Frank Thomas Sautter

Definições de Conjunto Finito

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação do Prof. Dr. Luiz Paulo de Alcântara.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 02/10/95.

Banca:

Prof. Dr. Luiz Paulo de Alcântara
Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli
Prof. Dr. Carlos Gustavo González

outubro de 1995

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP**

Sautter, Frank Thomas

Sa88d **Definições de conjunto finito / Frank Thomas Sautter. -- Campinas, SP: [s.n.], 1995.**

Orientador: Luiz Paulo de Alcântara.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica simbólica e matemática. 2. Teoria axiomática dos conjuntos. I. Alcântara, Luiz Paulo de, 1944- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Dedico esta dissertação
à minha esposa Cláudia
e ao meu filho Rubens.

SUMÁRIO

RESUMO v

ABSTRACT vi

INTRODUÇÃO 01

1 QUESTÕES HISTÓRICO-CONCEITUAIS 03

1.1 DEFINIÇÃO DE BOLZANO 05

1.2 DEFINIÇÕES DE DEDEKIND 06

1.3 DEFINIÇÃO DE CANTOR 06

1.4 DEFINIÇÃO DE RUSSELL 08

1.5 DEFINIÇÃO DE TARSKI 13

2 DEFINIÇÃO DE ZERMELO 18

3 SEGUNDA DEFINIÇÃO DE DEDEKIND 36

4 DEFINIÇÃO DE ALARCÓN ATHENS 45

5 QUESTÕES DA METAMATEMÁTICA 57

5.1 A CONSISTÊNCIA DA TEORIA DE CONJUNTOS FINITOS 57

5.2 A CRÍTICA DE VON NEUMANN 63

CONCLUSÃO 67

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 69

RESUMO

Analisamos as definições de conjunto finito de Dedekind (1893), de Zermelo (1908) e de Alarcón Athens (1987). A partir destas definições, formulamos e demonstramos diversos princípios de indução matemática para conjuntos finitos. Obtivemos uma nova definição de conjunto finito: um conjunto C é finito se e somente se o conjunto vazio pertence a toda família não-vazia F de subconjuntos de C tal que para todo conjunto não-vazio $D \in F$ existe um *único* conjunto $E \in F$ onde $E = D - \{d\}$ para algum $d \in D$. Demonstramos que, na axiomática de Zermelo-Fraenkel sem o axioma da escolha, esta definição é formalmente equivalente ao axioma de Dedekind, segundo o qual todo conjunto infinito, no sentido aritmético usual, tem subconjunto enumerável.

ABSTRACT

We analize Dedekind's (1893), Zermelo's (1908) and Alarcón Athens' (1987) definitions of finite sets. From these definitions we formulate and prove some mathematical induction principles for finite sets. We obtain a new definition of finite sets: a set C is finite if and only if the empty set belongs to every non-empty family F of subsets of C, such that for every non-empty set $D \in F$ there exists *exactly one* set $E \in F$ such that $E = D - \{d\}$ for some $d \in D$. We prove that, in Zermelo-Fraenkel axiomatics without the choice axiom, this definition is formally equivalent to Dedekind's axiom, which says that every infinite set, in the ordinary sense, has an enumerable subset.

INTRODUÇÃO

> ...eu te digo: devemos filosofar somente com os meios legítimos, os próprios meios da filosofia. O nosso jogo não é filosofia e não é religião, é uma disciplina especial; no seu caráter assemelha-se à arte, é uma arte *sui generis*.
>
> Hermann Hesse em *Das Glasperlenspiel*

A noção intuitiva de finitude é utilizada, na filosofia e na matemática, de maneira fundamental em diversas ocasiões. Ela é empregada, por exemplo, para estabelecer a noção de demonstração formal e para argumentar a favor da existência de Deus. Esta utilização é, de um ponto-de-vista puramente formal, problemática porque, sabe-se, existem distintas definições formais de finitude (definições de conjunto finito) cuja equivalência formal depende dos recursos disponíveis na teoria. Propusemo-nos, neste trabalho, a explorar algumas destas definições de conjunto finito, visando contribuir para o esclarecimento da relação entre definições formais de conjunto finito e *a* noção intuitiva de finitude.

Entre as diversas definições de conjunto finito disponíveis na literatura, selecionamos algumas que se encontram em publicações de difícil acesso. Evitamos definições para as quais é necessária a utilização de métodos de independência de resultados.

Este trabalho compreende os seguintes tópicos:

- Questões histórico-conceituais (primeiro capítulo): revisamos algumas definições de conjunto finito disponíveis na literatura (definições de Dedekind, de Russell e de Tarski), baseando-nos em TARSKI (1924), o principal trabalho na área. Também examinamos as contribuições de Bolzano e de Cantor.
- Definições de conjunto finito, segundo Zermelo, Dedekind e Alarcón Athens (capítulos dois a quatro): demonstramos diversos resultados vinculados a estas definições e suas variantes, muitos deles de autoria própria. Em particular, formulamos e utilizamos diversos princípios de indução matemática para conjuntos finitos (grosso modo, estes princípios podem ser divididos em dois grupos: princípios internos, pelos quais a indução

é aplicada aos elementos de um conjunto finito, e princípios externos, pelos quais a indução é aplicada aos próprios conjuntos finitos).

- Demonstração da consistência da teoria de conjuntos finitos relativamente à teoria pura de números, utilizando a teoria de funções primitivas recursivas (quinto capítulo).
- Crítica de von Neumann (quinto capítulo): analisamos trechos de VON NEUMANN (1925) nos quais, baseando-se em considerações semânticas a respeito de definições de conjunto finito, o autor critica o intuicionismo de Brouwer e o formalismo de Hilbert.

Efetuamos, de acordo com o nosso conhecimento do assunto, as seguintes contribuições originais:

- Definição de conjunto finito, segundo González: a partir de uma sugestão do dr. Carlos Gustavo González, obtivemos uma nova definição de conjunto finito (definição 4.8), que demonstramos ser formalmente equivalente à definição de conjunto não-reflexivo de Dedekind (definição 1.2.1).
- Nova demonstração da consistência da teoria de conjuntos finitos relativamente à teoria pura de números: acrescentamos à teoria geral de conjuntos (axiomática de Zermelo-Fraenkel excluído o axioma do infinito) um axioma postulando a existência tão somente de conjuntos finitos, no sentido de Tarski (definição 1.5.2) e demonstramos a consistência desta teoria relativamente à teoria pura de números, baseando-nos em uma demonstração de ACKERMANN (1937). Nossa demonstração utiliza somente funções primitivas recursivas!

Além disto, os seguintes teoremas, ao que nos consta, ocorrem pela primeira vez na literatura: 1.4.2, 3.15, 4.5 e 4.6.

1 QUESTÕES HISTÓRICO-CONCEITUAIS

Examinaremos, neste capítulo, algumas questões conceituais de caráter geral e forneceremos um breve histórico do desenvolvimento da teoria de conjuntos finitos no período compreendido entre 1851 e 1925, contendo os elementos necessários aos demais capítulos.

A primeira e principal questão apresenta-se na seguinte forma: qual é o domínio do conhecimento no qual podemos legitimamente abordar o infinito e, por conseguinte, o finito? A este respeito, BOLZANO (1851) observa que:

> Es handelt sich also nur noch darum, ob wir durch eine blosse Erklärung dessen, was eine unendliche Vielheit heisse, imstande sein werden, zu bestimmen, was ein Unendliches überhaupt sei. So wäre es, falls es sich zeigen sollte, es gebe streng genommen nichts anderes, als eben nur Vielheiten, auf welche der Begriff des Unendlichen in seiner eigentlichen Bedeutung angewandt werde, d. h. wenn es sich zeigen sollte, dass die Unendlichkeit eigentlich nur eine Beschaffenheit von Vielheiten ist, oder dass wir alles; was wir für unendlich erklären, nur darum so nennen, weil und inwiefern wir daran eine Beschaffenheit gewahren, die sich als eine unendliche Vielheit ansehen lässt. Das ist nun, däucht mir, wirklich[1].

Hahn, em nota da edição de 1921 de (BOLZANO, 1851) expressa-se do seguinte modo:

> Man könnte hieraus entnehmen, dass Bolzano alles das als ein Unendliches überhaupt ansehen will, was sich als unendliche Menge betrachten lässt[2].

Esta delimitação do emprego da noção de *infinito* nos parece adequada, embora seja comum encontrar na literatura, filosófica e matemática, opiniões contrárias a esta restrição.

---

[1] Portanto trata-se ainda somente se, através de uma mera explicação do que significa uma multitude infinita, seríamos capazes de definir o que é, em geral, um infinito. Assim seria, caso pudesse mostrar-se que, a rigor, nada mais há do que justamente somente multitudes, nas quais o conceito de infinito em seu significado próprio pudesse ser empregado, quer dizer, caso pudesse mostrar-se que o infinito é, na verdade, somente uma propriedade de multitudes, ou que tudo o que qualificamos de infinito, somente o designamos assim porque e à medida que nisto percebemos uma propriedade que se deixa considerar como multitude infinita. Pois bem, isto é, parece-me, um fato.

[2] Daqui poderíamos deduzir que Bolzano quer considerar como infinito tudo aquilo que, em geral, deixa-se considerar como conjunto infinito.

Adotaremos o princípio segundo o qual todo conjunto ou é finito ou é infinito, segundo as diversas definições de conjunto finito examinadas neste trabalho. Esta questão não é trivial. Em face da inequivalência formal, na ausência do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, de diversas definições de conjunto finito, poderíamos dividir os conjuntos em finitos, infinitos e 'medianos' (para utilizar uma expressão de Whitehead e Russell. Consulte (MOORE, 1982)). Conjuntos 'medianos' seriam aqueles conjuntos infinitos, no sentido aritmético usual (consulte definição 1.0.1), porém finitos, segundo outras definições.

Em discussões filosóficas ocorre, com certa freqüência, a distinção entre definição positiva e definição negativa. Grosso modo, uma definição positiva determina as notas que um objeto deve ter para que tenha certa propriedade, enquanto que uma definição negativa determina as notas que um objeto *não* deve ter para que tenha certa propriedade. A definição de conjunto finito, no sentido aritmético usual (consulte definição 1.0.1), é positiva; enquanto que a definição de conjunto D_1-finito (consulte definição 1.2.1), é negativa. Relacionada a esta questão, encontra-se a questão da prioridade de definições de conjunto finito sobre as de conjunto infinito ou as de conjunto infinito sobre as de conjunto finito, e a prioridade de definições positivas sobre negativas ou de negativas sobre positivas. Descartes, por exemplo, utiliza a alegada prioridade de (seres) infinitos sobre (seres) finitos para argumentar em favor da existência de Deus (consulte (FRIEDMAN, 1972)). Ambas as questões não têm relevância para os nossos propósitos neste trabalho e, portanto, não serão desenvolvidas.

Ao longo do trabalho é utilizada a seguinte definição aritmética de conjunto finito, usualmente empregada como *a* definição de conjunto finito:

Definição 1.0.1 (Conjunto Finito, no Sentido Aritmético Usual) Um conjunto C é finito, no sentido aritmético usual, se e somente se existe uma correspondência biunívoca entre C e um segmento inicial da série dos números naturais, em sua ordem habitual.

Ao nos referirmos a um conjunto finito, no sentido aritmético usual, denominá-lo-emos simplesmente conjunto finito.

1.1 Definição de Bolzano

BOLZANO (1851) fornece a seguinte 'definição' de conjunto[3] infinito:

> ..., werde ich eine Vielheit, die grösser als jede endliche ist, d. h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, dass jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt, eine unendliche Vielheit nennen[4].

A respeito desta definição, Hahn, em nota da edição de 1921 de (BOLZANO, 1851), expressa-se do seguinte modo:

> ... ist die Bestimmung der unendlichen Vielheit ungenau. Sogar für unendliche Mengen (Vielheiten) gibt es endliche Mengen, welche nicht in ihnen enthalten sind. Es soll heissen, dass jede endliche *Teil*menge nur einen echten Teil der unendlichen Menge darstellt, also nicht jede endliche Menge überhaupt. Wenn man alle endlichen Mengen in Betracht ziehen will, so muss man auch den Begriff der eineindeutigen Abbildung, d. h. Äquivalenz heranziehen[5].

---

[3] Bolzano utiliza diversos termos para referir-se a conjuntos. O mais primitivo destes termos é *Inbegriff*, que poderíamos traduzir por *coleção* e que designa um objeto complexo composto por elementos e partes (Bolzano utiliza indistintamente o termo *Teil* para referir-se tanto a elementos quanto a partes, embora diferencie, corretamente, um de outro). O termo *Menge*, que poderíamos traduzir por *conjunto* é uma coleção considerada unicamente do ponto-de-vista da multiplicidade de seus elementos, quer dizer, abstraindo-a das relações existentes entre estes elementos. Conjuntos obedecem ao princípio de extensionalidade, quer dizer, são determinados unicamente por seus elementos, e obedecem ao princípio de compreensão, isto é, toda propriedade define um conjunto. O termo *Vielheiten*, que poderíamos traduzir por *multitude* é um conjunto de indivíduos de certa espécie. Bolzano utiliza, na maioria das vezes, conjunto e multitude com a mesma acepção (consulte (SEBESTIK, 1990)).

[4] ..., nomearei multitude infinita a uma multitude maior do que toda multitude finita, quer dizer, a uma multitude fornecida de tal modo que todo conjunto finito constitui somente uma parte dela.

[5] ..., a determinação de multitude infinita é imprecisa. Mesmo para conjuntos (multitudes) infinitos há conjuntos finitos que não estão contidos neles. Deve-se dizer que todo *sub*conjunto finito constitui somente uma parte própria do conjunto infinito, portanto, em geral, nem todo conjunto finito. Se quisermos tomar em consideração todos os conjuntos finitos, então devemos também recorrer ao conceito de correspondência biunívoca, quer dizer, de equivalência.

1.2 Definições de Dedekind

DEDEKIND (1888) fornece a seguinte definição de conjunto infinito: seja C um conjunto. C é infinito se e somente se existe uma correspondência biunívoca entre C e um subconjunto próprio de C. Portanto, tem-se a seguinte definição de conjunto finito:

Definição 1.2.1 (Conjunto Finito, no Sentido de Dedekind) Seja C um conjunto. C é D_1-finito se e somente se para todo subconjunto próprio D de C não existe correspondência biunívoca entre C e D.

No prefácio à segunda edição de (DEDEKIND, 1888), Dedekind sugere a seguinte definição de conjunto finito:

Definição 1.2.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Dedekind) Seja C um conjunto. C é D_2-finito se e somente se existe uma função φ: $C \rightarrow D$ tal que $D \subseteq C$ e se $\varnothing \neq E \subseteq C$ e $\varphi[E] \subseteq E$ então $E = C$.

Examinaremos esta definição em maiores detalhes no terceiro capítulo.

1.3 Definição de Cantor

Cantor, em inúmeras ocasiões, destacou características que diferenciam os conjuntos finitos dos conjuntos infinitos, sem contudo fixar nenhuma delas como definição de conjunto finito. Em (CANTOR, 1878) ele expressa-se do seguinte modo:

> Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den *unendlichen*,...[6]

[6] Uma parte de uma multitude finita tem sempre uma potência menor que a da multitude mesmo; esta relação cessa inteiramente com os *infinitos*, ...

Em (CANTOR, 1885) ele expressa-se do seguinte modo:

> Bei *endlichen* Mengen fallen die beiden Momente "Mächtigkeit" und "Anzahl" gewissermassen zusammen, weil eine endliche Menge in jeder Anordnung ihrer Elemente als "wohlgeordnete Menge" eine und dieselbe Ordnungszahl hat; dagegen tritt bei *unendlichen* Mengen der Unterschied von "Mächtigkeit" und "Ordnungszahl" aufs stärkste zutage, ...[7]

Somente em (CANTOR, 1887) ele, ao considerar a definição de conjunto D_1-finito um teorema, utiliza, para demonstrá-lo, a seguinte definição:

> Unter einer *endlichen* Menge verstehen wir eine solche M, welche aus *einem* ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, dass auch *rückwärts* aus M *durch sukzessive* Entfernung der Elemente *in umgekehrter Ordnung* das ursprüngliche Element gewonnen werden kann[8].

O teorema é demonstrado com o auxílio do seguinte *procedimento de indução completa* (*vollständiges Induktionsverfahren*):

Teorema 1.3.1 Se o conjunto C não é equivalente a nenhum de seus subconjuntos próprios, então o conjunto $C \cup \{c\}$, para $c \notin C$, não é equivalente a nenhum de seus subconjuntos próprios.

Demonstração:

Seja D um subconjunto próprio de $C \cup \{c\}$, para $c \notin C$. Se $c \in D$ então $D = E \cup \{c\}$ para algum $E \subset C$. Supor, por absurdo, que D é equivalente a $C \cup \{c\}$. Seja φ uma correspondência biunívoca entre D e $C \cup \{c\}$. Se $\varphi(c) = c$ então $\psi = \varphi - \{<c,c>\}$ é uma correspondência biunívoca entre E e C, absurdo. Se $\varphi(c) \neq c$ então $\psi = (\varphi - \{<c, \varphi(c)>, <\varphi^{-1}(c),c>\}) \cup \{<\varphi^{-1}(c),\varphi(c)>\}$ é uma correspondência biunívoca entre E e C, absurdo.

[7] Entre conjuntos *finitos* os dois fatores "número cardinal" e "número ordinal" caem, de certo modo, juntos, porque um conjunto finito tem o mesmo número ordinal, qualquer que seja o arranjo de seus elementos como "conjunto bem-ordenado"; ao contrário entre conjuntos *infinitos* a diferença entre "número cardinal" e "número ordinal" é muito evidente, ...

[8] Entendemos por um conjunto *finito* todo M, resultante de *um* elemento primitivo através de sucessivos acréscimos de novos elementos do conjunto, tal que, também *para trás*, o elemento primitivo pode ser obtido de M *através de sucessivas* retiradas dos elementos *em ordem inversa*.

Portanto, se $c \in$ D então D não é equivalente a C $\cup$ $\{c\}$. Se $c \notin$ D então D $\subseteq$ C. Supor, por absurdo, que D é equivalente a C $\cup$ $\{c\}$. Seja φ uma correspondência biunívoca entre D e C $\cup$ $\{c\}$. $\psi = \varphi - \{<\varphi^{-1}(c),c>\}$ é uma correspondência biunívoca entre D - $\varphi^{-1}(c) \subset$ C e C, absurdo. Portanto, se $c \notin$ D então D não é equivalente a C $\cup$ $\{c\}$.□

Na seqüência, Cantor afirma que o teorema (a definição de Dedekind) é evidente para conjuntos constituídos por dois elementos e, em virtude do teorema 1.3.1, é verdadeiro para *todos os conjuntos finitos*, quer dizer, é uma característica *inteiramente essencial* dos conjuntos finitos que não possam ser equivalentes a *nenhum de seus subconjuntos próprios*, ao contrário de conjuntos infinitos que *sempre* são equivalentes a pelo menos um subconjunto próprio. Portanto, Cantor utiliza o princípio de indução matemática, embora não demonstre que conjuntos finitos, segundo sua definição, obedeçam a este princípio.

FREGE (1892), ao resenhar o artigo de Cantor, verifica que, na definição de conjunto finito, o autor não delimita precisamente quais os obstáculos, que devem contar como obstáculos, na obtenção do elemento primitivo a partir do conjunto, utilizando a ordem inversa. Ele acusa Cantor porque este, aparentemente, inclui elementos psicológicos na sua definição. Por exemplo, não está explicitado se a expressão *sucessivos* está vinculada ou não à temporalidade. Frege lamenta a falta de cuidados de Cantor e acrescenta que na sua *Begriffsschrift* obteve uma definição da noção de sucessão totalmente desvinculada da temporalidade. Frege observa que a sua própria definição de número natural é muito próxima da de conjunto finito, no sentido de Cantor.

1.4 Definição de Russell

WHITEHEAD e RUSSELL (1913) demonstram um teorema cujo enunciado, observam, pode ser utilizado como definição de conjunto finito. TARSKI (1924) transcreve a definição do seguinte modo (WHITEHEAD e RUSSELL (1913) desenvolvem uma teoria de tipos e, portanto, é necessária uma adaptação do enunciado à linguagem da teoria de conjuntos):

Definição 1.4.1 (Família Indutiva de um Conjunto) Seja C um conjunto e D uma família de conjuntos. D é uma família indutiva de C se e somente se $\varnothing \in$ D e se $d \in$ D e $c \in$ C então $d \cup \{c\} \in$ D.

Definição 1.4.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Russell, Segundo Tarski) Um conjunto C é R_1-finito se e somente se C pertence a toda família indutiva de C.

LEVY (1979) desenvolve uma teoria de conjuntos finitos utilizando uma definição um pouco diferente de conjunto finito, porém remetendo-a ao trabalho de WHITEHEAD e RUSSELL (1913):

Definição 1.4.3 (Conjunto Finito, no Sentido de Russell, Segundo Levy) Um conjunto C é R_2-finito se e somente se C pertence a toda família indutiva de *subconjuntos* de C.

Demonstramos a equivalência formal destas duas definições, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha.

Teorema 1.4.1 Seja C um conjunto. C pertence a toda família indutiva de C se e somente se C pertence a toda família indutiva de subconjuntos de C.

Demonstração:

Seja D uma família indutiva de subconjuntos de C. Neste caso D é uma família indutiva de C e, por hipótese, C $\in$ D.

Seja D uma família indutiva de C. Considere a seguinte família de conjuntos: E = $\{d \in$ D; $d \subseteq$ C$\}$. $\varnothing \in$ E porque $\varnothing \in$ D e $\varnothing \subseteq$ C, qualquer que seja C. Seja F $\in$ E e $c \in$ C. F $\in$ E portanto F $\in$ D e F $\subseteq$ C. Segue-se, de F $\in$ D e de $c \in$ C, que F $\cup \{c\} \in$ D. Disto e de F $\cup \{c\} \subseteq$ C segue-se que F $\cup \{c\} \in$ E. Portanto E é uma família indutiva de subconjuntos de C e, por hipótese, C $\in$ E, quer dizer, C $\in$ D. □

Embora formalmente equivalente à primeira definição, a segunda definição é preferível do ponto-de-vista prático porque, segundo ela, precisamos examinar tão somente conjuntos de subconjuntos de um dado conjunto para determinar se ele é R_2-finito ou não. Na primeira definição não dispomos de tal facilidade.

PARSONS (1987) fornece uma terceira definição de conjunto finito, que alega ser de WHITEHEAD e RUSSELL (1913):

Definição 1.4.4 (Conjunto Finito, no Sentido de Russell, Segundo Parsons) Um conjunto C é R_3-finito se e somente se toda família indutiva de subconjuntos de C é idêntica ao conjunto das partes de C.

Demonstramos a equivalência formal desta definição e da segunda definição, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, porém utilizando um princípio de indução matemática para conjuntos finitos, segundo o qual: se uma dada propriedade é satisfeita pelo conjunto vazio e sendo satisfeita por um conjunto finito C também é satisfeita por $C \cup \{c\}$ onde $c \notin C$, então a propriedade é satisfeita por todos os conjuntos finitos. TARSKI (1924) demonstra que conjuntos finitos, segundo a definição 1.4.2, obedecem a este princípio. Segue-se, face ao resultado do teorema 1.4.1, que este princípio pode ser legitimamente utilizado no seguinte teorema:

Teorema 1.4.2 Seja C um conjunto. Toda família indutiva de subconjuntos de C é idêntica ao conjunto das partes de C se e somente se C pertence a toda família indutiva de subconjuntos de C.

Demonstração:

Seja D uma família indutiva de subconjuntos de C. Por hipótese, $D = \wp(C)$ e, em particular, $C \in D$.

Demonstramos a condição de suficiência aplicando o princípio de indução matemática para conjuntos finitos, em C.

(Base indutiva) Seja $C = \varnothing$. Neste caso a única família indutiva de subconjuntos de C é $\{\varnothing\}$. Porém $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

(Passo indutivo) Seja $C = E \cup \{e\}$ para $e \notin E$ e D uma família indutiva de subconjuntos de C. Considere a seguinte família de conjuntos: $F = \{g - \{e\}; g \in D\}$. Tem-se que:

- $F \subseteq \wp(E)$. Seja $f \in F$. Neste caso $f = g - \{e\}$ para algum $g \in D$. Porém $D \subseteq \wp(E \cup \{e\})$, portanto $g \in \wp(E \cup \{e\})$ e $f \in \wp(E)$.
- $\varnothing \in F$ porque $\varnothing \in D$.
- Seja $f \in F$ e $c \in E$. $f \in F$ portanto $f = g - \{e\}$ para algum $g \in D$. $c \in E$ portanto $c \in C$. Tem-se, de $g \in D$ e de $c \in C$, que $g \cup \{c\} \in D$ e, por definição de F, $(g \cup \{c\}) - \{e\} \in F$, quer dizer, $f \cup \{c\} = (g - \{e\}) \cup \{c\} = (g \cup \{c\}) - \{e\} \in F$ porque $c \neq e$.

Portanto F é uma família indutiva de subconjuntos de E.

Demonstraremos que E pertence a toda família indutiva de subconjuntos de E. Segue-se, da hipótese indutiva, que toda família indutiva de subconjuntos de E é idêntica a $\wp(E)$ e, do fato de F ser uma família indutiva de subconjuntos de E, tem-se que $F = \wp(E)$.

Seja H uma família indutiva de subconjuntos de E. Considere a seguinte família de conjuntos: $I = \{j \cup \{e\}; j \in H\}$. Tem-se que:

- $H \cup I \subseteq \wp(C)$. Seja $k \in H \cup I$. $k \in H$ ou $k \in I$. Se $k \in H$ então $k \in \wp(E)$ e, portanto, $k \in \wp(C)$. Se $k \in I$ então $k = l \cup \{e\}$ para algum $l \in H$, quer dizer, $k = l \cup \{e\}$ para algum $l \in \wp(E)$ e, portanto, $k \in \wp(C)$.
- $\varnothing \in H \cup I$ porque, por hipótese, $\varnothing \in H$.
- Seja $m \in H \cup I$ e $c \in C$. $m \in H \cup I$ portanto $m \in H$ ou $m \in I$. Se $m \in H$ e $c = e$ então $m \cup \{c\} \in I$ e, portanto, $m \cup \{c\} \in H \cup I$. Se $m \in H$ e $c \neq e$ então $m \cup \{c\} \in H$ e, portanto, $m \cup \{c\} \in H \cup I$. Se $m \in I$ então $m = n \cup \{e\}$ para algum $n \in H$. Se $c = e$ então $m \cup \{c\} = m \in I$ e, portanto, $m \cup \{c\} \in H \cup I$. Se $c \neq e$ então $n \cup \{c\} \in H$ e $(n \cup \{c\}) \cup \{e\} = (n \cup \{e\}) \cup \{c\} = m \cup \{c\} \in I$ e, portanto, $m \cup \{c\} \in H \cup I$.

Portanto $H \cup I$ é uma família indutiva de subconjuntos de C e, por hipótese, $C \in H \cup I$, quer dizer, $E \cup \{e\} \in I$ e, por definição de I, $E \in H$.

Seja $d \in \wp(E \cup \{e\})$. Se $e \notin d$ então $d \in \wp(E) = F$ e, por definição de F, $d \in D$. Se $e \in d$ então $d - \{e\} \in \wp(E) = F$ e, por definição de F, $d \in D$. Portanto $\wp(E \cup \{e\}) \subseteq D$. □

WHITEHEAD e RUSSELL (1913) efetuam uma distinção entre dois métodos de classificar conjuntos: um método classifica conjuntos em conjuntos indutivos e conjuntos não-indutivos, e o outro método classifica conjuntos em conjuntos não-reflexivos e conjuntos reflexivos. Grosso modo, um conjunto é indutivo quando pode ser obtido do conjunto vazio através de sucessivos acréscimos unitários de elementos. A denominação *conjunto indutivo* advém do fato de que podemos demonstrar propriedades destes conjuntos utilizando o princípio de indução matemática para conjuntos finitos. A própria definição de Russell de conjunto finito, bem como todas as definições formalmente equivalentes a ela, desde que nestas demonstrações de equivalência formal não seja necessário o axioma da escolha ou alguma forma fraca do axioma da escolha, são exemplos de métodos para classificar conjuntos em conjuntos indutivos e conjuntos não-indutivos. Grosso modo, um conjunto é reflexivo quando existe uma correspondência biunívoca entre ele e um subconjunto próprio (esta é a definição de conjunto D_1-infinito. Consulte definição 1.2.1). A denominação *conjunto reflexivo* advém do fato de que tais conjuntos 'refletem' em uma parte própria de si mesmos. A definição de conjunto D_1-finito, bem como todas as definições a ela formalmente equivalentes, desde que em tais demonstrações de equivalência formal não seja necessário o axioma da escolha ou alguma forma fraca do axioma da escolha, são exemplos de métodos para classificar conjuntos em conjuntos não-reflexivos e conjuntos reflexivos. WHITEHEAD e RUSSELL (1913) demonstram sem maiores dificuldades que todo conjunto reflexivo é não-indutivo, porém afirmam que só é possível demonstrar a recíproca, isto é, que todo conjunto não-indutivo é reflexivo utilizando o axioma multiplicativo (axioma da escolha). A rigor, afirmam que uma forma fraca do axioma da escolha é suficiente: o axioma da escolha enumerável, segundo o qual toda família enumerável de conjuntos tem uma função de escolha.

1.5 Definição de Tarski

TARSKI (1924) é o tratamento mais completo e sistemático da teoria de conjuntos finitos. Nele, Tarski faz uma revisão das definições de conjunto finito formuladas até aquela data (definições de Dedekind, de Russell, de Sierpinskî, de Kuratowski, de Stäckel e de Zermelo) e formula uma definição própria de conjunto finito, do seguinte modo:

Definição 1.5.1 (Elemento Irredutível de uma Família de Conjuntos) Seja F uma família de conjuntos e C um conjunto pertencente a F. C é um elemento irredutível de F se e somente se se $D \subseteq C$ e $D \in F$ então $D = C$, quer dizer, nenhum subconjunto próprio de C pertence a F.

Definição 1.5.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Tarski) Um conjunto C é T_1-finito se e somente se toda família não-vazia de subconjuntos de C admite um elemento irredutível.

Tarski observa que esta definição é formalmente equivalente, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, à seguinte definição:

Definição 1.5.3 (Variante da Definição 1.5.2) Um conjunto C é T_2-finito se e somente se toda família de conjuntos, à qual C pertence, admite um elemento irredutível.

Demonstraremos a equivalência formal destas definições:

ília não-vazia de subconjuntos de C admite um elemento irredutível

família de conjuntos, à qual C pertence, admite um elemento

Seja F uma família de conjuntos tal que $C \in F$. Considere a família de conjuntos $G = \{D \in F; D \subseteq C\}$. $G \neq \emptyset$ porque, por hipótese, $C \in F$. Disto e do fato de $G \subseteq \wp(C)$ segue-se que existe $H \in G$ tal que H é elemento irredutível de G, quer dizer, se $I \subseteq H$ e $I \in G$ então $I = H$. Seja $J \in F$ tal que $J \subseteq H$. Neste caso $J \subseteq C$ porque $H \in G$, isto é, $H \subseteq C$. Tem-se, de $J \in F$ e $J \subseteq C$, que $J \in G$. Segue-se, de $J \in G$ e $J \subseteq H$, que $J = H$, porque H é elemento irredutível de G. Portanto H é elemento irredutível de F.

Seja F uma família não-vazia de subconjuntos de C. Se $C \in F$ então, por hipótese, F admite um elemento irredutível. Portanto, supor que $C \notin F$. $F \cup \{C\}$ é uma família de conjuntos à qual C pertence e, portanto, admite um elemento irredutível G, quer dizer, se $H \subseteq G$ e $H \in F \cup \{C\}$ então $H = G$. $G \neq C$ porque F é uma família não-vazia de subconjuntos de C tal que $C \notin F$, portanto $G \in F$. Seja $I \in F$ tal que $I \subseteq G$. $I \in F \cup \{C\}$. Disto e de $I \subseteq G$ segue-se que $I = G$, porque G é elemento irredutível de $F \cup \{C\}$. Portanto G é elemento irredutível de F. □

Tarski observa que, embora formalmente equivalentes, a primeira definição é preferível do ponto-de-vista prático porque, segundo ela, precisamos examinar tão somente os conjuntos de subconjuntos de um dado conjunto para determinar se ele é T_1-finito ou não, enquanto que na segunda definição não dispomos de tal facilidade.

VON NEUMANN (1925) sugere a seguinte definição de conjunto finito:

Definição 1.5.4 (Conjunto Finito, no Sentido de Von Neumann) Um conjunto C é N-finito, se e somente se todo conjunto, ao qual pertence um subconjunto de C, admite um elemento irredutível que é subconjunto de C.[9]

[9] VON NEUMANN (1925) desenvolve uma axiomática da teoria de conjuntos constituída por três tipos de objetos: objetos do tipo I (argumentos), objetos do tipo II (argumentos-funções) e objetos do tipo III (funções). Classes e conjuntos são tipos particulares destes tipos básicos. Nesta axiomática, a sua definição de classe finita tem o seguinte enunciado: Uma classe a é dita ser finita se não existe classe b com as seguintes propriedades: b tem elementos que estão $\subseteq a$; se x é um elemento de b e está $\subseteq a$, então b também tem elementos que estão $\subseteq a$ e ao mesmo tempo $\subset x$.

Esta definição é formalmente equivalente, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, à definição de Tarski, conforme o seguinte teorema atesta:

Teorema 1.5.2 Seja C um conjunto. C é N-finito se e somente se C é T_1-finito.

Demonstração:

Seja C um conjunto T_1-infinito. Por definição, existe uma família não-vazia D de subconjuntos de C que não admite elemento irredutível. Tem-se, de $D \neq \emptyset$ e $D \subseteq \wp(C)$, que existe $E \in D$ tal que $E \subseteq C$. Seja $F \in D$. Por hipótese, existe $G \in D$ tal que $G \subset F$. Portanto, C é N-infinito.

Seja C um conjunto N-infinito. Por definição, existe um conjunto D tal que:

- existe $E \in D$ tal que $E \subseteq C$;
- para todo $F \in D$ tal que $F \subseteq C$ tem-se que existe $G \in D$ tal que $G \subset F$.

Considere o seguinte conjunto: $H = \{ I \in D; I \subseteq C\}$. $H \neq \emptyset$, devido à primeira cláusula. H é família de subconjuntos de C, por definição. H não admite elemento irredutível porque se $J \in H$ então $J \in D$ e $J \subseteq C$ e, pela segunda cláusula, existe $K \in D$ tal que $K \subset J$, quer dizer, $K \in H$ e $K \subset J$. Portanto C é T_1-infinito. □

A definição 1.5.2 também é, do ponto-de-vista prático, preferível a esta definição.

Tarski também fornece a seguinte definição, dual da definição 1.5.1:

Definição 1.5.5 (Elemento Saturado de uma Família de Conjuntos) Seja F uma família de conjuntos e C um conjunto pertencente a F. C é um elemento saturado de F se e somente se se $C \subseteq D$ e $D \in F$ então $D = C$, quer dizer, nenhum superconjunto próprio de C pertence a F.

Tarski demonstra o seguinte teorema: seja C um conjunto. C é T_1-finito se e somente se toda família não-vazia de subconjuntos de C admite um elemento saturado. Portanto, a noção de elemento saturado de uma família de conjuntos determina uma variante da definição de conjunto T_1-finito:

Definição 1.5.6 (Variante da Definição 1.5.2) Um conjunto é T_3-finito se e somente se toda família não-vazia de subconjuntos de C admite um elemento saturado.

Esta dualidade, entre as definições 1.5.2 e 1.5.6, também ocorre com a definição de Alarcón Athens, como verificaremos no quarto capítulo.

Tem-se, também, o dual da definição 1.5.3 e o dual do teorema 1.5.1:

Definição 1.5.7 (Variante da Definição 1.5.3) Um conjunto é T_4-finito se e somente se toda família de conjuntos, à qual C pertence, admite um elemento saturado.

Teorema 1.5.3 Toda família não-vazia de subconjuntos de C admite um elemento saturado se e somente se toda família de conjuntos, à qual C pertence, admite um elemento saturado.

Demonstração:

Análoga à demonstração do teorema 1.5.1. □

A partir da segunda seção do artigo, Tarski passa a demonstrar que, entre outros, os axiomas de Zermelo-Fraenkel, excluído o axioma do infinito, produzem tão somente conjuntos T_1-finitos; quer dizer:

- $\varnothing$ é um conjunto T_1-finito. Portanto, o axioma da existência, associado ao axioma da extensionalidade, produz tão somente um conjunto T_1-finito.
- Todo subconjunto de um conjunto T_1-finito é T_1-finito. Portanto, o esquema de axiomas da separação preserva a T_1-finitude de conjuntos.
- O conjunto das partes de um conjunto T_1-finito é T_1-finito. Portanto, o axioma do conjunto das partes preserva a T_1-finitude de conjuntos.
- A união de uma família T_1-finita de conjuntos T_1-finitos é T_1-finita. Portanto, o axioma da união preserva a T_1-finitude de conjuntos.

- Todo conjunto unitário é T_1-finito. Disto e de $A \cup B$ ser T_1-finito quando A e B são T_1-finitos tem-se que o axioma do par preserva a T_1-finitude de conjuntos.
- O axioma da escolha aplicado a conjuntos T_1-finitos é demonstrável a partir dos demais axiomas de Zermelo-Fraenkel, excluído o axioma do infinito.
- Toda imagem de um conjunto T_1-finito é T_1-finita. Portanto, o esquema de axiomas da substituição preserva a T_1-finitude de conjuntos.

Repetiremos este tipo de demonstração para a definição de Zermelo. Este procedimento pode ser descrito como um critério de adequação de uma definição de conjunto finito. Também é uma maneira bastante simples de demonstrar a consistência do axioma postulando a existência somente de conjuntos finitos, em relação aos demais axiomas da axiomática de Zermelo-Fraenkel.

2 DEFINIÇÃO DE ZERMELO

A definição de conjunto finito, no sentido de Zermelo, ocorre em (ZERMELO, 1908) e (ZERMELO, 1909).

ZERMELO (1909) é uma discussão acerca do estatuto epistemológico do princípio de indução matemática, ou princípio de indução completa, como Zermelo prefere denominá-lo. Após verificar que alguns autores consideram o princípio de indução matemática uma proposição indemonstrável (Poincaré) enquanto que outros o consideram uma proposição demonstrável (Whitehead e Russell), Zermelo efetua a seguinte redução do problema: o princípio de indução matemática diz respeito a números finitos (em particular, ele diz respeito ao raciocínio que nos conduz de um número finito ao seu sucessor imediato) e estes, por sua vez, dizem respeito a conjuntos finitos. Portanto, utilizando uma definição adequada de conjunto finito, talvez seja possível demonstrar o princípio de indução matemática. De fato, utilizando sua própria definição de conjunto finito, Zermelo demonstra o princípio de indução matemática expresso em diversas formas. Isto, porém, não conclui a discussão, observa. A natureza, ou analítica (entendida como assentada em princípios puramente lógicos) ou sintética (entendida como fundamentada em intuição de um tipo especial), do princípio de indução matemática depende da natureza dos axiomas necessários à sua demonstração e, em última instância, da natureza dos axiomas da teoria de conjuntos. Zermelo evita tomar partido nesta discussão por considerá-la de caráter estritamente filosófico e, portanto, não relacionada à sua atividade enquanto matemática.

ZERMELO (1909) também contem uma discussão acerca do axioma da escolha, ou axioma da escolha arbitrária, como Zermelo prefere denominá-lo. Zermelo observa que, embora acredite que o axioma é *indemonstrável*, também acredita que ele é *indispensável* na demonstração de certos teoremas matemáticos. Ele cita, como exemplo, o teorema segundo o qual *todo conjunto pode ser bem-ordenado*, utilizado na demonstração do teorema segundo o qual *todo conjunto D_1-finito é finito, no seu próprio sentido*.

ZERMELO (1908) é uma apresentação concisa daquilo que se encontra em (ZERMELO, 1909). A terminologia é um pouco diferente. Enquanto que em (ZERMELO,

1909) o autor utiliza a noção de cadeia simples (*chaîne simple*) constituída por um primeiro (*premier*) e por um último (*dernier*) elemento, em (ZERMELO, 1908) ele utiliza a noção de deslocamento (*Verschiebung*) e *demonstra* que todo deslocamento tem um único elemento inicial (*Anfangselement*) e um único elemento terminal (*Endelement*). Preferimos adotar o tratamento de (ZERMELO, 1908).

A definição de conjunto finito, no sentido de Zermelo, é obtida do seguinte modo:

Definição 2.1 (Deslocamento de um Conjunto) Seja C um conjunto e φ: D $\rightarrow$ E uma função injetora tal que $D \subset C$[1] e $E \subset C$[2]. φ é um deslocamento de C se e somente se para toda partição F = {G, H} de C existe $a \in D$ tal que ou $a \in G$ e $\varphi(a) \in H$, ou $\varphi(a) \in G$ e $a \in H$[3].

Definição 2.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Zermelo) Um conjunto C é Z-finito se e somente se ou $C = \varnothing$ ou existe um deslocamento de C[4].

Definição 2.3 (Elemento Inicial de um Conjunto Z-Finito Segundo um Deslocamento) Seja $C \neq \varnothing$ um conjunto Z-finito, φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C e $p \in C$. p é um elemento inicial de C segundo φ se e somente se $p \notin E$.

Definição 2.4 (Elemento Terminal de um Conjunto Z-Finito Segundo um Deslocamento) Seja $C \neq \varnothing$ um conjunto Z-finito, φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C e $u \in C$. u é um elemento terminal de C segundo φ se e somente se $u \notin D$.

---

[1] Na versão original desta definição, o conjunto D deve ser distinto do conjunto vazio (consulte nota-de-rodapé 4).

[2] PARSONS (1987), ao expor a definição de Zermelo, não estabelece a restrição segundo a qual a imagem do deslocamento deve ser subconjunto *próprio* do conjunto. Verificaremos, mais adiante, que pelo menos uma demonstração não é possível sem esta restrição.

[3] Segundo ZERMELO (1909), $D \subseteq C$ e $E \subseteq C$ são partes separadas uma da outra, com respeito a uma função φ definida em C, se e somente se nenhum elemento d de D é imagem $\varphi(e)$ de um elemento e de E e, reciprocamente, nenhum elemento e de E é imagem $\varphi(d)$ de um elemento d de D. Portanto, a restrição pode ser enunciada do seguinte modo: para toda partição F = {G, H} de C, G e H não são partes separadas uma da outra, com respeito a φ.

[4] Na versão original desta definição, um conjunto é finito se e somente se existe um deslocamento do conjunto. Segundo as versões originais das definições 2.1 e 2.2, o conjunto vazio e os conjuntos unitários não são finitos. Em 1910, Kurt Grelling emendou estas definições (consulte (PARSONS, 1987)).

Conforme mencionamos anteriormente, demonstra-se a existência e unicidade dos elementos inicial e terminal de um deslocamento.

Teorema 2.1 Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto Z-finito. Para todo deslocamento φ de C existe um e somente um elemento inicial de C segundo φ.

Demonstração:

Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto Z-finito e φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C.

(Existência) Por hipótese, $E \subset C$. Seja $p \in C - E$. Por definição, p é elemento inicial de C segundo φ[5].

(Unicidade) Seja a um elemento inicial de C segundo φ. Considere a seguinte família de conjuntos: $F = \{ G \subseteq C; p \in G \wedge \forall x\, ((x \in G \wedge x \in D) \rightarrow \varphi(x) \in G)\}$. $F \neq \emptyset$ porque $\{p\} \cup E \in F$. Portanto, seja $H = \bigcap F$. $H \in F$ porque:

- para todo $G \in F$, $p \in G$ e, portanto, $p \in H$;
- seja $b \in H$ e $b \in D$. Neste caso, para todo $G \in F$, $b \in G$ e, por definição, $\varphi(b) \in G$. Portanto, $\varphi(b) \in H$.

Considere os seguintes lemas auxiliares:

Lema 1 Se $a \in H$ e $a \neq p$ então $a \in E$.

Demonstração:

Seja $a \in H$ e $a \neq p$. Supor, por absurdo, que $a \notin E$. Neste caso, $H - \{a\} = I \in F$ porque:

- $p \in H$ mas $p \neq a$, portanto $p \in I$;
- seja $b \in I$ e $b \in D$. Neste caso, $b \in H$ e, como $H \in F$, $\varphi(b) \in H$. Porém, $\varphi(b) \neq a$ porque, por hipótese, $a \notin E$; portanto $\varphi(b) \in I$.

$H = \bigcap F$, portanto $H \subseteq I$, em contradição com $I \subset H$.

Lema 2 Se $a \in H$ e $a \in E$, então $\varphi^{-1}(a) \in H$.

---

[5] A demonstração de existência de um elemento inicial de um conjunto segundo um deslocamento não é possível sem a restrição segundo a qual a imagem de um deslocamento é subconjunto *próprio* do conjunto. PARSONS (1987) não fornece a demonstração deste teorema. Não deve, portanto, ter percebido a necessidade desta restrição.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $\varphi^{-1}(a) = b \notin$ H. Neste caso, existe G $\in$ F tal que $b \notin$ G. $a \in$ H portanto $a \in$ G. Considere o seguinte conjunto: I = G - $\{a\}$. I $\in$ F porque:

- $p \in$ G porque G $\in$ F. Porém $p \notin$ E, por definição. Portanto $p \neq a$ e $p \in$ I;
- seja $c \in$ I e $c \in$ D. Neste caso $c \in$ G e, portanto, $\varphi(c) \in$ G. Por hipótese, $b \notin$ G e, portanto, $c \neq b$. φ é função injetora, portanto $\varphi(c) \neq \varphi(b)$ e $\varphi(c) \in$ I.

I $\in$F e $a \notin$ I, portanto $a \notin$ H, contradição. Portanto $b \in$ H.

Lema 3 H = C.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que C - H $\neq \varnothing$. Considere a partição {H, C - H} de C. Por hipótese, φ é um deslocamento de C, portanto existe $a \in$ D tal que ou $a \in$ H e $\varphi(a) \in$ C - H, ou $\varphi(a) \in$ H e $a \in$ C - H. Se $a \in$ H então $\varphi(a) \in$ H porque H $\in$ F. Se $a \in$ C - H então $a \notin$ H e, pelo lema 2, $\varphi(a) \notin$ H. Estes dois fatos tomados em conjunto contradizem a hipótese de que {H, C - H} é uma partição de C. Portanto {H, C - H} não é uma partição de C e H = C.

Segue-se, dos lemas 1 e 3, que $a = p$, isto é, existe um e somente um elemento inicial de C segundo φ. □

Corolário 2.2 Se J $\subseteq$ C é tal que $p \in$ J e para todo $a \in$ J e $a \in$ D tem-se que $\varphi(a) \in$ J, então J = C.

Demonstração:

Segue-se imediatamente do teorema anterior. □

Teorema 2.3 Seja C $\neq \varnothing$ um conjunto Z-finito. Para todo deslocamento φ de C existe um e somente um elemento terminal de C segundo φ.

Demonstração:

Seja C $\neq \varnothing$ um conjunto Z-finito e φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C.

(Existência) Por hipótese, D $\subset$ C. Seja $u \in$ C - D. Por definição, u é elemento terminal de C segundo φ.

(Unicidade) Seja a um elemento terminal de C segundo φ. Considere a seguinte família de conjuntos: $F = \{ G \subseteq C; u \in G \wedge \forall x (x \in D \rightarrow (\varphi(x) \notin G \vee x \in G))\}$. $F \neq \varnothing$ porque $\{u\} \cup D \in F$. Portanto, seja $H = \bigcap F$. $H \in F$ porque:

- para todo $G \in F$, $u \in G$ e, portanto, $u \in H$;
- seja $\varphi(b) \in H$. Neste caso, para todo $G \in F$, $\varphi(b) \in G$ e, por definição, $b \in G$, quer dizer, $b \in H$.

Considere os seguintes lemas auxiliares:

Lema 1 Se $a \in H$ e $a \neq u$, então $a \in D$.

Demonstração:

Seja $a \in H$ e $a \neq u$. Supor, por absurdo, que $a \notin D$. Neste caso, $H - \{a\} = I \in F$ porque:

- $u \in H$ mas $u \neq a$, portanto $u \in I$;
- seja $\varphi(b) \in I$. Neste caso, $\varphi(b) \in H$ e, como $H \in F$, $b \in H$. Porém, $b \neq a$ porque, por hipótese, $a \notin D$, portanto $b \in I$.

$H = \bigcap F$, portanto $H \subseteq I$, em contradição com $I \subset H$, portanto $a \in D$.

Lema 2 Se $a \in H$ e $a \in D$, então $\varphi(a) \in H$.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $\varphi(a) \notin H$. Neste caso, existe $G \in F$ tal que $\varphi(a) \notin G$. $a \in H$ portanto $a \in G$. Considere o seguinte conjunto: $I = G - \{a\}$. $I \in F$ porque:

- $u \in G$ porque $G \in F$. Porém $u \notin D$, por definição. Portanto $u \neq a$ e $u \in I$;
- seja $\varphi(b) \in I$. Neste caso, $\varphi(b) \in G$ e, portanto, $b \in G$. $b \neq a$ porque $\varphi(b) \in G$ mas, por hipótese, $\varphi(a) \notin G$. Portanto $b \in I$.

$I \in F$ e $a \notin I$, portanto $a \notin H$, contradição. Portanto $\varphi(a) \in H$.

Lema 3 $H = C$.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $C - H \neq \varnothing$. Considere a partição $\{H, C - H\}$ de C. Por hipótese, φ é um deslocamento de C, portanto existe $a \in D$ tal que ou $a \in H$ e $\varphi(a) \in C - H$, ou $\varphi(a) \in H$ e $a \in C - H$. Se $a \in H$ então, pelo lema 2, $\varphi(a) \in H$. Se $\varphi(a) \in H$ então $a \in H$ porque H

$\in$ F. Estes dois fatos tomados em conjunto contradizem a hipótese de que {H, C - H} é uma partição de C. Portanto {H, C - H} não é uma partição de C e H = C.

Segue-se, dos lemas 1 e 3, que $a = u$, quer dizer, existe um e somente um elemento terminal de C segundo φ. □

Corolário 2.4 Se J $\subseteq$ C é tal que $u \in$ J e para todo $\varphi(a) \in$ J tem-se que $a \in$ J, então J = C.

Demonstração:

Segue-se imediatamente do teorema anterior. □

Os dois teoremas seguintes serão utilizados para demonstrar o princípio de indução matemática.

Teorema 2.5 Todo conjunto Z-finito pode ser duplamente bem-ordenado.

Demonstração:

Seja C um conjunto Z-finito. Por definição, ou C = $\varnothing$ ou existe um deslocamento de C. Se C = $\varnothing$, C pode ser duplamente bem-ordenado. Portanto, seja φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C, p elemento inicial e u elemento terminal de C segundo φ. Seja F o subconjunto de C definido do seguinte modo -

$a \in$ F se e somente se existe um subconjunto G de C que satisfaz as seguintes condições:

- $p \in$ G;
- $a \in$ G;
- se $b \in$ G e $b \in$ E, então $\varphi^{-1}(b) \in$ G;
- existe uma dupla boa-ordem de G (na qual p é o menor elemento e a é o maior elemento).

Tem-se que $p \in$ F porque:

- $p \in \{p\}$;
- o único elemento de $\{p\}$, p, é elemento inicial de C segundo φ, quer dizer, $p \notin$ E;
- existe uma dupla boa-ordem de $\{p\}$ (na qual p é o menor e maior elemento).

Demonstraremos que se $a \in$ F e $a \in$ D, então $\varphi(a) \in$ F. Seja $a \in$ F tal que $a \in$ D. Por hipótese, existe um subconjunto G de C tal que:

- $p \in$ G;
- $a \in$ G;
- se $b \in$ G e $b \in$ E, então $\varphi^{-1}(b) \in$ G;
- existe uma dupla boa-ordem $<$ de G (na qual p é o menor elemento e a é o maior elemento).

Seja H = G $\cup$ $\{\varphi(a)\}$ e $\prec$ uma relação definida do seguinte modo: $b \prec \varphi(a)$ para todo $\varphi(a) \neq b \in$ G e $c \prec d$ para todo $\varphi(a) \neq c < d \neq \varphi$(a). H e $\prec$ gozam das seguintes propriedades:

- $p \in$ H, porque $p \in$ G e G $\subseteq$ H;
- $\varphi(a) \in$ H, por definição;
- seja $b \in$ H e $b \in$ E. Neste caso, $b \in$ G ou $b = \varphi(a)$. Se $b \in$ G, então, por hipótese, $\varphi^{-1}(b) \in$ G e, portanto, $\varphi^{-1}(b) \in$ H. Se b = $\varphi(a)$, então $\varphi^{-1}(b) = a$ porque φ é função injetora. Porém, por hipótese, $a \in$ G e, portanto, $a \in$ H. Portanto, se $b \in$ H e $b \in$ E, então $\varphi^{-1}(b) \in$ H;
- $\prec$ é uma dupla boa-ordem de H. Se $\varphi(a) \notin$ I para $\varnothing \neq$ I $\subseteq$ H, então $\varnothing \neq$ I $\subseteq$ G e, por hipótese, I tem menor e maior elemento segundo $<$. Porém, a identidade é um isomorfismo entre <I,'$\prec$'> e <I,'$<$'>, quer dizer, I tem menor e maior elemento segundo $\prec$. Se $\varphi(a) \in$ I para I $\subseteq$ H, consideremos dois casos: I = $\{\varphi(a)\}$ e I $\neq$ $\{\varphi(a)\}$. Se I = $\{\varphi(a)\}$, então $\varphi(a)$ é menor e maior elemento de I segundo $\prec$. Se I $\neq$ $\{\varphi(a)\}$, então o menor elemento de I segundo $\prec$ é o menor elemento de I - $\{\varphi(a)\}$ segundo $<$ e $\varphi(a)$ é o maior elemento de I segundo $\prec$. Deste modo, p é o menor elemento e $\varphi(a)$ é o maior elemento de H segundo $\prec$.

Segue-se, do corolário 2.2, que F = C, quer dizer, $u \in$ F e, portanto, por definição, existe um subconjunto J de C tal que:

- $p \in$ J;
- $u \in$ J;
- se $a \in$ J e $a \in$ E, então $\varphi^{-1}(a) \in$ J;

- existe uma dupla boa-ordem de J (na qual p é o menor elemento e u é o maior elemento).

Segue-se, do corolário 2.4, que J = C e que, portanto, existe uma dupla boa-ordem de C (na qual p é o menor elemento e u é o maior elemento). □

Teorema 2.6 Todo conjunto que pode ser duplamente bem-ordenado é Z-finito.

Demonstração:

Seja C um conjunto que pode ser duplamente bem-ordenado. Se C = $\varnothing$, então, por definição, C é um conjunto Z-finito. Portanto, suponha que C $\neq \varnothing$. Seja $< \subseteq C^2$ uma dupla boa-ordem de C, p menor elemento de C e u maior elemento de C segundo $<$. Considere a seguinte relação: $\langle a,b \rangle \in R$ se e somente se $a < b$ e não existe c tal que $a < c$ e $c < b$. Demonstraremos que R é um deslocamento de C:

- dom (R) $\subset$ C. Por hipótese, u é maior elemento de C segundo $<$, quer dizer, não existe a tal que $u < a$. Portanto, $u \notin$ dom (R). Porém, dom (R) $\subseteq$ C e, portanto dom (R) $\subset$ C;
- img (R) $\subset$ C. Por hipótese, p é o menor elemento de C segundo $<$, quer dizer, não existe a tal que $a < p$. Portanto $p \notin$ img (R). Porém, img(R) $\subseteq$ C e, portanto, img (R) $\subset$ C;
- R é uma função. Seja $a \in$ dom (R). Suponha que $\langle a,b \rangle \in R$ e $\langle a,c \rangle \in R$. Por definição, $a < b$ e não existe d tal que $a < d$ e $d < b$ (1) e $a < c$ e não existe e tal que $a < e$ e $e < c$ (2). Segue-se, de (1) e $a < c$, que não se dá que $c < b$ (3). Segue-se, de (2) e $a < b$, que não se dá que $b < c$ (4). Segue-se de (3), (4) e do fato de $<$ ser uma ordem total, que $b = c$ e R é uma função;
- R é injetora. Seja R (a) = R (b) = c. Por definição, $a < c$ e não existe d tal que $a < d$ e $d < c$ (1) e $b < c$ e não existe e tal que $b < e$ e $e < c$ (2). Segue-se, de (1) e $b < c$, que não se dá que $a < b$ (3). Segue-se, de (2) e $a < c$, que não se dá que $b < a$ (4). Segue-se, de (3), (4) e do fato de $<$ ser uma ordem total, que $a = b$ e R é injetora;
- Seja D = {E,F} uma partição de C. Ou $u \notin$ E ou $u \notin$ F. Suponha que $u \notin$ E (o argumento é análogo para $u \notin$ F). Seja a maior elemento de E segundo $<$. Considere o conjunto G = $\{b; a < b\}$. G $\neq \varnothing$ porque, por hipótese, $a \neq u$. Seja c o menor elemento de

G. Tem-se que R $(a) = c$. $c \notin$ E, portanto R $(a) = c \in$ F. Segue-se que R é um deslocamento de C e C é um conjunto Z-finito. □

ZERMELO (1909) demonstra o princípio de indução matemática expresso nas seguintes formas:

- Seja C $\neq \emptyset$ um conjunto finito[6], P uma propriedade de elementos de C, φ um deslocamento de C e p elemento inicial de C segundo φ. Se P é satisfeita por p, e P sendo satisfeita por $c \in \text{dom}(\varphi)$, também é satisfeita por $\varphi(c)$, então P é satisfeita por todos os elementos de C. Poderíamos denominá-lo princípio de indução interna.
- Seja P uma propriedade de conjuntos. Se P é satisfeita por todos os conjuntos unitários e sendo satisfeita por um conjunto finito C, com pelo menos dois elementos, também é satisfeita por C - $\{c\}$ onde $c \in$ C, então P é satisfeita por todos os conjuntos finitos. Poderíamos denominá-lo princípio de indução externa.

Para os nossos propósitos, utilizaremos o princípio de indução matemática enunciado na seguinte forma:

Teorema 2.7 Seja P uma propriedade de conjuntos e C um conjunto Z-finito. Se P é satisfeita por $\emptyset$, e P sendo satisfeita por D, também é satisfeita por D $\cup$ $\{c\}$ para $c \in$ C, então P é satisfeita por C.

Demonstração:

Seja P uma propriedade de conjuntos, C $\neq \emptyset$ um conjunto Z-finito e φ: D $\rightarrow$ E um deslocamento de C. Considere o seguinte conjunto F = $\{c \in$ C; existe G $\subseteq$ C tal que $c \in$ G, se $g \in$ G e $g \in$ E então $\varphi^{-1}(g) \in$ G, e P(G)$\}$.

Seja p elemento inicial de C segundo φ. $p \in$ F porque G = $\{p\}$ é tal que: $p \in$ G, não existe g $\in$ G tal que $g \in$ E, e P(G) porque, por hipótese, P($\emptyset$), G = $\emptyset \cup \{p\}$ para $p \in$ C e, por hipótese, P($\emptyset \cup \{p\}$).

---

[6] Esta forma do princípio de indução matemática aplica-se ao caso mais geral em que C é uma cadeia simples. C é uma cadeia simples se e somente se existe uma função bijetora φ: D $\rightarrow$ (C - $\{p\}$) tal que ou D = C ou D = C - $\{u\}$, para $u \in$ C, $p \in$ C e φ não divide C em partes separadas (consulte nota-de-rodapé 3). Verifica-se que se existe $u \in$ C tal que D = C - $\{u\}$ então C é finito, caso contrário C é enumerável.

Se $g \in F$ e $g \in D$ então $\varphi(g) \in F$. Por hipótese, existe $G \subseteq C$ tal que $g \in G$, se $h \in G$ e $h \in E$ então $\varphi^{-1}(h) \in G$, e P(G). Seja $H = G \cup \{\varphi(g)\}$. Tem-se que $\varphi(g) \in H$, se $i \in H$ e $i \in E$ então $\varphi^{-1}(i) \in H$ (se $i \in H$ então $i \in G$ ou $i = \varphi(g)$, se $i \in G$ e $i \in E$ então, por hipótese, $\varphi^{-1}(i) \in G$ e, portanto, $\varphi^{-1}(i) \in H$. Se $i = \varphi(g)$ então $\varphi^{-1}(i) = g$ porque φ é função injetora. Por hipótese, $g \in G$, portanto, $g \in H$), e P(H) porque, por hipótese, P(G), $H = G \cup \{\varphi(g)\}$ para $\varphi(g) \in C$ e, por hipótese, $P(G \cup \{\varphi(g)\})$.

Segue-se, do corolário 2.2, que $F = C$ e, portanto, $u \in F$ onde u é elemento terminal de C segundo φ. Portanto, existe $J \subseteq C$ tal que $u \in J$, se $j \in J$ e $j \in E$ então $\varphi^{-1}(j) \in J$. Segue-se, do corolário 2.4, que $J = C$. Porém P(J), quer dizer, P(C). □

Demonstrar que os axiomas de Zermelo-Fraenkel preservam a finitude de conjuntos é, conforme dissemos no primeiro capítulo, um critério de adequação para uma proposta de definição de conjunto finito. No restante deste capítulo nos ocuparemos desta tarefa.

Demonstraremos, no teorema seguinte, que o esquema de axiomas da separação preserva a finitude de conjuntos, no sentido de Zermelo.

Teorema 2.8 Todo subconjunto de um conjunto Z-finito é Z-finito.

Demonstração:

Aplicação de indução matemática para conjuntos finitos.

(Base indutiva) O único subconjunto do conjunto vazio é o próprio conjunto vazio que, por definição, é Z-finito.

(Passo indutivo) Seja $C = D \cup \{d\}$ para $d \notin D$ e E subconjunto de C. Se $d \notin E$, então E é subconjunto de D e, por hipótese indutiva, é Z-finito. Portanto, supor que $d \in E$. $E - \{d\}$ é subconjunto de D e, por hipótese indutiva, é Z-finito, quer dizer, ou $E - \{d\} = \varnothing$ ou existe um deslocamento de $E - \{d\}$. Se $E - \{d\} = \varnothing$ para $d \in E$, então $E = \{d\}$ e E é Z-finito (φ: $\varnothing \rightarrow \varnothing$ é o único deslocamento de E). Para $E - \{d\} \neq \varnothing$, seja φ: $F \rightarrow G$ um deslocamento de $E - \{d\}$. Considere a seguinte relação: $\langle a,b \rangle \in R$ se e somente se ou $a \in F$ e $b = \varphi(a)$, ou $a = d$ e $b = p$ onde p é o elemento inicial de E - $\{d\}$ segundo φ. Demonstraremos que R é um deslocamento de E e que, portanto, E é Z-finito. Tem-se que:

- R é função. Se $a \in$ F então $a \neq d$ porque, por hipótese, F $\subset$ E - $\{d\}$. Portanto os dois casos da definição de R são distintos. φ, por hipótese, é uma função.
- R é injetora. Por hipótese, p é elemento inicial de E - $\{d\}$ segundo φ, quer dizer, $p \notin$ G. Por hipótese, φ é injetora.
- dom(R) $\subset$ E. Seja $a \in$ dom(R). Neste caso, ou $a \in$ F ou $a = d$. Se $a \in$ F então $a \in$ E porque, por hipótese, F $\subset$ E - $\{d\}$. Se $a = d$ então $a \in$ E porque, por hipótese, $d \in$ E. Seja u o elemento terminal de E - $\{d\}$ segundo φ. Por definição, u $\in$ E - {d} e, portanto, $u \in$ E. Por definição, $u \notin$ F, e $u \neq d$ porque $d \notin$ E - {d}.
- img(R) $\subset$ E. Seja $a \in$ img(R). Neste caso, ou $a = \varphi(b)$ para $b \in$ F ou $a = p$. Se $a = \varphi(b)$ para $b \in$ F então $a \in$ E porque, por hipótese, G $\subset$ E - $\{d\}$. Se $a = p$ então $a \in$ E porque, por hipótese, $p \in$ E - $\{d\}$. Por hipótese, $d \in$ E. $d \notin$ G porque, por hipótese, G $\subset$ E - $\{d\}$. $d \neq p$ porque, por definição, $p \in$ E - $\{d\}$.
- seja {H, I} uma partição de E. Ou $d \in$ H ou $d \in$ I. Supor que $d \in$ H (o argumento é análogo para $d \in$ I). Se H = $\{d\}$ então $d \in$ dom(R) é tal que $d \in$ H e $\varphi(d) = p \in$ I. Portanto, seja H $\neq \{d\}$. Por hipótese indutiva, existe $a \in$ F $\subset$ dom(R) tal que ou $a \in$ H - $\{d\}$ e $\varphi(a) \in$ I, ou $\varphi(a) \in$ H - $\{d\}$ e $a \in$ I, quer dizer, ou $a \in$ H e R(a) $\in$ I, ou R(a) $\in$ H e $a \in$ I. □

Demonstramos, com os três teoremas seguintes, que o axioma da união preserva a finitude de conjuntos, no sentido de Zermelo.

Teorema 2.9 Se C é um conjunto Z-finito, então C $\cup$ $\{a\}$ é um conjunto Z-finito.

Demonstração:

Se $a \in$ C então, por hipótese, C $\cup$ $\{a\}$ = C é um conjunto Z-finito. Portanto, seja $a \notin$ C. Se C = $\varnothing$ então φ: $\varnothing \rightarrow \varnothing$ é um deslocamento de C $\cup$ $\{a\}$ = $\{a\}$ (a rigor, φ é o único deslocamento de C $\cup$ $\{a\}$) e, por definição, C $\cup$ $\{a\}$ é um conjunto Z-finito. Portanto, seja

$C \neq \varnothing$. Por hipótese, C é um conjunto Z-finito. Seja φ: $D \rightarrow E$ um deslocamento de C. Considere a seguinte relação: $<b,c> \in R$ se e somente se ou $b \in D$ e $c = \varphi(b)$, ou $b = u$ e $c = a$, onde u é o elemento terminal de C segundo φ. Tem-se que:

- dom (R) $\subset C \cup \{a\}$. Seja $d \in$ dom (R). Por definição, ou $d \in D$ ou $d = u$. Se $d \in D$ então $d \in C \cup \{a\}$ porque, por hipótese, φ é um deslocamento de C e, neste caso, $D \subset C$. Se $d = u$ então $d \in C \cup \{a\}$ porque, por hipótese, u é elemento terminal de C segundo φ e, neste caso, $u \in C - D$. $a \notin$ dom (R) porque, por hipótese, $a \notin C$, portanto $a \notin D$ e $a \neq u$.
- img (R) $\subset C \cup \{a\}$. Seja $d \in$ img (R). Por definição, ou $d \in E$ ou $d = a$. Se $d \in E$ então $d \in C \cup \{a\}$ porque, por hipótese, φ é um deslocamento de C e, neste caso, $E \subset C$. Se $d = a$ então, trivialmente, $d \in C \cup \{a\}$. $p \notin$ img (R), onde p é o elemento inicial de C segundo φ, porque, por definição, $p \notin E$ mas $p \in C$.
- R é uma função. Por definição, $u \notin D$. Disto e do fato de φ ser uma função segue-se que R é uma função.
- R é injetora. Por hipótese, $a \notin E$. Disto e do fato de φ ser injetora segue-se que R é injetora.
- Seja {F,G} uma partição de $C \cup \{a\}$. Tem-se que ou $a \in F$ ou $a \in G$. Supor que $a \in F$ (o argumento é análogo para $a \in G$). Se $F = \{a\}$ então $u \in$ dom (R) é tal que R $(u) = a \in F$ e $u \in G$. Se $F \neq \{a\}$ então $\{F - \{a\}, G\}$ é uma partição de C e, por hipótese, existe $d \in D$ tal que ou $d \in F - \{a\}$ e $\varphi(d) \in G$, ou $\varphi(d) \in F - \{a\}$ e $d \in G$, quer dizer, existe $d \in$ dom (R) tal que ou $d \in F$ e R $(d) \in G$, ou R $(d) \in F$ e $d \in G$.

Portanto, R é um deslocamento de $C \cup \{a\}$ e, por definição, $C \cup \{a\}$ é um conjunto Z-finito. □

Teorema 2.10 Se C e D são conjuntos Z-finitos, então $C \cup D$ é um conjunto Z-finito.

Demonstração:

Aplicação de indução matemática para conjuntos finitos, em D -

(Base indutiva) Seja $D = \varnothing$. Neste caso, $C \cup D = C$ é, por hipótese, um conjunto Z-finito.

(Passo indutivo) Seja $D = E \cup \{a\}$. Neste caso, $C \cup D = C \cup (E \cup \{a\}) = (C \cup E) \cup \{a\}$. Por hipótese indutiva, $C \cup E$ é um conjunto Z-finito e, pelo teorema 2.9, $(C \cup E) \cup \{a\}$ é um conjunto Z-finito. □

Teorema 2.11 Se C é um conjunto Z-finito e seus elementos são conjuntos Z-finitos, então $\bigcup C$ é um conjunto Z-finito.

Demonstração:

Aplicação de indução matemática para conjuntos finitos, em C -

(Base indutiva) Seja $C = \varnothing$. Neste caso, $\bigcup C = \varnothing$ é, por definição, um conjunto Z-finito.

(Passo indutivo) Seja $C = D \cup \{a\}$. Neste caso, $\bigcup C = \bigcup(D \cup \{a\}) = (\bigcup D) \cup (\bigcup\{a\}) = (\bigcup D) \cup a$. Por hipótese indutiva, $\bigcup D$ é um conjunto Z-finito e, pelo teorema 2.10, $(\bigcup D) \cup a$ é um conjunto Z-finito. □

Demonstraremos, no teorema seguinte, que o axioma das partes preserva a finitude de conjuntos, no sentido de Zermelo.

Teorema 2.12 O conjunto das partes de um conjunto Z-finito é um conjunto Z-finito.

Demonstração:

Aplicação de indução matemática para conjuntos finitos -

(Base indutiva) Seja $C = \varnothing$. Neste caso, $\wp(C) = \{\varnothing\}$ é um conjunto Z-finito, porque $\varphi: \varnothing \to \varnothing$ é um deslocamento de $\wp(C)$ (a rigor, φ é o único deslocamento de $\wp(C)$).

(Passo indutivo) Seja $C = D \cup \{d\}$. $\wp(D)$ é um conjunto Z-finito, por hipótese indutiva. $\wp(D) \neq \varnothing$, qualquer que seja o conjunto D, portanto, seja $\varphi: E \to F$ um deslocamento de $\wp(D)$, p o elemento inicial de $\wp(D)$ segundo φ e u o elemento terminal de $\wp(D)$ segundo φ. Supor que $d \notin D$ (caso contrário $\wp(D \cup \{d\}) = \wp(D)$ é, por hipótese indutiva, um conjunto Z-finito). Considere a seguinte relação: $\langle x,y \rangle \in R$ se e somente se ou $x \in E$ e $y = \varphi(x)$, ou $x = z \cup \{d\}$ e $y = \varphi(z) \cup \{d\}$ para algum $z \in E$, ou $x = u$ e $y = p \cup \{d\}$. Tem-se que:

- $dom(R) \subset \wp(D \cup \{d\})$. Seja $a \in dom(R)$. Por definição, ou $a \in E$, ou $a = b \cup \{d\}$ para algum $b \in E$, ou $a = u$. Se $a \in E$ então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, φ é um deslocamento de $\wp(D)$ e, neste caso, $E \subset \wp(D)$. Se $a = b \cup \{d\}$ para algum $b \in E$ então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, φ é um deslocamento de $\wp(D)$ e, neste caso, $E \subset \wp(D)$. Se $a = u$ então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por definição, $u \in \wp(D)$. $u \cup \{d\} \notin dom(R)$ porque, por definição, $u \notin E$ e, por hipótese, $d \notin D$. $u \cup \{d\} \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, $u \in \wp(D)$.
- $img(R) \subset \wp(D \cup \{d\})$. Seja $a \in img(R)$. Por definição, ou $a = \varphi(b)$ para algum $b \in E$, ou $a = \varphi(b) \cup \{d\}$ para algum $b \in E$, ou $a = p \cup \{d\}$. Se $a = \varphi(b)$ para algum $b \in E$, então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, $F \subset \wp(D)$. Se $a = \varphi(b) \cup \{d\}$ para algum $b \in E$, então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, $F \subset \wp(D)$. Se $a = p \cup \{d\}$ então $a \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, $p \in \wp(D)$. $p \notin img(R)$ porque, por definição, $p \notin F$ e, por hipótese, $d \notin D$. $p \in \wp(D \cup \{d\})$ porque, por hipótese, $p \in \wp(D)$.
- R é uma função. Sejam $<a,b> \in R$ e $<a,c> \in R$. Considere os seguintes casos, que englobam todos os casos possíveis:
  - $a \in E$. Neste caso, para todo $e \in E$, $a \neq e \cup \{d\}$ porque $E \subset \wp(D)$ e, portanto, $a \in \wp(D)$; mas $d \notin D$ e, portanto, $e \cup \{d\} \notin \wp(D)$. $a \neq u$ porque, por definição, $u \notin E$. Portanto $b = \varphi(a) = c$.
  - $a = e \cup \{d\}$ para algum $e \in E$. Neste caso, $a \notin E$ porque $d \notin D$ e, portanto, $e \cup \{d\} \notin \wp(D)$; mas $E \subset \wp(D)$ e, portanto, $e \cup \{d\} \notin E$. $a \neq u$ porque, por definição, $u \in \wp(D)$. Portanto $b = \varphi(e) \cup \{d\} = c$.
  - $a = u$. Neste caso, $a \notin E$ porque, por definição, $u \notin E$. Para todo $e \in E$, $a \neq e \cup \{d\}$ porque $d \notin D$ e, portanto, $e \cup \{d\} \notin \wp(D)$; mas, por definição, $u \in \wp(D)$. Portanto $b = p \cup \{d\} = c$.
- R é injetora. Seja $R(a) = R(b)$. Considere os seguintes casos, que englobam todos os casos possíveis:
  - $R(a) = R(b) = \varphi(a)$. Neste caso, $\varphi(a) \neq \varphi(e) \cup \{d\}$ para todo $e \in E$ porque $d \notin D$ e, portanto, $\varphi(e) \cup \{d\} \notin \wp(D)$; mas $F \subset \wp(D)$ e, portanto, $\varphi(e) \cup \{d\} \notin F$. $\varphi(a) \neq p$

$\cup$ $\{d\}$ porque $d \notin$ D e, portanto, $p \cup \{d\} \notin \wp$(D); mas F $\subset \wp$(D) e, portanto, $p \cup \{d\} \notin$ F. Portanto, por definição de R, $a = b$.

* R(a) = R(b) = $\varphi(c) \cup \{d\}$ para algum $c \in$ E. Neste caso, $\varphi(c) \cup \{d\} \neq \varphi(e)$ para todo $e \in$ E porque $d \notin$ D e, portanto, $\varphi(c) \cup \{d\} \notin \wp$(D); mas F $\subset \wp$(D) e, portanto, $\varphi(c) \cup \{d\} \notin$ F. $\varphi(c) \cup \{d\} \neq p \cup \{d\}$ porque $d \notin p$ (por definição, $p \in \wp$(D), isto é, $p \subseteq$ D, mas $d \notin$ D), $d \notin \varphi(c)$ ($\varphi(c) \in \wp$(D), isto é, $\varphi(c) \subseteq$ D, mas $d \notin$ D) e $p \neq \varphi(c)$ porque, por definição, $p \notin$ F. Portanto, por definição de R, $a = c \cup \{d\} = b$.
* R(a) = R(b) = $p \cup \{d\}$. Neste caso, $p \cup \{d\} \neq \varphi(e)$ para todo $e \in$ E porque $d \notin$ D e, portanto, $p \cup \{d\} \notin \wp$(D); mas F $\subset \wp$(D) e, portanto, $p \cup \{d\} \notin$ F. $p \cup \{d\} \neq \varphi(e) \cup \{d\}$ para todo $e \in$ E (a demonstração é análoga ao do caso anterior). Portanto, por definição de R, $a = u = b$.

- para toda partição {F, G} de $\wp$(D $\cup$ $\{d\}$) existe $a \in$ dom(R) tal que ou $a \in$ F e R(a) $\in$ G, ou R(a) $\in$ F e $a \in$ G. Seja {F,G} uma partição de $\wp$(D $\cup$ $\{d\}$). Considere os seguintes conjuntos: H = $\{ h \in$ F; $d \notin h\}$, I = $\{i \in$ F; $d \in i\}$, J = $\{j \in$ G; $d \notin j\}$ e K = $\{k \in$ G; $d \in k\}$. Os seguintes casos englobam todos os casos possíveis:

* H $\neq \varnothing$ e J $\neq \varnothing$. {H, J} é uma partição de $\wp$(D), φ é um deslocamento de $\wp$(D) e, portanto, por definição, existe $e \in$ E tal que ou $e \in$ H e $\varphi(e) \in$ J, ou $\varphi(e) \in$ H e $e \in$ J. Por definição de R, existe $e \in$ dom(R) tal que ou $e \in$ F e R(e) = $\varphi(e) \in$ G, ou R(e) $\in$ F e $e \in$ G.
* I $\neq \varnothing$ e K $\neq \varnothing$. Sejam L = $\{i - \{d\}; i \in$ I$\}$ e M = $\{k - \{d\}; k \in$ K$\}$. {L, K} é uma partição de $\wp$(D), φ é um deslocamento de $\wp$(D) e, portanto, existe $m \in$ E tal que ou $m \in$ L e $\varphi(m) \in$ M, ou $\varphi(m) \in$ L e $m \in$ M. Por definição de R, existe $m \cup \{d\} \in$ dom(R) tal que ou $m \cup \{d\} \in$ F e R($m \cup \{d\}$) = $\varphi(m) \cup \{d\} \in$ G, ou R($m \cup \{d\}$) $\in$ F e $m \cup \{d\} \in$ G.
* H = $\varnothing$ e K = $\varnothing$. $u \in$ dom(R) é tal que R(u) = $p \cup \{d\} \in$ F porque $e \cup \{d\} \notin$ G qualquer que seja e, e $u \in$ G porque $d \notin u$.

* $I = \emptyset$ e $J = \emptyset$. $u \in \mathrm{dom}(R)$ é tal que $u \in F$ porque $d \notin u$ e $R(u) = p \cup \{d\} \in G$ porque $e \cup \{d\} \notin F$ qualquer que seja e. □

Demonstraremos, no teorema seguinte, que o axioma da escolha é demonstrável a partir dos demais axiomas de Zermelo-Fraenkel, desde que aplicado a conjuntos Z-finitos.

Teorema 2.13 Toda família não-vazia e Z-finita de conjuntos não-vazios tem uma função de escolha.

Demonstração:

Aplicação de indução matemática para conjuntos finitos.

Seja $C = D \cup \{d\}$, para $d \notin D$, uma família não-vazia e Z-finita de conjuntos não-vazios. $d \in C$ portanto, por hipótese, $d \neq \emptyset$. Seja $e \in d$. Se $D = \emptyset$ então $\varphi = \{\langle d,e \rangle\}$ é uma função de escolha para C. Se $D \neq \emptyset$ então, por hipótese indutiva, D tem uma função de escolha. Seja ψ uma função de escolha para D. $\varphi = \psi \cup \{\langle d,e \rangle\}$ é uma função de escolha para C. □

Demonstraremos, no teorema seguinte, que o esquema de axiomas da substituição preserva a finitude de conjuntos, no sentido de Zermelo.

Teorema 2.14 A imagem de um conjunto Z-finito, por uma fórmula funcional, é um conjunto Z-finito. (Para simplificar a notação, demonstraremos que a imagem de uma função cujo domínio é Z-finito é Z-finita).

Demonstração:

Seja φ uma função cujo domínio é Z-finito. Se $\mathrm{dom}(\varphi) = \emptyset$ então $\mathrm{img}(\varphi) = \emptyset$ e, por definição, é Z-finita. Portanto, supor que $\mathrm{dom}(\varphi) \neq \emptyset$. Considere a seguinte relação: $a \sim b$ se e somente se $a \in \mathrm{dom}(\varphi)$, $b \in \mathrm{dom}(\varphi)$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathrm{dom}(\varphi)$. $\mathrm{dom}(\varphi)/\sim$ é um conjunto Z-finito, porque $\mathrm{dom}(\varphi)/\sim$ é subconjunto do conjunto das partes de $\mathrm{dom}(\varphi)$; o conjunto das partes de um conjunto Z-finito é Z-finito (teorema 2.12), e um subconjunto de um conjunto Z-finito é Z-finito (teorema 2.8). Segue-se, do fato de $\mathrm{dom}(\varphi)/\sim$ ser Z-finito e de ser uma família não-vazia de conjuntos disjuntos não-vazios ($\sim$ é uma relação de equivalência), que podemos obter um conjunto de escolha E para dom(φ)/~ (o teorema imediatamente anterior garante tal possibilidade).

Demonstraremos que img($\varphi\uparrow_E$) = img(φ). Seja $c \in$ img(φ), quer dizer, existe $d \in$ dom(φ) tal que $\varphi(d) = c$. E é um conjunto de escolha para dom(φ)/~, portanto existe $e \in$ E tal que $e \sim d$, quer dizer, $\varphi(e) = \varphi(d)$ e, portanto, $c \in$ img($\varphi\uparrow_E$).

Demonstraremos que $\varphi\uparrow_E$ é uma função injetora. Supor que $\varphi(a) = \varphi(b)$ para $a \in$ E e $b \in$ E. Tem-se que ou $a = b$ ou não se dá que $a \sim b$, porque $a \in$ E e $b \in$ E e E é um conjunto de escolha para dom(φ)/~. $a \sim b$ porque, por hipótese, $\varphi(a) = \varphi(b)$, portanto $a = b$.

Segue-se, do teorema 2.6, que E $\neq \varnothing$ é um conjunto Z-finito porque E é subconjunto do conjunto Z-finito dom(φ). Seja ψ um deslocamento de E.

Demonstraremos que $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$ é um deslocamento para img(φ) = img($\varphi\uparrow_E$):

- dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) $\subset$ img($\varphi\uparrow_E$). Seja $a \in$ dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$). $a \in$ dom$(\varphi\uparrow_E)^{-1}$, portanto existe $b \in$ E tal que $(\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = b$, quer dizer, $\varphi\uparrow_E(b) = a$ e $a \in$ img($\varphi\uparrow_E$). Por hipótese, ψ é deslocamento de E. Seja u elemento terminal de E segundo ψ. $\varphi\uparrow_E(u) \in$ img($\varphi\uparrow_E$) mas $\varphi\uparrow_E(u) \notin$ dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) porque, por definição, $u \notin$ dom(ψ).
- img($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) $\subset$ img($\varphi\uparrow_E$). Seja $a \in$ img($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$), quer dizer, existe $b \in$ dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) tal que $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b) = a$, quer dizer, existe $c \in$ dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi$) tal que $\varphi\uparrow_E \circ \psi(c) = a$, quer dizer, existe $d \in$ E tal que $\varphi\uparrow_E(d) = a$ e, portanto, $a \in$ img($\varphi\uparrow_E$). Por hipótese, ψ é deslocamento de E. Seja p elemento inicial de E segundo ψ. $\varphi\uparrow_E(p) \in$ img($\varphi\uparrow_E$) mas $\varphi\uparrow_E(p) \notin$ img($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) porque, caso contrário, existiria $a \in$ dom($\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$) tal que $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = \varphi\uparrow_E(p)$ mas $\varphi\uparrow_E$ é injetora, portanto $\psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = p$, em contradição com a hipótese de que p é elemento inicial de E segundo ψ.
- $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$ é função. $\varphi\uparrow_E$ é injetora, portanto $(\varphi\uparrow_E)^{-1}$ é função.
- $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}$ é injetora. Seja $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = \varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b)$ para $c = \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) \in$ E e $d = \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b) \in$ E. $\varphi\uparrow_E$ é função injetora, portanto $c = d$. ψ é função

injetora, portanto $(\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b)$, quer dizer, existe um único $e \in E$ tal que $\varphi\uparrow_E(e) = a$ e $\varphi\uparrow_E(e) = b$. $\varphi\uparrow_E$ é função, portanto $a = b$.

- para toda partição $\{A,B\}$ de $img(\varphi\uparrow_E)$ existe $c \in img(\varphi\uparrow_E)$ tal que ou $c \in A$ e $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c) \in B$, ou $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c) \in A$ e $c \in B$. Seja $\{A,B\}$ uma partição de $img(\varphi\uparrow_E)$. Considere os seguintes conjuntos: $C = \{(\varphi\uparrow_E)^{-1}(a); a \in A\}$ e $D = \{(\varphi\uparrow_E)^{-1}(b); b \in B\}$. $\{C,D\}$ é uma partição de E porque:
  - $C \neq \varnothing$ (o argumento é análogo para D). Por hipótese, $A \neq \varnothing$. Seja $a \in A$. $A \subseteq img(\varphi\uparrow_E)$ portanto existe um único $b \in E$ tal que $\varphi\uparrow_E(b) = a$, quer dizer, $(\varphi\uparrow_E)^{-1}(a) = b$ e $b \in C$.
  - $C \cap D = \varnothing$. Supor que $C \cap D \neq \varnothing$. Seja $a \in C \cap D$. Neste caso, $(\varphi\uparrow_E)^{-1}(b) = a = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c)$ para $b \in A$ e $c \in B$, quer dizer, $\varphi\uparrow_E(a) = b$ e $\varphi\uparrow_E(a) = c$. Por hipótese, $A \cap B = \varnothing$, quer dizer, $b \neq c$ e, portanto, $\varphi\uparrow_E$ não é função, absurdo.
  - $C \cup D = E$. Se $a \in C \cup D$ então ou $a \in C$ ou $a \in D$. Seja $a \in C$ (o argumento é análogo para $a \in D$). Neste caso, $a = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b)$ para algum $b \in A$, quer dizer, $\varphi\uparrow_E(a) = b$ e $a \in E$. Se $c \in E$ então existe $d \in img(\varphi\uparrow_E)$ tal que $\varphi\uparrow_E(c) = d$. Segue-se que ou $d \in A$ ou $d \in B$. Seja $d \in A$ (o argumento é análogo para $d \in B$). Neste caso, $(\varphi\uparrow_E)^{-1}(d) \in C$, quer dizer, $c \in C$ e $c \in C \cup D$.

Por hipótese, existe $a \in img((\varphi\uparrow_E)^{-1})$ tal que ou $a \in C$ e $\psi(a) \in D$, ou $\psi(a) \in C$ e $a \in D$. Se $a \in C$ então $a = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b)$ para algum $b \in A$ e se $\psi(a) \in D$ então $\psi(a) = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c)$ para algum $c \in B$. Portanto $\varphi\uparrow_E(\psi(a)) = c$ e $\varphi\uparrow_E(\psi((\varphi\uparrow_E)^{-1}(b))) = c$ para algum $b \in A$ e algum $c \in B$, quer dizer, existe $b \in img(\varphi\uparrow_E)$ tal que $b \in A$ e $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b) \in B$. Se $\psi(a) \in C$ então $\psi(a) = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(b)$ para algum $b \in A$ e se $a \in D$ então $a = (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c)$ para algum $c \in B$. Portanto $\varphi\uparrow_E(\psi(a)) = b$ e $\varphi\uparrow_E(\psi((\varphi\uparrow_E)^{-1}(c))) = b$ para algum $b \in A$ e algum $c \in B$, quer dizer, existe $c \in img(\varphi\uparrow_E)$ tal que $\varphi\uparrow_E \circ \psi \circ (\varphi\uparrow_E)^{-1}(c) \in A$ e $c \in B$. □

3 SEGUNDA DEFINIÇÃO DE DEDEKIND

Dedekind fornece, no prefácio à segunda edição do livro *Was sind und was sollen die Zahlen* (DEDEKIND, 1889), uma definição de conjunto finito que ele afirma ter sido obtida aos nove dias de março de 1889:

Definição 3.1 (Função de Dedekind Relativa a um Conjunto[1]) Seja C um conjunto e φ uma função. φ é uma função de Dedekind relativa a C se e somente se:

- $\mathrm{dom}(\varphi) = C$;
- $\mathrm{img}(\varphi) \subseteq C$;
- se $\varnothing \neq D^2 \subseteq C$ e $\varphi[D] \subseteq D$ então $D = C$.

Definição 3.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Dedekind) Um conjunto C é D_2-finito se e somente se existe uma função de Dedekind relativa a C.

(CAVAILLÈS, 1932) demonstra um princípio de indução matemática para conjuntos finitos com pelo menos dois elementos, utilizando a definição de Dedekind. Na demonstração ele utiliza os seguintes resultados, que se encontram em (DEDEKIND, 1969):

Lema 3.1 Seja C um conjunto D_2-finito e φ uma função de Dedekind relativa a C. Tem-se que $\varphi[C] = C$.

Demonstração:

---

[1] Dedekind não fornece nenhuma denominação particular a este tipo de função. Nomeamo-la deste modo para facilitar a referência. Dedekind fornece, em (DEDEKIND, 1889), a seguinte definição: Sejam C um conjunto, D um subconjunto de C e φ uma função unária definida em C. D é uma cadeia (*Kette*) com respeito a φ se e somente se $\varphi[D] \subseteq D$. Dedekind utiliza a noção de cadeia para definir a noção de conjunto simplesmente infinito , ou, em terminologia contemporânea, conjunto enumerável. A noção de função de Dedekind relativa a um conjunto pode ser redefinida, utilizando a noção de cadeia, do seguinte modo: Seja C um conjunto e φ uma função unária definida em C. φ é uma função de Dedekind relativa a C se e somente se nenhum subconjunto próprio e não-vazio D de C é uma cadeia com respeito a φ.

[2] Dedekind utiliza o termo *Teil* (parte) significando subconjunto *distinto do conjunto vazio*, conforme pode ser comprovado na seguinte passagem de (DEDEKIND, 1969): Jedes aus einem einzigen Element *s* bestehende System [*s*] ist endlich, <u>weil es keinen echten Teil besitz</u> ...[nosso grifo] (Todo sistema [conjunto] unitário é finito, <u>porque não possui parte própria</u> ...).

Se $C = \varnothing$ então $\varphi[C] = \varnothing$ e, por conseguinte, $\varphi[C] = C$.

Portanto, seja $C \neq \varnothing$. Segue-se, da definição de função de Dedekind relativa a um conjunto, que $\varphi[C] \subseteq C$ e, portanto, $\varphi[\varphi[C]] \subseteq \varphi[C]$. $C \neq \varnothing$, portanto $\varphi[C] \neq \varnothing$. Segue-se, de $\varnothing \neq \varphi[C] \subseteq C$, de $\varphi[\varphi[C]] \subseteq \varphi[C]$ e do fato de φ ser função de Dedekind relativa a C, que $\varphi[C] = C$. □

Nas proposições seguintes (3.2-3.13), C é um conjunto D_2-finito que contem pelo menos dois elementos, e φ é uma função de Dedekind relativa a C.

Lema 3.2 Se $c \in C$, então $\varphi(c) \neq c$.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $\varphi(c) = c$. Neste caso, $\varphi[\{c\}] = \{\varphi(c)\} = \{c\}$. $\varnothing \neq \{c\} \subseteq C$ e $\varphi[\{c\}] \subseteq \{c\}$ donde segue-se, do fato de φ ser função de Dedekind relativa a C, que $C = \{c\}$, o que é um absurdo porque C tem pelo menos dois elementos. □

Nas proposições seguintes (3.3-3.13), utilizaremos as seguintes definições:

Definição 3.3 (Quase-Cadeia[3]) Seja C um conjunto D_2-finito, φ uma função de Dedekind relativa a C, D um subconjunto de C e $c \in C$. D é uma quase-cadeia segundo C, φ e c se e somente se:

- $c \in D$;
- se $c \neq d \in D$ então $\varphi(d) \in D$.

Definição 3.4 (Trajeto[4]) Seja C um conjunto D_2-finito, φ uma função de Dedekind relativa a C, D um subconjunto de C, $a \in C$ e $b \in C$. D é o trajeto segundo C e φ, com início a e

[3] (DEDEKIND, 1969) não utiliza nenhuma denominação particular para esta noção. Nomeamo-la deste modo para facilitar a referência e em analogia à noção de cadeia, porque se retiramos o elemento c, $D - \{c\}$ é uma cadeia.

final b se e somente se D = $\bigcap$ {E; E é uma quase-cadeia segundo C, φ e b e $a \in$ E}. Utilizaremos, conforme (DEDEKIND, 1969), a notação ab para o trajeto segundo C e φ, com início a e final b.

Fixemos o conjunto C D_2-finito e φ função de Dedekind relativa a C. Tem-se que:

Lema 3.3 $a \in ab$.

Demonstração:

Por definição, $ab = \bigcap$ {D; D é uma quase-cadeia segundo b e $a \in$ D}, portanto $a \in ab$. □

Lema 3.4 ab é uma quase-cadeia segundo b.

Demonstração:

Por definição, $ab = \bigcap$ {D; D é uma quase-cadeia segundo b e $a \in$ D}. Para toda quase-cadeia D segundo b, $b \in$ D e, portanto, $b \in ab$.

Seja $b \neq c \in ab$, portanto c pertence a toda quase-cadeia E segundo b tal que $a \in$ E. Segue-se, de $c \neq b$, que $\varphi(c)$ pertence a toda quase-cadeia E segundo b tal que $a \in$ E. Portanto $\varphi(c) \in ab$. □

Lema 3.5 $aa = \{a\}$.

Demonstração:

$\{a\}$ é uma quase-cadeia segundo a porque $a \in \{a\}$ e se $a \neq b \in \{a\}$ então $\varphi(b) \in \{a\}$. Portanto, por definição de trajeto, $aa \subseteq \{a\}$. Porém, pelo lema 3.3, $a \in aa$, quer dizer, $\{a\} \subseteq aa$ e, por conseguinte, $aa = \{a\}$. □

Lema 3.6 $\varphi(m)m$ = C.

Demonstração:

[4] (DEDEKIND, 1969) utiliza o termo alemão *Strecke* para o termo que traduzimos por *trajeto*, o termo alemão *Anfang* para o termo que traduzimos por *início* e o termo alemão *Ende* para o termo que traduzimos por *final*.

Seja $c \in \varphi(m)m$. Segue-se, do lema 3.4, que $\varphi(m)m$ é uma quase-cadeia segundo m e, portanto, se $c \neq m$ então $\varphi(c) \in \varphi(m)m$. Segue-se, do lema 3.3, que $\varphi(m) \in \varphi(m)m$ e, portanto, se $c = m$ então $\varphi(c) \in \varphi(m)m$. Portanto $\varphi(c) \in \varphi(m)m$, $\varphi[\varphi(m)m] \subseteq \varphi(m)m$ e, do fato de φ ser uma função de Dedekind relativa a C, $\varphi(m)m = \mathrm{C}$. □

Lema 3.7 Se $a \neq b$ então $ab = \varphi(a)b \cup \{a\}$.

Demonstração:

Segue-se, do lema 3.3, que $a \in ab$, quer dizer, $\{a\} \subseteq ab$. Tem-se, do lema 3.4, que ab é uma quase-cadeia segundo b. Portanto, de $a \in ab$, ab quase-cadeia segundo b e $a \neq b$, segue-se que $\varphi(a) \in ab$. Tem-se, de ab quase-cadeia segundo b e $\varphi(a) \in ab$, que $\varphi(a)b \subseteq ab$. Segue-se, de $\{a\} \subseteq ab$ e $\varphi(a)b \subseteq ab$, que $\varphi(a)b \cup \{a\} \subseteq ab$.

$a \in \varphi(a)b \cup \{a\}$. Verificaremos que $\varphi(a)b \cup \{a\}$ é uma quase-cadeia segundo b e que, portanto, $ab \subseteq \varphi(a)b \cup \{a\}$. Seja $c \in \varphi(a)b \cup \{a\}$ tal que $c \neq b$. $c = a$ ou $c \in \varphi(a)b$. Segue-se, do lema 3.3, que $\varphi(a) \in \varphi(a)b$ e, portanto, se $c = a$ então $\varphi(c) \in \varphi(a)b \cup \{a\}$. Segue-se, do lema 3.4, que $\varphi(a)b$ é uma quase-cadeia segundo b e, de $c \in \varphi(a)b$ e $c \neq b$, tem-se que $\varphi(c) \in \varphi(a)b \cup \{a\}$. □

Lema 3.8 Se $a \neq b$ então $a \notin \varphi(a)b$.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $a \in \varphi(a)b$. Considere o seguinte conjunto: $\mathrm{D} = \{d \in \varphi(d)b;\ d \neq b\}$. $\mathrm{D} \neq \varnothing$ porque $a \in \mathrm{D}$. Seja $d \in \mathrm{D}$. Segue-se, de $bb = \{b\}$ (lema 3.5) e $d \neq b$, que $d \notin bb$. Por hipótese, $d \in \varphi(d)b$ e, portanto, $\varphi(d) \neq b$. Segue-se, do lema 3.7, que $\varphi(d)b = \varphi(\varphi(d))b \cup \{\varphi(d)\}$. Portanto, de $d \in \varphi(d)b$, $\varphi(d) \neq d$ (lema 3.2) e $\varphi(d)b = \varphi(\varphi(d))b \cup \{\varphi(d)\}$, tem-se que $d \in \varphi(\varphi(d))b$. Segue-se, de $d \neq b$, que $\varphi(d) \in \varphi(\varphi(d))b$. Portanto $\varphi(d) \in \mathrm{D}$ e $\varphi[\mathrm{D}] \subseteq \mathrm{D}$. Segue-se, do fato de φ ser uma função de Dedekind relativa a C, que $\mathrm{D} = \mathrm{C}$; absurdo, porque $b \notin \mathrm{D}$. Portanto $a \notin \varphi(a)b$. □

Lema 3.9 Se $a \neq b$ então $\varphi(a)b \cap \varphi(b)a = \varnothing$.

Demonstração:

Supor, por absurdo, que $\varphi(a)b \cap \varphi(b)a \neq \varnothing$. Seja $c \in \varphi(a)b \cap \varphi(b)a$. Segue-se, do lema 3.8, que $c \neq a$ e $c \neq b$. Segue-se, do lema 3.4, que $\varphi(a)b$ é uma quase-cadeia segundo b e $\varphi(b)a$ é uma quase-cadeia segundo a, portanto $\varphi(c) \in \varphi(a)b \cap \varphi(b)a$. Considere o seguinte conjunto: $D = \{d \in \varphi(a)b \cap \varphi(b)a;\ \varphi(d) \in \varphi(a)b \cap \varphi(b)a\}$. $D \neq \varnothing$ porque $c \in D$. $D \subseteq C$ é tal que $\varphi[D] \subseteq D$. Portanto, do fato de φ ser função de Dedekind relativa a C, segue-se que $D = C$; absurdo, porque $a \notin D$ ($a \notin \varphi(a)b \cap \varphi(b)a$) e $b \notin D$ ($b \notin \varphi(a)b \cap \varphi(b)a$). Portanto $\varphi(a)b \cap \varphi(b)a = \varnothing$. □

Lema 3.10 φ é função injetora.

Demonstração:

Sejam $a \in C$ e $b \in C$ tais que $a \neq b$. Supor, por absurdo, que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Segue-se, do lema 3.3, que $\varphi(a) \in \varphi(a)b$ e $\varphi(b) \in \varphi(b)a$. Portanto $\varphi(a)b \cap \varphi(b)a \neq \varnothing$; mas, pelo lema 3.9, $\varphi(a)b \cap \varphi(b)a = \varnothing$, absurdo. Portanto $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ e φ é uma função injetora. □

Apenas enunciaremos o seguinte lema (a demonstração, bastante extensa, encontra-se em (DEDEKIND, 1969)):

Lema 3.11 Se a, b e c são distintos entre si então ou $\varphi(b)c = \varphi(b)a \cup \varphi(a)c$ ou $\varphi(b)c = \varphi(b)a \cap \varphi(a)c$.

Lema 3.12 Se $a \neq \varphi(b)$ então $a\varphi(b) = ab \cup \{\varphi(b)\}$.

Demonstração:

Considere os seguintes casos:

- $a = b$. Por definição, $b\varphi(b) = \bigcap\{D;\ D$ é uma quase-cadeia segundo $\varphi(b)$ e $b \in D\}$. $\{b, \varphi(b)\}$ é uma quase-cadeia segundo $\varphi(b)$ tal que $b \in \{b, \varphi(b)\}$, portanto $b\varphi(b) \subseteq \{b, \varphi(b)\}$. Segue-se, do lema 3.3, que $b \in b\varphi(b)$ e, do lema 3.4, que $b\varphi(b)$ é uma quase-cadeia segundo $\varphi(b)$, quer dizer, $\varphi(b) \in b\varphi(b)$; portanto $\{b, \varphi(b)\} \subseteq b\varphi(b)$ e $b\varphi(b) = \{b, \varphi(b)\}$. Segue-se, do lema 3.5, que $bb = \{b\}$ e, portanto, $b\varphi(b) = bb \cup \{\varphi(b)\}$;

- $a \neq b$. Segue-se, do lema 3.2, que $\varphi(b) \neq b$. Portanto dispomos de três elementos distintos entre si: a, b e $\varphi(b)$. Substituindo simultaneamente, no lema 3.11, a por b, b por a e c por $\varphi(b)$ segue-se que ou $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)b \cup \varphi(b)\varphi(b)$ ou $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)b \cap \varphi(b)\varphi(b)$. Segue-se, do lema 3.5, que $\varphi(b)\varphi(b) = \{\varphi(b)\}$ e, portanto, ou $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)b \cup \{\varphi(b)\}$ ou $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)b \cap \{\varphi(b)\}$. Esta segunda opção é impossível porque, caso contrário, $\varphi(a)\varphi(b) = \{\varphi(b)\}$ e pelos lemas 3.3 e 3.10 tem-se que $\varphi(a) = \varphi(b)$ e $a = b$. Portanto $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)b \cup \{\varphi(b)\}$. Segue-se, do lema 3.7, que $a\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(b) \cup \{a\} = (\varphi(a)b \cup \{\varphi(b)\}) \cup \{a\} = (\varphi(a)b \cup \{a\}) \cup \{\varphi(b)\}$ e, novamente pelo lema 3.7, $a\varphi(b) = ab \cup \{\varphi(b)\}$. □

Teorema 3.13 Seja D uma família de conjuntos tal que:

- existe $e \in$ C tal que $\{e\} \in$ D;
- se F $\in$ D e $g \in$ C então F $\cup \{g\} \in$ D.

Tem-se que C $\in$ D.

Intuitivamente, $\bigcup$D é o conjunto dos elementos com uma dada propriedade.

Demonstração:

Por hipótese, existe $e \in$ C tal que $\{e\} \in$ D. Segue-se, do lema 3.5, que $ee = \{e\} \in$ D. Considere o seguinte conjunto H $= \{i; ei \in$ D$\}$. Tem-se que:

- H $\neq \varnothing$ porque $ee \in$ D e, por definição de H, $e \in$ H;
- H $\subseteq$ C. Seja $j \in$ H. Segue-se, do lema 3.4, que ej é uma quase-cadeia segundo j e, por definição de quase-cadeia, $j \in ej$. Porém $ej \subseteq$ C e, portanto, $j \in$ C;
- φ[H] $\subseteq$ H. Seja $k \in \varphi$[H], quer dizer, existe $l \in$ H tal que $\varphi(l) = k$. $l \in$ H portanto $el \in$ D. Se $e = \varphi(l)$ tem-se que $e\varphi(l) \in$ D e $\varphi(l) = k \in$ H. Se $e \neq \varphi(l)$ tem-se, do lema 3.12 e da segunda condição da família de conjuntos D, que $e\varphi(l) \in$ D, quer dizer, $\varphi(l) = k \in$ H.

Segue-se, do fato de C ser D_2-finito, que H = C. Pelo lema 3.1, $\varphi[C] = C$ e, portanto, para algum $m \in C$, $\varphi(m) = e$. Porém H = C, quer dizer, $m \in H$ e $em \in D$. $e = \varphi(m)$ portanto $\varphi(m)m \in D$ e, do lema 3.6, $\varphi(m)m = C \in D$. □

Em uma carta endereçada ao matemático alemão Heinrich Weber, parcialmente transcrita em (DEDEKIND, 1969), Dedekind demonstra a equivalência formal de sua definição com a definição aritmética usual, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha:

Teorema 3.14 Seja C um conjunto. C é D_2-finito se e somente se C é finito.

Demonstração:

Seja C um conjunto D_2-finito e φ uma função de Dedekind relativa a C. Se $C = \varnothing$ então C é finito. Portanto, seja $C \neq \varnothing$ e $c \in C$. Considere os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{\varphi(c)\}$;
- $D_{n+1} = \varphi[D_n]$, para $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $D_n = \{\varphi^{n+1}(c)\}$ para $n \in \mathbb{N}$;
- $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Tem-se que $\varnothing \neq D \subseteq C$ e $\varphi[D] \subseteq D$. Segue-se, do fato de φ ser uma função de Dedekind relativa a C, que D = C e, portanto, $c \in D$, quer dizer, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c \in D_n$ e para todo $m < n$ tem-se que $c \notin D_m$.

Demonstraremos que $C = \bigcup_{m \leq n} D_m$ e $D_p \neq D_q$ para $0 \leq p < q \leq n$.

Tem-se que $\varphi^{m+n+1}(c) = \varphi^{m}(c)$ e, portanto, $D_{m+n} = D_{m-1}$ para $m \geq 1$ e $\bigcup_{m \leq n} D_m = C$.

$D_n = \{\varphi^{n+1}(c)\} \neq \{\varphi^{m+1}(c)\} = D_m$ para todo $m < n$, pela definição do número natural n. Supor, por absurdo, que $D_p = \{\varphi^{p+1}(c)\} = \{\varphi^{q+1}(c)\} = D_q$ para $0 \leq p < q < n$. Neste caso $\varphi^{n-q}(\varphi^{p+1}(c)) = \varphi^{n-q}(\varphi^{q+1}(c))$, $\varphi^{n-q+p+1}(c) = \varphi^{n+1}(c) = c$ e $n - q + p + 1 < n + 1$, em contradição com a definição do número natural n. Portanto $D_p \neq D_q$ para $0 \leq p < q < n$ e todos os $\varphi^{m+1}(c)$ são distintos entre si, para $m \leq n$.

Neste caso C é finito, porque há uma correspondência biunívoca entre seus elementos e um segmento inicial dos números naturais, em sua ordem habitual. Especificamente, uma correspondência biunívoca com os números naturais menores ou iguais a n.

Desta demonstração concluimos, imediatamente, que φ é uma permutação cíclica dos $n + 1$ elementos de C.

Por outro lado, seja C um conjunto finito. Se $C = \varnothing$ então C é D_2-finito, porque $\varphi: \varnothing \to \varnothing$ é uma função de Dedekind relativa a C (a rigor, φ é a única função de Dedekind relativa a C). Portanto, seja $C \neq \varnothing$ um conjunto constituído dos elementos c_i, para $1 \leq i \leq n$. Considere a função φ: $C \to C$ tal que $\varphi(c_n) = c_1$ e $\varphi(c_i) = c_{i+1}$ para $1 \leq i < n$. Seja $\varnothing \neq D \subseteq C$ tal que $\varphi[D] \subseteq D$. $D \neq \varnothing$, portanto seja $d \in D$. Neste caso D contem todos os elementos $\varphi^n(d)$ para $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $D = C$, ou seja, C é D_2-finito. □

Obtivemos a seguinte demonstração da equivalência formal das definições de conjunto D_2-finito e de conjunto Z-finito, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha.

Teorema 3.15 Seja C um conjunto. C é Z-finito se e somente se C é D_2-finito.

Demonstração:

Seja C um conjunto Z-finito. Se $C = \varnothing$ então C é D_2-finito, porque $\varphi: \varnothing \to \varnothing$ é uma função de Dedekind relativa a C.

Portanto, supor que $C \neq \varnothing$. Seja φ um deslocamento de C, p elemento inicial de C segundo φ e u elemento terminal de C segundo φ. Considere a seguinte relação: $\psi = \varphi \cup \{<u, p>\}$.

Tem-se que:

- ψ é função porque, por definição, $u \notin \mathrm{dom}(\varphi)$.
- $\mathrm{dom}(\psi) = C$ porque, pelos lemas 1 e 3 do teorema 2.3, se $c \in C$ e $c \neq u$ então $c \in \mathrm{dom}(\varphi)$.
- $\mathrm{img}(\psi) \subseteq C$ porque, por definição, $\mathrm{img}(\varphi) \subset C$ e $p \in C$.

- se $\varnothing \neq D \subseteq C$ e $\psi[D] \subseteq D$ então $D = C$. Supor, por absurdo, que $p \notin D$. Segue-se, de $\psi[D] \subseteq D$ e de $p \notin D$, que $p \notin \psi[D]$. Segue-se, de $p \notin \psi[D]$, que $u \notin D$, quer dizer, $u \in C - D$. Seja $\varphi(d) \in C - D$, quer dizer, $\varphi(d) \notin D$. Segue-se, de $\psi[D] \subseteq D$ e de $\varphi(d) \notin D$, que $\varphi(d) \notin \psi[D]$, quer dizer, $d \notin D$ e, portanto, $d \in C - D$. Segue-se, do corolário 2.4, que $C - D = C$ e $D = \varnothing$, absurdo. Portanto $p \in D$. Seja $u \neq d \in D$. Tem-se, de $\psi[D] \subseteq D$, que $\psi(d) \in D$, quer dizer, $\varphi(d) \in D$ e, pelo corolário 2.2, $D = C$.

Seja C um conjunto D_2-finito e φ uma função de Dedekind relativa a C. Se $C = \varnothing$ então C é Z-finito. Portanto, supor que $C \neq \varnothing$. Seja $c \in C$. Considere a seguinte função: $\psi = \varphi - \{\langle c, \varphi(c)\rangle\}$. Tem-se que:

- $\mathrm{dom}(\psi) \subset C$. Por hipótese, $\mathrm{dom}(\varphi) = C$. $\mathrm{dom}(\psi) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi)$ portanto $\mathrm{dom}(\psi) \subseteq C$. $c \in C$ mas $c \notin \mathrm{dom}(\psi)$ logo $\mathrm{dom}(\psi) \subset C$.
- $\mathrm{img}(\psi) \subset C$. Por hipótese, $\mathrm{img}(\varphi) \subseteq C$. $\mathrm{img}(\psi) \subseteq \mathrm{img}(\varphi)$ portanto $\mathrm{img}(\psi) \subseteq C$. $\varphi(c) \in C$ mas $\varphi(c) \notin \mathrm{img}(\psi)$ porque φ é injetora (lema 3.10), logo $\mathrm{img}(\psi) \subset C$.
- ψ é função. Por hipótese, φ é função, portanto ψ é função.
- ψ é injetora. Por hipótese, φ é injetora (lema 3.10), portanto ψ é injetora.
- Seja $\{D,E\}$ uma partição de C. Por hipótese não se dá que $\varphi[D] \subseteq D$. Seja $a \in \varphi[D]$ mas $a \notin D$. Segue-se, de $a \in \varphi[D]$, que existe $b \in D$ tal que $\varphi(b) = a$. $\varphi(b) = a \notin D$ portanto $\varphi(b) \in E$ e $b \in C$ é tal que $b \in D$ e $\varphi(b) \in E$, quer dizer, $b \in C$ é tal que ou $b \in D$ e $\varphi(b) \in E$, ou $\varphi(b) \in D$ e $b \in E$. Por hipótese não se dá que $\varphi[E] \subseteq E$. Seja $d \in \varphi[E]$ mas $d \notin E$. Segue-se, de $d \in \varphi[E]$, que existe $e \in E$ tal que $\varphi(e) = d$. $\varphi(e) = d \notin E$ portanto $\varphi(e) \in D$ e $e \in C$ é tal que $e \in E$ e $\varphi(e) \in D$, quer dizer, $e \in C$ é tal que ou $e \in E$ e $\varphi(e) \in D$, ou $\varphi(e) \in E$ e $e \in D$. $b \in D$ e $e \in E$ portanto $b \neq e$, e $b \neq c$ ou $e \neq c$, donde segue-se que existe $f \in C$ tal que ou $f \in D$ e $\psi(f) \in E$, ou $\psi(f) \in D$ e $f \in E$. □

4 DEFINIÇÃO DE ALARCÓN ATHENS

ALARCÓN ATHENS (1987) fornece uma definição de conjunto finito que apreende a seguinte noção intuitiva: um conjunto é finito se e somente se extraindo seus elementos de um em um obtemos o conjunto vazio ou, em termos ainda mais simples, um conjunto é finito se e somente se extraindo seus elementos de um em um exaurimos o conjunto no único sentido conjuntista possível, isto é, retirando todos os seus elementos. Esta noção intuitiva é formalizada através das seguintes definições:

Definição 4.1 (Família de Conjuntos Unitariamente Decrescente) Uma família de conjuntos F é unitariamente decrescente se e somente se para todo conjunto não-vazio G pertencente a F existe um conjunto H pertencente a F tal que $H = G - \{g\}$ para algum $g \in G$.

Definição 4.2 (Conjunto Finito, no Sentido de Alarcón Athens) Um conjunto C é A_1-finito se e somente se o conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é A_1-finito. Considere os seguintes conjuntos:

- para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \{m \in \mathbb{N}; m \geq n\}$;
- $F = \{C_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Tem-se que:

- $F \neq \varnothing$ porque $C_0 = \mathbb{N} \in F$;
- $F \subseteq \wp(\mathbb{N})$ porque se $C \in F$ então $C = C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $C \subseteq \mathbb{N}$, quer dizer, $C \in \wp(\mathbb{N})$;
- F é unitariamente decrescente. Seja $\varnothing \neq C \in F$. $C \in F$ portanto $C = C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. $C_{n+1} = C_n - \{n\} \in F$ para $n \in C_n$;
- $\varnothing \notin F$ porque, caso contrário, $C_n = \varnothing$ para algum $n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo porque $n \in C_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

F é uma família não-vazia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ unitariamente decrescente tal que $\varnothing \notin$ F e, portanto, $\mathbb{N}$ não é A_1-finito.

Alarcón Athens fornece variantes de sua definição básica , logicamente equivalentes à definição básica, cujas demonstrações de equivalência lógica prescindem do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha. A primeira destas variantes é obtida a partir das seguintes definições:

Definição 4.3 (Família de Conjuntos C-Unitariamente Crescente) Seja C um conjunto e F uma família de conjuntos. F é C-unitariamente crescente se e somente se para todo conjunto G pertencente a F e distinto de C existe um conjunto H pertencente a F tal que $H = G \cup \{g\}$ para algum $g \in C - G$.

Definição 4.4 (Variante da Definição 4.2) Um conjunto C é A_2-finito se e somente se o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é A_2-finito. Considere os seguintes conjuntos:

- para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \{m \in \mathbb{N}; m < n\}$;
- $F = \{C_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Tem-se que:

- $F \neq \varnothing$ porque $C_0 = \varnothing \in F$;
- $F \subseteq \wp(\mathbb{N})$ porque se $C \in F$ então $C = C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $C \subseteq \mathbb{N}$, quer dizer, $C \in \wp(\mathbb{N})$;
- F é $\mathbb{N}$-unitariamente crescente. Seja $\mathbb{N} \neq C \in F$. $C \in F$ portanto $C = C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. $C_{n+1} = C_n \cup \{n\}$ para $n \notin C_n$, quer dizer, para $n \in \mathbb{N} - C_n$;
- $\mathbb{N} \notin F$ porque, caso contrário, $C_n = \mathbb{N}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo porque $n \notin C_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

F é uma família não-vazia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$-unitariamente crescente tal que $\mathbb{N} \notin$ F e, portanto, $\mathbb{N}$ não é A_2-finito.

A equivalência lógica desta variante com a definição básica é obtida a partir do seguinte resultado:

Lema 4.1 Seja C um conjunto. O conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente se e somente se C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente.

Demonstração:

Seja D uma família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente. Considere a família de conjuntos $E = \{F \subseteq C; C - F \in D\}$, isto é, a família dos complementos com respeito a C dos elementos de D. Tem-se que:

- E é uma família de subconjuntos de C, por definição.
- $E \neq \varnothing$. Por hipótese, $D \neq \varnothing$. Seja $G \in D$. Neste caso $C - G \in E$ porque $C - G \subseteq C$ e $C - (C - G) = G$ para $G \subseteq C$.
- E é unitariamente decrescente. Seja $\varnothing \neq H \in E$. Por definição de E, $H \subseteq C$ e $C - H \in D$. Segue-se, de $H \neq \varnothing$, que $C - H \neq C$. D é uma família de subconjuntos de C C-unitariamente crescente, portanto existe $I \in D$ tal que $I = (C - H) \cup \{h\}$ para $h \in C - (C - H)$, quer dizer, $I = C - (H - \{h\})$ para $h \in H$. Por definição de E, $H - \{h\} \in E$ para $h \in H$.

Segue-se que E é uma família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente e, por hipótese, $\varnothing \in E$, isto é, $C - \varnothing = C \in D$.

Seja D uma família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente. Considere a família de conjuntos $E = \{F \subseteq C; C - F \in D\}$, isto é, a família dos complementos com respeito a C dos elementos de D. Tem-se que:

- E é uma família de subconjuntos de C, por definição.
- $E \neq \varnothing$. Por hipótese, $D \neq \varnothing$. Seja $G \in D$. Neste caso $C - G \in E$ porque $C - G \subseteq C$ e $C - (C - G) = G$ para $G \subseteq C$.

- E é C-unitariamente crescente. Seja $C \neq H \in E$. Por definição de E, $H \subseteq C$ e $C - H \in D$. Segue-se, de $H \neq C$, que $C - H \neq \emptyset$. D é uma família de subconjuntos de C unitariamente decrescente, portanto existe $I \in D$ tal que $I = (C - H) - \{i\}$ para $i \in C - H$, quer dizer, $I = C - (H \cup \{i\})$ para $i \in C - H$. Por definição de E, $H \cup \{i\} \in E$ para $i \in C - H$.

Segue-se que E é uma família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente e, por hipótese, $C \in E$, isto é, $C - C = \emptyset \in D$. □

Alarcón Athens demonstra a equivalência lógica de sua definição com a definição aritmética usual, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha. Demonstraremos este resultado, utilizando as definições de conjunto finito de Tarski e de Russell, cuja equivalência lógica com a definição aritmética usual, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, pode ser encontrada na literatura (consulte, por exemplo, (TARSKI, 1924)).

Teorema 4.2 Seja C um conjunto. Se C é T_1-finito então C é A_1-finito.

Demonstração:

Seja F uma família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente. Por hipótese, $F \subseteq \wp(C)$ e $F \neq \emptyset$. Segue-se, disto e do fato de C ser T_1-finito, que existe $G \in F$ tal que se $H \in F$ e $H \subseteq G$ então $H = G$. Supor, por absurdo, que $G \neq \emptyset$. Segue-se, do fato de F ser unitariamente decrescente, que existe $H \in F$ tal que $H = G - \{g\}$ para $g \in G$, absurdo. Portanto $G = \emptyset$ e C é A_1-finito. □

Teorema 4.3 Seja C um conjunto. Se C é A_1-finito então C é R_1-finito.

Demonstração:

Por hipótese, C é um conjunto A_1-finito, quer dizer, o conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C unitariamente decrescente e, pelo lema 4.1, o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente.

Seja F uma família indutiva de C. Considere o conjunto $G = \{H \in F; H \subseteq C\}$. Por definição, $G \subseteq \wp(C)$. $G \neq \emptyset$ porque, por definição de família indutiva, $\emptyset \in F$, e $\emptyset \subseteq C$, qualquer que seja o conjunto C. Se $C \neq I \in G$ então existe $J \in G$ tal que $J = I \cup \{i\}$ para $i \in C - I$ (seja $C \neq I \in G$. $I \neq C$ portanto existe $i \in C - I$. $I \in G$ portanto $I \in F$, mas F é família indutiva de C, portanto $I \cup \{j\} \in F$ para todo $j \in C$, em particular para $j = i \in C - I$. Neste caso $I \cup \{i\} \in G$ porque $I \cup \{i\} \in F$ e $I \cup \{i\} \subseteq C$). Portanto, G é uma família não-vazia de subconjuntos de C C-unitariamente crescente e, por hipótese, $C \in G$. Logo $C \in F$ e C é R_1-finito. □

Uma outra variante é obtida a partir da seguinte definição:

Definição 4.5 (Família de Conjuntos Fechada por Extrações Unitárias) Uma família de conjuntos F é fechada por extrações unitárias se e somente se para todo conjunto G pertencente a F e para todo elemento g pertencente a G tem-se que $G - \{g\}$ pertence a F.

Definição 4.6 (Variante da Definição 4.2) Um conjunto C é A_3-finito se e somente se o conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C fechada por extrações unitárias.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é finito, segundo esta variante. Considere a seguinte família de conjuntos: $F = \{C \in \wp(\mathbb{N}); \exists n\, (n \in C \wedge \forall m\, (m \in C \rightarrow m \geq n))\}$. Tem-se que:

- $F \neq \varnothing$ porque $\mathbb{N} \in F$ ($0 \in \mathbb{N}$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$);
- $F \subseteq \wp(\mathbb{N})$ porque se $C \in F$ então $C \in \wp(\mathbb{N})$;
- F é fechada por extrações unitárias. Seja $C \in F$ e $c \in C$. $C \in F$ portanto existe $n \in C$ tal que para todo $m \in C$, $m \geq n$. Seja p o menor elemento de $C - \{c\}$. Se $p = n$ então $c \neq n$ e $C - \{c\}$ é tal que $n \in C - \{c\}$ e para todo $m \in C - \{c\}$, $m \geq n$. Portanto $C - \{c\} \in F$. Se $p \neq n$ então $c = n$ e $C - \{c\}$ é tal que $p \in C - \{c\}$ e para todo $m \in C - \{c\}$, $m \geq p$. Portanto $C - \{c\} \in F$;
- $\varnothing \notin F$ porque para todo $C \in F$ existe $n \in C$.

F é uma família não-vazia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ fechada por extrações unitárias tal que $\varnothing \notin$ F e, portanto, $\mathbb{N}$ não é A_3-finito.

Por sugestão do doutor Carlos Gustavo González, investigamos as propriedades de uma nova definição de conjunto finito:

Definição 4.7 (Família de Conjuntos Minimamente Unitàriamente Decrescente) Uma família de conjuntos F é minimamente unitariamente decrescente se e somente se para todo conjunto não-vazio G pertencente a F existe um *único* conjunto H pertencente a F tal que H = G - $\{g\}$ para algum $g \in$ G.

Definição 4.8 (Conjunto Finito, no Sentido de González) Um conjunto C é G_1-finito se e somente se o conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C minimamente unitariamente decrescente.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é G_1-finito. Considere a família de conjuntos F, que utilizamos para demonstrar que $\mathbb{N}$ não é A_1-finito.Tem-se que F é minimamente unitariamente decrescente: supor, por absurdo, que $m \neq n + 1$ é tal que $C_m = C_n - \{c\}$ para $c \in C_n$. $m \neq n + 1$ portanto ou $m < n + 1$ ou $n + 1 < m$. Se $m < n + 1$ então $C_{n+1} \subseteq C_m$ (seja $a \in C_{n+1}$. Neste caso, $a \geq n + 1$. Porém $n + 1 > m$ e, portanto, $a \geq m$, isto é, $a \in C_m$). $c \notin C_m$ portanto $c \notin C_{n+1}$, o que é um absurdo porque $c \in C_n$ e $c \neq n$. Do mesmo modo, se $n + 1 < m$ então $C_m \subseteq C_{n+1}$ (seja $a \in C_m$. Neste caso, $a \geq m$. Porém $m > n + 1$ e, portanto, $a \geq n + 1$, quer dizer, $a \in C_{n+1}$). $n \notin C_{n+1}$ portanto $n \notin C_m$, o que é um absurdo porque $n \in C_n$ e $n \neq c$.

Demonstramos a equivalência lógica desta definição com a definição de conjunto D_1-finito, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha. A demonstração utiliza o seguinte resultado:

Teorema 4.4 Seja C um conjunto. C é D_I-infinito se e somente se C contem um subconjunto enumerável.

Demonstração:

Seja C um conjunto D_I-infinito. Segue-se, da definição, que existe um subconjunto próprio D de C e uma função φ: C $\rightarrow$ D tal que φ é bijetora. Seja $a \in$ C - D. Considere a seguinte relação: $<b,c> \in$ R se e somente se ou $b = 0$ e $c = a$, ou $b = n + 1$ e $c = \varphi^{n+1}(a)$ para $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

- R é uma função. Se $b = 0$ então $b \neq n + 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Portanto, os dois casos da definição de R são distintos. Por hipótese, φ é função, portanto, para $b = n + 1$, c é único.
- R é injetora. Seja R(b) = R(c). Se $b = 0$ e $c = 0$, então $b = c$. Se $b = n + 1$ e $c = m + 1$, então $\varphi^{n+1}(a) = \varphi^{m+1}(a)$. Supor $n > m$ (o argumento é análogo para $m > n$). Neste caso, $\varphi^{m+1}(\varphi^{n-m}(a)) = \varphi^{m+1}(a)$. Por hipótese, φ é função injetora, logo $\varphi^{n-m}(a) = a$ e $a \in$ D, absurdo. Se $b = 0$ e $c = n + 1$, então $a = \varphi^{n+1}(a)$, quer dizer, $a \in$ D, absurdo.
- dom(R) = $\mathbb{N}$.
- img(R) $\subseteq$ C. Se $d \in$ img(R), então ou $d = a$ ou $d = \varphi^{n+1}(a)$ para $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, $a \in$ C - D, isto é, $a \in$ C. Por hipótese, φ[C] = D $\subset$ C, portanto se $d = \varphi^{n+1}(a)$, então $d \in$ C.

Seja C um conjunto que contem um subconjunto enumerável e D um subconjunto enumerável de C. Fixe uma enumeração de D, φ: $\mathbb{N} \rightarrow$ D, e considere a seguinte relação: $<a,b> \in$ R se e somente se ou $a \in$ C - D e $b = a$, ou $a \in$ D e $b = \varphi(\varphi^{-1}(a) + 1)$. Tem-se que:

- R é uma função. Se $a \in$ C - D então $a \notin$ D, quaisquer que sejam os conjuntos C e D. Portanto, os dois casos da definição de R são distintos. Por hipótese, φ é função injetora, portanto φ^{-1} é função e, para $a \in$ D, b é único.
- R é injetora. Seja R(a) = R(b). Se $a \in$ C - D e $b \in$ C - D, então a = R(a) = R(b) = b. Se $a \in$ D e $b \in$ D, então $\varphi(\varphi^{-1}(a) + 1)$ = R(a) = R(b) = $\varphi(\varphi^{-1}(b) + 1)$. Por hipótese, φ é função bijetora, portanto $\varphi^{-1}(a) + 1 = \varphi^{-1}(b) + 1$, $\varphi^{-1}(a) = \varphi^{-1}(b)$ e $a = b$. Se $a \in$ C - D e $b \in$ D, então a = R(a) = R(b) = $\varphi(\varphi^{-1}(b) + 1)$, quer dizer, $a \in$ D, absurdo.
- dom(R) = C.

- $img(R) \subset C$. Se $a \in C - D$, então $R(a) = a \in C$. Se $a \in D$, então $R(a) \in C$, porque $\varphi^{-1}(a) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in D$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e $D \subset C$. $\varphi(0) \in C$ porque, por hipótese, $\varphi(0) \in D$ e $D \subset C$. Supor, por absurdo, que $\varphi(0) \in img(R)$. Neste caso, $\varphi(0) = \varphi(\varphi^{-1}(a) + 1)$ para algum $a \in D$, contradizendo o fato de φ ser função injetora. □

Teorema 4.5 Seja C um conjunto. Se C é D_1-infinito, então C é G_1-infinito.

Demonstração:

Seja C um conjunto D_1-infinito. Segue-se, do teorema 4.4, que existe um subconjunto enumerável D de C. Fixe uma enumeração de D, $\varphi: \mathbb{N} \to D$, e considere os seguintes conjuntos:

- para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{\varphi(x); x \geq n\}$;
- $F = \{E_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstra-se que $\varnothing \neq F \subseteq \wp(C)$ é minimamente unitariamente decrescente. Segue-se, de $\varnothing \notin F$, que C é G_1-infinito.

(Existência) Seja $E_n \in F$. Quer-se encontrar um conjunto $G \in F$ tal que $G = E_n - \{e\}$ para $e \in E_n$. Segue-se, da definição da família de conjuntos F, que $E_{n+1} = E_n - \{\varphi(n)\}$ para $\varphi(n) \in E_n$. Portanto E_{n+1} é um dos conjuntos que satisfaz à condição.

(Unicidade) Seja $E_n \in F$. Supor que $E_{n+1} \neq E_m \in F$ é tal que $E_m = E_n - \{e\}$ para $e \in E_n$. $m \neq n + 1$ portanto ou $m < n + 1$ ou $n + 1 < m$. Se $m < n + 1$ então $E_{n+1} \subseteq E_m$ (seja $\varphi(a) \in E_{n+1}$. Segue-se, por definição, que $a \geq n + 1$. Porém, por hipótese, $n + 1 > m$ e, portanto, $a \geq m$ e, por definição, $\varphi(a) \in E_m$). $e \notin E_m$ porque $E_m = E_n - \{e\}$, portanto $e \notin E_{n+1}$. Porém $e \in E_n$ e $E_{n+1} = E_n - \{\varphi(n)\}$, portanto $e = \varphi(n)$, $E_{n+1} = E_m$ e $n + 1 = m$, absurdo. Logo, não se dá que $m < n + 1$. Se $n + 1 < m$ então $E_m \subseteq E_{n+1}$ (seja $\varphi(a) \in E_m$. Segue-se, por definição, que $a \geq m$. Porém, por hipótese, $m > n + 1$ e, portanto, $a \geq n + 1$ e, por definição, $\varphi(a) \in E_{n+1}$). $\varphi(n) \notin E_{n+1}$ porque $E_{n+1} = E_n - \{\varphi(n)\}$, portanto $\varphi(n) \notin E_m$. Porém $\varphi(n) \in E_n$ e $E_m = E_n - \{e\}$, portanto $\varphi(n) = e$, $E_m = E_{n+1}$ e $m = n + 1$, absurdo. Logo não se dá que $n + 1 < m$. Portanto $m = n + 1$, E_{n+1} é o único conjunto pertencente a F tal que $E_{n+1} = E_n - \{e\}$ para $e \in E_n$ e F é minimamente unitariamente decrescente. □

Teorema 4.6 Seja C um conjunto. Se C é G_1-infinito, então C é D_1-infinito.

Demonstração:

Seja C um conjunto G_1-infinito. Por definição, existe uma família não-vazia F de subconjuntos de C minimamente unitariamente decrescente tal que $\emptyset \notin$ F. Obteremos, a partir de F, um subconjunto enumerável de C. Disto e do teorema 4.4 segue-se que C é D_1-infinito.

Por hipótese F $\neq \emptyset$. Seja G $\in$ F. Considere a seguinte relação binária em $\mathbb{N}$ x G: $< n, a> \in$ R se e somente se:

1. $a \in \mathrm{G} - \{b; <m,b> \in \mathrm{R} \wedge m < n\}$;

2. $(\mathrm{G} - \{b; <m,b> \in \mathrm{R} \wedge m < n\}) - \{a\} \in \mathrm{F}$.

Demonstraremos que R é uma função injetora de $\mathbb{N}$ em G. A demonstração utiliza indução matemática em n.

(Base indutiva) Por hipótese, G $\in$ F e $\emptyset \notin$ F, portanto G $\neq \emptyset$. Segue-se, do fato de F ser minimamente unitariamente decrescente, que existe um e somente um $g \in$ G tal que G - $\{g\}$ $\in$ F. Por definição da relação binária R, $<0,g> \in$ R e se $<0,a> \in$ R então $a = g$.

(Passo indutivo) Por hipótese indutiva, seja g tal que $g \in \mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}$ e $(\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{g\} \in \mathrm{F}$. Por hipótese, $\emptyset \notin$ F, portanto $(\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{g\} \neq \emptyset$. Segue-se, do fato de F ser minimamente unitariamente decrescente, que existe um e somente um $h \in (\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{g\}$ tal que $((\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{g\}) - \{h\} \in \mathrm{F}$. Porém, $\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m + 1\} = \mathrm{G} - (\{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\} \cup \{b; <m,b> \in \mathrm{R}\}) = (\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{b; <m,b> \in \mathrm{R}\} = (\mathrm{G} - \{a; <p,a> \in \mathrm{R} \wedge p < m\}) - \{g\}$. Portanto, por definição de R, h é o único elemento de G tal que $<m + 1,h> \in$ R.

(R é injetora) Seja $\mathrm{R}(m) = \mathrm{R}(n) = i \in \mathrm{G}$, isto é, $i \in \mathrm{G} - \{\mathrm{R}(a); a < m\}$ e $i \in \mathrm{G} - \{\mathrm{R}(b); b < n\}$. Supor que $m \neq n$. Neste caso ou $m < n$ ou $n < m$. Seja $m < n$ (o argumento é análogo para $n < m$). Tem-se, de $m < n$ e $i \in \mathrm{G} - \{\mathrm{R}(b); b < n\}$, que $\mathrm{R}(m) \neq i$, absurdo. Portanto $m = n$. □

Segue-se, dos dois teoremas acima demonstrados, que à luz da axiomática de Zermelo-Fraenkel sem o axioma da escolha, as definições de conjunto G_1-finito e de D_1-finito são logicamente equivalentes. JECH (1973) demonstra que o axioma de Dedekind, segundo o qual todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável, não implica o axioma da escolha enumerável, segundo o qual toda família enumerável de conjuntos enumeráveis tem uma função de escolha, porém implica o axioma segundo o qual toda família enumerável de conjuntos finitos tem uma função de escolha[1]. Portanto é suficiente, porém não necessário, utilizar o axioma da escolha enumerável para demonstrar que as definições de conjunto G_1-finito e finito são formalmente equivalentes.

Por analogia entre as definições 4.2 e 4.4, obtivemos uma variante da definição de Alarcón Athens e uma variante da definição de González:

Definição 4.9 (Família de Conjuntos Fechada por C-Acréscimos Unitários) Seja C um conjunto e F uma família de conjuntos. F é fechada por C-acréscimos unitários se e somente se para todo conjunto $C \neq G \in F$ e todo elemento $h \in C - G$ tem-se que $G \cup \{h\} \in F$.

Definição 4.10 (Variante da Definição 4.2) Um conjunto C é A_4-finito se e somente se o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C fechada por C-acréscimos unitários.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é finito, segundo esta variante. Considere a seguinte família de conjuntos: $F = \{C \in \wp(\mathbb{N}); \exists n\, (n \in C \wedge \forall m\, (m \in C \rightarrow m \leq n))\}$. Tem-se que:

- $F \neq \varnothing$ porque $\{0\} \in F$;
- $F \subseteq \wp(\mathbb{N})$ porque se $C \in F$ então $C \in \wp(\mathbb{N})$;

[1] Agradeço o dr. Carlos Gustavo González pelas observações a respeito das relações formais entre o axioma de Dedekind e formas fracas do axioma da escolha.

- F é fechada por $\mathbb{N}$-acréscimos unitários. Seja $\mathbb{N} \neq C \in F$ e $c \in \mathbb{N} - C$. $C \in F$ portanto existe $n \in C$ tal que para todo $m \in C$, $m \leq n$. Seja p o maior elemento de $C \cup \{c\}$, quer dizer, ou $p = n$ ou $p = c$. $C \cup \{c\}$ é tal que $p \in C \cup \{c\}$ e para todo $m \in C \cup \{c\}$, $m \leq p$. Portanto $C \cup \{c\} \in F$;
- $\mathbb{N} \notin F$ porque para todo $C \in F$ existe $n \in C$ tal que para todo $m \in C$, $m \leq n$, quer dizer, para todo $C \in F$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \notin C$ (basta considerar o caso em que $p = n + 1$).

F é uma família não-vazia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ fechada por $\mathbb{N}$-acréscimos unitários tal que $\mathbb{N} \notin F$ e, portanto, $\mathbb{N}$ não é finito, segundo esta variante.

A equivalência lógica desta variante com a definição básica, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, é obtida a partir do seguinte resultado:

Lema 4.7 Seja C um conjunto. O conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C fechada por extrações unitárias se e somente se o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C fechada por C-acréscimos unitários.

Demonstração:

Análoga ao do lema 4.1, isto é, utilizando a família dos complementos em relação a C. □

Definição 4.11 (Família de Conjuntos Minimamente C-Unitariamente Crescente) Seja C um conjunto e F uma família de subconjuntos de C. F é minimamente C-unitariamente crescente se e somente se para todo conjunto $C \neq G \in F$ existe um *único* conjunto $H \in F$ tal que $H = G \cup \{h\}$ para algum $h \in C - G$.

Definição 4.12 (Variante da Definição 4.8) Um conjunto C é G_2-finito se e somente se o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C minimamente C-unitariamente crescente.

Demonstraremos, a título de ilustração, que $\mathbb{N}$ não é finito, segundo esta variante. Considere a família de conjuntos F, que utilizamos para demonstrar que $\mathbb{N}$ não é finito, segundo a definição 4.4. Tem-se que F é minimamente $\mathbb{N}$-unitariamente crescente: supor, por absurdo, que $m \neq n + 1$ é tal que $C_m = C_n \cup \{c\}$ para $c \in \mathbb{N} - C_n$. $m \neq n + 1$ portanto ou $m < n + 1$ ou $n + 1 < m$. Se $m < n + 1$ então $C_m \subseteq C_{n+1}$ (seja $a \in C_m$. Neste caso, $a < m$. Porém $m < n + 1$ e, portanto, $a < n + 1$ e $a \in C_{n+1}$). $c \notin C_{n+1}$ porque $c \neq n$, caso contrário $C_m = C_{n+1}$, e $c \notin C_n$ porque $c \in \mathbb{N} - C_n$; o que é um absurdo porque $c \in C_m$. Se $n + 1 < m$ então $C_{n+1} \subseteq C_m$ (seja $a \in C_{n+1}$. Neste caso, $a < n + 1$. Porém $n + 1 < m$ e, portanto, $a < m$ e $a \in C_m$). $n \notin C_m$ porque $n \neq c$, caso contrário $C_{n+1} = C_m$, e $n \notin C_n$; o que é um absurdo porque $n \in C_{n+1}$.

A equivalência lógica desta variante com a definição de González, prescindindo do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha, é obtida a partir do seguinte resultado:

Lema 4.8 Seja C um conjunto. O conjunto vazio pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C minimamente unitariamente decrescente se e somente se o conjunto C pertence a toda família não-vazia de subconjuntos de C minimamente C-unitariamente crescente.

Demonstração:

Análoga ao do lema 4.1, quer dizer, utilizando a família dos complementos em relação a C.

□

5. QUESTÕES DE METAMATEMÁTICA

Ao longo deste trabalho, examinamos a questão 'conjuntos finitos' de um ponto-de-vista sintático. Neste capítulo examiná-la-emos com o auxílio da semântica. Na primeira seção demonstraremos a consistência da teoria de conjuntos finitos relativa à consistência da teoria pura de números e na segunda seção analisaremos uma crítica de von Neumann ao intuicionismo e ao formalismo, estritamente vinculada ao tema 'categoricidade da teoria de conjuntos'.

5.1 A Consistência Relativa da Teoria de Conjuntos Finitos

ACKERMANN (1937) demonstra a consistência da teoria geral de conjuntos (axiomática de Zermelo-Fraenkel excluído o axioma do infinito) relativa à consistência da teoria pura de números, cuja consistência, segundo o autor, *pode ser considerada assegurada nas desejadas proporções* (*in dem gewünschten Umfange als gesichert betrachtet werden kann*, no original), e remete a demonstração da consistência da teoria pura de números a GENTZEN (1936).

A teoria geral de conjuntos consiste em um domínio específico de objetos, conjuntos, e em uma relação binária $\in$ entre objetos deste domínio, a relação de pertinência de um conjunto a outro conjunto. Ackermann interpreta estes elementos na teoria pura de números do seguinte modo:

- o domínio de objetos é interpretado como o conjunto dos números inteiros não-negativos;
- a interpretação da relação binária $\in$ entre objetos do domínio dá-se baseada no seguinte fato: todo número inteiro positivo pode ser posto na forma normal $\sum_{i=1}^{n} 2^{b_i}$ onde $b_i \neq b_j$ para $1 \leq i < j \leq n$. Tem-se que $\in^{\mathrm{I}}$, a interpretação de $\in$, é tal que $\in^{\mathrm{I}}(m,n)$ se e somente se $n = \sum_{i=1}^{p} 2^{b_i}$ e $m = b_i$ para algum $1 \leq i \leq p$. Por exemplo, $\varnothing$ é interpretado como o número

inteiro 0 porque $\varnothing \notin$ img($\in$) e 0 $\notin$ img($\in^I$); $\{\varnothing\}$ é interpretado como o número inteiro 1 porque se $x = \{\varnothing\}$ então $<\varnothing, x>$ pertence à relação $\in$ e se $y = 1$ então $<0,y>$ pertence à relação $\in^I$.

Ackermann observa que uma simples tradução dos axiomas da teoria geral de conjuntos em enunciados aritméticos, conforme a interpretação acima fornecida, não é adequada porque, na teoria geral de conjuntos, também quantificamos sobre predicados (lembremos, por exemplo, do enunciado do esquema de axiomas da separação) e, portanto, precisaríamos da consistência absoluta da análise para levar a termo a demonstração. Ackermann constata que a consistência da análise não havia à época sido fornecida por métodos 'Hilbertianos' (*der Analysis, ..., dessen Widerspruchsfreiheit bisher nicht mit den Hilbertschen Methoden hat gezeigt werden können*, no original). Para contornar esta dificuldade, Ackermann utiliza as seguintes funções aritméticas primitivas recursivas[1]:

- $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(n + 1) = 0$;
- $\beta(0) = 0$ e $\beta(n + 1) = \alpha(\beta(n))$;
- $\lambda(m,0) = \alpha(m)$, $\lambda(0,n) = \alpha(n)$ e $\lambda(m + 1,n + 1) = \lambda(m,n)$;
- $\iota(m,n) = \alpha(\lambda(m,n))$;
- $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(n + 1) = \gamma(n) + \beta(n)$;
- $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 0$ e $\mu(n + 2) = \mu(\gamma(n + 2)) + 1$;
- $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 0$ e $\tau(n + 2) = 2.\tau(\gamma(n + 2)) + \beta(n + 2)$;
- $\varphi(m,0) = 0$ e $\varphi(m,n) = \iota(n,0).\lambda(m,\mu(n)) + \iota(m,\mu(n)).\varphi(m,\tau(n))$.

Demonstramos que tais funções são primitivas recursivas utilizando a seguinte noção de função primitiva recursiva (consulte (EPSTEIN & CARNIELLI, 1989)):

- considere as seguintes funções básicas:
  - função zero - para todo $n \in \mathbb{N}$, $Z(n) = 0$;
  - função sucessor - para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ é o número que sucede imediatamente a n na sequência dos números naturais, em sua ordem habitual;
  - funções de projeção - para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo $1 \leq n \leq m$, $P_{m,n}(x_1, \ldots, x_m) = x_n$.

---

[1] Ackermann trata-as como recursivas, embora tenhamos verificado que elas são, de fato, primitivas recursivas.

- considere as seguintes operações básicas:
  - composição - se g é uma função m-ária e $h_1, \ldots, h_m$ são funções n-árias, então obtem-se por composição a função n-ária $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$;
  - recursão primitiva - se g é uma função n-ária e h é uma função $(n + 2)$-ária, então obtem-se por recursão primitiva a função $(n + 1)$-ária $f(0,x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ e $f(n + 1, x_1, \ldots, x_n) = h(f(n,x_1, \ldots, x_n), n, x_1, \ldots, x_n)$;
- as funções primitivas recursivas são a menor classe contendo as funções básicas e fechada pelas operações básicas.
- para os nossos propósitos, precisamos do seguintes resultados:
  - recursão por curso-de-valores: para qualquer argumento da função, podemos utilizar valores da função referentes a quaisquer argumentos anteriores, desde que o processo de seleção destes argumentos seja primitivo recursivo;
  - definição por casos: podemos especificar valores a uma quantidade arbitrária de argumentos da função, desde que o processo de seleção destes argumentos seja primitivo recursivo.

Seguem as demonstrações da recursividade primitiva das funções, precedidas de explicação do conteúdo das mesmas:

Intuitivamente, α é a função unária característica da constante numérica 0. α é uma função primitiva recursiva porque:

- $A_1(x, y) = Z(P_{2,2}(x,y))$, por composição;
- $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(n + 1) = A_1(\alpha(n),n)$, por recursão primitiva.

Intuitivamente, β é a função unária de resto módulo 2. β é uma função primitiva recursiva porque:

- $A_2(x,y) = \alpha(P_{2,1}(x,y))$, por composição;
- $\beta(0) = 0$ e $\beta(n + 1) = A_2(\beta(n),n)$, por recursão primitiva.

Intuitivamente, λ é a função binária que fornece o valor 1 se os argumentos são idênticos e 0 em caso contrário. λ é uma função primitiva recursiva porque:

- $A_3(0) = 0$ e $A_3(n + 1) = P_{2,2}(A_3(n),n)$, por recursão primitiva;
- $A_4(x,y,z) = A_3(P_{3,1}(x,y,z))$, por composição;
- $A_5(0,x) = P_{1,1}(x)$ e $A_5(n + 1,x) = A_4(A_5(n,x),n,x)$, por recursão primitiva;
- $A_6(x,y) = A_5(P_{2,2}(x,y),P_{2,1}(x,y))$, por composição;
- $A_7(x,y,z) = S(P_{3,1}(x,y,z))$, por composição;
- $+(0,x) = P_{1,1}(x)$ e $+(n + 1,x) = A_7(+(n,x),n,x)$, por recursão primitiva;
- $A_8(x,y) = +(A_5(x,y),A_6(x,y))$, por composição;
- $\lambda(x,y) = \alpha(A_8(x,y))$, por composição.

Intuitivamente, ι é a função binária que fornece o valor 1 se os argumentos não são idênticos e 0 em caso contrário. ι é uma função primitiva recursiva porque $\iota(m,n) = \alpha(\lambda(m,n))$, por composição.

Intuitivamente, γ é a função unária que fornece o maior número natural menor ou igual à divisão do argumento por 2. γ é uma função primitiva recursiva porque:

- $A_9(x,y) = \beta(P_{2,2}(x,y))$, por composição;
- $A_{10}(x,y) = +(P_{2,1}(x,y),A_9(x,y))$, por composição;
- $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(n + 1) = A_{10}(\gamma(n),n)$, por recursão primitiva.

Intuitivamente, μ é a função unária cujo valor, para um dado argumento, é o expoente da maior potência de 2 do argumento se o argumento é distinto de 0 e 0 em caso contrário. Para demonstrar que μ é função primitiva recursiva, utilizamos definição por casos e recursão por curso-de-valores. É suficiente demonstrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(n + 2) < n + 2$. Considere o seguinte:

Lema auxiliar: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\beta(n) \leq 1$.

Demonstração: Aplicação de indução matemática em n. Se $n = 0$ então $\beta(n) = 0 \leq 1$. Se $n = m + 1$ então $\beta(n) = \alpha(\beta(m))$. Por hipótese indutiva, $\beta(m) \leq 1$. Se $\beta(m) = 0$ então $\beta(n) = \alpha(0) = 1 \leq 1$. Se $\beta(m) = 1$ então $\beta(n) = \alpha(1) = 0 \leq 1$.

Demonstraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(n + 2) < n + 2$, aplicando indução matemática em n. Se $n = 0$ então $\gamma(n + 2) = \gamma(1) + \beta(1) = (\gamma(0) + \beta(0)) + \alpha(\beta(0)) = \alpha(0) = 1 < 2$. Se $n = m + 1$ então $\gamma(n + 2) = \gamma(m + 2) + \beta(m + 2)$. Segue-se, por hipótese indutiva e pelo lema auxiliar, que $\gamma(n + 2) < n + 2$.

Intuitivamente, τ é a função unária cujo valor, para um dado argumento, é a diferença entre o argumento e a maior potência de 2 do argumento se o argumento é distinto de 0 e 0 em caso contrário.Para demonstrar que τ é uma função primitiva recursiva, utilizamos definição por casos e recursão por curso-de-valores. É suficiente demonstrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(n + 2) < n + 2$, o que foi feito no item anterior.

Intuitivamente, φ é a função binária cujo valor é ou 0 ou 1 conforme a posição correspondente ao primeiro argumento, na representação diádica do segundo argumento é ou 0 ou 1, respectivamente (contam-se as posições da direita para a esquerda, a partir da posição 0). Para demonstrar que φ é função primitiva recursiva, utilizamos recursão por curso-de-valores. É suficiente demonstrar que para todo $n > 0$, $\tau(n) < n$. Considere os seguintes lemas auxiliares:

Lema 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\beta(2n) = 0$.

Demonstração: Aplicação de indução matemática em n. Para $n = 0$, $\beta(0) = 0$. Para $n = m + 1$, $\beta(2m + 2) = \alpha(\beta(2m + 1)) = \alpha(\alpha(\beta(2m)))$. Por hipótese indutiva, $\beta(2m) = 0$ e, portanto, $\beta(2n) = \alpha(\alpha(0)) = \alpha(1) = 0$.

Lema 2: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\beta(2n + 1) = 1$.

Demonstração: $\beta(2n + 1) = \alpha(\beta(2n))$. Pelo lema 1, $\beta(2n) = 0$ e, portanto, $\beta(2n + 1) = \alpha(0) = 1$.

Lema 3: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(2n) = n$.

Demonstração: Aplicação de indução matemática em n. Para $n = 0$, $\gamma(0) = 0$. Para $n = m + 1$, $\gamma(2m + 2) = \gamma(2m + 1) + \beta(2m + 1) = (\gamma(2m) + \beta(2m)) + \beta(2m + 1)$. Por hipótese indutiva, $\gamma(2m) = m$. Pelo lema 1, $\beta(2m) = 0$. Pelo lema 2, $\beta(2m + 1) = 1$. Segue-se, portanto, que $\gamma(2m + 2) = m + 1$.

Lema 4: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(2n + 1) = n$.

Demonstração: Aplicação de indução matemática em n. Se $n = 0$, então $\gamma(1) = \gamma(0) + \beta(0) = 0$. Se $n = m + 1$, então $\gamma(2m + 3) = \gamma(2m + 2) + \beta(2m + 2)$. Pelo lema 3, $\gamma(2m + 2) = m + 1$. Pelo lema 1, $\beta(2m + 2) = 0$. Segue-se, portanto, que $\gamma(2m + 3) = m + 1$.

Demonstraremos que para todo $n > 0$, $\tau(n) < n$, aplicando indução matemática em n. Se $n = 1$ então $\tau(1) = 0 < 1$. Se $n = m + 2$, então $\tau(m + 2) = 2.\tau(\gamma(m + 2)) + \beta(m + 2)$. Se m é ímpar, então, pelo lema 4, $\gamma(m + 2) = (m + 1)/2$; pelo lema 2, $\beta(m + 2) = 1$ e, portanto, $\tau(m + 2) = 2.\tau((m + 1)/2) + 1$ donde segue-se, por hipótese indutiva, que $\tau(m + 2) < m + 2$. Se m é par, então, pelo lema 3, $\gamma(m + 2) = (m/2) + 1$; pelo lema 1, $\beta(m + 2) = 0$ e, portanto, $\tau(m + 2) = 2.\tau((m/2) + 1)$ donde segue-se, por hipótese indutiva, que $\tau(m + 2) < m + 2$.

Ackermann demonstra a consistência relativa da teoria geral de conjuntos utilizando a seguinte definição: $\in^{I}(x,y) =_{\text{def.}} \varphi(x,y) = 1$.

Seja a teoria geral de conjuntos acrescida de um axioma postulando que todo conjunto é T_1-finito, quer dizer, todo conjunto não-vazio admite elemento irredutível. A interpretação numérica de Ackermann é adequada para a demonstração da consistência relativa desta teoria de conjuntos finitos. Considere a seguinte função primitiva recursiva, obtida por minimização limitada: $A_1(m,n) = \varphi(P_{2,2}(m,n),P_{2,1}(m,n))$; $A_2(m,n) = \alpha(A_1(m,n))$; $\text{Irredutível}(m) = \text{mín } n \leq \mu(m)\ [A_2(m,n) = 0]$ para $m > 0$.

Tem-se que:

- $\alpha(n) = 0$ se e somente se $n \neq 0$;
- $\varphi(m,n) \neq 0$ se e somente se o conjunto correspondente ao número natural m é elemento do conjunto correspondente ao número natural n;
- segue-se, do teorema 9 de (ACKERMANN, 1937), que $n \neq 0 \rightarrow \varphi(\mu(n),n) = 1$;

- segue-se, do teorema 24 de (ACKERMANN, 1937), que se D $\subseteq$ C então o número natural correspondente a D é menor ou igual ao número natural correspondente a C.

Portanto Irredutível(n), para $n > 0$, fornece o número natural correspondente a um elemento irredutível do conjunto cujo número natural corresponde a n. Segue-se que esta teoria de conjuntos finitos é consistente relativamente à consistência da teoria pura de números, segundo a interpretação fornecida por Ackermann.

5.2 A Crítica de von Neumann

VON NEUMANN (1925) apresenta uma nova axiomatização para a teoria de conjuntos. A noção básica de sua axiomática não é propriamente a de conjunto ou a de classe, mas as de função e de argumento (conjuntos e classes constituindo tipos particulares de funções e de argumentos). O critério de simplicidade é utilizado para justificar esta escolha. von Neumann observa, por exemplo, que no esquema de axiomas da substituição ocorre a noção de fórmula funcional e que, portanto, utilizá-la como noção primitiva simplifica a teoria a ser desenvolvida. von Neumann efetua duas observações que dizem respeito ao tema deste trabalho:

- seu axioma do infinito simplesmente postula a existência de um conjunto que não é finito; portanto, ele não postula a existência de um conjunto específico, como é o caso da axiomática de Zermelo-Fraenkel em que se postula a existência do menor conjunto indutivo, quer dizer, do conjunto interseção de todos os conjuntos indutivos.
- von Neumann denomina 'axioma do infinito' não somente o axioma do infinito propriamente dito, mas também o axioma da união e o axioma do conjunto das partes porque, segundo ele, estes axiomas são necessários somente para a teoria de cardinalidades infinitas. Segundo ele, a teoria de ordinais finitos e mesmo parte da teoria do contínuo matemático pode ser construída sem os mesmos.

Porém, o grande interesse de seu trabalho para a nossa discussão reside na sua análise do teorema de Löwenheim-Skolem e da questão 'categoricidade da teoria de conjuntos'.

A questão 'categoricidade da teoria de conjuntos' consiste na busca por um modelo mínimo para a teoria de conjuntos, ou seja, um modelo que contenha aqueles conjuntos absolutamente requeridos pelos axiomas e nenhum outro. von Neumann exemplifica a questão citando o caso dos conjuntos não bem-fundados (àquela época o axioma da restrição - *Beschränktheitsaxiom*, no original - ou da fundação não havia ainda sido precisamente formulado). Conjuntos não bem-fundados não são absolutamente requeridos pelos axiomas, porém fazem parte de modelos da teoria.

No curso desta investigação em busca de um modelo mínimo, von Neumann emprega aquilo que contemporaneamente denominamos modelos internos, quer dizer, modelos que são, por sua vez, subsistemas de outros modelos. Ele observa que não é possível encontrar um modelo mínimo porque todos os meios para produzí-lo falham, em particular a operação de interseção de todos os modelos internos a um dado modelo não pode ser formulada na linguagem disponível. Esta dificuldade está relacionada ao fato de que, na axiomática de von Neumann, não é permitido que classes pertençam a outras classes.

Depois de ter argumentado, com base em modelos internos, a favor da não categoricidade da teoria de conjuntos, von Neumann discute o teorema de Löwenheim-Skolem para baixo, segundo o qual se um sistema é satisfazível, isto é, se tem modelo, então ele é satisfazível por um modelo denumerável. Este teorema relativiza a cardinalidade de conjuntos, quer dizer, pode muito bem acontecer que um conjunto seja, em um determinado modelo, não-denumerável enquanto que em um modelo 'superior', quer dizer, em um supersistema ele seja denumerável. Este fenômeno deve-se, explica von Neumann, ao fato de que a cardinalidade de um conjunto diz respeito aos instrumentos disponíveis no modelo. Um modelo 'superior' conterá mais recursos e, portanto, o conjunto poderá ser investigado com instrumentos mais precisos. Este fenômeno pode se dar também com a noção de finitude, conjectura von Neumann. Segundo ele:

> Es seien zwei Systeme Σ_1, Σ_2 gegeben, a_1, a_2 seien Mengen in ihnen; und die Elemente von a_1 in Σ_1 seien genau dieselben wie die Elemente von a_2 in Σ_2. Wir wissen, dass es dann sehr wohl geschehen kann, dass a_1 in Σ_1 unabzählbar ist, aber a_2 in Σ_2 nicht (nämlich wenn Σ_2

"höher" als Σ_1 ist). Es ist aber vielleicht sogar auch mit der Endlichkeit so. Die Definition der Endlichkeit ist jedenfalls infolge des Auftretens des Begriffes "alle" und "es gibt" in bezug auf das ganze System (Σ_1 bzw. Σ_2) derartig, dass man nichts Bestimmtes sagen kann).[2]

Disto resulta que:

Man hat also die Relativität der Mächtigkeiten nicht nur nach oben (vom Abzählbaren) hin in Betracht zu ziehen, sondern auch nach unten hin (im Endlichen).[3]

Ao final do aritgo, von Neumann utiliza a sua análise da questão 'categoricidade da teoria de conjuntos' e do teorema de Löwenheim-Skolem para criticar tanto o intuicionismo de Brouwer como o formalismo de Hilbert, conforme a seguinte passagem:

Ja letzten Endes wäre es denkbar, dass *ein jedes* System Σ_1 noch derart "verfeinert" werden kann, dass sich endlich Mengen als unendlich herausstellen (Bei der Unabzählbarkeit ist ja das sicherlich der Fall). Dann bliebe auch vom Begriffe der Endlichkeit (ebenso wie von dem der Unabzählbarkeit) nichts als die formale Einkleidung übrig. Es ist schwer zu sagen, gegen was das mehr sprechen würde; gegen den vom Intuitionismus verfochtenen anschaulichen Charakter der Endlichkeit oder gegen ihre durch die Mengenlehre gegebene Formalisierung.
Es ist eigentlich ein Einwand gegen beide: tritt doch hier eine neue Schwierigkeit auf, die von den durch *Russell* und *Brouwer* angedeuteten wesentlich verschieden ist. Das abzählbar Unendliche als solches ist unanfechtbar: es ist ja nichts weiter als der allgemeine Begriff der positiven ganzen Zahl, auf dem die Mathematik beruht und von dem selbst *Kronecker* und *Brouwer* zugeben, dass er von "Gott geschaffen" sei. Aber seine Grenzen scheinen sehr verschwommen und ohne anschaulich-inhaltliche Bedeutung zu sein. Nach oben hin, im "Unabzählbaren", ist dies nach *Löwenheims* und *Skolems* Untersuchungen ganz sicher; nach unten hin, im "endlichen", ist es zumindest sehr plausibel: fehlt doch die Kategorizität sowie

[2] Sejam dados dois sistemas Σ_1, Σ_2, sejam a_1, a_2 conjuntos neles e sejam os elementos de a_1 em Σ_1 exatamente os mesmos que os elementos de a_2 em Σ_2. Sabemos que, pode então muito bem suceder, que a_1 é não-denumerável em Σ_1, mas a_2 não o é em Σ_2 (a saber quando Σ_2 é "superior" a Σ_1). Porém, talvez o mesmo se dê com a finitude. Devido à ocorrência dos conceitos "todo" e "existe" com referência ao sistema inteiro (Σ_1 ou Σ_2), a definição de finitude é, em todo o caso, tal que nada de definido pode ser dito.
[3] Portanto, tem-se de ter em conta a relatividade de cardinalidades não somente para cima (de denumeráveis em diante) mas também para baixo (no finito).

jeder Anhaltspunkt für die Bestimmtheit der Definition des "Endlichen". Ausserdem *sind hier auch die Hilbertschen Ansätze machtlos*: denn dieser Einwand betrifft nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die - Eindeutigkeit (Kategorizität) der Mengenlehre[4].

A crítica de von Neumann aplica-se, e esta é uma das motivações do nosso trabalho, não somente ao intuicionismo mas a todas as demais escolas de filosofia da matemática que, a exemplo do intuicionismo, empregam não-criticamente a noção de finito, como algo dado ou bem-estabelecido.

---

[4] Afinal de contas, seria concebível que *todo* sistema Σ_1 ainda pode ser de tal maneira refinado, que conjuntos finitos mostram-se infinitos (para o não-denumerável este é certamente o caso). Restaria então também para o conceito de finitude (do mesmo modo que para o de não-denumerabilidade) nada mais do que a configuração formal. É difícil de dizer contra o que isto teria mais a falar; contra o alegado caráter intuitivo que a finitude tem no intuicionismo ou contra sua formalização dada através da teoria de conjuntos. No fundo, é uma objeção contra ambas: uma nova dificuldade apresenta-se aqui, essencialmente diferente daquela indicada por *Russell* e *Brouwer*. O infinito enumerável é, como tal, indisputável: ele nada mais é do que o conceito geral dos números inteiros positivos, do qual a matemática depende e que mesmo *Kronecker* e *Brouwer* admitem como "criado por Deus". Porém os seus limites parecem ser muito difusos e sem significado intuitivo-substantivo. Para cima, no "não-denumerável", isto é muito certo tendo em vista as investigações de *Löwenheim* e *Skolem*; para baixo, no finito, isto é ao menos muito plausível: falta a categoricidade assim como todo ponto de apoio para a determinação da definição de "finito". Além disto, aqui os princípios hilbertianos são impotentes porque esta objeção diz respeito à inequivocidade (categoricidade) da teoria de conjuntos e não à sua consistência.

CONCLUSÃO

Investigamos, ao longo deste trabalho, a noção de finitude de um ponto-de-vista puramente formal, no plano sintático e no plano semântico. Verificou-se que a equivalência das distintas noções formais de finitude (definições de conjunto finito) depende dos recursos disponíveis na teoria subjacente, conquanto não haja um consenso a respeito da utilização ou não destes recursos. Há inúmeras situações semelhantes a esta na história das ciências. Por exemplo, verificou-se que certas construções geométricas (trisecção do ângulo, retificação da circunferência e duplicação do cubo, entre outras) não podem ser executadas somente com régua e compasso[1].

Este tipo de problema parece conduzir necessariamente ao método de análise conceitual, tal como Turing o aplicou ao problema da formalização da noção de computabilidade efetiva. Quando ainda não se tinha uma definição formal aceitável de computabilidade efetiva, Turing realizou uma análise das propriedades geralmente aceitas desta noção, disto resultando o conceito de função computável por máquina de Turing (veja ERTOLA BIRABEN (1994)). A maioria daqueles que se mantinham céticos quanto à possibilidade de fixar formalmente a noção de computabilidade efetiva renderam-se à análise de Turing. Um procedimento semelhante pode ser e, de fato, está sendo adotado na investigação da noção intuitiva de finitude. As diversas definições de conjunto finito nada mais são do que análises de propriedades geralmente aceitas da noção de finitude. Porém, o axioma da escolha e formas fracas do axioma da escolha intervêm fortemente nestas análises. Portanto, uma solução definitiva, nos moldes da solução de Turing, depende da aceitação ou não do axioma da escolha e de formas fracas do axioma da escolha. Neste aspecto, acreditamos ter contribuído para a aceitação de uma forma fraca do axioma da

[1] É um resultado conhecido na literatura que toda construção geométrica que pode ser executada com régua e compasso, também pode ser executada somente com compasso (veja HUNGERBÜHLER (1994)). Hípias (cerca de 420 a.C.) construiu a curva 'quadratrix' com a qual é possível trisectar qualquer ângulo e retificar qualquer circunferência. A curva 'quadratrix' não pode ser construída somente com régua e compasso. Hipócrates (cerca de 460 a.C.) reduziu o problema da duplicação do cubo à construção de segmentos de reta de comprimento b e c, que se encontram na proporção $(a/b) = (b/c) = (c/2a)$, em relação a um segmento de reta de comprimento a, o comprimento das arestas do cubo a ser duplicado. A demonstração da impossibilidade de execução destas construções geométricas somente foi possível após o desenvolvimento de métodos algébricos adequados, mais de dois milênios após a formulação dos mesmos (veja BUNT (1988)).

escolha, o axioma segundo o qual toda família enumerável de conjuntos finitos tem uma função de escolha, à medida que a definição de conjunto finito, no sentido de González, parece-nos bastante natural e intuitivamente equivalente à definição aritmética usual, embora formalmente este resultado somente possa ser demonstrado com o auxílio do referido axioma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKERMANN, Wilhelm. Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. **Mathematische Annalen**, v. 114, p. 305-315, 1937.

ALARCÓN ATHENS, Winston. Estudio de una definicione no aritmetica de finitud conjuntista. **Ciencia y Tecnologia**, v. 11, n. 2, p. 5-15, 1987.

BOLZANO, Bernhard. **Paradoxien des Unendlichen**. Leipzig, 1851.

BUNT, Lucas; JONES, Phillip; BEDIENT, Jack. **The historical roots of elementary mathematics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.

CANTOR, Georg. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. **Crelles Journal für Mathematik**, v. 84, p. 242-258, 1878.

CANTOR, Georg. Rezension der Schrift von Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. **Deutsche Literaturzeitung**, VI Jahrgang, p. 728-729, 1885.

CANTOR, Georg. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. **Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik**, v. 91, p. 81-125, 1887.

CAVAILLÈS, J. Sur la deuxième définition des ensembles finis donnée par Dedekind. **Fundamenta Mathematicae**, v. 19, p. 143-148, 1932.

DEDEKIND, Richard. **Gesammelte mathematische Werke**. New York: Chelsea, 1969.

EPSTEIN, Richard; CARNIELLI, Walter. **Computability: computable functions, logic, and the foundations of mathematics**. Belmont: Wadsworth, 1989.

ERTOLA BIRABEN, Rodolfo. **Tese de Church: alguns aspectos histórico-conceituais**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 1994.

FREGE, Gottlob. Rezension der Schrift von Georg Cantor, Zur Lehre vom Transfiniten: Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. **Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik**, v. 100, p. 269-272, 1892.

FRIEDMAN, Joel. **On some relations between Leibniz' Monadology and transfinite set theory**. Davis, 1972. Relatório interno - Philosophy Department, University of California.

GENTZEN, Gerhard. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. **Mathematische Annalen**, v. 112, p. 493-565, 1936.

HUNGERBÜHLER, Norbert. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni Theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 101, n. 8, p. 784-787, 1994.

JECH, Thomas. **The axiom of choice**. Amsterdam: North-Holland, 1973.

PARSONS, Charles. Developing arithmetic in set theory without infinity: some historical remarks. **History and Philosophy of Logic**, p. 201-213, 1987.

SEBESTIK, Jan. El sistema matemático de Bernardo Bolzano. **Mathesis**, v. 6, n. 4, p. 393-417, 1990.

TARSKI, Alfred. Sur les ensembles finis. **Fundamenta Mathematicae**, v.6, p. 45-95, 1924.

VON NEUMANN, John. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 154, p. 219-240, 1925.

ZERMELO, Ernst. Ueber die Grundlagen der Arithmetik. In: CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI (4. : 1908 : Roma). **Anais**. Roma : Tipografia della Real Accademia dei Lincei, 1909. p. 8-11.

ZERMELO, Ernst. Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. **Acta Mathematica**, v. 32, p. 185-193, 1909.