JOSÉ CARLOS [illegible] SEOANE

SOBRE AS ÁLGEBRAS DE DA COSTA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 28 11

Orientador: Dr. Luiz Paulo de Alcantara

A

la memoria de

Haly Seoane (1921-1988),

mi madre.

A

Marianella,

mi esposa.

AGRADEÇO:

- À família Caorsi-Barcia, pelo afeto e estímulo;

- A meus amigos argentinos, brasileiros e uruguaios pelo apoio;

- A Luiz Paulo de Alcântara, pela orientação e incentivo;

- À CAPES, pelo suporte financeiro.

I N T R O D U Ç Ã O

1. As relações entre lógica e álgebra são relativamente antigas. Matemáticos como George Boole e Ernst Schröder ocupam um lugar relevante na história de estas relações. Não obstante -no sentido atual- uma formulação precisa do projeto de algebrização da lógica aparece concretamente num escrito de Alfred Tarski que visa a definição de conceitos metamatemáticos gerais -ver Tarski [1935]-. No referido artigo o autor expõe a idéia de passar ao quociente o conjunto das fórmulas do cálculo proposicional clássico construindo classes de equivalência definidas da forma seguinte: para todo f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$ -sendo $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas bem formadas do cálculo proposicional-

$$f_2 \in |f_1| \equiv ((f_1 \to f_2).(f_2 \to f_1))$$

onde $|f_1|$ denota a classe de equivalência de f_1. Na opinião de alguns autores -ver Block e Pigozzi [1989]- é precisamente este artigo o ponto de partida da área de pesquisa que hoje se denomina lógica **algébrica**.

Como estes autores observaram tal perspectiva aplicada as lógicas não-clássicas não necessariamente conduzem aos mesmos resultados. Por exemplo, a referida estratégia desenvolve-se com êxito para a lógica intuicionista de Heyting e algumas lógicas modais (como S4 e S5). Mas não permite obter resultados satisfatórios nos casos, por exemplo, dos sistemas lógicos R e E apresentados por Anderson y Belnap [1975] e de certas lógicas modais -como S1, S2 e S3.

2. Nas últimas duas décadas realizou-se um importante trabalho de pesquisa à respeito de certa família de sistemas lógicos divergentes denominada lógica **paraconsistente**. Vamos caracterizar brevemente neste paragrafo este tipo de divergência e indicar no seguinte alguns resultados no que se refere à algebrização de um conjunto de sistemas lógicos paraconsistentes.

E sabido que a relação de consequência lógica pode definir-se do ponto de vista semántico e do ponto de vista sintático.

Denote-se por '$||-$' uma relação de consequência lógica. Seja Σ um conjunto de fórmulas. '$||-$' pode definir-se, do ponto de vista semántico, da forma seguinte: $\Sigma ||- A$ -a fórmula A é uma consequência do conjunto de fórmulas Σ- se, e somente se, para algum conjunto especificado de valorações

$\mathbb{V}$, dada uma valoração $v \in \mathbb{V}$ tal que para toda fórmula $\sigma \in \Sigma$, se σ é verdadeira sob v, então A é verdadeira sob v. '$\Vdash$' pode definir-se, do ponto de vista sintático, da forma seguinte: $\Sigma \Vdash A$ se, e somente se, para algum conjunto especificado de regras inferenciais, existe uma derivação de A e todas as premisas não eliminadas que ocorrem na derivação pertencem a Σ. Uma forma de caracterizar então as lógicas paraconsistentes -ver Priest e Routley[1984]- é com base nas propriedades exigidas à relação de consequência lógica.

Uma relação de consequência lógica '$\Vdash$ ' se diz explosiva se, e somente se, para quaisquer fórmulas A e B, $\{A, \neg A\} \Vdash B$. Uma lógica é paraconsistente se, e somente se, a sua relação de consequência não é explosiva.

Seja Φ um conjunto de sentenças. Φ é inconsistente se, e somente se, $\{A, \neg A\} \subseteq \Phi$. Φ é trivial se, e somente se, para toda fórmula B, $B \in \Phi$. Do ponto de vista conceitual, o aspecto mais relevante do projeto paraconsistente é, precisamente, intentar prover a lógica subjacente a teorias inconsistentes mas não triviais. De outra perspectiva, dita empresa poderia considerar-se um esforço de elucidação do conceito de "inconsistencia",na medida que permite desligalo do conceito de trivialidade. A bibliografia sobre as razões para o abandono (ou a substituição em alguns contextos) de uma lógica cuja relação de consequência seja explosiva é abundante e variada. Simplesmente a título de exemplo pode-se consultar da Costa [1982].

3. Um campo interessante de pesquisa surge a partir dos esforços para algebrizar sistemas lógicos paraconsistentes. Este problema tem sido exposto em particular a respeito dos cálculos C_n $1 \leq n \leq \omega$ de Newton C. A. da Costa (introduzidos por da Costa em [1963]). Isto aparece explicitamente formulado em da Costa [1974].

Devemos a Chris Mortensen um resultado decisivo nesta questão (ver Mortensen [1980]).Este autor investiga a possibilidade de operar na forma clássica: a partir de uma relação de equivalência obter a álgebra quociente correspondente. Mas este autor exige que à referida relação cumpra algumas propriedades que,. na sua opinião, podem-se considerar minimais. É obvio que existen certas relações de equivalência definíveis na classe de fórmulas de C_1 que resultam ininteressantes: a relação de identidade sintática e a de pertinencia ao conjunto de fórmulas. Mortensen denomina **trivial** um álgebra quociente obtida a partir destas relações. O resultado de Mortensen, portanto, consiste em demonstrar que -asumindo as suas exigências com respeito a relação de equivalência- toda álgebra quociente para C_1 é trivial.

W. Carnielli e L. P. de Alcantara tem realizado um intento de construir a contrapartida algébrica de C_1. Ditos autores -ver Carnielli-de Alcantara [1984]- introduzem para este efeito as denomiadas **álgebras de da Costa** e as utilizam para definir um operador de consequência paraconsistente e obter assim lógicas abstratas paraconsistentes.

Num certo sentido, o esforço deste autores consiste em partir de um álgebra -que expressa certas idéias sobre o comportamente da negação presentes em C_1- e gerar uma classe de lógicas abstratas, como uma forma de contribuir a esclarecer as problemáticas relações entre os cálculos C_n e as suas eventuais correspondências algébricas.

4. No trabalho referido, Carnielli e de Alcantara demonstram também dois teoremas de representação de álgebras de da Costa em álgebras paraconsistentes de conjuntos. Estes teoremas apresentam um certo parentesco com o clássico teorema de Stone para álgebras booleanas. O estudo de ditos teoremas, do ponto de vista topológico, é o objetivo principal deste trabalho.

A estrutura geral deste escrito é a seguinte: o Capítulo 1 estuda as propriedades elementais das álgebras de da Costa. A maioria dos items das proposições do paragrafo 3 estão enunciados no artigo de Carnielli e de Alcantara (a seguir, CDA). Os teoremas 1.1 e 1.2 estão enunciados, para as álgenras C_n, por da Costa -ver da Costa [1965]. O teorema 1.6 está em CDA, mas a demonstração tem sido modificada.

O Capítulo 2 estuda os teoremas de representação demonstrados em CDA. A definição de álgebra paraconsistente de conjuntos bem como a demonstração de Teorema 2.2 tem sido modificadas. Outras modificações feitas aquí deven-se a observações respeito a CDA realizadas pelo Prof. Roberto Cignoli da Universidade de Buenos Aires.

Finalmemte, o capítulo 3 desenvolve o tratamento topológico dos teoremas de representação estudados, no capítulo anterior. Propõe-se, ainda, o conceito de par de representação topológico com o objetivo de aproximar-se a uma caracterização das álgebras de da Costa.

C A P I T U L O   1

1. O objetivo deste capítulo é introduzir as álgebras de da Costa e estudar algumas das suas propriedades básicas. Analizamos, ainda, o comportamento de filtros e ideais nas referidas álgebras e introduzimos a noção de quase-filtro. Estas estruturas, cuja relação com os filtros analizamos brevemente, serão particulramente relevantes nos teoremas de representação, estudados no Capítulo 2.

2. Entenderemos a noção de **álgebra abstrata** tal como é apresentada, por exemplo, por Rasiowa e Sikorski [1968]. Isto é, uma estrutura $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, (O_{\phi})_{\phi\in\Phi} \rangle$ onde **A** é um conjunto não vazio e, para todo $\phi\in\Phi$, O_{ϕ} é uma operação em **A**. Entenderemos a seguir que falamos de álgebras abstratas e eliminaremos, por conseguinte, o adjetivo calificativo.

Definición 1.1 Uma álgebra de da Costa é uma estrutura

$$\mathscr{A} = \langle \mathscr{A}, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \to, ' \rangle$$

tal que, para todo $a, b, c, x \in A$, são satisfeitas a seguintes proposições:

1. $\leq$ é um quase-ordem (reflexivo, transitivo mas não necessariamente anti-simétrico);
2. $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$;
3. se $c \leq a$ e $c \leq b$, então $c \leq a \wedge b$;
4. $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$;
5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
6. $a \leq (a \vee b)$, $b \leq (a \vee b)$;
7. se $a \leq c$ e $b \leq c$, então $a \vee b \leq c$;
8. $a \wedge (a \to b) \leq b$;
9. se $a \wedge c \leq b$, então $c \leq (a \to b)$;
10. $0 \leq a$, $a \leq 1$;
11. $x^{\circ} \leq (x')^{\circ}$, onde $x^{\circ} = (x \wedge x')'$;
12. $x \vee x' \equiv 1$, onde $a \equiv b$ se, e somente se, $a \leq b$ e $b \leq a$;
13. $x'' \leq x$, onde x'' é uma abreviação de $(x')'$;
14. $a^{\circ} \leq (b \to a) \to ((b \to a') \to b')$;
15. $x^{\circ} \wedge (x^{\circ})' \equiv 0$ ■

Definição 1.2 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. $\mathscr{A}$ é própria se, e somente se, existe um elemento $x \in A$ tal que $x \wedge x' \not\equiv 0$ ■

<u>Observação</u> <u>1.1</u> Basta inspecionarmos Def. 1.1 para advertir que, se realizarmos uma tradução mais o menos direta, uma boa parte dos axiomas que definem o cálculo C_1 -ver da Costa (1963) e (1985)- encontram-se entre as proposições que definem as álgebras de da Costa. Isto evidencia a relação indicada na introdução e torna plausível a expectativa de seu estudo puder contribuir -parcialmente- ao eslcarecimento dos problemas relativos à algebrização do referido cálculo.

<u>Definição</u> <u>1.3</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Chama-se um elemento $a \in A$ **átomo** se, e somente se, $a \neq 0$ e não existe nenhum $b \in A$, $b \leq a$, tal que $0 \neq b \neq a$.

<u>Definição</u> <u>1.4</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Chama-se $\mathcal{A}$ **atómica** se, e somente se, para todo elemento $a \in A$, $a \neq 0$, existe um átomo $b \leq a$ ■

3. O conjunto de proposições demonstradas a seguir expressa algumas propriedades elementais das álgebras de da Costa. A sua discriminação -como o leitor sem dúvida advertirá- é devida a razões de ordem e claridade na exposição.

Proposição 1.1 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Para todo $x, y \in A$ verificam-se as seguintes propriedades, vinculadas a ordem e ao comportamiento de 0 e 1:

(a) $y \leq x$ se, e somente se, $x \wedge y \equiv y$;

(b) $x \wedge 0 \equiv 0$, $x \vee 1 \equiv 1$;

(c) $x \vee 0 \equiv x$, $x \wedge 1 \equiv x$;

(d) $y \leq x$ se, e somente se, $x \vee y \equiv x$.

Prova. Por Def. 1.1, 2 $x \wedge y \leq y$. Por hipótese $y \leq x$ e por Def. 1.1, 1 $y \leq y$. Então por Def. 1.1, 3 $y \leq x \wedge y$. Por hipótese $y \leq x \wedge y$ e por Def. 1.1, 2 $x \wedge y \leq x$. Então por Def. 1.1, 1 $y \leq x$. Isto prova (a). Por Def. 1.1, 2 $x \wedge 0 \leq 0$. Por Def. 1.1, 10 $0 \leq x \wedge 0$. Por Def. 1.1, 6 $1 \leq x \vee 1$. Por Def. 1.1, 10 $x \vee 1 \leq 1$. Isto prova (b). Por Def. 1.1, 6 $x \leq x \vee 0$. Por Def. 1.1, 1 $x \leq x$ e por Def. 1.1, 10 $0 \leq x$. Por Def. 1.1, 7 $x \vee 0 \leq x$. Por Def. 1.1, 2 $x \wedge 1 \leq x$. Por Def. 1.1, 1 $x \leq x$ e por Def. 1.1, 10 $x \leq 1$, logo por Def. 1.1, 3 $x \leq x \wedge 1$. Isto prova (c). Por hipótese $y \leq x$ e por Def. 1.1, 1 $x \leq x$. Por Def. 1.1, 7 $y \vee x \leq x$. Por Def. 1.1, 6 $x \leq y \vee x$. Isto prova (d) e completa a prova da Proposição □

Proposição 1.2 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Para todo $x, y, z \in A$ verificam-se as afirmações a seguir, que estudam as relacões muito básicas entre os operadores $\wedge$, $\vee$ e $'$:

(a) $x\wedge(y\wedge z)\equiv(x\wedge y)\wedge z$, $x\vee(y\vee z)\equiv(x\vee y)\vee z$;

(b) $x\wedge y\equiv y\wedge x$, $x\vee y\equiv y\vee x$;

(c) $x\wedge(y\vee z)\equiv(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$, $x\vee(y\wedge z)\equiv(x\vee y)\wedge(x\vee z)$;

(d) $x\wedge x\equiv x$, $x\vee x\equiv x$;

(e) $x\equiv x\wedge(x\vee y)$, $x\equiv x\vee(x\wedge y)$;

(f) se $x\leq y$, então $x\vee(y\wedge z)\equiv y\wedge(x\vee z)$.

Prova. Por Def. 1.1, 2 $x\wedge(y\wedge z)\leq x$ e dado que $x\wedge(y\wedge z)\leq y\wedge z\leq y$, por Def. 1.1, 1 $x\wedge(y\wedge z)\leq y$. Logo por Def. 1.1, 3 $x\wedge(y\wedge z)\leq x\wedge y$. Por Def. 1.1, 2 e 1 $x\wedge(y\wedge z)\leq z$ e por Def. 1.1, 3 $x\wedge(y\wedge z)\leq(x\wedge y)\wedge z$. Análogo argumento e obtemos $(x\wedge y)\wedge z\leq x\wedge(y\wedge z)$. Por Def. 1.1, 6 $x\leq x\vee y\leq(x\vee y)\vee z$, $y\leq x\vee y\leq(x\vee y)\vee z$ e $z\leq(x\vee y)\vee z$. Por Def. 1.1, 1 e 7 $y\vee z\leq(x\vee y)\vee z$ e, novamente, por Def. 1.1, 1 e 7 $x\vee(y\vee z)\leq(x\vee y)\vee z$. Análogo argumento e obtemos $(x\vee y)\vee z\leq x\vee(y\vee z)$. Isto prova (a). Por Def. 1.1, 2 $x\wedge y\leq y, x\wedge y\leq x$. Por Def. 1.1, 3 $x\wedge y\leq y\wedge x$. Análogo argumento e obtemos $y\wedge x\leq x\wedge y$. Por Def. 1.1, 6 $x\leq y\vee x$, $y\leq y\vee x$. Por Def. 1.1, 7 $x\vee y\leq y\vee x$ e argumento análogo prova $y\vee x\leq x\vee y$. Isto prova (b). Por Def. 1.1, 5 e lei de Leibniz $x\wedge(y\vee z)\equiv(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$. Por Def. 1.1, 6 $x\leq x\vee y$, $x\leq x\vee z$ e por Def. 1.1, 3 $x\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$. Por Def. 1.1, 2, 6, 1 e 3 $y\wedge z\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$. Por Def. 1.1, 7 $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$. Por Def. 1.1, 6 $x\leq x\vee(y\wedge z)$. Por Def. 1.1, 2, 6 e 1 $y\leq x\vee(y\wedge z)$. Logo por Def. 1.1, 7 $x\vee y\leq x\vee(y\wedge z)$. Por Def. 1.1, 2 $(x\vee y)\wedge(x\vee z)\leq x\vee y$. Logo por Def. 1.1, 1 $(x\vee y)\wedge(x\vee z)\leq x\vee(y\wedge z)$. Isto prova (c). Por Def. 1.1, 4 e lei de Leibniz provamos (d). Por Def. 1.1, 2 $x\wedge(x\vee y)\leq x$. Por Def. 1.1, 1, 6 e 3

$x \leq x \wedge (x \vee y)$. Por Def. 1.1, 6 $x \leq x \vee (x \wedge y)$. Por Def. 1.1, 1, 2 e Def. 1.1, 7 $x \vee (y \wedge z) \leq x$. Isto prova (d). Por hipótese e Prop. 1.1 (d) $x \vee y \leq y$ e por Def. 1.1, 2 $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee y$. Por Def. 1.1, 1 $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq y$. Por Def. 1.1, 2 $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee z$. Por Def. 1.1, 3 $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq y \wedge (x \vee z)$. Por Def. 1.1, 2, 6 e 1 $y \wedge (x \vee z) \leq x \vee y$. Por Def. 1.1, 2 $y \wedge (x \vee z) \leq x \vee z$. Logo por Def. 1.1, 3 $y \wedge (x \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Por Prop. 1.2 (c) e Def. 1.1, 1 $y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$. Isto prova (f) e completa a prova da Proposição.□

<u>Observação</u> <u>1.2</u> Observemos que as afirmações da Proposição 1.2 expressam -módulo ≡- as propriedades clássicas dos retículos distributivos. E óbvio que o item (f) corresponde ao caráter modular das referidas estruturas.

<u>Proposição</u> <u>1.3</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Cumpren-se para todo x, y, a, b $\in$ **A** as afirmações a seguir -ilustrativas a respeito do comportamento da igualdade e substituibilidade de equivalentes :

(a) se $x = y$, então $x \equiv y$;

(b) se $a \equiv b$ e $x \equiv y$, então $x \wedge a \equiv y \wedge b$;

(c) se $a \equiv b$ e $x \equiv y$, então $x \vee a \equiv y \vee b$.

Prova. Por Def. 1.1 e lei de Leibniz $x\leq y$ e $y\leq x$ i. e. $x\equiv y$. Por Def. 1.1, 2 $x\wedge a\leq x$, $x\wedge a\leq a$ e por hipótese $x\leq y$. Logo por Def. 1.1, 3 $x\wedge a\leq y\wedge b$. Por argumento análogo temos que $y\wedge b\leq x\wedge a$. Logo temos probado (b). Por Def. 1.1, 6 $x\leq x\vee a$, $a\leq x\vee a$ y, por hipótese, $y\leq x$, $b\leq a$. Por Def. 1.1, 7 $y\vee b\leq x\vee a$. Por argumento análogo $x\vee a\leq y\vee b$. Logo $x\vee a\equiv y\vee b$ e isto conclui a prova da Proposição □

Proposição 1.4 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Cumpren-se para todo x, y, $p\in A$ as afirmações a seguir que estudam as relaçoes entre 0, 1 e a ordem:

(a) se $x\vee y\equiv 0$ então $x\equiv 0$ e $y\equiv 0$;

(b) $p\vee(p'\wedge p^{o})\equiv 1$, $p'\vee(p\wedge p^{o})\equiv 1$;

(c) $x\wedge x'\wedge x^{o}\equiv 0$.

Prova. Por Def. 1.1, 6 $x\leq x\vee y$, $y\leq x\vee y$. Então, por hipótese, $x\leq 0$, $y\leq 0$. Por Def. 1.1, 10 $0\leq x$, $0\leq y$. Isto prova (a). Por Def. 1.1, 10 $p\vee(p'\wedge p^{o})\leq 1$. Por Def. 1.1, 2 e 6 $p\wedge p'\leq p\leq p\vee(p\wedge p')'$. Por Def. 1.1, 7 $(p\wedge p')\vee(p\wedge p')'\leq p\vee(p\wedge p')'$. Mas por Prop. 1.3, (c) e Def. 1.1, 12 $1\leq p\vee(p\wedge p')'$, isto é, $1\leq p\vee p^{o}$. Logo $p\vee p^{o}\equiv 1$ e por Def. 1.1., 12 $p\vee p'\equiv 1$. Mas $p\vee(p'\wedge p^{o})\equiv(p\vee p')\wedge(p\vee p^{o})$ por Prop. 1.2, (c). Por Prop. 1.3 (c) $(p\vee p')\wedge(p\vee p^{o})\equiv 1\wedge 1$ i. e. $p\vee(p'\wedge p^{o})\equiv 1$. Por Def. 1.1, 2 e 6 $p\wedge p'\leq p'\leq p'\vee(p\wedge p')'$. Logo por Def. 1.1 7 $(p\wedge p')\vee p^{o}\leq p'\vee p^{o}$. Mas por Def. 1.1, 12 e 10 $1\equiv p'\vee p^{o}$. Dado que, por Prop. 1.2 (c) $p'\vee(p\wedge p^{o})\equiv(p'\vee p)\wedge(p'\vee p^{o})$, temos que, por Def. 1.1, 12 e Prop. 1.3 (c) $1\wedge 1\equiv p'\wedge(p\vee p^{o})$ i. e.

$p'\wedge(p\vee p^{\circ})\equiv 1$. Isto demonstra (b). Por Def. 1.1, 2 temos que $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le x$ e $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le x'$. Dado que $x^{\circ}\wedge x\le x$ e $x^{\circ}\wedge x'\le x'$ temos que, por Def. 1.1, 9, $x\le x^{\circ}\to x$ e $x'\le x^{\circ}\to x'$. Logo $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le x^{\circ}\to x$ e $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le x^{\circ}\to x'$. Dado que $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le x^{\circ}$, por Def. 1.1, 14 temos que $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le(x^{\circ}\to x)\to((x^{\circ}\to x')\to(x^{\circ})')$. Logo por Def. 1.1, 3 $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le((x^{\circ}\to x)\wedge((x^{\circ}\to x)\to((x^{\circ}\to x')\to(x^{\circ})')))$. Então, por Def. 1.1, 8, temos que $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le((x^{\circ}\to x')\to(x^{\circ})')$. Por razoamento análogo obtemos que $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le(x^{\circ})'$. Assim, por Def. 1.1, 15, $x\wedge x'\wedge x^{\circ}\le 0$. Por Def. 1.1, 10 $0\le x\wedge x'\wedge x^{\circ}$. Isto demonstra (c) e culmina a prova da Proposição □

<u>Proposição</u> <u>1.5</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Para todo x, $y\in\mathcal{A}$, cumpren-se as seguintes afirmações -expressivas das conexões entre negação e ordem:

(a) se $x\le y^{\circ}$ e $x\le(y^{\circ})'$, então $x\equiv 0$;

(b) $x\wedge y\equiv 0$ se, e somente se, $x\le y'\wedge y^{\circ}$;

(c) $x\wedge y\wedge y^{\circ}\equiv 0$ se, e somente se, $x\le y'$;

(d) se $x\wedge y\equiv 0$ então $x\le y'$;

(e) se $y\equiv y^{\circ}$ então $x\wedge y\equiv 0$ se, e somente se, $x\le y'$;

(f) $x\wedge y'\wedge y^{\circ}\equiv 0$ se, e somente se, $x\le y$.

<u>Prova</u>. Por hipótese e Def. 1.1, 3 temos que $x\le y^{\circ}\wedge(y^{\circ})'$. Por Def. 1.1, 15 $y^{\circ}\wedge(y^{\circ})'\le 0$. Por Def. 1.1, 1 e 10 $x\equiv 0$, o que prova (a). Por hipótese e Def. 1.1, 10 $x\wedge y\le y'\wedge y^{\circ}$. [illegible], por Def. 1.1, 7 $(y'\wedge y^{\circ})\vee(x\wedge y)\le y'\wedge y^{\circ}$. Por Prop. 1.2, (c) $((y'\wedge y^{\circ})\vee x)\wedge((y'\wedge y^{\circ})\vee y)\le y'\wedge y^{\circ}$. Por Prop. 1.3, (b) e Prop. 1.4, (b) $((y'\wedge y^{\circ})\vee x)\wedge 1\le y'\wedge y^{\circ}$. Por Prop. 1.1, (c)

$(y'\wedge y^{\circ})\vee x\leq y'\wedge y^{\circ}$. Mas, por Def. 1.1, 6 e definição do operador "$\equiv$", temos $(y'\wedge y^{\circ})\vee x\equiv y'\wedge y^{\circ}$ e, por Prop. 1.1, [illegible] $x\leq y'\wedge y^{\circ}$. Suponhamos agora $x\leq y'\wedge y^{\circ}$. Por Def. 1.1, 2 temos que $x\wedge y\leq y'\wedge y^{\circ}$ e $x\wedge y\leq y$. Logo, por Def. 1.1, 3 $x\wedge y\leq y\wedge y'\wedge y^{\circ}$ mas, por Prop. 1.4, (c), temos que $x\wedge y\leq 0$. Def. 1.1, 10 permete completar a prova de (b). Por hipótese e Prop. 1.3, (c) e Prop. 1.1, (c) $y'\vee(x\wedge(y\wedge y^{\circ}))\equiv y'\vee 0\equiv y'$. Então, por Prop. 1.2, (c) $(y'\vee x)\wedge(y'\vee(y\wedge y^{\circ}))\equiv y'$. Mas, por Prop. 1.4, (b) e Prop. 1.3, (b) $(y'\vee x)\wedge 1\equiv y'$. Assim, por Prop. 1.1, (c) e Prop. 1.3, (b) $y'\vee x\equiv y'$. Logo, por Prop. 1.1, (d), $x\leq y'$. Suponhamos agora que $x\leq y'$. Por hipótese e Def. 1.1, 2, $x\wedge y\wedge y^{\circ}\leq y'$. Dado que, por Def. 1.1, 2 $x\wedge y\wedge y^{\circ}\leq y$ e $x\wedge y\wedge y^{\circ}\leq y^{\circ}$, por Def. 1.1, 3 e Prop. 1.4, (c) $x\wedge y\wedge y^{\circ}\leq y\wedge y'\wedge y^{\circ}\equiv 0$. Def. 1.1, 10 permete completar a prova de (c). Por hipótese $x\wedge y\equiv 0$, logo, por (b), $x\leq y'\wedge y^{\circ}$. Def. 1.1, 2 permete completar a prova de (d). Por hipótese e Def. 1.1, 4 $y\equiv y\wedge y^{\circ}$. Por Prop. 1.3, (a) e (b) $x\wedge y\equiv x\wedge y\wedge y^{\circ}$. Logo, por (c), $x\wedge y\wedge y^{\circ}$ se, e somente se, $x\leq y'$. Finalmente demonstra-se (f). Dada a hipótese e por Prop. 1.1, (b), (c) e por Prop. 1.4, (b) temos que $(y\vee x)\wedge(y\vee(y'\wedge y^{\circ}))\equiv(y\vee x)\wedge 1\equiv y\vee x\equiv y$. Prop. 1.1, (d) permete afirmar que $x\leq y$. Suponhamos agora que $x\leq y$, por argumento análogo ao caso (c) temos que $x\wedge y'\wedge y^{\circ}\leq 0$. Def. 1.1, 10 permete provar (f) e demonstra-se assim a Proposição □

Proposição 1.6 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Cumpren-se para todo $x \in A$ as seguintes afirmações -que estudan o comportamento do duplo complemento de da Costa:

(a) se $x \wedge (x')^{o} \equiv 0$, então $x \equiv x''$;

(b) se $x' \wedge (x')^{o} \equiv 0$, então $x \equiv x''$.

Prova. Por hipótese, Prop. 1.5, (b) e Def. 1.1, 2 $x \leq (x' \wedge x'')'' \wedge ((x' \wedge x'')^{o} \leq (x' \wedge x'')''$. Por Def. 1.1, 13 $(x' \wedge x'')'' \leq x' \wedge x''$ e por Def. 1.1, 2 $x' \wedge x'' \leq x''$. Def. 1.1, 13 permete obter a prova de (a). Por hipótese e Def. 1,1, 10 $x' \wedge (x')^{o} \leq 0 \leq x \wedge (x' \wedge (x')^{o})$. Logo $0 \equiv x' \wedge (x')^{o} \equiv x \wedge (x' \wedge (x')^{o})$. Por Prop. 1.5, (c) $x \leq x''$. Def. 1.1, 13 permete provar (b) e assim completarmos a demonstração da Proposição □

4. Vamos estudar neste numeral o comportamento de filtros e ideais nas álgebras de da Costa. Provamos, neste sentido, a equivalência de diversas alternativas para definirmos tais estruturas.

Definição 1.5 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Dizemos que um subconjunto $\mathscr{F}$ de **A** é um **filtro** sobre $\mathscr{A}$ se se cumprirem as seguintes condições:

(F1) $\mathscr{F} \neq \emptyset$;

(F2) se $a, b \in \mathscr{F}$, então $a \wedge b \in \mathscr{F}$;

(F3) se $a \in \mathscr{F}$ e $a \leq b$, então $b \in \mathscr{F}$ ■

Teorema 1.1 Um subconjunto $\mathcal{F}$ de A é um filtro se, e somente se, se cumprir alguma das seguintes condições I-III

I
- (1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
- (2) se $a, b \in \mathcal{F}$, então $a \wedge b \in \mathcal{F}$;
- (3) se $a \in \mathcal{F}$, então $a \vee b \in \mathcal{F}$;
- (4) se $a \in \mathcal{F}$ e $a \equiv b$, então $b \in \mathcal{F}$.

II
- (1) $1 \in \mathcal{F}$;
- (2) se $a, a \to b \in \mathcal{F}$, então $b \in \mathcal{F}$;
- (3) se $a \in \mathcal{F}$ e $a \equiv b$, então $b \in \mathcal{F}$.

III
- (1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
- (2) $a \wedge b \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $a \in \mathcal{F}$ e $b \in \mathcal{F}$;
- (3) se $a \in \mathcal{F}$ e $a \equiv b$, então $b \in \mathcal{F}$.

Prova. Se $a \in \mathcal{F}$, dado que $a \leq a \vee b$, $a \vee b \in \mathcal{F}$ por (F3). Se $a \in \mathcal{F}$ e $a \equiv b$, $a \leq b$ e logo, por (F3), $b \in \mathcal{F}$. Isto prova que Def. 1.2 implica I. Por (1) de I, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Mas, dado que existe um elemento $a \in \mathcal{F}$, por (2) de I, $a \vee a' \in \mathcal{F}$. Mas, por Def. 1.1, 12 e (4) de I, $1 \in \mathcal{F}$. Se $a, a \to b \in \mathcal{F}$, então, por (2) de I, $a \wedge (a \to b) \in \mathcal{F}$. Mas, por Def. 1.1, 8 $a \wedge (a \to b) \leq b$ e, por hipótese e (3) de I, $(a \wedge (a \to b)) \vee b \in \mathcal{F}$. Por Prop. 1.1, (d) e hipótese, $b \in \mathcal{F}$. Isto prova que I implica II. Se $a \in \mathcal{F}$ e $a \leq b$ então por Prop. 1.1, (c) $a \wedge 1 \leq b$. Por Def. 1.1, 9 $1 \leq a \to b$. Mas por Def. 1.1, 10 temos que $a \to b \equiv 1$ e, por (1) e (3) de II, $b \in \mathcal{F}$. Se $a, b \in \mathcal{F}$, então, por Def. 1.1, 9, $b \leq a \to (a \wedge b)$ e, por resultado anterior e hipótese, $a \to (a \wedge b) \in \mathcal{F}$. E, por (2) de II, $a \wedge b \in \mathcal{F}$. Suponhamos agora que $a \wedge b \in \mathcal{F}$, por resultado anterior e

Def. 1.1, 2, a, $b\in\mathcal{F}$. Isto prova que II implica III. Se a, $b\in\mathcal{F}$, então, por (2) de III, temos que $a\wedge b\in\mathcal{F}$. Se $a\in\mathcal{F}$ e $a\leq b$, dado que $a\wedge b\equiv a$, por (3) de III, $a\wedge b\in\mathcal{F}$ y, por (2) de III, $b\in\mathcal{F}$. Isto prova que III implica Def. 1.3 e completa a prova do Teorema □

Definição 1.6 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Dizemos que un subconjunto I de **A** é um **ideal** sobre $\mathcal{A}$ se, e somente se, se cumprirem as seguintes condições:

(I1) $I\neq\emptyset$;

(I2) se a, $b\in I$, então $a\vee b\in I$;

(I3) se $a\in I$ e $b\leq a$, entpnces $b\in I$ ■

Teorema 1.2 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja I um subconjunto de **A**. I é um ideal sobre $\mathcal{A}$ se, e somente se, se cumprir algumas das seguintes condições I-III:

I $\left\{\begin{array}{l} (1)\ I\neq\emptyset\ ; \\ (2)\ \text{se a, } b\in I\text{, então } a\vee b\in I\ ; \\ (3)\ \text{se } a\in I\text{, então } a\wedge b\in I\ ; \\ (4)\ \text{se } a\in I \text{ e } a\equiv b\text{, então } b\in I. \end{array}\right.$

$$\text{II}\quad\begin{cases}(1)\ 0\in I\ ;\\ (2)\ \text{se } a,\ b\wedge a'\wedge a^{\circ}\in I,\ \text{então } b\in I\ ;\\ (3)\ \text{se } a\in I \text{ e } a\equiv b, \text{então } b\in I.\end{cases}$$

$$\text{III}\quad\begin{cases}(1)\ I\neq\emptyset\ ;\\ (2)\ a\vee b\in I \text{ se, e somente se, } a\in I \text{ e } b\in I\ ;\\ (3)\ \text{se } a\in I \text{ e } a\equiv b, \text{ então } b\in I.\end{cases}$$

<u>Prova</u>. Se $a\in I$, por Def. 1.1, 2 e (I3), $a\wedge b\in I$. Se $a\in I$ e $a\equiv b$, por (I3), $b\in I$. Isto demonstra que Def. 1.3 implica I. Por (1) de I, existe um elemento $a\in I$. Logo, por Def. 1.1, 10 e Prop. 1.1, (a), $a\wedge 0\equiv 0$ e, por hipótese e (4) de I, $0\in I$. Se a, $b\wedge a'\wedge a^{\circ}\in I$, então, por (3) de I, $a\wedge(b\wedge a'\wedge a^{\circ})\in I$. Por Prop. 1.2, (b), (a), Prop. 1.4, (c) e Prop. 1.1, (c) $b\equiv b\wedge 0$. Logo, por hipótese e (4) de I, $b\in I$. Isto prova que I implica II. Por Prop. 1.4, (c) temos que $a\wedge a'\wedge a^{\circ}\leq 0$ e, por Def. 1.1, 10, $a\wedge a'\wedge a^{\circ}\leq b$. Por Def. 1.1, 2, 7 e 4 $(a\wedge a'\wedge a^{\circ})\vee(b\wedge a'\wedge a^{\circ})\leq b$. Mas se $c\in I$ e $a\leq c$, então por Prop. 1.2, (d) e (3) de II, $c\in I$. Isto é, $(a\wedge a'\wedge a^{\circ})\vee(b\wedge a'\wedge a^{\circ})\in I$. Por Prop. 1.2, (c) e (3) de II, temos que $(a\wedge a'\wedge a^{\circ})\vee(b\wedge a'\wedge a^{\circ})\equiv(a\vee b)\wedge(a'\vee(b\wedge a'\wedge a^{\circ}))\wedge$ $\wedge(a^{\circ}\vee(b\wedge a'\wedge a^{\circ}))\in I$. Por Prop. 1 1, (b), Prop. 1.2, (e) e Prop. 1.3, (b) obtemos que $(a\vee b)\wedge a'\wedge a^{\circ}\in I$. Dado que, por hipótese, $a\in I$, por (2) de II, $a\vee b\in I$ Se $a\vee b\in I$, por Def. 1.1, 6 e argumento análogo, a, $b\in I$. Isto prova que II implica III. Se a, $b\in I$, por (2) de III, temos que $a\vee b\in I$. Se $a\in I$ e $b\leq a$, dado que $a\vee b\equiv a$, por (3) de III, $a\vee b\in I$. Por (2) de

III, $b \in I$. Isto prova que III implica Def. 1.4 e completa a prova do Teorema □

<u>Definição</u> <u>1.7</u> Um filtro $\mathcal{F}$ (ideal I) é próprio se, e somente se, $0 \notin \mathcal{F}$ ($1 \notin I$) ■

<u>Definição</u> <u>1.8</u> Um filtro $\mathcal{F}$ (ideal I) é $\mathcal{A}$-completo se, e somente se, ou $a' \wedge a^{\circ} \in \mathcal{F}$ ($a' \wedge a^{\circ} \in I$) ou $a \in \mathcal{F}$ ($a \in I$), mas não as duas alternativas ■

<u>Teorema</u> <u>1.3</u> Todo filtro (ideal) próprio sobre uma álgebra de da Costa $\mathcal{A}$ está contido em um filtro (ideal) $\mathcal{A}$-completo.

<u>Prova</u>. Idêntica à prova clássica correspondente às álgebras de Boole □

5. O objetivo deste numeral é introduzirmos e estudarmos brevemente certas estruturas -chamadas <u>quase-filtros</u>- que serão particularmente relevantes nos desenvolvimentos ulteriores. Analizamos também a conexão entre estas estruturas e filtro.

Definição 1.9 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Um subconjunto Q de **A** é um **cuasi-filtro** se, e somente se, se cumprirem as seguintes condições -onde "ω" denota a disjunção exclusiva-:

(Q1) Existe α tal que $\alpha \equiv 1$ e $\alpha \in Q$;

(Q2) se a, $b \in Q$, então e $\neg(a \leq b \ \omega\ b \leq a)$, então $a \wedge b \in Q$;

(Q3) se $a \in Q$, $a \leq b$ e $a \not\equiv b$, então existe um único $c \equiv b$ tal que $c \in Q$ ■

Teorema 1.4 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Um subconjunto Q de **A** é um quase-filtro se, e somente se, se cumprir alguma das seguintes condições:

I

(1) $Q \neq \emptyset$;

(2) se a, $b \in Q$ e $\neg(a \leq b \ \omega\ b \leq a)$, então $a \wedge b \in Q$;

(3) se $a \leq b$ e $a \not\equiv b$, então existe um único c tal que $c \equiv b$ e $c \in Q$.

II

(1) $Q \neq \emptyset$;

(2) se a, $b \in Q$ e $\neg(a \leq b \vee b \leq a)$, então $a \wedge b \in Q$;

(3) se a, $b \in Q$ e $a \equiv b$, então $a \wedge b \in Q$;

(4) se $a \leq b$ e $a \not\equiv b$, então existe um único c tal que $c \equiv b$ e $c \in Q$.

Prova. É óbvio que Def. 1.7 implica I. Si $a, b \in Q$ e $\neg(a \leq b \vee b \leq a)$, então $\neg(a \leq b) \wedge \neg(b \leq a)$ e assim $\neg(a \leq b \ w \ b \leq a)$. Por (2) de I, $a \wedge b \in Q$. Se $a, b \in Q$ e $a \equiv b$, então $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$, isto é $\neg(a \leq b \ w \ b \leq a)$. Por (2) de I, $a \wedge b \in Q$. Isto prova que I implica II. Por (1) de II existe $a \in Q$. Por Def. 1.1, 10 $a \leq 1$. Se $1 \leq a$, toma-se como α o próprio a. Se $a \not\equiv 1$, então (4) de II assegura a existência de $c \equiv 1$. Logo toma-se c como α. Se $a, b \in Q$ e $\neg(a \leq b \ w \ b \leq a)$, então $\neg(a \leq b) \wedge (b \leq a)$ ou $a \leq b \wedge b \leq a$. Em qualquer das duas alternativas, por (2) e (3) de II respectivamente, obtemos que $a \wedge b \in Q$. Isto prova que II implica Def. 1.7 e completa a prova do Teorema □

Teorema 1.5 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $\mathrm{F} = \langle \mathscr{F}$: $\mathscr{F}$ é um filtro sobre $\mathscr{A}\rangle$. Seja $\mathcal{Q} = \langle Q$: Q é um quase-filtro sobre $\mathscr{A}\rangle$. Temos então que

(a) $|1| \in \mathrm{Q}$ (onde, para $a \in \mathbf{A}$, $|a|$ denota a classe de equivalência de a);

(b) se $Q \in \mathrm{Q}$ e $\neg(Q \subseteq |1|)$, então $Q \cap |1| = \langle \beta \rangle$;

(c) Nem sempre é o caso que se $a, b \in Q$, então $a \vee b \in Q$.

Prova. Por Def. 1.1, 10, para todo $a \in A$ temos que $a \leq 1$. Já que, para todo $a \in |1|$ $a \equiv 1$, então $a \leq b$ se, e somente se, $a \equiv b$, para todo $b \in \mathbf{A}$. Logo (Q3) cumpre-se vacuamente. Se $a, b \in |1|$, então, por Prop. 1.1, (a) $a \wedge b \equiv a \equiv 1$. Logo, dado que $a \equiv b$, $\neg((a \leq b) \ w \ (b \leq a))$. Por Def. 1.7, $a \wedge b \in Q$. Dado que, para todo $a, b \in |1|$, $a \equiv b$ cumpre-se (Q3) vacuamente . Isto prova (a). Por hipótese existe um elemento $a \in Q$ tal que $a \not\equiv 1$, isto é, $a \leq 1$ e $\neg(1 \leq a)$. Suponhamos que existem $\alpha \equiv \alpha' \equiv 1$ tais que $\alpha, \alpha' \in Q$. Logo teriamos que $a \in Q$, $a \leq \alpha$ e $a \not\equiv \alpha$ de manera que, por (Q3), deve existir um único $c \equiv \alpha$ tal que $c \in Q$. Mas $\alpha \equiv \alpha \in Q$ e $\alpha \equiv \alpha' \in Q$. Dado que, por (Q1), $Q \cap |1| \neq \emptyset$, deve existir um único β tal que $Q \cap |1| = \langle \beta \rangle$. Isto prova (b). Basta tomarmos $a \leq b$ e $a \not\equiv b$, visto que se $a \vee b \in Q$ falha (Q3). Isto prova (c) e completa a demonstração do Teorema □

<u>Corolario 1</u> Se $\mathcal{F} \in \mathrm{F}$ e $\mathcal{F} \neq |1|$, então $\mathcal{F} \neq Q$ para todo $Q \in \mathrm{Q}$ □

<u>Corolario 2</u> Se $\mathbb{A} \neq \emptyset$, $\mathbb{A}$ é fechado sob interseção finita e $\mathbb{A} \subseteq |1|$, então $\mathbb{A} \in Q$ □

<u>Definição 1.10</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $\mathrm{Q}^{x} = \langle\, Q_x$: Q_x é um quase-filtro gerado por $x \rangle$ ■

<u>Definição 1.11</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $L_x = \bigcap \langle Q : x \in Q \rangle$ para $x \in A$ ■

<u>Proposição</u> <u>1.7</u> Seja L_x definido como acima, então temos que $L_x = \langle x \rangle$.

<u>Prova</u>. Trivialmente $x \in L_x$. Seja $y \neq x$. Se $y \equiv x$, $y \leq x$ ou x e y são incomparáveis, é trivial. Basta com tomarmos um Q_x -já que $Q^x \leq \langle Q\colon x \in Q \rangle$- tal que $y \notin Q_x$. Logo $y \notin L_x$. Se $x \not\equiv y$, dado que, por hipótese $x \not\equiv y$, por (Q3), para cada Q -tal que $x \in Q$- existe um único $c \in Q$ e $c \equiv y$. Basta com tomarmos um Q_x tal que , no lugar de y, tomemos um $c \equiv y$ mas $c \neq y$. Se $y \neq 1$, tomemos $y \wedge 1$; se $y = 1$, tomemos $x \vee x'$. Como $Q^x \leq \langle Q\colon x \in Q \rangle$ mas $y \notin Q_x$, temos que $y \notin L_x$ □

<u>Proposição</u> <u>1.8</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. $\mathscr{F}$ é um filtro $\mathscr{A}$-completo se, e somente se, $\mathscr{F}$ é primo.

<u>Prova</u>. Seja $\mathscr{F}$ um filtro $\mathscr{A}$-completo, $x \vee y \in \mathscr{F}$ e suponhamos que $x \notin \mathscr{F}$ e $y \notin \mathscr{F}$. Dado que $\mathscr{F}$ é $\mathscr{A}$-completo, $x^{\circ} \wedge x' \in \mathscr{F}$ e, por (F2), $(x \vee y) \wedge x^{\circ} \wedge x' \in \mathscr{F}$, isto é, $(x \wedge x^{\circ} \wedge x') \vee (y \wedge x^{\circ} \wedge x') \in \mathscr{F}$. Por Prop. 1.1, (c) $y \wedge x^{\circ} \wedge x' \in \mathscr{F}$ mas então, por Def. 1.1, 2 e (F3), $y \in \mathscr{F}$ o que é absurdo. No outro sentido, se $\mathscr{F}$ for primo, $\mathscr{F}$ é próprio e, para todo $a \in \mathbf{A}$, $a \vee (a' \wedge a^{\circ}) \equiv 1 \in \mathscr{F}$. Mas, visto que é primo, $a \in \mathscr{F}$ ou $a' \wedge a^{\circ} \in \mathscr{F}$, isto é, $\mathscr{F}$ é completo □

Proposição 1.9 Seja $\mathscr{A}$ uma álgeb a de da Costa. Se $\mathscr{F}\in F$, então $\mathscr{F}\neq L_x$, para todo $x\in A$.

Prova. Por Prop. 1.7 se $\mathscr{F}=L_x$, então $\mathscr{F}=\langle x\rangle$, isto é, $x\in\mathscr{F}$. Se $\mathscr{F}$ for próprio, $x\neq 0$ e logo $x\vee 0\neq x$ mas $x\leq x\vee 0$ e logo, por (F3), $x\vee 0\in\mathscr{F}$. Então $\mathscr{F}\neq L_x$. Se $\mathscr{F}$ não for propio, $0, 1\in\mathscr{F}$, isto é, $\mathscr{F}\neq L_x$ □

6. Vamos expor neste numeral um teorema relativo ao número mínimo de elementos de uma álgebra de da Costa. A demonstração que vamos dar é algo diferente da constante em CDA.

Teorema 1.6 Toda álgebra de da Costa própria tem como mínimo três elementos.

Prova. Suponhamos que existe uma álgebra de da Costa $\mathscr{A}$ com dois elementos. Então $A=\langle 0, 1\rangle$. Logo, a respeito da operação ' temos que $0'=0$ ou $0'=1$ e $1'=0$ ou $1'=1$. Há por conseguinte quatro possibilidades. Se $1'=0$, então, por Prop. 1.1, (b), $1\wedge 1'\equiv 0\wedge 0'\equiv 0$, isto é, $\mathscr{A}$ não é própria, contradizendo a hipótese -isto esgota duas possibilidades. Se $1'=1$, então, por Prop. 1.1, (b), $1\wedge 1'\wedge(1\wedge 1')'\equiv 1$ mas, por Prop. 1.4, (c), $1\wedge 1'\wedge(1\wedge 1')'\equiv 0$. Logo $1\equiv 0$ e assim $1\wedge 1'\equiv 0\wedge 0'\equiv 0$, isto é, $\mathscr{A}$ não é própria, contradizendo hipótese. Isto esgota as duas outras possibilidades e completa a prova do Teorema □

C A P I T U L O 2

1. A possibilidade de mapearmos toda álgebra de Boole em uma álgebra de conjuntos correspondente foi demonstrada por Stone na década dos 30. Este resultado -conhecido como Teorema de Representação de Stone- induz pensarmos na possibilidade de uma representação similar para as álgebras de da Costa. A noção de <u>álgebra paraconsistente de conjuntos</u> é introduzida, originariamente, por Carnielli e de Alcantara. Estes autores demonstram -véase Carnielli e de Alcantara [1984]- dois teoremas de representação tipo Stone para álgebras de da Costa em álgebras paraconsistentes de conjuntos. O objetivo deste capítulo é, basicamente, expormos os referidos resultados com algumas modificações.

2. Vamos introduzir neste numeral a noção de álgebra paraconsistente de conjuntos. A definição original é diferente da definição estudada aqui na qual foi suprimida a condição 3 daquela e a condição 1 sofreu algumas modificações.

<u>Definição</u> <u>2.1</u> Uma álgebra paraconsistente de conjuntos é uma estrutura $\mathcal{A}_S = \langle S, 0, I, \leq, \wedge, \vee, \Rightarrow, ' \rangle$ onde

1. Para todo a, $b \in S$ $a \wedge b$ e $a \vee b$ podem se escrever como uniões e interseções de subconjuntos de S;
2. $\leq$ é um quase-ordem ;
3. S é fechado a respeito das operações binárias $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y a operação unária ' ;
4. $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$;
5. se $c \leq a$ e $c \leq b$ então $c \leq a \wedge b$;
6. $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$;
7. se $a \leq c$ e $b \leq c$ então $a \vee b \leq c$;
8. $a \wedge (a \Rightarrow b) \leq b$;
9. se $a \wedge c \leq b$ então $c \leq (a \Rightarrow b)$;
10. $0 \leq a$, $a \leq I$;
11. $x \vee x' \equiv 1$, onde $a \equiv b$ se, e somente se, $a \leq b$ e $b \leq a$;
12. $x'' \leq x$;
13. $x^{\circ} \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow ((y \Rightarrow x') \Rightarrow y')$ onde $x^{\circ} = (x \wedge x')'$;
14. $x^{\circ} \wedge (x^{\circ})' \equiv 0$;
15. $x^{\circ} \leq (x')^{\circ}$ ■

Observação 2.1 O e I são, obviamente, análogos ao $\emptyset$ e ao conjunto universo mas, embora puderem eventualmente coincidir, isto não é necessario.

Observação 2.2 Notemos que as condições da Definição 1.1 podem se aparear com as suas correspondentes, por assim dizer, da Definição 1.3. As "correspondentes" às condições 4 e 5 daquela derivam-se trivialmente da condição 1 da Def. 2.3. Por conseguinte, é óbvio que as proposições correspondentes às Proposições 1.1-1.6 podem serem demonstradas para álgebras paraconsistentes de conjuntos.

Definição 2.2 Seja $\mathcal{A}_S$ uma álgebra paraconsistente de conjuntos. Seja S_o=< x: $x \in S$ e $x \wedge x' \not\cong 0$>. $\mathcal{A}_S$ é **própria** se, e somente se, $S_o \neq \emptyset$ ∎

3. Vamos expor neste numeral um primeirc teorema de representação tipo-Stone. Para alcanzarmos este propósito devemos estabelecer, previamente, as seguintes definições:

<u>Definição</u> <u>2.3</u> Seja $\equiv$ uma relação de equivalência. Dizemos que uma função ϕ é **$\equiv$-injectiva** se, e somente se, se cumprir que se $x\neq y$ e $x\not\equiv y$ então $\phi(x)\neq\phi(y)$ ∎

<u>Definição</u> <u>2.4</u> Seja $\equiv$ uma relação de equivalência. Sejan $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas álgebras de da Costa. $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são **$\equiv$-isomórficas** se, e somente se, existe uma função ϕ de $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{B}$ que preservam as operações e é $\equiv$-injectiva ∎

Na demonstração do Teorema 2.1 -enunciado posteriormente- utilizaremos os seguintes lemas:

<u>Lema</u> <u>2.1</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Para todo $x\in\mathbf{A}$, seja $\mathbf{F}_x=\{\mathscr{F}: \mathscr{F}$ é um filtro próprio sobre $\mathscr{A}$ e $x\in\mathscr{F}\}$. Temos que se $x\not\equiv 0$ então $\mathbf{F}_x\neq\emptyset$ e $\mathbf{F}_x$ é uma classe indutiva.

<u>Prova</u>. Seja $\mathscr{F}^x=\{y: x\vee z\equiv y,\ x,\ z\in\mathbf{A}\}$. Obviamente $\mathscr{F}^x\subseteq\mathbf{A}$ e $\mathscr{F}^x\neq\emptyset$ já que $x\vee x\in\mathscr{F}^x$. Para todo $y\in\mathbf{A}$ tal que $x\leq y$, temos que $x\vee y\equiv y$ logo $y\in\mathscr{F}^x$. Se $y,\ y'\in\mathscr{F}^x$ então $y\equiv x\vee z$, $y'\equiv x\vee z'$. Mas $y\wedge y'\equiv(x\vee z)\wedge(x\vee z')\equiv x\vee((x\wedge z')\vee(x\wedge z)\vee(z\wedge z'))$ e dado que o último término pertence a A trivialmente $y\wedge y'\in\mathscr{F}^x$. Já que $x\not\equiv 0$, então, por Prop 1.4, (a), $x\vee y\not\equiv 0$ para todo $y\in\mathbf{A}$, isto é, $0\not\in\mathscr{F}^x$. Logo $\mathscr{F}^x$ é um filtro próprio. Se tomarmos $\subseteq$ como ordem, temos que toda cadeia de filtros próprios de $\mathbf{F}_x$ tem um

limite superior, i. e. a união dos elementos da cadeia que é um filtro próprio e x pertence à referida cadeia. Suponhamos que $0 \in \bigcup \{\mathcal{F}: \mathcal{F} \in F_x\}$ mas então $0 \in \mathcal{F}$ para algum $\mathcal{F} \in F_x$ o que é absurdo. Então $\bigcup \{\mathcal{F}: \mathcal{F} \in F_x\}$ é um filtro próprio e, dado que $x \in \bigcup \{\mathcal{F}: \mathcal{F} \in F_x\}$, $\bigcup \{\mathcal{F}: \mathcal{F} \in F_x\} \in F_x$. Logo F_x é uma classe indutiva □

<u>Lema 2.2</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Para todo $x \in \mathbf{A}$, seja $\phi(x) = \{\mathcal{F}: \mathcal{F}$ é um filtro $\mathcal{A}$-completo e $x \in \mathcal{F}\}$. Temos então que se $a \not\equiv 0$, então $\phi(a) \neq \emptyset$.

<u>Prova</u>. Por Lema 2.1 temos que F_x é uma classe indutiva. Por o Lema de Zorn existe um elemento maximal $\mathcal{F}^m \in F_x$. Logo $\mathcal{F}^m$ é um filtro próprio. Seja $z \in \mathbf{A}$. Seja $\mathcal{F}^{z \wedge z^\circ} = \{y: y \equiv (t \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee u,\ t \in \mathcal{F}^m,\ u \in \mathbf{A}\}$. Si $y, y' \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$, então $y \wedge y' = ((t \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee u) \wedge ((t' \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee u)$. Dado que $\mathcal{F}^m$ é filtro, seja $t'' = t \wedge t' \in \mathcal{F}^m$. Distribuindo obtemos que

$$y \wedge y' \equiv (t'' \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee ((t \wedge (z \wedge z^\circ) \wedge u') \vee (t' \wedge (z \wedge z^\circ) \wedge u) \vee (u \wedge u')) \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$$

já que o segundo componente da disjunção obviamente pertence a $\mathbf{A}$. E óbvio que $\mathcal{F}^{z \wedge z^\circ} \subseteq \mathbf{A}$ e $\mathcal{F}^{z \wedge z^\circ} \neq \emptyset$ uma vez que $z \wedge z^\circ \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$. Se $x \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$ e $x \leq y$, dado que $(t \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee u \equiv x \leq y$ temos que $t \wedge (z \wedge z^\circ) \leq y$ e assim $(t \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee y \equiv y$, isto é $y \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$. Dado que $x \in \mathcal{F}^m$, $(x \wedge (z \wedge z^\circ)) \vee x \equiv x \in \mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$. Logo se $\mathcal{F}^{z \wedge z^\circ}$ é próprio, $\mathcal{F}^{z \wedge z^\circ} \in F_x$. Trivialmente, se $x \in \mathcal{F}^m$, então, dado que

$(x\wedge(z\wedge z^{\circ}))\vee x\equiv x$, $x\in\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$. Isto é $\mathcal{F}^{m}\subseteq\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$. Logo $\mathcal{F}^{m}=\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$ ou $\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}\not\equiv F_x$. Se $\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}=\mathcal{F}^{m}$, $z\wedge z^{\circ}\equiv(t\wedge(z\wedge z^{\circ}))\vee(z\wedge z^{\circ})\in\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$ e assim $z\wedge z^{\circ}\in\mathcal{F}^{m}$ mas então $z'\not\in\mathcal{F}^{m}$ já que $\mathcal{F}^{m}$ é propio. Se $\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}\not\equiv F_x$, então $\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$ não é propio, isto é $0\in\mathcal{F}^{z\wedge z^{\circ}}$ e [illegible] $0\equiv(t(z\wedge z^{\circ}))\vee u$, por Prop. 1.4, (a) $t\wedge(z\wedge z^{\circ})\equiv 0$ e, por Prop. 1.5, (c), $t\leq z'$. Assim temos que $z'\in\mathcal{F}^{m}$ □

<u>Lema</u> <u>2.3</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Para $x\in A$, seja $\phi(x)$ definido como no Lema 2.2. Temos então que se $x\not\equiv y$, então $\phi(x)\neq\phi(y)$.

<u>Prova</u>. Se $x\not\equiv y$, então, por Prop. 1.5, (f), $x\wedge y'\wedge y^{\circ}\not\equiv 0$ ou $y\wedge x'\wedge x^{\circ}\not\equiv 0$. Logo, por Lema 2.2, $\phi(x\wedge y'\wedge y^{\circ})\neq\emptyset$ ou $\phi(y\wedge x'\wedge x^{\circ})\neq\emptyset$. E fácil vermos que $\phi(x\wedge y'\wedge y^{\circ})=\phi(x)\cap\phi(y')\cap\phi(y^{\circ})$ -já que se $\mathcal{F}\in\phi(x\wedge y'\wedge y^{\circ})$, então x, y', $y^{\circ}\in\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}\in\phi(x)$, $\mathcal{F}\in\phi(y')$ e $\mathcal{F}\in\phi(x^{\circ})$ e, inversamente, se $\mathcal{F}\in\phi(x)\cap\phi(y')\cap\phi(y^{\circ})$ então, por (F2), $\mathcal{F}\in\phi(x\wedge y'\wedge y^{\circ})$. Logo $\phi(x)\cap\phi(y')\cap\phi(y^{\circ})\neq\emptyset$ ou $\phi(y)\cap\phi(x')\cap\phi(x^{\circ})\neq\emptyset$. Mas se $\phi(x)=\phi(y)$, então $\phi(x)\cap\phi(y')\cap\phi(y^{\circ})=\phi(y)\cap\phi(y')\cap\phi(y^{\circ})=\phi(y\wedge y'\wedge y^{\circ})=\phi(0)=\emptyset$, o que é absurdo. Um argumento análogo é válido para o caso de $y\wedge x'\wedge x^{\circ}$. Isto completa a prova do Lema □

Lema 2.4 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja ϕ uma função definida como acima. Para todo a, b$\in$**A**, temos que $\phi(a\to b)=(\phi(a))^c\cup\phi(b)$.

Prova. Se $\mathcal{F}\in\phi(a\to b)$, então, dado que $\mathcal{F}$ é $\mathcal{A}$-completo, $a\in\mathcal{F}$ o $a'\wedge a^o\in\mathcal{F}$. Se $a\in\mathcal{F}$, então $a\wedge(a\to b)\in\mathcal{F}$ e logo $b\in\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}\in\phi(b)$. Se $a'\wedge a^o\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\in(\phi(a))^c$ visto que $a\in\mathcal{F}$ se, e somente se, $a'\wedge a^o\notin\mathcal{F}$. Em qualquer caso, $\mathcal{F}\in(\phi(a))^c\cup\phi(b)$. Suponhamos agora que $\mathcal{F}\in(\phi(a))^c\cup\phi(b)$. Se $\mathcal{F}\in(\phi(a))^c$, visto que $\mathcal{F}$ é $\mathcal{A}$-completo, $a\wedge a^o\in\mathcal{F}$, e como $a\wedge a'\wedge a^o\leq 0\leq b$ temos que $a'\wedge a^o\leq a\to b$. Logo $\mathcal{F}\in\phi(b)$. .Dado que $a\wedge b\leq b$, $b\leq a\to b$ e assim se $\mathcal{F}\in\phi(b)$, $\mathcal{F}\in\phi(a\to b)$. Em qualquer caso $\mathcal{F}\in\phi((a\to b)$ e isto completa a prova del Lema □

Vamos agora enunciar e provar o

Teorema 2.1 Toda álgebra de da Costa é $\equiv$-isomórfica a uma álgebra paraconsistente própria de conjuntos.

Prova. Seja $\mathcal{A}=\langle$ **A**, 0, 1, $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $'\rangle$ uma álgebra de da Costa. Seja $\mathcal{A}_s=\langle$ ϕ(**A**), $\phi(0)$, $\phi(1)$, $<$, $\cap$, $\cup$, $\supset$, $'\rangle$ onde $<$ é a quase-ordem inducida por $\leq$, isto é $\phi(a)<\phi(b)$ se, e somente se, $a\leq b$. Falta esclarecer o significado de "$\supset$" e "'". Teremos logo que $\phi(a)\supset\phi(b)=(\phi(a))^c\cup\phi(b)$ e $(\phi(a))'=(\phi(a))^c\cup(\phi(a^o))^c$, siendo, para todo conjunto **X**, $\mathbf{X}^c$ o complemento clássico de **X**. Primeiramente demonstraremos que

ϕ é um $\equiv$-isomorfismo. Temos que $\phi(0)=\emptyset$ e $\phi(1)=\langle\ \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ é um filtro $\mathcal{A}$-completo$\rangle$. Por Lema 2.3, ϕ é $\equiv$-injectiva. Como demonstrado no Lema 2.3, $\phi(a)\cap\phi(b)=\phi(a\wedge b)$. Se $\mathcal{F}\in\phi(x\vee y)$, $x\vee y\in\mathcal{F}$ e dado que $\mathcal{F}$ é $\mathcal{A}$-completo, por Prop.1.8, $x\in\mathcal{F}$ o $y\in\mathcal{F}$. Em qualquer caso $\mathcal{F}\in\phi(x)\cup\phi(y)$. Suponhamos que $\mathcal{F}\in\phi(x)\cup\phi(y)$, então $x\in\mathcal{F}$ o $y\in\mathcal{F}$. Em qualquer caso $x\vee y\in\mathcal{F}$, isto é $\mathcal{F}\in\phi(x\vee y)$. Isto prova que $\phi(x)\cup\phi(y)=\phi(x\vee y)$. Por definição, $(\phi(a))'=(\phi(a))^c\cup(\phi(a^o))^c=(\phi(a)\cap\phi(a^o))^c=(\phi(a\wedge a^o))^c$ e logo, trivialmente, $(\phi(a))'=\phi(a')$. Por Lema 2.5 $\phi(a\to b)=(\phi(a))^c\cup\phi(b)$. Demonstramos assim que ϕ é $\equiv$-injectiva e preserva as operações. Falta provarmos que $\mathcal{A}_s$ é própria. Dado que $\mathcal{F}$ é $\mathcal{A}$-completo, $a\in\mathcal{F}$ se, e somente se, $a'\wedge a^o\notin\mathcal{F}$ e assim $\mathcal{F}\in\phi(a)$ se, e somente se, $\mathcal{F}\notin\phi(a'\wedge a^o)$, logo $\phi(a')\cap\phi(a^o)=(\phi(a))^c$. Então $(\phi(a))^c\subseteq\phi(a')$. Seja $A_o=\langle\ a$: $\phi(a')\neq(\phi(a))^c\rangle$. Temos que $A_o\neq\emptyset$ já que $A_o=\emptyset$, então, para todo $a\in\mathbf{A}$, $\phi(a')=(\phi(a))^c$ e $\emptyset=\phi(a)\cap\phi(a')=\phi(a\wedge a')$, isto é, $a\wedge a'=0$ contradizendo a hipótese de que $\mathcal{A}$ é própria. Isto prova que $\mathcal{A}_s$ é própria e finaliza a prova do Teorema □

<u>Observação 2.3</u> Notemos que basta com demonstrarmos que as operações são preservadas para assegurar uma sorte de $\equiv$-sobrejectividad de ϕ assegurada pelo caráter binário das operações da álgebra $\mathcal{A}_s$.

Demonstramos agora o teorema que assegura a existência, para os componentes de certa subclasse de álgebras de da Costa, de álgebras paraconsistentes de conjuntos isomórficas. Uma observação similar à anterior, a respeito da função ψ e o seu caráter sobrejectivo, é relevante para a prova de isomorfismo que constitui a demonstração do Teorema 2.2.

<u>Teorema</u> <u>2.2</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa tal que $a \rightarrow b = a' \vee b$. Então $\mathcal{A}$ é isomórfica a uma álgebra paraconsistente de conjuntos $\mathcal{A}_S$.

<u>Prova</u>. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa tal que para todo $a, b \in \mathbf{A}$ temos que $a \rightarrow b = a' \vee b$. Seja $\phi(x)$ definida como no Teorema 2.1. Seja $\psi(x) = \phi(x) \cup L_x$ -recordemos que L_x é definida na Def. 1.10. Demonstra-se que a função ψ é injectiva. Suponhamos $x \neq y$, se $x \equiv y$ então, por Teorema 2.1, $\phi(x) \neq \phi(y)$ e, por Prop. 1.9, $\phi(x) \cup (L_x) \neq \phi(y) \cup (L_y)$. Logo se $x \neq y$ e $x \not\equiv y$, então $\psi(x) \neq \psi(y)$. Se $x \equiv y$, por Prop. 1.7 e dado que $x \neq y$, temos que $L_x \neq L_y$. Novamente, por Prop. 1.8, temos que $\phi(x) \cup (L_x) \neq \phi(y) \cup L_y$. Logo se $x \neq y$ e $x \equiv y$, $\psi(x) \neq \psi(y)$. Isto demonstra que a função ψ é injectiva. As operações "$\vee$", "$\wedge$" e "$'$" definem-se da seguinte maneira: $\psi(x) \wedge \psi(y) = (\psi(x) \cap \psi(y)) \cup (L_{x \wedge y})$,
$\psi(x) \vee \psi(y) = (\psi(x) \cap \psi(x \vee 0)) \cup \cup (\psi(y) \cap \psi(y \vee 0)) \cup (L_{x \vee y})$ e $(\psi(x))' = (\psi(x) \cap \psi(x \vee 0))^c \cup \cup (\psi(x^\circ) \cap \psi(x^\circ \vee 0))^c \cup (L_{x'})$. E fácil

vermos que as operações são preservadas. No caso de "$\wedge$" temos que $\psi(x)\wedge\psi(y)$, por definição, é $((\phi(x)\cup\langle L_x\rangle)\cap(\phi(y)\cup\langle L_y\rangle))\cup\langle L_{x\wedge y}\rangle$. Por distibutividade temos que $(\phi(x)\cap\phi(y))\cup(\phi(x)\cap\langle L_y\rangle)\cup(\phi(y)\cap\langle L_x\rangle)\cup$ $\cup(\langle L_x\rangle\cap\langle L_y\rangle)\cup\langle L_{x\wedge y}\rangle$. Por definições e Prop. 1.7, obtemos que $\psi(x)\wedge\psi(y)=(\phi(x)\cap\phi(y))\cup\langle L_{x\wedge y}\rangle=\phi(x\wedge y)\cup\langle L_{x\vee y}\rangle=$ $=\psi(x\wedge y)$. No caso de "$\vee$" temos que $\psi(x)\vee\psi(y)$ é, por definição, $(\psi(x)\cap\psi(x\vee 0))\cup(\psi(y)\cap\psi(y\vee 0))\cup\langle L_{x\vee y}\rangle$ -a seguir, chama-se esta expressão "D". Logo, por definições, $D=\phi(x)\cup\phi(y)\cup\langle L_{x\vee y}\rangle=\phi(x\vee y)\cup\langle L_{x\vee y}\rangle=\psi(x\vee y)$. Obtemos então que $\psi(x)\vee\psi(y)=\psi(x\vee y)$. Finalmente $(\psi(x))'$ é, por definição, $(\psi(x)\cap\psi(x\vee 0))^c\cup(\psi(x^o)\cap\psi(x^o\vee 0))^c\cup\langle L_{x'}\rangle$ -a seguir denotaremos esta expressão por "D". Logo, por propriedades conjuntísticas e definições, $D=(\phi(x))^c\cup(\phi(x^o))^c\cup\langle L_{x'}\rangle=$ $=(\phi(x))'\cup\langle L_{x'}\rangle$. E assim, se aplicarmos o Teorema 2.1, obtemos que $(\psi(x))'=\psi(x')$. Dado que $a\to b$ é $a'\vee b$, isto completa a prova do Teorema □

<u>Observação</u> <u>2.4</u> Os teoremas 2.1 e 2.2 podem ser extendidos, de manera trivial, para álgebras de da Costa nas quais as operações '$\wedge$' e '$\vee$' forem infinitas. No caso do Teorma 2.2, devemos assumir a hipótese de que se tratar de álgebras completas. Utilizaremos tais versões no Capitulo 3.

4. As funções ϕ e ψ permetem demonstrarmos, respectivamente, os Teoremas 2.1 e 2.2. O seu estudo comparativo pode sermos útil a respeito dos desenvolvimentos do capítulo 3. Tal estudo é o objeto deste numeral.

<u>Proposição 2.1</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $P(\mathscr{A})=\{ \mathscr{F}: \mathscr{F}$ é um filtro $\mathscr{A}$-completo$\}$. Seja $P'(\mathscr{A})=P(\mathscr{A})\cup L(\mathscr{A})$ onde $L(\mathscr{A})=\{ L_x: x\in A\}$. Seja ϕ: $A \to \mathscr{P}(P(\mathscr{A}))$ e ψ: $A \to \mathscr{P}(P'(\mathscr{A}))$ definidas como acima. Então temos que (a) $\phi(0)=\emptyset$, $\psi(0)\neq\emptyset$; (b) $\phi(1)=P(\mathscr{A})$, $\psi(1)\neq P'(\mathscr{A})$.

<u>Prova</u>. Se $\mathscr{F}\in\phi(0)$, então $0\in\mathscr{F}$ o cual é absurdo já que $\mathscr{F}$ é $\mathscr{A}$-completo, isto é, próprio. Por definição $\psi(0)=\phi(0)\cup\{L_0\}$ mas, por Prop. 1.7, $L_0=\{0\}$, isto é $\psi(0)\neq\emptyset$. Se $\mathscr{F}\in P(\mathscr{A})$, $\mathscr{F}$ é filtro e, logo, $1\in\mathscr{F}$. Por definição se $\mathscr{F}\in\phi(1)$, $\mathscr{F}\in P(\mathscr{A})$. E óbvio que $L_0\in P'(\mathscr{A})$ mas $L_0\neq L_1$, já que $1\neq 0$, e $L_0\notin\phi(1)$, isto é, $L_0\notin\psi(1)$. Isto prova (b) e completa a prova de a Proposição $\square$

Proposição 2.2 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $P^{*}(\mathcal{A})=\langle \phi(x): x\in\mathbf{A}\rangle$. Se assumirmos as definições oferecidas na Prop. 2.1 temos que, para todo x, $y\in\mathbf{A}$y $x\neq y$

(a) $\phi(x)\cap\phi(y)\in P(\mathcal{A})$, $\psi(x)\cap\psi(y)\notin P^{*}(\mathcal{A})$;

(b) $\phi(x)\cup\phi(y)\in P(\mathcal{A})$, $\psi(x)\cup\psi(y)\notin P^{*}(\mathcal{A})$.

Prova. Temos provado as primeiras expressões de (a) e (b) no Teorema 2.1. Se $\mathcal{F}$ é um filtro e $x\in\mathcal{F}$, então se $y\equiv x$, $y\in\mathcal{F}$ já que $x\leq y$. Então, por Teorema 1.6, $\mathcal{F}$ não é um singleton. Logo, por Prop. 1.7, $\mathcal{F}\neq L_x$ para todo $x\in\mathbf{A}$. Dado que $L_x\neq\emptyset$ temos que $\phi(x)\neq\psi(y)$ para todo x, $y\in\mathbf{A}$. Então, por hipótese, $\psi(x)\cap\psi(y)=\phi(x)\cap\phi(y)=\phi(x\wedge y)$ e, obviamente, $\phi(x\wedge y)\notin P^{*}(\mathcal{A})$, isto é, $\psi(x)\cap\psi(y)\notin P^{*}(\mathcal{A})$. Isto prova (a). De outro lado $\psi(x)\cup\psi(y)=\phi(x)\cup\langle L_x\rangle\cup\phi(y)\cup\langle L_y\rangle=\phi(x\vee y)\cup\langle\langle x\rangle,\langle y\rangle\rangle$ mas, por Prop. 1.7, $\langle\langle x\rangle,\langle y\rangle\rangle\neq L_z$ para todo $z\in\mathbf{A}$. Logo $\psi(x)\cup\psi(y)\notin P^{*}(\mathcal{A})$. Isto prova (b) e completa a prova da Proposição □

Observação 2.5 A Proposição 2.1 permete advertirmos o comportamento diferente de uma e outra função a respeito do primeiro e do último elemento da álgebra de da Costa. A Proposição 2.2 permite comprobarmos diferenças a respeito das operações conjuntísticas clássicas "∩" e "∪". Notemos que, nos dois casos, trata-se do "preço" para obter um teorema de isomorfismo.

CAPITULO 3

1. O objetivo deste capítulo é estudarmos, do ponto de vista topológico, os teoremas 2.1 e 2.2 assumindo as operações $\wedge$ e $\vee$ como infinitas e sendo a álgebra de da Costa, eventualmente, uma álgebra completa, no sentido dado normalmente a esta propriedade na literatura -ver, por exemplo, Rasiowa e Sikorski [1968]. Isto é, uma álgebra abstrata $\mathcal{M} = \langle \mathbf{M}, o_1, \ldots, o_s, O_1, \ldots, O_r \rangle$, sendo **M** um conjunto não vazio, $o_1, \ldots, o_s$ operações finitas em **M** e $O_1, \ldots, O_r$ operações infinitas em **M**, chama-se **completa** se, e somente se, a classe de todos os subconjuntos não vazios de **A** é o domínio comun para todas as operações $O_1, \ldots, O_r$. O resultado deste estudo, a respeito do Teorema 2.1, é o previsível. No que se refere ao Teorema 2.2, a primeira aproximação discutida é um ataque do problema análogo ao proposto por Stone. O fracaso de tal tentativa conduz a um intento mais débil de caracterização das álgebras de da Costa. Os resultados aqui obtidos somente podem ser entendidos como um primeiro passo no tratamento topológico das referidas álgebras.

2. E fácil advertirmos que a família de conjuntos $\phi[A]$ -onde ϕ é a função utilizada na demonstração do Teorema 2.1- é uma base de abertos. Isto é o que assegura a seguinte

<u>Proposição</u> <u>3.1</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $B=\{\phi(x): x\in A\}$. Seja $S_1=\{\mathscr{F}: \mathscr{F}$ é um filtro $\mathscr{A}$-completo$\}$. Então

(1) $\emptyset\in B$;

(2) se $A, B\in B$, então $A\cap B\in B$;

(3) $\bigcup\{B: B\in B\}=S_1$ □

Então podemos definir as operações de interior (I) e clausura (C) como é habitual, isto é

<u>Definição</u> <u>3.1</u> Seja A um subconjunto de pontos do espaço $\mathbb{B}$. Chamamos um operador I operador de interior se, e somente se:

$$I(A)=\bigcup\{B: B\subseteq A \text{ e } B\in\mathbb{B}\} \blacksquare$$

<u>Definição</u> <u>3.2</u> Seja A um subconjunto de pontos do espaço $\mathbb{B}$. Chamamos um operador C operador de clausura se, e somente se:

$$CA=(I(A^c))^c \blacksquare$$

Igual que no caaso clássico podemos demonstrar o seguinte

Teorema 3.1 Seja $\mathcal{A}_{S_1}$ uma álgebra paraconsistente de conjuntos própria. A coincide com a família dos conjuntos abertos fechados do espaço topológico S^1 compacto totalmente desconexo □

Observação 3.1 Sabemos que, dado um espaço topólogico E, se E é totalmente desconexo, é Hausdorff e se é Hausdorff é T_1.

Corolario S^1 é Hausdorff □

Corolario S^1 é T_1 □

3. O modo natural de construirmos uma topologia aos efeitos de estudarmos, desde esse ponto de vista, o Teorema 2.2, consistiria na eleição como base de abertos da mesma o conjunto Ψ [A] . Sabemos que existe uma topologia sobre S com base Γ se, e somente se, a interseção de toda subcoleção finita de conjuntos de Γ pode se expressar como

uma união de conjuntos de Γ. Demonstra-se que tal topologia não existe, independentemente da eleição de **X**. Iso é o que afirma a seguinte

<u>Proposição</u> <u>3.2</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja Γ a função utilizada na demonstração do Teorma 2.2. Então, para toda família **X**, não existe uma topologia sobre **X** cuja base de abertos seja o conjunto $\Gamma = \Psi(A)$.

<u>Prova</u>. Sejan $\Psi(x_i)$, $\Psi(x_j) \in \Gamma$ tal que $x_i \neq x_j$ e $x_i \equiv x_j$, logo $\Psi(x_i) \cap \Psi(x_j) = \Phi(x_i)$. Mas, dado que, para todo k, $\Psi(x_k) = \Phi(x_k) \cup \{ \mathfrak{L}_{x_k} \}$ e, por definição, $\mathfrak{L}_{x_k} \neq \emptyset$ e $\mathfrak{L}_{x_k} \neq \mathscr{F}$ para todo $\mathscr{F}$, não existem $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ tais que $\bigcup \{B_i : 1 \leq i \leq n\} = \phi(x_i)$ i. e. não existe uma topologia com base Γ □

<u>Observação</u> <u>3.2</u> Seja $\Gamma' = \{ X : X = Y^c$, com $Y \in \varphi(A) \}$. Por dualidade podemos provar que não existe uma topologia sobre **X** cuja base de abertos seja Γ'.

Como é óbvio, estes resultados eliminam a possibilidade de construirmos a topologia "natural".

3. Dados os resultados expostos no numeral anterior, um manera de focalizarmos o problema é intentar construirmos uma estrutura formal que se aproximar da chamada, intuitivamente, topologia natural.

Definição 3.3 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $B_1 = \{ \Psi(x) : x\in A \}$. Seja $\mathscr{B}$ o fecho de B_1 por interseção finita. Seja $\mathscr{P}(\mathscr{A}) = F \cup L$, onde $F = \{\mathscr{F} : \mathscr{F}$ é um filtro $\mathscr{A}$-completo$\}$ e $L = \{\mathscr{L}_x : x\in A\}$.

Proposição 3.3 Sejan $\mathscr{B}$, $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ definidos como acima, temos que

(a) $\emptyset\in\mathscr{B}$;

(b) Se $A, B\in\mathscr{B}$, então $A \cap B\in\mathscr{B}$;

(c) $\bigcup \{ B : B\in\mathscr{B} \} = \mathscr{P}(\mathscr{A})$.

Prova. Por Prop. 1.7 $\mathscr{L}_0=\{0\}$, $\mathscr{L}_1=\{1\}$ e assim $\psi(0)\cap\psi(1)=\{0\}\cap(\phi(1)\cup\{1\})$. Dado que para todo $\mathscr{F}$, $0\neq\mathscr{F}$ e $0\neq 1$, então $\Psi(0) \cap \Psi(1) = \emptyset$ i. e. $\emptyset\in\mathscr{B}$. Isto prova (a). Por definição de $\mathscr{B}$, (b) é verdadeira. Se $X\in\bigcup \{ A : A\in B_1\}$, então existe algum $A\in B_1$, $A \neq \emptyset$ e $X\in A$. Mas $A = \Psi(x_i)$ para algum $x_i\in A$ por definição de B_1. Logo $X\in\Phi(x_i) \cup \{\mathscr{L}_{x_i}\}$ i. e. $X = \mathscr{F}$ e então $X\in F$, isto é, $X\in\mathscr{P}(\mathscr{A})$ o $X = \mathscr{L}_{x_i}\in L$, isto é, $X\in\mathscr{P}(\mathscr{A})$. Logo $X\in\mathscr{P}(\mathscr{A})$. Suponhamos que $X\in\mathscr{P}(\mathscr{A})$, logo $X\in F$ o $X\in L$. Se $X\in F$ então $X = \mathscr{F}$ i. e. $\mathscr{F} \neq \emptyset$, logo existe $x_j\in A$ tal que $x_j\in X$ e então $X\in\Phi(x_j)$. Assim $X\in\Psi(x_j)$ e logo, dado que $\Psi(x_j)\in B_1$, $X\in\bigcup\{A : A\in B_1\}$. Se $X\in L$, $X = \mathcal{L}_{x_i}$ para algum $x_i\in\mathbf{A}$ i. e. $X\in\Psi(x_i)$ e logo $X\in\bigcup\{A : A\in B_1\}$. Então $X\in\bigcup\{A : A\in B_1\}$. Isto prova (c) e completa a prova da Proposição □

Os operadores de interior (I) e clausura (C) são definidos como na Definição 3.1 e Definição 3.2, respectivamente.

Resulta fácil provarmos, por conseguinte, as Proposições a seguir

<u>Proposição</u> <u>3.4</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja I um operador de interior. Então

(I_1) $I(A\cap B)=IA\cap IB$;

(I_2) $IA\leq A$;

(I_3) $IIA=IA$;

(I_4) $I\mathcal{P}(\mathcal{A})=\mathcal{P}(\mathcal{A})$ □

<u>Proposição</u> <u>3.5</u> Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja C um operador de clausura. Então

(C_1) $C(A\cup B)=CA\cup CB$;

(C_2) $A\leq CA$;

(C_3) $CCA=CA$;

(C_4) $C\emptyset=\emptyset$ □

4. Oferecemos neste numeral uma versão topológica do Teorema 2.2, generalizando o referido resultado como indicado na Observação 2.5. Devemos estabelecer previamente as seguintes definições:

<u>Definição</u> <u>3.6</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa. Seja $P(\mathscr{A})=\{\Psi(x): x\in A\}$. Seja $P(\mathscr{A})=\{\Phi(x): x\in A\}$ ∎

<u>Definição</u> <u>3.7</u> Um conjunto A é **minimamente heterogêneo** se, e somente se, $IA=A$, $A\cap L\neq\emptyset$ e, para todo $i\neq j$, $\neg(\mathscr{L}x_i\in A \,.\, \mathscr{L}x_j\in A)$. Chamamos um conjunto A **heterogêneo** se, e somente se, é minimamente hetorgêneo e $A\cap F\neq\emptyset$ ∎

<u>Definição</u> <u>3.8</u> Chamamos uma família de conjuntos A **puntual** se, e somente se, $\bigcap\{C: C\in A\}\neq\emptyset$ ∎

<u>Lema</u> <u>3.1</u> Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa completa. Sejan $\mathscr{B}$, $P(\mathscr{A})$ e $P(\mathscr{A})$ definidos como acima. Então se $B\in\mathscr{B}$, $B\in P(\mathscr{A})$ ou $B\in P(\mathscr{A})$.

<u>Prova</u>. Se $B\in\mathscr{B}$, então $B=\psi(x_i^1)\cap \ldots \cap\psi(x_m^n)$. Supomhamos que B está formado por $x_i^1, \ldots, x_m^n$ tais que existem x_j^i, x_l^k e $x_j^i\neq x_l^k$, com $1\leq i$, $k\leq n$, $i\leq j$, $l\leq m$. Então temos que, por Prop. 1.7 e hipótese, $\mathscr{L}x_j^i\neq\mathscr{L}x_l^k$. Asi $B=\Phi(x_i^1)\cap \ldots \cap\Phi(x_l^k)$ e, por Teorema 2.1 -modificado na forma óbvia- temos

que$B=\Phi(x_i^1\wedge \ldots \wedge x_m^n)$. Em outro caso temos que $x_i^1= \ldots =x_m^n$ e então, por Teorema 2.2 -modificado a forma óbvia-, $B=\Psi(x_i^1\wedge \ldots \wedge x_m^n)$. Isto completa a prova do Lema 3.1 □

Estamos agora em condições de demostrarmos o Teorema prometido

Teorema 3.1 Seja $\mathscr{A}_{S_2}$ uma álgebra paraconsistente de conjuntos completa. **A** coincide com a família dos conjuntos abertos minimamente hetorgêneos puntuais do espaço topológico S^2.

Prova. Se $A\in\mathbf{A}$ então obviamente $IA=A$. Dado que $A=\Psi(x_i)$ para algum $x_i\in\mathbf{A}'$ -onde $\mathbf{A}'$ denota o conjunto subjacente da correspondente álgebra de da Costa-, A é minimammente heterogêneo puntual. Se A é aberto, então $A=\bigcup\{B\colon B\in\mathscr{B}$ e $B\subseteq A\}$. Por Lema 3.1 temos duas alternativas. Suponhamos que existem B_i, B_j tais que $B_i\in\mathscr{B}$, $B_j\in\mathscr{B}$, $B_i\subseteq A$, $B_j\subseteq A$ e $B_i\in P(\mathscr{A})$ e $B_j\in P(\mathscr{A})$. Então se car. $\langle B\colon B\in P(\mathscr{A})\rangle>1$ é óbvio que A não é minimamente hetrogêneo já que existem x_m, $x_n\in\mathbf{A}'$ tais que $x_m\neq x_n$ e $\Psi(x_m)\cup\Psi(x_n)\subseteq A$. Mas, se car. $\langle B\colon B\in P(\mathscr{A})\rangle=1$, temos, por Teorema 2.1, que $A=\Phi(x_k)\cup\psi(x_j)$. Por definição, $\neg(\Psi(x_j)\subseteq\Phi(x_k))$, então ou $\Phi(x_k)\subset\psi(x_j)$, isto é, $A=\Phi(x_j)$ e, logo, $A\in\mathbf{A}$ ou $\phi(x_k)\cap\Psi(x_j)\subset\phi(x_k)$ -chamamos I a expressão à esquerda do operador "c". Temos então que $A = (\phi(x_k) - I) \cup \Psi(x_j)$. Dado que $\Phi(x_k) - I \neq \emptyset$ existe $\mathcal{F} \in \phi(x_k) - I$ e, como $\mathcal{F}$ é $\mathcal{A}$-completo e $x_j \notin \mathcal{F}$ -pois se não $\mathcal{F} \in \Phi(x_j)$, isto é, $\mathcal{F} \in I$- $x'_j \wedge x^o_j \in \mathcal{F}$. Obviamente $x'_j \wedge x^o_j \notin \mathcal{L}x_j$, isto é, A não é puntual. Logo se A é aberto minimamente heterogêneo puntual, então A∈**A** se existirem B_i, B_j nas condições dadas. Suponhamos que isto último não ocorrer, isto é, ou todo $B \in P(\mathcal{B})$ ou todo $B \in P(\mathcal{B})$. Suponhamos o primeiro caso, por Teorema 2.1, $A = \Phi(x_k)$ ra $x_k \in$ **A**', isto é, A não é minimamente heterogêneo. No segundo caso, se car. $\langle B: B \in P(\mathcal{A}) \rangle > 1$ A não é minimamente heterogêneo e se car $\langle B: B \in P(\mathcal{A}) \rangle = 1$ $A = \psi(x_k)$ e A∈**A**. Logo se A é aberto minimamente heterogêneo puntual, então A∈**A**. Isto completa a prova do Teorema □

5. Vamos estudar neste numeral algumas propriedades do espaço S^2. Procuramos em particular comparar dito espaço com o clássico espaço de Stone correspondente á versão topológica do teorema do referido autor para álgebras booleanas.

Teorema 3.2 O espaço S^2 é T_o.

Prova. Sejan X, Y pontos de S^2 e $X \neq Y$. Podem-se apresentar obviamente três casos. Supc nhamos que $X = \mathscr{L}x_j$ e $Y = \mathscr{L}x_k$. Dado que $X \neq Y$, então $x_j \neq x_k$. Trivialmente $\mathscr{L}x_j \in \Psi(x_j)$ e, por Prop. 1.9, $\mathscr{L}x_k \notin \Psi(x_j)$. Isto é $X \in \Psi(x_j)$ e $Y \notin \Psi(x_j)$. Suponhamos que $X = \mathscr{F}_1$ e $Y = \mathscr{F}_2$. Então, dado que $X \neq Y$, existe um $x_j \in X$ e $x_j \notin Y$. Logo $X \in \Phi(x_j)$, $Y \notin \Phi(x_j)$. Suponhamos , finalmente, que $X = \mathscr{F}_1$ e $Y = \mathscr{L}x_j$. Dado que X é um filtro, existe $x_j \in X$ e logo $X \in \Phi(x_j)$. Mas, por Prop. 1.9, $Y \notin \Phi(x_j)$. Dado que, por Lema 3.1, para todo $x \in A$, $I\Phi(x) = \Phi(x)$ e $I\Psi(x) = \Psi(x)$ temos provado o Teorema □

Lema 3.2 Seja A um conjunto aberto do espaço S^2. Se $\mathscr{L}x_i \in A$ então $\Psi(x_i) \subseteq A$.

Prova. Se A é aberto, $A = \bigcup(B: B \in \mathscr{B}$ e $B \subseteq A)$. Por Lema 3.1 podemos discriminar dois casos. Suponhamos que existem B_m, $B_n \in \mathscr{B}$ e $B_m \subseteq A$, $B_n \subseteq A$ tais que $B_m \in P(\mathscr{A})$ e $B_n \in P(\mathscr{A})$ com $1 \leq m$, $1 \leq n$. Por hipótese $\mathscr{L}x_i \in A$ e, por Prop. 1.9, para algum $B_n (1 \leq n)$ $\mathscr{L}x_i \in B_n$, isto é, $\Psi(x_i) \subseteq A$. Suponhamos que este não for o caso, então ou todo B em nas condições referidas pertece a $P(\mathscr{A})$ ou todo B pertece a $P(\mathscr{A})$. No primeiro caso, por Prop. 1.9, cumpre-se vacuamente. No segundo caso, um razoamento análogo ao primeiro permete obtermos o resultado □

Observação 3.1 Sabemos que um espaçc topológico E é T_1 se, e somente se, todo conjunto unitário formado por um ponto de E é fechado.

Teorema 3.3 O espaço S^2 não é T_1.

Prova. Demonstraremos que $-A$ não é abierto, sendo A um conjunto unitário formado por um único ponto do espaço topológico S^2. Tomaremos $A = \{\mathcal{F}\}$. Suponhamos que $x_i \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{L}x_i \in Z = \{B\colon B \in \mathcal{B}$ e $B \subseteq -\{\mathcal{F}\}\}$. Então existe um B tal que $B \subseteq -\{\mathcal{F}\}$ e $\mathcal{L}x_i \in B$. Dado que, obviamente, $IZ = Z$, por Lema 3.2, $\Psi(x_i) \subseteq Z$. Mas isto é absurdo, pois $\mathcal{F} \in \Psi(x_i)$ e logo $\mathcal{F} \in Z$ contradizendo a definição de Z. Logo $\mathcal{L}x_i \notin Z$. Mas então $\mathcal{L}_1 = \{\mathcal{L}x_j\colon x_j \in \mathcal{F}\}$ é tal que $\mathcal{L}_1 \cap I - \mathcal{F} = \emptyset$ e assim $\mathcal{L}_1 \subseteq -I - \mathcal{F}$. Então $\mathcal{F} \neq C\mathcal{F}$ e, por conseguinte, o espaço S^2 não é T_1 □

Corolario. O espaço topológico S^2 não é Hausdorff □

Corolario. O espaço topólogico S^2 não é totalmente desconexo □

Lema 3.3 Seja $A = IA$. Então se $\mathcal{F}\in A$, existe $x_i\in\mathcal{F}$ tal que $\Phi(x_i)\subseteq A$.

Prova. Dado que $A = IA$, temos que $A = \bigcup\{B: B\in\mathcal{B}$ e $B\subseteq A\}$. Por Lema 3.1 podemos discriminar dois casos. Suponhamos que existem B_m, $B_n\in\mathcal{B}$ e $B_m\subseteq A$, $B_n\subseteq A$ tais que $B_m\in P(\mathcal{A})$ e $B_n\in P(\mathcal{A})$ com $1\leq m$, $1\leq n$ e $m, n\in\mathbb{N}$. Por hipótese $\mathcal{F}\in A$ e, por conseguinte, $\mathcal{F}\in B_m$ $(1\leq m)$ e, obviamente, existe x_i tal que $B_m=\Phi(x_i)\subseteq A$ ou $\mathcal{F}\in B_n$ $(1\leq n)$ e existe x_i tal que $B_n=\Psi(x_i)$ e, por Prop. 1.9, $\mathcal{F}\in\Phi(x_i)\subseteq A$. Suponhamos que este não é o caso, isto é, que, para todo B nas condições mencionadas, $B\in P(\mathcal{A})$ ou $B\in P(\mathcal{A})$. Se ocorrer o primeiro caso, o argumento é análogo ao primero desenvolvido sob a suposição anterior, se ocorrer o segundo, o argumento é análogo ao segundo desenvolvido sob a suposição anterior. Em qualquer caso temos que existe x_i tal que $x_i\in\mathcal{F}$ e $\Phi(x_i)\subseteq A$ □

Definição 3.8 Um ponto p é um ponto limite de um conjunto A se todo conjunto aberto que contém p contém como mínimo um ponto p' de A tal que $p \neq p'$ ■

Definição 3.9 Seja $A\subseteq X$ onde X é um espaço topológico. Seja $Y = \{p$: p é um ponto limite de $A\}$. Y é o conjunto derivado de A . Se $x\in A$ e $x\notin Y$, dizemos que x é um punto isolado de A ■

Definição 3.10 Se A é um conjunto tal que não contém nenhum ponto isolado, dizemos que A é denso-em-si-mesmo. Se ainda A = CA, então A denomina-se perfeito ■

Observação 3.3 Sabemos um conjunto A é perfeito se, e somente se, A = Y onde Y é o conjunto derivado de A.

Observação 3.4 Notemos que uma álgebra de da Costa $\mathscr{A}$ é não-atômica se, e somente se,, para todo elemento $x \in A$, x não é um elemento atômico.

Teorema 3.4 Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra de da Costa não-atômica. Todo conjunto aberto heterogêneo do espaço S^2 é perfeito.

Prova. Então se $x \in A$, dado que $IA=A$, por Lema 3.1, temos que $x = \mathscr{F}$ ou $x = \mathscr{L}x_i$. Suponhamos então $x = \mathscr{F}$ Logo, por Lema 3.3, todo aberto C tal que $\mathscr{F} \in C$ será tal que $\Phi(x_i) \subseteq C$ para algum $x_i \in \mathscr{F}$. Dado que A é aberto, $\Phi(x_i) \subseteq A$. Então se $C = IC$ e $\mathscr{F} \in C$, dado que $I(C \cap A) = C \cap A$, temos que existe x_j tal que $\Phi(x_j) \subseteq C \cap A$ com $x_j \in \mathscr{F}$. Logo para todo C, se cumprir as condições precedentes e dado que, por hipótese, $\mathscr{A}$ não é atômica, C é tal que existe $\mathscr{F}' \in C$, $\mathscr{F}' \in A$ e $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$. Logo $\mathscr{F}$ não é um ponto isolado i. e. $\mathscr{F} \in Y$ sendo Y o conjunto derivado de

A. Suponhamos agora $x = \mathscr{L}x_i$. Por Lema 3.3 temos que para todo aberto C tal que $\mathscr{L}x_i \in C$ cumpre-se que $\Psi(x_i) \subseteq C$. Dado que $I\dot{A}=\dot{A}$, para todo aberto C nas condições dadas, temos que $\Psi(x_i) \subseteq A \cap C$ -pois $I(A \cap C) = A \cap C$. Como A é heterogêneo, $\Phi(x_i) \neq \emptyset$ i. e. existe $\mathscr{F} \in A$, $\mathscr{F} \in C$ e, por Prop. 1.9, $F \neq \mathscr{L}x_i$. Logo $\mathscr{L}x_i$ não é um ponto isolado , isto é, $\mathscr{L}x_i \in Y$, sendo Y o conjunto derivado de A. Dado que, por definição, $Y \subseteq A$ e, por o argumento anterior, $A \subseteq Y$ temos que $A = Y$. Logo, por Observação 3.3, A é perfeito □

7. O Teorema 3.1 oferece uma contrapartida topológica mais "satisfatótia" do Teorema 2.1 -na medida que o conjunto subjaçente da álgebra é a base da topologia definida. No entanto, o Teorema 2.1 só permete afirmarmos a existência de um $\equiv$-isomorfismo entre uma álgebra própria de da Costa e a sua correspondente conjuntística. O Teorema 2.2, pelo contrário, assegura a existência de um isomorfismo entre as estruturas em questão. Mas a sua contrapartida topológica expressada no Teorema 3.2, é mais débil -pois o conjunto subjacente da álgebra é sub-base da topologia definida.

Esta situação sugere que tal vez seja mais conveniente, aos efeitos de obtermos uma aproximacão topológica ás álgebras de da Costa, considerarmos as duas topologías.

Chamamos **par de representação topológica** uma estrutura $\langle\langle O_1, S_1\rangle, \langle O_2, S_2\rangle\rangle$, onde O_1, O_2 são famílias de abertos dos espaços topológicos S_1, S_2 respectivamente. Seja $\mathcal{E}_1$ a família dos conjuntos abertos fechados de um espaço topológico S^1. Seja $\mathcal{E}_2$ a família dos conjuntos abertos minimamente heterogêneos puntuais de um espaço S^2. Logo os desenvolvimentos precedentes podem se expressar sinteticamente da seguinte manera: Dada uma álgebra de da Costa completa podemos-lhe associar um par de representação topológica $\langle\langle \mathcal{E}_1, S^1\rangle, \langle \mathcal{E}_2, S^2\rangle$.

B I B L I O G R A F I A

Anderson, A. R. e Belnap, N. D. **Entailment: The Logic of Relevance and Necessity**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975.

Blok, W. J. e Pigozzi, Don **Algebraizable logics**, Memoirs of American Mathematical Society, N. 396, Providence, Rhode Island, USA, 1989.

Bloom, S. L. e Brown, D. J. "Classical abstract logiçs", **Dissertationes Mathematicae** CII, 1973.

Carnielli, Walter e de Alcantara, Luiz Paulo "Paraconsistent algebras", **Studia Logica**, 43, pp. 79-89, 1984.

da Costa, Newton C. A. "Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants", **Comptes Rendus Hebdomadaires des Sèances de l' Acadèmie des Sciences** (Paris), t. 257

da Costa, Newton C. A. "Opérations non monotones dans les treillis", **C. R. Acad. Sc.** (Paris), t. 263, Série A-429, 1966.

da Costa, Newton C. A. "Filtres et idéaux d'une algèbre Cn", **C. R. Acad. Sc.** (Paris), t. 264, Série A-549, 1967.

da Costa, Newton C. A. "On the theory of inconsistent formal systems", **Notre Dame Journal of Formal Logic**, vol. 15, pp. 497-510, 1974.

da Costa, Newton C. A. "The philosophical import of Paraconsistent Logic", **The Journal of Non-Classical Logic**, V. 1, N. 1, pp. 1-19, 1982.

da Costa, Newton C. A. e Marconi, Diego "An Overview of Paraconsistent Logic in the 80s", **The Jorunal of Non-Classical Logic**, V. 6, N. 1, 1989.

Fuks, D. B. e Rokhlin, V. A. **Beginner's Course in Topology**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

Kelley, J. L. **General Topology**, Springer-Verlag, New York, 1975.

Mortensen, Chris "Every quotient algebra for C_1 is trivial", **Notre Dame Journal of Formal Logic**, 21, pp. 694-700, 1980.

Priest, Graham e Routley, Richard "Introduction: Paraconsistent Logics", Studia Logica, 43, pp. 3-16, 1984.

Rasiowa, Helena **An algebraic approach to non-classical logics**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.

Rasiowa, Helena e Sikorski, Roman **The mathematics of metamathematics**, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, Polonia, 1968.

Sikorski, Roman **Boolean algebras**, Springer-Verlag, 1969.

Steen, Lynn Arthur e Seebach, J. Arthur **Counterexamples in Topology**, Springer-Verlag, New York, 1986.

Tarski, Alfred "Grundzüge des Systemenkalküls. Erster Teil", Fund. Math., 25, 503-526,1935. Tradução inglesa em Tarski, A. **Logic, Semantics, Metamathematics, papers from 1923 to 1938**, Clarendon Press, 1956.

Indice

Introdução 1

Capítulo 1 7

Capítulo 2 26

Capítulo 3 38

Bibliografia 53