matemática não se aplica diretamente a ela, mas a modelos⁵¹⁷ físicos dessa realidade. Quanto à última citação de Field, ele é claro ao dizer que visa mostrar que uma teoria física pode ser formulada de modo que nenhuma referência a entidades matemáticas seja feita. Ele nos diz também que sua proposta não é de reinterpretar⁵¹⁸ a matemática. Field tem mente uma doutrina⁵¹⁹ dita nominalismo. Para o filósofo norte-americano,

⁵¹⁷ A própria percepção estruturante nos *sugere* tais modelos. Não é relevante se tal modelo corresponde *materialmente* ao que chamamos de realidade, mas apenas *estruturalmente*. A matemática não pode dizer absolutamente nada sobre *o que é* a realidade, mas somente pode descrever propriedades estruturais da realidade como a conhecemos. Dissemos, anteriormente, que a percepção envolve a imposição de uma estrutura ao que é percebido, e a matemática se aplica a esta realidade que é estruturada pela nossa percepção empírica.

⁵¹⁸ Field nos dirá: “Eu acredito que a reformulação nominalista é matematicamente atraente, e que há considerações mais que ontológicas que a favorecem em detrimento das formulações platonistas usuais”. (FIELD, *op. cit.*, p.3) Esta citação nos leva a considerar duvidosa a afirmação de Field de que sua proposta não seja uma *reinterpretação nominalista* da matemática. Outro fato que julgamos *curioso* se deve ao título (completo) do livro de Field, que é *Science without numbers – a defence of nominalism*, e à seguinte observação que encontramos no seu livro: “Gostaria de deixar claro que nada nesta monografia se propõe a ser um argumento positivo em favor do nominalismo. Meu objetivo é tentar dar conta dos argumentos mais convincentes oferecidos contra a posição nominalista” (FIELD *op. cit.*, p. 4). Ora, é no mínimo *estranha* essa afirmação em vista do título do seu livro. Há ainda outras citações em *Science without numbers* que não nos parecem menos *estranhas*, beirando a *falta de sentido*. Dentre elas, temos a seguinte: “se eu for capaz de provar *platonisticamente* que entidades abstratas não são necessárias para inferências ordinárias sobre o físico ou para a ciência, então qualquer pessoa que quiser *arguir* em prol do platonismo será incapaz de repousar seus argumentos no princípio quineano de que a existência de entidades abstratas é uma hipótese indispensável”. (FIELD *op. cit.*, p. 5-6) Veremos que Chihara também se deterá nessa última citação (CHIHARA, C. *A structural account of mathematics*, p. 320) Primeiramente, quanto ao que Field diz *ser provar platonisticamente* - “métodos platonistas de provas”- (FIELD *op. cit.*, p. 5-6) visando mostrar que entidades abstratas são desnecessárias para a elaboração de inferências sobre o nosso mundo físico, Chihara nos dirá que “Se estas provas fossem elaboradas somente, por assim dizer, por ‘argumentos do tipo de redução ao absurdo’ contra a posição platonista, então a citação acima poderia fazer algum sentido”. (CHIHARA *op. cit.*, p. 320) Em princípio, faria sentido o que Field nos diz, caso ele não assumisse a veracidade dos princípios matemáticos subjacentes às demonstrações elaboradas de determinados princípios (ditos princípios conservativos, os quais veremos adiante). O método de redução ao absurdo deveria ser a *ferramenta matemática* utilizada por Field. Ora, concordamos com Chihara que “Parece claro que Field *acredita* nos vários teoremas metalógicos e princípios que ele cita em seu livro: ele certamente escreve como se acreditasse, por exemplo, que os princípios da conservação fossem verdadeiros”. (CHIHARA, *op. cit.*, p. 320) Dentre alguns

Nominalismo é a doutrina de que não existem entidades abstratas. (...) Ao defender o nominalismo, estou negando, entretanto, que números, funções, conjuntos ou qualquer outra entidade similar exista. Desde que nego que números, funções, conjuntos etc, existem, eu nego que é legítimo usar termos que se proponham referir-se a tais entidades (...). (FIELD, *op. cit.*, p. 1)

Creemos que esteja claro⁵²⁰ o objetivo principal de Field, que se resume em mostrar que a menção a objetos matemáticos em uma teoria física é desnecessária.

Field exporá suas idéias centrais no primeiro capítulo de sua monografia⁵²¹. Ele diz que “argumentarei que a utilidade de entidades matemáticas não é estruturalmente⁵²² análoga à utilidade de entidades teóricas em físicas”. (FIELD, *op. cit.*, p. 7) Por essa crença na *dessemelhança estrutural*, Field refere-se especificamente ao fato de, por um lado, não ser possível eliminar entidades teóricas das formulações científicas de teorias e, por outro, ser possível eliminar objetos abstratos das teorias. Claro que a tese de Field visa mostrar exatamente esta última observação. Dentre as *entidades teóricas*, Field mencionará, por exemplo, partículas subatômicas⁵²³. Ele nos diz que

...a utilidade de entidades teóricas repousa em dois fatos: (a) elas exercem um papel em poderosas teorias a partir das quais podemos deduzir uma ampla variedade de fenômenos; e (b) não há teorias alternativas conhecidas (...) que expliquem esses fenômenos sem entidades similares. (FIELD, *op. cit.*, p. 8)

dos princípios metalógicos que Field utiliza, destaca-se o teorema da completude da lógica de primeira ordem de Kurt Gödel.

⁵¹⁹Será por meio do termo *doctrine* que Hartry Field se referirá ao nominalismo. “Nominalismo é a doutrina de que...” (FIELD, *op. cit.*, p. 1)

⁵²⁰Estamos omitindo grande parte dos detalhes técnicos que encontramos no trabalho de Field.

⁵²¹Field se refere ao seu livro por *monografia*.

⁵²²“structurally disanalogous”.

⁵²³“teorias sobre partículas subatômicas...” (FIELD, *op. cit.*, p. 9)

Antes de seguirmos com a análise de Hartry Field sobre a aplicabilidade da matemática, precisamos dizer algo sobre estas últimas citações.

Ao elaborar uma teoria quântica da matéria, o físico se refere a partículas subatômicas, potenciais escalares, campos quânticos etc. Mesmo que as teorias físicas utilizem entidades teóricas, é irrelevante⁵²⁴ o que *tais entidades realmente são*. Ora, é sabido que, no contexto das teorias quânticas de campo, o termo *partícula* é teoricamente eliminável⁵²⁵. No caso de uma teoria arbitrária de campo, o que é relevante é que uma partícula da antiga teoria possa ser identificada com alguma *propriedade* do campo. Nesse caso, busca-se uma analogia

⁵²⁴Irrelevante para entendermos a aplicabilidade da matemática às ciências empíricas. Consideramos muito relevantes os estudos sobre *ontologia da física*, dentre eles os que Krause tem elaborado. Ver (KRAUSE, D. e FRENCH, S. *Identity in physics: a historical, philosophical and formal analysis*)

⁵²⁵Claro que é possível falar de partículas no contexto de uma teoria quântica de campo, mas não é necessário. As teorias de campo visam estender aquelas que se referem a partículas. As partículas deverão ser identificadas com alguma *propriedade* ou *oscilação* do campo. Embora não seja de nosso interesse entrar em detalhes, pois a teoria quântica de campos não é objeto de estudo nosso neste trabalho, vejamos um exemplo, i.e., equação de Klein-Gordon. De maneira independente, Klein, Gordon, Schrödinger, Fock e Kaluza obtiveram uma expressão relativística para o movimento do elétron - aliás, a expressão que obtiveram se aplica a fótons! A expressão obtida não era compatível com um dos aspectos fundamentais da teoria relativística de Einstein, i.e., ela não era invariante por transformações de Lorentz. Vimos também que Dirac obteve uma expressão invariante por aquelas transformações e que se aplicava ao movimento do elétron. Ora, a equação de Klein-Gordon (*KG*) mostrou-se relevante para a descrição do *comportamento* de partículas de luz (as quais são dotadas de spin-0). Michio Kaku (KAKU, M. *Quantum Field theory a modern introduction*, p. 63-96) descreverá como interpretar a equação de Klein-Gordon de modo que seja aplicável à descrição de sistemas físicos. Para isso, a equação *KG* é adaptada à descrição de sistemas contendo *infinitas partículas* (mais precisamente, sistemas físicos de graus infinitos de liberdade constituídos de partículas de spin-0). *Gráus de liberdade* é um termo estatístico, mas para nossos propósitos, podemos pensar que significa o número de *dimensões independentes* em que cada partícula pode deslocar-se. Uma única partícula clássica pode deslocar-se, *a priori*, por 3 dimensões espaciais, por exemplo. Retomando a questão da equação *KG*, a expressão obtida receberá o nome de *equação de campo*, pois ela descreverá um tipo de campo dito quântico. Posteriormente, Kaku mostrará como é possível obter uma equação de campo a partir da equação de Dirac. (KAKU, *op. cit.*, p. 77-94) Vimos, por exemplo, que a equação de Dirac se aplicava a um elétron. Neste caso, é finito o número de graus de liberdade da partícula – embora a expressão *gráus de liberdade* inclua outras *dimensões físicas* como o spin.

estrutural⁵²⁶ entre o que a entidade teórica *partícula* significa em uma teoria e determinada propriedade de um campo físico⁵²⁷ que possa ser identificada com aquela partícula, agora no contexto da teoria de campo. O físico não está interessado no significado⁵²⁸ *real* de partículas, ou de campos, mas somente em suas propriedades estruturais. Enfim, também é evidente que a existência de objetos matemáticos não é análoga à existência de objetos da nossa percepção empírica, se assim nos referirmos aos objetos⁵²⁹ físicos. Observemos que o ponto central da argumentação de Field não residirá no fato de não haver uma suposta analogia estrutural entre o uso de entidades teóricas e abstratas na formulação de teorias físicas. Mesmo assim, cremos que algumas observações sobre (a) e (b) serão relevantes para a nossa compreensão do trabalho de Hartry Field.

⁵²⁶Suponhamos que seja possível identificar o termo *partícula* utilizado em uma teoria quântica não-relativística com alguma propriedade de um campo quântico em uma teoria de campo, isso de modo que as previsões teóricas sejam as mesmas em ambas as teorias. Na teoria de campos, a estrutura matemática é, em geral, mais complexa, podendo conter uma cópia isomorfa da estrutura matemática em que foi formulada a teoria de partículas. Suponhamos, então, que a estrutura matemática da teoria de campos estende aquela subjacente à teoria de partículas no sentido de conter uma cópia isomorfa desta última. Nesse contexto, um termo matemático presente na teoria de campos seria interpretado como referindo-se a uma partícula.

⁵²⁷Em mecânica clássica, é mais claro o que o físico entende pela identificação entre partículas e propriedades de um campo, pois o campo tem uma interpretação física sugerida diretamente pela nossa intuição empírica. No caso da mecânica quântica, o físico é guiado por uma analogia tipicamente estrutural, embora o caso clássico sirva de guia. Por exemplo, McMahan nos mostrará como é possível interpretar o estado de uma partícula de spin-0 no contexto da mecânica quântica de campos. Para os detalhes técnicos, ver (MCMAHON, D. *Quantum field theory demystified*, p. 127).

⁵²⁸Claro que é legítima qualquer discussão sobre a *natureza* das partículas. Também não é o caso de não haver físicos interessados em ontologia da física.

⁵²⁹Estamos cometendo um nítido abuso da linguagem. Tomemos o exemplo de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, massa idêntica àquela do elétron, mas cuja carga seja positiva, embora de mesmo módulo da carga do elétron. Tal partícula recebe o nome de pósitron (ou antieletrón). Ela não é uma partícula pertencente à nossa percepção empírica, embora seja uma entidade teórica útil, e que é detectada por meios indiretos. O pósitron é gerado pelo decaimento radiativo (ou *emissão beta*) de certos elementos químicos (e.g., decaimento um isótopo do potássio em um isótopo do argônio mais um pósitron), também podendo ser detectado por meio da interação entre fótons (dotados de altas energias) e a matéria.

Quanto à primeira observação (a), Field nos diz que são as entidades teóricas que exercem um papel em teorias poderosas. Tomemos o caso da função de onda de um elétron. Tal expressão matemática não é o elétron, mas um objeto matemático. Ela sequer denota um elétron, i.e, uma entidade teórica. É por meio da função de onda da partícula que são efetuadas operações matemáticas e, então, determinadas probabilidades são calculadas, como mostramos no capítulo 1º da nossa tese. Ora, para fins de aplicabilidade da matemática à mecânica quântica, é irrelevante⁵³⁰ o *estatuto ontológico* do elétron, pois nenhum físico tem algum tipo de acesso direto à partícula. Somente por meio de medidas (indiretas) elaboradas em laboratório que foi possível dizer que existe uma partícula cujas propriedades são tais e que foi chamada de *elétron*. E, quanto ao que Field expõe em (b), seria no mínimo tautológico dizer que o físico utiliza entidades teóricas na formulação de suas teorias. É óbvio que é necessária a referência a algum tipo de entidade teórica, pois a ciência é um *fenômeno* cultural passível de ser comunicado e compreendido por pessoas. Para isso, é necessária uma linguagem e determinado *acordo* entre os cientistas. Mas o que Field nos quer dizer é que não há teorias que não utilizem entidades teóricas. Concordamos que toda teoria científica se referirá a entidades teóricas (e que não há ciência moderna sem a utilização de uma linguagem). Discordamos, entretanto, de que não haja teorias alternativas que descartem determinadas entidades em detrimento de outras entidades teóricas mais gerais. Isso é claro no caso da teoria de campos, como dissemos anteriormente. Nesse sentido, é indispensável⁵³¹

⁵³⁰Obviamente nós não consideramos irrelevantes as questões levantadas pelos filósofos da física, lógicos e epistemólogos em geral. Mas para a análise da aplicabilidade da matemática à física é que julgamos irrelevante debater questões relacionadas à *natureza* das partículas, e.g., se elétrons são ondas, partículas ou *qualquer outra coisa*.

⁵³¹Procuramos ser mais precisos na discussão quanto à utilização de entidades teóricas, pois pareceu-nos ser o caso de Field ser realista com relação a teorias físicas, que é uma posição filosófica de que não partilhamos. Field diria, inclusive, que “partículas subatômicas são *teoricamente indispensáveis*”. No caso de uma teoria quântica de campo,

o uso de tais entidades em teorias científicas, embora novas entidades possam ser invocadas para substituir antigas. Desde que não é nosso objetivo central discutir detalhadamente o porquê de Hartry Field se preocupar com a indispensabilidade das entidades teóricas, podemos seguir com uma breve análise das idéias centrais do autor de *Science without numbers*.

A abordagem de Field pode ser exposta da seguinte maneira simplificada. Suponhamos que S seja uma teoria matemática arbitrária e que N seja um conjunto de *asserções nominalistas*⁵³² elaboradas na mesma linguagem formal⁵³³ de S . Field visa obter uma teoria⁵³⁴ $T = S + N$ que seja uma extensão conservativa de N . Ele pretende mostrar que

identifica-se determinada propriedade do campo com uma partícula. Isso não quer dizer que uma partícula é dada por aquela propriedade! No caso da matemática pura, poderíamos dizer que algo parecido se dá quando identificamos um número real r com um número complexo do tipo $r + 0i$. No primeiro caso, as propriedades estruturais da partícula são identificadas com determinadas propriedades de um campo. No segundo caso, existe uma relação de inclusão do conjunto dos reais naquele dos complexos, também chamada de *imersão*. Aliás, o conjunto dos complexos contém uma cópia isomorfa do conjunto dos reais, a qual é dada pela função dos complexos nos reais, dita *projeção* $\pi(a + bi) = a$.

⁵³²Dizer que uma asserção A (pertencente a N – um conjunto de asserções) é *nominalisticamente enunciável* é afirmar que o vocabulário em que a asserção é formulada não coincide com o vocabulário não-lógico da teoria matemática em questão, no caso, a teoria arbitrária S supramencionada.

⁵³³Para a definição precisa de *linguagem formal de primeira ordem*, ver (ENDERTON, H.B. *A mathematical introduction to logic*, p. 68-69). Embora Field utilize uma linguagem de segunda ordem, é possível elaborar a discussão que o filósofo norte-americano elabora no contexto de uma linguagem de primeira ordem. Visando rebater críticas ao seu trabalho referentes à utilização de uma linguagem de segunda ordem, Field escreveu outros textos, em cuja análise não nos deteremos. Para a análise da resposta de Field a tais críticas, ver (CHIHARA, C. *A structural account of mathematics*, p. 320).

⁵³⁴Intuitivamente, T_2 é uma teoria lógica dita *extensão conservativa* de uma teoria T_1 se a linguagem (formal) L_2 de T_2 estender a linguagem L_1 de T_1 de modo que todo teorema de T_1 seja teorema de T_2 . É também necessário que todo teorema de T_2 que puder ser formulado (e demonstrado) em L_1 também seja teorema de T_1 . Quanto à teoria $T = S + N$, é evidente que o símbolo “+” não se refere à adição usual de números inteiros. Informalmente, a linguagem L_T será obtida por meio das linguagens L_S e L_N , denotada por $L_T = L_S + L_N$. T será a teoria formulada em L_T . Para uma discussão de como são construídas extensões de teorias, ver (CURRY, H. B. *Foundations of mathematical logic*, p. 94-96).

...se você tomar qualquer corpo de asserções N nominalisticamente enunciadas, supridas de uma teoria matemática S , você não obtém nenhuma conclusão nominalisticamente enunciável que não possa ser obtida a partir de N isoladamente. (FIELD, *op. cit.*, p. 9)

Colocada a questão por meio de uma notação lógica, escreve-se: se $N + S \models \varphi$, então⁵³⁵ $N \models \varphi$ (para uma sentença φ que puder ser enunciada nominalisticamente). Ora, a matemática seria o dito *extrator de suco* mencionado por Chihara, pois ela funcionaria como uma *espécie de escada* que poderia ser abandonada após sua utilização.

Ainda com relação à construção da teoria T , ela poderia, *a priori*, ser inconsistente, pois obviamente nada impede a teoria N de se referir a objetos matemáticos⁵³⁶. Visando formular uma teoria consistente, Field elaborará um processo de *reconstrução* ou *reaxiomatização*⁵³⁷ *nominalista* da matemática. Vejamos isso de modo resumido. Se A é uma asserção de N , é possível obter uma nova asserção A^* de modo que nela não haja referência a entidades matemáticas. Definamos " $M(x)$ " como o

⁵³⁵Lê-se: "se é possível demonstrar (semanticamente) φ a partir das teorias N e S , então é possível demonstrar φ a partir de N tomada isoladamente". O símbolo " \models " refere-se à *dedutibilidade semântica*. Por outro lado, o símbolo " \vdash " refere-se à *dedutibilidade sintática*. Observemos que é um *abuso de linguagem* dizer *dedutibilidade semântica*, pois define-se *dedução* (de uma sentença em uma teoria) sintaticamente. É costume escrever " $T \vdash \varphi$ ", i.e., φ é demonstrável na teoria T enquanto que " $T \models \varphi$ " deve ser lida por φ é válida em T . Para as definições rigorosas de $T \vdash \varphi$ e $T \models \varphi$, ver, respectivamente (ENDERTON, H.B. *A mathematical introduction to logic* p.103) e (*idem, ibidem*, p. 83). É sabido que há um famoso teorema devido a Gödel para a lógica de primeira ordem que nos diz em que condições *deduzir semanticamente* uma sentença φ é equivalente a *deduzi-la sintaticamente*, i.e, quando $T \vdash \varphi$ é equivalente $T \models \varphi$. Tal teorema é dito *teorema de completude da lógica de primeira ordem*. Em geral, sistemas lógicos de ordens superiores à primeira ordem são incompletos (claro que no sentido do teorema de Gödel). Isso quer dizer que as dedutibilidades sintática e semântica não são equivalentes.

⁵³⁶Poderia ser o caso de S e N atribuírem *propriedades contraditórias* a um mesmo objeto matemático. Por exemplo, se a teoria S se referisse somente a números naturais menores que 2^{10} e a teoria N postulasse a existência do número $2^{10} + 35$.

⁵³⁷Ora, Field havia dito que não visava *reinterpretar* a matemática e muito menos defender o nominalismo, conforme dissemos anteriormente. É interessante notar que agora ele se refere a uma *reaxiomatização* da matemática. Ele nos diria que "de fato, para que seja suficientemente poderosa para nossos propósitos, uma teoria matemática deve diferir de uma teoria de conjuntos puros (...) ela deve também permitir que termos não-matemáticos apareçam nos axiomas..."

predicado cujo significado é “ x é uma entidade matemática”. Para cada A , seja A^* a asserção obtida de A pela seguinte restrição visando eliminar toda e qualquer menção a objetos matemáticos na nova asserção, i.e., utiliza-se “ $\text{não-}M(x_i)$ ” para cada ocorrência de um quantificador em A para a variável x_i . Seja⁵³⁸ N^* o conjunto de todas as asserções A^* para cada A em N . O que Field visa mostrar, então, é que

$$\text{Se } N^* + S \models \varphi, \text{ então } N^* \models \varphi$$

Field se referirá à sentença acima por *princípio conservativo*⁵⁴⁰. Observemos que estamos apenas nos detendo nos aspectos centrais do trabalho de Hartry Field, pois há detalhes⁵⁴¹ técnicos que somente criariam obstáculos à compreensão de nossa exposição.

⁵³⁸Field, por exemplo, afirmará que “se N diz que todos objetos obedecem às leis de Newton, então N^* dirá que todos objetos *não-matemáticos* obedecem as leis de Newton”. (FIELD, *op. cit.*, p. 11)

⁵³⁹Mais precisamente, “ $\exists x - M(x) + N^*S \models \varphi$, então $N^* \models \varphi$.” “ $M(x)$ ” significa “ x é um objeto matemático” e “ \exists ” é o quantificador dito *existencial*. O porquê desta última formulação é bastante simples, pois poderia ser o caso de não existir nenhum x que não fosse objeto matemático, e então a proposta de Field seria *inócua*.

⁵⁴⁰O princípio conservativo ao qual Field se referirá por *Princípio C* será enunciado exatamente da seguinte maneira: “Seja A uma sentença nominalisticamente enunciável, e N um corpo arbitrário de tais sentenças; seja S qualquer teoria matemática. Então A^* não será uma consequência de $N^* + S + \exists x - M(x)$ a menos que A seja uma consequência de N^* ” (FIELD, *op. cit.*, p. 12) Observemos que por meio do teorema da completude de Gödel da lógica de primeira ordem (e do teorema *soundness*, também da lógica de primeira ordem) é possível obter uma versão *sintática* para o princípio da conservação, o qual pode ser escrito da seguinte maneira: “ $\exists x - M(x) + N^*S \vdash \varphi$, então $N^* \vdash \varphi$ ”. Na notação, a única diferença é que se escreve “ \vdash ” no lugar de “ \models ”.

⁵⁴¹“A reconstrução nominalista” de Field parte também de sua crença de que é possível obter os modelos matemáticos utilizados pelos cientistas por meio de determinados teoremas, ditos *teoremas da representação*. Visto que Field visa elaborar uma *reconstrução* nominalista da teoria gravitacional de Newton, é necessário desenvolver o cálculo vetorial que é a ferramenta matemática básica utilizada nessa teoria física. Ele mostrará que é possível desenvolver os fundamentos básicos do cálculo diferencial de vetores por meio de relações de congruência e paralelismo entre segmentos de retas. Field quer mostrar que basta a *conservatividade da matemática* para que as teorias matemáticas sejam aplicáveis. A conservatividade é descrita pelo princípio conservativo. Para os detalhes técnicos do trabalho de Hartry Field, ver o capítulo 8º do trabalho aqui discutido. Para uma análise pormenorizada da reconstrução que Field propõe, ver a excelente discussão feita por David Malement em sua resenha do livro de Field publicada em *The Journal of Philosophy* (vol 79, edição 9, set/1982, p. 523-534). A discussão da natureza do teorema da

A título de ilustração (do princípio conservativo), seja S a teoria de Zermelo-Frankel⁵⁴² ZF . A primeira observação relevante que fazemos é que não é possível obter conclusões nominalisticamente enunciáveis a partir somente de premissas nominalisticamente enunciáveis⁵⁴³. De acordo com o nominalismo, objetos abstratos não existem. Visto que as teorias físicas versam sobre objetos da nossa percepção empírica e as teorias matemáticas versam sobre objetos abstratos, Field nota que é necessário incluir algum tipo de *entidade* que funcione como uma ponte⁵⁴⁴ entre os objetos da matemática pura e os objetos da nossa intuição empírica. Esses objetos *intermediários* serão ditos *urelementos*. A respeito deles, é importante saber que não são os objetos da matemática pura, como conjuntos, números e funções, mas podem⁵⁴⁵ ser agrupados de modo a satisfazerem a uma relação de pertinência, i.e, podem ser tomados como elementos de conjuntos. Para o caso da teoria $S = ZFU$ (ZF modificada de modo a incluir urelementos), Field nota que é suficiente adicionar o axioma $\forall x(Set(x) \rightarrow M(x))$ para o predicado $Set(x)$ (“ x é um conjunto”). E se S incluir *parte* da teoria de números (irreduzível à teoria de conjuntos ZFU), seria mister adicionar os axiomas $\forall x(N(x) \rightarrow M(x))$ e $\exists(x)(N(x))$ para o predicado $N(x)$ (“ x é um número”). Vejamos, agora, que conclusões elaborar a respeito do trabalho de Field.

representação encontra-se na página 524 dessa resenha. A denominação do mencionado teorema se deve, originalmente, a um resultado obtido por David Hilbert para a geometria euclidiana (FIELD, *op. cit.*, p. 50).

⁵⁴²A teoria de conjuntos ZF com o *axioma da escolha*.

⁵⁴³Field nos dirá que “Não existe um modo no qual elas podem à primeira vista ser úteis em nos tornar aptos a deduzir consequências nominalisticamente enunciáveis a partir de premissas nominalisticamente enunciáveis”. Por “elas”, Field refere-se a teorias da matemática pura, e.g., ZF .

⁵⁴⁴Referindo-se a esses objetos, Field diz que “eles servem como uma ponte entre as entidades abstratas puras e os objetos físicos; sem tal ponte, os objetos puros seriam inócuos (FIELD, *op.cit.*, p. 9) Traduzimos *idle* por “inócuos”. Outra opção seria “inertes”.

⁵⁴⁵Para nossa discussão, não é relevante saber exatamente como os ditos urelementos são introduzidos na teoria de conjuntos. Muito resumidamente, modifica-se a estrutura axiomática (via modificação do axioma da separação) da teoria de modo a permitir a existência desses objetos, também chamados de *impuros*.

Primeiramente, ele surgiu como uma proposta original para explicar a utilidade da matemática em física de modo que não fosse necessário assumir a existência de objetos matemáticos. Sabemos que Field visava refutar o argumento da indispensabilidade de Quine. A ênfase do trabalho do filósofo norte-americano é dada no princípio conservativo. Tal princípio permitiria mostrar que a matemática funcionaria como *uma etapa anterior* (segundo Chihara, um “extrator de suco”) à reformulação nominalista das teorias matemáticas utilizadas em física. Vemos claramente a preocupação de Field em defender um ponto de vista filosófico, visando, inclusive, enquadrar a filosofia da matemática nos moldes da *escola* regida pela *doutrina nominalista*. Quanto aos resultados e à abordagem técnica do trabalho de Hartry Field, concordamos com Malement⁵⁴⁶ que ela pode ser de interesse para grande parte da comunidade de lógicos, independentemente do sucesso ou fracasso da abordagem proposta. Aliás, não cremos que o filósofo norte-americano tenha conseguido atingir sua meta. A estratégia de Field requer que TODA a ciência possa ser reaxiomatizada de acordo com sua proposta. Caso a proposta de Field fosse a única conhecida, seria no mínimo, duvidoso que ela fosse passível de ser concluída (ou que seria proveitoso *nominalizar* a física). Ora, para cada teoria científica seria necessário reescrevê-la de acordo com a *fôrma* nominalista⁵⁴⁷. Parece-

⁵⁴⁶Malement, em sua resenha (ver nota 541 para referências), nos diz, quanto ao trabalho de Field, que ele “tem um resultado técnico relevante em seu centro. Ele apresenta uma abordagem original de problemas centrais na filosofia da matemática”.

⁵⁴⁷Uma *teoria nominalista* será aquela que não contenha termos referentes a objetos abstratos ou quantificações sobre tais objetos. Se pensarmos na aritmética usual dos números naturais, ela não é uma teoria nominalista, pois se refere aos objetos ditos números. Para elaborar uma versão nominalista da aritmética, poderíamos, por exemplo, seguir Field no capítulo 2º de *Science without numbers*. Para isso, Field requererá que a linguagem formal em que sua teoria nominalista N da aritmética dos naturais contenha vários símbolos, dentre eles o símbolo “=” para identidade, símbolos para os quantificadores *existencial* e *universal*, i.e., respectivamente, \exists , \forall . Além dos quantificadores existencial e universal, a teoria requererá quantificadores denotados por símbolos do tipo \exists_{94} (que significa “há exatamente 94”) e $\exists_{\geq 94}$ (“há pelo menos 94”). Enfim, Field assumirá, obviamente, a validade dos axiomas da identidade e mostrará que sua teoria é axiomatizável (recursivamente, aliás). Claro que não estamos expondo os detalhes

nos mais razoável entender como a matemática é aplicada e que propriedades matemáticas são requeridas para que a aplicação às ciências empíricas seja possível. Para isso, claro que não é necessário nos prendermos a uma filosofia da matemática restrita⁵⁴⁸.

da abordagem de Field, mas apenas mencionando o que é essencial para nós. Para uma discussão detalhada, ver o capítulo 2º de *Science without numbers*.

⁵⁴⁸Precisamos voltar nossos *olhos* na matemática que é feita pelos matemáticos, e não em doutrinas preestabelecidas que visam direcionar o desenvolvimento da matemática. Parece ser o caso de alguns filósofos não terem aprendido com o fracasso de Kant. Dissemos que, para Kant, números complexos eram entidades teoricamente impossíveis. Para o bom andamento da matemática, o matemático (e.g., o brilhante Gauss) *fechou os olhos* para o *dogmatismo* Kantiano e continuou com seu trabalho.

Referências bibliográficas

ARAÚJO, P. V. *Geometria diferencial* Coleção matemática universitária ed. IMPA, Rio de Janeiro 1998.

BOHM, D. *Quantum theory*, Dover publications inc, New York 1979.

BOHR, N. "On the quantum theory of line spectra" Em Van Der Waerden, B.L.: *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, Dover publications inc. New York 1967.

BORN, M. "Quantum theory" Em VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, Dover publications inc. New York 1967.

BORN, M. E HEISENBERG, W. "Quantum theory", Em *Quantum theory at crossroads – reconsidering the 1927 Solovay conference*, Cambridge university press, London 2009.

BORN, M. E JORDAN, P. "On quantum mechanics" Em VAN DER WAERDEN, B.L.: *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, Dover publications inc. New York 1967.

BOREL, E. *Space and time*, Dover publications inc. New York 1960.

BUNGE, M. *Foundations of physics*, Springer-Verlag inc. 1967.

CHIHARA, C. S. *A structural account of mathematics*, Oxford university press, New York 2004.

CHUNG, K. C. *Introdução à física nuclear*, Ed.UERJ, Rio de Janeiro 2001.

COLYVAN, M. *The indispensability of mathematics* Oxford USA trade New York 2003.

COHEN, M. R. *Reason and nature* Ed. Dover publications inc. New York 1931.

CURRY, H. B. *Foundations of mathematical logic – revised edition*, Dover publications inc. New York 2010.

DA SILVA, J. J. “Structuralism and the applicability of mathematics” Em *Sl. Essays in non-Empiricist rigorous philosophy* Editado por Guillermo E. Rosado Haddock. Axiomathes Vol.20 números 2-3 2010.

- “Mathematics and the crisis of science” *Diálogos* vol.91 2008.
- *Filosofias da Matemática*, Ed. Unesp, São Paulo 2007.
- *Sobre o predicativismo em Herman Weyl*, Coleção CLE, Ed Ítala Maria Loffredo D’Ottaviano, Campinas 1989.
- *Away from the facts - Husserl on symbolic knowledge*, notas de aula, curso de pós-graduação *filosofia da matemática* ministrado em Campinas (CLE/Unicamp) 2008.
- On the Nature of Mathematical Knowledge. In: D. Krause; A. Videira. (Org.). *Boston Studies in the Philosophy of Science: Brazilian Studies in Philosophy and History of Science*. Dordrecht: Springer vol.290, p. 151-160, 2011.
- *On the effectiveness of mathematics in natural sciences*, Seminários GLTA-CLE /Unicamp e Colloquia Logicae) feita em Campinas, 27/04/ 2011.

DIRAC, P. A. M. “The fundamental equations of quantum mechanics” Em VAN DER WAERDEN, B. L. *Sources of quantum mechanics-classics of science vol V*, Dover publications inc. New York 1967.

- *Quantum theory of the electron* Proceedings of the Royal Society of London. Series A., Vol. 117, No.778. (Feb.1, 1928), p.610-624.
- *The quantum theory of the electron II* Proc. R. Soc. London A 118 351-361 1928.
- *Principles of quantum mechanics* Addison-Wesley publishing company 1994.
- *Spinors in Hilbert spaces* Plenun press, New York and London 1969.

DOBORANTU, V. *The postulates of quantum mechanics in Quantum computability* Vol. 1, *Quantum mechanics*, Politechnica University Press, Timisora, Dec. 2005.

D'OTTAVIANO, I. M. L. “A Lógica Clássica e o Surgimento das Lógicas Não-Clássicas” Em *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*. Évora, F. R. R. (Org.). Coleção CLE, Vol. 7, p.11-16, Campinas 1992.

DUGAS, T. *A history of mechanics*, Dover publications inc. New York 1988.

DUMMET, M. *Frege philosophy of mathematics* Harvard university press, Cambridge Massachusetts 1991.

ENDERTON, H. B. *A mathematical Introduction to mathematical logic* Academic press, New York and London 1970.

FEYNMAN, R. P. E HIBBS, A.R. *Quantum mechanics and path integrals* copyright by McGraw Hill book company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney 1965.

— *Feynman's thesis - a new approach to quantum theory*, Laurie Brown (ed), World scientific publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey , London 2005.

FIELD, H. *Science without numbers – a defence of nominalism* Princeton University Press, New Jersey 1980.

FOCK, V. A. *Princípios de mecânica quântica*, ed. Mir. Moscovo 1986.

FREGE, G. “Os fundamentos da aritmética” Em *Coleção - Os pensadores* ed. Abril Cultural, São Paulo 1975.

GOLDSTEIN, H. E POOLE, C. E SAFKO, J. *Classical mechanics*, third edition, Addison Wesley publishers 2002.

GOMES, E. L. E D'OTTAVIANO, I. M. L. “Aristotle's theory of deduction and paraconsistency” Em *Principia – revista internacional de filosofia* Ed. UFSC, 14(1), Florianópolis 2010.

GRANDE, R. M. *O efeito Aharonov-Bohm*, dissertação de mestrado, São Carlos 2005.

GRANGER, G. G. *A ciência e as ciências*, Edunesp, São Paulo 1994.

- *Por um conhecimento filosófico*, Ed. Papyrus, Campinas 1989.
- *Formal thought and the sciences of man*, Boston series in philosophy of science, vol.75, Springer-Verlag, New York 1983.

HEISENBERG, W. “Quantum theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations” Em VAN DER WAERDEN, B.L.: *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, Dover publications inc. New York 1967.

- *A parte e o todo*, Ed. Contraponto 1996.
- *The physical principles of quantum theory*, Dover Publications Inc. Mineola-N.Y. 1949.

HELMHOLTZ, H. V. “The origin and meaning of geometrical axioms”. Em EWALD, W. (Ed) *From Kant to Hilbert*, Clarendon press OXFORD , New York 1996.

HUANG, K. *Statistical mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney 1963.

HUND, F. *The history of quantum mechanics* Harper and Row publishers Inc. Londres 1974.

NEWTON, I. “Principia” Em HAWKING, S.W (ED) *Over the shoulders of the giants*, Running press, New York, London 2002.

ISHAM, C. J. *Lectures on quantum theory-mathematical and structural foundations*, Imperial college press 1995.

JAMMER, M. *The conceptual development of quantum mechanics*, Mcgraw-Hill Book Company, New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney 1966.

JÚNIOR, R. I. *Tópicos na equação de Schrödinger* Ed. IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

KAKU, M. *Quantum Field theory – a modern introduction*, Oxford university press, New York 1993.

KOMPANEYETS, A. S. *Theoretical physics*, Second edition, Peace Publishers Moscow 1961.

KRAUSE, D. E. FRENCH, S. *Identity in physics – a historical, philosophical and formal analysis* Clarendon press –Oxford New York 2006.

LANDAU, L. E. LIFCHITZ, E. *Mecânica*, Hemus livraria e editora LTDA, São Paulo 2004.

LINDSAY, R. B. E. MARGENAU, H. *Foundations of physics*, Dover publications inc. New York, copyright 1957.

LOPES, L. J. *A estrutura quântica da matéria*, ed. UFRJ, Segunda edição, Rio de Janeiro 2005.

MACKEY, G. W. *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Dover publications, inc. 1963 (Mineola, New York) 1993.

MAURICE, J. “Antimatter” Em PAIS, A. E. MAURICE, J. E. OLIVE, I. D. E. ATYIAH, S. *Paul Dirac – the man and his work*, Cambridge university press, U.K. 1998.

MCCUBBIN, N. A. “Beauty in physics: the legacy of Paul Dirac” Em *contemporary physics* 45 (4) jul-aug.2004.

MCMARRON, D. *Quantum field theory desmystified* McGraw Hill, New York, 2008.

MC.MURRAN, S. L. E. TATTERSALL, J. J. “Paul Dirac and his beautiful mathematics” em *Revista brasileira da história da matemática Festschrift Ubiratan D’Ambrosio* 2007.

MEHRA, J. *Einstein, physics and reality*, World scientific press, USA and UK -1999.

— *The beat of a different drum- the life and science of Richard Feynman* Clarendon press Oxford 1994.

— *The quantum principle: its interpretation and epistemology*, D. Reidel publishing company, Inc, Dordrecht, Holland – 1974.

MINKOWSKY, H. "Space and time" Em LORENTZ, H.A. E EINSTEIN, A. E WEYL., H. E MINKOWSKY, H. *The principle of relativity* Dover publications inc. Canada 1952.

Novo Dicionário Aurélio, Ed. Nova Fronteira, 1975.

PAIS, A. *Sutil é o Sr-a ciência e a vida de Einstein* Ed. Nova Fronteira Rio de Janeiro 1995.

PAULI, W. *Theory of relativity* Dover publications inc. New York 1958.

PENROSE, R. "Quantum theory of spacetime". Em HAWKING, S.W. e PENROSE, R. *The nature of spacetime* Ed. Papirus , São Paulo 2001.

PINCOCK, C. *Mathematics and scientific representation* Oxford university press New York 2010.

— "Towards a philosophy of applied mathematics" em BUENO, O. E LINNEBO, Ø. (Editors) *New waves in philosophy of mathematics*, Palgrave Macmilan, London 2009.

PIZA, A. F. R de T. *Mecânica quântica*, ed.USP São Paulo 2003.

PRUGOVECKY, E. *Quantum mechanics in Hilbert spaces* Paul A. Smith and Samuel Eilenberg editors, Copyright by Academic press Inc. New York 1971.

REICHENBACH, H. *Philosophic foundations of quantum mechanics*, Cambridge university press London/England 1994.

RESNIK, M. *Mathematics as a science of patterns* Oxford Clarendon press New York 1997.

RIEMANN, B. "On the hypothesis which lie at the bases of geometry". Em HAWKING, S.W. (Ed) *God created the integers*, Penguin books, London 2005.

RUSCIO, A. "Pensée formelle et symbolisme chez Gilles Gaston Granger" Em *Alguns aspectos do pensamento formal-homenagem a Gilles Gaston Granger* Arley Ramos Moreno-org., Coleção CLE, v(5) 2008.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*, Zahar editores- Rio de Janeiro, quarta edição -1981.

— *Principles of mathematics*, copyright by W.W. Norton & Company inc. New York, 1996.

SAKAI, E. *On the principles of quantum mechanics-lecture notes* 2008.

SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics* Addison-Wesley Publishing Company revised edition 1994.

SHAPIRO, S. *Philosophy of mathematics: structure and ontology* Oxford university press New York 1997.

STEPHANI, H. *General relativity – an introduction to the theory of the gravitational field* 2nd edition, Press syndicate of the university of Cambridge, New York 1990.

STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem* Harvard university press, Cambridge-Massachussetts, London-England 1998.

VAN DER WAERDEN, B. L. *Sources of quantum mechanics-classics of science volume V*, Dover publications inc. New York 1967.

VON NEUMANN, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics* copyright by Princeton university press, Princeton 1955.

WEYL, H. *Philosophy of mathematics and natural sciences*, Ed. Atheneum New York, 1949.

WIGNER, E. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, No. 1 (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © by John Wiley & Sons, Inc 1960).

