RICARDO PEREIRA TASSINARI

INCOMPLETUDE E AUTO-ORGANIZAÇÃO: SOBRE A DETERMINAÇÃO DE VERDADES LÓGICAS E MATEMÁTICAS

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Profª. Drª. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em
12 / 12 / 2003

BANCA

Prof.ª Drª. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano (orientadora)

Prof. Dr. Jônatas Manzolli (membro)

Prof. Dr. Maria Eunice Quilici Gonzalez (membro)

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (membro)

Prof. Dr. Oswaldo Frota Pessoa Jr. (membro)

Prof. Dr. Ettore Bresciani Filho (suplente)

Prof. Dr. Maria Cláudia Cabrini Grácio (suplente)

DEZEMBRO/2003

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP**

	Tassinari, Ricardo Pereira
T 185 i	**Incompletude e auto-organização: sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas / Ricardo Pereira Tassinari. - - Campinas, SP : [s. n.], 2003.**
	Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Teoria da computação. 2. Inteligência artificial. 3. Teoria dos sistemas. 4. Sistemas auto-organizadores. 5. Lógica de primeira ordem. 6. Lógica simbólica e matemática. 7. Linguagem e lógica. I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

A Vicente,

Marlene,

Elaine e

Ítala.

Agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram na elaboração deste trabalho. Em especial, agradeço aos exigentes e competentes professores do Grupo de Lógica Teórica e Aplicada, à minha estimada orientadora, Profª Ítala, pelas qualidades acadêmicas e pessoais e amizade inestimáveis, ao Prof. Walter, pelos constantes estímulos e provocações, ao Prof. Marcelo, pelos estímulos e estima, e, em especial, ao Prof. Dr. Michael Wrigley do qual temos saudades. Agradeço aos membros do Grupo CLE – Auto-Organização, pelo ambiente acadêmico de profundas discussões, a partir do qual foi gestado este trabalho; em especial, agradeço à Nice, Mariana, Cândida, Jônatas, Ettore, Ana, Gustavo, Romeu e Alfredo pela convivência e discussões estimulantes e profícuas. Agradeço também aos companheiros de pós, especialmente aos das conversas, Márcio (e Tati), Victor (e Lia), Carlos Magno, Milton, Mauro, Frank, Denise, Walkíria, Garibaldi, Luis, Carlos Hifume, Rodolfo, Daniel, Alexandre, Tadeu, Débora (e Getúlio). Fariam muita falta os prestativos, competentes e companheiros funcionários do CLE, em especial, Augusto, D. Iria, Eliana, Márcia, Elga, Nilza, Marcos, Wilson, Daniel e Felipe. Agradeço, ainda, à Capes pelo auxílio financeiro concedido, que possibilitou não apenas a feitura deste trabalho, mas também uma melhora profissional e pessoal.

Resumo

Os Teoremas da Incompletude de Gödel têm sido, recorrentemente, citados nos estudos sobre auto-organização, como propiciando exemplos de processos não-mecânicos e verdadeiramente auto-organizados. Um dos fundamentos desses estudos está relacionado às análises que afirmam que os resultados obtidos por Gödel, associados à Tese/Definição de Church sobre calculabilidade, implicam na impossibilidade de uma modelagem mecânica completa de processos relativos à cognição humana. Dois desses processos que podem ser citados como auto-organizados, e cuja não-mecanicidade decorreria dos teoremas de Gödel, seriam os processos de determinação de fórmulas verdadeiras de teorias aritméticas de primeira ordem e de determinação de fórmulas verdadeiras de lógicas de ordens superiores, já que existem resultados lógico-matemáticos de incompletude desses sistemas formais. O objetivo central desta Tese consiste em analisar esses processos de determinação de verdades aritméticas e de verdades de lógicas de ordens superiores, a partir de uma análise dos resultados decorrentes dos teoremas de Gödel e da Teoria da Auto-Organização de Debrun, para mostrar que eles constituem processos não-mecânicos, segundo a acepção da Tese/Definição de Church, e auto-organizados, segundo Debrun. Apresentamos, preliminarmente, uma demonstração cuidadosa do Segundo Teorema da Incompletude de Gödel e uma introdução à Teoria da Auto-Organização de Debrun; bem como realizamos uma análise detalhada de como os resultados obtidos a partir do Segundo Teorema de Gödel permitem concluir que existem processos não-mecânicos, no sentido da Tese/Definição de Church, por argumentos distintos dos utilizados em alguns trabalhos da literatura. Mostramos que sempre existe um sistema formal cujo conjunto de teoremas é exatamente o conjunto de fórmulas determinadas como verdadeiras por qualquer função recursiva parcial que simule a capacidade humana de determinação de verdades aritméticas de primeira ordem e de verdades de lógicas de ordens superiores, enquanto, segundo o Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, não existem sistemas formais cujos teoremas sejam todas as fórmulas que conseguimos identificar como verdadeiras.

Abstract

Gödel's Incompleteness Theorems have been mentioned in the studies on self-organization as providing examples of non-mechanical and truly self-organized processes. One of the fundaments of these studies is related to the analyses that assert that Gödel's results, associated to Church's Thesis/Definition on calculability, imply the impossibility of complete mechanical modeling of processes related to human cognition. Two of these processes that can be mentioned as self-organized, whose non-mechanicity is implied by Gödel's theorems, would be the process of determination of true formulae of first order arithmetical theories and the process of determination of true formulae of higher-order logics, since there are logical-mathematical results on the incompleteness of these formal systems. The central aim of this Thesis is to analyze these processes of determination of first order arithmetical truths and higher-order logical truths, from an analysis of the results from Gödel's theorems and Debrun's Self-Organization Theory, in order to show that these processes constitute non-mechanical self-organized processes, according to Church's Thesis/Definition and Debrun's Theory. Preliminarily, we present a careful proof of Gödel's Second Incompleteness Theorem and an introduction to Debrun's Self-Organization Theory; as well as we analyze, in detail, how the results obtained from Gödel's theorems allow us to conclude that non-mechanical processes exists, in the sense of Church's Thesis/Definition, by using arguments that do not appear in known papers in the literature. We show that there is always a formal system whose set of theorems is exactly the set of formulae determined as true by any partial recursive function that simulates the human capability of determination of first order arithmetical truths and higher-order logical truths, while, according to Gödel's Second Incompleteness Theorem, there is no formal system whose theorems are all the formulae that we can identify as true formulae.

Índice.

INTRODUÇÃO

De forma bastante geral, podemos dizer que as teorias de auto-organização surgiram a partir dos estudos nascentes da Cibernética, na década de 40, com o objetivo de entender e explicar cientificamente, através da elaboração de teorias e da modelagem com estruturas matemáticas, processos nos quais se verifica alterações de suas organizações a partir de si próprios. Podemos situar o início dos estudos sobre auto-organização nos primeiros trabalhos dos ciberneticistas (*cf.* **Dupuy 1994**), como, por exemplo, nas famosas Conferências Macy (assim chamadas por serem organizadas pela fundação filantrópica Josiah Macy Jr.), que foram intituladas, em sua maior parte, *Cybernetics – Circular Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems*, e das quais participam, por exemplo, John von Neumann, Norbert Wiener, Warren McCulloch, Walter Pitts, Claude Shannon, Arturo Rosenblueth, Heinz von Foerster, Ross Ashby, Leonard Savage, Gregory Bateson e Margaret Mead. Desses estudos inicias surgiram trabalhos específicos sobre a auto-organização, como, por exemplo: **von Foerster 1960**, no qual se discute ruído e auto-organização; **Ashby 1962**, que analisa a possibilidade de auto-organização; **Prigogine & Stengers 1979**, que trata de auto-organização em sistemas termodinâmicos longe do equilíbrio; **Atlan 1979**, sobre ruído e auto-organização; **Morin 1977**, **1980**, **1986** e **1991** que estabelecem um novo "método" para se tratar da auto-organização; **Maturana & Varela 1980**, sobre autonomina, autopoiese e auto-organização; **Dupuy 1982**, sobre a relação da auto-organização com a ordem e a desordem; **Stengers 1985**, sobre a genealogia da auto-organização; e, no Brasil, podemos citar os trabalhos desenvolvidos, desde 1986, pelo Grupo Interdisciplinar CLE do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, idealizado e coordenado até 1996 por Michel Debrun, que deram origem a **Debrun, Gonzales & Pessoa Jr. (orgs.) 1996** e **D'Ottaviano & Gonzales (orgs.) 2002**; em especial, a teoria de auto-organização exposta em **Debrun 1996a**, **b** e **c** serve de referência teórica aos trabalhos das duas referências anteriores e também constitui um dos referenciais teóricos adotados nesta Tese.

A partir da cibernética nascente, concomitantemente ao surgimento dos estudos sobre a auto-organização, começou a se desenvolver também a Teoria Geral dos Sistemas ou, como designada recentemente, a Sistêmica, com a extensão da aplicação dos instrumentais da Análise Matemática às Ciências Naturais para certos ramos da Biologia e das Ciências Humanas, teoria essa que se consolida principalmente a partir de **Bertalanffy 1968**. Essa área tem tido um enorme crescimento, talvez por oferecer novas técnicas e instrumentos matemáticos (**Waddington 1977**), inclusive os elaborados pela Cibernética, para antigas áreas do conhecimento já consolidadas, sendo que os trabalhos atuais da Sistêmica acabam por permear grande parte das diversas áreas do conhecimento científico atual, inclusive a própria área da auto-organização – seja em aplicações de seus conceitos, seja em trabalhos teóricos sobre as relações entre a Sistêmica e as Teorias de Auto-Organização, como, por exemplo, em **Breciani Fº & D'Ottaviano 2002**. Em particular, **Breciani Fº & D'Ottaviano 2002** também é utilizado como referência teórica neste trabalho.

Por outro lado, parecendo ir contra essa crescente busca de formalização do conhecimento humano, **Gödel 1931** demonstra seu famoso Teorema da Incompletude dos Sistemas Formais. Com efeito, em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, o grande lógico e matemático David Hilbert apresentara uma lista de vinte e três questões[1] não-resolvidas da Matemática de seu tempo; a segunda questão, sobre a compatibilidade dos axiomas da Aritmética (que serve de base a diversas outras partes da Matemática e é de especial importância para os fundamentos da Matemática e, conseqüentemente, de diversas ciências que dela se utiliza, como as Ciências Naturais), é relativa à necessidade de uma demonstração de que os axiomas da Aritmética formam uma base completa e segura, i.e., derivam-se deles todas as verdades aritméticas e, em especial, não se pode derivar qualquer contradição. Em particular, essa questão expressava, também, as intenções de Hilbert em relação a seu projeto formalista. Vejamos então a apresentação dessa questão, pelo próprio Hilbert, no referido texto (os grifos são do próprio Hilbert):

> Quando estamos engajados em investigar os fundamentos da ciência, precisamos estabelecer um sistema de axiomas que contenha uma descrição exata e completa das relações subsistentes entre as idéias elementares dessa ciência. Os axiomas então estabelecidos são ao mesmo tempo as definições dessas idéias elementares; e nenhuma asserção no domínio dessa ciência, da qual estamos testando os fundamentos, é considerada ser correta a menos que possa ser derivada daqueles axiomas por meio de um número finito de passos lógicos. Sobre considerações próximas, surge a questão: *se, em qualquer caso, certas asserções de axiomas separados dependem uma dos outras, e se os axiomas não podem, por essa razão, conter partes em comum que tem que ser isoladas se desejamos chegar a um sistema de axiomas que será completamente independente um do outro.*
>
> Mas sobretudo desejo apontar a seguinte questão como a mais importante dentre as numerosas que podem ser feitas a respeito dos axiomas: *demonstrar que eles não são contraditórios, isto é, que um número definido de passos lógicos baseados neles nunca pode levar a resultados contraditórios.*

---

[1] Para uma discussão mais detalhada dos vinte e três problemas levantados por Hilbert e das soluções apresentadas *cf.* **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, 2003.

O próprio Hilbert buscava formas de resolver essa questão, para a qual esperava uma solução positiva. Porém, **Gödel 1931** (que demonstra uma seqüência de teoremas, dos quais podemos identificar dois principais e que são usualmente denominados, segundo a ordem em que aparecem no texto, Primeiro e Segundo Teoremas de Incompletude de Gödel) responde negativamente à questão apresentada por Hilbert, e põe fim, senão a um projeto formalista geral, pelo menos, a um projeto formalista que pretenda responder, finitariamente, a questão da não-contradição de axiomas de uma teoria aritmética, no sentido de demonstrar "*que um número definido de passos lógicos baseado sobre eles nunca pode levar a resultados contraditórios*". Mais ainda, **Gödel 1931** mostra que não existe, como queria Hilbert (no início da citação logo acima), "um sistema [finito] de axiomas que contém uma descrição exata e completa das relações subsistentes entre as idéias elementares" da Aritmética, pondo fim, também, a um ideal de completa axiomatização da Aritmética. No Capítulo 4 introduzimos e discutimos os teoremas da incompletude de Gödel e algumas de suas interpretações; por agora, façamos apenas uma apresentação geral.

Gödel 1931 mostra que, dado um sistema formal $\boldsymbol{F}$ com certas características (que são geralmente parafraseadas por "conter a aritmética dos números naturais"), podemos exibir uma fórmula $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$ do sistema formal $\boldsymbol{F}$ tal que, se $\boldsymbol{F}$ é consistente, então, nem $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$, nem sua negação $\mathbf{\sim G}_{\boldsymbol{F}}$, são teoremas do sistema; logo, todo sistema formal $\boldsymbol{F}$ sobre os números naturais é incompleto. Mais ainda, **Gödel 1931** mostra que, se $\boldsymbol{F}$ é consistente, então $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$ é verdadeira no conjunto dos números naturais.

Ora, **Gödel 1931** fornece então um método para encontrar uma fórmula verdadeira $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$ sobre números naturais, a partir de outras fórmulas verdadeiras no conjunto dos números naturais, os axiomas do sistema formal $\boldsymbol{F}$, mas cuja demonstração não pode ser obtida, no sistema formal $\boldsymbol{F}$, a partir dos axiomas de $\boldsymbol{F}$. Se acrescentarmos a fórmula $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$ aos axiomas do sistema $\boldsymbol{F}$, temos um novo sistema formal $\boldsymbol{F'}$, no qual demonstramos $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F}}$, mas que possui, também, uma fórmula $\mathbf{G}_{\boldsymbol{F'}}$ verdadeira no conjunto dos números naturais e não-demonstrável em $\boldsymbol{F'}$. Desse processo, que pode ser repetido indefinidamente, e da equivalência entre sistemas formais e procedimentos mecânicos, estabelecida pela Tese/Definição de Church (que introduzimos e discutimos no Capítulo 3), abre-se espaço para se colocar a questão a respeito da existência de processos não-mecânicos[2] e verdadeiramente auto-organizados, já que, aparentemente, os procedimentos executados pelos lógicos matemáticos não poderiam ser completamente expressos por uma teoria formal axiomatizada ou por um procedimento mecânico, e gerariam teorias axiomáticas sobre números naturais com uma organização crescente, no sentido de cada uma ser uma extensão da anterior. No caso, o processo auto-organizado e não-mecânico desenvolvido pelos lógicos matemáticos corresponde à determinação da veracidade ou falsidade das fórmulas e, conseqüentemente, da validade ou não-validade de fórmulas de uma teoria formal no Modelo Padrão dos Números Naturais.

Notemos então que não é de se estranhar, portanto, que tais resultados gödelianos ressurjam periodicamente no contexto das teorias de auto-organização. Debrun acreditava que havia uma forte ligação entre os Teoremas da Incompletude de Gödel e as Teorias de Auto-Organização. Recentemente, **Atlan 1998**, p. 24, cita os estudos de **Penrose 1989** e **1995** sobre os Teoremas da Incompletude de Gödel, para discutir a possibilidade de auto-organização verdadeira.

> Sob a influência da teoria matemática da computabilidade, é geralmente assumido que tudo na natureza é ou computável ou aleatório. Esta assunção, conhecida pelo nome de tese física de Church-Turing (Davis, 1965), implica que sistemas verdadeiramente auto-organizados não poderiam existir na natureza. Ela está baseada sobre considerações sobre o poder das linguagens computacionais e suas equivalências ao que toca ao conjunto de seqüências computáveis. Aplicada ao mundo físico, esta tese afirma que tudo é computável, desde que tudo obedece a leis físicas que são computáveis. A única exceção pode ser os fenômenos aleatórios se admite-se que existe na natureza aleatoriedade irredutível. Entretanto, em dois livros provocativos, Penrose (1989, 1995) argumenta a favor da idéia de que a tese de Church-Turing não pode ser aplicada a todos fenômenos físicos por causa das limitações impostas pelo teorema de Gödel. Ele também salienta a distinção entre computar e entender para mostrar que o cérebro humano (e outros?) capaz de entender pode ser instância de tais sistemas físicos para os quais a tese de Church-Turing não se aplicam. Este trabalho é particularmente interessante porque não recorre a uma ontologia dualista na qual a mente sem nenhuma substância material não seria computável, contudo seria capaz de disparar ações e impor propriedades não-computáveis sobre os corpos materiais.

Porém, **Penrose 1990**, p. 693, escreve:

> Todos os meus críticos adversários sobre este tópico têm saltado para as conclusões e, de um modo ou de outro, não têm alcançado o ponto que estou tentando expressar. Ninguém parece ter alcançado a total importância do argumento gödeliano. A falta é minha: deveria ter explicado mais claramente as coisas.

---

[2] Sempre que falarmos de processos mecânicos ou não-mecânicos, estaremos usando o sentido expresso na Tese/Definição de Church (cf. Capítulo3, em especial, Seção 3.2).

Lucas 1996, p.1, cita, então, a passagem acima, para estabelecer uma querela com Penrose. Não com relação às duas primeiras sentenças, mas com a terceira, que ele acha que, "ainda que caridosa e cortês, é completamente inverídica". Com efeito, **Lucas 1961**, p.112, defende que os resultados obtidos por Gödel permitem concluir que o "Mecanicismo é falso", i.e., que "mentes não podem ser explicadas como máquinas", e **Lucas 1996**, p.1, se queixa que:

> ... a maioria dos críticos não leram cuidadosamente nem a minha exposição, nem a de Penrose, e procuram refutar argumentos que nunca foram postos por nós, ou, ainda mais, propõem como uma objeção fatal, algo que já foi considerado e contemplado na nossa exposição do argumento.

Dada a importância dos resultados de Gödel para as teorias de auto-organização e dada a discussão existente na literatura em torno de suas implicações, um objetivo preliminar deste trabalho consiste em realizar uma análise detalhada dos resultados obtidos a partir de ***Gödel 1931****, no sentido de procurar identificar se esses resultados implicam na existência de processos não-mecânicos na acepção da Tese/Definição de Church.*

Temos ainda que **Gödel 1931** implica também a incompletude da lógica de segunda ordem e de ordens superiores (*cf.* **Tarski 1965**, p.274, e **Robin 1969**, p.163), como veremos na Seção 6.4, onde são introduzidas e discutidas, e fornece também um método para encontrarmos fórmulas verdadeiras, a partir de axiomas de um sistema formal consistente ***F*** de segunda ordem, que não podem ser demonstradas em ***F***. Temos também, neste caso, como no dos sistemas formais de primeira ordem sobre números naturais, que o processo desenvolvido pelos lógicos matemáticos na determinação da veracidade ou falsidade e, conseqüentemente, da validade ou não-validade de fórmulas de uma teoria formal de segunda ordem também é auto-organizado e não-mecânico, o que nos permite estabelecer o objetivo central deste trabalho.

O objetivo central deste trabalho é analisar o processo de determinação de verdades aritméticas e de verdades de lógica de ordens superiores, a partir de uma análise de *resultados decorrentes de **Gödel 1931** e da conceituação estabelecida pela Teoria da Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c**.*

Nesse sentido, como este trabalho envolve diferentes áreas do conhecimento, introduzimos conceitos e propriedades básicas da Teoria da Auto-Organização de Debrun, da Sistêmica e de Lógica, neste caso para podermos introduzir a discussão sobre o Teorema da Incompletude de Gödel. Não excluímos *a priori* a possibilidade de tratamento do processo de determinação de verdades aritméticas e lógicas por outro método ou teoria, porém pensamos ser esta uma opção natural, na medida em que o processo de determinação de verdades aritméticas e lógicas parece ser um processo não-algorítmico, com organização crescente e fortemente dependente dos seus estágios anteriores. Acreditamos que esta opção se justifica, na medida em que os conceitos da Teoria da Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c** se ajustam às características do próprio processo, permitindo uma compreensão mínima dele.

Mas por que os resultados obtidos a partir de **Gödel 1931** poderiam ter um alcance tão amplo e tão profundo ?

Vimos que os estudos da Auto-Organização e da Sistêmica surgiram da Cibernética, da qual também se originaram os estudos sobre a Inteligência Artificial.

A Cibernética estuda as comunicações e as regulações nos seres vivos e nas máquinas e tem como uma de suas bases teóricas a Lógica Matemática e a Computabilidade.

Os resultados de **Gödel 1931** impõem limites à formalização lógico-matemática (*cf.*, e.g., **Mendelson 2001**, p.224, e **Shoenfield 1967**, p.133), que – depois que os trabalhos de **Gödel 1931** e **1934**, **Church 1935**, **Kleene 1936**, **Turing 1936**, **Post 1936** etc., mostraram haver uma estreita relação entre a noção de computabilidade e de teoria formal – correspondem a limites em Computabilidade. Conseqüentemente, os resultados de **Gödel 1931** acabam por impor limites à Cibernética.

Em particular, **Gödel 1931** implicaria que certos procedimentos da inteligência humana não podem ser simulados por máquinas.

Para a Teoria da Auto-Organização, **Gödel 1931** implicaria em resultados que forneceriam exemplos de sistemas verdadeiramente auto-organizados, como sugere **Atlan**

1998, p. 24, bem como, forneceria um caso específico para a aplicação dos conceitos da Teoria da Auto-Organização.

Na Sistêmica, **Gödel 1931** implicaria na existência de limites aos métodos de simulação e de formalização de capacidades da inteligência humana e, portanto, limites quanto à sua aplicação às Ciências Humanas.

Nos estudos da Inteligência Artificial, **Gödel 1931** implicaria na existência de limites a pretensões de simulação completa da inteligência humana.

Por fim, tais resultados também teriam implicações para áreas como a Metodologia da Ciência, a Epistemologia, a Gnosiologia, as Ciências Cognitivas e a Filosofia da Mente, na medida em que demandariam uma nova forma de explicação de certos fenômenos da cognição humana.

Voltaremos a essas questões nas Considerações Finais desta Tese.

Assim, os objetivos deste trabalho consistem em:

1. *Organizar os resultados a respeito do Teorema da Incompletude de Gödel, de modo a permitir uma compreensão detalhada de sua demonstração e dos resultados que se relacionam diretamente com a discussão sobre a impossibilidade de modelagem do processo de determinação de verdades matemáticas e lógicas. Em particular,*

a. *Introduzir noções e propriedades básicas sobre a sintaxe de sistemas formais e, em especial, sobre sistemas formais que versam sobre o conjunto dos números naturais, nos quais se dá o processo aqui estudado de determinação de validade ou não-validade, o que consta do Capítulo 1.*

b. *Introduzir noções e propriedades básicas relativas à semântica dos sistemas formais que versam sobre os números naturais, o que é feito no Capítulo 2.*

No Capítulo 2, apresentamos uma estrutura simples e intuitiva que representa a estrutura dos números naturais (*cf.* o Modelo de Marcas) e que nos permite mostrar que a estrutura dos números naturais está subjacente às linguagens formais; mostramos também como a existência dessa estrutura simples e intuitiva implica semanticamente, i.e., pelo Metateorema da Completude (Metateorema 2.3.16), a consistência das teorias ***N***, ***PA*** e ***R*** (Definições 1.4.3, 1.4.4 e 1.4.7) sobre os números naturais; indicamos também, neste capítulo, uma demonstração finitária da consistência de ***N***.

c. Estabelecer a noção de processo mecânico adequado à Tese de Church, o que é realizado no Capítulo 3.

No Capítulo 3 discutimos também a noção de método de decisão e introduzimos definições e resultados a respeito dos predicados e funções recursivos, das funções recursivas parciais, dos predicados recursivamente enumeráveis, e de processos mecânicos que envolvem acaso.

d. Introduzir os elementos necessários à compreensão do enunciado do Teorema da Incompletude de Gödel, o que consta das Seções 4.1 e 4.2 do Capítulo 4.

e. Demonstrar a parte do Teorema da Incompletude de Gödel que é usada para derivar os resultados de impossibilidade de modelagem de determinação de verdades matemáticas e lógicas, o que é realizado na Seção 4.3 do Capítulo 4.

2. Mostrar que o Teorema da Incompletude de Gödel implica:

a. A existência de um processo não-mecânico de determinação de verdades sobre os Números Naturais, o que é feito nas Seções 5.1 e 5.2 do Capítulo 5.

b. A existência de capacidades humanas que não podem ser simuladas mecanicamente, relativas a certos processos mecânicos (a Determinação da Demonstrabilidade e Indemonstrabilidade em ***N*** *e o Problema da Parada), o que consta da Seção 5.3 do Capítulo 5.*

Em especial, no Capítulo 5, introduzimos os conceitos básicos de Sistêmica, a partir de **Breciani Fº & D'Ottaviano 2002**, que nos permitem tratar do processo de determinação de verdades aritméticas, de determinação de teoremas e não-teoremas de ***N*** e de determinação de casos do Problema da Parada.

3. Mostrar como a Teoria de Auto-Organização de ***Debrun 1996a**, **b*** *e* ***c*** *possibilita entender os processos não-mecânicos expostos no Capítulo 5, em particular:*

a. Expor a Teoria de Auto-Organização de ***Debrun 1996a**, **b*** *e* ***c**, o que é feito na Seção 6.1 do Capítulo 6.*

b. Aplicar os conceitos de ***Debrun 1996a**, **b*** *e* ***c*** *ao processo não-mecânico de determinação de verdades aritméticas, o que consta das Seções 6.2 e 6.3 do Capítulo 6.*

c. Mostrar que a Teoria de Auto-Organização de ***Debrun 1996a**, **b*** *e* ***c*** *também pode ser usada para entendermos o processo não-mecânico de determinação de validade em lógica de ordens superiores, o que é feito na Seção 6.4 do Capítulo 6.*

Nas Considerações Finais, apresentamos uma análise sucinta dos resultados por nós obtidos e sugerimos questões para trabalhos futuros

Baseamos grande parte de nossas definições e dos resultados em **Shoenfield 1967**, em particular nos Capítulos 1, 2, 3 e 4. A maior parte das demonstrações dos resultados necessários à obtenção da parte do Teorema da Incompletude de Gödel, necessária ao argumento deste trabalho, é apresentada; são indicadas referências bibliográficas para os resultados complementares, secundários em relação ao tema, e que exigiriam aqui uma discussão mais longa.

Observamos, por fim, que o símbolo é usado para indicar o fim de uma demonstração ou a ausência dela.

1. SISTEMAS FORMAIS E INDEMONSTRABILIDADE DE FÓRMULAS

Neste capítulo, vamos tratar da noção de sistema formal e de certos tipos de sistema formais: as teorias de primeira ordem. Em particular, trataremos de algumas teorias de números naturais. Pretendemos aqui apenas introduzir noções, definições, resultados e exemplos básicos de Teoria de Sistemas Formais que necessitamos para o desenvolvimento desta Tese e que serão utilizados posteriormente. Nesta exposição, utilizaremos basicamente **Shoenfield 1967**, com algumas adaptações, e **Kleene 1952**.

Grosso modo, um *sistema formal* é a parte sintática de um sistema axiomático. A noção de sistema axiomático é relativa à sistematização de uma dada área do conhecimento, na qual necessitamos de demonstrações. Como as demonstrações sempre se apoiam em asserções anteriores, devemos aceitar determinadas asserções como primeiras, pois, senão, cairíamos em um regresso infinito. Essas primeiras asserções, que aceitamos sem demonstração, são chamadas de *axiomas*; as asserções restantes, demonstradas a partir dos axiomas, são chamadas de *teoremas*; e as regras que estabelecem como passar de uma asserção à outra, na demonstração, são chamadas de *regras de inferência*. Para explicitarmos, então, um sistema formal, devemos explicitar sintaticamente os constituintes básicos do sistema axiomático a ele relacionado: sua linguagem, seus axiomas e suas regras de inferência. É o que faremos no decorrer deste capítulo. Porém, antes de passarmos à exposição destes constituintes, vejamos algumas noções concernentes à utilização da linguagem.

Como veremos, a linguagem de um sistema formal se constitui de símbolos gráficos. Uma primeira distinção que nos será útil, então, é a distinção entre um *símbolo* e sua *ocorrência*. Façamos essa diferenciação por meio de um exemplo. No Português, as letras são símbolos gráficos que nos permitem escrever palavras e sentenças. Tomemos, por exemplo, a letra "t". Na maioria das vezes, falamos dela no singular: *a* letra "t"; porém, como ela também aparece escrita diversas vezes, em vários lugares, como, por exemplo, em uma mesma palavra, falamos de várias letras "t". Para evitar esta confusão, consideraremos *o símbolo gráfico* como único e denominaremos de *ocorrências* as *diversas* aparições de *um mesmo* símbolo gráfico. Assim, diremos que a letra "t" é *um* símbolo gráfico do alfabeto da Língua Portuguesa que ocorre duas vezes na palavra "interessante" e, apenas uma, na palavra "tese".

Outra noção que utilizaremos é a de concatenação de símbolos. A *concatenação de símbolos gráficos* é a justaposição de ocorrências de símbolos gráficos. Assim, na expressão “legal” temos a concatenação, respectivamente, dos símbolos gráficos “l”, “e”, “g”, “a” e “l”.

No estudo dos sistemas formais, como trataremos de sentenças, temos que estabelecer *nomes* para designar cada uma das sentenças, de modo análogo ao que fazemos com os números, que são nomeados por numerais. Assim, por exemplo, os numerais “2”, “II” e “dois” nomeiam o número dois. No caso das sentenças, usaremos como nome de uma sentença a própria sentença entre aspas. Por exemplo, “Teses devem ser demonstradas” é o nome da sentença que se encontra no interior das aspas. Porém, quando não gerar ambigüidades, ou confusões, vamos empregar a própria sentença, sem as aspas, como nome de si mesma. Mais ainda, como vamos tratar, não apenas de sentenças, mas de *expressões*, que são concatenações de símbolos (as sentenças são casos particulares de expressões), vamos empregar a própria expressão, também sem as aspas, quando não gerar ambigüidades, ou confusões, como nome de si mesma.

Retomando à analogia com o estudo dos números, temos que, nos cálculos aritméticos, utilizamos ainda de variáveis, como por exemplo x, para indicar que qualquer número pode vir a substituir x. Do mesmo modo, utilizaremos aqui *variáveis sintáticas*, para indicar que qualquer expressão pode vir a substituir as variáveis sintáticas. Assim, utilizaremos as letras latinas minúsculas em negrito $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e, também, estas letras com sub-índices ($\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, etc., $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, etc.), para denotar variáveis sintáticas. Quando quisermos ser mais específicos em relação ao domínio das expressões que podem substituir as variáveis sintáticas, vamos utilizar outras letras em negrito, segundo a convenção a ser adotada no decorrer da exposição. Notemos, então, que, utilizando esta designação para variáveis sintáticas para expressões, vamos denotar por $\mathbf{uv}$ a concatenação de duas expressões $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Passemos então à descrição dos componentes de um sistema formal. Tratemos, inicialmente da linguagem.

1. A Linguagem de um Sistema Formal.

Nesta seção, vamos expor as definições relativas à linguagem de um sistema formal. Grosso modo, a linguagem de um sistema formal consiste de um alfabeto, de expressões, e, dentre estas, seus termos e suas fórmulas.

Notemos que uma linguagem de um sistema formal é uma linguagem artificial criada para se definir o próprio sistema formal. Como ela é o objeto de discurso no estudo dos sistemas formais, ela é chamada de *linguagem objeto*, e deve ser diferenciada da linguagem que utilizamos para dela falar, chamada de *metalinguagem*. No nosso caso, nossa metalinguagem é o Português, adicionado de símbolos introduzidos para o estudo da linguagem objeto. A linguagem objeto é a que passamos a descrever (*cf.* Definição 1.1.12).

1.1.1. Convenção de Notação. Apesar da definição de linguagem de primeira ordem de um sistema formal ***F*** ser apresentada mais à frente (Definição 1.1.12), vamos já, a partir daqui, designar por ***L(F)*** a linguagem de primeira ordem[3] de um sistema formal ***F***.

Na definição de um alfabeto de uma linguagem de primeira ordem, utilizaremos, por comodidade, as letras *i* e *n* como índices de alguns símbolos gráficos, como, por exemplo, em "f_i^n". Na realidade, esta expressão indica que se trata de uma infinidade de símbolos, segundo a substituição das letras *i* e *n* por numerais de números naturais. Assim, "f_i^n" constitui a abreviação de uma infinidade de símbolos:

f_0^0	f_1^0	f_2^0	f_3^0	f_4^0	etc.
f_0^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1	f_4^1	etc.
f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_4^2	etc.

etc.

Porém, esta indicação não pressupõe, ainda, uma teoria dos números naturais: podemos considerar estes numerais, como indicando seqüências do símbolo "," (vírgula), no caso dos índices inferiores, e seqüências do símbolo " ' " (aspa simples), no caso de índices superiores. Assim, o quadro acima é uma abreviação do quadro:

f	*f,*	*f,,*	*f,,,*	*f,,,,*	etc.
f'	*f,'*	*f,,'*	*f,,,'*	*f,,,,'*	etc.
f''	*f,''*	*f,,''*	*f,,,''*	*f,,,,'''*	etc.

etc.

Passemos então à definição do alfabeto de uma linguagem de primeira ordem.

[3] Uma linguagem de um sistema formal é de primeira ordem, se os quantificadores atuam apenas sobre variáveis individuais, que será o caso de ***L(F)***, como veremos adiante.

*1.1.2. Definição. Um alfabeto de uma linguagem de primeira ordem **L(F)*** é constituído dos seguintes símbolos:

1. *Variáveis individuais*: x_i
2. *Símbolos de funções n-árias*: f_i^n
3. *Símbolos de predicados n-ários*: p_i^n

   entre os quais, o *símbolo 2-ário de igualdade*: =
4. Os *conectivos*: ~ (denominado *não*)

   $\vee$ (denominado *ou*)
5. O *quantificador existencial*: $\exists$ (denominado *para algum*)

Chamamos de *constantes*, os símbolos f_i^0 de funções *0*-árias.

De modo mais completo, os símbolos $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\forall$ também são considerados símbolos de um *alfabeto de uma linguagem de primeira ordem*. Porém, como veremos, eles podem ser definidos a partir de ~, $\vee$ e $\exists$.

Na maioria das vezes, iremos nos referir a uma variável individual apenas por "variável". Notemos que as variáveis individuais x_i do alfabeto não devem ser confundidas com as variáveis sintáticas. As variáveis x_i pertencem à linguagem objeto, e, como veremos, podem vir a ser substituídas por termos. As variáveis sintáticas pertencem à metalinguagem, isto é, à linguagem que utilizamos aqui para falar da linguagem objeto (o Português, acrescido com os novos símbolos e expressões).

1.1.3. Convenção de Notação. Vamos usar a seguinte convenção para variáveis sintáticas, segundo o domínio especificado:

$\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (e, possivelmente, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, etc., $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, etc.) para variáveis individuais;

$\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ (e, possivelmente, $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, etc., $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, etc.) para símbolos de funções;

$\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ (e, possivelmente, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, etc., $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, etc.) para símbolos de predicados.

1.1.4. Definição. Uma *expressão da linguagem **L(F)*** é qualquer seqüência de símbolos do alfabeto, construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Um símbolo do alfabeto de ***L(F)*** é uma expressão;

2. Se **u** é uma expressão de ***L(F)*** e **v** é uma expressão de ***L(F)***, então **uv** é uma expressão de ***L(F)***.

Vamos nos referir a uma expressão de ***L(F)*** simplesmente por "expressão". Em todas as definições a seguir, suprimiremos o complemento "de ***L(F)***", ficando subentendido que as expressões pertencem à linguagem objeto.

1.1.5. Definição. O *comprimento de uma expressão* é o número de ocorrências de símbolos nesta expressão.

1.1.6. Definição. Um *termo* é uma expressão construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Uma variável é um termo;
2. Se $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_n$ são termos e **f** um símbolo de função *n*-ária, então $\mathbf{fu}_1\mathbf{...u}_n$ é um termo.

Notemos que, pela cláusula 2 acima, uma constante f_i^0 (símbolo de função *0*-ária) é um termo.

1.1.7. Convenção de Notação. Vamos usar as letras em negrito **a** e **b** (possivelmente, com sub-índices, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, etc., $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, etc.) para as variáveis sintáticas cujo domínio são termos.

1.1.8. Definição. Uma *fórmula atômica* é uma expressão da forma $\mathbf{pa}_1\mathbf{...a}_n$, na qual **p** é um símbolo de predicado *n*-ário e $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ são termos.

1.1.9. Definição. Uma *fórmula* é uma expressão construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Uma fórmula atômica é uma fórmula;
2. Se **u** é uma fórmula, então **~u** é uma fórmula;
3. Se **u** e **v** são fórmulas, então $\vee$**uv** é uma fórmula;

4. Se **u** é uma fórmula e **x** uma variável, então $\exists$**xu** é uma fórmula.

A definição anterior estabelece as fórmulas na chamada notação polonesa, que consiste em escrever os conectivos seguidos das expressões conectadas. Apesar desta forma ser mais concisa, permitindo, por exemplo, a não-utilização de parênteses nas fórmulas, ela não é a mais usual. Vamos adotá-la em conformidade com **Shoenfield 1967**, porém, como veremos, as abreviações, descritas mais abaixo, permitirão restabelecer a notação usual.

1.1.10. Convenção de Notação. Vamos usar as letras em negrito **A**, **B** e **C** (possivelmente, com sub-índices, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, etc., $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, etc., $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, etc.) para as variáveis sintáticas cujo domínio são fórmulas.

1.1.11. Observação. Às vezes, escreveremos "fórmula de ***F***", para explicitar que uma fórmula é da linguagem ***L(F)*** de um sistema formal ***F***.

1.1.12. Definição. Uma *linguagem de primeira ordem* ***L(F)*** é definida como a linguagem na qual o alfabeto, os termos e as fórmulas são como os definidos acima (Definições 1.1.2, 1.1.6 e 1.1.9)

Observemos que, muitas vezes, vamos escrever apenas "linguagem" para nos referir a uma linguagem de primeira ordem.

1.1.13. Definição. Dada uma linguagem de primeira ordem ***L(F)***, um *símbolo não-lógico* de ***L(F)*** é qualquer símbolo de função ou símbolo de predicado do alfabeto de ***L(F)***, a menos do símbolo de predicado =; um *símbolo lógico* de ***L(F)*** é qualquer símbolo do alfabeto de ***L(F)*** que não seja um símbolo não-lógico.

Os símbolos lógicos estão presentes em qualquer linguagem de primeira ordem, sendo que as linguagens de primeira ordem diferem entre si apenas pelos seus símbolos não-lógicos, ou seja, pelos seus símbolos de funções e seus símbolos de predicados. Temos então que uma linguagem de primeira ordem fica determinada pela especificação dos seus símbolos não-lógicos, o que será importante, mais adiante, quando falarmos de teorias de primeira ordem e de interpretações de linguagens de primeira ordem.

1.1.14. Definição. Uma linguagem ***L'*** é uma *extensão de uma linguagem* ***L*** se todos os símbolos não-lógicos de ***L*** são símbolos não-lógicos de ***L'***.

Notemos que, trivialmente, qualquer linguagem é uma extensão de si mesma. Notemos, ainda, que, se a linguagem ***L'*** é uma extensão da linguagem ***L***, então tudo aquilo que pode ser expresso por ***L***, pode ser expresso por ***L'***, já que todos os termos e fórmulas de ***L*** também são termos e fórmulas de ***L'***.

1.1.15. Convenção de Notação. Como dissemos, logo depois da definição de fórmula (Definição 1.1.9), a notação polonesa não é a mais usual. As abreviações a seguir nos permitirão representar as fórmulas da maneira usual e introduzir alguns símbolos definidos, que correspondem às noções de conjunção ($\wedge$), implicação ($\rightarrow$) e equivalência ($\leftrightarrow$). Vamos nos referir, por abuso de linguagem, apenas por "termo" e "fórmula", respectivamente, às abreviações de um termo e de uma fórmula (para uma discussão pormenorizada sobre abreviações, veja **Kleene 1952**, §§16 e 74). Assim, vamos escrever $\mathbf{(A \vee B)}$ para denotar $\mathbf{\vee AB}$; $\mathbf{(A \rightarrow B)}$ para denotar $\mathbf{(\sim A \vee B)}$; $\mathbf{(A \wedge B)}$ para $\mathbf{\sim(\sim A \vee \sim B)}$; $\mathbf{(A \leftrightarrow B)}$ para $\mathbf{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$; $\mathbf{\forall xA}$ para $\mathbf{\sim\exists x\sim A}$; **(aub)** para **uab**, na qual **u** é um símbolo de função binária ou um símbolo de predicado binário e **a** e **b** são termos; $\mathbf{(a \neq b)}$ para denotar $\mathbf{\sim(a = b)}$, na qual **=** é o símbolo de igualdade e **a** e **b** são termos; e $\mathbf{u(a_1 , ..., a_n)}$ para denotar $\mathbf{ua_1...a_n}$, na qual **u** é um símbolo de função *n*-ária ou um símbolo de predicado *n*-ário e $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$ são termos.

1.1.16. Convenção de Notação. Muitas vezes, a existência de muitos parênteses dificulta a leitura de fórmulas. Vamos estabelecer então regras de restituição de parênteses, o que nos permitirá escrever as fórmulas com menos parênteses. As regras de restituição de parênteses que utilizaremos, na ordem apresentada a seguir, são:

1. Restituímos parênteses relativos aos símbolos de funções binárias, quando houver; logo, ao restituirmos os parênteses de uma fórmula da forma **aub**, temos: **(aub)**;

2. Restituímos parênteses relativos aos símbolos de predicados binários, como por

exemplo, no caso da igualdade; assim, restituindo os parênteses de $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, temos: $(\mathbf{x} = \mathbf{y})$;

3. Restituímos os parentes de fórmulas com as formas $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ (que chamaremos de primeiro nível) antes das fórmulas com as formas $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$ (que chamaremos de segundo nível). Assim, a restituição dos parênteses de $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}$ resulta $((\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{C})$;

4. Para conectivos do mesmo nível, adotamos a regra de associação à direita, assim, a restituição dos parênteses de $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\vee\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$, resulta $(\mathbf{A}\vee(\mathbf{B}\vee(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})))$.

Vamos chamar: $\sim\mathbf{A}$, de *negação de A*; $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, *disjunção de A e B*; $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, *conjunção de A e B*; $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, *implicação de B por A*; $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$, *equivalência de A e B*; $\exists\mathbf{xA}$, *instanciação de A por x*; $\forall\mathbf{xA}$, *generalização de A por x*. Além disso, denominados de *quantificadores* os símbolos gráficos $\exists$ e $\forall$, sendo $\exists$ o *quantificador existencial* e $\forall$ o *quantificador universal*.

Como veremos, em certos casos, haverá substituição de variáveis por outros termos, e vice-versa. Vamos então apresentar algumas definições relativas a essas substituições.

1.1.17. Definição. Uma ocorrência de uma variável **x** em **A** é *ligada em A* se ocorre na parte de **A** da forma $\exists\mathbf{xB}$; caso contrário, a ocorrência de **x** é *livre em A*.

1.1.18. Definição. Dizemos que a variável **x** é *livre em A*, se alguma ocorrência de **x** é livre em **A**. Dizemos que a variável **x** é *ligada em A*, se alguma ocorrência de **x** é ligada em **A**.

Notemos que uma mesma variável pode ser livre e ligada em **A**, como em $\exists\mathbf{x}(\ \mathbf{x} = \mathbf{x}\ ) \vee (\ \mathbf{x} = \mathbf{x}\ )$, pois a primeira e a segunda ocorrências de **x** são ligadas e a terceira e a quarta ocorrências de **x** são livres.

1.1.19. Convenção de Notação. Usamos $\mathbf{b_x[a]}$ para designar a expressão obtida de **b** pela substituição de cada ocorrência de **x** por **a**. Usamos $\mathbf{A_x[a]}$ para designar a expressão obtida de **A** pela substituição de cada ocorrência livre de **x** em **A** por **a**. Notemos que $\mathbf{b_x[a]}$ é um termo e $\mathbf{A_x[a]}$ é uma fórmula (**Shoenfield 1967**, p.16).

Exemplos: se **b** é o termo $f_1^2(x_1 , x_2)$, **a** é o termo $f_1^1(f_1^0)$ e **x** é a variável x_1 então $\mathbf{b_x[a]}$ é o termo $f_1^2(f_1^1(f_1^0), x_2)$. Se **A** é a fórmula $x_1 = x_2$, **a** é o termo x_3 e **x** é a variável x_1 , então $\mathbf{A_x[a]}$ é a fórmula $x_3 = x_2$.

1.1.20. Definição. Dizemos que **x** é *substituível por* **a** *em* ***A*** se, para cada variável **y** ocorrendo em **a**, nenhuma parte de **A** da forma $\exists$**yB** contém uma ocorrência de **x** que é livre em **A**. Sempre que usarmos $\mathbf{A_x[a]}$, estaremos pressupondo que **x** é substituível por **a** em **A**.

1.1.21. Convenção de Notação. Usamos $\mathbf{b_{x_1 , ..., x_\mathit{n}}[a_1 , ..., a_\mathit{n}]}$ para designar o termo obtido de **b** pela substituição de todas as ocorrências de $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x}_n$ por, respectivamente, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$; e usamos $\mathbf{A_{x_1 , ..., x_\mathit{n}}[a_1 , ..., a_\mathit{n}]}$ para designar a fórmula obtida de **A** pela substituição de todas as ocorrências de $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x}_n$ por, respectivamente, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$. Sempre que usarmos estas notações, $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x}_n$ representarão variáveis distintas, e, em $\mathbf{A_{x_1 , ..., x_\mathit{n}}[a_1 , ..., a_\mathit{n}]}$, estaremos pressupondo que **A**, $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$ estão restritos a expressões tais que $\mathbf{x_1}$, ..., $\mathbf{x}_n$ são substituíveis, respectivamente, por $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$, em **A**. Por fim, quando estiver claro pelo contexto, omitiremos os subscritos $\mathbf{x_1 , ..., x_\mathit{n}}$, escrevendo apenas: $\mathbf{b[a_1 , ..., a_\mathit{n}]}$ e $\mathbf{A[a_1 , ..., a_\mathit{n}]}$.

1.1.22. Definição. Uma fórmula **A** é *fechada* se nenhuma variável é livre em **A**.

1.1.23. Definição. O *fecho* de uma fórmula **A**, na qual $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x}_n$ são as variáveis que são livres em **A** em ordem alfabética[4], é a fórmula $\mathbf{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_\mathit{n} A}$.

Notemos que o fecho de **A** é uma fórmula fechada, e que, se **A** é fechada, então o fecho de **A** é a própria **A**.

[4] A ordem alfabética das variáveis individuais é x_1 , x_2 , x_3 , etc. Assim, a seqüência x_4 , x_{12} , x_{23} está em ordem alfabética.

2. Os Axiomas e as Regras de Inferência.

Na seção anterior, descrevemos a linguagem de um sistema formal. Nesta seção, continuaremos a exposição da noção de sistema formal, descrevendo os outros constituintes essenciais: os axiomas e as regras de inferência.

Os axiomas são fórmulas da linguagem. Não há requisitos especiais para uma fórmula ser um axioma, além de ser escolhida como tal. Porém, como as fórmulas, bem como os axiomas, serão interpretados futuramente (*cf.* o capítulo seguinte), em geral, diferencia-se dois tipos de axiomas: os *axiomas lógicos* (aqueles cuja validade independe da interpretação) e os *axiomas não-lógicos* (aqueles cuja validade depende da interpretação). Como a validade dos axiomas não-lógicos depende da interpretação, eles são usados para descrever um determinado domínio de objetos. Ao contrário, os axiomas lógicos servem para todos os domínios, e são partes essenciais de qualquer sistema formal. Passamos a descrever então as fórmulas que adotaremos como os axiomas lógicos de um sistema formal.

Na descrição dos axiomas, a seguir, utilizaremos *esquemas de fórmulas*. Isto quer dizer que qualquer fórmula que tenha a forma descrita pelos esquemas, ou seja, cuja disposição dos símbolos gráficos seja aquela indicada nos esquemas, é um axioma.

1.2.1. Definição. Consideraremos como *axiomas lógicos* de um sistema formal, as fórmulas que tenham os seguintes esquemas:

Esquemas de *Axiomas Proposicionais:* $\mathbf{\sim A \vee A}$

Esquemas de *Axiomas da Substituição:* $\mathbf{A_x[a] \rightarrow \exists xA}$

Esquemas de *Axiomas da Identidade:* $\mathbf{x = x}$

Esquemas de *Axiomas da Igualdade:*

$$\mathbf{x_1 = y_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow fx_1 \ldots x_n = fy_1 \ldots y_n}$$

$$\mathbf{x_1 = y_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow px_1 \ldots x_n \rightarrow py_1 \ldots y_n}$$

nos quais **f** é um símbolo de função *n*-ária e **p** um símbolo de predicado *n*-ário.

1.2.2. Definição. Uma regra de inferência de um sistema formal ***F*** é uma regra que estabelece qual fórmula de ***F***, chamada de *conclusão* da regra de inferência, pode, sob certas condições, ser inferida de certas outras fórmulas de ***F***, chamadas *hipóteses* da regra de inferência.

Aqui, como nos axiomas, podemos falar de *regras de inferência lógicas* e *regras de inferência não-lógicas*, conforme as inferências descritas por elas sejam, respectivamente, válidas, ou não, para qualquer domínio de interpretação da linguagem do sistema lógico. Porém, neste trabalho, só vamos lidar com sistemas formais com regras de inferência lógicas.

Passemos, então, à descrição das regras de inferência de um sistema formal que, como nos axiomas, serão definidas com ajuda de esquemas de fórmulas.

1.2.3. Definição. As seguintes regras são consideradas as *regras de inferência lógica de um sistema formal*:

Regra de Expansão: inferir $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$

Regra de Contração: inferir $\mathbf{A}$ de $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$

Regra Associativa: inferir $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ de $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$

Regra do Corte: inferir $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ de $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ e $\mathbf{\sim A} \vee \mathbf{C}$

Regra de Introdução de $\exists$: se $\mathbf{x}$ não é livre em $\mathbf{B}$, inferir $\exists\mathbf{xA} \to \mathbf{B}$ de $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$

1.2.4. Observação. Às vezes, falaremos da regra de inferência *Modus Ponens*, que consiste em inferir $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Apesar de não a considerarmos uma regra de inferência primitiva de um sistema formal, ela pode ser considerada uma regra de inferência de um sistema formal, na medida em que ela é a seguinte composição das regras de inferência: se tivermos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, então, pela Regra de Expansão, podemos inferir $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$; e, como $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é a abreviação de $\mathbf{\sim A} \vee \mathbf{B}$, podemos inferir, pela Regra do Corte, $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ e $\mathbf{\sim A} \vee \mathbf{B}$. Por esta composição, portanto, podemos inferir $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, que é exatamente a Regra Modus Ponens.

3. Demonstrações e Teoremas de um Sistema Formal.

A descrição da linguagem, dos axiomas e das regras de inferência completa a especificação de um sistema formal, que, como vimos no início deste capítulo, é a parte sintática de um sistema axiomático. Com efeito, temos agora os elementos necessários para definir sintaticamente uma demonstração a partir dos axiomas, que constitui, podemos dizer, o cerne de um sistema axiomático. Passemos então à definição de demonstração.

1.3.1. Definição. Uma *demonstração de uma fórmula* **A** *em um sistema formal* ***F*** é uma seqüência de fórmulas de ***F*** (Observação 1.1.11) $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, ..., $\mathbf{A}_n$, tais que:

1. Cada uma das fórmulas $\mathbf{A}_i$ da seqüência:
   a. É um axioma de ***F***; ou
   b. Segue das fórmulas $\mathbf{A}_k$ ($k < i$) anteriores na seqüência, pela aplicação de alguma das regras de inferência do sistema formal ***F***;
2. A última fórmula $\mathbf{A}_n$ da seqüência é a própria fórmula **A**.

Informalmente, podemos descrever a construção, ou apresentação, de uma demonstração de uma fórmula **A** em um sistema formal ***F*** do seguinte modo: primeiro, tomamos alguns axiomas de ***F*** numa certa ordem, enumerando-os para depois poder referenciá-los (começamos, portanto, a escrever a seqüência); depois, aplicamos a eles alguma das regras de inferência de ***F***, obtendo uma nova fórmula, que entra, logo em seguida, na seqüência; a seguir, ou adicionamos mais axiomas de ***F*** à seqüência, ou aplicamos alguma das regras de inferência de ***F*** ao conjunto de fórmulas já obtidas (axiomas mais as conseqüências da aplicação da regra) que estão na seqüência; repetimos, então, este procedimento até chegar à fórmula **A**. Assim, temos uma seqüência de fórmulas, construída a partir dos axiomas de ***F*** até a fórmula **A**, aplicando apenas as regras de inferência de ***F***. Temos aqui quase um jogo: as fórmulas são "as peças do jogo" e as regras de inferência determinam os "movimentos permitidos no jogo".

Com a definição de demonstração, podemos definir os teoremas de um sistema formal.

1.3.2. Definição.[5] Um *teorema de um sistema formal* ***F*** é uma fórmula **A** de ***F***, da

[5] Esta definição difere da definição apresentada em **Shoenfield 1967**, porém, é eqüivalente, já que ele metademonstra (pág. 5) que: uma fórmula **A** de ***F*** é teorema de ***F*** se, e somente se, existe uma demonstração de **A** em ***F***.

qual existe uma demonstração em ***F***.

Notemos que os axiomas de um sistema formal ***F*** são teoremas de ***F***, pois eles são uma demonstração (Definição 1.3.1) de si mesmo. Notemos ainda que, se uma fórmula **A** de ***F*** é conseqüência de uma regra de inferência de ***F***, a partir de hipóteses que são teoremas de ***F***, então **A** é um teorema de ***F***.

Observemos ainda que para mostrarmos que os teoremas de um sistema formal ***F*** têm uma certa propriedade, basta mostrar que os axiomas de ***F*** têm essa propriedade e que as regras de inferência preservam essa propriedade, i.e., se as hipóteses de uma regra de inferência têm a propriedade, então a conclusão também tem.

Com estas definições, completamos a explicitação da noção de sistema formal. Vejamos agora um tipo de sistema formal específico: as teorias de primeira ordem.

*4. Teorias e Exemplos de Teorias: os Sistemas Formais **N**, **PA** e **R**.*

Vimos, até aqui, os elementos básicos para se definir um sistema formal, bem como a definição de demonstração em um sistema formal. Especificamente, estabelecemos os elementos gerais dos diversos sistemas formais, que podem versar sobre diferentes domínios. Vamos agora considerar as teorias, que são sistemas formais, portanto, sistemas axiomáticos, que, dentre seus axiomas, também possuem axiomas não-lógicos, que versam sobre domínios particulares de discurso. Daqui em diante (a menos da Seção 6.4), nosso estudo sobre sistemas formais se restringirá às teorias de primeira ordem.

Antes de passarmos ao estudo das teorias de primeira ordem, estabeleçamos uma convenção de notação que nos será útil mais adiante na apresentação de alguns resultados.

1.4.1. Convenção de Notação. Denominamos ***S*** o sistema formal de primeira ordem que não tem axiomas não-lógicos.

1.4.2. Definição. Uma *teoria de primeira ordem* é um sistema formal *T* tal que:

1. A linguagem de *T* é uma linguagem de primeira ordem;

2. Os axiomas de *T* são os axiomas lógicos (Definição 1.2.1) e certos axiomas adi-

cionais, chamados de *axiomas não-lógicos*;

3. As regras de T são a Regra de Expansão, a Regra de Contração, a Regra Associativa, a Regra do Corte e a Regra da Introdução de $\exists$.

Muitas vezes, escreveremos apenas "teoria" para nos referir a uma teoria de primeira ordem. Da definição acima, vemos que para definirmos uma teoria de primeira ordem, devemos especificar sua linguagem, i.e., seus símbolos não-lógicos (ou seja, seus símbolos de função e de predicado) e seus axiomas não-lógicos. Como dissemos anteriormente, logo após a definição de regra de inferência (Definição 1.2.2), não trataremos de teorias com regras de inferência não-lógicas. Notemos, entretanto, que não há perda de generalidade em não considerarmos teorias com regras de inferência não-lógicas: podemos demonstrar qualquer teorema de uma teoria $\boldsymbol{F}$ com uma regra de inferência não-lógica cujas hipóteses sejam as fórmulas $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ e a conclusão seja a fórmula $\mathbf{A}_{n+1}$, em uma teoria $\boldsymbol{F'}$, com a mesma linguagem de $\boldsymbol{F}$, sem a regra de inferência não-lógica, mas cujos axiomas são os axiomas de $\boldsymbol{F}$ mais o axioma:

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_{n+1}.$$

Com efeito, dado que as hipóteses $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ são teoremas, podemos, inferir por *Modus Ponens* (Observação 1.2.4), que a conclusão $\mathbf{A}_{n+1}$ é teorema, como no caso da aplicação da regra de inferência não-lógica.

Vamos apresentar, agora, exemplos de teorias de primeira ordem. O domínio de discurso que intencionamos descrever com elas é o conjunto dos números naturais. Entretanto, não estamos tratando ainda da interpretação de uma teoria, o que será feito no próximo capítulo: aqui, elas estão apenas como exemplos de teorias, i.e., sistemas axiomáticos com símbolos não-lógicos e axiomas não-lógicos, que permitem demonstrar mais teoremas que os sistemas formais apenas com símbolos e axiomas lógicos.

1.4.3. Definição. Denominamos de $\boldsymbol{N}$ a teoria com os seguintes símbolos não-lógicos e axiomas não-lógicos:

Símbolos não-lógicos da linguagem $\boldsymbol{L(N)}$:

0 : uma constante, denominada de *zero*

S : um símbolo de função unária, denominado de *sucessor*

+ : um símbolo de função binária, denominado de *adição*

· : um símbolo de função binária, denominado de *multiplicação*

$<$: um símbolo de predicado binário, denominado de *menor que*

Axiomas não-lógicos de ***N***:

$N1.\ Sx_1 \neq 0$

$N2.\ Sx_1 = Sx_2 \rightarrow x_1 = x_2$

$N3.\ x_1 + 0 = x_1$

$N4.\ x_1 + Sx_2 = S(\ x_1 + x_2\ )$

$N5.\ x_1 \cdot 0 = 0$

$N6.\ x_1 \cdot Sx_2 = (\ x_1 \cdot x_2\ ) + x_1$

$N7.\ \sim (\ x_1 < 0\ )$

$N8.\ x_1 < Sx_2 \leftrightarrow x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2$

$N9.\ x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1$

1.4.4. Definição. A *Aritmética de Peano*, ou simplesmente ***PA***, é a teoria cuja linguagem ***L(PA)*** é ***L(N)*** (i.e., a mesma linguagem da teoria ***N***) e os axiomas não-lógicos são os axiomas de ***N*** acima, mais os *axiomas da indução*, cujo esquema é:

$$\mathbf{A_x}[0] \wedge \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]) \rightarrow \forall \mathbf{x}\mathbf{A}.$$

Shoenfield 1967 define a Aritmética de Peano sem o axioma *N9* da Teoria ***N***, porém, mostra logo em seguida que *N9* é um teorema da Aritmética de Peano, o que torna a definição acima equivalente à apresentada por ele.

Podemos, na linguagem ***L(N)***, definir precisamente os numerais, isto é, aqueles termos utilizados para designar os números. É o que faremos a seguir. Esta definição será usada então, mais abaixo, para se definir a teoria ***R***.

1.4.5. Definição. Um *numeral na linguagem **L(N)***, é um termo construído mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. *0* é um numeral;
2. Se **a** é um numeral, então o termo $S(\mathbf{a})$ é um numeral.

1.4.6. Convenção de Notação. Vamos usar a letra $\mathbf{k}_i$, com sub-índice $\boldsymbol{i}$, como variável sintática para indicar o numeral com i ocorrências do símbolo S.

1.4.7. Definição. Denominamos de $\boldsymbol{R}$ a teoria cuja linguagem $\boldsymbol{L(R)}$ é $\boldsymbol{L(N)}$ (i.e., a mesma que $\boldsymbol{N}$) e cujos esquemas de axiomas não-lógicos são:

R1. $\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}_j$, no qual $m + n = j$

R2. $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_n = \mathbf{k}_j$, no qual $m \cdot n = j$

R3. $\mathbf{k}_m \neq \mathbf{k}_n$, no qual $m \neq n$

R4. $\mathbf{x} \leq \mathbf{k}_n \leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \vee ... \vee \mathbf{x} = \mathbf{k}_n$

R5. $\mathbf{x} \leq \mathbf{k}_n \vee \mathbf{k}_n \leq \mathbf{x}$

Notemos que dentre os axiomas não-lógicos de $\boldsymbol{R}$ estão as fórmulas que mostram o resultado $\mathbf{k}_j$ da adição e da multiplicação de quaisquer numerais $\mathbf{k}_m$ e $\mathbf{k}_n$ de $\boldsymbol{L(N)}$, portanto, as fórmulas que podem ser demonstradas a partir dessas "verdades básicas" são teoremas de $\boldsymbol{R}$.

Vejamos agora, algumas questões sobre teorias e demonstrações.

5. (Meta)Demonstrações.

Nesta seção, iremos discutir algumas questões concernentes a demonstrações em teorias, quase todas essenciais ao nosso tema. Comecemos por uma observação sobre a diferença de uma demonstração *em* uma teoria e uma demonstração *sobre* uma teoria.

Neste trabalho, encontramo-nos em uma situação muito peculiar: grosso modo, uma tese é constituída de demonstrações, e, como um dos objetos de estudo desta tese é a demonstração, temos aqui, demonstrações sobre demonstrações. Porém, devemos notar que tratamos de demonstrações em uma teoria, feitas em uma linguagem construída artificialmente para isto, a linguagem objeto (*cf.* início da Seção 1), enquanto as demonstrações que realizamos sobre demonstrações, são demonstrações feitas na metalinguagem. Para diferenciar, então, os dois casos, denominaremos de *metademonstrações*, estas demonstrações feitas na metalinguagem, reservando o termo *demonstrações* para demonstrações em uma teoria. No mesmo sentido, falaremos de *metateoremas* para designar as proposições sobre teorias que metademonstramos. A questão de saber se toda metademonstração pode ser transformada em uma demonstração é um dos assuntos centrais desta tese, e será discutida mais adiante, quando tivermos mais elementos para tratá-la.

Dadas uma teoria ***T*** e uma fórmula **A** de ***T***, podemos nos perguntar se esta fórmula, ou a negação dela, segue dos axiomas de ***T*** pela aplicação das regras de inferência de ***T***. Isto motiva a definição a seguir.

1.5.8. Definição. Uma *fórmula **A** é decidível em uma teoria **T*** se ela, ou sua negação, é um teorema de ***T***. Caso contrário, ***A** é indecidível em **T***.

Notemos que segue imediatamente da definição anterior que os axiomas de uma teoria ***T***, bem como as suas negações, são decidíveis em ***T***.

1.5.9. Observação. Cabe perguntarmos se, dado uma teoria ***T***, todas as fórmulas de ***T*** são decidíveis em ***T***. Porém, esta questão não é tão razoável quanto parece ser à primeira vista. Tomemos, por exemplo, a fórmula $x_1 = 0$: vemos, já intuitivamente, que, nem ela, nem sua negação, $x_1 \neq 0$, são verdadeiras para todos os significados da variável x_1, logo, é de se esperar que nenhuma delas seja teorema de uma teoria correta. Porém, veremos, no capítulo seguinte, que, no caso de uma fórmula fechada (Definição 1.1.22), ou ela, ou sua negação, é verdadeira em uma interpretação dada da linguagem. Faz sentido, então, restringir a pergunta sobre a decidibilidade às fórmulas fechadas de ***T***, o que motiva a definição a seguir.

1.5.10. Definição. Uma teoria ***T*** é *completa*, se toda fórmula fechada **A** de ***T*** é decidível em ***T***; caso contrário, a teoria ***T*** é *incompleta*.

Veremos que há, tanto teorias completas, quanto teorias incompletas.

Dada uma teoria ***T***, uma outra questão importante é se existe um método de decisão para determinar se uma fórmula **A** de ***T*** é um teorema de ***T***, ou não. Isto motiva a definição a seguir. Observemos que, também, esta questão é central nesta tese, pois é ela quem nos permitirá identificar processos auto-organizadores não-mecânicos. Entretanto, para que a definição a seguir esteja bem estabelecida, é necessário esclarecer a noção de "método de decisão". Discutiremos isto mais adiante, no capítulo específico sobre esse tema.

1.5.11. Definição. Uma teoria ***T*** é *decidível*, se existe um método de decisão para determinar se uma fórmula **A** de ***T*** é, ou não, um teorema de ***T***; caso contrário, a teoria ***T*** é *indecidível*.

Não devemos confundir a noção de teoria decidível com a noção de fórmula decidível em uma teoria. Com efeito, a noção de fórmula decidível em uma teoria depende apenas da noção de demonstração, enquanto a noção de teoria decidível envolve também a noção de método de decisão. Além disto, a noção de fórmula decidível em uma teoria depende da fórmula em questão, enquanto a noção de teoria decidível envolve todas as fórmulas do sistema. Vimos que sempre há fórmulas decidíveis em uma teoria ***T*** (seus axiomas e as negações destes), isto é, não existem teorias sem fórmulas decidíveis, cabe então perguntar sobre a relação entre teorias decidíveis e teorias nas quais todas as fórmulas são decidíveis, ou melhor, levando em conta a Observação 1.5.9, teorias nos quais todas as fórmulas fechadas são decidíveis, i.e., teorias completas. Veremos, mais adiante, que ocorrem todas as combinações possíveis: há teorias completas indecidíveis, há teorias completas decidíveis, há teorias incompletas decidíveis e há teorias incompletas indecidíveis, desvinculando então uma possível implicação entre os conceitos de completude e decidibilidade de teorias. Porém, veremos que há certas relações entre as duas noções, mediadas pela noção de método de decisão.

Dependendo da escolha dos axiomas e das regras de inferência de uma teoria ***T***, pode ocorrer que todas as fórmulas da linguagem ***L(T)*** sejam demonstráveis. Isto motiva a definição a seguir.

1.5.12. Definição. Uma teoria ***T*** é *trivial* se toda fórmula **A** de ***L(T)*** é teorema de ***T***; caso contrário, a teoria ***T*** é *não-trivial*.

Notemos que se ***T*** é trivial, então toda fórmula de ***L(T)*** é decidível em ***T***, e, portanto, ***T*** é completa. Temos ainda que ***T*** é decidível, pois toda fórmula de ***L(T)***, é teorema de ***T***.

1.5.13. Definição. Uma teoria ***T*** é *inconsistente* ou *contraditória*, se existe uma fórmula **A** de ***T***, tal que **A** e **~A** são teoremas de ***T***; caso contrário, a teoria ***T*** é *consistente* ou *não-contraditória*.

Observemos que a definição de teoria inconsistente de **Shoenfield 1967** corresponde ao que definimos aqui como teoria trivial, e que não há uma definição que corresponda ao que definimos, como **Kleene 1952**, como teoria inconsistente. Porém, como veremos a seguir, tais definições são equivalentes.

1.5.14. Metateorema. Uma teoria ***T*** é inconsistente se, e somente se, é trivial.

Metademonstração. A volta é imediata, pois se ***T*** é trivial, então toda fórmula de ***T*** é teorema de ***T***, logo, para qualquer fórmula **A** de ***T***, tanto **A**, quanto **~A**, são teoremas de ***T***, e, portanto, o sistema ***T*** é inconsistente. Demonstremos a ida. Seja **A** a fórmula que, tanto ela, quanto sua negação, são teorema de ***T***. Dada qualquer fórmula **B** de ***T***, como **A** é teorema de ***T***, então, pela Regra de Expansão, **A∨B** é teorema de ***T***, e como **~A** é teorema de ***T***, então, pela mesma regra, **~A∨B** é teorema de ***T***. Como, tanto **A∨B**, quanto **~A∨B**, são teoremas de ***T***, temos, pela Regra do Corte, que **B∨B** é teorema de ***T***. Logo, pela Regra da Contração, temos que **B** é um teorema de ***T***. Assim, se ***T*** é inconsistente, então, para qualquer fórmula **B** de ***T***, **B** é teorema de ***T***; logo, ***T*** é trivial, o que demonstra a ida. Podemos concluir, portanto, que uma teoria ***T*** é inconsistente se, e somente se, é trivial.

1.5.15. Definição. Uma teoria ***T'*** é uma *extensão* de uma teoria ***T***, se a linguagem ***L(T')*** é uma extensão da linguagem ***L(T)*** (Definição 1.1.14), e todos os teoremas de ***T*** são teoremas de ***T'***.

Notemos que, para que ***T'*** seja uma extensão de ***T***, é necessário e suficiente que todos os axiomas de ***T*** sejam teoremas de ***T'***, pois, assim, qualquer teorema de ***T***, demonstrado a partir dos axiomas de ***T***, pode ser demonstrado a partir dos teoremas de ***T'***, e, pelo final do comentário à Definição 1.3.2, são teoremas de ***T'***. Notemos ainda, que o qualquer teoria de primeira ordem é uma extensão do sistema formal ***S*** (Convenção de Notação 1.4.1), que não tem axiomas não-lógicos.

1.5.16. Convenção de Notação. Denotaremos por ***T[*****A*****]*** a teoria que tem a mesma linguagem de ***T*** e cujos axiomas são os axiomas de ***T*** mais a fórmula **A**. Claramente, pela observação anterior, ***T[*****A*****]*** é uma extensão de ***T***.

Os metateoremas a seguir mostram como as teorias ***N***, ***PA*** e ***R***, definidas anteriormente, exemplificam a definição de extensão.

1.4.17. Metateorema. ***PA*** é uma extensão da teoria ***N***.

Metademonstração: Trivial, pois todos os axiomas de ***N*** são axiomas de ***PA***, logo, ***PA*** demonstra todos os teoremas que ***N*** demonstra.

1.4.18. Metateorema. A teoria ***N*** é uma extensão da teoria ***R***.

A metademonstração da proposição anterior não será feita. Em **Shoenfield 1967**, pp.126-127, podemos encontrar a metademonstração que ***N*** demonstra os axiomas *R1*, *R2* e *R3* de ***R*** e os elementos necessários à demonstração de *R4* e *R5*. A metademonstração completa, *mutatis mutandis*, pode ser encontrada em **Smullyan 1992**, Cap.V, Seção II, §4.

Segue imediatamente da definição acima que, se uma teoria ***T'*** é uma extensão de uma teoria ***T*** e ***T'*** é consistente, então ***T*** é consistente. A recíproca nem sempre é verdadeira, o que motiva a definição a seguir.

1.5.19. Definição. Uma teoria ***T'*** é uma *extensão conservativa de uma teoria* ***T***, se ***T'*** é uma extensão de ***T***, e todas as fórmulas de ***T*** que são teoremas de ***T'***, são teoremas de ***T***.

Segue imediatamente da definição acima que, se uma teoria ***T'*** é uma extensão conservativa de uma teoria ***T***, então: ***T'*** é consistente se, e somente se, ***T*** é consistente. Notemos ainda que se ***T'*** é uma extensão de ***T*** e ***T*** é uma extensão de ***T'*** então ***T'*** é uma extensão conservativa de ***T*** e ***T*** é uma extensão conservativa de ***T'***.

1.5.20. Metateorema. Seja **A'** o fecho de uma fórmula **A** de ***T***. Então, **A** é um teorema de ***T***, se, e somente se, ***T[~A']*** é inconsistente.

Metademonstração. É um corolário do Teorema da Redução para a Consistência (**Shoenfield 1967**, p.43). Observemos, porém, que a metademonstração da ida é simples: se **A** é teorema de ***T***, **A** também é teorema de ***T'***, pois ***T'*** é extensão de ***T***. Portanto, tanto **A** é teorema de ***T'***, quanto ~**A'** é teorema de ***T'*** (pois ~**A'** é axioma de ***T'***), e, assim, ***T'*** é inconsistente.

Vemos, pelo metateorema anterior, que há uma estreita relação entre o conceito de demonstrabilidade e o conceito de consistência de uma teoria. Por exemplo, a questão da decidibilidade de uma teoria ***T*** (i.e., a questão da existência de um método de decisão para determinar se uma fórmula **A** da linguagem ***L(T)*** é, ou não, um teorema de ***T***), é equivalente à questão da existência de um método para determinar se uma teoria é inconsistente. Com efeito, pelo metateorema, existe um método de decisão para se determinar se **A** é, ou não, teorema de ***T***, se, e somente se, existe um método para se determinar se ***T'*** é inconsistente, sendo ***T'*** a extensão de ***T*** cujos axiomas são os axiomas de ***T*** mais a fórmula ~**A**.

2. SEMÂNTICA DE UM SISTEMA FORMAL E A VERACIDADE DE FÓRMULAS

Neste capítulo, trataremos da semântica associada a uma teoria de primeira ordem e, em particular, de duas estruturas que são modelos para as teorias ***N***, ***PA*** e ***R*** introduzidas anteriormente. Como no caso da exposição dos sistemas formais, nossa intenção aqui é, apenas apresentar noções, definições, resultados e exemplos básicos da Semântica de Sistemas Formais que necessitamos para o desenvolvimento deste trabalho e que serão utilizados posteriormente.

Comecemos pela apresentação de alguns elementos essenciais à introdução de uma semântica para uma linguagem de primeira ordem: conjuntos, relações e funções. Nosso objetivo aqui é apenas fixar a nomenclatura e não, introduzir uma teoria axiomática de conjuntos qualquer. Entretanto, sempre que nos utilizarmos destas noções, tomaremos o cuidado de nos basearmos em resultados estabelecidos nas teorias axiomáticas conhecidas (como, por exemplo, a Teoria Zermelo-Fraenkel exposta em **Shoenfield 1967**, Cap.9). Estaremos assumindo, com efeito, apenas algumas asserções básicas relativas ao conjunto dos números naturais.

Um *conjunto*, ou *classe*, constitui-se de uma coleção qualquer de objetos. Um *mapeamento de um conjunto A em um conjunto B* é uma associação de um único elemento de *B* a cada elemento de *A*.

2.0.1. Convenção de Notação. Se *F* designa um mapeamento de *A* em *B* e *F* associa o elemento *b* de *B* ao elemento *a* de *A*, dizemos que *b* é o *valor* de *F* para o *argumento a*, e, escrevemos, *F(a)* para o elemento *b*.

Uma *n-upla ordenada em A*, que denotaremos por $(a_1, a_2, ..., a_n)$, é uma seqüência $a_1, a_2, ..., a_n$ de *n* objetos (não necessariamente distintos) de *A*, nesta ordem. Assim, temos que $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ se, e somente se, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$. Em especial, chamaremos (a_1, a_2) de *par ordenado* e (a_1, a_2, a_3) de *tripla ordenada*. Notemos então que um mapeamento de um conjunto *A* em um conjunto *B* determina um conjunto de pares ordenados (a, b), no qual *b* é o elemento de *B* associado ao elemento *a* de *A*.

Uma *função n-ária de A em B* é um mapeamento do conjunto de *n*-uplas ordenadas do conjunto *A* em *B*. Dizemos *unária* para $n = 1$ e *binária* para $n = 2$. Observemos que, analogamente ao caso de uma função de *A* em *B*, uma função *n*-ária de *A* em *B*, determina um conjunto de *(n+1)*-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n, b)$, na qual o elemento b de B está associado a n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de elementos de A. Observemos, ainda, que, inversamente, dado um conjunto de *(n+1)*-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n, b)$, no qual, para cada n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de elementos de A está associada um, e apenas um, elemento b de B, então, este conjunto determina uma função n-ária de A em B.

Uma *relação entre n elementos de um conjunto C*, ou ainda, *um predicado n-ário em um conjunto C* é um conjunto de n-uplas ordenadas de elementos de C. Dizemos *unária* para $n = 1$ e *binária* para $n = 2$ e, ainda, às vezes, designaremos um predicado unário em C, simplesmente, por *predicado em C* e um predicado binário em C por *relação binária em C*. Assim, apesar de não ser usual na Língua Portuguesa, denominamos por predicado n-ário uma relação entre n elementos. Este procedimento é usual em Lógica Matemática e é feito considerando que um predicado pode ser identificado com um determinado conjunto (o conjunto dos elementos que têm a qualidade indicada pelo predicado) e que uma relação entre n elementos, $n > 1$, também pode ser identificada como um conjunto (o conjunto de n-uplas ordenadas nas quais os n elementos têm, entre eles, a referida relação). Como um elemento pode ser visto como o caso limite de uma seqüência de um elemento, estabelecemos então uma equivalência entre predicados e relações, um predicado como caso limite de relação, e uma relação como uma extensão de predicado a n-uplas ordenadas.

2.0.2. Convenção de Notação. Se o símbolo P representa uma relação n-ária, então escrevemos $P(a_1, a_2, ..., a_n)$, para afirmar que $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pertence a P.

1. Estruturas de Primeira Ordem.

Antes de mostrarmos como as noções de conjunto, função e relação permitem estabelecer uma semântica para uma linguagem de primeira ordem, vejamos algumas noções relativas às valorações das fórmulas de uma linguagem, o que também será necessário à descrição da semântica.

Na semântica associada a ***L(F)*** trataremos da verdade ou falsidade das fórmulas de ***L(F)***. Falamos, neste caso, do *valor-verdade* das fórmulas.

2.1.1. Convenção de Notação. Usaremos **F** para designar o valor-verdade *falso*, **V** para designar o valor-verdade *verdadeiro* e {**V**, **F**} para designar o conjunto dos valores-verdade.

Introduziremos agora algumas funções-verdade que nos permitirão, futuramente, definir os valores-verdade de fórmulas: $H_{\sim}$, $H_{\vee}$, $H_{\wedge}$, $H_{\rightarrow}$, $H_{\leftrightarrow}$.

2.1.2. Definição. Uma *função-verdade* é uma função *n*-ária do conjunto {**V**, **F**} de valores-verdade em {**V**, **F**}.

2.1.3. Definição. A *função associada à negação*, $H_{\sim}$, é a função-verdade unária tal que:

$$H_{\sim}(\mathbf{V}) = \mathbf{F}$$

$$H_{\sim}(\mathbf{F}) = \mathbf{V}$$

2.1.4. Definição. As *funções associadas à disjunção*, *à conjunção*, *à implicação* e *à equivalência*, que denotamos, respectivamente, por $H_{\vee}$, $H_{\wedge}$, $H_{\rightarrow}$ e $H_{\leftrightarrow}$, são as funções-verdade binárias tais que:

$$\begin{array}{llll}
H_{\vee}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} & H_{\wedge}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} & H_{\rightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} & H_{\leftrightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} \\
H_{\vee}(\mathbf{V}, \mathbf{F}) = \mathbf{V} & H_{\wedge}(\mathbf{V}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} & H_{\rightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} & H_{\leftrightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} \\
H_{\vee}(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} & H_{\wedge}(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{F} & H_{\rightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} & H_{\leftrightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{F} \\
H_{\vee}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} & H_{\wedge}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} & H_{\rightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{V} & H_{\leftrightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{V}
\end{array}$$

Notemos que as funções $H_{\wedge}$, $H_{\rightarrow}$ e $H_{\leftrightarrow}$ podem ser definidas por composições de $H_{\sim}$ e $H_{\vee}$, como estabelecido na Convenção de Notação 1.1.15. Assim: $H_{\rightarrow}(a, b) = H_{\vee}(H_{\sim}(a), b)$, $H_{\wedge}(a, b) = H_{\sim}(H_{\vee}(H_{\sim}(a), H_{\sim}(b)))$ e $H_{\rightarrow}(a, b) = H_{\leftrightarrow}(H_{\rightarrow}(a, b), H_{\rightarrow}(b, a))$.

Vamos, agora, definir uma semântica para uma teoria de primeira ordem, o que será feito com a ajuda da noção de estrutura para uma linguagem de primeira ordem. A idéia geral subjacente à noção de estrutura é estabelecer um domínio de interpretação para uma linguagem de primeira ordem, que chamaremos de *universo da estrutura*.

2.1.5. Definição. Seja ***L*** uma linguagem de primeira ordem. Uma *estrutura* $\mathbb{E}$ *para* ***L*** consiste de:

1. Um conjunto não-vazio $|\mathbb{E}|$, chamado *universo de* $\mathbb{E}$, cujos elementos são chamados *indivíduos* de $\mathbb{E}$;
2. Para cada símbolo de função *n*-ária **f** de ***L***, uma função *n*-ária $\mathbf{f}_{\mathbb{E}}$ de $|\mathbb{E}|$ em $|\mathbb{E}|$;
3. Para cada símbolo de predicado *n*-ário **p** de ***L***, distinto da igualdade =, um predicado *n*-ário $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}$ em $|\mathbb{E}|$.

2.1.6. Definição. Seja $\mathbb{E}$ uma estrutura para uma linguagem de primeira ordem ***L***. A *linguagem de primeira ordem* ***L***$(\mathbb{E})$ é a linguagem cujos símbolos não-lógicos são os de ***L***, acrescidos de uma constante para cada indivíduo *a* de $\mathbb{E}$ (que será chamada de *nome* de *a*).

2.1.7. Convenção de Notação. Usaremos as letras latinas minúsculas em negrito **i** e **j** como variáveis sintáticas cujo domínio são os nomes de indivíduos de ***L***$(\mathbb{E})$.

2.1.8. Definição. Um termo de ***L*** é *livre de variável* se não contém variável.

Iremos agora definir um indivíduo $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ de $\mathbb{E}$, para cada termo livre de variável **a** de ***L***$(\mathbb{E})$. A definição é por indução no comprimento de **a**.

2.1.9. Definição. O *indivíduo* $\mathbb{E}(\boldsymbol{a})$ de $\mathbb{E}$, para cada termo **a** de ***L***$(\mathbb{E})$ livre de variável, é definido segundo as seguintes cláusulas:

1. Se **a** é um nome, então $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ é o indivíduo cujo nome é **a**;
2. Se **a** não é um nome, como **a** é livre de variável, e, portanto, tem a forma $\mathbf{fa_1...a}_n$, na qual $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$ são termos livres de variáveis, $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ é o indivíduo $\mathbf{f}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{a_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{a}_n))$.

Definiremos agora o valor-verdade $\mathbb{E}(\mathbf{A})$ para uma fórmula fechada **A** de ***L***$(\mathbb{E})$. A definição é por indução no comprimento de **A**.

2.1.10. Definição. O *valor-verdade* $\mathbb{E}(\boldsymbol{A})$ para uma fórmula fechada **A** de ***L***$(\mathbb{E})$ é dado pelas seguintes cláusulas:

1. Se **A** é da forma **a = b** (na qual, **a** e **b** são termos livres de variáveis), então $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{a} = \mathbf{b}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{a}) = \mathbb{E}(\mathbf{b})$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;
2. Se **A** é da forma $\mathbf{pa_1...a}_n$, com **p** distinto de =, então $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{pa_1...a}_n) = \mathbf{V}$ se $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{a}_1), ..., \mathbb{E}(\mathbf{a}_n))$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;
3. Se **A** é da forma **~B**, então $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\sim\mathbf{B}) = H_{\sim}(\mathbb{E}(\mathbf{B}))$;
4. Se **A** é da forma $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, então $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}))$;
5. Se **A** é da forma $\exists$**xB**, então $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{B_x[i]}) = \mathbf{V}$, para algum **i** em ***L(***$\mathbb{E}$***)***, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$.

Pela observação feita logo em seguida à Definição 2.1.4, temos que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) = H_{\rightarrow}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$
$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = H_{\wedge}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$
$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}) = H_{\leftrightarrow}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$

e, podemos ver, ainda, que:

$\mathbb{E}(\mathbf{A_1} \vee ... \vee \mathbf{A}_n) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbb{E}(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}$, para pelo menos um i tal que $1 \leq i \leq n$;

$\mathbb{E}(\mathbf{A_1} \wedge ... \wedge \mathbf{A}_n) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbb{E}(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$;

$\mathbb{E}(\forall \mathbf{xA}) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[i]}) = \mathbf{V}$, para todo **i** em ***L(***$\mathbb{E}$***)***.

2.1.11. Definição. Uma *$\mathbb{E}$-instância* de uma fórmula **A** de ***L***, é uma fórmula fechada de ***L(***$\mathbb{E}$***)*** da forma $\mathbf{A[i_1}$, ..., $\mathbf{i}_n]$.

2.1.12. Definição. Uma fórmula **A** de ***L*** é *válida em* $\mathbb{E}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{V}$, para toda $\mathbb{E}$-instância **A’** de **A**.

Em particular, se **A** é fechada, **A** é válida em $\mathbb{E}$ se, e somente se, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$.

2.1.13. Definição. Uma fórmula de uma linguagem ***L*** é *válida* se é válida em toda estrutura para ***L***.

2.1.14. Definição. Um *modelo para uma teoria* ***T*** é uma estrutura para ***L(T)*** na qual todos os axiomas não-lógicos de ***T*** são válidos.

2.1.15. Definição. Uma fórmula é *válida em* ***T*** se é válida em todo modelo de ***T***.

2. Duas Estruturas para as Teorias de Números Naturais.

Apresentamos agora duas estruturas que, como veremos na próxima seção, são modelos para as teorias de números naturais ***N***, ***PA*** e ***R***, definidas no capítulo anterior. A primeira estrutura, que introduzimos, é justamente o conjunto dos números naturais, que constitui o modelo motivador dessas teorias. A segunda é introduzida como uma representação natural dos números naturais e permite mostrar como as noções utilizadas na definição de linguagem de um sistema formal subentendem uma estrutura isomorfa a estrutura dos números naturais.

A estrutura $\mathbb{N}$ tal que o domínio de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais, *0* é associada ao número zero, *S* à função sucessor, + à adição de números naturais, · à multiplicação de números naturais e < à relação binária menor é uma estrutura para ***L(N)***.

Vamos introduzir agora uma segunda estrutura que também é modelo para as teorias ***N***, ***PA*** e ***R*** e que se baseia nas noções relativas aos símbolos gráficos. O que motiva sua introdução é, como veremos mais adiante, explicitar rigorosamente como noções relativas aos símbolos já fornecem elementos para admitir a consistência de ***R***, ***N*** e ***PA***.

Dados dois símbolos gráficos *a* e *b*, a *adição de a e b* é o símbolo gráfico cuja ocorrência é a concatenação de *a* e *b*, ou seja, *ab*.

2.2.1. Definição. Consideremos o símbolo gráfico | , que denominaremos de *traço*. Um *numeral-traço* é um símbolo definido indutivamente pelas seguintes cláusulas e apenas elas:

1. O traço é um numeral-traço;

2. Se **u** e **v** são numerais-traço, então a adição de **u** e **v** é um numeral-traço.

Portanto, são ocorrências de numerais-traço: |, ||, |||, ||||, |||||, ||||||, |||||||, etc.

2.2.2. Definição. Chamaremos o símbolo gráfico *0* de *zero-marca*. Um *numeral-marca* é a zero-marca ou um numeral-traço.

2.2.3. Definição. O *sucessor-marca S(a)* de um numeral-marca *a* é aquele tal que:

1. Se *a* é a zero-marca, então *S(a)* é o traço;
2. Se *a* é um numeral-traço, então *S(a)* é a adição do símbolo *a* e traço.

Notemos que, para qualquer numeral-marca *a*, temos que *S(a)* não é a zero-marca e que, para todos numerais-marca *a* e *b*, se *S(a)* é igual a *S(b)*, então $a = b$. Mais ainda, temos que se *a* não é a zero-marca, então existe um *b* tal que $a = S(b)$.

2.2.4. Definição. O *antecessor-marca A(a)* de um numeral-traço *a* é aquele tal que:

1. Se *a* é o traço, então *A(a)* é a zero-marca;
2. Se *a* não é o traço, então *A(a)* é o numeral-traço tal que o sucessor-marca é *a*.

2.2.5. Definição. A adição-marca $(a+b)$ de numerais-marca *a* e *b* é definida pelas seguintes cláusulas:

1. Se *b* é a zero-marca, então $(a+b)$ é *a*;
2. Se *b* é um numeral-traço e *a* é a zero-marca, então $(a+b)$ é *b*;
3. Se *a* e *b* são numerais-traço, então $(a+b)$ é a adição dos símbolos *a* e *b*.

Notemos que $(a+|)$ é igual a $S(a)$ e que $S(a+b)$ é igual a $(a+S(b))$.

2.2.6. Definição. A *multiplicação-marca* $(a \cdot b)$ de numerais-marca *a* e *b* é definida, indutivamente em relação a *b*, pelas seguintes cláusulas:

1. Se *b* é *0*, então $(a \cdot b)$ é *0*;
2. Se *b* é um numeral-traço, então $(a \cdot b)$ é o numeral-traço $((a \cdot A(b)) + a)$, na qual $A(b)$ é o antecessor de *b* definido acima.

Notemos que, pela cláusula 2 acima, $(a \cdot S(b))$ é igual a $((a \cdot b) + a)$.

2.2.7. Definição. Dados dois numerais-marca a e b, dizemos que *a é menor que b*, e denotamos por $(a < b)$, se:

1. Se a é 0 e b é um numeral-traço; ou
2. Se a e b são numerais-traço, a diferente de b, e se podemos associar cada um dos distintos traços de a a traços distintos do numeral-traço b.

Notemos que: (1) para todo numeral-marca a, não ocorre $a < 0$; (2) para todos os numerais-marca a e b, ou a é igual a b, ou $a < b$, ou $b < a$; e (3) $a < S(b)$ se, e somente se, $a < b$ ou a é igual a b.

A estrutura $\mathbb{M}$, tal que:

1. O domínio de $\mathbb{M}$ é o conjunto dos numerais-marca;
2. A constante 0 de $\boldsymbol{L(N)}$ está associada à zero-marca;
3. O símbolo de função unária S está associado ao sucessor-marca;
4. O símbolo de função binário $+$ está associado à adição-marca;
5. O símbolo de função binária $\cdot$ está associado à multiplicação-marca; e
6. A relação binária $<$ está associada à relação menor entre numerais-marca.

é uma estrutura para $\boldsymbol{L(N)}$.

3. Alguns Metateoremas.

Vamos agora apresentar alguns resultados sobre as teorias ***S***, ***N***, ***PA*** e ***R*** e as estruturas $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$, anteriormente introduzidas. Como veremos, esses resultados desempenharão um papel central neste trabalho. Em particular, vamos mostrar alguns metateoremas relativos à correção e completude das teorias de primeira ordem, introduziremos $\mathbb{M}$ como um representante natural de $\mathbb{N}$, a partir de um isomorfismo entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$, e apresentaremos alguns metateoremas que permitem estabelecer a consistência das teorias ***N***, ***PA*** e ***R***.

2.3.1. Metateorema da Correção. Todo teorema de ***S*** (Convenção de Notação 1.4.1) é válido.

Metademonstração. Pela observação feita após a Definição 1.3.2, para mostrar que todo teorema de ***S*** é válido, basta mostrar que os axiomas de ***S*** são válidos e que as regras de inferência de ***S*** preservam a validade das fórmulas, i.e., se as hipóteses de uma regra de inferência são válidas, então a conclusão também o é. Seja $\mathbb{E}$ uma estrutura qualquer para a linguagem ***L(S)***. Mostremos, inicialmente, que os axiomas lógicos são válidos em $\mathbb{E}$.

Axiomas proposicionais. Uma $\mathbb{E}$-instância dos axiomas proposicionais tem a forma $\mathbf{\sim A \vee A}$. Neste caso, temos que $\mathbb{E}(\mathbf{\sim A \vee A}) = H_{\vee}(H_{\sim}(\mathbb{E}(\mathbf{A})), \mathbb{E}(\mathbf{A})) = \mathbf{V}$, portanto, os axiomas proposicionais são válidos em $\mathbb{E}$.

Axiomas da substituição. Uma $\mathbb{E}$-instância dos axiomas da substituição tem a forma $\mathbf{A_x[a] \to \exists xA}$. Suponha, por absurdo, que esta não seja válida em $\mathbb{E}$, logo, $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[a] \to \exists xA}) = \mathbf{F}$, e, portanto, $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[a]}) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{\exists xA}) = \mathbf{F}$. Se $\mathbf{i}$ é o nome de $\mathbb{E}(\mathbf{a})$, então $\mathbb{E}(\mathbf{\exists xA}) = \mathbf{F}$ implica em $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[i]}) = \mathbf{F}$, enquanto $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[a]}) = \mathbf{V}$, implica $\mathbb{E}(\mathbf{A_x[i]}) = \mathbf{V}$, que é uma contradição. Portanto, os axiomas da substituição são válidos em $\mathbb{E}$.

Axiomas da identidade: $\mathbf{x = x}$. Uma $\mathbb{E}$-instância deste axioma é da forma $\mathbf{i = i}$ e, como $\mathbb{E}(\mathbf{i}) = \mathbb{E}(\mathbf{i})$, então $\mathbb{E}(\mathbf{i = i}) = \mathbf{V}$, logo, os axiomas da identidade são válidos em $\mathbb{E}$.

Axiomas da igualdade para símbolos de funções: $\mathbf{x_1 = y_1 \to \ldots \to x_{\mathit{n}} = y_{\mathit{n}} \to fx_1...x_{\mathit{n}} = fy_1...y_{\mathit{n}}}$. Uma $\mathbb{E}$-instância desses axiomas tem a forma $\mathbf{i_1 = j_1 \to \ldots \to i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}} \to fi_1...i_{\mathit{n}} = fj_1...j_{\mathit{n}}}$. Suponha, por absurdo, que esta não seja válida em $\mathbb{E}$, logo, temos que $\mathbb{E}(\mathbf{i_1 = j_1 \to \ldots \to i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}} \to fi_1...i_{\mathit{n}} = fj_1...j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{F}$, e assim, $\mathbb{E}(\mathbf{i_1 = j_1}) = \mathbb{E}(\mathbf{i_2 = j_2}) = ... = \mathbb{E}(\mathbf{i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{fi_1...i_{\mathit{n}} = fj_1...j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{F}$. Ora, mas, se temos as igualdades $\mathbb{E}(\mathbf{i_1 = j_1}) = \mathbb{E}(\mathbf{i_2 = j_2}) = ... = \mathbb{E}(\mathbf{i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{V}$, então temos que $\mathbb{E}(\mathbf{fi_1...i_{\mathit{n}}}) = \mathbf{f}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{i_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{i_{\mathit{n}}})) = \mathbf{f}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{j_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{j_{\mathit{n}}})) = \mathbb{E}(\mathbf{fj_1...j_{\mathit{n}}})$, e, logo, $\mathbb{E}(\mathbf{fi_1...i_{\mathit{n}} = fj_1...j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{V}$, que contradiz a igualdade $\mathbb{E}(\mathbf{fi_1...i_{\mathit{n}} = fj_1...j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{F}$ obtida acima. Assim, os axiomas da igualdade para símbolos de funções são válidos em $\mathbb{E}$.

Axiomas da igualdade para símbolos de predicados: $\mathbf{x_1 = y_1 \to \ldots \to x_{\mathit{n}} = y_{\mathit{n}} \to px_1...x_{\mathit{n}} \to py_1...y_{\mathit{n}}}$. Uma $\mathbb{E}$-instância desses axiomas tem a forma $\mathbf{i_1 = j_1 \to \ldots \to i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}} \to px_1...x_{\mathit{n}} \to py_1...y_{\mathit{n}}}$. Suponha, por absurdo, que esta não seja válida em $\mathbb{E}$, logo, $\mathbb{E}(\mathbf{i_1 = j_1 \to \ldots \to i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}} \to px_1...x_{\mathit{n}} \to py_1...y_{\mathit{n}}}) = \mathbf{F}$, e, assim, temos que $\mathbb{E}(\mathbf{i_1 = j_1}) = \mathbb{E}(\mathbf{i_2 = j_2}) = ... = \mathbb{E}(\mathbf{i_{\mathit{n}} = j_{\mathit{n}}}) = \mathbb{E}(\mathbf{pi_1...i_{\mathit{n}}}) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{pj_1...j_{\mathit{n}}}) = \mathbf{F}$. Mas, se $\mathbb{E}(\mathbf{pi_1...i_{\mathit{n}}}) = \mathbf{V}$, então $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{i_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{i_{\mathit{n}}}))$, e, pelas igualdades $\mathbb{E}(\mathbf{i_1} = \mathbf{j_1}) = \mathbb{E}(\mathbf{i_2} = \mathbf{j_2}) = ... = \mathbb{E}(\mathbf{i}_n = \mathbf{j}_n) = \mathbf{V}$, temos que $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{j_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{j}_n))$, que implica $\mathbb{E}(\mathbf{pj_1...j}_n) = \mathbf{V}$, que contradiz $\mathbb{E}(\mathbf{pi_1...i}_n) = \mathbf{F}$ obtida acima. Temos, assim, que os axiomas da igualdade para símbolos de predicados são válidos em $\mathbb{E}$.

Como os axiomas de ***S*** são válidos em uma estrutura $\mathbb{E}$ qualquer de ***L(S)***, então eles são válidos em toda estrutura $\mathbb{E}$ de ***L(S)***, logo, por definição, são válidos. Mostremos agora que as regras de inferência preservam a validade, i.e., que se as hipóteses das regras são válidas, então sua conclusão também o é.

Regra de Expansão. Suponha que a hipótese **A** seja válida em $\mathbb{E}$ e seja **B'** uma $\mathbb{E}$-instância qualquer de uma fórmula **B**. Então, para toda $\mathbb{E}$-instância **A'** de **A** temos que $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{V}$, logo, para a conclusão $\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}$, temos $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{A'}), \mathbb{E}(\mathbf{B'})) = H_{\vee}(\mathbf{V}, \mathbb{E}(\mathbf{B'})) = \mathbf{V}$, para qualquer **B'**, o que implica então que $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ é válida em $\mathbb{E}$ e, portanto, que a Regra de Expansão preserva a validade em $\mathbb{E}$.

Regra de Contração. Suponha, por absurdo, que a hipótese $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ seja válida em $\mathbb{E}$ e que a conclusão **A** não seja válida em $\mathbb{E}$. Se **A'** é uma $\mathbb{E}$-instância de **A**, então temos que $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{A'}) = \mathbf{V}$ e que $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{F}$. Ora, mas, desta última, temos para a primeira igualdade $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{A'}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{A'}), \mathbb{E}(\mathbf{A'})) = H_{\vee}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F}$, que é uma contradição. Portanto, a Regra de Contração preserva a validade em $\mathbb{E}$.

Regra Associativa. Suponha, por absurdo, que a hipótese $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ seja válida e que a conclusão $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ não o seja. Sejam então **A'**, **B'** e **C'** $\mathbb{E}$-instâncias, respectivamente, de **A**, **B** e **C**. Temos que $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee (\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'})) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{E}((\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) \vee \mathbf{C'}) = \mathbf{F}$. Ora, desta última, temos que $\mathbb{E}((\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) \vee \mathbf{C'}) = H_{\vee}((H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{A'}), \mathbb{E}(\mathbf{B'})), \mathbb{E}(\mathbf{C'}))) = \mathbf{F}$, que ocorre, se e somente se $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{F}$, $\mathbb{E}(\mathbf{B'}) = \mathbf{F}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{C'}) = \mathbf{F}$, o que implica que $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee (\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'})) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{A'}), H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{B'}), \mathbb{E}(\mathbf{C'}))) = H_{\vee}(\mathbf{F}, H_{\vee}(\mathbf{F}, \mathbf{F})) = \mathbf{F}$, que contradiz a igualdade $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee (\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'})) = \mathbf{V}$ obtida acima. Logo, a Regra Associativa preserva a validade em $\mathbb{E}$.

Regra do Corte. Suponha, por absurdo, que as hipóteses $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ e $\mathbf{\sim A} \vee \mathbf{C}$ sejam válidas e que a conclusão $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ não o seja. Sejam então **A'**, **B'** e **C'**, respectivamente, $\mathbb{E}$-instâncias de **A**, **B** e **C**. Temos que $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) = \mathbf{V}$, $\mathbb{E}(\mathbf{\sim A'} \vee \mathbf{C'}) = \mathbf{V}$ e que $\mathbb{E}(\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'}) = \mathbf{F}$. Ora, desta última, temos que $\mathbb{E}(\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{B'}), \mathbb{E}(\mathbf{C'}))) = \mathbf{F}$, que ocorre se, e somente se $\mathbb{E}(\mathbf{B'}) = \mathbf{F}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{C'}) = \mathbf{F}$. Temos então dois casos: (1) $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{F}$ ou (2) $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{V}$. Se $\mathbb{E}(\mathbf{A'}) = \mathbf{F}$ então $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{A'}), \mathbb{E}(\mathbf{B'})) = H_{\vee}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F}$, contrariando $\mathbb{E}(\mathbf{A'} \vee \mathbf{B'}) =$

V. Se $\mathbb{E}$(**A'**) = **V**, então temos que $\mathbb{E}$(**~A'**) = **F** e $\mathbb{E}$(**~A'** ∨ **C'**) = $H_\vee$($\mathbb{E}$(**~A'**)), $\mathbb{E}$(**C'**)) = $H_\vee$(**F**, **F**) = **F**, contrariando $\mathbb{E}$(**~A'** ∨ **C'**) = **V**. Como nos dois casos temos uma contradição, a partir da hipótese de que a regra não preserva a validade em $\mathbb{E}$, temos, então, que a Regra do Corte preserva a validade em $\mathbb{E}$.

Regra de Introdução de ∃: se **x** não é livre em **B**, inferir ∃**xA** → **B** de **A** → **B**. Suponha, por absurdo, que a hipótese **A** → **B** seja válida em $\mathbb{E}$ e que a conclusão ∃**xA** → **B** não seja válida em $\mathbb{E}$. Sejam então **A'** e **B'**, respectivamente, $\mathbb{E}$-instâncias de **A** e **B**. Temos, então, que $\mathbb{E}$(∃**xA'** → **B'**) = **F**, e, assim, $\mathbb{E}$(∃**xA'**) = **V** e $\mathbb{E}$(**B'**) = **F**. Logo, existe um **i** tal que $\mathbb{E}$($\mathbf{A'_x[i]}$) = **V** e, como **A** → **B** é válida, temos que $\mathbb{E}$($\mathbf{A'_x[i]}$ → **B'**) = **V**, e, então, temos que $\mathbb{E}$(**B'**) = **V**, contradizendo $\mathbb{E}$(**B'**) = **F** obtida acima. Logo, a Regra de Introdução de ∃ preserva a validade em $\mathbb{E}$.

Como as regras de inferência preservam a validade em uma estrutura $\mathbb{E}$ qualquer de ***L(S)***, então preservam a validade em toda estrutura $\mathbb{E}$ de ***L(S)***, logo, por definição de validade, preservam a validade.

Como os axiomas de ***S*** são válidos e as regras de inferência de ***S*** preservam a validade das fórmulas, então, todo teorema de ***S*** é válido.

2.3.2. Metateorema da Validade. Se ***T*** é uma teoria de primeira ordem, então todo teorema de ***T*** é válido em ***T***.

Metademonstração. Como na metademonstração do metateorema anterior, basta mostrar que os axiomas de ***T*** são válidos em ***T*** e que as regras de inferência preservam a validade em ***T***. Os axiomas não-lógicos de ***T***, pela definição de modelo, são válidos em todo modelo de ***T***, logo, são válidos em ***T***. Os axiomas lógicos de ***T*** são os axiomas de ***S*** que, pela metademonstração anterior, são válidos em qualquer estrutura, e, portanto, são válidos nos modelos de ***T***. As regras de inferência de ***T*** são as mesmas que as de ***S*** e, pela metademonstração anterior, preservam a validade em qualquer estrutura, em especial, preservam a validade em ***T***. Como os axiomas de ***T*** são válidos em ***T*** e as regras de inferência preservam a validade em ***T***, temos que todo teorema de ***T*** é válido em ***T***.

Não faremos a metademonstração da proposição a seguir, pois o que motiva as teorias $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{PA}$ é justamente a estrutura $\mathbb{N}$ e, trivialmente, os axiomas não-lógicos destas teorias são válidos em $\mathbb{N}$.

2.3.3. Metateorema. A estrutura $\mathbb{N}$ é modelo das teorias $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{PA}$.

2.3.4. Definição. A estrutura $\mathbb{N}$ é chamada *Modelo Padrão*.

2.3.5. Metateorema. A estrutura de marcas $\mathbb{M}$ é modelo das teorias $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{PA}$.

Metademonstração. Vamos primeiro mostrar que $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{N}$. Com efeito: *N1* e *N2* seguem da observação à Definição 2.2.3; *N3* segue da cláusula 1 da Definição 2.2.5 e *N4* segue da observação a esta definição; *N5* segue da cláusula 1 da Definição 2.2.6 e *N6* segue da observação a esta definição; e *N7*, *N8* e *N9* seguem da observação à Definição 2.2.7. Assim, como $\mathbb{M}$ valida todos os axiomas de $\boldsymbol{N}$, então $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{N}$.

Mostremos que $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{R}$. Como $\boldsymbol{N}$ é extensão de *R*, todo teorema de $\boldsymbol{R}$ é teorema de $\boldsymbol{N}$ e, em particular, os axiomas de $\boldsymbol{R}$ são teoremas de $\boldsymbol{N}$. Como $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{N}$ então, pelo Metateorema da Validade, todo teorema de $\boldsymbol{N}$ é válido em $\mathbb{M}$, e, em particular, todo axioma de $\boldsymbol{R}$ é válido em $\mathbb{M}$. Logo, $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{R}$.

Por fim, mostremos que $\mathbb{M}$ é modelo de $\boldsymbol{PA}$. Já mostramos que os axiomas de *N1* a *N9* são válidos em $\mathbb{M}$, assim, para mostrar que todos os axiomas de $\boldsymbol{PA}$ são válidos em $\mathbb{M}$, temos apenas que mostrar que qualquer instância $\mathbf{A_x}[0]\wedge\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\rightarrow \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])\rightarrow\forall\mathbf{xA}$ do axioma da indução é válido em $\mathbb{M}$. Suponha, por absurdo, que esta não seja válida, logo $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]\wedge\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\rightarrow \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])\rightarrow\forall\mathbf{xA}) = \mathbf{F}$, que implica $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]\wedge\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\rightarrow \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{M}(\forall\mathbf{xA}) = \mathbf{F}$, ou ainda, $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]) = \mathbf{V}$, $\mathbb{M}(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{M}(\forall\mathbf{xA}) = \mathbf{F}$. Mas se $\mathbb{M}(\forall\mathbf{xA}) = \mathbf{F}$, então existe um $\mathbf{i}$ em $\boldsymbol{L(}\mathbb{M}\boldsymbol{)}$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[\mathbf{i}]) = \mathbf{F}$. Notemos, então, que os numerais de $\boldsymbol{L(N)}$ (Definição 1.4.5) são nomes em $\boldsymbol{L(}\mathbb{M}\boldsymbol{)}$ dos indivíduos de $\mathbb{M}$, e que $\mathbf{k}_i$ (Convenção de Notação 1.4.6), com i diferente de zero, é o nome do numeral-marca constituído de i traços. Temos, então, que o $\mathbf{i}$, tal que $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[\mathbf{i}]) = \mathbf{F}$, não pode ser 0, já que contradiria $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]) = \mathbf{V}$, portanto, $\mathbf{i}$ só pode ser $\mathbf{k}_i$, o numeral de $\boldsymbol{L(N)}$ que é o nome do numeral-marca constituído de i traços. Mas, como $\mathbb{M}(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])) = \mathbf{V}$, então temos que $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[S0]) = \mathbf{V}$, pois $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[0]\rightarrow\mathbf{A_x}[S0])) = \mathbf{V}$; e, analogamente,

$\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[SS0]) = \mathbf{V}$, pois $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[S0]) = \mathbf{V}$ e $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[S0]\rightarrow\mathbf{A_x}[SS0])) = \mathbf{V}$; e assim, sucessivamente, até $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[\mathbf{k}_i]) = \mathbf{V}$; o que contradiz $\mathbb{M}(\mathbf{A_x}[\mathbf{k}_i]) = \mathbf{F}$. Portanto, o axioma da indução é válido em $\mathbb{M}$ e $\mathbb{M}$ é modelo para ***PA***.

2.3.6. Definição. A estrutura $\mathbb{M}$ é chamada *Modelo de Marcas*.

Há entre as estruturas $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$ uma relação mais forte do que a estabelecida pelo dois metateoremas anteriores. Com efeito, $\mathbb{M}$ ser modelo para as teorias de números naturais, segue, como veremos, de que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$ são estruturas isomorfas. Vejamos isso com mais detalhe.

2.3.7. Definição. Uma função H de A em B é *injetora* se são distintos os valores de H para elementos distintos, i.e., se a_1 e a_2 são elementos de A, então

$$a_1 \neq a_2 \text{ implica } H(a_1) \neq H(a_2)$$

(ou, por contraposição, $H(a_1) = H(a_2)$ implica $a_1 = a_2$).

2.3.8. Definição. Uma função H de A em B é *sobre* se, para todo elemento de B, existe um elemento a de A, tal que $H(a) = b$.

2.3.9. Definição. Seja H uma função de A em B injetora e sobre B. A *função inversa* H^{-1} de B em A é a função tal que, para todo elemento b de B:

$$H^{-1}(b) = a \text{ se, e somente se, } H(a) = b.$$

Notemos que a função inversa H^{-1} de B em A, está bem definida, pois para todo elemento b de B, existe um elemento a de A, tal que $H(a) = b$, já que H é sobre e, para cada elemento b de B, existe apenas um elemento a de A, tal que $H(a) = b$, já que H é injetora, pois, neste caso, $H(a_1) = H(a_2)$ implica $a_1 = a_2$.

2.3.10. Definição. Uma função H de A em B é uma *bijeção* se é injetora e sobre.

Notemos que a função inversa de uma bijeção sempre está definida.

2.3.11. Definição. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ duas estruturas tais que:

1. $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}$ é um predicado n-ário de $\mathbb{E}$, se, e somente se, $\mathbf{p}_{\mathbb{F}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}$ é um predicado n-ário de $\mathbb{F}$;
2. $\mathbf{f}_{\mathbb{E}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}$ é uma função n-ária de $\mathbb{E}$, se, e somente se, $\mathbf{f}_{\mathbb{F}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}$ é uma função n-ária de $\mathbb{F}$.

Dizemos que $\mathbb{E}$ é *isomorfa* a $\mathbb{F}$, se existe uma bijeção H de $|\mathbb{E}|$ em $|\mathbb{F}|$ tal que .

I1. $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_n})$ se, e somente se, $\mathbf{p}_{\mathbb{F}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}(H(\boldsymbol{a_1}), ..., H(\boldsymbol{a_n}))$, e

I2. $H(\mathbf{f}_{\mathbb{E}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_n})\ ) = \mathbf{f}_{\mathbb{F}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{i}}(H(\boldsymbol{a_1}), ..., H(\boldsymbol{a_n}))$.

Notemos, então, que segue das cláusulas I1 e I2, que se **A** é uma fórmula de uma linguagem ***L*** para a qual $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ são estruturas, então:

A é válida em $\mathbb{E}$ se, e somente se, **A** é válida em $\mathbb{F}$.

E ainda, se ***T*** é uma teoria de linguagem ***L***, então:

$\mathbb{E}$ é modelo de ***T*** se, e somente se, $\mathbb{F}$ é modelo de ***T***.

2.3.12. Definição. Chamamos de *Enumeração de Marcas* a função H de $|\mathbb{M}|$ em $|\mathbb{N}|$ definida recursivamente por

H1. $H(0_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{N}}$ e

H2. $H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})) = S_{\mathbb{N}}(H(a_{\mathbb{M}}))$.

2.3.13. Metateorema. A Enumeração de Marcas é uma bijeção.

Metademonstração. Mostremos que H é injetora, por dupla indução.

Caso Base. Seja $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$. Pela observação final à Definição 2.2.3, existe um $b_{\mathbb{M}}$ tal que $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$. Logo, por H1, H2 e por zero não ser o sucessor de nenhum número natural, segue que $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) \neq 0_{\mathbb{N}} =_{\mathrm{H1}} H(0_{\mathbb{M}})$, daí, neste caso, se $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo. Seja $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$.

Subcaso base: $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ e $a_{\mathbb{M}} = 0_{\mathbb{M}}$. Por H1 e H2 e por zero não ser o sucessor de nenhum número natural, temos que: $H(a_{\mathbb{M}}) = H(0_{\mathbb{M}}) =_{\mathrm{H1}} 0_{\mathbb{N}} \neq S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$. Logo, neste caso, temos que, se $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

Subpasso indutivo: $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ e $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$. Pela observação final à Definição 2.2.3, existe um $c_{\mathbb{M}}$ tal que $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})$, e, como $S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}) \neq a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})$, pela outra observação à mesma definição, temos $b_{\mathbb{M}} \neq c_{\mathbb{M}}$. Logo, por H1, H2 e por hipótese de indução, temos que $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} S_{\mathbb{N}}(H(c_{\mathbb{M}})) \neq_{\text{H.I.}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$. Portanto, neste caso também, se $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

Em todos os casos temos que, se $a_{\mathbb{M}} \neq b_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(b_{\mathbb{M}})$, o que mostra que H é injetora.

Mostremos que H é sobre, por indução sobre o conjunto dos números naturais.

Caso base. Para $0_{\mathbb{N}}$ temos, por H1, que $H(0_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{N}}$, logo existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{N}}$.

Passo indutivo. Se $a_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}}$, então existe um $b_{\mathbb{N}}$, tal que $a_{\mathbb{N}} = S_{\mathbb{N}}(b_{\mathbb{N}})$. Por hipótese de indução temos, então, que existe $b_{\mathbb{M}}$ tal que $H(b_{\mathbb{M}}) = b_{\mathbb{N}}$. Tomemos então o numeral-marca $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$. Neste caso, $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H.I.}} S_{\mathbb{N}}(b_{\mathbb{N}}) = a_{\mathbb{N}}$, logo, neste caso também, existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{N}}$.

Como temos que existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = 0_{\mathbb{N}}$ e que, se existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{N}}$, então existe $S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})$ tal que $H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})) = S_{\mathbb{N}}(a_{\mathbb{N}})$, logo, por indução, temos que, para todo número natural $a_{\mathbb{N}}$, existe um numeral-marca $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{N}}$, o que metademonstra que H é sobre.

Como H é injetora e sobre, então H é uma bijeção.

2.3.14. Metateorema. $\mathbb{M}$ e $\mathbb{N}$ são estruturas isomorfas.

Metademonstração. Basta mostrar que a Enumeração de Marcas satisfaz I1 da Definição 2.3.11 para o predicado binário <, e satisfaz I2 para as funções S, + e . .

S(I2): é imediato da definição da Enumeração de Marcas;

+(I2): Por indução:

Caso base: $H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} 0_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} 0_{\mathbb{N}} = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo: $H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) = H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} S_{\mathbb{N}}(H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H.I.}}$

$$S_{\mathbb{N}}(H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} H(b_{\mathbb{M}})) = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})).$$

.(I2) : Por indução:

Caso base: $H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} 0_{\mathbb{M}}) = H(0_{\mathbb{M}}) =_{\text{H1}} 0_{\mathbb{N}} = H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{N}} H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo: $H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) = H((a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) =_{+(\text{I2})}$

$$H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} H(b_{\mathbb{M}}) =_{\text{H.I.}} H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{N}} H(b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{N}} H(b_{\mathbb{M}}) =$$

$$H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{N}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})).$$

<(I1): Por indução:

Caso base: Temos que $a_{\mathbb{M}} < 0_{\mathbb{M}}$ se, e somente se, $a_{\mathbb{N}} < 0_{\mathbb{N}}$, pois ambos são falsos.

Passo indutivo: $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ se, e somente se, (1) $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}$ ou (2) $a_{\mathbb{M}} = b_{\mathbb{M}}$.

Caso (1): $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}$, se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{N}} H(b_{\mathbb{M}})$, por hipótese de indução.

Caso (2): $a_{\mathbb{M}} = b_{\mathbb{M}}$ se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) = H(b_{\mathbb{M}})$.

Como a disjunção dos resultados dos dois ocorre se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$, temos então que: $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{N}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

Pelo metateorema anterior e pelo comentário à Definição 2.3.11, temos então que, se **A** é uma fórmula de ***L(N)*** então:

A é válida em $\mathbb{M}$ se, e somente se, **A** é válida em $\mathbb{N}$.

E, para toda teoria ***T*** de linguagem ***L(N)***, então:

$\mathbb{M}$ é modelo de ***T*** se, e somente se, $\mathbb{N}$ é modelo de ***T***.

O que nos permite, portanto, considerar o Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ como um representante natural do Modelo Padrão $\mathbb{N}$.

Voltando à relação entre os teoremas de uma teoria de primeira ordem ***T*** e as fórmulas válidas em ***T***, vimos (Metateorema 2.3.2 acima) que, todo teorema de ***T*** é válido em ***T***. Podemos, então, perguntar pela implicação inversa: será que toda fórmula que é válida em ***T***, é teorema de ***T*** ? O Metateorema da Completude, que enunciamos a seguir, responde a esta questão. Consideraremos duas formas deste metateorema, sendo a primeira chamada de *Forma Fraca do Metateorema da Completude* e a segunda de *Forma Forte do Metateorema da Completude*.

2.3.15. Metateorema da Completude, Primeira forma. Uma fórmula **A** de uma teoria ***T*** é teorema, se, e somente se, **A** é válida em ***T***.

2.3.16. Metateorema da Completude, Segunda forma. Uma teoria ***T*** é consistente se, e somente se, tem modelo.

Não daremos as metademonstrações das asserções acima, que se encontram em **Shoenfield 1967**, p.43., e onde, em particular, Shoenfield mostra como a forma forte implica a forma fraca. Vamos então, apenas apresentar a metademonstração da parte que nos interessa aqui: a volta da segunda forma, que segue do teorema da validade. Suponha que ***T*** tem modelo $\mathbb{E}$. Se **A** é uma fórmula fechada de ***T***, então $\mathbb{E}(\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{A}) = \mathbf{F}$. Assim, a fórmula $\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{A}$ não é válida em ***T***. Pelo teorema da validade, esta fórmula não é teorema de ***T***. Portanto, ***T*** é não-trivial, o que, pelo Metateorema 1.5.14, implica que ***T*** é consistente.

2.3.17. Metateorema. As teorias ***R***, ***N*** e ***PA*** são consistentes.

Metademonstração. Segue da Segunda Forma do Metateoremas da Completude e de que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$ são modelos para estas teorias (Metateoremas 2.3.3 e 2.3.5).

A metademonstração acima é geralmente classificada como não-finitária. A noção de demonstração ou metademonstração não-finitária é controversa e não será discutida neste trabalho. **Shoenfield 1967**, p.3, sugere que uma metademonstração finitária trata com objetos concretos de um modo construtivo. Porém, as noções de objeto concreto e modo construtivo são problemáticas. Shoenfield cita ainda a descrição sugerida por Kreisel, segundo o qual uma metademonstração é finitária se podemos visualizá-la. Notemos então que a noção de visualização também é problemática. Voltaremos a comentar alguns aspectos da demonstração ou metademonstração finitária da consistência de ***PA***, quando discutirmos o Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel.

Apesar das metademonstrações acima serem classificadas como não-finitárias, o que poderia sugerir uma possibilidade de dúvida em relação à consistência das teorias em questão, devemos lembrar que o Modelo de Marcas, que valida as fórmulas destas teorias, foi construído apenas com noções relativas aos símbolos gráficos. Mais ainda, em relação a ***N***, pode-se metademonstrar finitariamente que ***N*** é consistente (logo, que R é consistente também, já que ***N*** é uma extensão de ***R***). Vejamos sucintamente um dos caminhos para esta metademonstração.

2.3.18. Definição. Uma fórmula é *elementar* se é uma fórmula atômica ou uma instanciação.

2.3.19. Definição. Uma *valoração para **T*** é uma função do conjunto de fórmulas elementares de ***T*** no conjunto de valores-verdade.

2.3.20. Definição. Seja V uma valoração para ***T***. Definimos o *valor-verdade* $V(\mathbf{A})$ para toda fórmula **A** de **T** por indução sobre o comprimento de **A**.

1. Se **A** é uma fórmula atômica, então $V(\mathbf{A})$ já está definida;
2. Se **A** é $\sim\mathbf{B}$, $V(\mathbf{A}) = H_{\sim}(V(\mathbf{B}))$;
3. Se **A** é $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, $V(\mathbf{A}) = H_{\vee}(V(\mathbf{B}), V(\mathbf{C}))$;

Desta definição, e das definições de $\rightarrow$, $\wedge$ e $\leftrightarrow$, podemos ver que $V(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) = H_{\rightarrow}(V(\mathbf{B}), V(\mathbf{C}))$, $V(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = H_{\wedge}(V(\mathbf{B}), V(\mathbf{C}))$ e $V(\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}) = H_{\leftrightarrow}(V(\mathbf{B}), V(\mathbf{C}))$. Mais ainda, podemos ver que:

$V(\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $V(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}$ para pelo menos um i tal que $1 \le i \le n$;

$V(\mathbf{A_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $V(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}$ para todo i tal que $1 \le i \le n$;

2.3.21. Definição. **B** é uma *conseqüência tautológica* de $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A}_n$, se $V(\mathbf{B}) = \mathbf{V}$, para toda valoração V tal que $V(\mathbf{A_1}) = V(\mathbf{A_2}) = \ldots = V(\mathbf{A}_n) = \mathbf{V}$.

2.3.22. Definição. Uma fórmula é uma *quase-tautologia* se é uma conseqüência tautológica de instâncias de axiomas da identidade e da igualdade.

2.3.23. Metateorema da Consistência. Uma teoria de primeira ordem ***T***, cujos axiomas não-lógicos são fórmulas sem quantificadores, é inconsistente se, e somente se, existe uma quase-tautologia que é uma disjunção de negações de instâncias de axiomas não-lógicos de ***T***. (**Shoenfield 1967**, p.49).

Vamos indicar agora, como podemos usar o metateorema acima e que $\mathbb{M}$ é um modelo de ***N***, para uma demonstração finitária da consistência de ***N*** (**Shoenfield 1967**, p.51). Primeiramente, notemos que, dado um termo livre de variáveis **a**, podemos computar, efetivamente, $\mathbb{M}$(**a**). Temos ainda que, em certos casos, podemos dar uma metademonstração finitária que uma fórmula de ***L(N)***, sem quantificadores, é válida em $\mathbb{M}$. Em particular, podemos metademonstrar que toda instância não-lógica dos axiomas de ***N*** é válida em $\mathbb{M}$ e que toda quase-tautologia, sem quantificadores, é válida em $\mathbb{M}$. Agora, é claramente impossível ter fórmulas abertas $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A}_n$ tais que $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ sejam todas válidas em $\mathbb{M}$, então, pelo Metateorema da Consistência acima, ***N*** é consistente.

Quanto à possibilidade de demonstração finitária de ***PA***, temos que esta não é possível, o que, como veremos, pode ser imediatamente inferido da Segunda Forma do Teorema da Incompletude de Gödel.

3. MÉTODOS DE DECISÃO E PROCEDIMENTOS MECÂNICOS

Neste capítulo, vamos tratar das noções de método de decisão e de procedimento ou processo mecânico. Para tanto, vamos apresentar, também, definições e resultados relativos às funções recursivas (bem como aos predicados recursivos e recursivamente enumeráveis e às funções recursivas parciais) e introduzir a Tese/Definição de Church de função calculável. Lembremos que, na Definição 1.5.11, utilizamos a noção de método de decisão para definirmos quando uma teoria de primeira ordem ***T*** é decidível, isto é, quando existe um método de decisão para determinar se uma fórmula **A** qualquer de ***T*** é, ou não, teorema de ***T***. Porém, para que esta definição seja mais precisa e utilizável, é necessário que tornemos mais precisa a noção de método de decisão. Mais ainda, tal determinação, do que vem a ser um método de decisão, é essencial para mostrar que um determinado problema é indecidível, pois, caso contrário, como poderíamos concluir que não há, para ele, método de decisão possível ? Determinar, então, a noção de método de decisão é primordial e foi uma das motivações de Church para propor a sua tese/definição de função calculável (**Birabem 1996**, p.32), que, também, comentaremos mais adiante. Por fim, a partir da Tese/Definição de Church veremos ainda, como a noção de procedimento ou processo mecânico se encontra relacionada à noção de função recursiva parcial, mesmo para processos que envolvam acaso.

Comecemos a discussão sobre métodos de decisão listando algumas características gerais sobre esta noção.

A primeira característica que parece poder ser afirmada, sem perda de generalidade, sobre qualquer método de decisão **M**, é que ele sempre equivale a determinar se elementos de um dado conjunto C possuem, ou não, uma certa propriedade P. Com efeito, vimos que as relações e funções podem ser definidas como conjuntos de n-uplas ordenadas (início do Capítulo 2); assim, esta característica também se aplica a sabermos se elementos dados satisfazem determinada relação e qual o resultado de uma dada função.

Uma segunda propriedade que um método de decisão **M** parece ter é que, dado o conjunto C de elementos, sobre os quais ele deve poder decidir se satisfazem, ou não, a propriedade P, o método de decisão **M** deve se aplicar a todos os elementos de C. Com efeito, se existisse algum elemento c de C para o qual o método **M** não retornasse a informação se c tem, ou não, a propriedade P, então **M** não decidiria sobre o elemento c, e, portanto, não seria um método de decisão para C.

Uma terceira propriedade que um método de decisão **M** deveria ter, seria a de que seus procedimentos, para decidir se um certo elemento c de C tem, ou não, a propriedade P, seriam mecânicos. Isto nos leva às características da noção de mecânico.

3.0.1. Observação. Ressaltemos que a noção de mecânico que será discutida aqui, é relativa a um sentido abstrato e ideal, o que significa dizer que vamos exibir *características gerais* de um procedimento mecânico, que toda máquina, inclusive uma máquina real, deve ter, sendo que, porém, algumas características dessas "máquinas abstratas e ideais" não terão, necessariamente, correlatos no mundo real. Por exemplo, uma máquina, como a considerada aqui, poderá funcionar indefinidamente, o que não parece ser o caso para uma máquina real; além disso, esta máquina pode ter uma memória potencialmente infinita na qual ela pode guardar todas as informações produzidas pelo o seu funcionamento.

Vejamos então as características de um processo mecânico.

A primeira característica que uma máquina parece ter é que ela processa certos elementos, chamados de *entrada*, que resulta em outros elementos, chamados de *saída*. Eventualmente, pode não haver elementos de entrada, ela simplesmente, através de seu processamento, sem elementos de entrada, produz elementos de saída. Não consideraremos máquinas sem saídas, já que temos em vista os métodos de decisão: neste caso, não podemos ter uma máquina muda. Assim, podemos considerar um conjunto E dos elementos de entrada de um processamento mecânico, eventualmente vazio, e um conjunto não-vazio S de seus elementos de saída.

Uma segunda característica de uma máquina é ter um processo para determinar, para cada elemento e de entrada, um elemento s de saída. Este processo pode ser considerado uma função do conjunto E no conjunto S (Definição 2.2.7), que associa um elemento s de saída a um elemento e de entrada. Temos, então, que o processo, ou procedimento, de uma máquina determina um conjunto de pares ordenados (e, s), no qual s é o elemento de saída, correspondente ao elemento e de entrada.

Um processo pode determinar infinitos pares ordenados, como no caso, por exemplo, de uma máquina que produz o sucessor de um número natural dado: ela determina infinitos pares (n, m) no qual m é o sucessor de n. Porém, como uma máquina deve ter um número finito de elementos e relações que a constituem, não é qualquer conjunto de pares ordenados, no qual, para cada elemento de entrada, exista um, e apenas um, elemento de saída, determina um procedimento mecânico. Com efeito, para que este procedimento seja considerado mecânico, este conjunto deve poder ser gerado a partir de um número finito de elementos e relações, como, por exemplo, por regras ou leis de formação, que chamamos *programa* ou *algoritmo*, sendo, ainda, finito, o número de regras que compõe um programa ou algoritmo. Assim, dado o conjunto de entradas e saídas, temos que: determinar, abstratamente, as máquinas, ou os mecanismos, possíveis significa determinar os algoritmos possíveis. Quais seriam então os algoritmos possíveis ? Como veremos, esta questão nos leva à Definição/Tese de Church (veremos mais adiante, porque escrevemos definição/tese). Porém, para enunciá-la, necessitamos do conceito de função recursiva, que é o que vamos introduzir na seção seguinte.

1. Funções Recursivas.

Vamos definir agora as funções recursivas e apresentar alguns resultados relativos a elas. Esta classe de funções será utilizada no enunciado da Definição/Tese de Church, bem como para discutir o Teorema da Incompletude de Gödel. A menos que seja especificado o contrário, por abuso de linguagem, vamos escrever "número" para nos referir a número natural, "conjunto" para nos referir a conjuntos de números naturais, "função" para funções do conjunto dos números naturais no conjunto dos números naturais e "predicados" para predicados no conjunto dos números naturais.

3.1.1. Convenção de Notação. Utilizaremos letras latinas minúsculas em itálico a e b (também com sub-índices a_1, a_2, a_3, etc.) para denotar números naturais, letras latinas maiúsculas para denotar funções e predicados, geralmente F, G e H para funções e P, Q e R para predicados. Utilizaremos a letra gótica $\mathfrak{a}$ para denotar seqüências finitas de letras latinas, assim, escrevemos $F(\mathfrak{a})$, ao invés de $F(a_1, ..., a_n)$, para funções n-árias e $P(\mathfrak{a})$, ao invés de $P(a_1, ..., a_n)$, para predicados n-ários. Se uma letra gótica aparece como um argumento de uma função, ou predicado, assumimos que a seqüência abreviada tem o número correto de letras, assim, se F é n-ária e escrevemos $F(\mathfrak{a})$, então assumimos que $\mathfrak{a}$ é uma seqüência de n letras. Por fim, se a denota $a_1, ..., a_n$, então $\exists\mathrm{a}$ denota $\exists a_1 ... \exists a_n$ e $\forall\mathrm{a}$ denota $\forall a_1 ... \forall a_n$.

3.1.2. Definição. Seja P é um predicado n-ário. A *função representante* de P, K_P, é a função n-ária tal que $K_P(\mathrm{a}) = 0$, se $P(\mathrm{a})$; e $K_P(\mathrm{a}) = 1$, se não é o caso de $P(\mathrm{a})$.

Em particular, $K_<(a_1, a_2) = 0$, se $a_1 < a_2$; e $K_<(a_1, a_2) = 1$, se não é o caso de $a_1 < a_2$.

3.1.3. Definição. Para cada i, tal que $0 \leq i \leq n$, a *função projeção* I_i^n é a função tal que $I_i^n(a_1, ..., a_n) = a_i$.

3.1.4. Definição. O *operador* μ é aquele tal que, se $..x..$ é uma sentença que é verdadeira para algum x, então $\mu x(..x..)$ denota o menor x tal que $..x..$ é verdadeira.

Exemplo: $\mu x(x = a) = a$. Notemos, então, que o valor de $\mu x(..x..)$ não depende do valor de x, i.e., as ocorrências de x em $\mu x(..x..)$ são ligadas.

3.1.5. Definição. Uma função é *recursiva* se satisfaz as seguintes cláusulas e apenas elas:

R1. As funções I_i^n, $+$, $\cdot$ e $K_<$ são recursivas;

R2. Se $G, H_1, ..., H_k$ são recursivas, e se F é definida por

$$F(\mathrm{a}) = G(H_1(\mathrm{a}), ..., H_k(\mathrm{a})),$$

então F é recursiva.

R3. Se G é recursiva e $\forall\mathrm{a}\exists x\ (G(\mathrm{a}, x) = 0)$ e F é definida por

$$F(\mathrm{a}) = \mu x(G(\mathrm{a}, x) = 0),$$

então F é uma função recursiva.

3.1.6. Observação. Uma outra noção relacionada a calculabilidade é a de *definição por indução* de uma função F, também chamada de *recursão primitiva*, que, começando do caso base $F(0, \mathrm{a})$, define novos valores $F(a + 1, \mathrm{a})$ da função F, a partir de valores anteriores $F(a, \mathrm{a})$ de F, ou ainda, a função F é definida pelo seguinte esquema a partir de duas funções G e H:

$$F(0, \mathrm{a}) = G(\mathrm{a}),$$

$$F(a + 1, \mathrm{a}) = H(F(a, \mathrm{a}), a, \mathrm{a}),$$

Apesar da recursão primitiva não constar na definição de função recursiva, podemos demonstrar que se F é definida pelo esquema acima a partir de funções recursivas G e H, então F é recursiva (Confira o Metateorema 3.1.38, no qual a função $F(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def.}} < F(0, \mathrm{a}), ..., F(a-1, \mathrm{a})>$ guarda as informações dos valores anteriores a $F(a, \mathrm{a})$).

3.1.7. Definição. Um predicado é *recursivo* se sua função representante é recursiva.

Nos dois metateoremas a seguir, definimos um predicado e uma função usando o símbolo $:=_{\text{def.}}$. Nesta seção, tomaremos sempre o cuidado de diferenciar uma definição em geral (para a qual usaremos o símbolo $:=_{\text{def.}}$) de uma definição explicita de uma função ou predicado recursivo (para a qual usaremos o símbolo $:=_{\text{def. expl.}}$). Se uma função, ou predicado, tem uma definição explicita que utiliza apenas variáveis, símbolos de funções e predicados recursivos, e o operador μ, então a função, ou o predicado, é recursiva (estaremos sempre supondo, que neste caso, o operador μ é utilizado somente quando está definido para todos os valores das variáveis ligadas por ele). Os resultados desta seção nos permitirão expandir a coleção de símbolos que podem ser usadas nas definições explicitas.

3.1.8. Metateorema R4. Se Q, H_1 , ..., H_k são recursivas, e P é definido por

$$P(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} Q(H_1(\mathrm{a}), ..., H_k(\mathrm{a})),$$

então P é recursivo.

Metademonstração. P é recursivo pela Definição 3.1.7 e pela cláusula R2 da Definição 3.1.5.

3.1.9. Metateorema R5. Se P é recursivo e $\forall \mathrm{a} \exists x P(\mathrm{a}, x)$, e F é definida por

$$F(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} \mu x P(\mathrm{a}, x),$$

então F é uma função recursiva.

Metademonstração. Desde que $F(\mathrm{a}) = \mu x(K_P(\mathrm{a}, x) = 0)$, F é recursiva pela cláusula R3 da Definição 3.1.5.

3.1.10. Metateorema R6. Toda função constante é recursiva.

Metademonstração. Seja F_k a função n-ária com o valor constante k. Vamos mostrar por indução sobre k que F_k é recursiva. No caso de $k = 0$, temos a definição explicita $F_0(\mathrm{a})$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $\mu x(I_{n+1}{}^{n+1}(\mathrm{a}, x) = 0)$. Para $k = r + 1$, temos a definição explicita $F_k(\mathrm{a})$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $\mu x(F_r(\mathrm{a}) < x)$ (Notemos que esta definição é permitida porque $<$ é recursiva pela cláusula R1 da Definição 3.1.5).

Assim, podemos utilizar constantes nas nossas definições explicitas.

3.1.11. Definição. Definimos os seguintes predicados

$$(\sim P)(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} \sim P(\mathrm{a})$$

$$(P \vee Q)(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} P(\mathrm{a}) \vee Q(\mathrm{a})$$

$$(P \wedge Q)(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} P(\mathrm{a}) \wedge Q(\mathrm{a})$$

$$(P \rightarrow Q)(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} (P(\mathrm{a}) \rightarrow Q(\mathrm{a}))$$

$$(P \leftrightarrow Q)(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} (P(\mathrm{a}) \leftrightarrow Q(\mathrm{a})).$$

3.1.12. Metateorema R7. Se P é recursivo, então $(\sim P)$ é recursivo. Se P e Q são recursivos, então $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ são recursivos.

Metademonstração. Temos as definições explicitas:

$$K_{(\sim P)}(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_{<}(0, K_P(\mathrm{a}));$$

$$K_{(P \vee Q)}(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_P(\mathrm{a}) \cdot K_Q(\mathrm{a});$$

$$K_{(P \wedge Q)}(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_{(\sim(\sim P \vee \sim Q))}(\mathrm{a});$$

$$K_{(P \rightarrow Q)}(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_{(\sim P \vee Q)}(\mathrm{a}); \text{ e}$$

$$K_{(P \leftrightarrow Q)}(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_{((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))}(\mathrm{a}).$$

Segue do metateorema anterior que podemos usar ~, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ nas definições explicitas de funções e predicados recursivos.

3.1.13. Metateorema R8. Os predicados <, ≤, >, ≥ e = são recursivos.

Metademonstração. Pela cláusula R1 da Definição 3.1.5, < é recursivo. Os outros predicados têm as seguintes definições explícitas:

$$a \leq b :=_{\text{def. expl.}} \sim(b < a);$$

$$a > b :=_{\text{def. expl.}} b < a;$$

$$a \geq b :=_{\text{def. expl.}} b \leq a; \text{ e}$$

$$a = b :=_{\text{def. expl.}} a \geq b \wedge b \leq a.$$

Segue do metateorema anterior que podemos usar os símbolos <, ≤, >, ≥ e = nas definições explicitas de funções e predicados recursivos.

3.1.14. Definição. Se $\ldots x\ldots$ é uma fórmula e _ _ _ é uma expressão não contendo x, o *operador μx limitado*, denotado por $\mu x_{x < \_\_\_}$, é aquele tal que:

$$\mu x_{x < \_\_\_}(\ldots x\ldots) :=_{\text{def. expl.}} \mu x(\ldots x\ldots \vee x = \_\ \_\ \_).$$

3.1.15. Metateorema R9. Se P é recursivo, então é recursiva a função F definida por:

$$F(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} \mu x_{x < a} P(\mathrm{a}, x).$$

Metademonstração. Segue de F poder ser definida explicitamente por:

$$\mu x(P(\mathrm{a}, x) \vee x = a).$$

Segue do metateorema anterior que podemos usar o operador μ limitado nas definições explicitas de funções e predicados recursivos.

3.1.16. Definição. Se $\ldots x \ldots$ é uma fórmula e _ _ _ é uma expressão não contendo x, o *quantificador existencial limitado* $\exists x_{x < \_\_\_}$ e o *quantificador universal limitado* $\forall x_{x < \_\_\_}$ são, respectivamente, aqueles tais que:

$$\exists x_{x < \_\_\_}(\ldots x \ldots) :=_{\text{def. expl.}} \mu x_{x < \_\_\_}(\ldots x \ldots) < \_\_\_$$

$$\forall x_{x < \_\_\_}(\ldots x \ldots) :=_{\text{def. expl.}} \sim\exists x_{x < \_\_\_}\sim(\ldots x \ldots).$$

Ambos são chamados de quantificadores limitados.

3.1.17. Metateorema R10. Se R é recursivo e P e Q são definidos por

$$P(\mathrm{a}, a) :=_{\text{def. expl.}} \exists x_{x < \_\_\_}R(\mathrm{a}, a)$$

$$Q(\mathrm{a}, a) :=_{\text{def. expl.}} \forall x_{x < \_\_\_}R(\mathrm{a}, a).$$

então P e Q são recursivos.

Metademonstração. Segue de P e Q poderem ser definidos explicitamente por:

$$\mu x_{x < a}R(\mathrm{a}, a) < a \text{ e } \sim\exists x_{x < a}\sim R(\mathrm{a}, a).$$

Segue do metateorema anterior que podemos usar os quantificadores limitados nas definições explicitas de funções e predicados recursivos.

3.1.18. Definição. A *função subtração $a \sim b$* é definida por:

$$a \sim b :=_{\text{def. expl.}} \mu x(b + x = a \ \vee \ a < b).$$

Notemos que, se $b \leq a$, então o valor de $a \sim b$ é $a\text{-}b$, na qual - é a subtração usual dos números naturais, e que, se $a < b$, então $a \sim b = 0$.

3.1.19. Metateorema R11. A função $a \sim b$ é recursiva.

Metademonstração. É imediata da sua definição explicita.

3.1.20. Metateorema R12. Sejam $G_1, \ldots, G_n$ funções recursivas e $R_1, \ldots, R_n$ predicados recursivos tais que, para cada a, exatamente um dos $R_1(\mathrm{a}), \ldots, R_n(\mathrm{a})$ ocorre. Se F é definida por

$$F(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} G_1(\mathrm{a}) \text{ se } R_1(\mathrm{a}),$$
$$\ldots$$
$$:=_{\text{def.}} G_n(\mathrm{a}) \text{ se } R_n(\mathrm{a}),$$

então F é recursiva.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita

$$F(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} G_1(\mathrm{a})\cdot K_{\sim R1}(\mathrm{a}) + ... + G_n(\mathrm{a})\cdot K_{\sim Rn}(\mathrm{a}).$$

3.1.21. Metateorema R13. Sejam $Q_1, ..., Q_n$ predicados recursivos e $R_1, ..., R_n$ predicados recursivos tais que, para cada a, exatamente um dos $R_1(\mathrm{a}), ..., R_n(\mathrm{a})$ ocorre. Se P é definida por

$$P(\mathrm{a}) :=_{\text{def.}} Q_1(\mathrm{a}) \text{ se } R_1(\mathrm{a}),$$
$$\ldots$$
$$:=_{\text{def.}} Q_n(\mathrm{a}) \text{ se } R_n(\mathrm{a}),$$

então P é recursiva.

Metademonstração. Podemos definir K_p por

$$K_P(\mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} K_{Q1}(\mathrm{a}) \text{ se } R_1(\mathrm{a}),$$
$$\ldots$$
$$:=_{\text{def. expl.}} K_{Qn}(\mathrm{a}) \text{ se } R_n(\mathrm{a}),$$

que é recursiva, pelo Metateorema 3.1.20.

O metateorema a seguir introduzirá uma função recursiva que nos permitirá associar um número natural a cada seqüência de números naturais.

3.1.22. Metateorema. Existe uma função recursiva binária β tal que $\beta(a, i) \leq a\sim 1$, para todo a e i, e tal que, para quaisquer números $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, existe um número a tal que $\beta(a, i) = a_i$, para todo $i < n$.

A função β do teorema anterior tem a seguinte definição explicita

$$\beta(a, i) :=_{\text{def. expl.}} \mu x_{x < a\sim 1} \exists y_{y < a} \exists z_{z < a} (a = OP(y, z) \wedge Div(y, 1+(OP(x, i) +1)\cdot z)),$$

na qual $OP(a, b) :=_{\text{def. expl.}} (a+b)\cdot(a+b)+a+1$ e $Div(a, b) :=_{\text{def. expl.}} \exists y_{y\leq a}(a = x\cdot b)$. Veja **Shoenfield 1967**, p.115, para os detalhes da metademonstração.

Vejamos agora como utilizar a função β para associar um número natural a cada n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de números naturais.

3.1.23. Definição. O *número-seqüência* de uma seqüência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de números naturais é o menor número tal que $\beta(a, 0) = n$ e $\beta(a, i) = a_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

Notemos que o metateorema anterior garante a existência do número-seqüência, para qualquer seqüência finita de números naturais.

3.1.24. Convenção de Notação. Denotaremos por $< a_1, a_2, ..., a_n >$ o número-seqüência da seqüência $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

3.1.25. Metateorema. Para cada n, o número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$ é uma função recursiva de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Metademonstração. Para cada n, temos a seguinte definição explicita

$$< a_1, a_2, ..., a_n > :=_{\text{def. expl.}} \mu x(\beta(x, 0) = n \wedge \beta(x, 1) = a_1 \wedge ... \wedge \beta(x, n) = a_n).$$

3.1.26. Metateorema. Se a é um número que é um número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$, então existe uma função lh recursiva, tal que $lh(a) = n$, i.e., lh determina recursivamente o comprimento da seqüência da qual a é o número.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita:

$$lh(a) :=_{\text{def. expl.}} \beta(a, 0).$$

3.1.27. Metateorema. Se a é um número que é um número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$, então existe uma função $(a)_i$ recursiva, tal que $(a)_i = a_i$, i.e., $(a)_i$ determina recursivamente o i-ésimo elemento da seqüência $a_1, a_2, ..., a_n$.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita:

$$(a)_i :=_{\text{def. expl.}} \beta(a, i).$$

Escreveremos, às vezes, $(a)_{i,\,j}$ para abreviar $((a)_i)_j$.

3.1.28. Definição. O predicado *Seq* é o predicado unário tal que é verdadeiro se a é um número-seqüência e é falso caso contrário.

3.1.29. Metateorema. O predicado *Seq* é recursivo.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita:

$$Seq(a) :=_{\text{def. expl.}} \exists y_{y\,<\,a} \exists z_{z\,<\,a}\, (a = OP(y, z) \wedge Div(y, 1 + (OP(x, i) + 1) \cdot z))$$
$$\wedge\ \forall x_{x\,<\,a} (lh(x) \neq lh(a) \vee \exists i_{i\,<\,lh(a)} ((x)_i \neq (a)_i)).$$

3.1.30. Definição. A função *In* é a função binária tal que

$$In(< a_1, ..., a_n >, i) :=_{\text{def.}} < a_1, ..., a_i >$$

3.1.31. Metateorema. A função *In* é recursiva.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita:

$$In(< a_1, ..., a_n >, i) :=_{\text{def. expl.}} \mu x (lh(x) = i \wedge \forall j_{j\,<\,i} ((x)_j \neq (a)_j)).$$

3.1.32. Definição. A função * é a função binária tal que

$$< a_1, ..., a_n > * < b_1, ..., b_m > :=_{\text{def.}} < a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >$$

3.1.33. Metateorema. A função * é recursiva.

Metademonstração. Temos a seguinte definição explicita:

$$a*b :=_{\text{def. expl.}} \mu x(lh(x) = lh(a) + lh(b) \wedge \forall i_{i < lh(a)}((x)_i \neq (a)_i) \wedge \forall i_{i < lh(b)}((x)_{lh(a)+i} = (b)_i)).$$

Um dos usos dos números-seqüência é substituir funções e predicados n-ários por funções e predicados unários, o que pode ser feito mediante as definições e os resultados a seguir.

3.1.34. Definição. Se F é uma função n-ária, a *contração de F*, denotada por $\langle F \rangle$, é a função recursiva unária definida explicitamente por

$$\langle F \rangle(a) :=_{\text{def. expl.}} F((a)_1, ..., (a)_n).$$

Notemos que podemos reobter F de $\langle F \rangle$, por

$$F(a_1, ..., a_n) :=_{\text{def. expl.}} \langle F \rangle(\langle a_1, ..., a_n \rangle).$$

3.1.35. Definição. Se P é um predicado n-ário, a *contração de P*, denotado por $\langle P \rangle$, é o predicado recursivo unário definido explicitamente por

$$\langle P \rangle(a) :=_{\text{def. expl.}} P((a)_1, ..., (a)_n).$$

Notemos que, também, podemos reobter P de $\langle P \rangle$, através de

$$P(a_1, ..., a_n) :=_{\text{def. expl.}} \langle P \rangle(\langle a_1, ..., a_n \rangle).$$

As equações acima, que permitem correlacionar F e $\langle F \rangle$, P e $\langle P \rangle$, são chamadas de *fórmulas de contração*. Elas implicam que F é recursiva se, e somente se, $\langle F \rangle$ é recursiva; e que P é recursivo se, e somente se, $\langle P \rangle$ é recursivo. Notemos, também, que $\langle K_P \rangle = K_{\langle P \rangle}$.

Veremos agora como seqüências de números podem ser usadas para definir indutivamente funções e predicados recursivos.

3.1.36. Definição. Se F é uma função n-ária, com $n \neq 0$, a função $\bar{F}$ é definida por

$$\bar{F}(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def.}} \langle F(0, \mathrm{a}), ..., F(a\text{-}1, \mathrm{a}) \rangle.$$

Podemos dizer que $\bar{F}$ contém toda informação dada pelos valores de $F(i, \mathrm{a})$, para todo $i < a$. Notemos que a definição acima não é uma definição explicita que garante que $\bar{F}$ é recursiva, pois a definição depende do argumento a de $\bar{F}$. Temos que mostrar então o seguinte resultado.

3.1.37. Metateorema. F é recursiva se, e somente se, $\bar{F}$ é recursiva.

Metademonstração. Suponha que F é recursiva, então temos a definição explicita: $\bar{F}(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} \mu x(lh(x) = a \wedge \forall i_{i < a}((x)_i = F(i, \mathrm{a})))$. Se $\bar{F}$ é recursiva, temos a seguinte definição explicita para F: $F(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} (\bar{F}(a+1, \mathrm{a}))_a$.

O metateorema a seguir legitima definições explicitas que utilizam a indução.

3.1.38. Metateorema R14. Se G é recursiva e F é definida indutivamente por

$$F(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} G(\bar{F}(a, \mathrm{a}), a, \mathrm{a}),$$

então F é recursiva.

Metademonstração. Definamos explicitamente H por

$$H(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} \mu x(Seq(x) \wedge lh(x) = a \wedge \forall i_{i < a}((x)_i = G(In(x, i), i, \mathrm{a}))).$$

Claramente, H é exatamente $\bar{F}$. Definamos explicitamente F por

$$F(a, \mathrm{a}) :=_{\text{def. expl.}} G(H(a, \mathrm{a}), a, \mathrm{a}).$$

Como G e H são definidas explicitamente a partir de funções recursivas, F é recursiva.

2. A Tese/Definição de Church.

No início deste capítulo, consideramos algumas características gerais das noções de método de decisão e de procedimento mecânico. Vimos que a noção de método de decisão remete à noção de procedimento mecânico, e esta, à noção de programa ou de algoritmo, que não coincide com a mera apresentação do conjunto dos pares ordenados de entradas e saídas, já que uma máquina é constituída por um número finito de elementos e relações, exigindo assim um algoritmo com um número finito de regras. Afirmamos, então, que determinar, abstratamente, as máquinas, ou os mecanismos possíveis, equivale a determinar os programas ou algoritmos possíveis. Dissemos, também, que a determinação destes programas ou algoritmos nos levaria à classe das funções recursivas. Nesta seção, vamos analisar esta questão com maior detalhe, discutindo a Tese/Definição de Church, sua relação com os predicados e funções recursivos, bem como com as funções recursivas parciais e com os predicados recursivamente enumeráveis, dos quais introduziremos as definições e alguns resultados, e consideramos a questão de processos mecânicos que envolvam acaso.

Vejamos, inicialmente, como podemos relacionar os procedimentos mecânicos com funções de números naturais em números naturais. Como dissemos, uma máquina, ou mecanismo, é composta de uma quantidade finita de elementos que se relacionam segundo um conjunto finito de leis. Se enumerarmos todos os estados possíveis destes elementos, o conjunto de leis determinará uma função do conjunto de números naturais que representam as entradas, nos números naturais que representam as saídas, tal que, dado o número da situação inicial, o resultado da função é a situação final, no espaço de tempo considerado. Assim, desde que as leis estabeleçam um procedimento para determinarmos os estados que seguem de outros estados dados, podemos supor que o procedimento mecânico equivale ao procedimento descrito por uma função calculável. Logo, determinar os procedimentos ou algoritmos possíveis é equivalente a determinar as funções que são calculáveis. Isto nos leva à Tese/Definição de Church.

3.2.1. Tese/Definição de Church. Uma função ou predicado é calculável se, e somente se, é recursiva.

Primeiramente, baseando-nos em **Birabem 1996** e **Epstein & Carnielli 1989**, Cap.25, expliquemos sucintamente o porquê de utilizarmos a dupla designação "tese/definição".

Church 1935 introduz o conceito de λ-definibilidade, porém, utiliza o conceito de recursividade geral (apresentado por Gödel em um curso ministrado em 1934, em Princeton, sobre os resultados que havia obtido em 1931) como *definição de função efetivamente calculável*.

Com efeito, Church já havia proposto a Gödel, à época do curso citado acima, identificar a calculabilidade efetiva com o conceito de λ-definibilidade, o que Gödel considerou completamente insatisfatória. Porém, Kleene, em 1935, mostra que os conceitos de λ-definibilidade e recursividade são equivalentes (**Kleene 1936**), o que influenciou Church a apresentar a definição acima.

Entretanto, o que é definido por Church ? O conceito de calculabilidade ? Se este é identificado com a recursividade estaríamos apenas usando duas palavras para designar o mesmo conceito, daí, não precisaríamos escrever "função calculável", mas apenas "função recursiva". Na realidade, o que se espera com esta definição é estar formalizando, com a recursividade, a noção de calculabilidade, que nos é intuitiva. Neste ponto, enquanto a definição é *proposta*, ela se torna uma tese, que deve ser demonstrada; ou melhor, deve ser metademonstrada, pois esta definição é uma proposição de equivalência entre as noções de calculável e de recursividade, que não está no interior de um sistema formal, já que a noção de calculável é intuitiva. Com efeito, **Post 1936** argumentou que a definição de Church deveria ser vista como uma hipótese. Porém, a expressão completa "Tese de Church" ocorre pela primeira vez em **Kleene 1952**.

Como a metademonstração da Tese/Definição de Church não pode ser feita no interior de um sistema formal, já que se apóia em aspectos intuitivos da noção de calculabilidade, em geral, para defendê-la, apresentamos algumas evidências de sua veracidade. É o que passamos a expor, nos utilizando basicamente de **Shoenfield 1967**, Seção 2.5, com pequenas modificações.

A primeira evidência da Tese/Definição de Church é que se mostrou que várias funções calculáveis são recursivas. Por exemplo, as funções da aritmética elementar podem ser definidas indutivamente, utilizando os resultados obtidos na seção anterior, como no caso da exponenciação, que pode ser definida por $a^0 = 1$ e $a^{b+1} = a^b.a$. Também podemos mostrar que outras funções calculáveis, que ocorrem em outras áreas da Matemática, como na Análise e na Teoria de Conjuntos, são recursivas.

Ao lado dessa evidência positiva, temos uma forte evidência negativa: ninguém exibiu uma função calculável que não é recursiva e nem foi sugerido um método plausível de como fazê-lo.

Outra evidência da Tese/Definição de Church é que os métodos de obter funções calculáveis, a partir de funções calculáveis, levam funções recursivas em funções recursivas. Temos aqui também a evidência negativa: ninguém exibiu um método, nem o sugeriu de modo plausível, de como obter funções calculáveis a partir de funções calculáveis, que não resultasse ser um método de como obter funções recursivas a partir de funções recursivas.

Podemos, por fim, argumentar a favor da Tese/Definição de Church, apresentando diretamente o conceito de calculabilidade e mostrando que este é equivalente ao de função recursiva. É neste ponto que se encontra a evidência mais forte a favor da Tese/Definição de Church, pois toda tentativa de apresentar a classe mais geral das funções que seriam calculáveis (dentre elas podemos listar: λ-definibilidade (**Church 1935**), Turing-computabilidade (**Turing 1936**), Post-computabilidade (**Post 1936**), Gödel-Herbrand-computabilidade (**Gödel 1934**), Markov-computabilidade (**Markov 1954**), ser representável em uma extensão de ***N***) resultou não só funções da classe de funções recursivas, mas, exatamente, na própria classe das funções recursivas, o que sugere, segundo Shoenfield, que esta seria a classe natural das funções calculáveis, pois se torna difícil entender porque isto ocorreria se as funções recursivas não fossem justamente a classe das funções calculáveis.

A possibilidade de aplicação da Tese/Definição de Church motiva então a seguinte definição.

3.2.2. Definição. Diremos que um procedimento mecânico, ou uma função calculável, *simula* um determinado processo, se o resultado da função, aplicada a dados que representam a entrada do processo, representa a saída do processo a partir dessa entrada.

Assim, vamos, neste trabalho, aceitar a Tese/Definição de Church de que as funções calculáveis são as recursivas, bem como o que se poderia chamar de seu correlato mecânico.

3.2.3. Correlato Mecânico da Tese/Definição de Church. Um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva.

Mais ainda, podemos apresentar uma noção um pouco mais ampla de processo mecânico. Com efeito, como acabamos de ver, há uma estreita relação entre as noções de procedimento mecânico e de calculabilidade, porém, neste caso, eles estão definidos para todos os elementos de um domínio considerado, como no caso das funções calculáveis de números naturais que são definidas para todos os números naturais. Vamos estender, então, a noção de procedimento mecânico, considerando que este pode estar definido para um subconjunto de um conjunto de objetos considerados, isto nos leva à definição a seguir de função parcial.

3.2.4. Definição. Uma *função parcial n-ária F* é uma função de um subconjunto do conjunto de n-uplas de A, chamado de domínio de F, em um conjunto B.

Vamos, então, supor que exista um procedimento mecânico que calcule uma função parcial F. Logo, esse procedimento determina o valor de uma função parcial aplicada a a, caso a função esteja definida em a, i.e., caso exista o valor de $F(\mathrm{a})$. Assim, o cálculo de F será mecânico, caso exista um predicado G_F tal que $F(\mathrm{a}) = x \leftrightarrow \mathrm{G}_F(\mathrm{a}, x)$ e G_F seja calculável nos valores a e x para os quais F aplicada a a retorne um valor x. Isso motiva as definições a seguir.

3.2.5. Definição. Seja P um predicado n-ário. Dizemos que P é *positivamente calculável* se existe um predicado *(n+1)*-ário calculável Q, tal que, para cada seqüência a tal que $P(\mathrm{a})$, existe um elemento x, tal que $Q(\mathrm{a}, x)$. Ou seja,

$$P(\mathrm{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\mathrm{a}, x).$$

Notemos que, dada uma seqüência a, tal que $\sim P(\mathrm{a})$, não existe um elemento x tal que $Q(\mathrm{a}, x)$, e, neste caso, Q ser calculável não é suficiente para determinar que ocorra $\sim P(\mathrm{a})$. Assim, se P é positivamente calculável, então para todo a tal que $P(\mathrm{a})$, existe um método que permite determinar que $P(\mathrm{a})$, porém, no caso de $\sim P(\mathrm{a})$, pode não existir um método que permita determinar que $\sim P(\mathrm{a})$. Neste caso, a possibilidade de determinar se $P(\mathrm{a})$, ou se $\sim P(\mathrm{a})$, fica limitada aos a tais que $P(\mathrm{a})$, e, portanto, não se aplica a toda seqüência a.

3.2.6. Definição. Se F é uma função parcial n-ária, o *gráfico de F*, designado por G_F, é o predicado *(n+1)*-ário definido por:

$$\mathrm{G}_F(\mathrm{a}, a) :=_{\text{def.}} F(\mathrm{a}) = a.$$

3.2.7. Definição. Uma função parcial F é *calculável* se seu gráfico é positivamente calculável.

Levando em conta a Tese/Definição de Church, podemos, então, propor as seguintes definições.

3.2.8. Definição. Seja P um predicado n-ário. Dizemos que P é *recursivamente e-numerável* se existe um predicado *(n+1)*-ário recursivo Q, tal que, para cada seqüência a tal que $P(\mathrm{a})$, existe um elemento x, tal que $Q(\mathrm{a}, x)$. Ou seja,

$$P(\mathrm{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\mathrm{a}, x).$$

Notemos então que, se assumirmos a Tese/Definição de Church, temos que P é positivamente calculável se, e somente se, P é recursivamente enumerável.

3.2.9. Definição. Uma função parcial F é *recursiva parcial* se seu gráfico é recursivamente enumerável.

Assim, assumindo a Tese/Definição de Church, temos, por fim, que um procedimento, que se aplica a elementos de um domínio enumerável considerado, é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva parcial.

Notemos então que todo predicado recursivo P é recursivamente enumerável. Com efeito, basta tomar $Q(\mathrm{a}, x) = P(\mathrm{a})$, no qual, explicitamente, o valor de $Q(\mathrm{a}, x)$ não depende de x; assim, como, para todo a podemos calcular $P(\mathrm{a})$, temos que $Q(\mathrm{a}, 0) = P(\mathrm{a})$, logo, se $P(\mathrm{a})$ sempre existe x tal que $Q(\mathrm{a}, x)$ e, por outro lado, se existe x tal que $Q(\mathrm{a}, x)$ então $P(\mathrm{a})$, portanto, no caso de P ser recursivo, temos que $P(\mathrm{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\mathrm{a}, x)$ e, daí, que P é recursivamente enumerável. Assim, como um predicado recursivo é recursivamente enumerável, temos que se um procedimento pode ser descrito por um predicado recursivo, é mecânico.

Notemos, ainda, que toda função recursiva é recursiva parcial, pois seu gráfico $G_F(\mathrm{a}, a) :=_{\text{def.}} F(\mathrm{a}) = a$ é recursivo, já que é a composição da função F e da igualdade, que são recursivas.

Temos ainda o seguinte resultado, que utilizaremos posteriormente.

3.2.10. Metateorema. Dados uma função recursiva parcial F e um número natural a, o predicado P, tal que $P(\mathrm{a})$ se, e somente se, $F(\mathrm{a}) = a$, é recursivamente enumerável.

Metademonstração. Temos que $P(\mathrm{a})$ ocorre se, somente se, $F(\mathrm{a}) = 0$; que ocorre se, e somente se, o valor a é tal que no gráfico G_F de F temos que $G_F(\mathrm{a}, 0)$. Como F é recursiva parcial, então $G_F(\mathrm{a}, 0)$ é, por definição, recursivamente enumerável, logo, P é recursivamente enumerável.

Assim, neste trabalho, vamos aceitar, junto com a Tese/Definição de Church de que uma função é calculável se, e somente se, é recursiva, o seguinte Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church.

3.2.11. Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church. Um procedimento, que se aplica a elementos de um subconjunto de um conjunto enumerável considerado, é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva parcial. Em particular, notemos que toda função recursiva é recursiva parcial e que a função representante de um predicado recursivamente enumerável é recursiva parcial, logo, se um procedimento é simulado por uma função recursiva ou por um predicado recursivamente enumerável, então ele é mecânico.

Façamos, por fim, algumas considerações sobre processos mecânicos que envolvem aleatoriedade.

3.2.12. Observação. Vamos limitar nossa análise a processos mecânicos que envolvem aleatoriedade e que têm todas as seguintes características:

1. São processos com um conjunto de estados possíveis, designados por q_i, que podem ser divididos em três tipos, não necessariamente excludentes: estados iniciais (ou de entrada), designados por e_i; estados internos ao processo; e estados finais (ou de saída), designados por s_i.

2. São processos nos quais a passagem de um estado q_i a outro estado q_j ocorre com uma certa probabilidade p_{ij}.

3. São processos para os quais existem regras r_{ij} que descrevem *como* passar de um estado q_i a um estado q_j (já que o processo é suposto ser mecânico), assim, dado que o processo esta em um estado q_i, p_{ij} é a probabilidades de aplicação da regra r_{ij};.

4. São processos que, dado um estado q_i do processo, podemos determinar (recursivamente, também) o tipo do estado q_i, se é de entrada, interno, ou de saída.

5. E, por fim, como estamos considerando processos que simulam processos de decisão, sempre que houver um mesmo estado inicial, qualquer processo considerado deve sempre terminar com o mesmo estado final, senão haveria duas respostas ao mesmo problema; assim, cada processo está associado a um conjunto de pares ordenados (e_i, s_j), ou ainda, a uma função f tal que $f(e_i) = s_j$.

Um exemplo de processo com as características de 1 a 4 acima é um programa de computador que sorteia um número aleatório para realizar certas escolhas em função deste sorteio. Um outro exemplo com estas características é um processo físico cujo espaço de fase, seus estados iniciais e seus estados finais, mesmo sendo infinitos, possa ser finitamente (i.e., recursivamente) descritos, e no qual haja probabilidade na passagem de um estado a outro. Um exemplo de processo com todas as características acima são processos dos exemplos anteriores que simulem processos de decisão.

Seja então P um processo mecânico no qual haja acaso. Como estados iniciais, bem como estados finais, são certos estados do processo, podemos então considerar seus conjuntos como partes do conjunto de estados q_i do processo P. Temos então a seguinte tabela de todas as combinações possíveis de passagem de um estado a outro:

(q_1,q_1)	(q_1,q_2)	(q_1,q_3)	(q_1,q_4)	(q_1,q_5)	...
(q_2,q_1)	(q_2,q_2)	(q_2,q_3)	(q_2,q_4)	(q_2,q_5)	...
(q_3,q_1)	(q_3,q_2)	(q_3,q_3)	(q_3,q_4)	(q_3,q_5)	...

(q_4,q_1)	(q_4,q_2)	(q_4,q_3)	(q_4,q_4)	(q_4,q_5)	...
...	...	...	...	...	...

Temos então que r_{ij} é a regra que descreve como passar do estado q_i ao estado q_j e que p_{ij} é a probabilidade de aplicação da regra r_{ij} ao estado q_i, durante o processo P. Notemos que, no caso dos processos recursivos, tais probabilidades p_{ij} são apenas um (passagem necessária) ou zero (passagem impossível).

Como, porém, o processo aleatório P é considerado mecânico, a regra r_{ij}, possível de ser aplicada, descreve um subprocesso mecânico e, portanto, assumindo a Tese/Definição de Church, existe uma função recursiva g tal que $g(i,j) = k$, na qual k é o índice do estado e_k que resulta da aplicação da j-ésima regra possível r_{ij} ao estado q_i.

Mais ainda, pela propriedade 4 acima, podemos supor que há um predicado recursivo $t(i)$ que é verdadeiro se q_i é um estado final e falso caso contrário.

Vejamos então como, para todo processo aleatório mecânico com as características acima, existe um processo mecânico não-aleatório com os mesmos pares de entrada e saída. A idéia aqui é, dado um processo P aleatório mecânico com as características acima, considerar um processo P' mecânico não-aleatório que percorre todas os possíveis estados resultantes das aplicações das regras r_{ij} a partir do estado inicial e_i até atingir um estado final, de modo que P e P' tem os mesmos pares de entrada e saída, sendo que, porém, P' é mecânico e não-aleatório.

Já vimos que, para toda seqüência de números $a_1, a_2, ..., a_n$, existe um único número $a = < a_1, a_2, ..., a_n >$ que pode ser determinado recursivamente, e que, inversamente, dado um número a, podemos calcular recursivamente a seqüência $a_1, a_2, ..., a_n$ tal que $a = < a_1, a_2, ..., a_n >$ (*cf.* definições e resultados a partir da Definição 3.1.23). Assim, dado um estado inicial e_i, temos que cada número a determina uma, e apenas uma, seqüência das regras que podem vir a ser aplicadas sucessivamente a partir de e_i: do estado inicial e_i passamos ao estado e_{i_1} tal que $g(i, a_1) = i_1$; desse estado e_{i_1} passamos ao estado e_{i_2} tal que $g(i_1, a_2) = i_2$, e assim por diante até um estado final e_{i_n} tal que $g(i_{n-1}, a_n) = i_n$.

Tal procedimento pode ser descrito indutivamente com funções recursivas por

$$h(i, < a_1 >) = g(i, a_1)$$

$$h(i, < a_1, a_2, ..., a_{n+1} >) = g(h(i, < a_1, a_2, ..., a_n >), a_{n+1})$$

(que é recursiva pela definição equivalente:

$$h(i, m) :=_{\text{def.}} \quad g(i, a_1) \text{ se } lh(m) \leq 1 \text{ e}$$

$$:=_{\text{def.}} \quad g(h(i, ln(m, lh(m) \sim 1))), (m)_{lh(m)}) \text{ se } lh(m) > 1$$

e pelo Metateorema 3.1.20).

Agora, com a aplicação da função t descrita acima, podemos determinar se o resultado de um procedimento determinado por a, a partir de e_i, é um estado final s_j ou não.

Repetindo o procedimento acima para cada número a e, conseqüentemente, para cada seqüência $a_1, a_2, ..., a_n$, podemos determinar, com a aplicação da função t, se o resultado desse procedimento é um estado final e_j ou não, simulando assim, recursivamente, um desenvolvimento possível do processo P que resulta em e_j. Tal procedimento pode ser descrito com funções recursivas por

$$f(i) :=_{\text{def.}} h(\text{i}, \mu x(Seq(x) \wedge t(h(i,x))))$$

Assim, para todo procedimento P mecânico e aleatório com as característica de 1 a 5 descritas no início desta análise, existe um processo P' mecânico e não-aleatório com os mesmos pares de entrada e saída, logo, podemos considerar que os procedimentos mecânicos aleatórios como considerados aqui são mecânicos no sentido do Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church acima (Asserção 3.2.11). Assim, consideraremos que:

3.2.13. Observação. Assumiremos que uma modelagem finita aleatória tem as características descritas na Observação 3.2.12 acima e que, como vimos, qualquer processo que possa, *em princípio*, ser descrito por uma modelagem finita, mesmo que envolvendo aleatoriedade, pode ser simulado por uma função recursiva parcial, logo é mecânico no sentido do Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church acima (Asserção 3.2.11). Se adotarmos que "modelagem infinita" é uma contração em termos, temos que qualquer processo que possa ser modelado, é mecânico no sentido definido acima.

4. OS METATEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Neste capítulo, discutimos os metateoremas da incompletude de Gödel, seus enunciados e a metademonstração da parte que será usada neste trabalho. Apresentamos, também, a definição de teoria axiomatizada, utilizando a Tese/Definição de Church, mostrando que há um procedimento mecânico para gerar os teoremas de uma teoria axiomatizada, e mostrando, também, como encontrar a fórmula de Gödel para uma extensão axiomatizada de ***N***, que é usada na metademonstração dos metateoremas da incompletude de Gödel.

1. Os Dois Metateoremas da Incompletude de Gödel.

Vamos, a seguir, enunciar o Primeiro e o Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel (**Gödel 1931**), nos termos das definições introduzidas neste trabalho, bem como introduzir alguns resultados e comentários, constantes da literatura, a respeito de algumas interpretações desses metateoremas.

4.1.1. Definição. Uma teoria ***T*** é *axiomatizada* se, dada uma fórmula **A** de ***T***, existe um método de decisão para determinar se **A** é um axioma de ***T***.

Veremos, na próxima seção, como podemos usar a Tese/Definição de Church para caracterizar uma teoria axiomatizada.

4.1.2. Definição. Uma teoria, cuja linguagem é ***L(N)***, é *ω-consistente* se não existe uma fórmula **A(x)**, tal que $\mathbf{A(k_{\mathit{n}})}$ é teorema de ***T***, para todo número natural *n*, e **~∀xA(x)** também é teorema de ***T***. Caso contrário, ***T*** é chamada *ω-inconsistente*.

Notemos que a ω-consistência implica a consistência (Definição 1.5.13). Com efeito, se ***T*** é uma teoria inconsistente, então qualquer fórmula é teorema de ***T***, em particular as fórmulas $\mathbf{A(k_{\mathit{n}})}$, para todo número natural *n*, e **~∀xA(x)**; logo, ***T*** é ω-inconsistente. Por contraposição, temos, portanto, que se ***T*** é ω-consistente, então ***T*** tem que ser consistente. Por outro lado, temos que a consistência não implica a ω-consistência. Por exemplo, basta considerar uma teoria, cujo modelo seja a estrutura dos números naturais acrescida do elemento infinito ∞, tal que, para todo indivíduo x_1:

$S(\infty) = \infty$; $\quad\quad$ $\infty + x_1 = x_1 + \infty = \infty$;

$x_1 \neq 0 \rightarrow \infty \cdot x_1 = x_1 \cdot \infty = \infty$; e $\quad\quad$ $x_1 \neq \infty \rightarrow x_1 < \infty$.

Podemos mostrar que esta estrutura é modelo para a teoria ***N***, e, portanto, é modelo para uma teoria ***T***, cujos axiomas são os de ***N*** acrescidos das fórmulas que acabamos de descrever. Pela Segunda Forma do Metateorema da Completude (Metateorema 2.3.16), como ***T*** tem modelo, ***T*** é consistente; porém, ***T*** não é ω-consistente. Com efeito, se considerarmos a fórmula **A(x)** como $x_1 \neq \infty$, podemos mostrar que $\mathbf{A(k_{\mathit{n}})}$ é teorema de ***T***, mas que, também, **~∀xA(x)** é teorema de ***T***, já que **~A**(∞) é teorema de ***T***. Assim, temos que não é o caso de que se ***T*** é uma teoria consistente, então ***T*** é uma teoria ω-consistente.

Dadas estas definições, passemos aos enunciados dos Metateoremas da Incompletude de Gödel.

4.1.3. Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel. Para toda extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N***, existe, e podemos exibir, uma fórmula fechada $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ tal que:

(1) $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é verdadeira no Modelo Padrão $\mathbb{N}$

(ou, equivalentemente, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é verdadeira no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$);

(2) $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é teorema de ***T***; e

(3) se ***T*** é ω-consistente, então **~**$\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é teorema de ***T***.

O metateorema anterior permite estabelecer, portanto, que uma extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N*** é incompleta, em pelo menos dois sentidos: (1) no sentido da Definição 1.5.10, já que existe uma fórmula fechada $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ que não é decidível em ***T***, i.e., nem ela, nem sua negação, são teoremas de ***T***; e (2) também no sentido de que o conjunto de seus teoremas não cobre todas fórmulas de ***T*** que são verdadeiras no Modelo Padrão, ou seja, não existe uma extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N*** cujos teoremas sejam exatamente as fórmulas verdadeiras no Modelo Padrão. Discutiremos as implicações deste metateorema no capítulo seguinte.

4.1.4. Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel. Para toda extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N***, a fórmula de ***T*** que afirma que ***T*** é consistente não é teorema de ***T***.

Neste trabalho, vamos nos utilizar apenas das partes (1) e (2) do Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel, cuja metademonstração será apresentada a seguir, os outros resultados dos dois metateoremas da incompletude não serão utilizados diretamente. Façamos algumas observações gerais sobre estes outros resultados, antes de passarmos à metademonstração da parte que nos interessa.

Em relação à parte (3) do Primeiro Metateorema da Incompletude, **Rosser 1936**, mostrou que a condição de ω-consistência da teoria ***T*** não é necessária. Neste caso, o Primeiro Metateorema da Incompletude pode ser enunciado:

4.1.5. Metateorema da Incompletude (Gödel-Rosser). Para toda extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N***, existe, e podemos exibir, uma fórmula fechada $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ tal que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é verdadeira no Modelo Padrão $\mathbb{N}$ (ou, equivalentemente, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é verdadeira no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$) e tanto $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, quanto sua negação $\mathbf{\sim G}_{\boldsymbol{T}}$, não são teoremas de ***T***. [6]

Quanto ao Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel, foi inicialmente enunciado para uma teoria que contém a teoria ***PA*** (Definição 1.4.4) mostrando que não existe uma demonstração finitária da consistência de ***PA***, se entendermos por finitária uma demonstração que pode ser representada em ***PA*** (veremos a seguir como as demonstrações podem ser representadas em ***PA***[7]). Isto levou alguns lógicos a afirmar que nunca se poderia demonstrar, ou metademonstrar, a consistência de ***PA***. Vimos acima uma metademonstração da consistência de ***PA***, utilizando o Teorema da Completude de Gödel e o Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, portanto, não é o caso de que não exista uma metademonstração da consistência de ***PA***. Podemos afirmar que não há uma metademonstração da consistência de ***PA***, apenas

[6] Veja **Mendelson 1997**, p. 208, para a metademonstração desse metateorema.

[7] Para uma discussão mais detalhada da noção de *matemática finitária*, *cf.* **da Silva 2003** e **Epstein & Carnielli 1989**.

se restringirmos o conceito de metademonstração, o que não será tratado aqui. Mas por que a metademonstração da consistência de $\boldsymbol{PA}$ apresentada não é finitária ? Um dos métodos utilizados para demonstrar a consistência de uma teoria consiste em exibir uma certa propriedade que os axiomas têm e que é preservada com a aplicação das regras de inferência e, a partir daí, mostrar que uma fórmula da teoria não tem esta propriedade, o que metademonstra que a fórmula não é um teorema da teoria e, logo, que a teoria não é trivial, e, portanto, pelo Metateorema 1.5.14, que ela é consistente. No caso da metademonstração apresentada, tal propriedade é "ser válida no Modelo de Marcas", que, como veremos, não pode ser representada em $\boldsymbol{PA}$.

Uma interpretação possível dos Metateoremas da Incompletude de Gödel é então a de **Dummet 1963** (1979, p.887), para quem

> A concepção intuitiva de uma demonstração matemática válida, mesmo para as proposições de uma certa teoria circunscrita, não pode geralmente ser identificada com o conceito de uma demonstração formal; porque pode suceder que nenhum sistema formal consiga incorporar todos os princípios de demonstração que deveríamos aceitar intuitivamente; e é isto precisamente que é provado no caso da teoria dos números pelo teorema de Gödel.

Notemos que, neste caso, o que Dummet chama "demonstração matemática", chamamos "metademonstração", e, que chamamos "demonstração", ao que ele chama de "demonstração formal".

Se, então, por um lado, o Metateorema da Incompletude permite mostrar a diferença essencial entre demonstração e metademonstração, por outro, mesmo para o caso das demonstrações, o Segundo Metateorema da Incompletude não exclui a existência de demonstrações da consistência de $\boldsymbol{PA}$. Com efeito, são conhecidas algumas teorias que permitem demonstrar a consistência de $\boldsymbol{PA}$, em particular a de **G. Gentzen 1936** (No apêndice de **Mendelson 1964**, podemos encontrar uma demonstração baseada em **Schütte 1951**, de linhas similares à demonstração de Gentzen) e a de **Gödel 1958** (que pode ser encontrada em **Shoenfield 1967**, Seção 8.3). Porém, neste caso, a validade da demonstração da consistência de $\boldsymbol{PA}$, nestas teorias, depende da consistência destas teorias; que, por sua vez, não pode demonstrar sua própria consistência e exigem, ou princípios mais fortes para a metademonstração de sua consistência, ou, de teorias consistentes nas quais haja uma a demonstração da consistência daquelas teorias; que, por sua vez, apresentam a mesma característica, implicando em uma hierarquia indefinida de consistências. Apesar da necessidade desta seqüência, sua existência já mostra que não se pode concluir pela impossibilidade da existência de demonstrações da consistência de ***PA***.

A respeito da concepção de que o Segundo Metateorema de Gödel implica que nunca poderemos saber se ***PA*** é consistente, ou não, **Smullyan 1992**, p.109, um especialista no estudo dos metateoremas de Gödel e em temas relacionados, escreve:

> Este resultado [do Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel] tem sido parafraseado "se a aritmética é consistente, então ela não pode demonstrar sua própria consistência." Desafortunadamente, tem existido uma boa parte de absurdos correntes escritos sobre isto por pessoas que, obviamente, não entendem do está sendo tratado. Temos visto tais declarações irresponsáveis como "Pelo segundo teorema de Gödel, nunca poderemos saber se a aritmética é, ou não, consistente." Bobagem! Para ver quão bobo é isto, suponha que ocorresse que a sentença **consis** fosse demonstrável em P.A. – ou, para ser mais realista, suponha considerarmos um sistema que pode demonstrar sua própria consistência. Haveria alguma base para confiarmos na consistência do sistema ? Claro que não! Se o sistema fosse inconsistente, então poderia demonstrar toda sentença – inclusive a afirmação de sua própria consistência! Confiar a consistência de um sistema sobre as bases de que ele pode demonstrar sua própria consistência é tão tolo quanto confiar na veracidade de uma pessoa com base em que ela diz que nunca mente. Não, o fato de P.A., se consistente, não poder demonstrar sua consistência – este fato não constitui a menor base racional para duvidar da consistência de P.A.

Concluímos, portanto, que não é a consistência de ***PA***, ou da Aritmética, que está em jogo, mas a possibilidade de identificarmos as metademonstrações, com demonstrações, ou ainda, como veremos mais adiante, de assumirmos que todos os processos utilizados na metademonstração podem ser formalizados, ou equivalentemente, podem ser mecânicos.

Antes de passarmos à discussão da metademonstração do Metateorema da Incompletude, dissipemos algumas dúvidas em relação aos Metateoremas da Completude e ao Primeiro Metateorema da Incompletude: como uma teoria sobre os números naturais é necessariamente incompleta, se ela é uma teoria de primeira ordem e, pelo Metateorema da Completude, deveria ser completa ? O aparente paradoxo se deve a uma confusão entre duas noções diferentes de completude. Vimos que uma extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N*** é incompleta, porque nem toda fórmula fechada de ***T*** é decidível em ***T***, e porque seus teoremas não cobrem o conjunto de fórmulas de ***T*** que são verdadeiro no Modelo Padrão. O Metateorema da Completude afirma que uma fórmula **A** de ***T*** é teorema de ***T***, se, e somente se, **A** é válida em ***T***, e, portanto, toda fórmula que é válida em ***T***, é teorema de ***T***. Uma fórmula **A** de ***T*** é válida em ***T*** se, por definição, é válida em todo modelo de ***T***, ou seja, se **A** é válida em toda estrutura que valida os axiomas de ***T***. O que o Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel permite concluir, então, junto com o Metateorema da Completude, é que (1) há modelos de ***T***, i.e., estruturas para ***T*** nas quais os axiomas de ***T*** são válidos, que validam fórmulas que não são válidas no Modelo Padrão (sendo estes modelos chamados, por isso mesmo, *modelos não-padrão*) e (2) que, portanto, o Modelo Padrão pertence à classe dos modelos de ***T***, mas que não há uma extensão axiomatizada ***T*** de ***N*** tal que o conjunto de seus modelos seja exatamente a classe unitária cujo único elemento é o Modelo Padrão (com efeito, não existe nem mesmo uma extensão não-axiomatizável, logo, com um conjunto infinito de axiomas, cujo único modelo seja o Modelo Padrão, o que é conseqüência, como estabelecido na Teoria de Modelos e que não trataremos aqui, de que o Modelo Padrão não é expressável em uma linguagem de primeira ordem, *cf.* Definição 6.4.34) [8].

Passemos agora a descrever os aspectos gerais da metademonstração das partes (1) e (2) do Primeiro Metateorema da Incompletude. O núcleo da metademonstração está em construir, para cada extensão axiomatizada ***T*** de ***N***, uma fórmula $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, chamada de *Formula de Gödel*. Como veremos, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ expressa sua própria indemonstrabilidade em ***T***. Portanto, como ***T*** é consistente, ***T*** não pode demonstrar $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, o que mostra, por isso mesmo, que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é verdadeira. A analogia aqui com o paradoxo do mentiroso é evidente[9]. Lembremos o paradoxo do mentiroso: consideremos o enunciado "Eu estou mentindo". Ora, se for verdadeiro, então é uma mentira, portanto é falso; por outro lado, se for falso, então é uma mentira, e, portanto, é verdadeiro, o que é uma contradição. Porém, no caso da fórmula de Gödel, não há uma contradição propriamente dita, pois o que a fórmula expressa, pela sua construção, como veremos a seguir, é sua própria indemonstrabilidade, e não sua autonegação. Daí decorre, não que ela não seja verdadeira, mas que ela não seja demonstrável. Um dos méritos do Metateorema é, portanto, também, diferenciar a noção de verdade da noção de demonstrabilidade, além de, como vimos, diferenciar a noção de metademonstração da de demons-

---

[8] Para uma discussão mais detalhada sobre modelos para a Aritmética de Peano, *cf.* **Kaye 1991.**

[9] Veja **Gödel 1931** (1979, p. 251), no qual há também referência ao Paradoxo de Richard. Gödel diz ainda que "Qualquer antinomia epistemológica pode ser usada para uma demonstração análoga de não-demonstrabilidade."

tração. Vamos então aos passos gerais da metademonstração.

1. Inicialmente, mostramos como podemos representar termos e fórmulas de uma extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N*** por números.
2. A partir daí, mostramos como a demonstração em ***T*** pode ser representada por uma função recursiva *Dem*(x, y).
3. Concomitantemente, mostramos que a substituição de variáveis por termos, em fórmulas de ***T***, também pode ser representada por uma função recursiva *Sub(x, y, z)*.
4. Apresentamos, então, o resultado que afirma que toda função recursiva pode ser representada por uma fórmula dentro do sistema.
5. A partir daí, construímos a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, que expressa sua própria indemonstrabilidade.
6. Da consistência de ***T***, podemos, então, concluir que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não pode ser demonstrada em ***T***, pois isto implicaria a inconsistência de ***T***.
7. Portanto, temos que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é demonstrável em ***T***, e, por isso mesmo, já que afirma sua própria indemonstrabilidade, é verdadeira, o que metademonstra as partes (1) e (2) do Metateorema.

Passemos então à representação de fórmulas por números e à determinação da relação recursiva *Dem(x, y)* e da função recursiva *Sub(x, y, z)*.

2. Teorias Axiomatizadas e Funções Recursivas.

Vamos, nesta seção, mostrar como representar fórmulas e seqüência de fórmulas por números e, então, relacionar teorias axiomatizadas com as funções recursivas, mostrando como as demonstrações nestas teorias estão associadas a funções recursivas.

Comecemos, mostrando como associar um número a cada termo ou fórmula e, também, a cada seqüência de fórmulas.

Inicialmente, podemos associar, a cada símbolo do alfabeto de uma linguagem de um sistema formal, um número. Se **u** é um símbolo do alfabeto, então *SN*(**u**) será o número associado a **u**, chamado de *número do símbolo* **u**. Desde que o alfabeto seja enumerável, essa função pode ser definida.

A partir daí, a cada expressão **u** da linguagem que é um termo ou uma fórmula e tem, portanto, a forma $\mathbf{vv_1...v_n}$ podemos associar uma seqüência de $n + 1$ números: o primeiro número da seqüência é o número do primeiro símbolo, **v**, que ocorre na expressão, o segundo número da seqüência é o número da expressão $\mathbf{v_1}$ que ocorre na expressão **u**, e assim por diante até o último número da seqüência que é o número da expressão $\mathbf{v_n}$.[10]

Vimos, na Seção 3.1, como a função β permitia associar um número a cada seqüência de números. Com efeito, à seqüência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ associávamos o número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$ que era o menor número a tal que $\beta(a, 0) = n$ e $\beta(a, i) = a_i$, para todo $i = 1, ..., n$.

Como, então, a cada expressão associamos uma seqüência de números e, pela função β, podemos associar uma seqüência de números a um único número, temos como associar, a cada expressão **u** da linguagem do sistema formal, um número, que denotamos por [**u**] e chamamos *número da expressão* **u**.

Notemos que, como toda fórmula é uma expressão, temos como associar, a cada fórmula, um número.

Por fim, como podemos associar um número a cada seqüência de fórmulas, podemos associar uma seqüência de números a cada seqüência de fórmulas: o primeiro número da seqüência é o número da primeira fórmula, o segundo número da seqüência é o número da segunda fórmula, e assim por diante. Assim, a cada seqüência de fórmulas temos associada uma seqüência de números, e, novamente, pela função β, podemos associá-la a um número: temos, portanto, um número associado a cada seqüência de fórmulas, chamado de *número da seqüência de fórmulas*.

Vamos, então, aplicar este método a ***L(N)***, definindo, inicialmente, os números das expressões de ***L(N)***, já que o alfabeto de ***L(N)*** é enumerável.

---

[10] Podemos fazer outro tipo de associação, também usual nas metademonstrações dos metateoremas de Gödel: como cada expressão é uma seqüência finita de símbolos do alfabeto da linguagem, podemos associar a cada expressão a seqüência dos números dos símbolos que a compõem, na ordem em que aparecem na expressão. Adotamos, porém, a associação feita em **Shoenfield 1967**.

4.2. 1. Definição. O *número do símbolo* do alfabeto de ***L(N)*** é a função *SN*, do alfabeto de ***L(N)*** no conjunto dos números naturais, tal que:

$SN(\sim) = 1$; $SN(\vee) = 3$; $SN(\exists) = 5$; $SN(=) = 7$; $SN(0) = 9$;

$SN(S) = 11$; $SN(+) = 13$; $SN(\cdot) = 15$; $SN(<) = 17$; $SN(x_i) = 2 \cdot i$.

Notemos que a função *SN* estabelecida nesta definição associa as variáveis, aos números pares, e os outros símbolos, a alguns números ímpares. Os infinitos números ímpares aos quais não está associado nenhum símbolo podem vir a ser usados no caso de uma extensão enumerável de ***L(N)***.

4.2.2. Definição. O *número da expressão* de ***L(N)*** é a função [ ], do conjunto das expressões de ***L(N)*** no conjunto dos números naturais, tal que, se **u** é uma expressão da forma $\mathbf{v}\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$, então

$$[\mathbf{u}] = < SN(\mathbf{v}), [\mathbf{v}_1], ..., [\mathbf{v}_n] >.$$

Notemos, então, que dada uma expressão de ***L(N)***, sempre podemos calcular seu número de expressão, já que a função *n*-ária número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$ é recursiva. Mais ainda, podemos calcular o número de qualquer expressão de uma linguagem de alfabeto enumerável, desde que esteja definida uma função análoga à função *SN* acima.

Inversamente, existe um procedimento mecânico para determinar se, dado um número, este é o número de uma expressão **u** de ***L(N)***, ou o número de qualquer expressão de uma linguagem de alfabeto enumerável, novamente, desde que esteja definida uma função análoga à função *SN* acima. Com efeito, dado um número, podemos determinar se ele é, ou não, um número de uma seqüência, já que o predicado *Seq* é recursivo (Metateorema 3.1.29). Mais ainda, podemos determinar, pelas funções recursivas *lh* e $(a)_i$, qual é esta seqüência de números. Lembremos, então, que definimos o número das expressões para as expressões que são termos ou fórmulas. Assim, se a seqüência de números tem $n + 1$ elementos, então, ou (1) $(a)_0$ é o número de um símbolo que forma uma expressão a partir de *n* elementos (e.g. se $(a)_0$ é o número de um predicado *n*-ário, a seqüência tem que ter $n +1$ elementos, se $(a)_0$ é o número de uma função *n*-ária, a seqüência tem que ter $n + 1$ elementos, se é um conectivo binário, a seqüência tem que ter três elementos, etc.) ou (2) $(a)_0$ não é o número de um símbolo que forma uma expressão a partir de n elementos. No caso (2), a não é o número de uma expressão. No caso (1), por hipótese de indução, já que cada $(a)_i$ é menor que o número inicial a, podemos aplicar o mesmo procedimento em cada um dos $(a)_i$ da seqüência para verificar se cada um deles é um número de uma expressão (até chegar aos números de variáveis individuais ou constantes, que são os casos bases, dos quais parte qualquer formação de expressões).

De posse, então, dos números das expressões de ***L(N)***, vamos, a partir de agora, fazer uma seqüência de definições de funções e predicados recursivos (denominaremos, por abuso de linguagem, os predicados unários por *conjuntos*), seguidos do papel que desempenham na representação das expressões de ***L(N)***. Nós as utilizaremos mais adiante para definir uma teoria axiomatizada, para construir o predicado recursivo que representa a demonstração em ***N***, bem como, para definir a função recursiva que representa a substituição de variáveis por termos, que nos permitirá, na próxima seção, construir a fórmula da Gödel e metademonstrar a parte que será usada, neste trabalho, do Metateorema da Incompletude.

A) $Vbel(a) \ :=_{\text{def. expl.}} \ a = \langle (a)_0 \rangle \wedge \exists y_{y \leq a}((a)_0 = 2 \cdot y)$.

$Vbel(a)$ significa que $a = [\mathbf{x}]$, para alguma variável $\mathbf{x}$.

B)
$$
\begin{array}{llll}
Term(a) & :=_{\text{def. expl.}} & 0 = 0 & \text{se } a = \langle SN(0) \rangle, \\
 & :=_{\text{def. expl.}} & Term((a)_1) & \text{se } a = \langle SN(S), (a)_1 \rangle, \\
 & :=_{\text{def. expl.}} & Term((a)_1) \wedge Term((a)_2) & \text{se } a = \langle SN(+), (a)_1, (a)_2 \rangle \vee \\
 & & & a = \langle SN(\cdot), (a)_1, (a)_2 \rangle, \\
 & :=_{\text{def. expl.}} & Vbel(a) & \text{caso contrário.}
\end{array}
$$

$Term(a)$ significa que $a = [\mathbf{a}]$, para algum termo $\mathbf{a}$. Notemos que este predicado é recursivo, já que o Metateorema 3.1.38 permite a definição indutiva da função representante e o Metateorema 3.1.20 permite a definição por casos, sendo a última condição, a negação da disjunção das anteriores. A seguir, sempre nos utilizaremos destes resultados, no caso de uma definição indutiva por casos.

C) $AFor(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $a = \langle (a)_1, (a)_2, (a)_3 \rangle \wedge ((a)_0 = SN(=) \vee (a)_0 = SN(<)) \wedge$
$Term((a)_1) \wedge Term((a)_2)$.

$AFor(a)$ significa que $a = [\mathbf{A}]$, para alguma fórmula atômica **A**.

D) $For(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $For((a)_1)$ se $a = \langle SN(\sim), (a)_1 \rangle$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $For((a)_1) \wedge For((a)_2)$ se $a = \langle SN(\vee), (a)_1, (a)_2 \rangle$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $Var((a)_1) \wedge For((a)_2)$ se $a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $AFor(a)$ caso contrário.

$For(a)$ significa que $a = [\mathbf{A}]$, para alguma fórmula **A**.

Damos as três definições a seguir, para teorias que têm apenas funções e predicados unários e binários, como no caso de ***N***. Notemos, porém, que o método pode sempre ser generalizado a outras teorias, como as extensões axiomatizadas de ***N***.

E) $Sub(a, b, c)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ c se $Vbel(a) \wedge a = b$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $\langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c) \rangle$ se $a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $\langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c), Sub((a)_2, b, c) \rangle$
se $a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_0 \neq SN(\exists)$
$:=_{\text{def. expl.}}$ $\langle (a)_0, (a)_1, Sub((a)_2, b, c) \rangle$
se $a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_1 \neq b$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ a caso contrário.

Temos que $Sub([\mathbf{a}], [\mathbf{x}], [\mathbf{b}]) = [\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]]$ e $Sub([\mathbf{A}], [\mathbf{x}], [\mathbf{a}]) = [\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]]$.

F) $Fr(a, b)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $a = b$ se $Vbel(a)$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $Fr((a)_1, b)$ se $a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle$,
$:=_{\text{def. expl.}}$ $Fr((a)_1, b) \vee Fr((a)_2, b)$ se $a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge$
$(a)_0 \neq SN(\exists)$

$:=_{\text{def. expl.}}$ $Fr((a)_2, b) \wedge (a)_1 \neq b$ se $a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge$
$(a)_0 = SN(\exists)$

$:=_{\text{def. expl.}}$ $0 \neq 0$ caso contrário.

Fr([**A**], [**x**]) significa **x** é livre em **A**.

G) $Subtl(a, b, c)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $Subtl((a)_1, b, c)$ se $a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle$,

$:=_{\text{def. expl.}}$ $Subtl((a)_1, b, c) \wedge Subtl((a)_2, b, c)$

se $a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_0 \neq SN(\exists)$

$:=_{\text{def. expl.}}$ $Subtl((a)_2, b, c) \wedge ({\sim}Fr((a)_2, b) \vee {\sim}Fr(c,(a)_1))$

se $a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_1 \neq b$,

$:=_{\text{def. expl.}}$ $0 = 0$ caso contrário.

$Subtl$([**A**], [**x**], [**a**]) significa **x** é substituível por **a** em **A**.

H) $PAx(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $\exists x_{x < a}(For(x) \wedge a = \langle SN(\vee), \langle SN(\sim), x \rangle, x \rangle)$.

$PAx(a)$ significa que a é o número da expressão de um axioma proposicional.

I) $SAx(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $\exists x_{x < a}\exists y_{y < a}\exists z_{z < a}(Vble(x) \wedge For(y) \wedge Term(z) \wedge Subtl(y, x, z) \wedge$
$a = \langle SN(\vee), \langle SN(\sim), Sub(y, x, z) \rangle, \langle SN(\exists), x, y \rangle \rangle)$.

$SAx(a)$ significa que a é o número da expressão de um axioma de substituição.

J) $IAx(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $\exists x_{x < a}(Vble(x) \wedge a = \langle SN(=), x, x \rangle)$.

$IAx(a)$ significa que a é o número da expressão de um axioma da identidade.

K) $EAx(a)$ $:=_{\text{def. expl.}}$

($a = \langle NS(\vee), \langle NS(\sim), \langle NS(=), a, b \rangle \rangle, \langle NS(=), a, b \rangle \rangle$

$\wedge$ Var(a) $\wedge$ Var(b))

$\vee$

($a = < NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), a, b> >$,

$< NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), c, d> >$,

$< NS(=), < NS(+), a, c >, < NS(+), a, c > > > >$

$\wedge$ Var(a) $\wedge$ Var(b) $\wedge$ Var(c) $\wedge$ Var(d))

$\vee$

($a = < NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), a, b> >$,

$< NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), c, d> >$,

$< NS(=), < NS(\cdot), a, c >, < NS(\cdot), a, c > > > >$

$\wedge$ Var(a) $\wedge$ Var(b) $\wedge$ Var(c) $\wedge$ Var(d))

$\vee$

($a = < NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), a, b> >$,

$< NS(\vee)$,

$< NS(\sim), < NS(=), c, d> >$,

$< NS(\vee), < NS(\sim),< NS(<), a, c > >, < NS(<), a, c > > > >$

$\wedge$ Var(a) $\wedge$ Var(b) $\wedge$ Var(c) $\wedge$ Var(d)).

EAx(a) significa que a é o número da expressão de um axioma da igualdade, nos casos dos símbolos de função S, + e · e do símbolo de predicado <, que são os símbolos não-lógicos de ***L(N)***. Notemos que o método é extensível a outras teorias com outros símbolos não-lógicos.

L) $ER(a, b)$ $:=_{\text{def. expl.}}$ $b = < SN(\vee),(b)_1, a >$.

$ER([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ significa que **B** é inferida de **A**, pela Regra de Expansão.

M) $CR(a, b) \ :=_{\text{def. expl.}} \ a = < SN(\vee), b, b >$.

$CR([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ significa que **B** é inferida de **A**, pela Regra de Contração.

N) $AR(a, b) \ :=_{\text{def. expl.}} \ (a)_0 = SN(\vee) \wedge (a)_{2,\,0} = SN(\vee) \wedge$
$$b = < SN(\vee), < SN(\vee), (a)_1, (a)_{2,\,1} >, (a)_{2,\,2} >.$$

$AR([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ significa que **B** é inferida de **A**, pela Regra Associativa.

O) $TR(a, b, c) \ :=_{\text{def. expl.}} \ (a)_0 = SN(\vee) \wedge (b)_0 = SN(\vee) \wedge (b)_1 = < SN(\sim), (a)_1 > \wedge$
$$c = < SN(\vee), (a)_2, (b)_2 >.$$

$TR([\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}])$ significa que **C** é inferida de **A** e **B**, pela Regra do Corte.

P) $IR(a, b) \ :=_{\text{def. expl.}} \ (a)_0 = SN(\vee) \wedge (a)_{1,\,0} = SN(\sim) \wedge \sim Fr((a)_2, (b)_{1,\,1,\,1}) \wedge$
$$b = < SN(\vee), < SN(\sim), < SN(\exists), (b)_{1,\,1,\,1}, (a)_1 >>, (a)_2 >.$$

$IR([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$ significa que **B** é inferida de **A**, pela Regra de Introdução do $\exists$.

4.2.3. Convenção de Notação. Designamos por $NLAx_{\boldsymbol{T}}$ o conjunto dos números das expressões dos axiomas não-lógicos de ***T***.

Desde que o conjunto de fórmulas que podem ser axiomas de uma teoria ***T*** é completamente arbitrário, ele não precisa ser recursivo. Isto motiva uma outra definição de teoria axiomatizada, a partir do conceito de número de expressão.

4.2.4. Definição. Uma teoria ***T*** é *axiomatizada* se o conjunto dos números de expressões dos seus axiomas não-lógicos é recursivo.

Notemos então que esta definição é formalmente mais precisa que a definição de teoria axiomatizada introduzida anteriormente (Definição 4.1.1), que se apoiava na noção de método de decisão. Observemos que, se assumirmos a Tese/Definição de Church, as duas definições são equivalentes.

Vamos, agora, definir algumas funções e predicados relativos a teorias. Observemos que eles serão recursivos apenas se a teoria ***T*** em questão for axiomatizada. Notemos então que toda teoria finitamente axiomatizada é axiomatizada, em particular ***N*** é axiomatizada. Logo, as definições, a seguir, aplicam-se à teoria ***N***.

Q) $Ax(a) :=_{\text{def. expl.}} PAx(a) \vee SAx(a) \vee IAx(a) \vee EAx(a) \vee NLAx(a)$

Ax é o conjunto de números das expressões dos axiomas.

Associaremos agora um número a cada seqüência finita de expressões associando o número $< [\mathbf{u_1}], ..., [\mathbf{u}_n] >$ à seqüência $\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u}_n$.

R) $Prf(a) :=_{\text{def. expl.}}$

$$Seq(a) \wedge lh(a) \neq 0 \wedge \forall i_{i < lh(a)}(Ax((a)_i) \vee \exists j_{j < i}\exists k_{k < i}(ER((a)_j, (a)_i) \vee CR((a)_j, (a)_i) \vee AR((a)_j, (a)_i) \vee TR((a)_j, (a)_k, (a)_i) \vee IR((a)_j, (a)_i))) \wedge For((a)_i)).$$

Prf é o conjunto dos números das demonstrações.

S) $Dem(a, b) :=_{\text{def. expl.}} Prf(b) \wedge a = (b)_{lh(b) \dot{-} 1}$.

$Dem([\mathbf{A}], b)$ significa que b é o número de uma demonstração para $\mathbf{A}$[11]. Notemos que este predicado é recursivo, e que, portanto, é calculável, i.e., dados dois números a e b, podemos calcular se $Dem(a, b)$, calculando o valor da sua função representante $K_{Dem}(a, b)$ e, portanto, verificar se b é o número de uma demonstração para a fórmula de número a.

[11] Designaremos por *Dem* e *Teo* aos predicados que **Shoenfield 1967** denomina, respectivamente, por *Pr* e *Thm*.

Logo, temos o seguinte resultado.

4.2.5. Metateorema. Se b é o número de uma demonstração para a fórmula de número a, então $K_{Dem}(a, b) = 0$, caso contrário, $K_{Dem}(a, b) = 1$, e, portanto, dados dois números a e b, sempre podemos calcular se b é, ou não, o número de uma demonstração para a fórmula de número a.

Podemos, agora, definir o conjunto dos números das fórmulas que são teoremas de $\boldsymbol{T}$.

4.2.6. Definição. O conjunto $Teo_{\boldsymbol{T}}$ dos números das fórmulas que são teoremas de T é aquele dado por

$$Teo_{\boldsymbol{T}}(a) \ :=_{\text{def. expl.}} \ \exists x Dem(a, x).$$

Notemos então que, devido à presença do quantificador não-limitado, não podemos concluir que $Teo_{\boldsymbol{T}}$ é recursivo e veremos que este nem sempre é o caso. Entretanto, temos o seguinte metateorema.

4.2.7. Metateorema. Se $\boldsymbol{T}$ é uma teoria axiomatizada, então $Teo_{\boldsymbol{T}}$ é recursivamente enumerável.

Metademonstração. Segue imediatamente da Definição 3.2.8 de predicado recursivamente enumerável e da definição acima de $Teo_{\boldsymbol{T}}$.

Em particular, $Teo_{\boldsymbol{N}}$ é recursivamente enumerável.

Pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) de que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por um predicado recursivamente enumerável, temos, então, que a demonstração de teoremas de uma teoria axiomatizada é um procedimento mecânico.

Cabe, agora, perguntar pelo inverso do metateorema acima: se $Teo_{\boldsymbol{T}}$ é recursivamente enumerável, então $\boldsymbol{T}$ é uma teoria axiomatizada ? Notemos então que, no caso geral de um predicado P recursivamente enumerável, isto não é verdadeiro, pois, no caso do predicado não se aplicar aos axiomas lógicos, ou não preservar as regras de inferência lógica, não podemos encontrar uma teoria cujos axiomas sejam as fórmulas que *P* se aplica. Isto motiva definição a seguir.

4.2.8. Definição. Um predicado recursivamente enumerável *P* é um *predicado teoria* se satisfaz as seguintes condições:

1. Se **A** é um axioma lógico, então $P([\mathbf{A}])$;
2. Se $P([\mathbf{A}_i])$ para todas as hipótese de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é **A**, então $P([\mathbf{A}])$.

Notemos, então, que Teo_T é um predicado teoria.

A partir da definição acima, podemos obter o seguinte resultado:

4.2.9. Metateorema. Seja *P* um predicado teoria, então existe uma teoria axiomatizada ***T*** tal que:

$$P([\mathbf{A}]) \text{ se, e somente se, } \mathbf{A} \text{ é teorema de } \boldsymbol{T}.$$

Metademonstração. Como *P* é recursivamente enumerável, temos que existe um predicado recursivo binário *Q*, tal que $P(a) \leftrightarrow \exists x Q(a, x)$. Seja, então, ***T*** a teoria cujos axiomas não-lógicos são as fórmulas da forma $\mathbf{A} \wedge x_i = x_i$ tal que $Q([\mathbf{A}], i)$.

T é axiomatizada. Com efeito, como *Q* é recursivo, o conjunto dos números de expressões dos axiomas não-lógicos de ***T*** é recursivo, logo, pela Definição 4.2.4, ***T*** é axiomatizada.

Se $P([\mathbf{A}])$, então **A** é teorema de ***T***. Com efeito, se $P([\mathbf{A}])$, então, pela equivalência $P(a) \leftrightarrow \exists x Q(a, x)$ acima, temos que existe um número *i* tal que $Q([\mathbf{A}], i)$; logo, $\mathbf{A} \wedge x_i = x_i$ é axioma de ***T***, do qual temos que **A** é teorema de ***T***.

Se **A** é teorema de ***T***, então $P([\mathbf{A}])$. Basta mostrar que *P* se aplica aos axiomas de ***T*** e que as regras de inferência de ***T*** preservam a aplicação de *P*, assim, temos que *P* se aplica a todos os teoremas de ***T***, ou seja, equivalentemente, que, se **A** é teorema de ***T***, então $P([\mathbf{A}])$. Pela propriedade 2 de um predicado teoria, temos que as regras de inferência lógica preservam a aplicação de *P*, e, pela propriedades 1 de um predicado teoria, temos que *P* se aplica a todos os axiomas lógicos; basta, então, mostrar que P se aplica aos axiomas não-lógicos de $\boldsymbol{T}$. Com efeito, um axioma não-lógico de $\boldsymbol{T}$ é uma fórmula da forma $\mathbf{A} \wedge \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_i$, na qual $Q([\mathbf{A}], i)$; ora, nesse caso, temos que existe um i tal que $Q([\mathbf{A}], i)$ e, como $P(a) \leftrightarrow \exists x Q(a, x)$, temos que $P([\mathbf{A}])$ e, pelas propriedades 1 e 2 de predicado teoria, temos que $P([\mathbf{A} \wedge x_i = x_i])$. Portanto, P se aplica aos axiomas de $\boldsymbol{T}$ e as regras de inferência de $\boldsymbol{T}$ preservam aplicação de P, e, conseqüentemente, se $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$, então $P([\mathbf{A}])$.

Portanto, temos que a teoria $\boldsymbol{T}$ definida acima é uma teoria tal que, $P([\mathbf{A}])$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$.

Assim, os últimos metateoremas, junto com Teo_T ser um predicado teoria, permitem concluir a seguinte correspondência entre teorias formais e predicados recursivamente e-numerável.

4.2.10. Metateorema. Seja P um predicado e $\boldsymbol{T}$ uma teoria tal que:

$P([\mathbf{A}])$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$.

Nestas condições temos que:

P é um predicado teoria se, e somente se, $\boldsymbol{T}$ é axiomatizada.

Passemos agora a definição de função representável em uma extensão de $\boldsymbol{N}$. Esta definição nos será útil para construir a fórmula de Gödel, na próxima seção. Notemos, que a definição de função representável nos permite utilizar a "maquinaria" demonstrativa de uma extensão $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{N}$, para calcular uma função representável em $\boldsymbol{T}$.

4.2.11. Definição. Sejam $\boldsymbol{M}$ uma extensão da teoria $\boldsymbol{N}$, F uma função n-ária, $\mathbf{A}$ uma fórmula de $\boldsymbol{M}$ e $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ variáveis distintas. Dizemos que $\mathbf{A}$ *com* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ *representa F em* $\boldsymbol{M}$ se, para todo $a_1, ..., a_n$, a fórmula $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n} [\mathbf{k}_{a_1}, ..., \mathbf{k}_{a_n}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_b$ é teorema de $\boldsymbol{M}$, na qual $b = F(a_1, ..., a_n)$.

4.2.12. Definição. Seja F uma função n-ária. Dizemos que *F é representável em* $\boldsymbol{M}$ se existe uma fórmula $\mathbf{A}$ de $\boldsymbol{M}$ e variáveis distintas $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$, tais que $\mathbf{A}$ com $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ representa F em $\boldsymbol{M}$.

4.2.13. Definição. Sejam ***M*** uma extensão da teoria ***N***, *P* um predicado *n*-ário, **A** uma fórmula de ***M*** e $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x}_n$ variáveis distintas. Dizemos que **A** *com* $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x}_n$ *representa P em* ***M*** se, para todo $a_1, ..., a_n$,

$$P(a_1, ..., a_n) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{x}1, ..., \mathbf{x}n}[\mathbf{k}_{a_1}, ..., \mathbf{k}_{a_n}] \text{ é teorema de } \boldsymbol{M},$$

e

$$\sim P(a_1, ..., a_n) \rightarrow \sim\mathbf{A}_{\mathbf{x}1, ..., \mathbf{x}n}[\mathbf{k}_{a_1}, ..., \mathbf{k}_{a_n}] \text{ é teorema de } \boldsymbol{M},$$

4.2.14. Definição. Seja *P* um predicado *n*-ário. Dizemos que *P é representável em* ***M***, se existe uma fórmula **A** de ***M*** e variáveis distintas $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x}_n$ tal que **A** com $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x}_n$ representa *P* em ***M***.

Notemos que *P* é representável em ***M*** se, e somente se, sua função representante é representável em ***M***.

Enunciaremos, agora, sem metademonstrar, um resultado que nos será útil na próxima seção.

4.2.15. Metateorema da Representabilidade. Uma função é recursiva se, e somente se, é representável em uma extensão axiomatizada de ***N***; e um predicado é recursivo se, e somente se, é representável em uma extensão axiomatizada de ***N***.

Em particular, um predicado ou uma função são recursivos se, e somente se, são representáveis em ***N***. Como vimos, na Seção 3.2, este resultado pode ser interpretado como uma aplicação da Tese/Definição de Church, na medida em que identifica duas definições possíveis de calculabilidade. Porém, pode ser metademonstrado, sem apelo à Tese/Definição de Church. Na realidade nos utilizaremos apenas da implicação direta deste metateorema: se um predicado ou uma função são recursivos, então são representáveis em ***N***. A metademonstração desta proposição se encontra em **Shoenfield 1967**, p.128. Notemos, então, que para realizá-la é necessário mostrar que as funções I_i^n, +, · e $K_<$ são representáveis (cláusula R1 da definição das funções recursivas), e que as funções representáveis são fechadas em relação à composição de funções (cláusula R2 da definição das funções recursivas) e em relação ao operador μ (cláusula R3 da definição das funções recursivas).

4.2.16. Convenção de Notação. Por abuso de linguagem e para simplificar a notação, vamos, de acordo com o Metateorema da Representabilidade, considerar os predicados recursivos como fórmulas de uma extensão ***T*** de ***N***, tomando o cuidado de escrever em negrito a fórmula que corresponde ao predicado recursivo (por exemplo, **Q(x)** representa $Q(x)$). Faremos o mesmo para as funções recursivas, sendo que, neste caso, as expressões em negrito são termos: assim **F(x)** representa $F(x)$. Notemos que isto pode ser feito, pois, se a fórmula **A** com $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x}_n$, **y** representa F em ***M***, então, para todo $a_1, ..., a_n$, temos que a fórmula $\mathbf{A}_{\mathbf{x}1, ..., \mathbf{x}n}\,[\mathbf{k}_{a1}, ..., \mathbf{k}_{an}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_b$ é teorema de ***M*** e, neste caso, **B(F(x))** denota a fórmula $\mathbf{B}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{A}_{\mathbf{x}1, ..., \mathbf{x}n}\,[\mathbf{k}_{a1}, ..., \mathbf{k}_{an}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_b$. Vamos, também, considerar que, quando o número de expressão [**u**] aparece em negrito em uma fórmula de ***T***, **[u]** representa o numeral $\mathbf{k}_{[\mathbf{u}]}$. Estas convenções de notações nos permitem então passar diretamente das funções recursivas à sua representação em uma extensão ***M*** de ***N***.

3. A Fórmula de Gödel e a Metademonstração do Metateorema da Incompletude.

Com o Metateorema da Representabilidade (Metateorema 4.2.15), estamos agora em condição de construir a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$ que expressa sua própria indemonstrabilidade, mencionada no final da Seção 4.1, item 5 da descrição dos passos gerais para a metademonstração das partes (1) e (2) do Primeiro Metateorema da Incompletude, e de realizar a metademonstração. É o que faremos nesta seção.

Comecemos, então, pela fórmula:

$$\sim\boldsymbol{Teo}_T(x_1).$$

Se a variável x_1 vier a ser substituída pelo numeral **[A]**, obtemos a fórmula

$$\sim\boldsymbol{Teo}_T([\mathbf{A}])$$

que é verdadeira se, e somente se,

A não é um teorema de ***T***.

Lembremos que *Sub*([**A**], [**x**], [**a**]) = [$\mathbf{A_x}$**[a]**] e que, como 2 é o número de símbolo da variável x_1; temos então que *Sub*([**A**], 2, [**a**]) = [$\mathbf{A}_{x_1}$**[a]**], isto é, é igual ao numeral da fórmula que resulta da substituição de x_1 pelo numeral **[a]** da expressão **a**.

Chamemos, então, de **G** a fórmula

$$\mathbf{G}: \quad \boldsymbol{\sim Teo_T(Sub(}x_1\mathbf{, 2, }x_1\mathbf{))},$$

e, chamemos de $\mathbf{G}_T$ a fórmula

$$\mathbf{G}_T: \quad \boldsymbol{\sim Teo_T(Sub([G], 2, [G]))},$$

temos que

(♦) $\mathbf{G}_T$ é o resultado de se substituir em **G** a variável x_1 pelo numeral **[G]**.

Pela interpretação de Teo_T e *Sub* em $\mathbf{G}_T$, temos que $\mathbf{G}_T$ é verdadeira se, e somente se,

a fórmula que resulta de **G**,
pela substituição da variável x_1 pelo numeral **[G]**,
não é um teorema de ***T***.

Ora, mas por (♦) acima, esta fórmula, que $\mathbf{G}_T$ afirma não ser teorema, é a própria $\mathbf{G}_T$. Assim, a fórmula $\mathbf{G}_T$ afirma sua própria indemonstrabilidade. Chamamos, então, a fórmula $\mathbf{G}_T$ de *Fórmula de Gödel*.

Passemos então à metademonstração das partes (1) e (2) do Primeiro Metateorema da Incompletude, isto é, que se ***T*** é uma extensão consistente de ***N***, então:

(1) $\mathbf{G}_T$ é verdadeira no Modelo Padrão $\mathbb{N}$

(ou, equivalentemente, no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$);

(2) $\mathbf{G}_T$ não é teorema de $\boldsymbol{T}$.

Comecemos pelo item (2). Suponhamos que $\boldsymbol{T}$ seja consistente e que $\mathbf{G}_T$ seja teorema de $\boldsymbol{T}$, isto é, que $\boldsymbol{{\sim}Teo_T(Sub([G], 2, [G]))}$ seja teorema de $\boldsymbol{T}$. Seja, então, b o número da demonstração de $\mathbf{G}_T$, que pode ser calculado usando a função SN de $\boldsymbol{L(T)}$ e a função recursiva número-seqüência $< a_1, a_2, ..., a_n >$. Pelo Metateorema 4.2.5, como b é o número da demonstração para a fórmula de numeral $\mathbf{[G_T]}$, então $K_{Dem}([\mathbf{G}_T], b) = 0$ e, pelo Metateorema da Representabilidade e de $\boldsymbol{T}$ ser uma extensão de $\boldsymbol{N}$, temos que $\boldsymbol{Dem([G_T], b)}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Por (♦) acima, $[\mathbf{G}_T]$ é o resultado de $Sub([G], 2, [G])$ e Sub também é representável em $\boldsymbol{T}$, logo, temos também que $\boldsymbol{Dem(Sub([G], 2, [G])), b)}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$, e, que, portanto, $\exists \boldsymbol{x_2 Dem(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Pela definição de Teo_T temos que $\boldsymbol{Teo_T(Sub([G], 2, [G]))}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$, que implica que $\boldsymbol{\sim}\mathbf{G}_T$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Ora, mas isto contradiz a hipótese de que $\boldsymbol{T}$ é consistente e que $\mathbf{G}_T$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Portanto, se $\boldsymbol{T}$ é uma extensão consistente axiomatizada de $\boldsymbol{N}$, então $\mathbf{G}_T$ não é teorema de $\boldsymbol{T}$, o que metademonstra a parte (2) acima.

Para a parte (1), basta interpretar a fórmula $\mathbf{G}_T$. Notemos então que $K_{Dem}(a, b)$ e $Sub(a, b, c)$ são funções de números (e funções calculáveis), portanto, o que $\mathbf{G}_T$ afirma é que, calculado o número $a = [\mathbf{G}_T]$, não existe um número b, tal que $K_{Dem}(a, b) = 0$. É este resultado sobre funções numéricas que $\mathbf{G}_T$ afirma e que, pela parte (2) já metademonstrada, não é demonstrável em $\boldsymbol{T}$. Ora, como há uma correlação estreita entre o predicado Dem de números e a demonstração em $\boldsymbol{T}$, estabelecida pelo Metateorema 4.2.5 (a saber, que $K_{Dem}(a, b) = 0$ se b é o número de uma demonstração para a fórmula de número a), e, por (2), metademonstramos que não há demonstração para a fórmula de número $a = [\mathbf{G}_T]$, então não existe um número b, tal que $K_{Dem}([\mathbf{G}_T], b) = 0$, e, portanto, a fórmula $\mathbf{G}_T$ é verdadeira, metademonstrando a parte (1).

Notemos então que pelo Metateorema 2.3.14 e sua observação, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$ são estruturas isomorfas e como $\mathbf{G}_T$ é válida em $\mathbb{N}$, $\mathbf{G}_T$ também é válida em $\mathbb{M}$, o que metademonstra a equivalência afirmada em (1). Analisemos, então, a validade $\mathbf{G}_T$ de em $\mathbb{M}$.

Ora, dizer que $\mathbf{G}_T$ é válida em $\mathbb{M}$ significa dizer que as ações, definidas por $K_{Dem}([\mathbf{G}_T], b)$, que podem, em princípio, ser feitas sobre o papel, a partir de um numeral-marca b qualquer, sempre resultarão o numeral-marca traço. Novamente, é esta verdade sobre todo o conjunto dos procedimentos mecânicos $K_{Dem}([\mathbf{G}_T], b)$ no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, que a teoria ***T*** não consegue decidir!

Para terminar, vejamos então, sucintamente, os passos gerais realizados neste capítulo para a metademonstração das partes (1) e (2) do Primeiro Metateorema da Incompletude.

1. Inicialmente, mostramos como representar fórmulas de uma extensão ***T*** de ***N*** por números, o que nos permitiu definir a noção de extensão axiomatizada.
2. A partir daí, mostramos como a demonstração em uma extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N*** pode ser representada por uma função recursiva *Dem*(*x*, *y*) e como a substituição de variáveis por termos em fórmulas de ***T*** também pode ser representada por uma função recursiva *Sub(x, y, z)*.
3. Devido ao Metateorema 4.2.15 da Representabilidade, podemos supor a existência de fórmulas de ***T*** que representem *Dem*(*x*, *y*) e *Sub(x, y, z)*.
4. A partir daí, mostramos como construir a Fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$, que é $\boldsymbol{\sim Teo_T(Sub([G], 2, [G]))}$, e que expressa a sua própria indemonstrabilidade.
6. Mostramos como concluir, da consistência de ***T***, que $\mathbf{G}_T$ não pode ser demonstrada em ***T***, o que implicaria a inconsistência de ***T***, metademonstrando a parte (2) do Metateorema da Incompletude de Gödel.
7. Mostramos como, de 6 acima, podemos concluir que $\mathbf{G}_T$ é verdadeira, metademonstrando, assim, a parte (1).

Estes foram, basicamente, os passos para a metademonstração das partes (1) e (2) do Metateorema da Incompletude de Gödel, cujas conseqüências exploraremos no próximo capítulo.

5. A MODELAGEM DA DETERMINAÇÃO DE VERDADES MATEMÁTICAS E LÓGICAS

Neste capítulo, vamos analisar algumas conseqüências das partes (1) e (2) do Metateorema da Incompletude de Gödel, que passaremos a designar, simplesmente, por Metateorema de Gödel. Nesta parte inicial, expomos algumas interpretações clássicas, constantes da literatura, relativas ao Metateorema de Gödel. Posteriormente, analisamos algumas conseqüências do Metateorema de Gödel em relação as capacidades humanas[12] de determinação de verdades aritméticas, de determinação de teoremas e não-teoremas de ***N***, anteriormente introduzida (Definição 1.4.3), e de determinação de casos relativos ao Problema da Parada, isto é, de determinação de se uma função recursiva parcial ou um predicado recursivamente enumerável está definido para um certo número dado. No início deste capítulo veremos que uma conseqüência quase imediata do Metateorema de Gödel é que não existe uma teoria axiomatizada cujos teoremas sejam todas as verdades sobre números naturais, e que, consequentemente, não existe uma teoria axiomatizada cujos teoremas sejam todas as verdades matemáticas. Veremos então que não existe procedimento mecânico para gerar todas as fórmulas válidas no Modelo Padrão da Aritmética. A partir daí, tem sentido perguntar: Como o lógico matemático identifica as fórmulas válidas sobre números naturais ? Podemos construir uma teoria axiomatizada que dê conta completamente dessa capacidade ? Investigamos esta questão nas Seções 1 e 2 em que veremos que não é possível construir essa teoria e que, a partir de uma estreita relação entre as teorias axiomatizadas e os processos mecânicos, no sentido da Tese/Definição de Church, essa capacidade não é mecânica, isto é, não pode ser simulada por uma função recursiva parcial. Na Seção 3, tratamos da questão de capacidades não-mecânicas dos lógicos matemáticos relativas a processos mecânicos concernentes à determinação de teoremas e não-teoremas da teoria ***N*** e à determinação de casos do Problema da Parada.

Vejamos então, inicialmente, como o Metateorema de Gödel implica que não há uma teoria axiomatizada contendo como teoremas todas as verdades sobre números naturais (conseqüentemente, não há uma teoria axiomatizada, na qual sejam demonstráveis todas as verdades matemáticas) e que não existe procedimento mecânico para gerar todas as

---

[12] Observamos que como versamos sobre possibilidades em um domínio empírico de fatos, as definições e metateoremas são relativos a considerações teóricas sobre esse domínio e sobre a relação desse domínio com as noções abstratas introduzidas aqui, que são explicitadas no decorrer da exposição e que, esperamos, mostrem-se ser bastante razoáveis.

fórmulas válidas sobre números naturais.

5.0.1. Definição. Denominamos ***Aritmética*** o conjunto de fórmulas de ***L(N)*** que são válidas no Modelo Padrão.

Notemos que, como a estrutura de marcas $\mathbb{M}$ é isomorfa ao Modelo Padrão, temos que a **Aritmética** é, também, o conjunto das fórmulas de ***L(N)*** que são válidas no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$.

Podemos, pois, considerar a **Aritmética** como uma teoria: aquela cujos axiomas não-lógicos são as fórmulas de ***L(N)*** válidas no Modelo Padrão ou no Modelo de Marcas. Notemos que, como o Modelo Padrão e o Modelo de Marcas são modelos para a **Aritmética**, pela Segunda Forma do Metateorema da Completude (Metateorema 2.3.16), a **Aritmética** é consistente. Notemos, ainda, que, como as fórmulas de ***N*** são válidas em ambos os modelos, elas são teoremas (pois são axiomas) da **Aritmética**, e, então, a **Aritmética** é uma extensão consistente da teoria ***N***. Por fim, como, dada uma fórmula fechada **A** de ***L(N)***, ou **A** é válida, ou sua negação é válida, no Modelo Padrão (e no Modelo de Marcas), portanto, a **Aritmética** é uma teoria completa, ou seja, toda fórmula fechada **A** de ***L(N)*** é decidível na **Aritmética**.

Segue então, como corolário do Metateorema da Incompletude de Gödel, que a **Aritmética** não pode ser axiomatizada, e, portanto, que não há uma teoria axiomática em que sejam demonstráveis todas as verdades sobre números naturais. Com efeito, se a **Aritmética** fosse axiomatizada, existiria uma fórmula de Gödel $\mathbf{G}_{\mathbf{Aritmética}}$ que seria verdadeira, e, portanto, pertenceria à **Aritmética**, mas que não seria teorema da **Aritmética** e, portanto, não pertenceria a **Aritmética**, o que é uma contradição. Mais ainda, como a **Aritmética** é uma parte da Matemática, segue que não há uma teoria axiomática em que sejam demonstráveis todas as verdades matemáticas, pois se a houvesse, a restrição desta teoria às fórmulas de ***L(N)*** seria uma teoria axiomatizada da **Aritmética**. Temos então o seguinte resultado.

5.0.2. Metateorema. Não existe uma teoria axiomática cujo conjunto de teoremas seja toda a **Aritmética** e, conseqüentemente, não existe uma teoria axiomática cujo conjunto de teoremas seja toda a Matemática.

Temos, também, que o Metateorema de Gödel implica na seguinte limitação.

5.0.3. Metateorema. A **Aritmética** não é recursivamente enumerável.

Metademonstração. Seja T um predicado recursivamente enumerável tal que, dada uma fórmula **A** de ***L(N)***: T([**A**]) se, e somente se, **A** é válida no Modelo Padrão. Este predicado T é um predicado teoria (Definição 4.2.8), já que: se **A** é um axioma lógico, então **A** é válido no Modelo Padrão e, daí, T([**A**]); e que, se T([$\mathbf{A}_i$]) para todas as hipóteses de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é **A**, então T([**A**]). Assim, pelo Metateorema 4.2.9, existe uma teoria axiomatizada ***T*** tal que: T([**A**]) se, e somente se, **A** é teorema de ***T***. Ora, isso implica que a **Aritmética** é axiomatizada, já que esta teoria axiomatizada ***T*** seria então a própria **Aritmética**, pois T([**A**]) se, e somente se, **A** é válida no Modelo Padrão, o que contradiz o Metateorema acima e, portanto, a **Aritmética** não é recursivamente enumerável.

Como, pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), assumimos que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por um predicado recursivamente enumerável, temos o seguinte resultado.

5.0.4. Metateorema. Não existe um procedimento mecânico capaz de gerar toda a **Aritmética** e, conseqüentemente, não existe um procedimento mecânico capaz de gerar toda a Matemática.

Notemos, então, que esse resultado foi estabelecido utilizando a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ da teoria ***T***, que não é demonstrável pela teoria ***T*** considerada, mas que é válida no Modelo Padrão e no Modelo de Marcas. Porém, se $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é demonstrável em ***T***, como conseguimos então determinar que ela é verdadeira ? Por uma extensão de ***T*** ? Mas, mesmo essa extensão tem uma fórmula de Gödel, que identificamos ser válida em ambos os modelos, e que não é demonstrável na extensão. Parece, então, que há uma capacidade de identificação da validade de fórmulas que não pode ser descrita por uma teoria e, portanto, não é mecânica. É o que veremos em detalhe nas próximas seções.

1. A Modelagem da Determinação da Validade no Modelo de Marcas.

Nesta seção, vamos abordar a questão da determinação, por um lógico matemático, da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas[13]. É importante termos em mente que a questão central examinada aqui é a da possibilidade de simular mecanicamente essa capacidade do lógico matemático, de determinação da validade de algumas fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas. Lembremos que, como observamos no início do capítulo, esta seção e as seguintes versam sobre possibilidades em um domínio empírico de fatos e que as definições e metateoremas decorrem das considerações teóricas sobre esse domínio e sobre a relação desse domínio com as noções abstratas introduzidas no decorrer da exposição.

Comecemos, então, com uma representação esquemática de situações em que um lógico matemático, que denominaremos de *lógico matemático idealizado* (por apresentar algumas características, expostas a seguir, das *maquinas idealizadas* consideradas neste trabalho), busca determinar a validade de fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$ atribuindo, a cada fórmula **A** apresentada em um dado instante do tempo, os valores **V**, **F** ou **?**, caso o lógico matemático idealizado já tenha identificado que **A** é válida em $\mathbb{M}$, já tenha identificado que **A** não é válida em $\mathbb{M}$, ou se ainda não identificou a validade ou não-validade de **A** em $\mathbb{M}$, respectivamente. Temos então o seguinte esquema:

$$\underset{\text{(“Entradas”)}}{\text{Fórmulas de } \boldsymbol{L(N)}} \rightarrow \boxed{\text{Lógico Matemático Idealizado}} \rightarrow \begin{cases} \textbf{?} \\ \textbf{V} \\ \textbf{F} \end{cases} \text{(“Saídas”)}$$

Nesta perspectiva, um lógico matemático idealizado, como considerado aqui, é tratado inicialmente como uma "caixa preta" que, a partir da apresentação de uma fórmula ("entrada"), fornece o valor-verdade dessa fórmula ("saída"). Trata-se de considerar as pos-

[13] Ou, eqüivalentemente, da validade de fórmula de ***L(N)*** no Modelo Padrão, devido ao isomorfismo entre as duas estruturas.

sibilidades de comportamentos do lógico matemático idealizado em relação às entradas e saídas e inferir, a partir daí, algumas propriedades relativas ao processo, desempenhado pelo lógico matemático idealizado, de validação das fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$; em particular, estaremos interessados em verificar se esse processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** pode ser simulado por uma máquina.

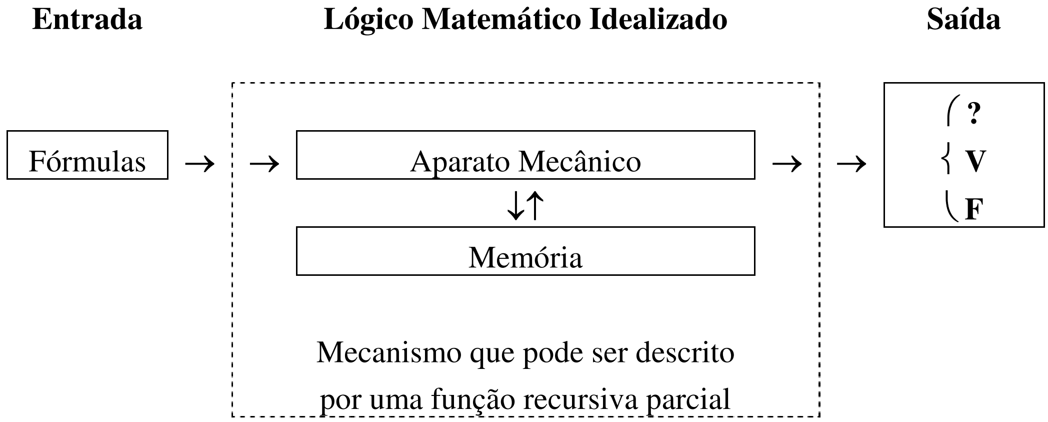
Notemos, então, que são essas considerações sobre o comportamento do lógico matemático idealizado de validação das fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$, que nos permitem passar do plano abstrato da Lógica Matemática ao plano dos comportamentos possíveis no mundo empírico. Notemos, ainda, que se falamos de um lógico matemático *idealizado*, essa idealização tem por objetivo a simplificação da análise do problema e, aparentemente, como analisaremos a seguir, não influenciam de forma direta a determinação da resposta do problema central, que é a da existência de um procedimento mecânico que dê conta da capacidade de validação de fórmulas de ***L(N)*** pelos lógicos matemáticos.

5.1.1. Observação. Façamos, então, as seguintes suposições sobre o lógico matemático para o colocar em igualdade de condições com os processos mecânicos (definidos no Capítulo 3), e que é, por isso, chamado de *lógico matemático idealizado*[14]:

1. Não há limitação de tempo para a ação de um lógico matemático idealizado;
2. Um lógico matemático idealizado tem uma memória potencialmente infinita, no sentido de que pode guardar o que já foi metademonstrado;
3. Um lógico matemático idealizado não pode determinar uma fórmula **A** como válida em $\mathbb{M}$, se **A** não é válida em $\mathbb{M}$, e nem determinar **A** como não-válida em $\mathbb{M}$, se **A** é válida em $\mathbb{M}$.

Nesse sentido, notemos inicialmente que, a partir do Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) e sob a hipótese de que o processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** pode ser simulado por uma máquina, podemos detalhar o esquema anterior, obtendo o seguinte esquema.

[14] Mais adiante (Observação 5.2.2), atribuiremos mais uma quarta característica a um lógico matemático idealizado.



Analisemos, então, as propriedades atribuídas ao lógico matemático idealizado na Observação 5.1.1 acima. As duas propriedades iniciais já foram atribuídas aos processos mecânicos, como definidos neste trabalho (Observação 3.0.1), e, portanto, essas idealizações colocam o lógico matemático em igualdade mínima de condições com os processos mecânicos, possibilitando, então, compará-los. Quanto à terceira consideração da Observação 5.1.1 acima, ela é uma característica da própria determinação da validade de uma fórmula **A**, sendo, portanto, comum a qualquer processo que, efetivamente, determine a validade ou não-validade das fórmulas de ***L(N)***, inclusive mecânico. Notemos que apesar desta propriedade excluir o erro, depois de concluída a determinação da validade ou não-validade de uma fórmula **A**, não exclui a possibilidade de um lógico matemático idealizado errar durante este processo; porém, para efeito da modelagem, só consideraremos que o lógico matemático idealizado efetivamente determinou a validade ou não-validade de **A**, a partir do ponto em que toda e qualquer dúvida a respeito da atribuição dessa validade ou não-validade foi afastada: até este instante, consideraremos que o valor desta fórmula para o lógico matemático idealizado é **?**.

Concluímos, então, que se mostrarmos que o processo de determinação de validade de fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$ por um lógico matemático idealizado não é mecânico, não será apenas por causa das abstrações feitas na observação acima. Com efeito, todas essas abstrações são comuns tanto a um lógico matemático idealizado quanto aos procedimentos mecânicos, como aqui definido. O que nos permitirá a conclusão de que o processo de determinação de validade de fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$ por um lógico matemático idealizado não é mecânico, como veremos, é ele ser tomado como representante de um lógico matemático real qualquer. Com efeito, assumiremos mais adiante (Observação 5.2.2) que um lógico matemático idealizado tem a mesma "capacidade de determinação da validade ou não-validade de fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$" dos lógicos matemáticos reais, apesar de, além disso, dispor de um tempo ilimitado e de uma memória ilimitada, sendo que seu desempenho coincidiria então, no caso limite, com um lógico matemático real, enquanto este tem memória suficiente para guardar aquilo que já determinou. Adiante, trataremos desse aspecto com mais detalhe.

A partir da introdução dessas noções e propriedades vamos, então, utilizar, no estudo desse processo de validação das fórmulas de ***L(N)***, a perspectiva da Sistêmica, designação mais recente para a Ciência dos Sistemas, decorrente, em grande parte, dos estudos desenvolvidos, principalmente a partir da década de 50, com a denominação de Teoria Geral dos Sistemas. Para fixar a nomenclatura, adequar a terminologia e definições, vamos nos utilizar, em particular, de **Breciani F$^{\underline{o}}$ & D'Ottaviano 2002**, cujo objetivo consiste na apresentação e discussão de noções, conceitos e definições fundamentais que fazem parte da Ciência dos Sistemas e têm servido de referência terminológica aos trabalhos do Grupo Interdisciplinar CLE – Auto-Organização do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade Estadual de Campinas (CLE – UNICAMP). Destacamos, em negrito, as noções que nos interessam mais diretamente.

Assim, consideramos que (pp.284-5):

> Um **sistema** pode ser inicialmente definido como uma entidade unitária, de natureza complexa e organizada, constituída por um conjunto não vazio de elementos ativos que mantêm relações, com características de invariança no tempo, que lhe garantem sua própria identidade. **Nesse sentido, um sistema consiste num conjunto de elementos que formam uma estrutura, a qual possui uma funcionalidade.**
>
> O conjunto não vazio de elementos, subjacente a um sistema, é denominado **universo do sistema**. Entretanto, observa-se que não se deve confundir um sistema com o seu universo.
>
> Os **elementos** do sistema são considerados como sendo as partes, os componentes, os atores ou os agentes que realizam atividades (bem como ações, reações, retroações, proações e transações), conduzem processos e operações, produzem fenômenos e são responsáveis por transformações, conversões e eventos que caracterizam os seus comportamentos.

Consideraremos aqui, portanto, um *sistema* $\mathbb{S}$, cujo *universo* é constituído pelas fórmulas de ***L(N)***, por um lógico matemático idealizado e pelos valores **?**, **V** e **F**.[15]

[15] Na realidade, tal consideração determina uma classe de sistemas, pois as características atribuídas

Consideramos ainda que (p.293 e p.295):

> A **estrutura** de um sistema é o conjunto articulado de relações entre os elementos do sistema e pode ou não se constituir em um invariante desse sistema no tempo. Ou seja, a estrutura é simplesmente um conjunto de elementos e de suas relações.
>
> ...
>
> As atividades desenvolvidas pelos elementos do sistema caracterizam as **funções do sistema**. O exercício dessas funções caracteriza a **funcionalidade do sistema**, ou seja, um sistema é uma estrutura cujos elementos exercem funções (atividades); é uma estrutura em funcionamento, caracterizando-se portanto como uma estrutura com funcionalidade.

Notemos então que queremos estudar o funcionamento do sistema em relação à determinação de verdades aritméticas pelo elemento lógico matemático idealizado, portanto, é esta a atividade de nosso principal interesse.

Observemos, ainda, que a noção de sistema, como acima introduzida, permite considerar elementos do universo de $\mathbb{S}$ de diferentes naturezas. Nesse caso, do ponto de vista lógico, a estrutura em questão é uma estrutura multi-sortida, ou, melhor, tri-sortida: a primeira sorte de elementos são as fórmulas de ***L(N)***; a segunda, o elemento lógico matemático idealizado e; a terceira, os valores **?**, **V** e **F**.

Notemos que[16] (p.284):

> O sistema é aqui considerado como sendo concebido pelo sujeito, que também pode lhe atribuir finalidade. Mas entende-se que esse sujeito pode não ter existência atual, podendo entretanto vir a tê-la, o que o caracterizaria portanto como um sujeito disposicional. Nesse sentido, a interpretação da existência de sistemas, independentemente de um sujeito, não é incompatível com a existência de sistemas como decorrência de interpretação por um determinado sujeito.

Com relação à determinação do sistema, temos que (p.285):

> Os elementos possuem características, propriedades, atributos, predicados e qualidades que podem ser expressos por parâmetros variáveis ou constantes. Cada parâmetro, variante ou invariante, pode assumir valores para descrever o **estado do elemento**. Esses valores determinados são estabelecidos pelas características do elemento, pelas relações do elemento com outros elementos e pelas restrições externas ao elemento.
>
> ...

---

ao lógico matemático idealizado (Observação 5.1.1) não o determina univocamente; haveria então um sistema para cada processo realizado por um lógico matemático idealizado considerado.

[16] Mais adiante, fazemos alguns comentários sobre o uso do termo “sujeito” nesta citação.

O sistema também desenvolve atividades (funções, processos, ações, etc.), assume estados e possui características (propriedades, etc.) próprias.

Para cada instante de tempo *t*, temos, então, *dois estados possíveis para cada fórmula **A*** de ***L(N)***, caso **A** esteja ou não sendo posta para a avaliação do lógico matemático idealizado. Para cada instante de tempo *t*, temos *dois estados possíveis para cada um dos valores **V**, **F** e **?***, caso o valor considerado esteja, ou não, sendo o resultado da avaliação do lógico matemático idealizado para uma dada entrada (fórmula). Por fim, podemos definir os *estados do elemento lógico matemático idealizado* pela função $e_{\mathbb{S}}$ tal que, a cada instante de tempo *t* e para cada fórmula **A**, $e_{\mathbb{S}}$ associa um de três *estados*, também designados pelos símbolos '**V**', '**F**' e '**?**'. A partir daí podemos ter a *evolução do sistema* $\mathbb{S}$ caracterizada pelas mudanças desses estados no tempo.

Assim, podemos introduzir a seguinte definição para os estados do lógico matemático idealizado.

5.1.1. Definição. Dado um sistema $\mathbb{S}$ como acima, *o estado do lógico matemático idealizado* é dado pela função binária $e_{\mathbb{S}}$ do conjunto dos instantes de tempo e do conjunto das fórmulas de ***L(N)*** no conjunto de três estados {**V**, **F**, **?**} tal que:

$e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado pelo lógico matemático idealizado que a fórmula **A** é válida no Modelo de Marcas;

$e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{F}$ se existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado que a fórmula **A** não é válida; e

$e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{?}$ se não existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado que a fórmula **A** é válida ou que a fórmula **A** não é válida.

Notemos que, apesar de um dos argumentos da função $e_{\mathbb{S}}$, o relativo às fórmulas, poder assumir infinitos valores, podemos considerar $e_{\mathbb{S}}$ como representante de uma memória *apenas potencialmente infinita*, isto é: podemos supor que todo sistema começa com o estado $e_{\mathbb{S}}(0, \mathbf{A}) = \mathbf{?}$, para toda fórmula **A**, e depois vai gerando valores **V** ou **F** para algumas fórmulas; podemos então considerar a função $e_{\mathbb{S}}$ como representante de uma memória potencialmente infinita, na qual pode-se guardar, sem limite de espaço, um *número finito* de valores já identificados, sendo que uma fórmula **A** cujo valor ainda não foi guardado na memória tem estado **?**.

Notemos ainda que, devido a essa memória: se, no instante *t*, o lógico matemático idealizado determina que uma fórmula **A** é válida, ou não, no Modelo de Marcas, então **A** será considerada válida, ou não, em todos os instantes posteriores; isto é, se $e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{V}$ e *t'* é maior que *t*, então $e_{\mathbb{S}}(t', \mathbf{A}) = \mathbf{V}$; e se $e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{F}$ e *t'* é maior que *t*, então $e_{\mathbb{S}}(t', \mathbf{A}) = \mathbf{F}$.

Observemos que com a modelagem acima estamos supondo que a evolução do sistema depende: (a) das fórmulas de ***L(N)***, que são as entradas; e (b) do lógico matemático idealizado com seus processamentos. Esses "processamentos" utilizam também o conjunto de fórmulas com a validade, ou não-validade, já determinadas, pois a avaliação da validade (Definições 2.1.12, 2.1.11 e 2.1.10) das fórmulas de ***L(N)*** depende, ou de um cálculo direto, ou da determinação anterior de valores de outras fórmulas (analisaremos esta dependência em detalhe na Seção 6.2).

Notemos, também, que a suposição do parágrafo anterior é coerente com estarmos considerando a possibilidade do processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$ ser mecânico. Por exemplo, uma evolução mecânica possível do sistema seria: dada uma fórmula **A**, como entrada em um instante *t*: (1) se o lógico matemático idealizado já calculou o valor de **A** e este se encontra na memória, então o lógico matemático idealizado re-apresenta, como saída, este valor encontrado na memória; (2) se o valor de **A** não se encontra na memória e a forma de **A** permite o cálculo direto do valor de **A**, então calcula este valor, apresentando-o e guardando-o na memória; (3) se estes não são os casos, então, segundo especificações do mecanismo ou algoritmo, recorre a valores de outras fórmulas, cujos valores são calculados reaplicando estes passos (1), (2) e (3) a essas novas fórmulas. Notemos, então, que estas suposições de determinação direta de valores, ou de recorrência a outros valores, estão de acordo com a definição de uma função recursiva (Definição 3.1.5), que entra na definição de um procedimento mecânico segundo o Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), pois uma função recursiva pode ser calculada diretamente, no caso R1 da Definição 3.1.5, ou recorre a valores calculados por outras funções recursivas, seja por composição, no caso R2, seja por aplicação do operador μ (Definição 3.1.4), no caso R3.

Notemos, por fim, que não se trata, aqui, de descrever a evolução de um processo em detalhes, i.e., de como cada um dos estados de seus elementos se relacionam entre si e determinam os estados posteriores, mas de uma abstração em um nível superior a este. Com efeito, como observado na nota de rodapé 15 (p. 125), as noções e propriedades introduzidas acima não são suficientes para determinar nem a evolução do processo, nem sua dinâmica, motivo pelo qual não determinam um processo específico de validação de fórmulas feita por um lógico matemático qualquer, mas estabelece uma classe de sistemas com diferentes dinâmicas possíveis.

A partir dessa modelagem, vamos considerar a *capacidade de um lógico matemático idealizado de determinação da validade das fórmulas de **L(N)** no Modelo de Marcas*, em relação a uma dada evolução de um sistema $\mathbb{S}$, na qual o estado do lógico matemático idealizado é descrito pela função $e_{\mathbb{S}}$. Assim, temos a seguinte definição.

5.1.2. Definição. Dado um sistema $\mathbb{S}$ como acima, designamos $\psi_{\mathbb{S}}$, a função unária tal que:

$\psi_{\mathbb{S}}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se, em algum instante t, o lógico matemático idealizado determina que **A** é válida no Modelo de Marcas, i.e., se existe t tal que $e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{V}$;

$\psi_{\mathbb{S}}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$ se, em algum instante t, o lógico matemático idealizado determina que **A** não é válida no Modelo de Marcas, i.e., se existe t tal que $e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{F}$; e

$\psi_{\mathbb{S}}(\mathbf{A}) = \mathbf{?}$ se, em qualquer instante t, não é o caso que o lógico matemático idealizado determine que **A** é válida, ou que **A** não é válida no Modelo de Marcas, i.e., para todo t, $e_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{?}$.

Notemos então que a função $\psi_{\mathbb{S}}$ representa a capacidade do lógico matemático idealizado de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, discutida acima. Com efeito, pela própria definição acima, a função $\psi_{\mathbb{S}}$ representa a determinação da validade ou não-validade de **A** independente do instante de tempo t. Notemos novamente que, inicialmente, não estamos interessados na determinação da evolução do sistema acima, mas sim em uma propriedade de sua dinâmica: desta ser, ou não, mecânica.

Falaremos então de *modelagem* dessa capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, para designar a busca de uma função que a realize, e falaremos, de acordo com a Definição 3.2.2, que um procedimento mecânico, ou uma função calculável, *simula* um determinado processo, se o resultado da função, aplicada a dados que representam a entrada do processo, representa a saída do processo a partir dessa entrada.

Antes de continuar a nossa análise a respeito de ψ, vamos dar um exemplo de uma modelagem de uma capacidade mecânica: a determinação dos números primos.

Seja $\mathbb{P}$ o sistema no qual um lógico matemático idealizado[17] deve determinar se numerais, apresentados a ele, representam ou não números primos. Temos então o seguinte esquema:

$$\text{Numerais} \rightarrow \boxed{\text{Lógico Matemático Idealizado}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{?} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{F} \end{cases}$$

Assim, os *elementos* do *universo de* $\mathbb{P}$ são: os numerais que representam os números naturais, um lógico matemático idealizado e os valores **?**, **V** e **F**.

Definimos então a função binária $p_{\mathbb{S}}$ *dos estados do lógico matemático idealizado*, do conjunto de instantes de tempo e do conjunto de numerais, no conjunto dos três estados {**V**, **F**, **?**}, tal que:

$p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{V}$ se existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado pelo lógico matemático idealizado que o numeral $\mathbf{k}_i$ representa um número primo;

$p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{F}$ se existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado pelo lógico matemático idealizado que o numeral $\mathbf{k}_i$ não representa um número primo; e

$p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$ se não existe $t' \leq t$ tal que no instante t' foi determinado pelo lógico matemático idealizado que o numeral $\mathbf{k}_i$ representa, ou que o numeral $\mathbf{k}_i$ não representa, um número primo.

Como dissemos anteriormente, uma definição desse tipo não é suficiente para determinar nem a evolução do sistema, nem a dinâmica do sistema, mas estabelece uma classe de sistemas com diferentes dinâmicas possíveis. Vejamos dois exemplos de evoluções possíveis. Consideremos que todos os sistemas começam com $p_{\mathbb{S}}(0, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$, para todo numeral

[17] Consideramos que o lógico matemático idealizado tem as mesma propriedades 1 e 2 supostas acima que o caracterizam como “idealizado”, i.e., não tem limitação temporal para a execução de suas atividades e nem limitação de memória.

$\mathbf{k}_i$, ou seja, todos os sistemas começam sem que se tenha determinado ainda nenhum número primo. Uma evolução possível de um sistema dessa forma seria então que primeiramente um lógico matemático verifica que 1 não é primo, por definição de número primo, do qual temos, no instante 1, $p_{\mathbb{S}}(1, 1) = \mathbf{F}$ e $p_{\mathbb{S}}(1, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$, para todo numeral $\mathbf{k}_i$ diferente de 1; depois verifica ele que, por definição, 2 é um número primo, daí, $p_{\mathbb{S}}(2, 1) = \mathbf{F}$, $p_{\mathbb{S}}(2, 2) = \mathbf{V}$ e $p_{\mathbb{S}}(2, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$, para todo numeral $\mathbf{k}_i$ diferente de 1 e 2; e assim por diante, segue aplicando a definição a cada um dos números, em seqüência. Um outro exemplo de evolução possível, seria se nesse instante 3, ele percebesse que todo número par, diferente de 2, não é primo, pois é múltiplo de dois, e que por isso 4 não é primo; assim, teríamos, neste caso: $p_{\mathbb{S}}(3, 1) = \mathbf{F}$, $p_{\mathbb{S}}(3, 2) = \mathbf{V}$, $p_{\mathbb{S}}(3, 4) = \mathbf{F}$ e $p_{\mathbb{S}}(0, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$, para todo numeral $\mathbf{k}_i$ diferente de 1, 2, e 4. Logo, diferentes evoluções são possíveis para um sistema $\mathbb{P}$ como definido acima.

Apesar das diferentes evoluções, podemos considerar uma *capacidade do lógico matemático idealizado de determinação de números primos*. Assim, temos uma função unária $\pi_{\mathbb{P}}$ tal que:

$\pi_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{V}$ se, em algum instante t, o lógico matemático idealizado determina que $\mathbf{k}_i$ é primo, i.e., existe t tal que $p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{V}$;

$\pi_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{F}$ se, em algum instante t, o lógico matemático idealizado determina que $\mathbf{k}_i$ não é primo, i.e., existe t tal que $p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{F}$; e

$\pi_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$ se, em nenhum instante t, o lógico matemático idealizado determina que $\mathbf{k}_i$ é, ou não, primo, i.e., para todo t, $p_{\mathbb{S}}(t, \mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$.

Neste caso, tal capacidade pode ser simulada por um predicado recursivo e, portanto, segundo a definição adotada neste trabalho, é um procedimento mecânico. Com efeito, podemos definir o predicado recursivo binário $Div(a, b)$ que é verdadeiro se, e somente se, a é divisível por b, do seguinte modo:

$$Div(a, b) :=_{\text{def. expl.}} \exists y_{y \leq a}(a = x \cdot b).$$

A partir daí, podemos definir o predicado recursivo $Primo(a)$ por:

$$Primo(a) :=_{\text{def. expl.}} \forall y_{y \leq a}(Div(a, y) \rightarrow y = 1 \vee y = a).$$

e assim, se i é o número representado por $\mathbf{k}_i$ e K_{Primo} é a função representante do predicado *Primo*, então $\pi_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_i) = K_{Primo}(i)$. Logo, como $\pi_{\mathbb{P}}$ pode ser descrita por uma função recursiva, pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), temos que $\pi_{\mathbb{P}}$ é um procedimento mecânico.

De modo mais simples, esse procedimento mecânico pode ser um procedimento descrito da seguinte forma: dado um número a qualquer, verifique se a é divisível por y (lembremos do procedimento mecânico que aprendemos na escola elementar para dividir dois números), para todo número y menor que a, começando de 1 e indo até a; se encontrar um y diferente de 1 e a que divida a, então a não é primo; se não encontrar, então a é primo. Notemos que, neste caso, não há $\mathbf{k}_i$ tal que $\pi_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{?}$, pois, dado um número natural qualquer, o procedimento acima sempre determina se $\mathbf{k}_i$ é, ou não, um número primo.

Vemos, então, como a capacidade de determinação de números primos pode ser considerada mecânica, no sentido de que pode ser simulada uma função recursiva parcial.

Passemos então à questão da mecanicidade do processo de determinação da validade ou não-validade das fórmulas de ***L(N)*** em $\mathbb{M}$.

2. A não-mecanicidade da Determinação da Validade no Modelo de Marcas.

Nesta seção, mostramos que a capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, como definida a seguir, não é mecânica, no sentido apresentado neste trabalho, isto é, que ela não pode ser simulada por uma função recursiva parcial. Fazemos então uma pequena análise da característica que nos permite a chegar a esse resultado e consideramos a questão da falsidade do mecanicismo proposta por **Lucas 1961**.

Antes de passarmos a analisar se podemos ou não simular, por um processo mecânico, a capacidade de determinação de fórmulas válidas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, façamos então uma última consideração: vamos supor que o papel do lógico matemático idealizado também possa ser desempenhado por uma comunidade de lógicos matemáticos que se comuniquem entre si, como no caso dos Nicolas Boubarki, uma comunidade de matemáticos que reuniam seus resultados como se fossem obtidos por apenas uma pessoa, sendo que, inclusive, podemos vir a participar dessa comunidade. Claro que, nessa perspectiva, não pode haver contradição, entre os lógicos matemáticos da comunidade, a respeito das fórmulas de ***L(N)*** *já identificadas* como válidas ou não. Nesse sentido, falaremos, então, d*a capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de* ***L(N)*** *no Modelo de Marcas*, o que definiremos a seguir.

5.2.1. Definição. Designamos por ψ a função unária tal que:

ψ(**A**) = **V** se, em algum instante *t*, e para algum lógico matemático, este determina que **A** é válida no Modelo de Marcas;

ψ(**A**) = **F** se, em algum instante *t*, e para algum lógico matemático, este determina que **A** não é válida no Modelo de Marcas; e

ψ(**A**) = **?** se, em nenhum instante *t*, qualquer lógico matemático determina que **A** é ou não válida no Modelo de Marcas.

Notemos que a função ψ representa *a capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de **L(N)** no Modelo de Marcas* $\mathbb{M}$, pois não depende do lógico matemático em questão.

Mais ainda, em princípio, no caso de lógicos matemáticos idealizados, estaremos admitindo a seguinte observação.

5.2.2. Observação. Além das características atribuídas a um *lógico matemático idealizado* na Observação 5.1.1, atribuiremos a ele, também, uma quarta característica: se um lógico matemático real qualquer consegue determinar a validade, ou não-validade, de alguma fórmula **A** de ***L(N)***, então vamos supor que um lógico matemático idealizado também é capaz de determinar a validade, ou não-validade, de **A**, ou seja, que ψ(**A**) = **V** ou ψ(**A**) = **F**. Particularmente, isso implica que se conseguimos, e.g., neste trabalho, determinar a validade, ou não-validade, de alguma fórmula **A** de ***L(N)***, então vamos supor que um lógico matemático idealizado também é capaz de determinar a validade, ou não-validade, de **A**, ou seja, que ψ(**A**) = **V** ou ψ(**A**) = **F**. Notemos ainda que tal característica implica que aquilo que pode ser determinado por um lógico matemático idealizado, também pode ser determinado por outro lógico matemático idealizado qualquer, o que torna idênticas as funções $\psi_{\mathbb{S}}$ e ψ definidas acima (respectivamente, Definições 5.1.2 e 5.2.1).

Quanto à questão do lógico matemático poder ser o próprio sujeito observador do sistema, assumimos, como em **Breciani F$^{\underline{o}}$ & D'Ottaviano 2002**, além da citação já referida na p.126 deste trabalho (*cf.* nota de rodapé 16), que (p.287):

O sistema pode ser considerado como um objeto a ser observado, estudado, abstraído, conceituado, concebido, analisado, simulado, modelado ou representado por um sujeito que pode não ser interno a esse sistema. O sujeito, no processo de representação, busca a cognição, ou seja, o conhecimento pela compreensão e explicação da existência e das propriedades do objeto, conhecimento esse que se pode formalizar: a compreensão, e também a significação, da existência desse objeto tem uma conotação sintética e se situa no campo do concreto ou real, analógico, global, intuitivo e subjetivo; a explicação tem uma conotação analítica e se localiza na área do abstrato ou imaginado, lógico, específico, racional e objetivo.

O sujeito, mesmo não sendo interno ao sistema, estabelece uma relação com o objeto de estudo através de atividades de reflexão, especulação, observação e experimentação. Essas atividades buscam encontrar qualidades de organização no objeto que caracterizam a sua existência, estrutura, funcionalidade e possível evolução.

A presença de um sujeito implica inevitavelmente na presença de um ponto de vista subjetivo, não mais apenas objetivo, do sistema. Contudo, nesse caso, a subjetividade deve ser vista não no sentido reduzido de preferências arbitrárias, mas no sentido ampliado de capacidade de interrogação do sujeito sobre a realidade do objeto de estudo, com todos os seus limites de entendimento e de incerteza de avaliação. Esta consideração destaca a importância da interação do sujeito com o objeto.

Quando o sujeito é um elemento interno ao sistema ele se constitui em um participante que exerce influência sobre os demais elementos do sistema e é influenciado por eles; ou seja, o comportamento do observador afeta o comportamento do observado e o segundo afeta também o primeiro em um processo recorrente. Como o sujeito e o objeto são sistemas complexos, a relação sujeito-objeto é uma relação entre sistemas complexos. O universo de fenômenos observados (representados, etc.) se define na relação entre sujeito e objeto no domínio da forma, do espaço e do tempo.

Façamos, então, alguns comentários a respeito do papel do sujeito.

Se considerarmos os resultados obtidos nesta seção, a saber, que este papel de determinação da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ não pode ser descrito, seja por um procedimento mecânico, seja por uma teoria formal, temos que o papel de sujeito, como aqui considerado, sempre terá aspectos intuitivos irredutíveis a uma caracterização formal completa, não sendo, apesar disso, desprovido de significado.

O sujeito é o lógico matemático idealizado, elemento do universo da estrutura trisortida que exerce a função de determinação de verdades aritméticas. Ora, um dos aspectos intuitivos mais básicos relacionados ao papel do sujeito é: algo ou alguém **S** é um sujeito, se **S** realiza uma certa classe de ações que, no caso, é a classe das ações relativas à determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, cuja manifestação pode ser submetida à observação através das entradas e saídas. Que podemos atribuir essa propriedade a um lógico matemático, tanto real, quanto idealizado, faz parte da nossa própria consideração da existência de um processo de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ e de que esse processo seja realizado por um lógico matemático real ou por um lógico matemático com algumas características adicionais de disponibilidade de tempo e memória para as suas ações, i.e., por um lógico matemático idealizado. É a atribuição desse papel de sujeito realizador, ao lógico matemático real ou ao lógico matemático idealizado, que é feita na Observação 5.2.2 (quarta característica atribuída ao lógico matemático idealizado); se este processo puder ser realizado por uma máquina, também iremos considerá-la como sujeito.

Notemos que a característica atribuída acima ao papel de sujeito parece-nos, então, uma das principais características de um sujeito, condição para a sua utilização na língua natural; obviamente, não pretende ser uma definição do conceito, pois se utiliza de outros termos não-definidos como, por exemplo, "ação".

Por outro lado, nas citações acima, outras características são atribuídas a um sujeito, que pode: observar, estudar, abstrair, conceituar, conceber, analisar, simular, modelar, representar, refletir e especular sobre um sistema. Quando consideramos que o papel do sujeito na determinação do valor-verdade de uma fórmula de ***L(N)*** no Modelo Padrão pode ser simulado por um processo mecânico, estamos supondo que algumas das ações listadas, necessárias a essa determinação, também podem ser simuladas por um processo mecânico. Porém, novamente, se os resultados apresentados aqui se confirmarem, não é possível desenvolver uma análise exaustiva desses processos, mas apenas aprofundar as suas implicações para melhor compreendê-los e, neste caso, o próprio resultado, de ser ou não mecânica a capacidade de validação de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, já é uma derivação de uma propriedade de um sujeito atribuída aqui a um lógico matemático.

Por fim, reconhecemos, então, que uma análise filosófica e hermenêutica, desta e de outras noções presentes neste trabalho, pode ser extremamente profícua e pertence, também, ao campo da teoria auto-organização; porém, não faz parte dos objetivos deste trabalho e não será aqui desenvolvida.

Discutiremos, mais adiante, a questão de que a quarta propriedade atribuída ao lógico matemático idealizado, juntamente com a limitação do processamento do sistema a apenas as fórmulas de ***L(N)*** e seus estados para o lógico matemático idealizado, não consideraria, aparentemente, a existência do mundo exterior ao lógico matemático idealizado.

Passemos então, finalmente, à questão da modelagem da capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas por um processo mecânico. Lembremos que falaremos de *modelagem* da capacidade lógico-matemática de determinação da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, para designar a busca de uma função que a realize, e falaremos que um procedimento mecânico, ou uma função calculável, *simula* um determinado processo, se o resultado da função, aplicada a dados que representam a entrada do processo, representa a saída do processo a partir dessa entrada.

Como vimos (Metateoremas 5.0.2 e 5.0.4), não existe uma teoria, ou um procedimento mecânico, capaz de gerar toda a **Aritmética** e, conseqüentemente, toda a Matemática, o que nos leva à indagação se essa capacidade do lógico matemático de estabelecer a validade de algumas fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas poderia ser descrita por uma teoria formal ou ser simulada por um procedimento mecânico. Notemos, então, que não é imediato, do metateorema, que tal capacidade não possa ser descrita por uma teoria formal, ou simulada por um procedimento mecânico, já que não é evidente que um lógico matemático, mesmo que idealizado, possa estabelecer *todas* as fórmulas válidas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas; algumas vezes, é o contrário que parece ser o caso, como atestam conjecturas sobre a **Aritmética** ainda não demonstradas, como, por exemplo, a de Goldbach, de que qualquer número par, diferente de dois, é a soma de dois números primos.

Porém, se os lógicos matemáticos não podem estabelecer *todas* as fórmulas válidas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, certamente, podem fazê-lo para algumas fórmulas de ***L(N)***, como, por exemplo, para os axiomas de ***N*** e para as fórmulas de Gödel $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, a partir de uma extensão axiomatizada ***T*** de ***N*** para a qual foi metademonstrado que ***T*** é consistente. A noção de processo mecânico restrito a elementos de um subconjunto de um conjunto considerado, adotada neste trabalho, foi introduzida na Asserção 3.2.11. Trata-se, portanto, de realizar uma modelagem para tal capacidade de determinação da validade de algumas fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ e, supondo que este processo seja mecânico, determinar qual função recursiva parcial simularia este processo. Notemos que este caso é análogo ao de se definir uma função para certos valores e perguntar pela existência e forma dessa função, como nos exemplos a seguir. Podemos nos perguntar por uma função linear F cujos valores sejam $F(0) = 1$ e $F(1) = 2$: temos, então, que a única função F que satisfaz esta condição é a função $F(x) = x + 1$. Podemos nos perguntar por uma função linear F cujos valores sejam $F(0) = 1$, $F(1) = 2$ e $F(2) = 4$: temos, então, que tal função não existe, pois se $F(x) = x + 1$ é a única função que satisfaz $F(0) = 1$ e $F(1) = 2$, F não satisfaz $F(2) = 4$. Um último exemplo, fora da Matemática pura, é quando encontramos uma função que se ajusta, perfeitamente, a dados de um experimento.

Definamos, agora, a função que modela a capacidade de determinação da validade de algumas fórmulas **A** de ***L(N)***. Como pretendemos compará-la com as funções recursivas, que são funções do conjunto de números naturais no conjunto dos números naturais, vamos identificar uma fórmula **A** com seu número [**A**] e os valores-verdade **V** e **F**, respectivamente, com os números 0 e 1. Notemos que não há perda de generalidade, pois existe um procedimento recursivo (e, portanto, mecânico) para encontrar o número [**A**] de uma dada fórmula **A** de ***L(N)***, e, reciprocamente, existe um procedimento recursivo (e mecânico) para determinar, dado um número qualquer n, se n é o número de uma fórmula de ***L(N)*** e qual é a fórmula da qual n é o número.

Nestas condições, a função que modela a capacidade de determinação da validade de algumas fórmulas **A** de ***L(N)*** é a função ψ (Definição 5.2.), porém, com esta nova convenção adotada.

5.2.3. Definição. Designamos por ψ a função parcial unária tal que:

ψ([**A**]) = 0 se em algum instante t, e para algum lógico matemático, este determina que **A** é válida no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$;

ψ([**A**]) = 1 se em algum instante t, e para algum lógico matemático, este determina que **A** não é válida no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$; e

ψ([**A**]) não tem valor definido se, em nenhum instante t , nenhum lógico matemático determina que **A** é ou não válida no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$.

Notemos então que ψ pode não estar definida para certas fórmulas de ***L(N)***. Uma fórmula **A**, tal que ψ([**A**]) não está definida, é aquela cuja validade ou não-validade nunca poderá ser determinada; enquanto que uma fórmula **A**, tal que ψ([**A**]) está definida, é aquela cuja validade ou não-validade pode ser determinada, como, por exemplo, os axiomas de ***N*** e a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_{N}$.

5.2.4. Convenção de Notação. Vamos, por abuso de notação, designar ψ([**A**]) apenas por $\psi(\mathbf{A})$ e designar os valores 0 e 1, respectivamente, por **V** e **F**, fazendo então coincidir as notações das Definições 5.2.1 e 5.2.3.

5.2.5. Metateorema. Não existe uma teoria axiomatizada cujos teoremas sejam exatamente as fórmulas cuja validade pode ser determinada no Modelo de Marcas, i.e., as fórmulas $\mathbf{A}$ *de* $\boldsymbol{L(N)}$ *tal que* $\psi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{V}$.

Metademonstração. Seja Ψ o conjunto das fórmulas **A** de $\boldsymbol{L(N)}$ tal que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$. Podemos, pois, considerar Ψ como uma teoria: aquela cujos axiomas não-lógicos são as fórmulas **A** de $\boldsymbol{L(N)}$ tal que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$. Notemos que Ψ é uma extensão de $\boldsymbol{N}$, pois já determinamos que todos os axiomas de $\boldsymbol{N}$, e conseqüências das regras de inferências, são válidos no Modelo de Marcas (Metateorema 2.3.5). Temos também que Ψ é consistente, pois a capacidade de reconhecimento é tal que não se pode reconhecer uma fórmula e sua negação como válidas no Modelo de Marcas. Logo, Ψ é uma extensão consistente de $\boldsymbol{N}$. Suponha que Ψ seja axiomatizada. Pelo Metateorema de Gödel, existiria uma fórmula $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ que pode ser exibida e cuja validade no Modelo de Marcas pode ser determinada; portanto, temos que $\psi(\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}) = \mathbf{V}$, porém, temos que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é indemonstrável em Ψ, ou seja, não pertence a Ψ, o que é um absurdo, pois Ψ é o conjunto das fórmulas **A** de $\boldsymbol{L(N)}$ tal que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$.

Vejamos, agora, um metateorema que nos permite estabelecer uma equivalência entre máquinas, como aqui definidas, ou ainda, funções recursivas parciais, que determinam fórmulas válidas no Modelo de Marcas e as teorias axiomatizadas. Esta equivalência nos permitirá mostrar que as máquinas não podem desempenhar o papel de determinação de validade que podemos desempenhar. Notemos que toda teoria axiomatizada pode ser vista como uma máquina, no sentido definido neste trabalho, que geram fórmulas demostráveis. Com efeito, pelo Metateorema 4.2.10, se $\boldsymbol{T}$ é uma teoria e P um predicado tal que $P([\mathbf{A}])$ se, e somente se, **A** é teorema de $\boldsymbol{T}$, então: $\boldsymbol{T}$ é axiomatizada se, e somente se, P é um predicado teoria; pela Definição 4.2.8, P é recursivamente enumerável e pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) tal processo é mecânico. Vejamos então que toda máquina, com certa característica de determinação de fórmulas válidas no Modelo de Marcas, é equivalente a uma teoria axiomatizada.

5.2.6. Metateorema. Seja ν uma função recursiva parcial tal que[18]:

1. Se $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, então **A** é válida no Modelo de Marcas;

2. Se **A** é um axioma lógico, então $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$;

3. Se $\nu(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}$ para todas as hipóteses de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é **A**, então $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$.

Nestas condições, existe uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}_\nu$ tal que:

$$\mathbf{A} \text{ é teorema de } \boldsymbol{T}_\nu \text{ se, e somente se, } \nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}.$$

Metademonstração. Seja ν uma função recursiva parcial que satisfaz as três condições acima e seja ν' o predicado tal que $\nu'(\mathbf{A})$ se, e somente se, $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$. Temos então que, pelo Metateorema 3.2.10, ν' é recursivamente enumerável. Temos ainda que ν' é um predicado teoria (Definição 4.2.8), pois, pela equivalência acima, se **A** é um axioma lógico, então $\nu'(\mathbf{A})$ e se $\nu'(\mathbf{A}_i)$ para todas as hipóteses de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é **A**, então $\nu'(\mathbf{A})$. Como ν' é um predicado teoria, pelo Metateorema 4.2.9, existe uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}_\nu$ tal que $\nu'(\mathbf{A})$ se, e somente se, **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_\nu$, e, como $\nu'(\mathbf{A})$ se, e somente se, $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, temos que existe uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}_\nu$ tal que: $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se, e somente se, **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_\nu$, o que finaliza nossa metademonstração.

5.2.7. METATEOREMA. ψ NÃO É RECURSIVA PARCIAL.

Metademonstração. Suponha que ψ seja recursiva parcial. Como ψ satisfaz as três condições do Metateorema 5.2.6, temos, por este mesmo metateorema, que existe uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}_\psi$ tal que: **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_\psi$ se, e somente se, $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$. Porém, isso contraria o Metateorema 5.2.5. Logo, ψ não é recursivamente enumerável.

[18] Como na Convenção de Notação 5.2.4, vamos, por abuso de notação, designar $\nu([\mathbf{A}])$ apenas por $\nu(\mathbf{A})$ e designar os valores 0 e 1, respectivamente, por **V** e **F**.

Como, pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church, assumimos que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva parcial, temos, então, o seguinte resultado.

*5.2.8. METATEOREMA. A CAPACIDADE LÓGICO-MATEMÁTICA DE DETERMINAÇÃO DE FÓRMULAS DE **L(N)** VÁLIDAS NO MODELO DE MARCAS (OU NO MODELO PADRÃO), REPRESENTADA PELA FUNÇÃO ψ, NÃO PODE SER SIMULADA POR UM PROCESSO MECÂNICO.*

Chegamos assim ao resultado central deste trabalho: que a capacidade lógico-matemática de determinações de verdades aritméticas, e conseqüentemente de verdades matemáticas, não pode ser simulada por um processo mecânico. Façamos então uma análise sucinta da obtenção desse resultado e de suas implicações.

5.2.9. Observação. Notemos, inicialmente, que não foi a consideração do lógico matemático idealizado como uma caixa preta, e, portanto, como inicialmente indeterminado, que nos levou a concluir que o processo não é mecânico. Com efeito, o que nos levou à metademonstração de que o processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** não é mecânico foi *o conjunto de definições sintáticas e semânticas introduzidas neste trabalho para a exposição da parte lógico-matemática e o conjunto dos resultados metademonstrados a partir delas*, *juntamente com a quarta característica do lógico matemático idealizado (Observação* 5.2.2*)*, que implica que um lógico matemático idealizado também é capaz de determinar a validade, ou não-validade, de **A**, ou seja, que ψ(**A**) = **V** ou ψ(**A**) = **F**, caso consigamos, neste trabalho, determinar a validade **V**, ou não-validade **F**, de alguma fórmula **A** de ***L(N)***, como para certas fórmulas de Gödel.

Podemos, então, nos perguntar: o que nos faz diferentes das máquinas ? Por que não podemos ser simulados por máquinas ? Ou ainda, o que temos que a máquina não tem ?

Podemos dizer, a partir dos resultados obtidos, que a propriedade que temos e a máquina não tem é dada pela asserção abaixo.

5.2.10. Asserção. Para todo conjunto recursivo Γ de fórmulas de ***L(N)***, se determinamos que as fórmulas de Γ são válidas no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, então conseguimos determinar que a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$ (que é a fórmula de Gödel da teoria $\boldsymbol{T}_\Gamma$ na qual os axiomas não-lógicos são as fórmulas de Γ) é válida no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ e também conseguimos determinar que $\mathbf{G}_\Gamma$ não é demonstrável a partir de Γ (isto é, não é teorema da teoria $\boldsymbol{T}_\Gamma$).

Com efeito, já sabemos que temos esta propriedade, que é conseqüência direta de podermos entender o Metateorema da Incompletude de Gödel e sua metademonstração. Por outro lado, seja M uma máquina cujas entradas são fórmulas e as saídas são valores **V** ou **F**, conforme, respectivamente, M determine que a fórmula de entrada seja válida, ou não, no Modelo de Marcas (notemos que pode haver fórmulas para as quais a máquina M nunca retorna um valor **V** ou **F**, ou seja, seu comportamento é modelado por uma função recursiva parcial) e tal que M atribui valor **V** a todos os axiomas lógicos e atribui valor **V** às conclusões das regras de inferência lógica aplicadas a fórmulas para as quais M atribui valor **V**. Para qualquer máquina M, nestas condições, segundo o Metateorema 5.2.7, existe uma teoria $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$ tal que uma fórmula **A** é determinada por M como válida no Modelo de Marcas se, e somente se, **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$. Ora, se uma máquina M tivesse a propriedade da asserção acima, então M também conseguiria determinar como válida a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}}$ e, portanto, $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}}$ também seria teorema de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$, o que contradiz o Metateorema da Incompletude de Gödel. Portanto, a propriedade expressa na asserção acima permite diferenciar-nos das máquinas.

Podemos então nos perguntar ainda: Por que as máquinas não a podem ter ? Sem dúvida, como vimos, é porque não tem a capacidade de determinar que, para todo conjunto recursivo Γ de fórmulas de ***L(N)***, se Γ é válido, então a sua fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$ também o é. Mas por que as máquinas não têm essa capacidade ? Notemos, então, que o processo de determinação da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$, a partir de Γ, pode ser visto como um processo mecânico, pois, com base na seqüência de definições da Seção 4.2, podemos mostrar que existe um algoritmo que fornece o número de Gödel de uma fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$ de uma teoria $\boldsymbol{T}_\Gamma$, dados os números de Gödel dos axiomas de $\boldsymbol{T}_\Gamma$. Assim, não é a construção da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$ que não pode ser mecânica, mas o *reconhecimento de sua validade*. Observemos que, mesmo se incorporamos, a um processo mecânico M, a determinação da verdade de uma ou mais fórmulas de Gödel que não eram anteriormente determinadas por M, obtendo assim um novo processo mecânico M', temos que M' é simulado por uma *outra* função recursiva parcial e que sofre da mesma limitação, ou seja, não determina a verdade de uma *outra* fórmula de Gödel construída a partir dessa função recursiva parcial, o que sugere uma limitação inerente à noção de mecânico introduzida pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11). Analisemos mais detalhadamente essa "limitação inerente".

Lembremos que reconhecemos a validade de $\mathbf{G}_\Gamma$ a partir da consistência[19] de Γ e que reconhecemos a consistência de Γ a partir do reconhecimento da validade de suas fórmulas no Modelo de Marcas. No caso das máquinas, não há esse reconhecimento da consistência de Γ, a partir do reconhecimento da validade de suas fórmulas no Modelo de Marcas. Com efeito, dada qualquer máquina M, como descrita logo acima, vimos que existe uma teoria $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ tal que **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ se, e somente se, M atribui o valor **V** a **A**. Ora, pelo Segundo Metateorema de Gödel (*cf.* Metateorema 4.1.4) temos que a fórmula[20] $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, que afirma a consistência de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, não é demonstrável em $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$. Assim, M não atribui valor **V** a fórmula $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, ou seja, não é capaz de determinar que o conjunto Γ (das fórmulas que ela própria determina como válidas) é consistente, em outras palavras, é incapaz de "reconhecer" que o conjunto Γ (das fórmulas que ela própria "reconhece" como válidas) é consistente ! Isso equivale a dizer que, para *nenhuma* fórmula **A** de ***L(N)***, a máquina é ca-

[19] Vamos aqui identificar o conjunto de fórmulas Γ e a teoria $\mathbf{T}_\Gamma$, cujos axiomas não-lógicos são as fórmulas de Γ. Assim, diremos que Γ é consistente se, e somente se, a teoria $\mathbf{T}_\Gamma$ é consistente e dizemos que uma fórmula **A** é demonstrável a partir de Γ se, e somente se, **A** é demonstrável em $\mathbf{T}_\Gamma$.

[20] $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ é a abreviação para $\mathbf{\sim\exists x(}\boldsymbol{Teo}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}\mathbf{(x)\wedge}\boldsymbol{Teo}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}\mathbf{(}\boldsymbol{Neg}\mathbf{(x)))}$ (*cf.* **Gödel 1934** (1979, p. 335)), na qual *Neg* é a função recursiva tal que, dado o número de Gödel x de uma fórmula **A**, $Neg(x)$ é o número de Gödel de **~A** ($Neg(x) = < SN(\sim), x >$, *cf.* Início da Seção 4.2), ou seja, $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ afirma que não existe uma fórmula **A** tal que **A** e **~A** sejam ambas teoremas de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, que é a Definição 1.5.13 de teoria consistente (ou não-contraditória) apresentada neste trabalho. Podemos considerar também $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ como a abreviação de $\mathbf{\exists x(\sim}\boldsymbol{Teo}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}\mathbf{(x))}$ (*cf.* **Gödel 1931** (1979, p. 287)), que afirma que existe uma fórmula que não é teorema de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, ou ainda, que não é o caso de toda fórmula de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$ ser teorema de $\boldsymbol{T}_\mathrm{M}$, que é a Definição 1.5.13 de teoria não-trivial apresentada neste trabalho e que, como vimos (Metateorema 1.5.14) equivale a definição de teoria consistente (ou não-contraditória).

paz de "reconhecer" que não "reconhece" ambas, **A** e **~A**, como válidas ! [21]

Vemos assim que a capacidade humana de "reconhecimento", ou ainda, de "conhecimento", de "entendimento", de "visão", da validade no Modelo de Marcas não pode ser simulada por um processo mecânico, o que nos permite afirmar que as máquinas não a têm. Notemos, por fim, que esta capacidade implica a Asserção 5.2.10 acima, que não é mecânica, como já havíamos visto.

Fica então a questão: como entender então esse processo de "conhecimento", principalmente, admitindo sua não-mecanicidade ? É o que trataremos no capítulo seguinte. Terminemos essa seção tecendo alguns comentários a respeito de outros elementos que, aparentemente, influenciariam no processo de determinação das fórmulas válidas de ***L(N)***, e.g., o contexto histórico-cultural, e que, aparentemente, não teriam sido levados em consideração.

Abordemos então, por fim, a questão da suposição de que a determinação da validade ou não das fórmulas de ***L(N)*** dependia apenas da fórmula considerada (a entrada) e de processamentos feitos pelo lógico matemático, o que implicaria num certo solipsismo do lógico matemático frente à determinação da validade das fórmulas de ***L(N)***. Poderia se argumentar que, para a determinação da validade de fórmulas de ***L(N)*** utilizamos, além dos valores-verdade anteriores, também, outros elementos, como, por exemplo, a linguagem natural, ou outros fatores sócios-históricos-culturais quaisquer. Vejamos, então, que isso não altera a conclusão do argumento. Com efeito, consideremos o seguinte esquema, no qual o papel desempenhado pelo lógico matemático idealizado do esquema anterior é substituído pelo papel desempenhado pelo lógico matemático idealizado mais quaisquer outros fatores, que denominamos, aqui, sugestivamente, de Tudo Mais:

---

[21] Notemos que, na metademonstração do Segundo Metateorema da Incompletude de Gödel, mostra-se que a fórmula $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T} \rightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ é teorema de ***T***, para qualquer extensão ***T*** de ***N***. Assim, como, pelo Primeiro Metateorema de Gödel não $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é teorema de ***T***, então **Consis*T*** não é teorema de ***T***. Portanto, como a fórmula $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}} \rightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}$ é teorema de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$, temos que a máquina M atribui valor **V** a $\mathbf{Consis}\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}} \rightarrow \mathbf{G}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}$, logo, podemos dizer que M "reconhece" que a consistência de $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$ implica na veracidade de $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}\mathrm{M}}$, mas, como vimos, M não "reconhece" a consistência da $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M}}$.

$$\text{Fórmulas de } \boldsymbol{L(N)} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Lógico Matemático Idealizado}\\ + \\ \text{Tudo Mais}\end{array}} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbf{?}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{F}\end{array}\right.$$

Os estados do *elemento* “Lógico Matemático Idealizado + Tudo Mais” poderiam ser outros além daqueles apresentados anteriormente (ou seja, os valores **V**, **F**, ou **?**, para cada fórmula, em cada instante de tempo *t*, representados pela função $e_{\mathbb{S}}$). Porém, mesmo que adotássemos esta nova representação, com uma nova função $e_{\mathbb{S}}^{+}$ representante desses novos estados, segundo o Metateorema 5.2.5, não haveria uma teoria axiomatizada cujo conjunto de teoremas fosse o conjunto das verdades reconhecidas pelo novo elemento “Lógico Matemático Idealizado + Tudo Mais” e, segundo o Metateorema 5.2.7, o papel do novo elemento “Lógico Matemático Idealizado + Tudo Mais” não poderia ser simulado por uma função recursiva parcial, portanto, segundo a definição de mecânico adotado neste trabalho, não poderia ser mecânico (Metateorema 5.2.8). Com efeito, como vimos, e conforme a Observação 5.2.9 acima, a metademonstração de que o processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** é não-mecânico foi estabelecido a partir do conjunto de definições sintáticas e semânticas introduzidas neste trabalho para a exposição da parte lógico-matemática, do conjunto dos resultados metademonstrados a partir delas, e da quarta característica do lógico matemático idealizado (Observação 5.2.2), não se fazendo nenhuma referência, seja direta, seja indireta, aos valores da função $e_{\mathbb{S}}$ de estados do elemento lógico matemático idealizado, que só foi introduzida aqui para tornar mais plausível a hipótese de existência de um procedimento mecânico que simulasse essa capacidade lógico-matemática de validação das fórmulas de ***L(N)***, e que, como vimos, não se confirmou. Assim, a consideração do elemento “Lógico Matemático Idealizado + Tudo Mais” só implica que o próprio Universo, no qual se insere este lógico matemático idealizado, não pode ser “mecânico”. Com efeito, se isso ocorresse, haveria uma função recursiva parcial ψ que, a partir da fórmula de entrada **A** e do seu mecanismo determinaria a validade das fórmulas de ***L(N)***, o que como vimos é impossível, pois, como vimos na metademonstração do Metateorema 5.2.7, neste caso, pelo Metateorema 5.2.6, existiria uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}_{\psi}$ tal que: **A** é teorema de $\boldsymbol{T}_{\psi}$ se, e somente se, $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$; porém, isso contraria o Metateorema 5.2.5 e, portanto, ψ não é recursiva parcial. Assim, mesmo considerando outros fatores no processo de determinação lógico-matemática da validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, temos que este processo não pode ser considerado mecânico.

Notemos, então, uma estreita relação deste resultado com o aquele defendido por **Lucas 1961** de que "o Mecanicismo é falso", ou ainda, de que "mentes não podem ser explicadas por máquinas". Porém, Lucas desenvolve seu argumento de outra forma. Com efeito, o centro do argumento é que toda modelagem mecânica apresentada como adequada para simular a mente humana, sofreria da inadequação de ter uma fórmula que nós saberíamos ser verdadeira, mas que a máquina não determinaria como verdadeira (notemos que neste caso, a certeza de que a fórmula é verdadeira depende da certeza de que o modelagem mecânica produz, efetivamente, uma teoria consistente). Porém, como ele mesmo diz (**Lucas 1996**), seu argumento não é uma prova direta de que mentes não podem ser explicadas por máquinas, mas é um "esquema de refutação": dada qualquer modelagem apresentada pelo mecanicista, poderíamos mostrar que ela é inadequada; a partir da existência desse esquema (que, ele observa, é conseqüência do Metateorema de Gödel), espera-se que o mecanicista veja que a mente não pode ser explicada por máquinas. A exposição do artigo de Lucas, suas réplicas e tréplicas implicam na definição de uma série de conceitos e resultados que demandam uma longa discussão, como, por exemplo, o conceito de mente, de consciência, de consistência dos conteúdos mentais, etc., o que ultrapassa o objetivo proposto no presente trabalho e, portanto, reservamos a trabalhos posteriores a avaliação dessa discussão[22].

O resultado obtido acima impõe, então, uma restrição à classe das funções que modelam a capacidade lógico-matemática de determinação da validade de algumas fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas (ou no Modelo Padrão): essas funções não podem ser mecânicas, se entendermos por mecânica ser recursiva parcial. Como então entender essa capacidade e os processos que a caracterizam ? Antes de passarmos a esta questão, vejamos um outro exemplo de processo não-mecânico, porém relativo a um predicado recursivamente enumerável.

---

[22] Pode-se encontrar os artigos principais de Lucas, bem como algumas das referências dos principais artigos que se contrapõem ao argumento de Lucas, no site do autor: http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/ index.html

*3. A Determinação da Indemonstrabilidade em **N** e o Problema da Parada.*

Na seção anterior, vimos que a capacidade lógico-matemática de determinação da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas não é mecânica, e já havíamos mostrado (Metateorema 5.0.3 e Definição 5.0.1) que o conjunto das fórmulas que são válidas no Modelo de Marcas não é recursivamente enumerável. Isso nos leva à seguinte pergunta: para que a capacidade humana (lógico-matemática) seja não-mecânica, relativamente a um dado predicado, é necessário que este predicado não seja recursivamente enumerável ?[23] Veremos, nesta seção, que não: há capacidades humanas (lógico-matemáticas) não-mecânicas relativamente a predicados recursivamente enumeráveis. Um primeiro caso está relacionado ao predicado Teo_N que, como vimos (observação após o Metateorema 4.2.7), é recursivamente enumerável. Um segundo caso está relacionado ao Problema da Parada: dadas uma função recursiva parcial F e uma seqüência de números a, determinar se F está definida em a, isto é, se existe a tal que $F(\mathrm{a}) = a$, que, como veremos, também é recursivamente enumerável.

Tratemos, inicialmente, da capacidade humana de determinação de teoremas e não-teoremas de ***N***. Consideremos, então, os sistemas cujo *universo* é o mesmo que o do sistema $\mathbb{S}$ considerado anteriormente: as fórmulas de ***L(N)***, um lógico matemático idealizado e os valores **V**, **F**, e **?**, com as mesmas características apontadas anteriormente (Observações 5.1.1 e 5.2.2) e que verifica a demonstrabilidade, ou não-demonstrabilidade, das fórmulas de ***L(N)*** na teoria ***N*** (Definição 1.4.3). Como na seção anterior, a cada instante de tempo t e para cada fórmula **A**, associaremos um dos três *estados* designados pelos símbolos '**V**', '**F**' e '**?**', decorrente do funcionamento deste sistema, sendo que **V** denota que a fórmula **A** foi determinada como sendo teorema de ***N***, **F** denota que a fórmula **A** foi determinada como não sendo teorema de ***N***, e **?** denota que ainda não foi determinado que a fórmula **A** é teorema de ***N*** ou não. Por considerações análogas às feitas na seção anterior, vamos considerar uma *capacidade lógico-matemática de determinação da demonstrabilidade em **N** das fórmulas de **L(N)***, representada pela função ψ_N definida a seguir.

---

[23] Lembremos que, conforme o comentário logo após a Definição 3.2.9, todo predicado recursivo é recursivamente enumerável.

5.3.1. Definição. Designamos por ψ_N a função parcial unária tal que:

$\psi_N([\mathbf{A}]) = 0$ se em algum instante *t*, e para algum lógico matemático, este determina que **A** é teorema da teoria ***N***;

$\psi_N([\mathbf{A}]) = 1$ se em algum instante *t*, e para algum lógico matemático, este determina que **A** não é teorema da teoria ***N***; e

$\psi_N([\mathbf{A}])$ não tem valor definido se, em nenhum instante *t* , nenhum lógico matemático determina que **A** é ou não-teorema da teoria ***N***.

Notemos que, como ψ, ψ_N pode não estar definida para toda fórmula de ***L(N)***. Uma fórmula **A** tal que $\psi_N([\mathbf{A}])$ não está definida é aquela que nunca poderemos determinar se **A** é, ou não, teorema de ***N***, enquanto uma fórmula **A** tal que $\psi_N([\mathbf{A}])$ está definida é aquela que podemos determinar se **A** é, ou não, teorema de ***N***; como, por exemplo, os axiomas de ***N***, para os quais $\psi_N([\mathbf{A}]) = 0$, e as fórmulas de Gödel $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$, para uma dada extensão axiomatizada ***T*** de ***N*** que sabemos ser consistente, para a qual $\psi_N([\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}]) = 1$, já que $\mathbf{G}_{\boldsymbol{T}}$ não é teorema da extensão ***T*** de ***N***.

Notemos, então, que ψ_N é definida relativamente à noção de demonstrabilidade em ***N***, i.e., Teo_N, que é recursivamente enumerável (observação após o Metateorema 4.2.7), e que, portanto, pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), é um processo mecânico.

5.3.2. Convenção de Notação. Como no caso da função ψ, vamos, por abuso de notação, designar $\psi_N([\mathbf{A}])$ apenas por $\psi_N(\mathbf{A})$, e designar os valores 0 e 1, respectivamente, por **V** e **F**.

Mostremos, inicialmente, que não há um procedimento recursivo para decidir se uma fórmula **A** de ***L(N)*** é teorema de ***N***.

5.3.3. Metateorema. O predicado recursivamente enumerável Teo_N não é recursivo.

Metademonstração. Suponha que Teo_N seja recursivo, logo Teo_N tem que estar definido para toda fórmula **A** de ***L(N)*** e, pelo Metateorema da Representabilidade, existe uma fórmula $\boldsymbol{Teo_N}(\mathbf{x})$ tal que $Teo_N([\mathbf{A}])$ se, e somente se, $\boldsymbol{Teo_N}([\mathbf{A}])$ é teorema de ***N*** e $\sim Teo_N([\mathbf{A}])$ se, e somente se, $\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{A}])$ é teorema de ***N***. Notemos então que, nem (1) $\boldsymbol{Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, e nem (2) $\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, para a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_N$. Com efeito, a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_N$ é

$$\boldsymbol{\sim Teo_N(Sub([\mathbf{G}], 2, [\mathbf{G}]))},$$

que, como $Sub([\mathbf{G}], 2, [\mathbf{G}]) = [\mathbf{G}_N]$, é equivalente a

$$\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{G}_N]).$$

No caso (1), se $\boldsymbol{Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, então $\mathbf{G}_N$ é teorema de ***N*** e, de que todo teorema de ***N*** é válido no Modelo Padrão, temos que $\mathbf{G}_N$ é válida no Modelo Padrão, ou seja, pela definição de $\mathbf{G}_N$, temos que $\sim Teo_N([\mathbf{G}_N])$, que contradiz a hipótese (1). No caso (2), se $\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, então, pela definição de $\mathbf{G}_N$, temos que $\mathbf{G}_N$ é teorema de ***N***, o que contradiz o Metateorema da Incompletude de Gödel, segundo o qual $\mathbf{G}_N$ não é teorema de ***N***.

Portanto, temos que nem (1) $\boldsymbol{Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, e nem (2) $\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{G}_N])$ é teorema de ***N***, para a fórmula de Gödel $\mathbf{G}_N$, logo, Teo_N não é representável em ***N*** e, pelo Metateorema da Representabilidade, Teo_N não é recursiva.

Mostremos, então, que a capacidade humana de determinação de teoremas e de não-teoremas de ***N*** não é mecânica.

5.3.4. Definição. Chamamos *Teoria da Demonstrabilidade em **N*** a extensão $\boldsymbol{T_N}$ de ***N*** tal que os axiomas de $\boldsymbol{T_N}$ são os axiomas de ***N*** acrescidos das seguintes fórmulas: se reconhecemos que **A** é teorema de ***N***, então a fórmulas $\boldsymbol{Teo_N}([\mathbf{A}])$ é axioma de $\boldsymbol{T_N}$ e se reconhecemos que **A** não é teorema de ***N***, então a fórmula $\boldsymbol{\sim Teo_N}([\mathbf{A}])$ é axioma de $\boldsymbol{T_N}$.

*5.3.5. METATEOREMA. A TEORIA $\boldsymbol{T_N}$ DA DEMONSTRABILIDADE EM **N** NÃO PODE SER AXIOMATIZADA.*

Metademonstração. Notemos inicialmente que, como identificamos os axiomas de $\boldsymbol{T_N}$ como válidos no Modelo de Marcas, então $\boldsymbol{T_N}$ é consistente. Suponha, agora, que $\boldsymbol{T_N}$

pudesse ser axiomatizada; neste caso poderíamos exibir a fórmula

$$\mathbf{G}: \quad \boldsymbol{\sim Teo_N([Teo_T(Sub(x_1, 2, x_1))])}$$

que, por definição, é

$$\mathbf{G}: \quad \boldsymbol{\sim Teo_N}([\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T(Sub(x_1, 2, x_1), x_2)}]).$$

Se a variável x_1 vier a ser substituída pelo numeral [**G**], obtemos a fórmula

$$\mathbf{G}^*: \quad \boldsymbol{\sim Teo_N}([\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T(Sub([\mathrm{G}], 2, [\mathrm{G}]), x_2)})]).$$

Porém, como *Sub*([**A**], [**x**], [**a**]) = [**A**$_\mathbf{x}$**[a]**] e como 2 é o número de símbolo da variável x_1, temos então que *Sub*([**A**], 2, [**a**]) = [**A**$_{x_1}$**[a]**], isto é, é igual ao número da fórmula que resulta da substituição de x_1 pelo número [**a**] da expressão **a**. Assim, como *Sub*([**G**], 2, [**G**]) = [**G***], a fórmula **G*** é equivalente à fórmula **G**** abaixo:

$$\mathbf{G}^{**}: \quad \boldsymbol{\sim Teo_N}([\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}]).$$

Suponha, agora, que **G**** seja teorema de ***T***. Pela equivalência, **G*** é teorema de ***T***, logo, existe uma demonstração de **G*** em ***T*** cujo número-seqüência é *i* e tal que Dem_T([**G***], *i*); logo, pelo Metateorema da Representabilidade, $\boldsymbol{Dem_T}$**([G*], k$_i$)** é teorema de ***N***, e, portanto, $\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$ é teorema de ***N***. Assim, existe uma demonstração de $\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$ em ***N*** cujo número-seqüência é *i* e tal que Dem_N([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$], *i*), logo, pelo Metateorema da Representabilidade, $\boldsymbol{Dem_N}$([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$]**, *i*)** é teorema de ***N*** e, portanto, temos que $\boldsymbol{\exists x_2 Dem_N}$([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$]**, x_2)** é teorema de ***N***. Pela definição de $\boldsymbol{Teo_N}$, temos que $\boldsymbol{Teo_N}$([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$]**)** é teorema de ***N***, e, assim, que **~~**$\boldsymbol{Teo_N}$([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$]**)** é teorema de ***N***. Notemos, então, que **G**** é **~**$\boldsymbol{Teo_N}$([$\boldsymbol{\exists x_2 Dem_T([\mathrm{G}^*], x_2)}$]), logo, temos que **~G**** é teorema de ***N***, e como ***T*** é uma extensão de ***N***, temos que **~G**** é teorema de ***T***, o que contradiz ***T*** ser consistente e a hipótese inicial desse parágrafo de que **G**** é teorema de ***T***.

Portanto, se $\boldsymbol{T}$ pudesse ser axiomatizada, poderíamos exibir a fórmula $\mathbf{G}^{**}$ que não é um teorema de $\boldsymbol{T}$, e que por isso não é um teorema de $\boldsymbol{N}$. Devido a isso, $\mathbf{G}^{**}$, que é $\boldsymbol{\sim Teo_N([\exists x_2 Dem_T([G^*], x_2)])}$ e expressa que $\mathbf{G}^*$ não é teorema de $\boldsymbol{T}$, seria um axioma de $\boldsymbol{T}$, o que é uma contradição.

5.3.6. METATEOREMA. ψ_N NÃO É RECURSIVA PARCIAL.

Metademonstração. Seja ψ_N o predicado tal que $\psi_N([\mathbf{A}]) \leftrightarrow \psi_N([\mathbf{A}]) = \mathbf{V}$. Neste caso temos, pelo Metateorema 3.2.10, que ψ_N é recursivamente enumerável, se ψ_N é recursiva parcial. Afirmamos que, neste caso, ψ_N é um predicado teoria (Definição 4.2.8). Com efeito, se $\mathbf{A}$ é um axioma lógico, então $\psi_N([\mathbf{A}])$, pois $\psi_N([\mathbf{A}]) = \mathbf{V}$ e, se $\psi_N([\mathbf{A}_i])$ para todas as hipótese $\mathbf{A}_i$ de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é $\mathbf{A}$, então $\psi_N([\mathbf{A}_i]) = \mathbf{V}$ e $\psi_N([\mathbf{A}]) = \mathbf{V}$, logo $\psi_N([\mathbf{A}])$. Pelo Metateorema 4.2.9, existe uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}$ tal que: $\psi_N([\mathbf{A}])$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Ora, mas $\boldsymbol{T}$ é então uma extensão de $\boldsymbol{N}$ tal que: se reconhecemos que $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{N}$, então reconhecemos que $\boldsymbol{Teo_N([A])}$, logo, temos que $\psi_N([\boldsymbol{Teo_N([A])}]) = \mathbf{V}$ e, conseqüentemente, $\psi_N([\boldsymbol{Teo_N([A])}])$ e, portanto, $\boldsymbol{Teo_N([A])}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$; e se reconhecemos que $\mathbf{A}$ não é teorema de $\boldsymbol{N}$, então reconhecemos que $\boldsymbol{\sim Teo_N([A])}$, logo, temos que $\psi_N([\boldsymbol{\sim Teo_N([A])}]) = \mathbf{V}$ e, conseqüentemente, $\psi_N([\boldsymbol{\sim Teo_N([A])}])$ e, portanto, $\boldsymbol{\sim Teo_N([A])}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Basta então mostrar que $\boldsymbol{T}$ é uma extensão conservativa de $\boldsymbol{T_N}$ (Definição 1.5.19), pois como, pelo metateorema anterior, $\boldsymbol{T_N}$ não é axiomatizada, então, neste caso, se $\boldsymbol{T}$ fosse axiomatizada, teríamos uma contradição; logo, ψ_N não é recursivamente enumerável e, portanto, ψ_N não é recursiva parcial. Mostremos que $\boldsymbol{T}$ é uma extensão conservativa de $\boldsymbol{T_N}$. Com efeito, pelo comentário à Definição 1.5.15, $\boldsymbol{T}$ é uma extensão de $\boldsymbol{T_N}$, pois todos os axiomas de $\boldsymbol{T_N}$ são teoremas de $\boldsymbol{T}$. Por outro lado, $\boldsymbol{T_N}$ é uma extensão de $\boldsymbol{T}$, pois, se $\mathbf{A}$ é um teorema de $\boldsymbol{T}$, então temos que $\psi_N([\mathbf{A}])$ e $\psi_N([\mathbf{A}]) = \mathbf{V}$, logo, $\boldsymbol{Teo_N([A])}$ é teorema de $\boldsymbol{T_N}$ e, portanto, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{N}$, e assim é teorema de $\boldsymbol{T_N}$, que é uma extensão de $\boldsymbol{N}$. Assim, como $\boldsymbol{T}$ é uma extensão de $\boldsymbol{T_N}$ e $\boldsymbol{T_N}$ é uma extensão de $\boldsymbol{T}$ concluímos, pelo comentário à Definição 1.5.19, que $\boldsymbol{T}$ é uma extensão conservativa de $\boldsymbol{T_N}$, o que completa a metademonstração por redução ao absurdo.

Como pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) assumimos que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva parcial, temos o seguinte resultado.

*5.3.7. METATEOREMA. O PREDICADO PARCIAL UNÁRIO ψ_N NÃO PODE SER SIMULADO POR UM PROCESSO MECÂNICO, OU SEJA, A CAPACIDADE LÓGICO-MATEMÁTICA DE DETERMINAÇÃO DE TEOREMAS E NÃO-TEOREMAS DE **N** NÃO PODE SER SIMULADA POR UM PROCESSO MECÂNICO.*

Notemos, por fim, então que os resultados acima podem ser estendidos a qualquer extensão axiomatizada ***T*** de ***N***.

Passemos então à capacidade humana relativa ao Problema da Parada enunciado a seguir.

5.3.8. Problema da Parada. Dadas uma função recursiva parcial F e uma seqüência de números a, determinar se F está definida em a, isto é, se existe a tal que $F(\mathrm{a}) = a$.

Lembremos que, pela Definição 3.2.9, uma função parcial F é *recursiva parcial* se seu gráfico é recursivamente enumerável e que o gráfico de uma função parcial n-ária F (Definição 3.2.6), designado por G_F, é o predicado $(n+1)$-ário tal que $\mathrm{G}_F(\mathrm{a}, a)$ se, e somente se $F(\mathrm{a}) = a$. Como, pela Definição 3.2.8, o predicado $(n+1)$-ário $\mathrm{G}_F(\mathrm{a}, a)$ é recursivamente enumerável se existe um predicado $(n+2)$-ário recursivo Q, tal que, para cada seqüência (a, a) tal que $\mathrm{G}_F(\mathrm{a}, a)$, existe um elemento x, tal que $Q(\mathrm{a}, a, x)$, temos que F é recursiva parcial se, e somente se, existe um predicado $(n+2)$-ário recursivo Q, tal que: $F(\mathrm{a}) = a \leftrightarrow \mathrm{G}_F(\mathrm{a}, a) \leftrightarrow \exists x Q(\mathrm{a}, a, x)$. Lembremos então que, pelo Metateorema da Representabilidade (Metateorema 4.2.15), um predicado P é recursivo se, e somente se, é representável em uma extensão axiomatizada de ***N***. Podemos então reformular o Problema da Parada da seguinte forma:

*5.3.9. Problema da Parada para Fórmulas de **L(N)***. Dada uma fórmula $\mathbf{A}$ de ***N*** com $n+1$ variáveis livres distintas $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ tais que $\mathbf{A}$ com $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ representa um predicado recursivo em ***N***, determinar se a fórmula $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n)$ é teorema de ***N***, para numerais $\mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k}_n$.

Como a fórmula $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k}_n)$ é da forma $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, com uma única variável livre **x**, temos que o Problema da Parada para Fórmulas de *L(N)* é equivalente ao problema a seguir.

5.3.10. Problema da Parada para Fórmulas de ***L(N)***. Dada uma fórmula **B** de ***N*** com a variável livre **x**, tal que **B** com **x** representa um predicado recursivo em ***N***, determinar se a fórmula $\exists\mathbf{xB}(\mathbf{x})$ é teorema de ***N***.

Mostremos então que a capacidade humana de determinação desses casos mais simples, porém equivalentes à determinação de casos relativos ao Problema da Parada, não é mecânica. Mostremos antes que o Problema da Parada se relaciona a um processo mecânico.

Vimos que Teo_N é recursivamente enumerável e pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) é um processo mecânico. Notemos que no caso de existir um numeral $\mathbf{k}_a$, tal que $\mathbf{A}(\mathbf{k}_a)$, como a fórmula **A** com **x** representa um predicado recursivo em ***N***, temos que $Teo_N([\mathbf{A}(\mathbf{k}_a)])$, ou seja, neste caso, existe um procedimento mecânico relativo ao Problema da Parada de fórmulas de ***L(N)***. Porém, Teo_N não decide todos os casos, em particular não decide um caso no qual não existe um numeral $\mathbf{k}_a$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{k}_a)$. Com efeito, consideremos a fórmula $\boldsymbol{\sim Teo_N(Sub([G], 2, [G]))}$ definida na metademonstração do Metateorema 5.3.3 acima, que, por definição é $\boldsymbol{\sim\exists x_2 Dem_N(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$ e a questão de se decidir se existe $\mathbf{k}_a$ tal que $\boldsymbol{\sim Dem_N(Sub([G], 2, [G]), \mathbf{k}_a)}$. Como a fórmula de Gödel $\boldsymbol{\sim\exists x_2 Dem_N(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$ é verdadeira, não existe $\mathbf{k}_a$ tal que a fórmula $\boldsymbol{\sim Dem_N(Sub([G], 2, [G]), \mathbf{k}_a)}$ seja válida, e como $\boldsymbol{\sim\exists x_2 Dem_N(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$ não é demonstrável em ***N***, o predicado recursivamente enumerável Teo_N não decide que não existe $\mathbf{k}_a$ tal que $\boldsymbol{\sim Dem_N(Sub([G], 2, [G]), \mathbf{k}_a)}$.

Voltemos à questão da existência de uma capacidade humana de determinação não-mecânica relativa ao Problema da Parada.

5.3.11. Convenção de Notação. Seja então $\boldsymbol{T_{PP}}$ uma extensão de ***N*** cujos axiomas são os de $\boldsymbol{N}$ acrescidos das fórmulas $\boldsymbol{\sim\exists x\mathrm{A}(x)}$ que determinamos ser verdadeiras, em que **A** é uma fórmula de $\boldsymbol{N}$ com a variável livre **x** que representa um predicado recursivo em $\boldsymbol{N}$.

5.3.12. Metateorema. $\boldsymbol{T_{PP}}$ não é axiomatizada.

Metademonstração. Notemos que, como reconhecemos ser válidos no Modelo de Marcas todos os axiomas de $\boldsymbol{T_{PP}}$, $\boldsymbol{T_{PP}}$ é consistente. Suponhamos que $\boldsymbol{T_{PP}}$ seja axiomatizada, basta então notarmos que a fórmula de Gödel de $\boldsymbol{T_{PP}}$, $\boldsymbol{\sim Teo_{T_{PP}}(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$, é, pela Definição 4.2.6, $\boldsymbol{\sim\exists x_2 Dem_{T_{PP}}(Sub([G], 2, [G]), x_2)}$ e tem a forma $\boldsymbol{\sim\exists x\mathrm{A}(x)}$, em que **A** é uma fórmula de $\boldsymbol{N}$ com a variável livre **x** que representa um predicado recursivo $Dem_{T_{PP}}(Sub([\mathrm{I}], 2, [\mathrm{I}]), x)$ em $\boldsymbol{N}$. Logo, caso $\boldsymbol{T_{PP}}$ fosse axiomatizada, reconheceríamos que ela é consistente e daí que $\boldsymbol{\sim\exists x\mathrm{A}(x)}$ é verdadeira, e que $\boldsymbol{\sim\exists x\mathrm{A}(x)}$ não é teorema de $\boldsymbol{T_{PP}}$, o que é uma contradição.

5.3. 13. Definição. Designamos por ψ_{PP} a função parcial unária tal que:
$\psi_{PP}([\mathbf{A}]) = 0$ se **A** é teorema de $\boldsymbol{T_{PP}}$;
$\psi_{PP}([\mathbf{A}]) = 1$ se **~A** é teorema de $\boldsymbol{T_{PP}}$; e
$\psi_{PP}([\mathbf{A}])$ não tem valor definido se **A** é indecidível em $\boldsymbol{T_{PP}}$.

Notemos então que ψ_{PP} é uma restrição de ψ ao conjunto de fórmulas relativas ao Problema da Parada, como recolocado por nós e que se, por abuso de notação **V** e **F** designam, respectivamente, os números 0 e 1, a função ψ_{PP} como acima definida é tal que: dada uma fórmula **A** de $\boldsymbol{N}$ com a variável livre **x** tal que **A** com **x** representa um predicado recursivo em $\boldsymbol{N}$, temos que $\psi_{PP}(\exists \boldsymbol{x}\mathbf{A}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{V}$, se o lógico matemático verifica que existe um numeral $\mathbf{k}_a$ tal $\mathbf{A}(\mathbf{k}_a)$ ocorre e, temos que $\psi_N(\exists \boldsymbol{x}\mathbf{A}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{F}$, se o lógico matemático verifica que não existe um numeral $\mathbf{k}_a$ tal $\mathbf{A}(\mathbf{k}_a)$ ocorre.

5.3.14. METATEOREMA. ψ_{PP} NÃO É RECURSIVA PARCIAL.

Metademonstração. Seja ψ_{PP} o predicado tal que $\psi_{PP}([\mathbf{A}]) \leftrightarrow \psi_{PP}([\mathbf{A}]) = 0$. Notemos então que nesse caso temos que $\psi_{PP}([\mathbf{A}])$ ocorre se, e somente se, **A** é teorema de $\boldsymbol{T_{PP}}$ e que, pelo Metateorema 4.2.10: ψ_{PP} é um predicado teoria se, e somente se, $\boldsymbol{T_{PP}}$ é axiomatizada. Como, pelo metateorema anterior, $\boldsymbol{T_{PP}}$ não é axiomatizada, temos que ψ_{PP} não é um predicado teoria. Ora, mas como temos que se **A** é um axioma lógico, então $\psi_{PP}([\mathbf{A}])$, pois $\psi_{PP}([\mathbf{A}]) = 0$ e, se $\psi_N([\mathbf{A}_i])$ para todas as hipótese $\mathbf{A}_i$ de uma regra de inferência lógica cuja conclusão é **A**, então $\psi_N([\mathbf{A}_i]) = 0$ e $\psi_N([\mathbf{A}]) = 0$, logo $\psi_N([\mathbf{A}])$, temos que ψ_{PP} não é recursivamente enumerável. Logo, pelo Metateorema 3.2.10, temos que ψ_{PP} não é recursiva parcial.

Como pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11) assumimos que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por uma função recursiva parcial, temos o seguinte resultado.

5.3.15. METATEOREMA. O PREDICADO PARCIAL UNÁRIO ψ_{PP} NÃO PODE SER SIMULADO POR UM PROCESSO MECÂNICO, OU SEJA, A CAPACIDADE LÓGICO-MATEMÁTICA DE DETERMINAÇÃO DE CASOS DO PROBLEMA DA PARADA NÃO PODE SER SIMULADA POR UM PROCESSO MECÂNICO.

Notemos então que tais resultados estão de acordo com a conclusões de **Penrose 1989 e 1995**, no sentido de que não se pode simular por um processo algorítmico a capacidade humana de determinações de casos do Problema da Parada, apesar de obter esses resultados por outras vias, na sua argumentação.

Por estes resultados e pelos resultados da seção anterior, concluímos pela existência de três processos não-mecânicos: (1) a determinação de fórmulas de ***L(N)*** válidas no Modelo de Marcas (ou no Modelo de Padrão); (2) a determinação de teoremas e não-teoremas de ***N***; e (3) a determinação de casos relativos ao Problema da Parada.

Porém, fica então a pergunta: se tais processos não são mecânicos, então como são eles ? Ou ainda: como tratar, então, estes processos não-mecânicos ? Isto nos leva ao próximo capítulo.

6. A AUTO-ORGANIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE VERDADES LÓGICAS E MATEMÁTICAS

Neste capítulo, abordamos a questão de como compreender o processo de determinação de verdades aritméticas que, como vimos no capítulo anterior, não pode ser completamente descrito por uma teoria formal, nem simulado por um processo mecânico. Trata-se aqui de tecer reflexões e especulações acerca desse processo, mostrando como algumas noções estabelecidas na exposição dos conceitos básicos de Sistêmica de **Breciani F$^{\underline{o}}$ & D'Ottaviano 2002** e na Teoria de Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c** (exposta sucintamente na Seção 1) podem ser aplicadas para uma compreensão mínima desse processo (o que é realizado na Seção 2). Buscamos ser rigorosos, explicitando as noções usadas e introduzindo, no início, algumas definições para, posteriormente, tecer, a respeito do processo de determinação de verdades aritméticas, algumas *observações* que, sublinhamos, não são demonstradas ou metademonstradas, no sentido estrito, já que não se trata aqui de uma teoria formal, seja dos sistemas, seja da auto-organização. Na terceira e última seção, indicamos como tal análise pode ser estendida ao processo de determinação de verdades de lógicas de ordens superiores, a partir de uma exposição sucinta de como o Metateorema da Incompletude implica na incompletude dos sistemas lógicos de ordens superiores.

Mostramos, no capítulo anterior, (Metateoremas 5.2.8, 5.3.7 e 5.3.15) a existência de três processos não-mecânicos, a saber: o processo de determinação, por um lógico matemático, de fórmulas de ***L(N)*** válidas no Modelo de Marcas e no Modelo de Padrão (que representamos por uma função ψ, tal que: $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, se o lógico matemático identifica que **A** é válida no Modelo de Marcas; e $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$, se identifica que **A** não é válida no Modelo de Marcas); o processo de determinação, por um lógico matemático, de teoremas e não-teoremas de ***N*** (o qual representamos por uma função ψ_N, tal que: $\psi_N(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, se o lógico matemático verifica que **A** é teorema da teoria ***N***; e, $\psi_N(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$, se verifica que **A** não é teorema da teoria ***N***); e o processo de decisão de casos do Problema da Parada (o qual representamos por uma função ψ_{PP}, tal que: dada uma fórmula **A** de ***N*** com a variável livre **x** tal que **A** com **x** representa um predicado recursivo em ***N***, $\psi_{PP}(\exists \boldsymbol{x}\mathbf{A}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{V}$, se o lógico matemático verifica que existe um numeral $\mathbf{k}_{\boldsymbol{a}}$ tal $\mathbf{A}(\mathbf{k}_{\boldsymbol{a}})$ ocorre e, $\psi_N(\exists \boldsymbol{x}\mathbf{A}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{F}$, se o lógico matemático verifica que não existe um numeral $\mathbf{k}_{\boldsymbol{a}}$ tal $\mathbf{A}(\mathbf{k}_{\boldsymbol{a}})$ ocorre).

Denominaremos então, abreviadamente, de *processo* ψ o processo de identificação pelo lógico matemático da validade ou não-validade das fórmulas de ***L(N)***, de *processo* ψ_N o processo de identificação pelo lógico matemático de teoremas e não-teoremas de ***N*** e de *processo* ψ_{PP} o processo de decisão pelo lógico matemático de casos do Problema da Parada.

Assim, neste capítulo (Seção 2), estudaremos o processo ψ, observando que tratamento análogo pode ser desenvolvido para os processos ψ_N e ψ_{PP}. Novamente, vamos nos restringir à validade no Modelo de Marcas, considerando a existência de isomorfismo dessa estrutura com a estrutura dos Números Naturais. Antes, porém, façamos uma exposição sucinta da Teoria da Auto-Organização de Debrun que será utilizada posteriormente para o estudo do processo ψ.

1. A Teoria da Auto-Organização de Michel Debrun.

Nesta seção, vamos tratar da noção de processo auto-organizado de acordo com a Teoria da Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c**. Introduzimos noções, definições e resultados que utilizamos, posteriormente, na compreensão do processo ψ. Notemos que a Teoria da Auto-Organização de Debrun exposta a seguir não é uma teoria formal (*cf.* início do Capítulo 1), nem mesmo uma teoria axiomática[24]. Com efeito, em **Debrun 1996a**, **b** e **c**, temos uma investigação da noção de auto-organização, de suas características e implicações, que acaba por produzir um conjunto de categorias originais. Se interpretada dessa forma, a Teoria da Auto-Organização de Debrun introduz noções tais que os termos que as designam têm seus sentidos deslocados em relação aos sentidos usuais, sem que, no entanto, deles se distanciem completamente, como veremos.

Comecemos com uma descrição sucinta de **Debrun 1996b**, no qual o autor apresenta definições de auto-organização e suas justificativas.

Inicialmente, Debrun busca estabelecer o significado de "auto-organização" e a necessidade de mantê-lo sempre presente:

> A idéia de auto-organização situa-se na encruzilhada da idéia de "organização" e da intuição que temos do prefixo "auto". Esse termo é uma âncora lingüística, constantemente relacionada com nossa experiência do mundo. Em particular com nossa percepção da interação – causal, mo-

---

[24] Utilizamos, pois, o termo "teoria" aqui em seu sentido amplo, já que a Teoria da Auto-Organização de Debrun institui um sistema de noções para serem aplicadas na prática.

ral, política – entre indivíduos ou coletividades, e com a avaliação que fazemos dos seus respectivos graus de autonomia e auto-afirmação. Nessas condições, uma definição de "auto-organização" que não fosse admissível pelo Senso Comum, em relação ao sentido atribuído explícita ou implicitamente a "auto", se tornaria arbitrária, gratuita. É o que ocorre com formulações do tipo proposto por H. VON FOERSTER (1960), quando vê a auto-organização como o "aumento da redundância num sistema" ou "a diminuição da entropia num sistema". Não que tais definições sejam forçosamente erradas. Apenas não fazem sentido, enquanto não puderem ser conectadas com tal ou qual intuição, atual ou potencial, do Senso Comum, e nela enraizadas. Haveria, por exemplo, de se mostrar que as definições de von Foerster apontam para um aspecto, uma condição ou uma conseqüência da auto-organização, tal como terá sido definida intuitivamente. Trata-se portanto de explorar o Senso Comum – no duplo sentido de desvendá-lo e utilizá-lo, sistematizando ou tornando mais complexas suas sugestões –, nunca de superá-lo.

Vemos que Debrun pretende explorar o significado do termo auto-organização para, a partir daí, encontrar certos elementos que permitam caracterizar os processos auto-organizados e um modo de estabelecer a definição de auto-organização. Nesse sentido, Debrun apresentará, no decorrer do artigo, uma seqüência de definições de auto-organização, sendo, cada qual, um refinamento da anterior.

Dentro dessa perspectiva "intuicionista", Debrun propõe uma definição inicial, parcial e provisória de "auto-organização":

uma organização ou "forma" é auto-organizada quando se produz a si própria.

A partir de que toda organização tem por base elementos discretos e de que a forma auto-organizada não se produz no vazio, mas a partir de tais elementos – sem que, porém, a mera presença desses elementos determine mecanicamente o processo que vai se desenrolar sobre a base deles – Debrun conclui que, na auto-organização, esses elementos constituem apenas um material ou alicerce, sendo que o que há de novo, de "emergente" na auto-organização, deve ter suas origens ao nível do próprio processo, e não nas suas condições de partida, e nem no intercâmbio – material, energético, informacional, simbólico – com o ambiente. Daí, propõe uma nova definição preliminar de auto-organização:

Há auto-organização cada vez que o advento ou a reestruturação de uma forma, ao longo de um processo, se deve principalmente ao próprio processo – a características nele intrínsecas –, e só em grau menor às suas condições de partida, ao intercâmbio com o ambiente ou à presença eventual de uma instância supervisora.

Uma das conseqüências que Debrun infere dessa definição é que:

> Mesmo que a auto-organização seja uma criação, ela permanece um processo. Não é um ato indivisível, quase atemporal, à diferença da "autopoiese" (MATURANA & VARELA, 1980).

Nessas condições, conclui que a auto-organização não é mera decorrência do seu próprio começo, pois, se o fosse, ela se transformaria, precisamente, em autopoiese, e o começo funcionaria como uma lei de construção do que vem depois: o processo de auto-organização apenas "herda" esse começo, que ele vai levar em conta de modo muito variável. Entretanto, o autor reconhece que a dualidade proposta entre auto-organização e autopoiese não parece consensual entre os principais teóricos da auto-organização (em particular, **Dupuy 1982**).

Na seção seguinte, ressalta, então, que a definição acima significa que o processo de auto-organização é "auto", é "ele mesmo" e explora o significado da palavra "auto" relacionado à "organização". Mostra, então, que esse significado implica inicialmente em uma autonomia relativa às condições iniciais e que essa não implica num banal indeterminismo, uma capacidade de "pular" fora de uma situação dada. Ao contrário, que, no caso de um processo auto-organizado, algumas das condições de partida permitem que o processo "alce vôo próprio", que ele ultrapasse suas condições de partida a partir delas próprias.

A partir daí, Debrun introduz um conjunto de categorias originais relativas aos processos de auto-organização: "distinção real" e "distinção analítica" entre os elementos; "condicionamento" dos elementos entre si; "encontro" entre estes elementos; "elemento solto"; "corte em relação ao passado"; "condições das condições de partida"; "séries causais"; "contorno"; "dispositivo organizacional"; "amontoado"; e "quadro". Reproduzimos, então, o texto, ressaltando, em negrito, as categorias introduzidas, que são por nós indicadas (entre colchetes) no início de cada parágrafo:

> [Distinção Real; Distinção Analítica] Por um lado [os elementos] são "**realmente**" e não "**analiticamente**" distintos, por não serem redundantes entre si, isto é, por não terem conexões, afinidades etc., atuais ou potenciais, fora do fato de que todos são igualmente submetidos às leis gerais da natureza.
>
> [Encontro entre Elementos; Condicionamento entre Elementos] Isso faz com que esses elementos, em vez de se ***condicionarem*** (um ao outro, ou um e outro reciprocamente), se "***encontrem***", ficando livres, portanto, para conexões novas, inauditas – que vão surgir "aqui e agora" – e não apenas para se atualizar ou se revelar. Por outro lado, devem ser mais ou menos "soltos".
>
> [Elemento Solto] Um elemento será considerado como "**solto**" quando, seja qual for o conjunto de fatos e causalidades que precederam o encontro com outros elementos "distintos", ele "**cor-**

ta” ou ignora esse **passado**. Se, por exemplo, dois jogadores têm um pelo outro certa simpatia herdada do passado, esse sentimento há de ser esquecido ou colocado entre parêntese uma vez que os times estão reunidos em campo. Um elemento solto é um elemento sem memória, desconectado do contexto de modo geral, e que só vai adquirir uma nova memória (isto é, participar da elaboração de uma curta memória coletiva, sedimentada ao longo do jogo) em decorrência da sua interação com outros elementos distintos e soltos.

Logo: tais elementos, desconectados uns dos outros e do restante do universo (situação que não passa, é claro, de um limite), não podem deixar de inventar a fórmula da sua auto-organização coletiva. Mesmo que haja, eventualmente, um determinismo regendo o embate desses elementos, ou, coisa mais plausível, um determinismo se constituindo – enquanto determinismo – ao longo do embate.

[Condições das Condições de Partida; Contorno] Trata-se de acasos no sentido de A. COURNOT (1843): aproximação casual (ou choque, no limite, mas essa eventualidade não interessa aqui) entre vários elementos (“**séries causais**”, por exemplo: uma série de acontecimentos econômicos “encontra” uma série de acontecimentos políticos). Ou de decisões de indivíduos, de grupos, de entidades (por exemplo a Confederação Brasileira de Futebol determina que tal jogo entre tais times terá que se realizar tal dia em tal lugar). São esses acasos ou decisões que fazem com que elementos realmente distintos e soltos – acrescidos ou não de outros tipos de elementos – estejam reunidos em determinado momento dentro de um ***contorno*** (um estádio, por exemplo, ou uma praça) visível ou invisível.

[Dispositivo Organizacional] Chamaremos de “**dispositivo organizacional**”, tendo probabilidade variável de se transformar em processo de auto-organização (por sua vez bem sucedido ou não), o conjunto formado pelo contorno e os elementos nele incluídos.

[Amontoado] Quando o dispositivo é apenas esboçado – devido, digamos, à distância entre os elementos (por exemplo, a “grande distância” inicial ou “estanqueidade recíproca” entre duas idéias na mente de alguém), falaremos apenas de “**amontoado**”.

[Quadro do Desenrolar do Sistema] Outra condição de partida capaz de estimular ou reforçar (ou de brecar) a autonomia do processo é o ***quadro*** em que se desenrola. Quadro este formado por disposições institucionais (definição de alvos legítimos, de regras de funcionamento, de sanções possíveis etc.), no caso de competições lúdicas, desportivas, econômicas, políticas, culturais, e/ou por limites de fato. Por exemplo, o processo de auto-organização de uma multidão que procura fugir de um lugar que pega fogo terá maior probabilidade de ser autônomo e criativo em relação a essas condições de partida se houver múltiplas soluções possíveis do que se houver uma só. Neste último caso as condições de partida tendem a determinar rigidamente o desfecho e a auto-organização tende a ser substituída pela evolução de um sistema dinâmico comum.

Finaliza então a seção, resumindo a característica central do processo auto-organizado, que é a de “depender basicamente de si mesmo, ser autônomo”, ser “auto”, ser “ele mesmo”, “ser inteligível a partir de si mesmo”, acrescentando ainda o trabalho de si sobre si, que faz com que o todo se organize a partir de si mesmo e caminhe rumo à construção de uma forma (também no sentido de uma *gestalt*), em certos casos, capaz de auto-referência, que não é uma resultante passiva do processo, e que, por isso, tem, ou constitui, uma identidade.

O motor principal da auto-organização, segundo Debrun, reside na própria interação entre os elementos “realmente distintos” e soltos, ou entre partes “semi-distintas” no seio de um organismo. “Semi-distintas” significa aqui que o organismo não é um ente “holístico”, em que tudo fusiona com tudo – mas que, todavia, existe uma “interioridade” ou “acavalamento” entre as partes, expresso em que cada parte é co-determinada pelas outras e que tem a possibilidade de substituí-las, ou não, para preencher tal ou qual papel.

A partir dessa exposição do motor da auto-organização, Debrun começa a diferenciar duas modalidades de auto-organização: a primária e a secundária. A primeira modalidade de auto-organização é chamada de “primária”, para destacar que ela não parte de uma “forma” (ser, sistema etc.) já constituída, mas que, ao contrário, há “sedimentação” de uma forma. A segunda modalidade de auto-organização é chamada de “secundária”, à medida que ela não parte de simples elementos, mas de um ser ou sistema já constituído, como aquela que, por exemplo, ocorre com o organismo que consegue passar, a partir de suas próprias operações, exercidas sobre si próprio, de determinado nível de complexidade – corporal, intelectual, existencial – para um nível superior.

Quanto à auto-organização secundária, no caso do ser humano, temos que se estabelece, ainda, uma “forma-sujeito”, possuindo uma “face-sujeito”, que, frente a um desafio externo ou interno, decide, orienta, impulsiona e controla a autotransformação do organismo rumo a um nível de complexidade superior. Debrun mostra, contudo, que esta face-sujeito não se coloca como onipotente em relação ao resto do organismo: ela aparece então como uma parte entre outras, cujo papel (e a natureza) é particularmente importante, mas não de ordem diferente dos outros papéis. A idéia é a seguinte: devido à combinação, no organismo, da autonomia relativa das partes, as partes diretoras só podem exercer sobre as outras – de modo geral e, em especial, durante a constituição de novos patamares de atividade – um papel hegemônico, mas não dominante. O papel hegemônico de certas partes significa que “dirigem”, mas têm para tanto de “solicitar” às outras, senão não conseguem nada. O que introduz também a categoria de “hegemonia” inspirada em Gramsci 1935 (1975).

A partir das considerações acima, formula, então, uma nova definição de “auto-organização”, mais rica, que leva em conta a *especificação* que o aspecto “organização” traz para o aspecto “auto”, que reside, de um lado, na própria existência dos elementos, e de outro, na integração de tais elementos numa “forma”:

Há auto-organização cada vez que, a partir de um encontro entre elementos realmente (e não analiticamente) distintos, desenvolve-se uma interação sem supervisor (ou sem supervisor onipotente) – interação essa que leva eventualmente à constituição de uma "forma" ou à reestruturação, por "complexificação", de uma forma já existente.

A qual completa com duas definições auxiliares:

a) Há auto-organização primária quando a interação seguida de eventual integração se realiza entre elementos totalmente distintos (ou havendo, pelo menos, predominância de tais elementos), num processo sem sujeito nem elemento central nem finalidade imanente – as possíveis finalidades situando-se a nível dos elementos.

b) Há auto-organização secundária quando, num processo de aprendizagem (corporal, intelectual ou existencial), a interação se desenvolve entre as partes ("mentais" e/ou "corporais") de um organismo – a distinção entre partes sendo então "semi-real" –, sob a direção hegemônica mas não dominante da "face-sujeito" desse organismo.

Chegamos então à definição de auto-organização secundária, que é a que nos interessa neste trabalho, que ocorre no seio de um organismo com uma face-sujeito hegemônica, mas não-onipotente. É ela que será usada para analisar o processo ψ, descrito neste trabalho. Quanto à relação entre uma filosofia do sujeito e a auto-organização, lembremos, com Debrun, que se sujeito é "auto", quase que por definição, o que é "auto" não é sempre "sujeito", e que apesar de múltiplos cruzamentos, não há muita compatibilidade – e muito menos fusão – entre a "Filosofia do Sujeito" e as teorias da auto-organização.

Debrun 1996c desenvolve uma análise sobre a auto-organização primária. Logo, não o exploramos aqui, já que nosso interesse se centra sobre a noção de auto-organização secundária. Vamos fazer apenas um pequeno recorte de algumas análises relativas à auto-organização em geral e de alguns aspectos relacionados mais diretamente com os processos que serão analisados posteriormente.

Debrun 1996c concebe duas modalidades de auto-organização, que serão por ele designadas, posteriormente, por auto-organização secundária e auto-organização primária:

Numa delas [na auto-organização secundária] temos no ponto de partida um organismo (ou um artefato possuindo algumas características do organismo), comportando eventualmente um "aspecto sujeito" (e, nesse caso, que é o do organismo humano, falaremos em "forma-sujeito", dotada de uma “face-sujeito”), e que visa consciente ou inconscientemente se reestruturar para enfrentar desafios. Ou seja, procura passar, por aprendizagem, de determinado nível de complexidade (corporal, intelectual ou existencial) para um nível de complexidade maior. O que é “auto”, aqui, é que tanto o ponto de partida (a “decisão”) como o ponto de aplicação (tal parte do corpo, por exemplo), bem como os mecanismos utilizados e parte dos recursos, situam-se “dentro” de um mesmo organismo. O sujeito auto-organizador permanece “nele próprio” durante as operações de reestruturação. Ele efetua um trabalho de si sobre si, que definimos em outros textos como sendo o núcleo da auto-organização (DEBRUN, 1996, p.6).

...

Ou então[na auto-organização primária] temos no ponto de partida uma multiplicidade de elementos que são ao mesmo tempo “soltos” (em relação ao passado de cada um: esse passado é “cortado” ou ignorado) e “realmente distintos” (isto é, despojado de conexões lógicas ou causais entre si, de afinidades latentes etc.).

...

Quando há uma pluralidade externa – e que se vai de elementos avulsos para a constituição de uma forma – falaremos em auto-organização “primária” (correspondendo à segunda modalidade exposta acima). Quando se trata da “auto-complexificação” de um organismo (de um sistema, de modo mais geral) constituído, falaremos em auto-organização “secundária” (que corresponde à primeira modalidade supracitada).

Notemos, então, que, em relação à auto-organização secundária, Debrun desloca a ênfase, geralmente posta sobre as relações entre o sistema auto-organizado e seu ambiente, como em **Atlan 1979**, para as operações “técnicas”, que acredita serem essencialmente internas e que consubstanciam a dinâmica desse sistema. Debrun nota que isso não constitui apenas uma decisão metodológica, mas levanta problemas teóricos em relação à própria natureza desse tipo de auto-organização, como, por exemplo, em relação ao aumento da “centração sobre si”, quanto mais um sistema se auto-organiza, mesmo que se mantenha (e deva se manter para sobreviver) aberto ao mundo exterior, que pode chegar a se erigir em alvo único ou supremo, a formar uma maneira de “quisto” no universo. Essa concepção de Debrun, que procura detectar na auto-organização uma “lógica do fechamento” (quando outros fatores não intervierem para frear ou anular essa lógica), não é necessariamente compartilhada por outros autores, em particular pelos pioneiros da idéia de auto-organização, como, por exemplo, **Atlan 1979**.

Apesar das diferenças desses dois tipos de processos, ambos têm várias coisas em comum: (a) o “trabalho de si sobre si”, já mencionado; (b) que esse trabalho leva a uma “centração” crescente do sistema sobre ele mesmo, seja através do reforço e “complexificação” de um sistema ou ser existente, seja através da constituição do próprio sistema; (c) que esse “trabalho de si sobre si” implica, por sua vez, um começo real; (d) que as duas modalidades de auto-organização pressupõem uma pluralidade de elementos e é precisamente a interação entre esses elementos que constitui o motor principal da auto-organização, como vimos anteriormente.

Só que os elementos da auto-organização primária constituem, inicialmente, uma pluralidade "avulsa" ou "externa". Ao passo que, na aprendizagem, com o organismo agindo sobre si próprio, as partes (por exemplo a mente e o corpo) não podem ser completamente distintas entre si: só podem ser "semi-distintas". E seus papéis tampouco podem ser rigorosamente distinguidos: a mente é "mais agente do que agida", o corpo "mais agido do que agente". Só isso. Lidamos com uma pluralidade "interna".

Ressaltemos, ainda, uma pequena análise da aprendizagem que é desenvolvida, aplicando-se os conceitos relativos à auto-organização primária:

> No caso de uma aprendizagem – a aprendizagem sendo a manifestação mais importante da auto-organização secundária – sabemos que um organismo pretende se autotransformar, passando por exemplo de um nível lógico, ontológico ou existencial para outro. Ora, essa transformação só pode ser "auto" se o operador e o operado (digamos a mente e o braço) mantiverem entre si uma relação de interioridade prévia, que impeça que a mente seja vista como um "puro sujeito", e o braço como um "puro objeto". Melhor ainda: para que continue o processo de auto-organização – quando se trata de encadear gestos uns com os outros – é indispensável que o operador não assuma uma atitude excessivamente analítica, que prejudicaria ou romperia a interioridade, levando ao fracasso, ou à transformação da auto-organização em hetero-organização.

Por fim, destaquemos um aspecto interessante que esta noção de auto-organização traz para a análise da criatividade:

> Finalmente a criatividade da auto-organização depende, antes de mais nada, da própria interação entre elementos, distintos ou semi-distintos.

Terminemos, então, esta exposição sucinta da Teoria de Auto-Organização de Debrun, salientando que, para este, na auto-organização, a unidade não é transcendente às partes, nem é dada originariamente: a unidade surge quase sempre do próprio processo, de modo imanente, isto é, "colada" ao processo, sem por isso se reduzir a uma entidade puramente nominal como são os todos aditivos, ou seja, sem que se esteja nomeando e atribuindo uma unidade ao que é apenas uma mera justaposição de elementos.

2. O Processo ψ de Determinação de Verdades Aritméticas.

Nesta seção, vamos analisar o processo de determinação pelo lógico matemático da validade ou não-validade das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, também denominado, no início do presente capítulo, de processo ψ, por ser representado pela função ψ introduzida anteriormente (Definição 5.2.1).

Comecemos, então, averiguando como o lógico matemático utiliza as definições introduzidas anteriormente, na Seção 1, para determinar a validade de uma fórmula de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$.

Dada uma fórmula **A** de ***L(N)***, um lógico matemático determina se **A** é válida, ou não, no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, utilizando a Definição 2.1.12, que, no caso, equivale à definição a seguir.

6.2.1. Definição. Uma fórmula **A** de ***L(N)*** é *válida em* $\mathbb{M}$ se $\mathbb{M}$(**A'**) = **V**, para toda $\mathbb{M}$-instância **A'** de **A**.

Notemos, então, que se **A** é fechada, **A** é válida em $\mathbb{M}$ se, e somente se, $\mathbb{M}$(**A**) = **V**, e, portanto, a determinação da validade ou não-validade de **A** equivale à determinação do valor-verdade de **A**. Analisaremos mais adiante a questão da determinação do valor-verdade de **A** em $\mathbb{M}$.

Voltando então à questão da determinação da validade de uma fórmula qualquer de ***L(N)*** no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$, temos que a Definição 2.1.11 de $\mathbb{M}$-instância **A'** de uma fórmula **A** de ***L(N)***, usada na definição acima, reduz-se, neste caso, à definição a seguir.

6.2.2. Definição. Uma *$\mathbb{M}$-instância* de uma fórmula **A** de ***L(N)***, é uma fórmula fechada de ***L($\mathbb{M}$)*** da forma $\mathbf{A}[\mathbf{i}_1 , ..., \mathbf{i}_n]$.

L($\mathbb{M}$) é, segundo a Definição 2.1.6, a linguagem de primeira ordem cujos símbolos não-lógicos são os de ***L*** acrescidos de uma constante para cada indivíduo *a* de $\mathbb{M}$ (que é chamada de *nome* de *a*). Neste caso, como cada indivíduo do Modelo de Marcas é representado por um numeral (Definição 1.4.5), que é um termo da linguagem ***L(N)***, denotado pela variável sintática $\mathbf{k}_i$ (Convenção de Notação 1.4.6, o sub-índice $\boldsymbol{i}$ indica o número de ocorrências do símbolo S em $\mathbf{k}_i$), a definição acima equivale à definição a seguir.

6.2.3. Definição. Uma *$\mathbb{M}$-instância* de uma fórmula **A** de ***L(N)***, é uma fórmula fechada de ***L(N)*** da forma $\mathbf{A}[\mathbf{k}_{i_1}, ..., \mathbf{k}_{i_n}]$.

Se levarmos em conta o comentário anterior e que ***L(N)*** (Definição 1.4.3) só tem um símbolo de predicado "<", denominado *menor que*, a Definição 2.1.10 de valor-verdade de uma fórmula fechada **A** é equivalente à definição seguinte.

6.2.4. Definição. O *valor-verdade $\mathbb{M}$(**A**)* para uma fórmula fechada **A** de ***L(N)*** (que, notemos, estabelece a validade de **A** em $\mathbb{M}$, no caso de $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, e a não-validade em $\mathbb{M}$, no caso de $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$) é dado pelas seguintes cláusulas:

1. Se **A** é da forma $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (na qual, **a** e **b** são termos livres de variáveis), então $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbb{M}(\mathbf{a} = \mathbf{b}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{M}(\mathbf{a}) = \mathbb{M}(\mathbf{b})$, caso contrário, $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;
2. Se **A** é da forma $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ então $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbb{M}(\mathbf{a} < \mathbf{b}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{M}(\mathbf{a}) <_{\mathbb{M}} \mathbb{M}(\mathbf{b})$, caso contrário, $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;
3. Se **A** é da forma $\sim\mathbf{B}$, então $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbb{M}(\sim\mathbf{B}) = H_{\sim}(\mathbb{M}(\mathbf{B}))$;
4. Se **A** é da forma $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, então $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbb{M}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = H_{\vee}(\mathbb{M}(\mathbf{B}), \mathbb{M}(\mathbf{C}))$;
5. Se **A** é da forma $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}$, então $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{M}(\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{k}_i]) = \mathbf{V}$, para algum $\mathbf{k}_i$ em ***L(N)***, caso contrário, $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$.

Vejamos então como, em cada caso, é determinado o valor-verdade de **A** e se essa determinação pode ser realizada por um processo mecânico.

No caso de **A** fechada e da forma $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ou $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ (Itens 1 e 2 da definição acima), para determinar a validade de **A**, basta calcular os valores de **a** e **b**, caso estes contenham símbolos funcionais, e verificar se ocorre a igualdade ou a desigualdade *menor que*. Neste caso, uma máquina ideal pode também determinar a validade de **A**, já que as relações = e < são recursivas (Metateorema 3.1.13) e, portanto, descrevem um procedimento mecânico, segundo o Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11).

Se **A** é fechada e da forma **~B** ou **B** $\vee$ **C** (Itens 3 e 4 da definição acima), então, para determinar a validade de **A**, basta usar as definições de $H_{\sim}$ (Definição 2.1.3) ou $H_{\vee}$ (Definição 2.1.4) e os valores-verdade das fórmulas anteriores. Logo, a questão de se determinar a validade de **A** se reduz a determinar os valores-verdade das suas fórmulas componentes. Neste caso, uma máquina ideal pode também determinar a validade de **A**, caso consiga determinar os valores-verdade das fórmulas componentes de **A,** já que, se P e Q são recursivos, então $(\sim P)$ e $(P \vee Q)$ são recursivos (Metateorema 3.1.12), e, pelo Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), descrevem procedimentos mecânicos.

Por fim, se **A** é fechada e da forma $\exists$**xB** (Item 5 da definição acima), para determinar a validade, ou a não-validade, de **A**, temos que:

1. Encontrar o numeral $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]}) = \mathbf{V}$, caso este $\mathbf{k}_i$ exista; ou
2. Metademonstrar que não existe um numeral $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]}) = \mathbf{V}$, caso este $\mathbf{k}_i$ não exista.

Aqui, também, a determinação da validade, ou da não-validade, de **A** em $\mathbb{M}$ depende da determinação da validade das fórmulas $\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]}$.

No caso (1) acima, quando existe $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]}) = \mathbf{V}$, se existe uma máquina ideal que pode calcular $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]})$, temos que existe uma máquina ideal que pode determinar a validade de **A**. Com efeito, basta ir testando mecanicamente os diversos valores de $\mathbf{k}_j$ até chegar em um valor de $\mathbf{k}_j$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_j\mathbf{]}) = \mathbf{V}$, neste caso, este valor é $\mathbf{k}_i$. Quando não existe $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]}) = \mathbf{V}$, este processo específico não funciona, pois nunca chegaria ao fim; trata-se, aqui, do caso (2) acima.

No caso (2), temos que, em geral, nem sempre é possível ser mecanicamente determinado que $\mathbb{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$, mesmo que exista uma máquina ideal que possa calcular $\mathbb{M}(\mathbf{B_x[k}_i\mathbf{]})$, para cada valor de $\mathbf{k}_i$. Com efeito, como todos os outros casos anteriores podem ser solucionados mecanicamente, se este também pudesse, haveria um procedimento mecânico para gerarmos toda a **Aritmética**, o que contraria o Metateorema 5.0.4.

Dado que a capacidade do lógico matemático de determinação da validade de fórmulas também não é mecânica (Metateorema 5.2.8), é a determinação das fórmulas que estão nesse caso (2) que permite diferenciar a capacidade de determinação da validade pelo lógico matemático e a possibilidade de determinação da validade por qualquer máquina.

Portanto, esse é o caso que analisaremos em detalhe, a seguir.

Notemos, porém, que não é o caso de podermos exibir uma fórmula **A** que reconhecemos ser válida e que não poderia ser determinada como válida por qualquer máquina. Com efeito, dada uma fórmula **A** que reconhecemos ser válida, sempre podemos considerar uma máquina que contenha, em seu algoritmo ou mecanismo, uma regra explícita para determinar que a fórmula **A** é válida. Mais ainda, sempre podemos exibir uma máquina que determina um conjunto Γ recursivamente enumerável de fórmulas que reconhecemos ser válidas, pois como Γ é o domínio de uma função recursivamente enumerável, poderíamos, também, considerar uma máquina que contivesse, em seu algoritmo ou mecanismo, a função recursivamente enumerável que determina as fórmulas que são de Γ. Isso implica que para mostrar que a capacidade de um lógico matemático de determinação da validade não é mecânica temos que, necessariamente, buscar argumentos gerais a respeito da determinação da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas, como foi feito na Seção 5.2.

Mais ainda, como a capacidade de determinação da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas não pode ser finitamente descrita (por um processo recursivo parcial), então a compreensão dela e dos processos que ela envolve não pode ser finitamente realizada (por uma teoria axiomatizada ou por processo recursivo parcial), portanto, só pode ser realizada a partir de considerações gerais.

Antes de continuarmos a analisar o processo ψ, vejamos dois exemplos de determinação de validade relativos ao caso (2) acima, de fórmulas da forma $\exists$**xB**, para as quais determinamos que $\mathbb{M}(\exists\mathbf{xB}) = \mathbf{F}$.

Seja **A** a fórmula $\exists\mathbf{x}(\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x})$. Para verificar a validade ou não dessa fórmula, precisamos demonstrar que existe $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{S}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i) = \mathbf{V}$ ou que não existe tal $\mathbf{k}_i$. Seja então $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$ a zero-marca, i.e., $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i) = 0_{\mathbb{M}}$; neste caso temos $\mathbb{M}(\mathbf{S}(\mathit{0}) = \mathit{0}) = \mathbf{F}$, pois o sucessor da zero-marca é o traço, e eles são distintos entre si. Seja então $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$ um numeral-traço qualquer, sabemos que o sucessor de um numeral-traço $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$ é a concatenação de um traço ao numeral-traço $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$, e, portanto, $\mathbb{M}(\mathbf{S}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i) = \mathbf{F}$, também neste caso, pois um numeral-traço $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$ é distinto da concatenação de um traço ao numeral-traço $\mathbb{M}(\mathbf{k}_i)$. Como, não existe um $\mathbf{k}_i$ tal que $\mathbb{M}(\mathbf{S}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i) = \mathbf{V}$, temos, então, que $\mathbb{M}(\exists\mathbf{x}(\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x})) = \mathbf{F}$.

O outro exemplo é a Fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$. Lembremos que ela tem a forma **~*Teo*$_T$(*Sub*([G], 2, [G]))** e que ***Sub*([G], 2, [G]) = [G$_T$]**, logo, da Definição 4.2.6 de ***Teo*$_T$**, temos que $\mathbf{G}_T$ é equivalente a

$$\boldsymbol{\sim Teo_T}(\mathbf{[G_T]}) :=_{\text{def. expl.}} \boldsymbol{\sim\exists x Dem}(\mathbf{[G_T]}, \boldsymbol{x}).$$

Neste caso temos que $Dem([\mathbf{G}_T], x)$ é recursivo (observação anterior ao Metateorema 4.2.5), e podemos calcular $\mathbb{M}(\boldsymbol{Dem}([\mathbf{G}_T], \mathbf{k}_i))$ para cada $\mathbf{k}_i$. Porém, nós metademonstramos (Seção 4.3) que $\mathbb{M}(\mathbf{G}_T) = \mathbb{M}(\boldsymbol{\sim Teo_T}(\boldsymbol{Sub}([\mathbf{G}], \mathbf{2}, [\mathbf{G}]))) = \mathbb{M}(\boldsymbol{\sim\exists x Dem}([\mathbf{G}_T], \boldsymbol{x})) = \mathbf{V}$ sem a ajuda do calculo de $\mathbb{M}(\boldsymbol{Dem}([\mathbf{G}_T], \mathbf{k}_i)) = \mathbf{F}$, mas a partir da consistência de $\boldsymbol{T}$. Com efeito, como há uma correlação estreita entre o predicado *Dem* de numerais-marca e a demonstração em $\boldsymbol{T}$, estabelecida pelo Metateorema 4.2.5, a saber, que $K_{Dem}(a, b) = 0$ se b é o numeral-marca de uma demonstração para a fórmula de numeral-marca a, temos que $\mathbb{M}(\boldsymbol{Teo_T}([\mathbf{A}])) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$. Por outro lado, como $\mathbf{G}_T$ é equivalente a $\boldsymbol{\sim Teo_T}([\mathbf{G}_T])$, temos que $\mathbb{M}(\mathbf{G}_T) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbb{M}(\boldsymbol{\sim Teo_T}([\mathbf{G}_T])) = \mathbf{V}$. Portanto, se $\mathbf{G}_T$ é teorema de $\boldsymbol{T}$, temos que $\mathbb{M}(\boldsymbol{Teo_T}([\mathbf{G}_T])) = \mathbf{V}$ e que $\mathbb{M}(\boldsymbol{\sim Teo_T}([\mathbf{G}_T])) = \mathbf{V}$, o que contradiz a consistência de $\boldsymbol{T}$, assim, $\mathbf{G}_T$ não é teorema de $\boldsymbol{T}$. Por fim, como $\mathbf{G}_T$ não é teorema de $\boldsymbol{T}$ e, $\mathbb{M}(\boldsymbol{Teo_T}([\mathbf{A}])) = \mathbf{V}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é teorema de $\boldsymbol{T}$, temos que, $\mathbb{M}(\boldsymbol{\sim Teo_T}([\mathbf{G}_T])) = \mathbf{V}$ e, portanto, $\mathbb{M}(\mathbf{G}_T) = \mathbf{V}$.

6.2.5. Observação. Apesar de termos visto que o processo de determinação da validade ou não-validade das fórmulas de ***L(N)*** pelo lógico matemático não é mecânico (Metateorema 5.2.8), vemos que, para essa determinação, especialmente nos casos 3, 4 e 5 da Definição 6.2.4 acima, ainda há a necessidade de recorrer aos valores-verdade de outras fórmulas. Em particular, no caso da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$, a determinação de seu valor-verdade depende da consistência da teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}$, que muitas vezes é determinada pela validade dos axiomas em um modelo, de acordo com a Segunda Forma do Teorema da Completude (Metateorema 2.3.16); como, por exemplo, no caso de $\mathbf{G}_N$, no qual a validade dos axiomas de $\boldsymbol{N}$ no Modelo de Marcas (Metateorema 2.3.5) permite estabelecer a consistência de $\boldsymbol{N}$ (Metateorema 2.3.17) e metademonstrar a validade de $\mathbf{G}_N$.

Como não é possível a abordagem a partir do exterior do sistema $\mathbb{S}$ pela modelagem com funções recursivas parciais, podemos tentar uma abordagem a partir do interior do sistema $\mathbb{S}$, a partir de sua organização. Com efeito, segundo **Breciani Fº & D'Ottaviano 2002**, p.299:

A descrição dos estados de um sistema permite estabelecer uma perspectiva a partir do seu exterior, enquanto que a descrição da organização permite garantir uma perspectiva a partir do interior do sistema

Notemos então que (p.293):

A organização é identificada pelo conjunto das características estruturais e funcionais de um sistema, que representa as relações e as atividades ou funções desse sistema e que tem a capacidade de transformar, produzir, reunir, manter e gerar os comportamentos desse sistema. Essa caracterização traz em si a dinâmica subjacente do sistema. (...)

A estrutura de um sistema é o conjunto articulado de relações entre os elementos do sistema e pode ou não se constituir em um invariante desse sistema no tempo. Ou seja, a estrutura é simplesmente um conjunto de elementos e de suas relações.

O funcionamento de um sistema é conferido pelo conjunto articulado de atividades dos elementos; esses elementos conduzem o processo de transformação exercendo funções de forma dinâmica mas condicionada pela estrutura. Entretanto, a dinâmica do sistema pode também provir de um processo de mudança estrutural.

A organização pode ser vista como uma característica do sistema fundamentada na capacidade de transformar a diversidade de comportamento (relações e atividades) dos diferentes elementos em uma unidade global; mas em face de seu comportamento dinâmico e de natureza complexa pode ser também uma fonte de criação de diversidade, de capacidade e de especificidade estrutural e funcional.

Vamos então buscar definir a estrutura do sistema $\mathbb{S}$. Já vimos que os elementos do universo de $\mathbb{S}$ são as fórmulas de ***L(N)***, um lógico matemático idealizado e os valores **V**, **F** e **?** e que a noção de sistema, como acima introduzida neste trabalho, permite considerar elementos do universo de $\mathbb{S}$ de diferentes naturezas ou sortes (*cf.* p.126), sendo que, nesse caso, do ponto de vista lógico, a estrutura em questão é uma estrutura tri-sortida: a primeira sorte de elementos são as fórmulas de ***L(N)***; a segunda, o elemento lógico matemático idealizado e; a terceira, os valores **?**, **V** e **F**.

Quanto às relações, temos que (pp.288 e 290, respectivamente):

As relações entre os elementos se manifestam de diversas formas, que podem ser: interações, interrelações, interdependências, integrações, ligações, articulações, comunhões, associações, conjunções, inclusões, implicações, identificações, combinações, conexões, comunicações e outras mais que apresentam, evidentemente, características diferenciadas entre si.

...

É oportuno salientar que as noções de relações aqui utilizadas satisfazem o conceito lógico geral de relação. Uma relação sobre um dado conjunto é um subconjunto qualquer do conjunto cujos elementos são seqüências finitas de elementos do conjunto inicial dado. No caso particular das relações binárias, elas correspondem a subconjuntos do conjunto constituído pelos pares ordenados de elementos do conjunto inicial dado; ou seja, uma relação binária sobre um dado conjunto é um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos do conjunto inicial dado. Se um par ordenado pertence a uma dada relação binária (conjunto de pares), diz-se que o par satisfaz a dada relação e, também, que o primeiro elemento do par está nesta relação com o segundo elemento do par.

Observa-se que as relações que caracterizam a estrutura e a atividade de um sistema podem ser também de distintas naturezas. (...)

Assim, identificamos, entre as relações da estrutura de $\mathbb{S}$,[25] três relações especiais que se modificam no tempo, apresentadas a seguir.

6.2.6. Convenção de Notação.

1. Dizemos que, no instante de tempo t, um lógico matemático l está na relação E com uma fórmula x, que denotamos por $E(t, l, x)$, ou ainda lE_tx, se, no instante de tempo t, o lógico matemático l *está avaliando* a fórmula x (independente de ter ou não determinado a validade ou não-validade de x); notemos que, neste caso, E constitui um subconjunto do conjunto de tríades ordenadas (w, u, v) tal que w pertence aos conjunto dos instantes de tempo, u é o lógico matemático e v pertence ao conjunto de fórmulas de ***L(N)***.
2. Dizemos que, no instante de tempo t, um lógico matemático l está na relação S com uma fórmula x e um valor y (**V**, **F** ou **?**), que denotamos por $S(t, l, x, y)$, ou ainda $S_t(l, x, y)$, se o lógico matemático l *atribui* à fórmula x, *que* está sendo avaliada no instante de tempo t, o valor y (**V**, **F** ou **?**); notemos que, neste caso, S constitui um subconjunto do conjunto de quádruplas ordenadas (z, w, u, v) tal que z pertence aos conjunto dos instantes de tempo, w é o lógico matemático, u pertence ao conjunto de fórmulas de ***L(N)***, e v é um dos valores **V**, **F** ou **?**; e que $S_t(l, x, y)$ ocorre se, e somente se, lE_tx.
3. Dizemos que, no instante de tempo t, um lógico matemático l está na relação D com uma fórmula x e um valor y (**V** ou **F**), que denotamos por $D(t, l, x, y)$, ou ainda $D_t(l, x, y)$, se, no instante de tempo t, *está determinado*, pelo lógico matemá-

[25] Como veremos adiante, podemos identificar outras relações relevantes em S para o processo ψ como as relações entre fórmulas que envolvem a conseqüência semântica em $\mathbb{M}$ (Definição 6.3.3) e a derivabilidade ou dedutibilidade (Definição 6.3.4).

tico l, que a fórmula x tem o valor y (**V** ou **F**); notemos que, neste caso, D constitui também um subconjunto do conjunto de quádruplas ordenadas (z, w, u, v) tal que z pertence aos conjunto dos instantes de tempo, w é o lógico matemático, u pertence ao conjunto de fórmulas de ***L(N)***, e v é um dos valores **V** ou **F**; notemos também que, se y é igual a **V** ou igual a **F**, então $S_t(l, x, y)$ implica $D_t(l, x, y)$ e que, assim, o subconjunto de quádruplas ordenadas de S tal que o último elemento é **V** ou **F** está contido no conjunto de quádruplas ordenadas de D, e que além disso, se $t' \geq t$ e y é igual a **V** ou igual a **F**, então $S_t(l, x, y)$ implica $D_{t'}(l, x, y)$.

Observemos que a relação D_t guarda toda a informação sobre as fórmulas cuja validade ou não-validade já foram determinadas pelo lógico matemático idealizado até o instante t e, nesse sentido, pode ser vista como uma memória do processo.

Para a estrutura do sistema $\mathbb{S}$ de acordo com o introduzido na Seção 5.1, temos então a seguinte definição:

6.2.7. Definição. A *estrutura do sistema* $\mathbb{S}$ é constituída pelos elementos do universo de $\mathbb{S}$ (as fórmulas de ***L(N)***, um lógico matemático idealizado e os valores **V**, **F** e **?**) e pelas relações E_t, S_t e D_t definidas acima.

Como as relações acima se modificam no tempo, temos que a própria estrutura do sistema se modifica no tempo. Como o funcionamento do sistema é conferido pelo conjunto articulado de atividades dos elementos, temos que o funcionamento pode ser caracterizado pelo desenvolvimento das relações E_t, S_t e L_t definidas acima.

Quanto à caracterização da organização do sistema $\mathbb{S}$, temos que (p.301):

> A organização do sistema pode ser considerada sob os aspectos formal e informal, que se relacionam dinamicamente, no processo de transformação organizacional, e se complementam entrelaçando-se na constituição do sistema. A organização formal do sistema é constituída por uma estrutura, predeterminada ou preconcebida – por elementos internos, externos ou de fronteira – para atender a um funcionamento pretendido em direção a uma finalidade prefixada. Porém, mesmo sem a existência de finalidade prefixada, pode haver determinação quando os elementos possuem baixo grau de autonomia para exercerem suas atividades.
>
> A organização informal do sistema é constituída também por uma estrutura, com um funcionamento correspondente, que não é predeterminada, preconcebida ou planejada, mas que, pelo contrário, decorre espontaneamente das atividades de elementos internos, e eventualmente de fronteira, do sistema, com elevados graus de autonomia.

As mudanças organizacionais (estruturais ou funcionais) do sistema, pelo menos algumas delas, podem também ser predeterminadas, preconcebidas ou planejadas, através de atividades de elementos de fora, de dentro ou de fronteira. Porém, as mudanças organizacionais do sistema podem também ser espontâneas e conseqüência das atividades autônomas de elementos internos, e eventualmente de fronteira, do sistema; bem como, podem ser conseqüência da interação destas atividades autônomas com as predeterminadas.

Assim, praticamente, a organização se identifica com o sistema em cada instante de tempo e como a estrutura do sistema $\mathbb{S}$ se modifica com o tempo, temos que a organização do sistema se modifica com o tempo. Podemos então definir como segue o estado organizacional do sistema $\mathbb{S}$ em um instante de tempo i; lembremos que já vimos que (p.285):

O sistema também desenvolve atividades (funções, processos, ações, etc.), assume estados e possui características (propriedades, etc.) próprias.

6.2.8. Definição. O *estado organizacional* Ψ_i *do sistema* $\mathbb{S}$ *no instante* i é o conjunto das fórmulas que já foram identificadas como válidas no Modelo de Marcas pelo lógico matemático no instante i, i.e., cada Ψ_i é o conjunto das fórmulas cujo estado é **V** no instante de tempo i.

Notemos que essa definição de estado organizacional Ψ_i do sistema guarda a informação daquilo que se modifica na estrutura do sistema com o funcionamento do sistema (observemos, por exemplo, que os indivíduos da estrutura se conservam durante esse funcionamento).

Notemos, ainda, que não há perda de informação das fórmulas cuja validade ou não-validade já foram identificadas pelo lógico matemático. Com efeito, dada uma fórmula **A**, se **A** já foi identificada pelo lógico matemático como sendo válida, então **A** está em Ψ_i; se **A** já foi identificada pelo lógico matemático como não sendo válida, então podemos considerar que **~A** está em Ψ_i; e se **A** ainda não foi identificada pelo lógico matemático como sendo válida ou como não sendo válida, então nem **A** nem **~A** está em Ψ_i. Assim, dada uma fórmula **A**, para saber se **A** já foi identificada como válida pelo lógico matemático, ou se **A** já foi identificada como não sendo válida, ou se **A** ainda não foi identificada como sendo válida ou como não sendo válida, basta ver se, respectivamente, **A** está em Ψ_i; **~A** está em Ψ_i; ou se nem **A** nem **~A** está em Ψ_i.

Notemos, então, que a definição de estado organizacional Ψ_i do sistema acima tem um significado intuitivo, motivo de sua escolha, Ψ_i é o conjunto de fórmulas de ***L(N)*** cuja validade no Modelo de Marcas já foi metademonstrada e representa o conhecimento do lógico matemático do sistema $\mathbb{S}$.

Quanto à mudança da organização do sistema $\mathbb{S}$ temos que (p.299):

> As mudanças organizacionais fazem parte, ou são conseqüência', de processos do sistema, que buscam a sobrevivência, a reprodução, a evolução e a criação no e pelo sistema. Esses processos podem ser considerados como sendo emergências que ocorrem no (ou que decorrem do) sistema, com exceção da sobrevivência, que é uma condição prévia da existência do sistema.
>
> As mudanças de estado podem ser identificadas, em um sistema, pelas mudanças dos comportamentos dos elementos de entrada e de saída do sistema (representados por variáveis de estado); cada novo estado pode ser considerado como uma novidade no sistema.
>
> As mudanças do sistema podem decorrer de atividades predeterminadas e realizadas por elementos internos, externos ou de fronteira e, nesse caso, são previsíveis. Mas as mudanças também podem decorrer de atividades não predeterminadas e realizadas, de forma espontânea e autônoma, por elementos internos, externos ou de fronteira e, nesse outro caso, são imprevisíveis.

Podemos, então, começar o estudo do processo ψ, estudando as mudanças organizacionais e, portanto, as mudanças de estados organizacionais Ψ_i do sistema $\mathbb{S}$.

Como há dependência em relação aos valores de fórmulas anteriormente determinados e como o estado organizacional Ψ_i é um conjunto de fórmulas, temos que um modo natural de compararmos a organização nos diferentes instantes é pela relação de inclusão $\subseteq$ entre conjuntos, ou seja, aquela tal que, dados dois conjuntos A e B, temos que $A \subseteq B$ se todo elemento de A é elemento do conjunto B. Isso motiva a definição a seguir.

6.2.9. Definição. Dados dois estados organizacionais Ψ_i e Ψ_j do sistema $\mathbb{S}$, dizemos que a organização relativa a Ψ_i é *maior que* a organização relativa a Ψ_j se $\Psi_j \subseteq \Psi_i$ e $\Psi_i \neq \Psi_j$.

Notemos então que, no caso de um processo de conhecimento que acumula verdades aritméticas, temos que, se $i \leq j$ então $\Psi_i \subseteq \Psi_j$ e, neste caso, podemos dizer que o sistema tem uma organização crescente.

Introduziremos agora duas definições que nos serão úteis para a análise da dinâmica do sistema.

6.2.10. Definição. Dado um sistema $\mathbb{S}$, o *resultado final* $\Psi_{\mathbb{S}}$ *de* $\mathbb{S}$ *segundo o processo* ψ é o conjunto das fórmulas **A** de ***L(N)*** que podem ser identificadas como válidas no Modelo de Marcas por um lógico matemático idealizado, i.e., tais que $\psi_{\mathbb{S}}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, e, portanto, temos que $\Psi_{\mathbb{S}} = \bigcup_i \Psi_i$, na qual $\bigcup_i$ é a união generalizada dos Ψ_i.

6.2.11. Definição. Denominamos simplesmente de *resultado final* Ψ *do processo* ψ ao conjunto das fórmulas **A** de ***L(N)*** que podem ser identificadas como válidas no Modelo de Marcas pela comunidade de lógicos matemáticos idealizados, i.e., tais que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$, e, portanto, temos que $\Psi = \bigcup_{\mathbb{S}} \Psi_{\mathbb{S}}$.

Notemos que se levarmos em conta a Observação 5.2.2, temos que $\Psi = \Psi_{\mathbb{S}}$. Notemos ainda que tais definições não pressupõem a existência de um instante de tempo máximo para o processo ψ, ao contrário, analogamente a uma construção ideal de numerais-marca a partir da zero-marca e de aplicações da função sucessor, temos, a cada instante de tempo, um número finito de numerais-marca, porém, o resultado final desse processo constitui o conjunto de todos os numerais-marca.

Dadas essas definições, podemos nos perguntar, então, qual é a dinâmica do processo de passagem de Ψ_i a Ψ_{i+1}.

Primeiramente, o processo de passagem de Ψ_i a Ψ_{i+1} não é gerado por uma função recursiva parcial e, portanto, não é mecânico. Com efeito, suponhamos que o fosse e seja F a função recursiva parcial que simula esse processo e que, portanto, tem que estar definida para toda fórmula **A** de todo conjunto Ψ_i, logo, tem que estar definida para toda fórmula **A** de Ψ; neste caso, teríamos que F é recursiva parcial e que $F(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se, e somente se, identificamos que **A** é válida no Modelo de Marcas, o que não pode ocorrer pelo Metateorema 5.2.7.

6.2.12. Observação. Notemos, então, que apesar da dinâmica da passagem dos Ψ_i aos Ψ_{i+1} não poder ser considerada mecânica, podemos considerá-la como *determinativa*, no sentido de que não está entregue ao acaso, mas:

1. Há uma razão[26], uma metademonstração, para se considerar uma nova fórmula como válida no Modelo de Marcas e, portanto, ser incorporada em Ψ_{i+1}; e
2. Uma fórmula que foi efetivamente determinada como válida no Modelo de Marcas, não será, posteriormente, identificada como falsa, e vice-versa (*cf.* propriedade 3 da Observação 5.1.1)

Da passagem dos Ψ_i aos Ψ_{i+1} não ser recursiva, temos que não há uma única lei, mas pode haver várias (que não podem ser completamente explicitadas na sua totalidade), que dão a passagem de um patamar ao outro. Com efeito, é isto que ocorre, já que para metademonstrar uma fórmula precisamos apresentar uma razão para a sua validade.

Como, algumas vezes, essa razão para se estabelecer novas fórmulas válidas se baseia no valor das fórmulas anteriores (*cf.* Observação 6.2.5), podemos inferir que aparentemente o processo de validação das fórmulas de ***L(N)*** tem o aumento da sua organização dependente de si mesmo, pois as novas fórmulas que vão se explicitando, emergindo, ao longo do processo, dependem das fórmulas anteriores e de novas razões que ainda não tinham sido utilizadas na construção da organização do sistema; logo, parece que podemos inferir que o processo é *auto-organizado*. Com efeito, segundo **Breciani F$^{\underline{o}}$ & D'Ottaviano 2002**, p.302, temos que:

> A auto-organização se caracteriza como um fenômeno de transformação ou de criação de uma organização, que decorre fundamentalmente da interação das atividades predeterminadas, se as houver, com essa atividade autônoma e espontânea de elementos internos e, eventualmente, de fronteira do sistema, através de processos recorrentes. A atividade espontânea decorre da existência de grau mínimo de autonomia aos elementos atuantes. Por sua vez, os processos recorrentes precisam estar presentes para que os elementos autônomos, em suas atividades, se integrem em uma organização com auto-referência.

Desenvolveremos essa interpretação com maior detalhe na seção seguinte. Antes, porém, terminemos esta seção com uma pequena análise do processo ψ que servirá de base às conclusões da seção seguinte.

Já vimos, na análise logo após a Definição 6.2.4, que como a capacidade de deter-

---

[26] Mais adiante (p.189), apresentamos algumas das razões que intervém no processo ψ.

minação da validade de fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas não pode ser finitamente descrita (por um processo recursivo parcial), então a compreensão dela e dos processos que ela envolve não pode ser finitamente realizada (por uma teoria axiomatizada ou por processo recursivo parcial) e, portanto, só pode ser realizada a partir de considerações gerais.

Comecemos, então, com a consideração de que a questão aqui é a de aquisição de conhecimento pelo lógico matemático, em especial, de conhecimento matemático, já que novas verdades aritméticas são determinadas pelo lógico matemático. Porém, como não nos interessa apenas o produto Ψ_i do processo, mas também o próprio processo ψ, vamos tomar a noção de "conhecimento" em um sentido bastante amplo que abarque tanto a noção de produto, quanto a noção de processo, o que é ressaltado na observação a seguir.

6.2.13. Observação. Salientamos que, neste trabalho, vamos utilizar a noção de "conhecimento" em um sentido amplo, atribuindo-lhe tanto (1) uma face-processo, como quando falamos *do processo* ψ, quanto (2) uma face-produto, como quando falamos *dos estados organizacionais* Ψ_i do processo ψ, para, a partir daí, analisarmos ambos aspectos.

Notemos ainda que, aqui, a noção de conhecimento está presente também em um plano de análise anterior ao próprio processo ψ: trata-se aqui de *conhecer* o processo ψ de *conhecimento* de verdades aritméticas.

Notemos, então, que se "conhecer o processo ψ" for tomado em uma acepção estrita de fornecer as regras segundo as quais os elementos se relacionam no desenvolvimento do processo, ou seja, de lhe explicitar o algoritmo, então, segundo os resultados obtidos no capítulo anterior, o processo ψ não pode ser conhecido: cairíamos, portanto, no que poderia se chamar de "ceticismo mecanicista".

Se, por outro lado, assumimos que podemos "conhecer o processo ψ", então temos que assumir que tal conhecimento do processo se dará de forma não-algorítmica, a partir de uma análise global do processo ψ, ou seja, do funcionamento do todo para a atividade das partes.

Notemos então que, nesse caso, atribuímos uma identidade ao processo ψ, o que nos permite falar de "o processo de determinação de verdades aritméticas".

Da mesma forma, a identidade e o conhecimento relativos aos elementos envolvidos no processo ψ e das relações entre eles serão entendidas a partir dos papeis que desempenham.

Comecemos então descrevendo algumas propriedades do processo de determinação de verdades aritméticas.

6.2.14. Observação. No caso da determinação de verdades aritméticas, com referência à acepção (2) da observação acima, relativa ao produto do ato de conhecer, temos que:

1. O conjunto Ψ das verdades aritméticas que podem ser determinadas, que chamamos de *resultado final* (Definição 6.2.11), não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito;
2. O conjunto Ψ_i das verdades aritméticas que foram determinadas até o instante i e que chamamos de *estado organizacional do sistema* $\mathbb{S}$ *no instante* i (Definição 6.2.8) pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito, já que descrevemos as verdades aritméticas conhecidas em teorias axiomáticas.

Notemos então que se o processo de determinação de verdades aritméticas, ou seja, o "conhecimento" tomado na acepção (1) da observação acima, pudesse ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito, então o resultado final poderia ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito. Logo, segundo o Item 1 da observação acima, temos que:

6.2.15. Observação. No caso da determinação de verdades aritméticas, com referência à acepção (1) da observação 6.2.13, relativa ao processo de conhecimento, temos que o processo de determinação de verdades aritméticas também não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito.

Analisemos então, sucintamente, como se dá o processo de determinação de verdades aritméticas.

6.2.16. Observação. Dada uma fórmula **A**, a determinação da veracidade de **A** depende:

1. De **A** ser verdadeira no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$;
2. De uma busca de razões, pelo lógico matemático, que mostre que **A** é verdadeira em $\mathbb{M}$;
3. De se encontrar as razões descritas em 2.

Notemos então que: 1 acima depende da fórmula **A**; 2 depende do lógico matemático; e que 3 depende de 1 e 2, portanto, depende concomitantemente da fórmula **A** e do lógico matemático. Logo, a determinação da veracidade de **A** depende tanto de **A** quanto do Lógico Matemático, a existência de ambos é *condição necessária* para a determinação da veracidade de **A**; são condições suficientes se, e somente se, admitirmos que podemos determinar a verdade de qualquer fórmula **A**.

Mais ainda, em geral, a razão para uma fórmula ser determinada como verdadeira faz uso da veracidade de outras fórmulas já determinadas como verdadeiras pelo lógico matemático, portanto, *a organização do sistema em um instante de tempo depende da organização anterior do sistema*; ou melhor, temos que:

6.2.17. Observação. O processo de determinação de verdades aritméticas depende de seus resultados parciais, i.e., das fórmulas já interpretadas, pertencentes ao conjunto Ψ_i das verdades aritméticas já estabelecidas, para cada instante i.

Nesse caso o lógico matemático depende das fórmulas interpretadas no processo de determinação de verdades aritméticas, para determinar novas verdades aritméticas, e as fórmulas interpretadas dependem do lógico matemático para se estabelecerem como fórmulas válidas *interpretadas*.

Como entender então o processo de determinação de verdades aritméticas? É o que veremos na próxima seção.

3. A Auto-Organização do Processo ψ

Nesta seção, vamos buscar compreender o processo ψ utilizando o vocabulário, ou ainda, as definições e categorias elaboradas na Teoria da Auto-Organização de Debrun, expostas na Seção 1 deste capítulo. Notemos que, como dissemos, estamos considerando que a Teoria da Auto-Organização de Debrun introduz noções originais, tais que os termos que as designam têm seus sentidos deslocados em relação aos sentidos usuais sem, no entanto, deles se distanciem completamente: assim, devido à aplicação ao processo ψ das noções elaboradas na Teoria da Auto-Organização de Debrun, falaremos aqui, apesar de não ser usual, de "interação" entre o lógico matemático e as fórmulas de L(N), de "espaço" no qual se dá o processo de determinação de validade de fórmulas no Modelo de Marcas, de "impulso inicial" e "ponto de amarração" do processo, de "interação" entre fórmulas, de "encontro" entre fórmulas e o lógico matemático, etc.

Retomemos então algumas características do processo ψ.

6.3.1. Observação. São características do processo ψ de determinação de verdades aritméticas:

1. O processo ψ não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito (Observações 6.2.14 e 6.2.15).
2. Há patamares, constituídos pelas organizações do sistema, a cada instante de tempo (Observação 6.2.14).
3. Há uma razão, um porquê (Observação 6.2.16), de uma verdade entrar na elaboração de um novo patamar, muitas vezes a partir de verdades determinadas em um patamar anterior (Observação 6.2.5); porém, o conjunto de todos os porquês não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito, pois, neste caso, o processo poderia ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito (o que contradiz o Item 1 acima).
4. Cada novo patamar contém o anterior, o que implica em uma organização crescente (Definição 6.2.9 e seu comentário).

5. O processo possui uma identidade que nos permite entendê-lo como "o processo de determinação de verdades aritméticas" (comentário anterior a Definição 6.2.14), sendo que se trata, aqui, de entender como esse processo se dá, se desenrola.
6. Há três tipos de elementos nesse processo: as fórmulas de ***L(N)***, o lógico matemático idealizado e os valores **V**, **F** e **?**, que são considerados aqui *em vista do papel que desempenham* no processo de determinação de verdades aritméticas. Atribuímos então uma identidade e uma face-sujeito ao lógico matemático, considerando o seu papel no processo de determinação de verdades aritméticas.
7. Há interação entre os elementos (e.g., a interpretação), a qual faz parte da determinação de um novo patamar; porém desta interação pode resultar também, momentaneamente, em confusão, se o lógico matemático não estiver em um "bom" caminho; mas, mesmo aí, podem ser obtidos resultados que ajudarão posteriormente na elaboração de um novo patamar.
8. Cada resultado do processo (patamar, organização) pode ser indispensável na elaboração de um novo patamar (Observação 6.2.17);
9. Há emergências de novos porquês e de novas verdades para o lógico matemático, que não são mecânicas ou algorítmicas como observado nos Itens 1 e 3 acima.

Notemos então que, se o lógico matemático é a face-sujeito do processo (Item 6 da observação acima), essa face-sujeito é hegemônica, porém, não-dominante, como observado a seguir.

6.3.2. Observação. Apesar do lógico matemático desempenhar um papel hegemônico já que, por exemplo, é ele quem decide, a cada momento, se continua ou não a encontrar o valor-verdade da fórmula **A**, o lógico matemático não domina o processo como um todo. Com efeito, temos que:

1. Apesar de ser o lógico matemático quem interpreta uma dada fórmula **A** em um dado instante *t* (Item 7 da observação acima), como vimos no início da Seção 2, a interpretação de **A** depende da seqüência de símbolos em **A**, ou seja, depende i-

nicialmente da própria **A**.

2. O lógico matemático não pode estabelecer por decreto que uma fórmula **A** seja ou não verdadeira no Modelo de Marcas, ao contrário, isso depende apenas da fórmula e do Modelo de Marcas (Item 1 da Observação 6.2.16).
3. Apesar de ser o lógico matemático quem busca um porquê que mostre que a fórmula **A** é verdadeira (Item 2 da Observação 6.2.16), ele também não pode estabelecer por decreto o porquê da veracidade ou não de **A** (com o que dominaria **A** ser verdadeira) e nem pode fazê-lo mecânica ou algoritmicamente (Item 3 da observação acima).
4. Mesmo que o lógico matemático tenha se decidido à busca da veracidade de **A**, ele não é capaz de determinar, de início, no caso geral, se irá ou não encontrá-la (Item 3 da Observação 6.2.16), já que o conjunto dos porquês não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito (Item 3 da observação acima), e não sabemos, pelo menos a princípio, quais as verdades que podemos determinar ou não.
5. Muitas vezes, também, o lógico matemático utiliza as verdades já determinadas (Observação 6.2.17 e Item 8 da observação acima), porém, o conjunto de verdades que serão efetivamente utilizadas não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito, e, também, a princípio, não podemos saber quais serão utilizadas.
6. Algumas vezes, como no caso das fórmulas de Gödel que implicam sua própria indemonstrabilidade, a verdade descoberta expressa propriedades do próprio processo de metademonstração (a demonstração pode ser expressa dentro de um sistema que contenha a definição das operações básicas aritméticas e toda demonstração de um sistema que tem os axiomas reconhecidos como verdadeiros pode ser vista como parte de um processo de metademonstração, já que essa demonstração sempre pode, em princípio, ser feita na metalinguagem). Assim, não apenas o resultado de um patamar é utilizado para determinar uma nova verdade aritmética, como também o entendimento de parte do próprio processo. O que implica, também, na existência de auto-referência no processo de determinação de verdades aritméticas.

7. Por fim, o processo de determinação não é mecânico (Item 1 da observação acima).

Assim, apesar do lógico matemático constituir uma "face-sujeito" no processo que, com certeza, é hegemônica em relação ao processo, não domina completamente o processo.

PODEMOS, ENTÃO, DIZER QUE O PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DE VERDADES ARITMÉTICAS SE CONSTITUI EM UM PROCESSO DE AUTO-ORGANIZAÇÃO SECUNDÁRIA, SEGUNDO A DEFINIÇÃO DE DEBRUN.

Ou seja, retomando a definição, temos que:

> b) Há auto-organização secundária quando, num processo de aprendizagem (corporal, intelectual ou existencial), a interação se desenvolve entre as partes ("mentais" e/ou "corporais") de um organismo – a distinção entre partes sendo então "semi-real" –, sob a direção hegemônica mas não dominante da "face-sujeito" desse organismo.

Essa definição se aplica ao processo ψ, pois o processo ψ de determinação de verdades aritméticas é um processo de aprendizagem (de aquisição de conhecimento tomado em um sentido amplo, tanto como processo, quanto como produto; *cf.* Observação 6.2.13 e comentário a ela) que apresenta patamares Ψ_i (Item 2 da Observação 6.3.1), com organização crescente (Item 4 da Observação 6.3.1); sendo que os patamares Ψ_i são formados com a descoberta de novas verdades aritméticas (emergentes, *cf.* Item 9 da Observação 6.3.1) decorrentes do processo e que podem ser descritos formalmente (Item 2 da Observação 6.2.14); ainda, os patamares Ψ_i são construídos a partir da interação do lógico matemático com as fórmulas, com os patamares anteriores e com o Modelo de Marcas (seguindo os passos das Observações 6.2.16 e 6.2.17): o lógico matemático interage, inicialmente, com a fórmula **A** da qual se propôs a determinar a veracidade e posteriormente, talvez, com outras que entram na determinação da veracidade de **A**, dentre as quais estão, principalmente, as fórmulas já interpretadas que expressam fatos a respeito do Modelo Padrão, tendo este processo, pelas razões apresentadas na Observação 6.3.2 acima, a direção hegemônica, mas não-dominante do lógico matemático.

Seria o caso também se, ao invés de consideramos um lógico matemático ideal, considerássemos uma comunidade de lógicos matemáticos, como em relação aos Nicolas Boubarki, já citados (p.132). Notemos, apenas, que apesar de falarmos aqui de uma coletividade como *uma* face-sujeito, o processo fica a meio caminho entre uma auto-organização secundária e uma auto-organização primária, pois se a face-sujeito caracteriza a auto-organização secundária, há aqui, também, auto-organização primária, na medida em que pode haver cooperação/competição entre os vários sujeitos da comunidade na elaboração da seqüência de conjuntos Ψ_i de fórmulas válidas no Modelo de Marcas. Não desenvolveremos esse estudo, pois ultrapassa nossos objetivos no presente trabalho.

Estabelecido que podemos considerar o processo ψ de determinação de verdades aritméticas auto-organizado, segundo a definição de auto-organização secundária de Debrun, analisemos então alguns aspectos do processo ψ com maior detalhe. Trata-se aqui de compreender como o funcionamento do sistema estabelece a relação S_t (Convenção de Notação 6.2.6) do lógico matemático com as fórmulas e os valores **V**, **F** e **?**

Como **Debrun 1996a** constitui o prefácio da primeira coletânea dos trabalhos do Grupo Interdisciplinar CLE – Auto-Organização e introduz a leitura desses trabalhos, vamos também utilizá-lo aqui, na condução de nossa análise do processo ψ.

Sinteticamente, segundo **Debrun 1996a**, p. *xxxiii*, o postulado que orienta os trabalhos da coletânea é que:

> ... certas organizações podem emergir, se desenvolver ou se reestruturar essencialmente a partir delas próprias. Não que o façam por geração espontânea ou "arrancando-se" do vácuo, mas a partir do que elas já começam a ser, embora não em decorrência mecânica desse primeiro patamar.

Vimos que é esse exatamente o caso do processo ψ. Notemos que **Debrun 1996a** usa, inicialmente, o termo "forma" ao invés "organização", por ser mais abrangente na linguagem comum, já que, segundo ele, "organização" evoca logo uma instituição ou uma empresa, mais raramente um organismo vivo ou um artefato. Notemos, ainda, que, nesse prefácio escrito por Debrun, não se trata de propor uma definição precisa e "técnica" do que seja auto-organização, mas, apenas, de apontar alguns temas e traços que parecem circunscrever a problemática da auto-organização.

Posteriormente, Debrun destaca quatro aspectos da natureza do processo auto-organizado tomado em conjunto.

O primeiro aspecto é que:

> 1. A auto-organização é um processo que "demanda" tempo. À diferença por exemplo da autopoiese, ato indivisível (senão analiticamente) que consiste numa definição ou declaração geradora do seu próprio referente: "eu prometo" – o ato declaratório gera o fazer, a promessa correspondente.

Com efeito, temos que o processo ψ ocorre no tempo, é relativo a um "aqui e agora", e demanda tempo, pois, a elaboração da seqüência dos Ψ_i, a passagem dos Ψ_i aos Ψ_{i+1}, não é imediata (Observação 6.3.1).

Temos ainda que, apesar da definição de validade de uma fórmula no Modelo de Marcas (Definição 6.2.4) servir como base ao processo, não fornece *regras*, algoritmos, que mostrem *como* construir os patamares Ψ_i ou *como* conduzir o processo, que, além disso, não pode ser gerado por uma declaração, como citado por Debrun. Ao contrário, como vimos, o lógico matemático está face à seqüência Ψ_i (o que o coloca como uma face-sujeito ao processo ψ), limitado pelas relações inerentes ao próprio processo, como, por exemplo, as relações entre as fórmulas de ***L(N)*** e o Modelo de Marcas ou a não-algoritmicidade do processo, não sendo, pois, onipotente em relação a ele.

Vemos aqui, neste caso, como insiste Debrun a respeito da auto-organização (*cf.* Seção 1, p.160 deste trabalho), que a auto-organização do processo ψ não é mera decorrência do seu próprio começo, não é uma autopoiese na qual o começo funciona como uma lei de construção do que vem depois: o processo ψ de auto-organização apenas "herda" o começo, na construção dos patamares Ψ_i, que leva em conta posteriormente de modo muito variável.

Com relação ao "espaço" no qual se dá o processo de auto-organização, notemos que cada patamar Ψ_i está contido no superior Ψ_{i+1} e todos eles estão contidos no conjunto

Ψ (Definição 6.2.11) que está contido na **Aritmética**[27] e que, por sua vez, está contida no conjunto das fórmulas de ***L(N)***.

Observemos, então, que os conjuntos Ψ e **Aritmética** não podem ser completamente descritos (Metateoremas 5.0.2 e 5.2.5) e portanto seus elementos nunca serão completamente explicitados: temos aqui uma situação na qual os elementos de Ψ e da **Aritmética** vão se explicitando a nós devido ao próprio processo de determinação de verdades aritméticas, ou seja, pelo próprio processo ψ. Assim, o processo determina as próprias fórmulas que farão parte do conjunto Ψ e, portanto, determina o próprio espaço que irá ocorrer. Onde se apóia então esse processo ? Essa questão nos leva ao segundo aspecto da natureza do processo auto-organizado segundo **Debrun 1996a**.

> 2. Esse processo consiste numa interação, a partir de um "ponto de amarração", entre elementos realmente distintos ou semi-distintos (como mente e corpo, parcialmente "acavalados" dentro do invólucro do organismo). Ele não comporta necessariamente uma finalidade nem uma tendência global, pelo menos na partida.

Quanto à finalidade citada por Debrun, notemos que, no caso do processo ψ, existe a finalidade, relativa à face-sujeito, ao lógico matemático, de encontrar as fórmulas de ***L(N)*** válidas no Modelo de Marcas; mas tal finalidade inicial não determina, ou domina, todo o processo, pois, como já vimos, aqui se manifesta a hegemonia sem dominância da face-sujeito.

Essa finalidade prévia constitui então um "impulso inicial" e um primeiro "ponto de amarração" do processo. Notemos que segundo **Debrun 1996a**, pp. *xxxvi-xxxvii*:

> O impulso inicial pode ser também uma decisão, por exemplo em relação a quem a toma e tenta assim uma auto-reorganização ("a partir de hoje vou reformular de ponta a ponta minha vida"). Em todos os casos o impulso inicial desempenha um duplo papel. De um lado, ele constitui um corte, maior ou menor, em relação ao passado e ao contexto. De outro lado, ele aponta para o futuro, fornecendo uma orientação que não será necessariamente seguida adiante, mas que todavia define um perfil na medida em que eventuais tentativas de reestruturação terão de se medir com ela. Nesses dois papéis podemos dizer que o impulso inicial assegura o aspecto "auto" da auto-organização. É o que chamaríamos um "ponto de amarração".

[27] Designamos aqui, indistintamente, por **Aritmética**, tanto o conjunto de fórmulas válidas, como a teoria cujos axiomas são estas fórmulas (veja comentário após a Definição 5.0.1).

Analisemos agora as interações que constituem o processo ψ.

As novas fórmulas que são incorporadas aos Ψ_i não são determinadas a partir do nada, mas a partir de *interações entre os elementos do sistema* $\mathbb{S}$: as fórmulas de ***L(N)***, em especial as já identificadas como verdadeiras, o lógico matemático e os valores **V**, **F** e **?** (*cf.* Item 7 da Observação 6.3.1 e aplicação da Definição de Auto-Organização Secundária, logo acima).

Dentre as interações, que constituem o processo ψ, está a interpretação, pelo lógico matemático, das fórmulas de ***L(N)*** no Modelo de Marcas (segundo a Definição 6.2.4). Inicialmente, a interpretação tem por base a descrição do Modelo de Marcas exposta na Seção 2.2; porém, nos estágios posteriores, a interpretação se baseará também nas descrições, cada vez mais precisas e que aperfeiçoam o conhecimento a respeito do Modelo de Marcas, fornecidas pelas fórmulas de ***L(N)*** interpretadas como válidas, ou seja, dos próprios conjuntos Ψ_i anteriores da seqüência. Há, portanto, um certo tipo de re-alimentação no processo de interpretação e de autodeterminação do processo ψ que se voltam sobre si mesmos.

Analisemos então, com maior detalhe, esse aspecto do processo de interpretação, determinando algumas relações entre fórmulas de ***L(N)*** que podem ser utilizadas no processo de interpretação, de forma a contribuir nessa re-alimentação e na constituição do processo ψ.

6.3.3. Definição. Sejam **A** e **B** fórmulas de ***L(N)***, dizemos que a fórmula **B** é *conseqüência semântica de* **A** *em* $\mathbb{M}$ se, e somente se, **A** ser válida em $\mathbb{M}$, implica que **B** é válida em $\mathbb{M}$. Escrevemos $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$ para denotar que **B** é conseqüência semântica de **A** em $\mathbb{M}$.

Notemos então que se **A** é válida em $\mathbb{M}$ e $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$, então **B** é válida em $\mathbb{M}$. Notemos ainda que, $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$ ocorre se, e somente se, $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ é válida em $\mathbb{M}$.

Notemos também que não existe procedimento mecânico capaz de estabelecer que $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$. Com efeito, se existisse, então haveria um procedimento mecânico capaz de determinar que $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ é válida em $\mathbb{M}$; ora, como $x = x$ é válida em $\mathbb{M}$, temos que determinar que $x = x\rightarrow\mathbf{B}$ é válida em $\mathbb{M}$ é equivalente a determinar que **B** é válida em $\mathbb{M}$; assim, neste caso, teríamos um procedimento mecânico para determinar que **B** é válida em $\mathbb{M}$, que como já vimos é impossível (Metateorema 5.0.4).

Podemos identificar ainda uma série de relações entre fórmulas que podem ser utilizadas na interpretação das fórmulas de ***L(N)*** e que dependem dos patamares Ψ_i, como as definidas a seguir.

6.3.4. Definição. Para cada teoria ***T***, dizemos que a fórmula **B** é *derivável* (ou *dedutível*) em ***T*** a partir da fórmula **A** se, e somente se, existe uma demonstração de **B** na teoria ***T[*A*]*** (Convenção de Notação 1.5.16), i.e., aquela cujos axiomas são os de ***T*** acrescidos da fórmula **A**. Escrevemos $\mathbf{A} \vdash_{T} \mathbf{B}$ para denotar que **B** é derivável em ***T*** a partir de **A**.

Notemos então que se identificamos as teorias T_1 e T_2 com os conjuntos de seus teoremas e se temos $T_1 \subseteq T_2$, então $\mathbf{A} \vdash_{T_1} \mathbf{B}$ implica $\mathbf{A} \vdash_{T_2} \mathbf{B}$, já que T_2 é uma extensão de T_1.

Nesse sentido, temos a seqüência de relações $\vdash_{\Psi_i}$, $\vdash_{\Psi}$, $\vdash_{\mathbf{Aritmética}}$ e $\models_{\mathbb{M}}$ entre fórmulas tais que: $\mathbf{A} \vdash_{\Psi_i} \mathbf{B}$ implica $\mathbf{A} \vdash_{\Psi_{i+1}} \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \vdash_{\Psi_i} \mathbf{B}$ implica $\mathbf{A} \vdash_{\Psi} \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \vdash_{\Psi} \mathbf{B}$ implica $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{Aritmética}} \mathbf{B}$; e, por fim, temos que $\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{Aritmética}} \mathbf{B}$ se, e somente se, $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$, já que a **Aritmética** é o conjunto das fórmulas válidas em $\mathbb{M}$.

Podemos então dizer que no processo ψ há *interações entre as fórmulas*, no sentido de que *a validade e a derivabilidade de algumas condiciona a validade de outras*. Temos, por um lado, que, em alguns casos, esse condicionamento entre fórmulas é mecânico, como quando, no patamar Ψ_i em que ele se dá, **B** é derivável a partir de Ψ_i**[A]**, já que como vimos a demonstração é um processo mecânico (Metateorema 4.2.7 e sua observação). Por outro lado, há casos em que esse condicionamento não é mecânico, como no caso geral de $\mathbf{A} \models_{\mathbb{M}} \mathbf{B}$.

Em especial, como vimos, a determinação da validade das fórmulas de Gödel não é mecânica (Asserção 5.2.10 e sua observação) e se dá por um processo de auto-referência da seguinte forma: se $\mathbf{G}_{\Psi_i}$ é uma fórmula de Gödel da teoria Ψ_i, então temos que $\mathbf{G}_{\Psi_i}$ não é teorema de Ψ_i , porém, como $\mathbf{G}_{\Psi_i}$ é equivalente a esse fato, temos que $\mathbf{G}_{\Psi_i}$ é válida; assim, podemos ter, neste caso, $\mathbf{G}_{\Psi_i}$ como a fórmula que será acrescida ao patamar Ψ_i para formar o novo patamar Ψ_{i+1}.

Notemos então que as relações $\models_{\mathbb{M}}$, $\vdash_{\Psi_i}$, $\vdash_{\Psi}$, e $\vdash_{\mathbf{Aritmética}}$ entre fórmulas permitem explicitar alguns dos “porquês” citados anteriormente (*cf.*, e.g., Observação 6.2.16), o que possibilita, ao lógico matemático, inferir a validade de uma fórmula **A**: a nova fórmula pode ser derivável a partir das fórmulas do patamar anterior, ou pode ser uma fórmula de Gödel desse patamar, ou de algum subconjunto de fórmulas desse patamar.

Pode haver outras razões para se considerar a validade de uma fórmula na construção de um novo patamar, mas não trataremos desses casos neste trabalho: esses dois tipos de razões já são suficientes para nos permitir analisar a existência de auto-organização do processo ψ. Notemos com **Debrun 1996b**, p.5, que:

> A auto-organização não sendo uma questão de tudo ou nada, mas de mais ou menos, podem intervir – na organização de um ser, de um artefato ou de uma situação – outros princípios que não a auto-organização, ao lado dela ou em concorrência com ela. Nesses casos, de acordo com a importância de cada princípio (o planejamento, por exemplo; ou a mistura "darwiniana" de determinismo cego e de acaso), a auto-organização poderá desempenhar o papel de "empreiteiro principal" ou de "sub-empreiteiro".

6.3.5. Observação. Identificamos então pelo menos duas técnicas empregadas pelo lógico matemático na elaboração de um novo patamar Ψ_{i+1}:

1. A demonstração de uma nova fórmula a partir de fórmulas do patamar anterior Ψ_i, que chamaremos de *derivação* ou *dedução*; e
2. A interpretação de uma nova fórmula de Gödel de um subconjunto de fórmulas do patamar anterior Ψ_i, que chamaremos de *auto-Gödel-superação*.

Observamos aqui, então, o deslocamento de ênfase proposto por Debrun (*cf.* Seção 1, p.164, deste trabalho) das relações entre o sistema auto-organizado e seu ambiente para operações "técnicas" que são essencialmente internas e que consubstanciam a dinâmica desse sistema. Isso provoca, como veremos a seguir e como notou Debrun, um aumento da "centração sobre si" do processo, quanto mais o sistema se auto-organiza, mesmo que se mantenha aberto ao mundo exterior, o que leva a uma "lógica do fechamento" (quando outros fatores não intervierem para frear ou anular essa lógica).

Na aplicação da definição de auto-organização secundária, a distinção entre as partes em interação é considerada como "semi-real". Vejamos então, agora, como essa e algumas outras categorias estabelecidas por Debrun (*cf.*, Seção 1, p.160) se aplicam ao processo ψ.

Notemos, inicialmente, que as fórmulas podem ser consideradas "**realmente distintas**" dos outros elementos do sistema por "não serem redundantes entre si, isto é, por não terem conexões, afinidades etc., atuais ou potenciais". Com efeito, as fórmulas estão fixadas desde o início por sua definição sintática (Definições 1.1.9 e 1.4.3) e não dependem de uma ação ou vontade do lógico matemático; inclusive, a validade de uma fórmula depende apenas do Modelo de Marcas, mesmo que o conjunto de *fórmulas interpretadas* dependa do lógico matemático, já que é ele quem as interpreta.

Em relação ao lógico matemático, há uma certa dependência, por mínima que seja, do conhecimento do lógico matemático em relação às fórmulas de ***L(N)***, já que o conjunto das fórmulas de ***L(N)*** constitui-se no "espaço" no qual ocorre o processo ψ. Porém, podemos dizer que, no processo, temos uma autonomia do lógico matemático em relação ao conjunto de fórmulas, por exemplo, é ele quem decide qual caminho buscar para encontrar a razão que estabeleça a veracidade ou falsidade de uma dada fórmula **A**, como, por exemplo, qual fórmula de Gödel utilizará.

Já que o lógico matemático e as fórmulas são autônomos entre si, existe então um **encontro** entre eles durante o processo. Se podemos dizer que há uma aproximação ou conexão entre o lógico matemático e uma fórmula **A** quando o lógico matemático tem sua atenção dirigida à fórmula **A**, i.e., quando ocorre **Lógico**E_t**A** (Convenção de Notação 6.2.6), então, devido à autonomia dos elementos, citada no parágrafo anterior, eles não se condicionam, mas se encontram, no sentido de que ficam "livres, portanto, para conexões novas, inauditas – que vão surgir "aqui e agora" – e não apenas para se atualizar ou se revelar."

Analisemos, agora, em que grau os elementos aqui envolvidos podem ser considerados **soltos**. Lembremos que "Um elemento será considerado como "solto" quando, seja qual for o conjunto de fatos e causalidades que precederam o encontro com outros elementos "distintos", ele "**corta**" ou ignora esse **passado**". Podemos então dizer que as fórmulas estão soltas ao máximo, pois dependem apenas de sua definição e não do decorrido no processo, ou seja, nesse sentido, uma fórmula não tem passado. Quanto ao comportamento do lógico matemático, há uma grande dependência do que foi determinado no passado, porém ela não é completa: mesmo que, em alguns casos, buscando verificar uma determinada fórmula **A**, o lógico matemático seja *obrigado* a buscar a verificar outras fórmulas $\mathbf{A}_i$ obtidas como conseqüências ou como condições da validade de **A**, em outros casos, durante o processo, o lógico matemático *escolhe* de que fórmulas buscará verificar. Assim, podemos atribuir ao lógico matemático um certo grau de soltura, pois, na inauguração de um novo patamar de atividade podemos ver um certo corte no processo de determinação de verdades aritméticas em relação ao passado, há também, por outro lado, sempre uma certa dependência desse passado, que, porém, também não é completa.

Podemos falar aqui de um porquê de segunda ordem para o lógico matemático buscar certo caminho, porém este conjunto de porquês não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito, pois seu comportamento não pode ser finitamente (mecanicamente, algoritmicamente) descrito: há, portanto, emergências de verdades aritméticas, de razões que explicam estas verdades e de razões de segunda ordem, que influenciam na escolha dos caminhos para a busca de determinação de verdades aritméticas (*cf.* Observações 6.3.1 e 6.3.2). Notemos então que, neste caso, o nível mais baixo, i.e., as fórmulas já interpretadas influenciam também no nível mais alto, no conjunto de razões de segunda ordem que o lógico matemático vai escolher, porém, novamente, não as determinam.

Podemos ver, então, como "Esse processo consiste numa interação, a partir de um "ponto de amarração", entre elementos realmente distintos ou semi-distintos (como mente e corpo, parcialmente "acavalados" dentro do invólucro do organismo)." de acordo com a citação de Debrun acima.

Com relação às categorias de "semi-distinção" e de "acavalamento" (*cf.*, Seção 1, p.162 e a citação logo acima de Debrun do segundo aspecto da natureza do processo auto-organizado), lembremos que a "semi-distinção" significa que o organismo não é um ente "holístico", em que tudo fusiona com tudo – mas que, todavia, existe uma "interioridade" ou "acavalamento" entre as partes, expresso no fato de que cada parte é co-determinada pelas outras. Temos ainda que, segundo **Debrun 1996b**, pp. 11 a 13:

> O organismo possui sempre algum grau de subjetividade (seja qual for a maneira de entender essa subjetividade). No caso de um organismo humano podemos inclusive constatar a presença de um sujeito, e definiremos esse organismo como uma "forma-sujeito", possuindo uma "face-sujeito". É, em geral, uma "face-sujeito" que, frente a um desafio externo ou interno, "decide", orienta, impulsiona e controla a autotransformação do organismo rumo a um nível de complexidade superior.
>
> ...

> ... a interação entre partes está presente também na auto-organização secundária. A "face-sujeito" do organismo aparece então como uma parte entre outras, cujo papel (e a natureza) é particularmente importante, mas não de ordem diferente dos outros papéis. A idéia é a seguinte: devido à combinação, no organismo, da autonomia relativa das partes (em particular das macro-partes: mente, cérebro e "resto do corpo") e do seu "acavalamento" mútuo (cada parte "sabe" das outras, da possibilidade ou não de trocas de papéis etc.), as partes diretoras só podem exercer sobre as outras – de modo geral e, em especial, durante a constituição de novos patamares de atividade – um papel hegemônico, mas não dominante.
>
> ...
>
> De um lado, se houvesse entre as partes (mentais, cerebrais e outras) de um organismo uma exterioridade completa, voltaríamos ao caso da auto-organização primária. A menos que surgisse um elemento, ou grupo de elementos, mais forte do que os outros, e que teria a capacidade de organizá-los de cima para baixo. Mas, então, essa situação caracterizaria uma hetero-organização. De um lado, se houvesse uma quase-fusão entre as partes – como quer o pensamento "holístico" do tipo desenvolvido por K. GOLDSTEIN (1951) em *A Estrutura do Organismo* – não haveria mais ação organizadora possível: a ação é sempre "de" algo "sobre" algo ou "com" algo; ela implica sempre na existência de uma pluralidade real. Logo: para que haja auto-organização "dentro" do organismo, não deve haver entre suas partes nem exterioridade radical nem fusão, mas uma situação intermediária; o que chamamos de "interioridade" ou "acavalamento", no sentido de MERLEAU-PONTY (1945). O que significa fronteiras ambíguas, imprecisas. E exclui partes que seriam totalmente "agentes" ou "sujeito" face a outras partes que seriam totalmente "pacientes" ou "objeto". Ou seja: mesmo que haja hierarquias – em particular a hierarquia mente-corpo (ou "face-sujeito") –, as relações sempre se estabelecem sobre a base "*A* em relação a *B* é mais agente do que agido, e reciprocamente". Quer dizer: tal relação não é de dominação, mas de influência. Supõe uma participação do elemento subordinado. É de natureza "hegemônica", para utilizar a expressão de A. GRAMSCI ([1935] 1975), embora este limite seu uso aos campos social, político e cultural.

Analisemos então a técnica de auto-Gödel-superação (Observação 6.3.5), que nos permite identificar a existência de auto-organização no processo ψ (*cf.* os comentários anteriores a Observação 6.3.5). Como vimos, na análise posterior à Asserção 5.2.10, concluímos que não é a construção da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_\Gamma$ que não é mecânica, mas o reconhecimento de sua validade, sendo que o reconhecimento da validade de $\mathbf{G}_\Gamma$ depende da consistência de Γ, que por sua vez depende das fórmulas de Γ serem reconhecidas como válidas no Modelo de Marcas $\mathbb{M}$. Ora, no estágio i, Γ está contido no patamar $\mathbf{\Psi}_i$ e, portanto, a determinação de $\mathbf{G}_\Gamma$ depende do conhecimento do lógico matemático a respeito do Modelo de Marcas $\mathbb{M}$ expresso pelas fórmulas de $\mathbf{\Psi}_i$. Assim, há uma interação entre a face-sujeito do lógico matemático e uma parte dele, o conhecimento adquirido por ele, expresso pelas fórmulas de $\mathbf{\Psi}_i$. Vemos então como "A 'face-sujeito' do organismo aparece então como uma parte entre outras, cujo papel (e a natureza) é particularmente importante, mas não de ordem diferente dos outros papéis", o que implica uma pluralidade dentro de um "organismo", o lógico matemático, e uma interação entre os elementos dessa pluralidade que possibilitam a auto-organização, elementos para os quais não há nem exterioridade radical nem fusão, mas uma situação intermediária que caracteriza o que foi chamado, na citação acima de Debrun, de “interioridade” ou “acavalamento”.

Notemos que, devido a essa “semi-distinção”, as fórmulas interpretadas que expressam o conhecimento adquirido do lógico matemático não estão “soltas”: enquanto fórmulas, poderiam ser consideradas “soltas”; porém, a *determinação de suas validades* tem uma dependência extrema do passado do processo e, mais ainda, depois de interpretadas, permanecem em cada patamar seguinte para serem ou não utilizadas na determinação da veracidade de uma outra fórmula **A**.

A partir dessa pequena análise, podemos ver como o *motor principal* da auto-organização do processo ψ reside na própria interação entre os elementos “realmente distintos” e soltos, ou entre partes “semi-distintas” no seio de um organismo, como anunciado por Debrun (*cf.*, Seção 1, p.162).

Passemos à terceira característica atribuída por Debrun a um processo de auto-organização:

> 3. A dinâmica do processo “absorve” outros fatores, como “condições de partida”, “acaso”, “sujeito”, “ambiente”. Essa absorção pode comportar várias modalidades. Pode-se tratar de uma neutralização parcial: por exemplo o acaso, importante no início do processo como eventual ponto de amarração, perde peso na medida em que a “endogenização” do processo o torna menos vulnerável a impactos externos. Do mesmo modo, o “candidato a sujeito”, ou “dono” de um processo terá suas pretensões diluídas ou minoradas, se se tratar mesmo de um processo auto-organizador. Mesmo quando o sujeito desempenha um papel central (mente em relação ao corpo, numa aprendizagem), esse papel só pode se exercer de modo auto-organizador se ele não procura forças no(s) outro(s) polo(s). Senão está acuado no dilema do fracasso ou da volta à hetero-organização. O sujeito tem portanto de se integrar ao processo, de se fazer solicitante e não mandante em relação a outras partes. Até as condições de partida que, em tese, limitam de antemão os rumos e a criatividade do processo podem favorecer sua autonomia: o fato de times de futebol se reunirem num recinto fechado, de perseguirem alvos e obedecerem regras fixadas de antemão, impede a interação de se perder em meandros caóticos – além de exaltar a competitividade e a criatividade. A autonomização do processo em relação a outros fatores reforça seu caráter “auto”, esboçado pelo surgimento do “ponto de amarração”.

Vejamos então a influência do acaso, das condições de partida e do ambiente.

A influência do ambiente, segundo a modelagem do sistema $\mathbb{S}$, ocorre através da entrada do sistema, ou seja, quando ocorre a relação **Lógico**E_t**A** (Convenção de Notação 6.2.6), por exemplo, quando uma fórmula **A** é apresentada ao lógico matemático para a avaliação da validade de **A**. Notemos, então, que a ordem de apresentação das fórmulas ao lógico matemático influencia diretamente a construção de cada patamar Ψ_i. Com efeito, a solicitação da avaliação da validade de uma fórmula **A** força a análise de certas fórmulas, seja da própria **A**, se é possível um cálculo direto de **A**, seja de suas subfórmulas, que serão acrescidas em Ψ_i, na medida em que são determinadas como válidas.

Vemos então como aqui o acaso na apresentação das fórmulas ao lógico matemático é "importante no início do processo como eventual ponto de amarração", mas que "perde peso na medida em que a "endogenização" do processo o torna menos vulnerável a impactos externos".

Há então nas "absorções" um caráter duplo: por um lado se dá uma influência direta, na medida em que o fator é absorvido; mas, por outro, o fator perde cada vez mais importância, na medida em que o processo já carrega as propriedades daquilo que foi absorvido, não sendo mais tão influenciado por esse fator que não é mais uma novidade.

Notemos que há então uma "absorção das condições de partida" no sentido de que aquelas fórmulas iniciais que serviram à constituição dos patamares iniciais e dos "pontos de amarrações" iniciais vão, proporcionalmente ao crescimento de Ψ_i, perdendo peso na determinação de um novo patamar, já que as novas fórmulas que emergirão do processo também servirão como ponto de apoio na determinação dos patamares seguintes.

Como a inter-relação com o ambiente se dá através das entradas e saídas, há também uma "absorção do ambiente" já que os conjuntos Ψ_i tendem a incorporar as fórmulas válidas apresentadas. Mais ainda, se o ambiente se utiliza das respostas do lógico matemático para elaborar as novas fórmulas que serão postas sob sua avaliação, os conjuntos Ψ_i também irão refletir e incorporar, de certa forma, estas escolhas do ambiente.

Há também uma certa "absorção do sujeito". Com efeito, as escolhas do sujeito, e.g., nas avaliações das subfórmulas de uma fórmula dada, irão influenciar também a seqüência de fórmulas que serão avaliadas e, portanto, a elaboração dos Ψ_i.

Ocorre "endogenização" aqui no sentido de que certas características dos fatores discutidos acima são incorporados aos procedimentos futuros do lógico matemático, pois ele utiliza as informações contidas nos Ψ_i para suas novas escolhas e determinação de validade. Porém, há "endogenização" em um sentido mais preciso de "centralização" do processo, que discutiremos mais adiante.

Discutamos uma última vez a questão da autonomia do sujeito e sua não-onipotência. Notemos, inicialmente, que o estudo do processo ψ implica no estudo de uma relação R_ψ entre os Ψ_i e Ψ_{i+1}. Neste caso, temos também que R_ψ é determinativa e não-mecânica (no sentido apresentado na Observação 6.2.12). Com efeito, o conjunto diferença Ψ_{i+1} - Ψ_i é constituído das fórmulas que foram determinadas como válidas no Modelo de Marcas no estágio *i*, que, como vimos, é feito por um processo determinativo e não-mecânico (Observação 6.2.12). Como a passagem dos Ψ_i aos Ψ_{i+1} não é recursiva, então temos que não há uma única lei, mas pode haver várias (que não podem ser completamente explicitadas na sua totalidade). Com efeito, não existe um algoritmo que expresse as passagens Ψ_i aos Ψ_{i+1} e se quiséssemos explicitar cada uma das passagens por uma lista de proposições condicionais do tipo "Se no instante *i* temos Ψ_i, então no instante $i+1$ temos Ψ_{i+1}", tal lista teria de ser infinita. Assim, *não há um conjunto finito de regras que permitam determinar o comportamento do lógico matemático de avaliação da validade*. É nesse sentido profundo que podemos dizer que o processo não é hétero-organizado por regras dadas e nem pelo próprio sujeito, pois a validade das fórmulas não depende do sujeito, mas apenas do Modelo de Marcas. Assim, no caso geral, as regras que justificam a validade das fórmulas, e que norteiam o próprio processo, *emergem* do próprio processo e no próprio processo e, é nesse sentido então que podemos falar que há verdadeiramente auto-organização.

Se quisermos falar na pré-existência, em um sentido platônico, dessas regras que estabelecem os patamares do processo, devido à sua independência do sujeito, já que a validade das fórmulas depende apenas do Modelo de Marcas, então temos que a sua emergência, ou manifestação, para nós só se dá na medida em que elementos por elas relacionados surgem no próprio processo, pois não pode haver uma relação entre objetos que ainda não existam.

Mesmo que o conjunto das fórmulas de ***L(N)*** e seus significados no Modelo Padrão estejam definidos desde o começo, estas definições não são suficientes para imediatamente determinar todo o processo Ψ_i, pois sua elaboração também depende do trabalho do lógico matemático, em particular, até mesmo da seqüência de suas descobertas matemáticas, pois já vimos que o motor principal do processo reside na própria *interação* entre o sujeito e as fórmulas de Ψ_i.

Porém, podemos falar aqui de uma certa influência do futuro, no sentido de que as regras que *emergirão* no processo e que ajudam a descrever o próprio processo só se manifestam no futuro do próprio processo. Dentre essas informações futuras podemos citar o conjunto Ψ das verdades aritméticas que podem ser determinadas, que chamamos de *resultado final* (Definição 6.2.11), ou mesmo, a cada patamar o conjunto Ψ_i das verdades aritméticas que foram determinadas até o instante *i* e que chamamos de *estado organizacional do sistema no instante i* (Definição 6.2.8), o que nos leva à quarta e última característica atribuída por **Debrun 1996a** a um processo de auto-organização:

> 4. No decorrer do processo, através da interação dos elementos e do "jogo cibernético" circular, entre as antecipações do futuro imediato e a memória do passado imediato, pode surgir um atrator. Ou melhor, através de fluxos e refluxos que suscitam atratores provisórios e em seguida os desmancha, pode aparecer um atrator definitivo. Esse atrator não é, portanto, dado de antemão, à diferença do que ocorre com um sistema dinâmico corrente em que elementos variáveis e parâmetros definidos no ponto de partida definem também um atrator. Diremos, então, que o processo auto-organizador obedece a uma "lógica de fechamento", mesmo que, de fato, essa lógica não esteja sempre, ou só esteja parcialmente, respeitada.

Vimos como podemos falar em uma certa influência do "futuro" do resultado final Ψ e dos patamares posteriores Ψ_{i+1}. Podemos também falar de uma influência do "passado", como, por exemplo, a utilização de determinados procedimentos já empregados para a construção dos Ψ_k anteriores ($k \leq i$), que acabam ajudando na determinação do patamar Ψ_{i+1}. Notemos então que essas influências se estabelecem no próprio "jogo cibernético" de construção dos Ψ_{i+1} que, podemos dizer, são a cada patamar o resultado do processo e funcionam como "atratores" do processo, sendo o resultado final Ψ o atrator principal do processo, já que é a determinação do conjunto das fórmulas válidas, a **Aritmética** (Definição 5.0.1) que orienta o processo e Ψ é a parte da **Aritmética** que nos é acessível, já que não está claro que possamos reconhecer todas as fórmulas válidas de $L(N)$. Notemos então que, não apenas Ψ_i está contido em Ψ_{i+1}, e que cada patamar é uma finalização parcial da seqüência Ψ_i, mas que, no limite, temos $lim_{i\to\infty}\Psi_i = \Psi$, já que $\Psi_{\mathbb{S}} = \bigcup_i \Psi_i$ e $\Psi = \bigcup_{\mathbb{S}} \Psi_{\mathbb{S}}$ (*cf.* Definições 6.2.10 e 6.2.11).

Podemos dizer ainda que o processo permanece essencialmente centrado sobre si mesmo e que esta centração é crescente, já que os Ψ_i são incorporados nos Ψ_{i+1} (i.e., $\Psi_i \subseteq \Psi_{i+1}$).

Podemos falar também que a tendência do processo ψ é a do fechamento, a cada patamar, e para o conjunto Ψ, já que para qualquer seqüência Ψ_i temos que $lim_{i\to\infty}\Psi_i = \Psi$, limite da seqüência. Assim, o processo ψ também apresenta a "lógica do fechamento" referido na citação de Debrun acima.

Vemos então algumas características centrais da idéia de auto-organização que **Debrun 1996a**, p.*xli*, propõe:

> o processo "permanece – na sua dinâmica – essencialmente centrado sobre si mesmo", progride "por si mesmo" e "para si mesmo" e sua "lógica" é a do "fechamento."

Temos, também, que o processo caminha rumo à constituição de uma forma. Com efeito, já vimos que a "lógica" do processo é a "do fechamento". Logo, Ψ é pois a forma rumo à qual o sistema caminha. No caso mais geral, este conjunto deveria ser a **Aritmética**; porém, como vimos, não está claro que possamos reconhecer todas as fórmulas válidas de ***L(N)***; de qualquer modo, a **Aritmética** é posta como ideal, aparentemente inatingível, do processo Ψ_i.

E, finalmente, considerando a totalidade (lógico matemático + fórmulas de ***L(N)***), há um *trabalho de si sobre si* desta totalidade, cujo resultado é a seqüência dos Ψ_i's. Temos aqui, pois, a principal característica dos processos auto-organizados, segundo **Debrun 1996b**.

Como entender no processo ψ esse trabalho sobre si mesmo?

Em relação ao trabalho sobre si na auto-organização secundária, **Debrun 1996c**, p., comenta:

> A auto-organização "secundária" se desenrola de modo diferente. A identidade, situado no ponto de partida, é que agora "decide" as reestruturações do seu próprio ser, seja em conjunto seja no tocante a tal ou qual parte, nível ou função. O problema, então, é saber como esse trabalho de si sobre si é possível não apenas materialmente mas enquanto "autotrabalho". É evidente, por exemplo, que cortar unhas ou escovar os dentes, embora constituindo à primeira vista atividades de um sujeito sobre si mesmo, são de fato atividades organizadoras de um sujeito sobre um objeto nele exterior. Pois as unhas, os dentes etc., estão sendo tratados como "coisas em 3ª pessoa", como o seriam por alguém que agisse sobre mim, isto é, de fora. Aliás, isso vai ser o critério fundamental: qualquer atividade que um agente exerça sobre ele mesmo, mas que poderia ser efetivada de igual maneira sobre ele por um terceiro, não pode ser uma operação de auto-organização. É uma operação hetero-organizadora, mesmo que disfarçada em operação auto-organizadora. Logo: a auto-organização secundária só vai residir nas operações organizacionais nas quais um agente é o único agente a poder realizá-las sobre si mesmo. Por exemplo, uma aprendizagem, men-

tal e/ou corporal, ou ainda a assimilação de uma temática ou de um estilo cultural inicialmente alheio. Remetemos para outro texto a determinação do que significa exatamente essa exigência de "personalização" da operação, e das condições a que ela pode ser satisfeita. Observemos apenas que ela deve ser compatível com outra exigência: o seu preenchimento não deve impedir que, através da auto-organização secundária, se alcance novos níveis ou patamares de atividade. Em outras palavras: se a personalização das operações de aprendizagem, transplante de formas externas, de criação artística ou literária, de conversão existencial etc., implica sempre certo fechamento do sistema sobre ele próprio (certa "autototalização" ou "centração" desse sistema), teremos de mostrar como isso não impede – antes facilita – uma "saída de si mesmo", em termos corporais, intelectuais ou existenciais. Para só citar um exemplo, podemos evocar a situação de "*double bind*" (ligação dupla) analisada por BATESON (1971) em *Steps to an Ecology of Mind*: oscilando indefinidamente entre duas vivências – por exemplo o mergulho no alcoolismo e a luta ética/disciplinar contra ele, um sujeito pode às vezes "pular para cima", inventar uma terceira posição. Há uma "saída de si sem sair de si", que constitui o marco principal do que chamamos de auto-organização secundária.

No caso do processo ψ, já vimos como o motor da auto-organização reside na interação entre os elementos e como o lógico-matemático desempenha um papel ativo, inclusive com o emprego das técnicas de derivação e auto-Gödel-superação (Observação 6.3.5).

Lembremos então que, segundo **Breciani F$^{\underline{o}}$ & D'Ottaviano 2002**, p.302, temos que:

A auto-organização se caracteriza como um fenômeno de transformação ou de criação de uma organização, que decorre fundamentalmente da interação das atividades predeterminadas, se as houver, com essa atividade autônoma e espontânea de elementos internos e, eventualmente, de fronteira do sistema, através de processos recorrentes. A atividade espontânea decorre da existência de grau mínimo de autonomia aos elementos atuantes. Por sua vez, os processos recorrentes precisam estar presentes para que os elementos autônomos, em suas atividades, se integrem em uma organização com auto-referência.

O que possibilita então a organização no processo ψ é fundamentalmente sua auto-referência. Com efeito, como vimos, é esta que nos permite verificar a validade da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$, isto é, a fórmula $\boldsymbol{\sim Teo_T([\mathrm{G}_T])}$ (Observação 6.3.2), pois foi a possibilidade de representação da demonstração em uma extensão $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{N}$ (definida na metalinguagem) pelo predicado recursivamente enumerável Teo_T, representável em $\boldsymbol{T}$ (e portanto, definida na linguagem objeto $\boldsymbol{L(T)}$), que nos permitiu estabelecer a validade da fórmula de Gödel $\mathbf{G}_T$, através de um procedimento claro de referencia, na linguagem objeto, a um método estabelecido na metalinguagem, que contém a linguagem objeto, portanto, um procedimento de auto-referência.

Se, então, considerarmos as "influências do futuro" representadas pela seqüência dos Ψ_i e pelo limite Ψ, já que cada elemento está em relação à própria totalidade Ψ a ser estabelecida (ou à própria **Aritmética**, em um limite ideal), temos, talvez, que a totalidade considerada devesse ser

$$(\text{sujeito (ou sujeitos)} + \text{fórmulas de } \boldsymbol{L(N)} + \Psi)$$

e como Ψ é o limite da seqüência Ψ_i, isto implica que a totalidade considerada seria, então,

$$(\text{sujeito (ou sujeitos)} + \text{fórmulas de } \boldsymbol{L(N)} + \lim_{i\to\infty}\Psi_i),$$

explicitando então a dependência de si mesmo do próprio processo de elaboração dos Ψ_i.

Analisemos, por fim, o processo ψ em relação às categorias "condições das condições de partida" e "dispositivo organizacional".

Nesse caso, temos que "Contribuem também para a autonomia do processo as "**condições das condições de partida**"." Com efeito, as condições das condições de partidas nesse caso se constituem do conjunto de fórmulas, da definição de validade e do Modelo de Marcas. Vimos que o conjunto das verdades aritméticas não é axiomatizável o que influencia diretamente na existência de emergências, pois se o conjunto das verdades aritméticas fosse axiomatizável, então a determinação de verdades aritméticas também o seria, o que mostra, portanto, uma contribuição da condição da condição de partida para a autonomia do processo.

Por fim, notemos então que até então falamos de *um* processo de determinação de verdades aritméticas, porém, cada lógico matemático desempenha um processo de determinação de verdades matemáticas particular. Não desenvolveremos uma análise dos vários fatores que influenciam os casos particulares, pois ultrapassa o âmbito desse trabalho. Notemos apenas como os conceitos de dispositivo organizacional, condições das condições de partida e quadro podem ajudar na análise destes casos. Com efeito, o **dispositivo organizacional** se constitui no "conjunto formado pelo contorno e os elementos nele incluídos", podemos então estudar como os diversos dispositivos organizacionais, como as condições das condições de partida e como o quadro em que esses processos se desenvolvem influenciam nos diversos processos de determinação de verdades aritméticas.

Comentemos um último aspecto em relação ao processo ψ: que este é um processo de aprendizagem. Com efeito, se tomarmos a palavra *conhecimento* como tendo ambas acepções (1) e (2) da Observação 6.2.13, ou seja, assumindo que estas acepções são partes de um todo único designado pela palavra "conhecimento", temos que o processo ψ de determinação de verdades aritméticas se constitui em um processo de aquisição de conhecimento e, portanto, de aprendizagem.

Vemos então como se aplicam ao processo as noções elaboradas a partir da definição de auto-organização. Vimos que o processo ψ de determinação de verdades aritméticas é um processo de aprendizagem (de aquisição de conhecimento, tomado tanto como processo, quanto como produto; *cf.* Observação 6.2.13 e comentário a ela) que apresenta patamares Ψ_i, com organização crescente; sendo que os patamares Ψ_i são formados com a descoberta de novas verdades aritméticas emergentes decorrentes do processo ψ e que podem ser descritos formalmente (Item 2 da Observação 6.2.14); os *encontros* dos *elementos distintos* fórmulas de $L(N)$ e lógico matemático, que têm autonomia um em relação ao outro, devido, pois, a uma *distinção real*, levam a construção do conjunto Ψ_i de fórmulas interpretadas, que, enquanto tais, possuem partes *semi-distintas* que têm um *acavalamento* entre si. A cada patamar se estabelecem os conjuntos Ψ_i, elaborados dentro de certo *contorno*, inicialmente, ser fórmulas de $L(N)$ e ser válidas no Modelo Padrão, e, posteriormente, relativo ao patamar atual, esta totalidade formando então um *dispositivo organizacional* que não é um simples *amontoado* e que se desenrola no interior de um *quadro*.

Podemos concluir esta seção observando então que a definição de auto-organização e de auto-organização secundária se aplicam ao processo de determinação de verdades aritméticas e que as categorias desenvolvidas por Debrun para análise dos processos de auto-organização permitem desenvolver uma análise desse processo.

Temos então um exemplo em que a teoria de auto-organização se apresenta como uma alternativa ao "ceticismo mecanicista" para entendermos processos que dirigem a si próprios de forma não-algorítmica.

4. A Auto-Organização nas Lógicas de Ordem Superiores

Os sistemas formais introduzidos neste trabalho foram, até agora, teorias de primeira ordem e, em particular, teorias de primeira ordem sobre o conjunto dos números naturais, para as quais mostramos ser auto-organizada a determinação de fórmulas válidas. Nesta seção, vamos lidar com sistemas formais mais expressivos, as lógicas de ordem superior, para os quais mostraremos também ser auto-organizado o processo de determinação de validade das fórmulas, i.e., da validade em relação à classe de todas as estruturas para a linguagem da ordem dada. Isso ocorre, como veremos, devido às conseqüências do Metateorema da Incompletude de Gödel nas lógicas de ordem superior, fundamentalmente o que permite metademonstrar que todo sistema formal de ordem superior é incompleto (*cf.* **Tarski 1965**, p.274, e **Robin 1969**, p.163). No final da seção mostraremos que esses resultados se relacionam também às teorias de conjuntos em primeira ordem, o que nos permite mostrar que o processo de determinação da validade das fórmulas dessas teorias também é auto-organizado.

Até o presente, as linguagens das teorias aqui estudadas expressavam apenas a quantificação (existencial e universal) de indivíduos de um universo dado, sendo essas teorias denominadas, como vimos (*cf.* a nota de rodapé à p.25), de teorias de primeira ordem. Vamos introduzir agora teorias, chamadas *teorias de segunda ordem*, nas quais se pode quantificar também as propriedades e funções relativas aos indivíduos do universo.

Em primeira ordem, os quantificadores (existencial e universal) atuam sobre as variáveis individuais; para que possamos, em segunda ordem, quantificar predicados e funções de indivíduos temos que nos servir de variáveis de predicados e de funções. Vamos então usar as letras latinas maiúsculas com índices P_i^n para denotar as variáveis de predicados n-ários e as letras latinas maiúsculas com índices F_i^n para denotar as variáveis de funções n-árias[28], assim, por exemplo, como veremos, a fórmula de segunda ordem

[28] Como observado anteriormente, no início da Seção 1.1, podemos considerar os numerais que aparecem nos símbolos P_i^n e F_i^n como indicando seqüências do símbolo "," (vírgula), no caso dos índices inferio-

$\exists x_1 \exists x_2 \exists P_1^2(P_1^2(x_1,x_2))$ expressa que existem elementos que estão em uma relação binária qualquer P_1^2 entre si e $\exists x_1 \exists x_2 \forall P_1^2(P_1^2(x_1,x_2))$ expressa que existem elementos que estão entre si em toda e qualquer relação binária do domínio considerado (como veremos, a primeira é válida, enquanto a segunda não o é).

Nas linguagens de segunda ordem, podemos quantificar apenas predicados de indivíduos e funções no conjunto de indivíduos, porém, não podemos quantificar predicados e funções nesses elementos, i.e., sobre predicados de indivíduos e funções nos indivíduos; as linguagens que nos permitem tal quantificação são as *linguagens de terceira ordem*. Da mesma forma, podemos definir linguagens de ordem superiores, nas quais podemos quantificar predicados e funções nos elementos que eram quantificados na linguagem de ordem inferior. Temos assim uma hierarquia de linguagens[29], na qual tudo que pode ser expresso nas linguagens de ordem inferior a uma linguagem dada, pode ser expresso nesta linguagem: há assim, com o aumento de ordem, um aumento do poder expressivo.

Passemos à definição de uma linguagem de segunda ordem.

6.4.6. Definição. Um alfabeto de uma linguagem de segunda ordem $\boldsymbol{L_2(F)}$ é constituído dos seguintes símbolos:

1. *Variáveis individuais*: x_i
2. *Símbolos de funções n-árias*: f_i^n
3. *Símbolos de predicados n-ários*: p_i^n
4. Os *conectivos*: ~ (denominado *não*)
   $\vee$ (denominado *ou*)
5. O *quantificador existencial*: $\exists$ (denominado *para algum*)
6. *Variáveis de predicados n-ários*: P_i^n

---

res, e seqüências do símbolo “ ’ “ (aspa simples), no caso de índices superiores.

[29] Podemos utilizar os números ordinais na indexação dessa hierarquia de linguagens (*cf.* **Tarski**, Cap. 8) obtendo assim linguagens $\boldsymbol{L_\alpha(F)}$ de ordem α de um sistema formal $\boldsymbol{F}$, na qual α é um número ordinal. Usualmente, estuda-se, em Teoria de Tipos, apenas linguagens de ordem menor ou igual a ω, i.e., de ordem finita ou da ordem usual dos conjuntos dos números naturais (*cf.* **Van Benthem & Doets 1983**).

7. *Variáveis de funções n-árias*: F_i^n

Notemos que, diferentemente da Definição 1.1.2 de alfabeto de uma linguagem de primeira ordem, o símbolo de predicado binário de igualdade não se encontra dentre os símbolos do alfabeto de uma linguagem de segunda ordem. A razão disso é que, como veremos adiante, em segunda ordem, a igualdade não precisa ser tomada como uma noção primitiva e pode ser definida.

6.4.7. Convenção de Notação. Expandindo a Convenção de Notação 1.1.9, vamos usar a seguinte convenção para variáveis sintáticas:

$\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (e, possivelmente, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, etc., $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, etc.) para variáveis individuais;

$\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ (e, possivelmente, $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, etc., $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, etc.) para símbolos de funções;

$\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ (e, possivelmente, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, etc., $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, etc.) para símbolos de predicados;

$\mathbf{P}^n$ e $\mathbf{Q}^n$ (e, possivelmente, $\mathbf{P}^n{}_1$, $\mathbf{P}^n{}_2$, etc., $\mathbf{Q}^n{}_1$, $\mathbf{Q}^n{}_2$, etc.) para variáveis de predicados *n*-ários; e

$\mathbf{F}^n$ e $\mathbf{G}^n$ (e, possivelmente, $\mathbf{F}^n{}_1$, $\mathbf{F}^n{}_2$, etc., $\mathbf{G}^n{}_1$, $\mathbf{G}^n{}_2$, etc.) para variáveis de funções *n*-árias.

6.4.8. Definição. Uma *expressão da linguagem* $\boldsymbol{L_2(F)}$ é qualquer seqüência de símbolos do alfabeto, construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Um símbolo do alfabeto de $\boldsymbol{L_2(F)}$ é uma expressão; e
2. Se $\mathbf{u}$ é uma expressão de $\boldsymbol{L_2(F)}$ e $\mathbf{v}$ é uma expressão de $\boldsymbol{L_2(F)}$, então $\mathbf{uv}$ (i.e., a concatenação de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$) é uma expressão de $\boldsymbol{L_2(F)}$.

Vamos nos referir a uma expressão de $\boldsymbol{L_2(F)}$ simplesmente por “expressão”. Em todas as definições a seguir, suprimiremos o complemento “de $\boldsymbol{L_2(F)}$”, ficando subentendido que as expressões são expressões de uma linguagem de segunda ordem.

6.4.9. Definição. O *comprimento de uma expressão* é o número de ocorrências de símbolos nesta expressão.

6.4.10. Definição. Um *termo* é uma expressão construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Uma variável individual é um termo;
2. Se $\mathbf{u_1}$, ..., $\mathbf{u}_n$ são termos e **f** um símbolo de função n-ária, então $\mathbf{fu_1...u}_n$ é um termo; e
3. Se $\mathbf{u_1}$, ..., $\mathbf{u}_n$ são termos e $\mathbf{F}^n$ uma variável de função n-ária, então $\mathbf{F}^n\mathbf{u_1...u}_n$ é um termo.

6.4.11. Convenção de Notação. Como em primeira ordem, vamos usar as letras em negrito **a** e **b** (possivelmente, com sub-índices, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, etc., $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, etc.) para as variáveis sintáticas cujo domínio são termos.

6.4.12. Definição. Uma *fórmula atômica* é uma expressão da forma $\mathbf{pa_1...a}_n$ ou da forma $\mathbf{P}^n\mathbf{a_1...a}_n$; na qual $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a}_n$ são termos, **p** é um símbolo de predicado n-ário e $\mathbf{P}^n$ é um símbolo de variável de predicado n-ário.

6.4.13. Definição. Uma *fórmula* é uma expressão construída mediante as seguintes cláusulas e apenas elas:

1. Uma fórmula atômica é uma fórmula;
2. Se **u** é uma fórmula, então **~u** é uma fórmula;
3. Se **u** e **v** são fórmulas, então $\vee$**uv** é uma fórmula;
4. Se **u** é uma fórmula e **x** uma variável individual, então $\exists$**xu** é uma fórmula;
5. Se **u** é uma fórmula e $\mathbf{P}^n$ uma variável de predicado n-ário, então $\exists\mathbf{P}^n\mathbf{u}$ é uma fórmula; e
6. Se **u** é uma fórmula e $\mathbf{F}^n$ uma variável de função n-ária, então $\exists\mathbf{F}^n\mathbf{u}$ é uma fórmula.

Como antes (*cf.* comentário à Definição 1.1.9), a definição anterior estabelece as fórmulas na chamada notação polonesa, entretanto, vamos, em geral, utilizar a notação usual, segundo as abreviações descritas nas Convenções de Notação 1.1.15 e 1.1.16, acrescidas

das seguintes abreviações: escrevemos $\forall\mathbf{F}^n\mathbf{A}$ e $\forall\mathbf{P}^n\mathbf{A}$ para denotar, respectivamente, $\sim\exists\mathbf{F}^n\sim\mathbf{A}$ e $\sim\exists\mathbf{P}^n\sim\mathbf{A}$, nas quais $\mathbf{F}^n$ é um símbolo de função *n*-ária, $\mathbf{P}^n$ um símbolo de predicado *n*-ário; escrevemos $(\mathbf{aF}^2\mathbf{b})$ e $(\mathbf{aP}^2\mathbf{b})$ para denotar, respectivamente, $\mathbf{F}^2\mathbf{ab}$ e $\mathbf{P}^2\mathbf{ab}$, nas quais $\mathbf{F}^2$ é uma variável de função binária, $\mathbf{P}^2$ uma variável de predicado binário e **a** e **b** são termos; e escrevemos $\mathbf{F}^n(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ e $\mathbf{P}^n(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ para denotar, respectivamente, $\mathbf{F}^n\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n$ e $\mathbf{P}^n\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n$, nas quais $\mathbf{F}^n$ é um símbolo de função *n*-ária, $\mathbf{P}^n$ um símbolo de predicado *n*-ário e $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ são termos. As restituições dos parênteses (*cf.* Convenção de Notação 1.1.42) de $\mathbf{aF}^2\mathbf{b}$ e $\mathbf{aP}^2\mathbf{b}$ são como, respectivamente, para os símbolos de funções binárias e para os símbolos de predicados binários.

6.4.14. Convenção de Notação. Como em primeira ordem, vamos usar as letras em negrito **A**, **B** e **C** (possivelmente, com sub-índices, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, etc., $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, etc., $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, etc.) para as variáveis sintáticas cujo domínio são fórmulas.

6.4.15. Definição. Uma *linguagem de segunda ordem* $\boldsymbol{L_2(F)}$ é definida como a linguagem na qual o alfabeto, os termos e as fórmulas são como os definidos acima (Definições 6.4.6, 6.4.10 e 6.4.13)

Observemos que, muitas vezes, vamos escrever apenas "linguagem" para nos referir a uma linguagem de segunda ordem.

6.4.16. Definição. Seja $\boldsymbol{L_2}$ uma linguagem de segunda ordem. Uma *estrutura* $\mathbb{E}$ *para* $\boldsymbol{L_2}$ consiste de:

1. Um conjunto não-vazio $|\mathbb{E}|$, chamado *universo de* $\mathbb{E}$, cujos elementos são chamados *indivíduos* de $\mathbb{E}$;
2. Para cada símbolo de função *n*-ária **f** de $\boldsymbol{L_2}$, uma função *n*-ária $\mathbf{f}_{\mathbb{E}}$ de $|\mathbb{E}|$ em $|\mathbb{E}|$; e
3. Para cada símbolo de predicado *n*-ário **p** de $\boldsymbol{L_2}$, um predicado *n*-ário $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}$ em $|\mathbb{E}|$.

6.4.17. Definição. Seja $\mathbb{E}$ uma estrutura para uma linguagem de segunda ordem $\boldsymbol{L_2}$. A *linguagem de segunda ordem* $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$ é a linguagem cujos símbolos não-lógicos são os de $\boldsymbol{L_2}$, acrescidos de: uma constante para cada indivíduo *a* de $\mathbb{E}$ (que será chamada de *nome de* *a*); um símbolo de predicado **p** para cada predicado *P* de $\mathbb{E}$ (que será chamada de *nome de P*); e um símbolo de função **f** para cada função *F* de $\mathbb{E}$ (que será chamada de *nome de F*).

6.4.18. Convenção de Notação. Como em primeira ordem, usaremos as letras latinas minúsculas em negrito **i** e **j** como variáveis sintáticas cujo domínio são os nomes de indivíduos de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$.

6.4.19. Definição. Um termo de $\boldsymbol{L_2}$ é *livre de variável* se não contém variável.

Iremos agora definir um indivíduo $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ de $\mathbb{E}$, para cada termo livre de variável **a** de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$. A definição é por indução no comprimento de **a**.

6.4.20. Definição. O *indivíduo* $\mathbb{E}(\boldsymbol{a})$ de $\mathbb{E}$, para cada termo **a** de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$ livre de variável, é definido segundo as seguintes cláusulas:

1. Se **a** é um nome, então $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ é o indivíduo cujo nome é **a**; e
2. Se **a** não é um nome, como **a** é livre de variável, e, portanto, tem a forma $\mathbf{fa_1...a_n}$, na qual $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$ são termos livres de variáveis, $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ é o indivíduo $\mathbf{f}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{a_1}),...,\mathbb{E}(\mathbf{a_n}))$.

6.4.21. Convenção de Notação. Vamos escrever $\mathbf{A_{P^n}[p]}$ para indicar a substituição, em uma fórmula **A**, da variável $\mathbf{P^n}$ pelo símbolo de predicado *n*-ário **p** e $\mathbf{A_{F^n}[f]}$ para indicar a substituição, em uma fórmula **A**, da variável $\mathbf{F^n}$ pelo símbolo de função *n*-ária **f**. As definições de *ocorrência ligada em **A***, *ocorrência livre em **A***, *variável ligada em **A***, *variável livre em **A***, para as variáveis de predicados e funções são análogas àquelas feitas para as variáveis individuais (Definições 1.1.17, 1.1.18, 1.1.20).

6.4.22. Definição. Uma fórmula **A** é *fechada* se nenhuma variável é livre em **A**.

Definiremos, por indução no comprimento de **A**, agora o valor-verdade $\mathbb{E}(\mathbf{A})$ para uma fórmula fechada **A** de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$.

6.4.23. Definição. O *valor-verdade* $\mathbb{E}(\boldsymbol{A})$ para uma fórmula fechada **A** de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$ é dado pelas seguintes cláusulas:

1. Se **A** é da forma $\mathbf{pa_1 ... a}_n$, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{pa_1 ... a}_n) = \mathbf{V}$ se $\mathbf{p}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(\mathbf{a_1}), ..., \mathbb{E}(\mathbf{a}_n))$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;

2. Se **A** é da forma **~B**, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{\sim B}) = H_{\sim}(\mathbb{E}(\mathbf{B}))$;

3. Se **A** é da forma $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = H_{\vee}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}))$;

4. Se **A** é da forma $\exists\mathbf{xB}$, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{B_x[i]}) = \mathbf{V}$, para algum **i** em $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$;

5. Se **A** é da forma $\exists\mathbf{P}^n\mathbf{B}$, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{B}_{\mathbf{P}n}[\mathbf{p}]) = \mathbf{V}$, para algum **p** em $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$; e

6. Se **A** é da forma $\exists\mathbf{F}^n\mathbf{B}$, então

   $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ se $\mathbb{E}(\mathbf{B}_{\mathbf{F}n}[\mathbf{f}]) = \mathbf{V}$, para algum **f** em $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$, caso contrário, $\mathbb{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$.

Pela observação feita logo em seguida à Definição 2.1.4, temos que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \to \mathbf{C}) = H_{\to}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = H_{\wedge}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}) = H_{\leftrightarrow}(\mathbb{E}(\mathbf{B}), \mathbb{E}(\mathbf{C}));$$

e, podemos ver, ainda, que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{A_1} \vee ... \vee \mathbf{A}_n) = \mathbf{V} \text{ se, e somente se, } \mathbb{E}(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}, \text{ para pelo menos um } i \text{ tal que } 1 \le i \le n;$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{A_1} \wedge ... \wedge \mathbf{A}_n) = \mathbf{V} \text{ se, e somente se, } \mathbb{E}(\mathbf{A}_i) = \mathbf{V}, \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 \le i \le n;$$

$$\mathbb{E}(\forall\mathbf{xA}) = \mathbf{V} \text{ se, e somente se, } \mathbb{E}(\mathbf{A_x[i]}) = \mathbf{V}, \text{ para todo } \mathbf{i} \text{ em } \boldsymbol{L_2(\mathbb{E})};$$

$$\mathbb{E}(\forall\mathbf{P}^n\mathbf{A}) = \mathbf{V} \text{ se, e somente se, } \mathbb{E}(\mathbf{A}_{\mathbf{P}n}[\mathbf{p}]) = \mathbf{V}, \text{ para todo } \mathbf{p} \text{ } n\text{-ário em } \boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}; \text{ e}$$

$$\mathbb{E}(\forall\mathbf{F}^n\mathbf{A}) = \mathbf{V} \text{ se, e somente se, } \mathbb{E}(\mathbf{A}_{\mathbf{F}n}[\mathbf{f}]) = \mathbf{V}, \text{ para todo } \mathbf{f} \text{ } n\text{-ário em } \boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}.$$

6.4.24. Definição. Uma *$\mathbb{E}$-instância* de uma fórmula **A** de $\boldsymbol{L_2}$, é uma fórmula fechada de $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$ que resulta da substituição das variáveis individuais, de predicados *n*-ários e de funções *n*-árias, livres em **A**, respectivamente, por nomes de indivíduos, nomes de predicados *n*-ários e nomes de funções *n*-árias.

6.4.25. Definição. Uma fórmula **A** de $\boldsymbol{L_2}$ é *válida em* $\mathbb{E}$ se $\mathbb{E}$(**A'**) = **V**, para toda $\mathbb{E}$-instância **A'** de **A**.

Em particular, se **A** é fechada, **A** é *válida em* $\mathbb{E}$ se, e somente se, $\mathbb{E}$(**A**) = **V**.

6.4.26. Definição. Uma fórmula de uma linguagem $\boldsymbol{L_2}$ é *válida* se é válida em toda estrutura para $\boldsymbol{L_2}$.

6.4.27. Definição. Um *modelo para uma teoria **T*** é uma estrutura para ***L₂(T)*** na qual todos os axiomas não-lógicos de ***T*** são válidos.

Observamos anteriormente, logo depois da Definição 6.4.6 de alfabeto de uma linguagem de segunda ordem, que o símbolo de predicado binário de igualdade não se encontra dentre aqueles do alfabeto de uma linguagem de segunda ordem, pois a relação de igualdade pode ser definida. As relações de equivalência entre as fórmulas abaixo nos permite definir a relação de igualdade em uma linguagem de segunda ordem (Definição 6.4.15):

$x_1 = x_2$ ocorre, se e somente se, $\forall P_1^1(P_1^1(x_1) \leftrightarrow P_1^1(x_2))$;

$F_i^n = F_j^n$ ocorre, se e somente se, $\forall x_1...\forall x_n(F_i^n(x_1, ..., x_n) = F_j^n(x_1, ..., x_n))$; e

$P_i^n = P_j^n$ ocorre, se e somente se, $\forall x_1...\forall x_n(P_i^n(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow P_j^n(x_1, ..., x_n))$.

Tais equivalências se fundamentam no Principio da Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz, segundo o qual indivíduos diferem entre si apenas se um possuir alguma propriedade que o outro não tem. Não nos estenderemos nessa questão sobre a definição da identidade em segunda ordem (para uma discussão mais detalhada, *cf.* **Robin 1969** §48); porém, observamos que vamos nos utilizar aqui de fórmulas com o símbolo de igualdade e que este será interpretado no seu sentido usual.

Estamos agora em condições de enunciar os resultados que nos permitirão as conclusões desejadas nesta seção.

6.4.28. Convenção de Notação. No que segue vamos abreviar por

$$\mathbf{A}(F_1^{\,1}, x_1)$$

a fórmula

$$[\forall x_2 \forall x_3(F_1^{\,1}(x_2) = F_1^{\,1}(x_3) \rightarrow x_2 = x_3) \wedge$$

$$\wedge \; \forall x_3(\forall x_2(\sim F_1^{\,1}(x_2) = x_3) \rightarrow x_3 = x_1) \wedge$$

$$\wedge \; \forall P_1^{\,1}(P_1^{\,1}(x_1) \wedge \forall x_2(P_1^{\,1}(x_2) \rightarrow P_1^{\,1}(F_1^{\,1}(x_1)))) \rightarrow \forall x_2\, P_1^{\,1}(x_2))$$

e por

$$\mathbf{M}$$

a fórmula $\exists F_1^{\,1} \exists x_1\, \mathbf{A}(F_1^{\,1}, x_1)$.

Notemos então que a fórmula **M** é válida na estrutura $\mathbb{M}$. Com efeito, basta tomar a linguagem ***L*₂(**$\mathbb{M}$***)*** na qual $f_1^{\,1}$ é o nome em ***L*₂(**$\mathbb{M}$***)*** da função sucessor-marca e i é o nome em ***L*₂(**$\mathbb{M}$***)*** da zero-marca, neste caso temos, pelas Definições 6.4.25. 6.4.24 e 6.4.23, que **M** é válida, pois:

1. para todo a e b de $|\mathbb{M}|$, $f_1^{\,1}{}_{\mathbb{M}}(a) = f_1^{\,1}{}_{\mathbb{M}}(b) \rightarrow a = b$;
2. para todo b temos que: se, para todo a, não ocorre $f_1^{\,1}{}_{\mathbb{M}}(a) = b$, então $b = i_{\mathbb{M}}$; e
3. para todo predicado unário P em $\mathbb{M}$, se $P(i_{\mathbb{M}})$ e se para todo a, $P(a)$ implica em $P(f_1^{\,1}(a))$, então, para todo a temos que $P(a)$.

6.4.29. Metateorema. Se a fórmula **M** é válida em uma estrutura $\mathbb{E}$ e se $f_1^{\,1}$ é o símbolo de função unária em ***L*₂(**$\mathbb{E}$***)*** que interpreta a variável $F_1^{\,1}$ e se i é a constante em ***L*₂(**$\mathbb{E}$***)*** que interpreta x_1, então a função H de $|\mathbb{M}|$ em $|\mathbb{E}|$ definida recursivamente por

H1. $H(0_{\mathbb{M}}) = i_{\mathbb{E}}$ e

H2. $H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})) = f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(a_{\mathbb{M}}))$

estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{M}$ e $\mathbb{E}$ (Definição 2.3.11) em relação a $f_1^{\,1}$ e i.

Metademonstração. Seja então uma estrutura $\mathbb{E}$ na qual fórmula **M** é válida e sejam $f_1^{\,1}$ o símbolo de função n-ária em ***L*₂(**$\mathbb{E}$***)*** que interpreta a variável $F_1^{\,1}$ e i a constante em ***L*₂(**$\mathbb{E}$***)*** que interpreta x_1, ou seja, segundo as Definições 6.4.25. 6.4.24 e 6.4.23, tais que:

E1. para todo a e b de $|\mathbb{E}|$, $f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(a) = f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(b) \rightarrow a = b$;

E2. para todo b temos que: se, para todo a, não ocorre $f_1^{\,1}{}_{\mathbb{M}}(a) = b$, então $b = i_{\mathbb{M}}$; e

E3. para todo predicado unário P em $\mathbb{E}$, se $P(i_{\mathbb{E}})$ e se para todo a, $P(a)$ implica

$P(f_1^{\,1}(a))$, então, para todo a temos que $P(a)$.

E seja a função H de $|\mathbb{M}|$ em $|\mathbb{E}|$ definida recursivamente como no enunciado.

Mostremos, primeiramente, que H é injetora, por dupla indução.

Caso Base. Seja $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$. Pela observação final à Definição 2.2.3, existe um $b_{\mathbb{M}}$ tal que $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$. Logo, por H1, H2 e por E2, segue que $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) \neq i_{\mathbb{E}} =_{\text{H1}} H(0_{\mathbb{M}})$, daí, neste caso, se $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo. Seja $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$.

Subcaso base: $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ e $a_{\mathbb{M}} = 0_{\mathbb{M}}$. Por H1, H2 e E2, temos que: $H(a_{\mathbb{M}}) = H(0_{\mathbb{M}}) =_{\text{H1}} i_{\mathbb{E}} \neq f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$. Logo, neste caso, temos que, se $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

Subpasso indutivo: $a_{\mathbb{M}} \neq S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ e $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$. Pela observação final à Definição 2.2.3, existe um $c_{\mathbb{M}}$ tal que $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})$, e, como $S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}) \neq a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})$, pela outra observação à mesma definição, temos $b_{\mathbb{M}} \neq c_{\mathbb{M}}$. Logo, por H1, H2 e por hipótese de indução, temos que $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(c_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(c_{\mathbb{M}})) \neq_{\text{H.I.}} f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$. Portanto, neste caso também, se $a_{\mathbb{M}} \neq 0_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

Em todos os casos temos que, se $a_{\mathbb{M}} \neq b_{\mathbb{M}}$ então $H(a_{\mathbb{M}}) \neq H(b_{\mathbb{M}})$, o que mostra que H é injetora.

Mostremos agora que H é sobre, por indução sobre o conjunto $\mathbb{E}$. Com efeito, podemos usar indução neste caso pois, por E3, para todo predicado unário P em $\mathbb{E}$ tal que $P(i_{\mathbb{E}})$ e tal que, para todo a, $P(a)$ implica em $P(f_1^{\,1}(a))$, então, para todo a, temos que $P(a)$.

Caso base. Para $i_{\mathbb{E}}$ temos, por H1, que $H(0_{\mathbb{M}}) = i_{\mathbb{E}}$, logo existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = i_{\mathbb{E}}$.

Passo indutivo. Se $a_{\mathbb{E}} \neq i_{\mathbb{E}}$, então existe um $b_{\mathbb{E}}$, tal que $a_{\mathbb{E}} = f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(b_{\mathbb{E}})$. Por hipótese de indução temos, então, que existe $b_{\mathbb{M}}$ tal que $H(b_{\mathbb{M}}) = b_{\mathbb{E}}$. Tomemos então o numeral-marca $a_{\mathbb{M}} = S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$. Neste caso, $H(a_{\mathbb{M}}) = H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H2}} f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\text{H.I.}} f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(b_{\mathbb{E}}) = a_{\mathbb{E}}$, logo, neste caso também, existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{E}}$.

Como temos que existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = i_{\mathbb{E}}$ e que, se existe $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{E}}$, então existe $S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})$ tal que $H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}})) = f_1^{\,1}{}_{\mathbb{E}}(a_{\mathbb{R}})$, logo, por indução, temos que, para todo elemento $a_{\mathbb{E}}$ de $|\mathbb{E}|$, existe um numeral-marca $a_{\mathbb{M}}$ tal que $H(a_{\mathbb{M}}) = a_{\mathbb{E}}$, o que metademonstra que H é sobre.

Como H é injetora e sobre, então H é uma bijeção.

Como H é uma bijeção que satisfaz H1 e H2, então é um isomorfismo entre $\mathbb{M}$ e $\mathbb{E}$, que satisfaz as condições do enunciado.

Podemos definir então, em $\mathbb{E}$, as funções soma, multiplicação e a relação menor, como segue.

6.4.30. Definição. Em uma estrutura $\mathbb{E}$, na qual fórmula **M** é válida e na qual $S_{\mathbb{E}}$ é a função unária que interpreta a variável F_1^1 e $0_{\mathbb{E}}$ é o elemento do universo de $\mathbb{E}$ que interpreta x_1, definimos indutivamente as operações binárias $+_{\mathbb{E}}$ e $\cdot_{\mathbb{E}}$, e a relação binária $<_{\mathbb{E}}$, como segue:

$+_{\mathbb{E}}$: para todos a e b em $\mathbb{E}$, temos que $a +_{\mathbb{E}} 0_{\mathbb{E}} = a$ e $a +_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(b) = S_{\mathbb{E}}(a +_{\mathbb{E}} b)$;

$\cdot_{\mathbb{E}}$: para todos a e b em $\mathbb{E}$, temos que $a \cdot_{\mathbb{E}} 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$ e $a \cdot_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(b) = a \cdot_{\mathbb{E}} b +_{\mathbb{E}} b$; e

$<_{\mathbb{E}}$: para todos a e b em $\mathbb{E}$, temos que não ocorre $a <_{\mathbb{E}} 0_{\mathbb{E}} = a$ e que $a <_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(b)$ se, e somente se, $a <_{\mathbb{E}} b$ ou $a = b$.

6.4.31. Convenção de Notação. Vamos denotar por $\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)$ a fórmula:

$$\mathbf{A}(F_1^1, x_1) \wedge$$
$$\wedge\ \forall x_3 \forall x_4\ ((x_3\ F_1^2\ x_1 = x_3) \wedge (x_3\ F_1^2\ F_1^1(x_4) = F_1^1(x_3\ F_1^2\ x_4))) \wedge$$
$$\wedge\ \forall x_3 \forall x_4\ ((a\ F_2^2\ x_1 = x_1\ ) \wedge (x_3\ F_2^2\ F_1^1(x_4) = (x_3\ F_2^2\ x_4\ )\ F_1^2\ x_4\ )) \wedge$$
$$\wedge\ \forall x_3 \forall x_4\ (\sim(a\ P_1^2\ x_1 = a) \wedge (x_3\ P_1^2\ F_1^1(x_4) \leftrightarrow x_3\ P_1^2\ x_4 \vee x_3 = x_4\ )).$$

Notemos então que a fórmula $\exists F_1^1 \exists x_1\ \mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)$ define, em segunda ordem, as operações binárias $+_{\mathbb{E}}$ e $\cdot_{\mathbb{E}}$, e a relação binária $<_{\mathbb{E}}$ da Definição 6.4.30 acima. Nesse caso, temos que tais funções e relação são preservadas pelo isomorfismo H definido anteriormente, como mostra o metateorema a seguir.

6.4.32. Metateorema. Seja a função H como definida no enunciado do Metateorema 6.4.29 e sejam as operações binárias $+_{\mathbb{E}}$ e $\cdot_{\mathbb{E}}$, e a relação binária $<_{\mathbb{E}}$ da Definição 6.4.30 acima. Então:

$H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}})$;

$H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}})$; e

$H(a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}})$ se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}})$.

Metademonstração. Basta mostrar que a função H satisfaz I1 da Definição 2.3.11 para o predicado binário $<$, e satisfaz I2 para as funções $+$ e $\cdot$.

+(I2): Por indução:

Caso base: $H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} 0_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} 0_{\mathbb{E}} = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo: $H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) = H(S_{\mathbb{M}}(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} S_{\mathbb{E}}(H(a_{\mathbb{M}} +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H.I.}}$

$$S_{\mathbb{E}}(H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}})) = H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} H(a_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})).$$

.(I2) : Por indução:

Caso base: $H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} 0_{\mathbb{M}}) = H(0_{\mathbb{M}}) =_{\mathrm{H1}} 0_{\mathbb{E}} = H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{E}} H(0_{\mathbb{M}})$.

Passo indutivo: $H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})) = H((a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) =_{+(\mathrm{I2})}$

$$H(a_{\mathbb{M}} \cdot_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}}) =_{\mathrm{H.I.}} H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}}) +_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}}) =$$

$$H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} H(a_{\mathbb{M}}) \cdot_{\mathbb{E}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})).$$

<(I1): Por indução:

Caso base: Temos que $a_{\mathbb{M}} < 0_{\mathbb{M}}$ se, e somente se, $a_{\mathbb{E}} < 0_{\mathbb{E}}$, pois ambos são falsos.

Passo indutivo: $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ se, e somente se, (1) $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}$ ou (2) $a_{\mathbb{M}} = b_{\mathbb{M}}$.

Caso (1): $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} b_{\mathbb{M}}$, se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{E}} H(b_{\mathbb{M}})$, por hipótese de indução.

Caso (2): $a_{\mathbb{M}} = b_{\mathbb{M}}$ se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) = H(b_{\mathbb{M}})$.

Como a disjunção dos resultados dos dois ocorre se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{E}} S_{\mathbb{E}}(H(b_{\mathbb{M}})) =_{\mathrm{H2}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$, temos então que: $a_{\mathbb{M}} <_{\mathbb{M}} S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}})$ se, e somente se, $H(a_{\mathbb{M}}) <_{\mathbb{E}} H(S_{\mathbb{M}}(b_{\mathbb{M}}))$.

6.4.33. Definição. Dizemos que um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem formal ***L*** é *categórico* se todos os modelos das fórmulas de Γ são isomorfos entre si.

6.4.34. Definição. Dizemos que uma estrutura $\mathbb{E}$ é *expressável* em uma linguagem formal ***L*** se $\mathbb{E}$ é modelo para um conjunto categórico Γ de fórmulas de ***L***.

6.4.35. Observação. Os Metateoremas 6.4.29 e 6.4.32 nos permitem concluir que a estrutura do Modelo de Marcas é expressável na linguagem de segunda ordem pura, i.e., sem símbolos de predicados ou símbolos de funções. Este fato tem, como veremos a seguir, importantes implicações em relação ao conjunto de fórmulas válidas em segunda ordem e, conseqüentemente, para a completude das teorias de segunda ordem.

6.4.36. Metateorema. Seja **B** uma fórmula de $\boldsymbol{L_1(N)}$ [30] que não contém a variável x_1 e seja **B’** a fórmula de $\boldsymbol{L_2}$ que resulta de se substituir em **B**:

a constante 0 pela variável x_1;

o símbolo de função S pela variável F_1^1;

o símbolo de função + pela variável F_1^2;

o símbolo de função $\cdot$ pela variável F_2^2;

o símbolo de predicado < pela variável P_1^2.

Nestas condições, temos que:

$$\forall F_1^1 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \to \mathbf{B'}) \text{ é válida se, e somente se, } \mathbf{B} \text{ é válida em } \mathbb{M}.$$

Metademonstração. $\forall F_1^1 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \to \mathbf{B'})$ não é válida se, e somente se, existe uma estrutura $\mathbb{E}$ na qual[31] $\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ é válida, f_1^1 é um símbolo de função em $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$ e i é uma constante em $\boldsymbol{L_2(\mathbb{E})}$, e $\mathbf{B'}_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ não é válida em $\mathbb{E}$. Ora, pelos Metateoremas 6.4.29 e 6.4.32, uma estrutura $\mathbb{E}$ na qual $\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ é válida é isomorfa a $\mathbb{M}$ e os elementos que interpretam $F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2$ em $\mathbb{E}$ são, respectivamente, a imagem pelo isomorfismo de $S_{\mathbb{M}}$, $0_{\mathbb{M}}$, $+_{\mathbb{M}}$, $\cdot_{\mathbb{M}}$ e $<_{\mathbb{M}}$. Assim, $\mathbf{B'}_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ não é válida se, e somente se, **B** não é válida em $\mathbb{M}$. Temos, portanto, que $\forall F_1^2 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \to \mathbf{B'})$ não é válida se, e somente se, **B** não é válida em $\mathbb{M}$; ou ainda, $\forall F_1^2 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \to \mathbf{B'})$ é válida se, e somente se, **B** é válida em $\mathbb{M}$.

6.4.37. Observação. O metateorema anterior, conjuntamente com o Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel, nos permite concluir que:

---

[30] Notemos que $\boldsymbol{L_1(N)}$ é a linguagem de primeira ordem $\boldsymbol{L(N)}$ (Definição 1.4.3).

[31] $\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ denota a fórmula que resulta da substituição, em $\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2)$, de F_1^1 e x_1 por, respectivamente, f_1^1 e i, e $\mathbf{B'}_{F_1n,\, x_1}[f_1^1, i,]$ denota a fórmula que resulta da substituição,

1. Não existe uma teoria axiomatizada cujos teoremas sejam todas as fórmulas de segunda ordem válidas, ou seja, não existem teorias de segunda ordem completas em relação à noção de validade da Definição 3.2.9;
2. Não existe procedimento mecânico para decidir se uma fórmula de $\boldsymbol{L_2}$ é válida; e
3. O processo de determinação das fórmulas válidas de $\boldsymbol{L_2}$ é auto-organizado.

Com efeito, começando pelo Item 2, se existisse um procedimento mecânico para decidir quais fórmulas de $\boldsymbol{L_2}$ são válidas, pelo inverso do método de se encontrar $\forall F_1^1 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \rightarrow \mathbf{B'})$ a partir de **B**, existiria um procedimento mecânico para decidir se uma fórmula **B** de $\boldsymbol{L_1(N)}$ é válida em $\mathbb{M}$, o que contradiria o Metateorema 5.0.4. Do mesmo modo, quanto ao Item 1, se existisse uma teoria axiomatizada $\boldsymbol{T}$ cujos teoremas fossem todas as fórmulas válidas em segunda ordem, existiria um procedimento mecânico $Teo_{\boldsymbol{T}}$ (Definição 4.2.6) para decidir quais fórmulas de $\boldsymbol{L_2}$ são válidas, o que contraria o Item 2. Por outro lado, quanto ao Item 3, já vimos na seção anterior que o processo de determinação da validade de fórmulas de $\boldsymbol{L_1(N)}$ em $\mathbb{M}$ é auto-organizado. Ora, como a determinação da validade de uma fórmula **B** de $\boldsymbol{L_1(N)}$ em $\mathbb{M}$ tem associada a ela, pelo metateorema anterior, a determinação da validade de uma fórmula $\forall F_1^1 \forall x_1(\mathbf{M}(F_1^1, x_1, F_1^2, F_2^2, P_1^2) \rightarrow \mathbf{B'})$ de $\boldsymbol{L_2}$, então o processo de determinação da validade de fórmulas de $\boldsymbol{L_2}$ também tem que ser auto-organizado.

Notemos então que, como o conjunto das fórmulas de $\boldsymbol{L_2}$ é um subconjunto do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem $\boldsymbol{L_\alpha}$ de ordem α superior a $\boldsymbol{L_2}$, pela observação anterior, podemos concluir que: não existe uma teoria axiomatizada cujos teoremas sejam todas as fórmulas válidas de ordem α, ou seja, não existem teorias de ordem α completas em relação à noção de validade que estende a Definição 3.2.9; não existe procedimento mecânico para decidir se uma fórmula de $\boldsymbol{L_\alpha}$ é válida; e, por fim, que:

O PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DAS FÓRMULAS VÁLIDAS DE $\boldsymbol{L_\alpha}$ *É AUTO-ORGANIZADO.*

---

em **B'**, de F_1^1 e x_1 por, respectivamente, f_1^1 e i.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os processos humanos de determinação de verdades aritméticas, de determinação de teoremas e não-teoremas de ***N*** e de determinação de casos de parada e não-parada (*cf.* Seção 5.3), bem como o processo humano de determinação de verdades de lógicas de ordem superiores, são tais que:

A1. Não existem sistemas formais axiomatizados para descrevê-los completamente;

A2. Não podem ser simulados mecanicamente e, portanto, não podem ser realizados por um mecanismo – se, de acordo com Correlato Mecânico Geral da Tese/Definição de Church (Asserção 3.2.11), entendermos por mecanismo aquilo cujo funcionamento pode ser simulado por uma função recursiva parcial, incluindo aí, aquilo que pode ser modelado finitamente (*cf.* Observação 3.2.13)[32];

Essas características implicam então que:

B1. Se, como em **Penrose 1989** e **1995**, chamamos de Inteligência Artificial Forte o Projeto da Teoria da Inteligência Artificial, que busca reduzir todas as capacidades humanas a algoritmos, temos que os resultados acima implicam que esse projeto nunca poderá ser realizado; o que está de acordo com os resultados obtidos por **Penrose 1989** e **1995**, apesar de terem sido obtidos por outro caminho.

B2. Os resultados acima também implicam na impossibilidade de se desenvolver, em Ciências Cognitivas ou Filosofia da Mente, uma teoria formal axiomática, ou ainda uma teoria mecanicista, que dê conta do funcionamento mental, já que os processos acima são processos mentais; o que está de acordo com as conclusões, obtidas por outra via, de **Lucas 1961**, p.1, de que "o Mecanicismo é falso", ou ainda, de que "mentes não podem ser explicadas por máquinas".

B3. Mais ainda, a frase "o Mecanicismo é falso" parece poder ser interpretada tam-

[32] Nessas Considerações Finais, sempre que utilizarmos a palavra "mecanismo" será nesta acepção.

bém no sentido de que tais resultados implicam na impossibilidade de uma teoria formal axiomática ou de uma modelagem finita completa da realidade física, de acordo com o que foi apresentado recentemente por Stephen Hawking em uma conferência intitulada “Gödel and the end of the Physics”, no Dirac Centennial Celebration, realizado na Cambridge University, pelo DAMTP/CMS, em 20 de Julho de 2002[33]:

> Qual a relação entre o Teorema de Gödel e se podemos formular a teoria do universo, em termos de um número finito de princípios. Uma conexão é óbvia. De acordo com a filosofia da ciência positivista, uma teoria física é um modelo matemático. Então, se existem resultados matemáticos que não podem ser demonstrados, existem problemas físicos que não podem ser preditos.
>
> ...
>
> ... uma teoria física é auto-referente, como o Teorema de Gödel. Podemos esperar, portanto, que seja inconsistente ou incompleta.
>
> ...
>
> Algumas pessoas ficarão muito desapontadas, se não existir uma teoria última que pode ser formulada com um número finito de princípios. Eu pertenci a este grupo, mas mudei de idéia. Agora estou contente porque nossa busca pelo conhecimento nunca chegará ao fim, e que sempre teremos o desafio de novas descobertas. Sem isso, estagnaríamos. O Teorema de Gödel nos assegura que sempre existirá um trabalho para os matemáticos...

B4. Se levarmos em conta que esses processos mentais se expressam no funcionamento de um organismo, temos que B3 implica na impossibilidade de uma teoria formal axiomática completa do comportamento dos organismos biológicos e que nem todos os comportamentos poderão ser descritos como fruto do funcionamento de um mecanismo.

Por outro lado, podemos, como vimos no Capítulo 6, usar as categorias desenvolvidas na Teoria da Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c** para compreender minimamente esses processos. Com efeito:

C1. Para o caso do processo ψ, em particular, vimos que o processo ψ de determinação de verdades aritméticas é um processo de auto-organização secundária (p.163), pois:

---

[33] O texto da conferência pode ser encontrado no site de Stephen Hawking da Cambridge University. Agradeço ao colega de doutorado Tadeu Fernandes de Carvalho pela informação sobre a existência desse texto.

a. É um processo de aprendizagem (de aquisição de conhecimento, tomado em um sentido amplo, tanto como processo, quanto como produto; *cf.* Observação 6.2.13 e comentário a ela);

b. Apresenta patamares Ψ_i, com organização crescente (os patamares Ψ_i são formados com a descoberta de novas verdades aritméticas emergentes, decorrentes do processo ψ), que podem ser descritos formalmente;

c. Os patamares Ψ_i são construídos a partir da interação do lógico matemático com as fórmulas, com os patamares anteriores e com o Modelo de Marcas (o lógico matemático interage, inicialmente, com a fórmula **A**, da qual se propôs a determinar a veracidade e posteriormente, talvez, com outras que entram na determinação da veracidade de **A**, dentre as quais estão, principalmente, as fórmulas já interpretadas e que expressam fatos a respeito do Modelo Padrão).

d. O processo tem, pelas razões apresentadas na Observação 6.3.2, a direção hegemônica, mas não-dominante, do lógico matemático.

e. Neste caso, há *encontros* dos *elementos distintos,* fórmulas de ***L(N)*** e lógico matemático, que têm autonomia um em relação ao outro, devido, pois, a uma *distinção real*, o que leva à construção do conjunto Ψ_i de fórmulas interpretadas, que, enquanto tais, possuem partes (sintática e semântica) *semi-distintas* que têm um *acavalamento* entre si, na medida em que se co-determinam, já que temos a parte sintática como expressão da parte semântica e esta como significado daquela.

d. Os patamares são elaborados dentro de certo *contorno*, inicialmente, "ser fórmulas de ***L(N)*** e ser válidas no Modelo Padrão", e, posteriormente, no patamar atual de elaboração do patamar seguinte; esta totalidade formando então um *dispositivo organizacional* que não é um simples *amontoado* e que se desenrola no interior de um *quadro*.

C2. Assim, as categorias desenvolvidas na Teoria da Auto-Organização de **Debrun**

1996a, **b** e **c** possibilitam compreender minimamente o processo ψ e mostramos, na Seção 6.4, como este fato implica que podemos compreender também que o processo de determinação de fórmulas válidas de lógicas de ordens superiores é auto-organizado.[34]

Esses são, pois, os principais resultados obtidos neste trabalho. Em relação a seus objetivos, temos que o objetivo principal – que era analisar o processo de determinação de verdades aritméticas e de verdades de lógica de ordens superiores a partir de uma análise dos resultados decorrentes de **Gödel 1931**, sob o prisma da Teoria da Auto-Organização de **Debrun 1996a**, **b** e **c** e sob o enfoque da Sistêmica – foi desenvolvido nos Capítulos 5 e 6; e o objetivo preliminar – que era realizar uma análise detalhada dos resultados obtidos a partir de **Gödel 1931**, no sentido de identificar se esses resultados implicam na existência de processos não-mecânicos na acepção da Tese/Definição de Church – foi desenvolvido nos Capítulos de 1 a 4.

Por fim, quanto à discussão de aplicação dos resultados obtidos a partir de **Gödel 1931** a algumas áreas específicas do saber, temos que:

1. Em relação à Inteligência Artificial, podemos concluir por uma impossibilidade de uma Inteligência Artificial Forte (B1 acima).

2. Em relação à Teoria da Auto-Organização, os processos acima fornecem exemplos de processos verdadeiramente auto-organizados e se prestam, como vimos, à aplicação e à avaliação da adequação dos conceitos da Teoria da Auto-Organização de Debrun.

3. Em relação à Sistêmica, os resultados acima impõem limites à possibilidade de simular mecanicamente uma certa capacidade da inteligência humana, o que impõe limita-

[34] Este resultado pode ser estendido para o processo ψ_N de determinação de teoremas e não-teoremas de N e para o processo ψ_{PP} de determinação de casos de parada e não parada (*cf.* Seção 5.3), já que esses processos são realizados também por uma técnica de auto-Gödel-superação (Observação 6.3.5), um dos principais fatores que nos permitiu concluir que o processo ψ é auto-organizado. De modo geral, todo processo que se fundamenta nessa operação parece ser auto-organizado.

ções essenciais à aplicação da metodologia de modelagem, pelo menos quanto à sua aplicação nas Ciências Humanas.

4. Os resultados acima são importantes, ainda, na medida em que demandam uma nova forma de explicação de certos fenômenos da cognição humana, o que constitui um dado importante para a Metodologia da Ciência, para a Epistemologia, para a Gnoseologia, e para as Ciências Cognitivas e Filosofia da Mente.

Apontemos, por fim, alguns rumos para trabalhos futuros.

As teorias da auto-organização e as teorias de sistemas permitem identificar pelo menos dois tipos diferentes de métodos, não-excludentes e complementares, para o tratamento de sistemas ou de partes de sistemas:

1. A utilização de teorias axiomatizadas ou de modelos mecanicistas;

2. A utilização de conceitos metateóricos em relação à área de aplicação (e.g., Física, Química, Biologia, Psicologia, etc.), que acabam por fazer referência aos conceitos já elaborados nos métodos de tipo 1 acima.

Temos ainda que, na elaboração de categorias para se entender os processos auto-organizados, **Debrun 1996a** insiste na necessidade de uma definição de auto-organização, além das de tipo científica, que contemple o senso comum:

> Nessas condições uma definição de auto-organização que, por falta de ênfase sobre "auto", não poderia ser "reconhecida" e portanto ser admissível pelo Senso Comum (mediante, eventualmente, uma "maiêutica") seria totalmente arbitrária. Seria um mero jogo de palavras. Muitas palavras podem ser trocadas entre si para designar a mesma coisa. Não é o caso de uma "palavra raiz", que serve de âncora e doadora de sentido para outras.

Porém, para balizar esta caracterização sobre a auto-organização, **Debrun 1996a** finaliza propondo alguns critérios de operacionalidade da definição, que serão desenvolvidos em **Debrun 1996b** e **Debrun 1996c**:

1. Embora não formalizável, a definição deve ser tal que ela permita identificar de modo claro os processos que serão considerados auto-organizadores.

2. Ela deve também apontar, embora em termos genéricos, para os ingredientes e mecanismos desses processos.

3. No entanto ela não deve ser tal que nos permita produzir ou reproduzir a vontade – usando uma "lei de construção" (algoritmo, programa) – os fenômenos de auto-organização. Se fosse assim (ou quando é assim), lidaríamos na verdade com fenômenos hetero-organizáveis disfarçados em fenômenos auto-organizados.

4. A definição, mesmo que original, não deveria se afastar em demasia das concepções que "sedimentaram" desde os anos 50, e que têm contribuído para a elaboração de uma tradição filosófico-científica. Devemos procurar nos inserir nessa tradição. Do contrário nosso procedimento poderia ser gratuito e arbitrário.

5. É possível que várias definições satisfaçam simultaneamente a esses critérios. Nesse caso consideraremos que essas definições não são simples concepções da auto-organização, mas *modalidades* da auto-organização.

É, pois, nessa perspectiva que entendemos porque podemos utilizar a Teoria da Auto-Organização de Debrun para compreender os processos aqui estudados: os patamares do processo podem ser descritos axiomaticamente, enquanto não se pode axiomatizar o processo como um todo; porém, a existência de processos desse tipo, nos quais os estágios de desenvolvimento podem ser formalizados, permite-nos então elaborar categorias relativas à formação desses patamares, nas teorias de sistemas e nas teorias de auto-organização, que, retroativamente, nos possibilita compreender seu desenrolar.

Essa perspectiva nos permite então esperar estreitas correlações entre as diversas teorias de auto-organização existentes na literatura. Porém, como a elaboração de categorias das teorias de auto-organização se dá na própria reflexão e exposição do autor (veja-se, por exemplo, os "macroconceitos" de **Morin 1977-1991**, ou o conceito de "autopoiese" em **Maturana &Varela 1980**), temos que um estudo das relações entre quaisquer teorias de auto-organização entre si, ou mesmo o estudo do processo ψ segundo qualquer outra teoria de auto-organização, pressupõe uma exposição detalhada do encadeamento das categorias originais de cada uma delas que, portanto, reservamos a trabalhos posteriores.

Notemos, porém, que, como as teorias de auto-organização tratam inicialmente de uma classe comum de processos auto-organizados, as categorias elaboradas por diversas teorias têm que manter algo em comum, o que permitirá a comparação e a possibilidade de elaboração de uma teoria síntese mais abrangente, que contenha os resultados das teorias comparadas.

Vejamos apenas um exemplo de relação desses resultados a respeito do processo ψ com a Teoria de Auto-Organização de **Atlan 1998** (p.24).

> Sob a influência da teoria matemática da computabilidade, é geralmente assumido que tudo na natureza é ou computável ou aleatório. Esta assunção, conhecida pelo nome de tese física de Church-Turing (Davis, 1965), implica que sistemas verdadeiramente auto-organizados não poderiam existir na natureza. Ela está baseada sobre considerações sobre o poder das linguagens computacionais e suas equivalências ao que toca ao conjunto de seqüências computáveis. Aplicada ao mundo físico, esta tese afirma que tudo é computável, desde que tudo obedece a leis físicas que são computáveis. A única exceção pode ser os fenômenos aleatórios se admite-se que existe na natureza aleatoriedade irredutível. Entretanto, em dois livros provocativos, Penrose (1989, 1995) argumenta a favor da idéia de que a tese de Church-Turing não pode ser aplicada a todos fenômenos físicos por causa das limitações impostas pelo teorema de Gödel. Ele também salienta a distinção entre computar e entender para mostrar que o cérebro humano (e outros?) capaz de entender pode ser instância de tais sistemas físicos para os quais a tese de Church-Turing não se aplicam. Este trabalho é particularmente interessante porque não recorre a uma ontologia dualista na qual a mente sem nenhuma substância material não seria computável, contudo seria capaz de disparar ações e impor propriedades não-computáveis sobre os corpos materiais.
>
> Agora, é claro que se algo é programável, não pode ser dito ser verdadeiramente auto-organizado desde que sua organização é o efeito de um programa preexistente, em um sentido de fora, e independente, de sua própria existência. Este é o porquê instâncias das redes auto-organizadas analisadas acima não podem ser consideradas verdadeiramente auto-organizadas, mesmo ainda que sua estrutura e comportamento macroscópicos não possam ser preditos antes de serem computados por uma simulação computacional do modelo. Chamamos eles auto-organização em um sentido fraco ou mesmos forte, mas deixamos de lado a discussão sobre o que chamamos de auto-organização intencional. E claro agora que um sistema auto-organizado verdadeiramente não seria nem programável, nem aleatório. Sofisticação infinita fornece uma definição formal destes sistemas.

Damos, então, a seguir, uma pequena classificação das auto-organizações segundo Atlan, cujo propósito é esclarecer o significado dos termos empregados pelo autor (pp. 14, 15 e 23). O autor denomina *auto-organização fraca* aquela na qual a meta a ser atingida – que define o significado da estrutura e operação da máquina – é imposta de fora; *auto-organização forte*, aquela na qual é reduzida ao máximo possível a geração de sentido externo ao sistema, como pela interpretação por observadores humanos, sendo ela uma propriedade que emerge da evolução da máquina mesma; e *auto-organização verdadeira*, aquela do sistema que tem sofisticação infinita, sendo a *sofisticação* de um objeto ou seqüência o mínimo comprimento de uma parte de programa na descrição mínima capaz de gerar este objeto ou seqüência, que, como Atlan mostra, acaba servindo como uma medida da complexidade significativa. Notemos, então, que objetos com sofisticação infinita têm a propriedade peculiar de não serem nem recursivos, i.e. programáveis, nem aleatórios. Neste caso, um “programa” que o descrevesse deveria ter um comprimento infinito.

O processo ψ acima, e conseqüentemente o processo Ψ_i também, seria então um e-xemplo de processo com sofisticação infinita. Com efeito, um programa que descrevesse o comportamento de ψ, i.e., os diferentes valores para os diferentes argumentos, não poderia ter um comprimento finito, já que isto implicaria na existência de uma teoria axiomatizada na qual ψ seria representável, o que, como vimos, não é possível. Por outro lado, podemos conceber um “programa infinito” que determinasse o valor de ψ: basta considerar o “programa infinito” composto dos comandos “se $x = a$ então $\psi(x) = b$”, para cada valor definido $\psi(a) = b$ de ψ.

Vemos assim como as categorias elaboradas nas teorias de auto-organização de Debrun e Atlan mantém aspectos comuns por tratarem de uma classe comum de processos auto-organizados, o que justamente motiva a esperança de elaboração de uma teoria síntese mais abrangente, que contenha os resultados das teorias comparadas. O que pode constituir um projeto para trabalhos futuros.

Terminemos este trabalho nos permitindo tecer algumas reflexões e especulações em relação aos resultados obtidos, à Sistêmica e à Teoria da Auto-Organização.

Vimos que os processos aqui estudados são processos de aprendizagem (*cf.*, logo a-cima, a aplicação da definição de auto-organização secundária de Debrun aos processos), ou ainda, de aquisição de conhecimento lógico-matemático, no qual há a determinação de certas verdades lógicas e matemáticas ou, podemos dizer que, por se tratar de seres humanos, há o *reconhecimento* dessas verdades lógicas e matemáticas. Temos então que os resultados a respeito do processo ψ de determinação de verdades aritméticas permitem supor a existência de um processo de reconhecimento não-algorítmico e, daí, a possibilidade de se diferenciar “reconhecer algoritmicamente” e “reconhecer não-algoritmicamente”. Analisemos este aspecto com maior detalhe.

Inicialmente, podemos considerar ψ como um predicado de fórmulas, no sentido de que ψ classifica as fórmulas em válidas ou não-válidas no Modelo de Marcas. Como temos que a predicação que resulta da aplicação de ψ pode ser considerada um processo determinativo (na acepção da Observação 6.2.12), podemos, então, falar de *predicados determinativos mecânicos* (aqueles que seriam recursivos ou, ainda, recursivamente enumeráveis) e de *predicados determinativos não-mecânicos*, como no caso de ψ. No caso da aplicação de predicados determinativos mecânicos falaremos de *reconhecimento algorítmico* e no caso da aplicação de predicados determinativos não-mecânicos falaremos de *reconhecimento não-algorítmico*.

Notemos que, apesar de ser determinativo, esse processo não-mecânico não é completamente determinado, já que não há uma única lei ou razão da sua evolução. Com efeito, determinativo pressupõe uma determinação *devido ao próprio processo*, enquanto determinado indica uma determinação *do próprio processo*, o que parece não ser o caso aqui, pelo menos, não por uma única lei ou regra[35].

Observemos ainda que a existência de predicados determinativos não-mecânicos não contradiz a Tese/Definição de Church, pois, como vimos, o que se procura definir com a Tese/Definição de Church é a noção de calculabilidade como expressão de um processo mecânico, com procedimentos que possam ser formalmente descritos, e não processos que envolvam, por exemplo, aspectos criativos. Com efeito, notemos que, apesar de podermos considerar ψ como determinativo, não somos capazes de descrever formalmente o processo representado por ψ.

Apesar de diferenciarmos "reconhecer algoritmicamente" e "reconhecer não-algoritmicamente", temos que ambos tipos de reconhecimento são relativos ao processo humano de reconhecimento, ao qual, por conter também o processo ψ, podemos atribuir então as características análogas as características A1 e A2 descritas acima, ou seja:

A1'. Não existem sistemas formais axiomatizados para descrever completamente o processo humano de reconhecimento;

A2'. O processo humano de reconhecimento não pode ser simulado mecanicamente e, portanto, não pode ser realizado por um mecanismo.

[35] Evitamos o uso da palavra *determinismo* devido às diversas acepções que carrega e que poderia mais obscurecer do que clarificar as propriedades do processo em questão.

Mais ainda, na análise da Asserção 5.2.10, vimos que o que nos diferencia das máquinas é que a máquina não realiza o *reconhecimento* da validade da fórmula de Gödel e que esse reconhecimento pressupõe o reconhecimento da consistência do conjunto de fórmulas que reconhecemos como válidas no Modelo de Marcas, o que explicita a capacidade de auto-referência da compreensão humana, que a máquina não tem. Com efeito, vimos que a máquina "é incapaz de "reconhecer" que o conjunto Γ (das fórmulas que ela própria "reconhece" como válidas) é consistente !"

Lembremos ainda que a auto-referencialidade que atribuímos à fórmula de Gödel tem por base a auto-referencialidade desse processo humano de reconhecimento (cf. Item 6 da Observação 6.3.2).

Assim sendo, esse processo humano de reconhecimento pode voltar-se sobre si mesmo. Nesse sentido:

1. Abre-se espaço para a pesquisa desse processo com teorias em linguagens formais que permitam a auto-referência, o que pretendemos realizar em trabalhos futuros.

2. Parece que a análise dos significados dos termos das linguagens naturais e formais e a elaboração de categorias, como realizada nas teorias de auto-organização, são elas próprias o resultado de um processo humano auto-organizado de reconhecimento.

3. O que sugere uma determinação de si mesmo do processo humano de reconhecimento nessa aplicação de si sobre si mesmo;

Haveria, portanto, uma capacidade autodeterminativa desse processo humano de reconhecimento que possui todas as características acima (A1, A2, B1, B2, B3 e B4), mas que, apesar disso, não é incompreensível.

Haveria pois um processo humano de reconhecimento, auto-referente, auto-organizado, não-mecânico e autodeterminativo, que estaria por detrás dos processos aqui estudados de elaboração do conhecimento lógico e matemático e, por que não dizer, das elaborações das próprias teorias de auto-organização.

Fica então a interrogação: como especificar mais esse processo humano de reconhecimento ? Que, talvez, possa ser substituída pela indagação: como reconhecer o que seja reconhecer ? E essa reformulação da questão já nos mostra a auto-referencialidade inerente à amplitude da noção de reconhecimento e que, junto com os resultados obtidos neste trabalho, motiva-nos a esperar que, em novos trabalhos, essa auto-referencialidade e identidade do processo de reconhecimento nos leve a um reconhecimento desse mesmo processo de reconhecimento, que, como vimos, não poderá ser esgotado em uma teoria formal axiomática ou em modelos mecânicos – o que parece impor a necessidade de novos conceitos auto-referentes, como alguns daqueles elaborados na Sistêmica e na Teoria de Auto-Organização.

BIBLIOGRAFIA

ASHBY, W. ROSS

1962. *Principles of the Self-Organizing System*. In: Von Foerster, H. & Zopf, Jr., G.W. (org.), **Principles of Self-Organization**. Oxford: Pergamon, pp. 255-278. (Reimpresso in Ashby, W.R., **Mechanisms of Intelligence**. Seaside (EUA): Intersystems, 1981, pp. 65-89.)

ATLAN, Henri

1979. **Entre le Cristal et la Fumée: Essai sur l'Organisation du Vivant**. 1. ed. Paris: Seuil. 290 p. (Collection Points, Série Sciences).

1998. *Intentional Self-organization. Emergence and Reduction: Towards a Physical Theory of Intentionality*. **Thesis Eleven**. London: Sage, N° 52, February 1998. pp. 5-34.

BERTALANFFY, Ludwig Von

1968. **General System Theory**. New York: George Braziller.

BIRABEM, Rodolfo C. E.

1996. **Tese de Church: Algumas Questões Histórico-Conceituais**. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1996. *x*-98 p. (Coleção CLE, vol. 16).

BRECIANI F°, Ettore; D'OTTAVIANO, Ítala M. L.

2002. *Conceitos Básicos de Sistêmica*. In: **D'Ottaviano & Gonzales (orgs.) 2002**, pp. 283-306.

CHURCH, Alonzo

1935. *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*. Preliminary Report (Abstract 205) **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 41, 1935, pp. 332-333.

DA SILVA, Jairo José

2003. *O Segundo Problema de Hilbert*. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, 2003, pp. 29-37.

Sistemas Lógicos e Auto-Organização. Texto datilografado.

DAVIS, Martin (ed.)

1965. **The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions**, **Unsolvable Problems and Computable Functions**. New York: Raven Press.

DEBRUN, Michel

1996a. *Por Que, Quando e Como é Possível Falar em Auto-Organização?* In: **Debrun, M.; Gonzales, M.E.Q.; Pessoa Jr, O. (orgs.) 1996**, pp. *xxxiii-xliii*.

1996b. *A idéia de Auto-Organização*. In: **Debrun, M.; Gonzales, M.E.Q.; Pessoa Jr, O. (orgs.) 1996**, pp. 3-23.

1996c. *A Dinâmica da Auto-Organização Primária*. In: **Debrun, M.; Gonzales, M.E.Q.; Pessoa Jr, O. (orgs.) 1996**, pp. 25-59.

DEBRUN, Michel; GONZALES, Maria E.Q.; PESSOA JR., Oswaldo (orgs.)

1996. **Auto-Organização: Estudos Interdisciplinares em Filosofia, Ciências Naturais e Humanas e Artes**. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. *xliii*-455 p. (Coleção CLE, vol. 18).

D'OTTAVIANO, Ítala M.L.; GONZALES, Maria E. Q. (orgs.)

2000. **Auto-Organização**. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. (Coleção CLE, vol. 30).

DUMMET, Michael

1979[1963]. *O Significado Filosófico do Teorema de Gödel*. In: **Lourenço 1979**, pp. 867-887. Tradução integral de Manuel Lourenço de *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*, **Ratio**, Vol. 5, Dezembro 1963, n. 2, pp. 140-155.

DUPUY, Jean-Pierre

1982. **Ordres et Désordres**. Paris: Seuil.

1994. **Nas Origens das Ciências Cognitivas.** São Paulo: Edunesp, 1996. Tradução integral de Roberto Leal Ferreira do original **Aux origines des sciences cognitives.** Paris: Èditions Découverte, 1994.

EPSTEIN, Richard L. & CARNIELLI, Walter Alexandre

1989. **Computability: Computable Functions, Logic, and Foundations of Mathematics**. California: Wadsworth & Brooks/ Cole Advanced Books & Software.

GENTZEN, Gerhard

1936. *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, **Mathematischen Annalen**, Vol. 112, 1936. pp. 493-565.

GÖDEL, Kurt

1979[1931]. *Acerca de Proposições Formalmente Indecidíveis nos Principia Mathematica e Sistemas Relacionados*. In: Lourenço 1979, pp. 245-290.

1979[1934] *Acerca de Proposições Indecidíveis de Sistemas Matemáticos Formais*. In: Lourenço 1979, pp. 291-357. Tradução integral de Manuel Lourenço de *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*. In: **Davis 1965**, pp. 39-74.

1986/1995. **Collected Works: vol. I – Publications 1929-1936**, 1986; **vol. II – Publications 1938-1974**, 1990; **vol. III – Unpublished Essays and Lectures**, 1995. New York: Oxford University Press.

GRAMSCI, A.

1975[1929/35]. **Quaderni del Carcere**. 4 vols. Turim: G. Einaudi.

KAYE, Richard

1991. **Models of Peano Arithmetic**. 1. ed. New York: Oxford University Press. *x*-292 p. (Oxford Logical Guides 15).

KLEENE, Stephen C.

1936. *General Recursive Functions of Natural Numbers*. **Mathematischen Annalen**, vol. 112, 1936. pp. 727-742. Reimpresso em Davis 1965.

1952. **Introduction to Metamathematics**. Princeton: Van Nostrand. 550 p.

LOURENÇO, Manuel (org.)

1979. **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo.** Antologia organizada, prefaciada e traduzida por Manuel Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. *xciv*-900 p.

LUCAS, John R.

1961 *Minds, Machines and Gödel*. **Philosophy**, XXXVI, pp.112-127; reimpresso em Sayre, Kenneth M. & Crosson, Frederick J. (eds), **The Modeling of Mind**, Notre Dame Press, 1963, pp. 269-270 e em Anderson, Alan R., **Minds and Machines**, Prentice-Hall, 1954, pp.43-59. Agora no site do autor: http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/ index.html.

1996 *The Gödelian Argument: Turn Over the Page*. Palestra de 25/05/96 na Conferência da BSPS em Oxford. Agora no site do autor: http://users.ox.ac.uk/ ~jrlucas/index.html.

MARKOV, A. A.

1954 **Theory of Algorithms**. Tr. Mat. Inst. Steklov. XLII. English translation, Israel Program for Scientific Translations Ltd., Jerusalem, 1971. Tradução: Office of Technical Services, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1962.

MATURANA, Humberto & VARELA, Francisco

1980. **Autopoiesis and Cognition: The Realization of the Living**. Boston: Reidel. (Boston Studies in the Philosophy of Science 42).

MENDELSON, Elliott

1964 **Introduction to Mathematical Logic**. 2. ed. (1965) Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company. Inc. 300 p.

2001[1964]. **Introduction to Mathematical Logic**. 5. ed. (acrescida) Chapman & Hall. *x*-440 p.

MORIN, Edgar

1987/1992[1977/1991]. **O Método**: vol. I – **A Natureza da Natureza**, 1987; vol. II – **A Vida da Vida**, 1987; vol. III – **O Conhecimento do Conhecimento**, 1987; vol. IV – **As Idéias**: A Sua Natureza, Vida, Habitat e Organização, 1992. Lisboa: Europa-América. Tradução de **La Méthode**: I. **La Nature de la Nature**, 1977; II: **La Vie de la Vie**, 1980; III: **La Connaissance de la Connaissance**, 1986; IV: **Les Idées - leur Habitat, leur Vie, leurs Moeurs, leur Organization**, 1991. Paris: Seuil.

1990. **Introdução ao Pensamento Complexo**. Lisboa : Instituto Piaget.

PENROSE, Roger

1989. **The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and Laws of Physics**. Oxford: Oxford University Press.

1990 In: **Journal of Behavioral and Brain Sciences**, 13:4, 1990, p. 693. Citado por

Lucas 1996.

1995. **Shadows of the Mind: a Search for the Missing Science of Consciousness**. Oxford: Oxford University Press.

POST, Emil

1936 *Finite Combinatory Processes – Formulation I.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 1, 1936. pp.103-105. Reimpresso em Davis 1965, pp. 288-291.

PRIGOGINE, Ilya & STENGERS, Isabelle

1979. **A Nova Aliança: A Metamorfose da Ciência**. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1984. Tradução de **La Nouvelle Alliance: Metamorphose de la Science.** Paris: Gallimard, 1979.

ROBIN, Joel W.

1969. **Mathematical Logic: a First Course**. New York: W. A. Benjamin, Inc.

ROSSER, J. B.

1936 *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church*. **Journal of Symbolic Logic**, vol. 1, 1936. pp.87-91. Reimpresso em Davis 1965, pp. 231-235.

SCHÜTTE, K.

1951. *Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie*, **Mathematischen Annalen**, Vol. 122, 1951. pp. 369-389.

SHOENFIELD, Joseph R.

1967. **Mathematical Logic.** Addison-Wesley. *viii*-344 p. (Addison-Wesley Series in Logic).

SMULLYAN, Raymond M.

1992. **Gödel's Incompleteness Theorems**. New York: Oxford University Press. *xiii*-139 p. (Oxford Logical Guides 19).

STENGERS, Isabelle

1985. *Les Généalogies de l'Auto-Organization*. **Cahiers du CRÉA**, n. 8, Nov. de 1985.

TARSKI, Alfred

1956. **Logic, Semantics, Metamathematics**. Oxford: Claredon Press.

TURING, Alan M.

1936. *On Computable Numbers, with Application to the Entscheidungsproblem*. **Proceedings of the London Mathematical Society**, ser. 2, vol. 42, 1936-7, pp. 230-265; corrections, ibid, vol. 43, 1937, pp.544-546. Reimpresso em Davis 1965, pp. 115-153.

VAN BENTHEM, Johan & DOETS, Kees

1983. *Higher-Order Logic*. In: D. Gabbay & F. Guenthner (eds.), **Handbook of Philosophical Logic**, v. 1. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1983. pp. 275-329.

VON FOERSTER, Heinz

1960. *On Self-Organizing Systems and their Environments*. In: M. C. Yovits & S. Cameron (org.), **Self-Organizing Systems**. Oxford: Pergamon, pp. 31-50 (reimpresso em von Foerster, H., **Observing Systems**, Seaside: Intersystems, 1984, pp. 2-22).

WADDINGTON, Conrad Hal

1977. **Instrumental para o Pensamento**. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia; São Paulo: Edusp, 242 pp., 1979. Tradução integral de Borisas Cimbleris do original inglês **Tools for Thought**. Lodon: Jonathan Cape Ltd', 1977.