Márcio Augusto Damin Custódio

Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine

Campinas

Universidade Estadual de Campinas

2004

Márcio Augusto Damin Custódio

Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Doutor em Filosofia, sob orientação da Profª Drª Fátima Regina Rodrigues Évora

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela comissão Julgadora em 05 de março de 2004

Banca:

Profa Drª. Fátima Regina Rodrigues Évora (orientadora)

Prof. Dr. Carlos Arthur Ribeiro do Nascimento

Prof. Dr. Franklin Leopoldo e Silva

Prof. Dr. Luiz Henrique Lopes dos Santos

Prof. Dr. Pablo Rubén Mariconda

Suplentes:

Prof. Dr. Francisco Benjamin de Souza Netto

Prof. Dr. José Carlos Estevão

Campinas

Universidade Estadual de Campinas

2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA DO IFCH – UNICAMP

Custódio, Márcio Augusto Damin

C969m **Matemática e filosofia da natureza no século XIV : Thomas Bradwardine / Márcio Augusto Damin Custódio. - - Campinas, SP : [s. n.], 2004.**

Orientador: Fátima Regina Rodrigues Évora.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Ciência - Filosofia . 2. Ciência - História. 3. Filosofia medieval. 4. Matemática - História. I.Évora, Fátima Regina Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Márcio Augusto Damin Custódio

Matemática e Filosofia da Natureza no Século XIV: Thomas Bradwardine

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Doutor em Filosofia, sob orientação da Prof[a] Dr[a] Fátima Regina Rodrigues Évora

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela comissão Julgadora em 05 de março de 2004

Banca:

Profa Dr[a]. Fátima Regina Rodrigues Évora (orientadora)

Prof. Dr. Carlos Arthur Ribeiro do Nascimento

Prof. Dr. Franklin Leopoldo e Silva

Prof. Dr. Luiz Henrique Lopes dos Santos

Prof. Dr. Pablo Rubén Mariconda

Suplentes:

Prof. Dr. Francisco Benjamin de Souza Netto

Prof. Dr. José Carlos Estevão

Campinas

Universidade Estadual de Campinas

2004

Resumo

Investigo o conceito de movimento em Thomas Bradwardine (cerca de 1290/1300–1349) com o objetivo de compreender em que medida o uso da matemática no cálculo da velocidade, especialmente no *Tractatus de proportionibus* (1328), é um ponto de passagem entre a filosofia da natureza aristotélica e a física copernicano-galileana. Bradwardine teve seu procedimento de cálculo adotado por um grupo de autores em Oxford, no século XIV, que ficou conhecido como "Calculadores de Merton". Estabeleceu um projeto que carregava, em seus fundamentos, elementos contraditórios: de um lado a ciência do movimento exposta na *Física*, a qual Bradwardine considerava uma ciência completa no que diz respeito ao estudo das causas; de outro lado elementos de tradições matemáticas que possibilitaram a aplicação da linguagem das proporções à natureza. Mesmo que estes elementos matemáticos fossem integrantes de um projeto de ciência que não se constituiu como fonte direta para os autores do século XVII, o projeto de Bradwardine não deixa de ser uma antecipação da modernidade. Mais significativo que isso, sua obra permite caracterizar seu período em Oxford como um momento de investigação da ciência para além do aristotelismo vigente.

Abstract

I research the concept of motion according to Thomas Bradwardine (circa 1290/1300-1349) with the purpose to understand in which way the usage of mathematics to calculate velocity, especially in the Tractatus de proportionibus (1328), is a turn point among the Aristotelical natural philosophy and the Copernican-Galilean physics. Bradwardine had his calculus procedures adopted by a group of 14th Century Oxford's authors better known as "Merton Calculators". He started a project with contradictory elements in its own foundations: on one hand, he puts in highest consideration the theory of motion in Physics, understood by him as a science already completed; on the other hand, he gave heed to elements of mathematical traditions, intending to apply them, as a language of proportions, in the investigation of nature. Even considering those mathematical elements as parts of a project of science that did not constitute a source of 17th Century authors, the work of Bradwardine still can be read as an anticipation of modern thought. Besides, it is more important that his work characterizes his time in Oxford as a moment of investigation of science beyond the patterns of its contemporary aristotelism.

A Sueli, meu norte

The last stroke of midnight dies.
All day in the one chair
From dream to dream and rhyme to rhyme I have ranged
In rambling talk with an image of air:
Vague memories, nothing but memories
(Broken Dreams, Yeats)

Agradeço a todos que contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho:

à Fátima Évora, pelas horas de trabalho, desde a graduação, fundamentais para o meu amadurecimento intelectual;

a Daniel Garber, pela acolhida em Chicago;

à Jenna, pelas traduções do alemão e do inglês antigo;

ao grupo dos espinosanos da USP, pela paciência ao me ouvirem dissertar sobre o contínuo;

a José Martins, Anastácia e Marcelo, também pela paciência;

à amiga Soraia;

ao meu avô, Estéfano e

às famílias Damin e Sampaio, por entenderem a ausência;

e, especialmente, a Tadeu, amigo explorado pelas sucessivas leituras e revisões a que foi submetido por longos três anos.

Quero também registrar meu agradecimento à *Universidade Estadual de Maringá*,

pelo afastamento de minhas atividades docentes,

à *Universidade de Chicago*,

e à *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES*,

por um ano de bolsa sanduíche, indispensável para a obtenção do material bibliográfico para esta tese

ÍNDICE

"E assim como testemunha Boécio no primeiro livro de sua *Aritmética*: 'Aquele que se omite no estudo das matemáticas põe a perder todo o conhecimento filosófico.'" (Thomas Bradwarinde, Proêmio ao *De proportionibus*)

Introdução

Minha tese é um esforço de apresentação e análise da obra de Thomas Bradwardine a partir da investigação de seu conceito de movimento.[1] Meu objetivo é compreender em que medida o uso da matemática no cálculo da velocidade, especialmente no *Tractatus de proportionibus,*[2] é um ponto de passagem[3] entre a filosofia da natureza aristotélica e a física copernicano-galileana.

---

[1] Pierre Duhem que no início do século XX buscou compreender o estudo da história da ciência como parte integrante da história da filosofia, mostrou especial interesse pelo século XIV. Contudo, sua análise recai sobre os nominalistas da Universidade de Paris, em especial Nicolas Oresme e Jean Buridan. Coube a Anneliese Maier, em 1946, com seu artigo *O conceito de função na física do século XIV*, defender que o Merton College, em Oxford, teria produzido resultados tão ou mais interessantes que os de Paris, expostos na obra de Duhem. Treze anos após Maier ter publicado seu artigo, Marshall Clagett escreveu uma introdução aos autores do Merton College e publicou excertos do *De proportionibus*. Mais tarde, em 1978, uma edição bilíngüe do texto foi publicada por Lamar Crosby, em tese orientada por Clagett. Assim, a sistematização e a análise do trabalho de Bradwardine está ligada a autores que marcam o início da história da ciência como campo da investigação da história da filosofia. Esta tese insere-se nesta tradição de pesquisa.

[2] Todas as referências ao *De proportionibus*, a menos que indicadas explicitamente em contrário, são da edição de CROSBY, 1955. Para o *De proportionibus,* após o título, entre parênteses, leia nesta ordem: capítulo e parágrafo (eventualmente adiciono o número de página). Para citações do Proêmio, por exemplo, indica-se "Proêmio, parágrafo, linhas".

[3] Concebo que o historiador, ao examinar as teorias científicas do passado, tende a trabalhar com a idéia de que uma mudança decisiva em um programa de investigação em relação ao seu antecessor só é possível se as questões a serem respondidas pela ciência também se alterem. Porém

O texto do *De proportionibus* difere do tratamento habitualmente dado à filosofia da natureza pelos comentadores dos séculos XII e XIII por apesentar uma maior autonomia de Aristóteles quanto à explicação da natureza, que se manifesta pela confiança de Bradwardine na possibilidade de perscrutá-la a partir de instrumentos matemáticos. Não se deve compreender, contudo, que Bradwardine abandona a definição de natureza, os conceitos e noções de Aristóteles, tal qual aprendeu pela leitura da *Física* comentada por Averróis.

Uma vez que comumente se assume que a ciência moderna surge no século XVII, investigar Bradwardine é também perguntar se e como o pensamento medieval acelerou a instauração da nova ciência.[4] Não há em Bradwardine qualquer experimento de medição

---

não concordo que uma mudança dessa ordem tenda a ser abrupta, como defende Kuhn: "*É como se a comunidade profissional tivesse sido subitamente transportada para um novo planeta, aonde objetos familiares são vistos sob uma luz diferente, e a eles se juntam objetos até então desconhecidos*" (KUHN. *A estrutura das revoluções científica,* 1992. p. 146). Kuhn não considera os trabalhos dos medievais como um momento de mudança na ciência, mas apenas como um momento de preparação para a mudança: "*As contribuições de Galileu ao estudo do movimento estão estritamente relacionadas às dificuldades descobertas na teoria aristotélica pelos críticos escolásticos*" (KUHN, 1992: 95). Ainda assim, esta preparação se dá pela destruição, não pelo estabelecimento de uma heurística ou de elementos teóricos mais tarde aproveitados ou redescobertos pela nova ciência copernicana. Neste aspecto, distancio-me de Kuhn, uma vez que a história da ciência medieval, desde Duhem e Maier, não comporta a concepção de que este período histórico nada mais foi que um milênio de acúmulo de anomalias.

[4] Deve-se ressaltar que o termo "ciência" a que me refiro, como era comum no século XVII, limita-se a uma parte da física moderna denominada "mecânica" e, mais precisamente, a parte da mecânica que lida com o movimento (*motus localis*, se dito em termos aristotélicos). Assim limitado, o termo "ciência" caracteriza-se, no século XVII, de um lado pela elaboração de leis

que se aproxime aos realizados no século XVII. Porém, os procedimentos de análise matemática, quando aplicados ao estudo do movimento, assemelham-se aos que, por hábito, atribuímos à ciência pós-galileana. A *via moderna*, i.e, a presença da análise matemática em Bradwardine, não se dá por oposição e abandono dos postulados e das noções comuns da física aristotélica, a *via antiqua*. O que se denomina "velho caminho", faz referência a Aristóteles e a obra de Averróis e Tomás de Aquino. Já o "novo caminho", é aquele que, por meio da matemática, em Bradwardine, ou da lógica, como por exemplo, em Guilherme de Ockham, se afasta de Aristóteles.[5] Esta ambivalência ou unidade contraditória do pensamento de Bradwardine é a chave para sua compreensão e para o modo como se deve compreender a história da ciência medieval do século XIV, enquanto partícipe do processo de construção de uma nova ciência.

A ambivalência concretiza-se, no texto de Bradwardine, no conceito de movimento. Ele próprio se diz aristotélico e compreende seu trabalho como a resolução de um problema deixado em aberto na *Física*, a saber, comparar os movimentos, e decidir pela sua comensurabilidade.[6] Porém, ao definir movimento, Bradwardine modifica a definição dada na *Física* por Aristóteles, de modo que o termo não mais designe a passagem, no ser,

---

matemáticas que regulam os movimentos vistos na natureza e, de outro, pela medição experimental de tais movimentos.

[5] Vide SHAPIRO, H. *Motion, time and place according to William Ockham.* WALLACE, W. Mechanics from Bradwardine to Galileo, *Journal of the History of Ideas*, v. 32, n. 1, 1971: p. 15-38.

[6] Vide WALLACE. *Mechanics from Bradwardine to Galileo*, p. 18.

do ato para a potência e vice-versa. O termo "movimento", tal qual utilizado por Bradwardine, é igualado ao que, em Aristóteles, é a causa formal do movimento, i.e, a velocidade ou a proporção da distância percorrida em um certo lapso de tempo. A realidade deste movimento não pode ser outra coisa que o próprio móvel. Assim, o conceito de movimento em Bradwardine e sua contradição com a Filosofia da Natureza constituem-se o fio condutor pelo qual desenvolvi esta pesquisa sobre a matematização da ciência.

No capítulo I proponho uma reconstituição de como Bradwardine pode efetuar a transição no conceito de movimento, que lhe permitiu estabelecer um cálculo de proporção. Assim, o capítulo informa ao leitor o conceito de movimento na *Física* de Aristóteles e sua vinculação com o objeto da metafísica (*actus entis in potentia inquantum huiusmodi*). Argumento que a alteração no conceito está vinculada ao trabalho desenvolvido pela tradição aristotélica em tentar compreender o movimento contínuo ou sucessivo em uma das categorias aristotélicas, como a *passio* ou o *ubi*. Associa-se a esta tentativa a compreensão aristotélica de movimento como *forma fluens* ou *fluxus formae*. Bradwardine é devedor dessa tradição dos comentadores, posto que ela abre o caminho para a possibilidade de se pensar o movimento em termos relativos, i.e, enquanto uma relação de proporção ou ente de razão (*ens rationis*). Mostro, no final do capítulo I, como o século XIII preparou o terreno para que o movimento pudesse ser calculado.

No capítulo II exponho o novo tipo de tratamento dispensado ao movimento. É sintomático, por exemplo, que o tema do movimento deixe de freqüentar exclusivamente os comentários ao texto da *Física* e passe a constituir-se autonomamente, sob a forma de tratados de geometria já no século XIII. Bradwardine, como outros autores de sua época, buscou estabelecer uma nova linguagem para a filosofia da natureza a partir de valores da geometria e de termos e sintaxe da aritmética. Este esforço, contudo, não se encontra sob a forma de um único texto coeso. Por este motivo, no segundo capítulo, detalho a estrutura do arcabouço matemático da *Geometria speculativa* e do *De proportionibus*. Meu intuito é compreender a relevância que a terminologia e a sintaxe da linguagem geométrica e aritmética das proporções têm para que Bradwardine possa calcular o movimento. Sustento que a *via moderna* do autor não se dá somente por uma nova conceituação de movimento, tal qual esboçada no primeiro capítulo, nem suscita, para ser realizada, uma nova teoria da ciência, que se preocupe em validar as tentativas de matematização do movimento. A matematização requer o aprendizado de uma outra linguagem para a investigação da natureza. Os termos e a sintaxe dessa outra linguagem não são propriamente novos, mas constituem-se num sumário, o qual esboço no capítulo, muito semelhante ao que já existe em Euclides e, especialmente, em Boécio. Porém, as modificações da linguagem do cálculo de proporções aplicada ao movimento alteram os procedimentos pelos quais se conhece, assim como os objetivos da ciência, i.e, como julgar o sucesso ou o fracasso das teorias do movimento. Há uma outra novidade em Bradwardine, a preocupação em ensinar a linguagem aos filósofos da natureza e solicitar que sejam substituídas as definições dos termos aristotélicos. O resultado desse ensino não é uma mera alteração retórica e eloqüente do texto, mas um novo procedimento para o estudo do movimento.

Nos capítulos III e IV mostro como Bradwardine lida com a substituição de problemas e valores da velha para a nova ciência do movimento, ocasionados pela substituição da linguagem estudada no capítulo anterior. O que era problema na filosofia da natureza escrita na linguagem da metafísica — i.e, a investigação da mudança na categoria da substância e o movimento entre potência e ato nas demais categorias, como explicito no primeiro capítulo — nem sequer é mencionado. Trata-se, tão somente de calcular o movimento, problema que Bradwardine acredita fora lançado por Aristóteles, no livro VII, capítulo 5, da *Física* e perseguido, sem sucesso, pelos comentadores medievais.

O capítulo III expõe o que Bradwardine considera como causas desse insucesso, agrupadas em três teorias equivocadas. Nas duas primeiras teorias, Bradwardine expõe os equívocos de se relacionar movimentos aritmética e geometricamente e, nas duas últimas, mostra que uma teoria deve ser universal, o que só pode ser obtido pela composição de proporções, técnica matemática própria da música e da medicina. A exposição sistemática das "teorias equivocadas", feita por Bradwardine no capítulo II do seu *De proportionibus,* tem o propósito de limpar o terreno para uma restauração do que o autor acreditava ser o sentido original da afirmação de Aristóteles na *Física* sobre o cálculo das velocidades dos movimentos. O expurgo das teorias equivocadas representa, nesse contexto, o expurgo do aristotelismo medieval. De modo contraditório, esta tentativa de restauração resulta em uma teoria que não tem como base o conceito de movimento definido na *Física*.

O capítulo IV expõe e a analisa o cálculo de Bradwardine, cujas transposições para a notação contemporânea mais usual é $n^v=P/R$ ou $V=\log_n(P/R)$ ou ainda $P_2/R_2=(P_1/R_1)^{V2/V1}$.[7] Sustento que o cálculo não é visto pelo autor como a instauração de uma nova ciência, mas como a restauração do sentido original de Aristóteles para as

[7] Considere "V" como velocidade escalar, "P" como potência motora e "R" como potência resistiva.

passagens da *Física* que tratam da velocidade. Novamente, de modo aparentemente contraditório, o alegado retorno a Aristóteles é obtido por avanço na matemática, com a introdução do conceito de proporção das proporções, construído por Bradwardine ao longo de doze teoremas sobre o cálculo do movimento. Trato da ausência de experiência vinculada ao cálculo e procuro mostrar como o sentido do termo movimento, utilizado por Bradwardine, estabelece um novo problema e uma nova forma de pesquisa indissociável da linguagem das proporções, que está a um passo da fundação de uma nova ciência.

No capítulo V abordo o tema da medição do movimento, no tratado *De continuo*, posterior ao *De proportionibus*. Traço a estratégia de Bradwardine, que consiste em estabelecer uma correspondência entre o contínuo geométrico (linha, plano e figura) e o contínuo físico (por exemplo, temperatura, cor e, fundamentalmente, movimento local), valendo-se de pontos como ordenadores para, então, por analogia, medir a natureza. Esta estratégia dá-se no interior de um projeto maior, que consiste em aderir a crítica de Aristóteles ao atomismo. Nesse contexto, a estratégia de medição do contínuo-natureza não se dá sem problemas: Como medir o contínuo sem numerá-lo? Como utilizar pontos sem admitir a existência de indivisíveis? Acredito que a tentativa do estabelecimento da medição da natureza tencionava ser um suporte epistemológico ao cálculo do movimento do *De proportionibus*, ou seja, a ajustá-lo às teses sobre o contínuo e o indivisível de Aristóteles. Este ajuste, de modo ambivalente, quase conduziu a efetiva possibilidade de medição da natureza.

Capítulo I - O Movimento

O movimento, para Aristóteles, é um conceito mais alargado que o seu par da física pós-galileana, uma vez que toda transição da potência para o ato ou vice-versa, em todas as categorias nas quais essa distinção possa ser feita, é compreendida como movimento.[8] Deste alargamento resultam dois tratamentos distintos do movimento e da mudança na obra de Aristóteles: na *Física,* por meio da experiência sensível constata-se movimento em tudo, ou quase tudo que existe[9]; mas, em um outro contexto, a análise do movimento é indissociável da ontologia,[10] porque os dados obtidos pela experiência, ainda que incontestáveis, constituem-se apenas em um ponto de partida para a ciência:

> Sobre este ponto, malgrado os esforços de Platão, o desafio de Parmênides ainda está presente: um pensamento ansioso para definir o ser de modo rigoroso pode fazê-lo a partir da mudança? Tornar a mudança 'algo natural' não significa aceitar que o ser não é totalmente ser, mas aceitar uma forma ou uma outra existência do não ser? Um dos grandes méritos da física de Aristóteles é mostrar que é possível compreender um sentido para a mudança sem, com

---

[8] Para Maier, "*o problema primeiro da física escolástica é o conceito de movimento*" (MAIER, A. The nature of motion. In: *On the threshold of exact science.* Selected writings of Anneliese Maier on late medieval natural philosophy, 1982, p. 22).

[9] "*Por um lado, nós devemos aceitar que, das coisas que existem por natureza, todas ou algumas se encontram em movimento — o que, na verdade, pode ser constatado pela indução*" (*Física* I, 2, $185^{a12\text{-}14}$).

[10] De acordo com CLAVELIN. *La philosophie naturelle de Galilée,* 1968, p. 16.

> isto, abandonar as exigências do pensamento lógico. (CLAVELIN, 1968: 18)

Dada esta relação entre física e ontologia, faz-se necessário, antes de proceder ao tratamento mecânico do movimento, compreender como Aristóteles e o aristotelismo constroem uma ciência para tratar do movimento.

1.1 Os Conceitos do Movimento e da Mudança

O conceito de movimento em Aristóteles é construído de modo a permitir uma definição unívoca do ser, mesmo que dele se diga de muitas maneiras.[11] Um sujeito qualquer pode apresentar-se diferentemente, em dois momentos distintos, segundo seus atributos; um ser vivo, por exemplo, possui uma certa aptidão e um certo caráter que o diferencia de um outro; um metal específico pode ser trabalhado de tal modo que seja mais flexível ou duro que um outro metal. Do mesmo modo, é possível distinguir, em uma mesma pessoa, aparências muito diferentes entre si, como a jovialidade e a velhice. Com o fim de compreender esta variação, sem abrir mão da unidade do ser, Aristóteles sustenta uma distinção entre aquilo que o ser é em ato, como o homem que é novo, pequeno e iletrado, e aquilo que é em potência, mas que ainda não atualizou, como o homem novo tornar-se velho, grande e letrado.[12]

A noção de "potência" confere significado à mudança e ao movimento, que passam a ser compreendidos como processos pelos quais se diz que há passagem da potência para o

[11] "*B≅88∀Π™H 8,(;<≅<*" (*Física* I, 2, 185^{a21}).

[12] *Física* I, 8, 191^{b27}; *Metafísica* V, 7 e IX.

ato ou do ato para a potência.[13] Enquanto processo, o movimento não determina o ato, que ocorre a partir de um princípio perfeitamente autodeterminado, i.e, a forma (,∩*≅H).[14] Desse modo, o movimento pode ser compreendido como uma sucessão de aquisições ou perdas de um determinado atributo pertencente à categoria da quantidade, da qualidade ou do lugar.

Esta noção, porém, encerra uma dificuldade, a saber, se o movimento, ele mesmo, participa da categoria do que é movido, sendo a própria perfeição adquirida, ou se representa uma paixão (*passio*) ele mesmo, pertencendo a uma categoria específica, resultado da interpretação medieval das *Categorias.*[15] No que diz respeito ao motor, o

---

[13] Clavelin chama a atenção para a diferença entre os movimentos que ocorrem nos seguintes exemplos. Um bloco de mármore, segundo a potência de sua constituição material, pode receber novas determinações, como a figura de Hermes, que lhe pode ser esculpida; deste modo, o mármore se submete a efeitos estranhos a sua essência. Um corpo pesado tende naturalmente a se aproximar do centro da terra, contudo, pode receber um movimento violento que o leva do baixo para o alto e, ao menos por um breve momento, reprime sua disposição natural de realizar o movimento natural segundo sua forma. No primeiro caso, do bloco de mármore, trata-se do movimento de um "não ser natural", i.e, da recepção pelo bloco de mármore de uma nova figura, que não era esperada, mas que não contraria a disposição natural do bloco. No segundo caso, trata-se de um movimento de um "não ser artificial", i.e, que provoca a negação de uma propriedade já efetivamente atuante no corpo, a sua disposição de queda (CLAVELIN, 1968: 22).

[14] *Física* II, 3, 194^{b27}.

[15] Maier (1982: 24, n. 4) sugere que a compreensão do movimento enquanto representante de uma paixão (*passio*) tem origem nas interpretações medievais do capítulo 9 dos *Predicamenta*: "*Afetar e ser afetado admite a contrariedade e o mais e o menos. Pois o aquecimento é contrário ao resfriamento, e ser aquecido [é contrário] a ser resfriado, e estar bem [é contrário] de estar em pânico; então admite-se a contrariedade. E também com o mais e o menos. Pois é possível aquecer*

movimento pertence à categoria da ação (*actio*), segundo o móvel, trata-se de uma "paixão" (*passio, ϑò BςΦΠ≅<*), e em vista de seu fim (*finis et terminus motus*), o movimento é uma forma que flui (*forma fluens*) ou um fluxo da forma (*fluxus formae*).[16] Para este último caso ocorre, na categoria da qualidadade, o fluxo em vista da forma, na quantidade o fluxo em vista da perfeita quantidade e na locomoção o fluxo em vista do lugar (*fluxus ubi*).[17]

As duas possibilidades de explicação foram exploradas pelo aristotelismo medieval. A seguinte fórmula de Averróis pode ser compreendida como um argumento pela possibilidade tanto da primeira quanto da segunda resposta: "*O movimento nada mais é que a geração, uma parte após a outra, da perfeição para a qual o movimento tende*" (AVERROIS, *Physica* III, com. 4). Pode-se dar ênfase ao fato do movimento pertencer a

---

mais e menos, e ser aquecido mais e menos, e estar mais ou menos em pânico; Assim sendo, afetar e ser afetado admite o mais e o menos" (*Categorias* 9, 11$^{b1\text{-}6}$).

[16] Os conceitos de fluxo da forma e de forma que flui têm sua origem fora do âmbito da escolástica, uma vez que, segundo o *Liber sex principiorum*, "*forma consiste em uma essência simples e invariável*" (apud Maier, 182: 24, n. 6). Motivo pelo qual, uma forma que flui ou um fluxo da forma é uma contradição de termos. Os conceitos são atribuídos a Averróis, uma vez que se encontram no *Grande Comentário* à Física (AVERRÓIS. *De physico auditu*. III, com. 4). Também a tradução latina da *Física* de Avicena (*Sufficientia* II, cap. 1 e 2) permite estabelecer os conceitos sem, contudo, nomeá-los.

[17] Sigo a leitura de Maier: (1) do comentário 4 da *Física* de Averróis; (2) da *Física* Alberto Magno (III, trac. I). Alberto cita Averróis e Avicena sobre esta questão: "*Porém, porquê a solução de Averróis é obscura e questionável, antes de mencioná-la, deixe-nos tratar das opiniões de todos os outros Peripatéticos no que diz respeito a natureza do movimento; Avicena parece tê-lo feito antes de nós em* Sufficientia" (Alberto Magno. *Physica*. III, trac. I, cap. 3. Apud Maier, 1982: 25, n. 10.

mesma categoria da qual se dirige para a perfeição ou para o fato do movimento ser, ele mesmo, o caminho para a perfeição (*via ad rem*) e não a própria, o que implica em aceitar que o movimento pertence a uma categoria distinta. Averróis encerra a questão afirmando que o segundo modo de compreender é mais conhecido, mas que o primeiro — o movimento pertencente à mesma categoria daquilo que move — é mais correto:

> Forma é o que consiste em uma essência simples e invariável (*forma est simplici et invariabili essentia consistens*). Uma forma que flui (*forma fluens*) ou o fluxo da forma (*fluxus formae*) é, nesta medida, estritamente falando, uma contradição de termos. (AVERRÓIS. *Liber sex principiorum*)[18]

O fluxo, sustenta Averróis, só pode ser compreendido como indiferenciado do fim para o qual ocorre o movimento, i.e, não há diferença específica entre o ser em movimento e o ser perfeito. Somente quanto ao modo de apresentação há diferença: o movimento é o ser em fluxo (*esse in fluxu*), enquanto o ser perfeitamente realizado é o que se encontra em repouso (*esse in quiete*).[19] Note, então, que não se deve compreender que a noção de fluxo de formas tenha afastado os medievais da noção grega de formas fixas e imutáveis. A forma é o princípio organizador que possibilita a mudança, ela própria imutável e imediatamente perfeita, sem possuir existência em separado, uma vez que necessita da presença, como um suporte, do substrato (⇓B≅Π,.:.;,≤<). Não é, de fato, a forma que flui, mas a sua realização

---

[18] Maier (1982: 25-30), ao tratar dessa discussão, sugere três fontes como possíveis formuladores do problema apresentado acima. Averróis, que estabelece a distinção dos termos *forma fluens* e *fluxus formae*, porém não seu emprego; Avicena (Sufficientia. In: *Avicenne perhypatici philosophi ac medicorum facile primi opera in lucem redacta*, 1508) e Alberto Magno (Physicorum libri VIII. In: BORGNET, A. *Opera omnia*, 1890, v. III).

[19] Vide DUHEM. *Le mouvement absolu et le mouvement relatif*, 1907.

no sujeito, que se dá segundo o aumento ou a diminuição de espécies do mesmo gênero ou de graus da mesma espécie.[20] Deste modo, é possível explicar o que faz com que uma substância seja como ela é — uma vez que se assegurou sua unidade e permanência — e, ao mesmo tempo, também seja possível afirmar que há movimento: "*Nós distinguimos, com respeito a cada classe, o que é completamente e o que é potencialmente; deste modo, a complementação do que é potencialmente, como vimos, é movimento*" (*Física* III, 1, 201^{a1}).[21]

O movimento ou mudança ocorre em cada uma das categorias em que a distinção ato-potência pode ser estabelecida: substância, quantidade, qualidade e lugar: "*Não há algo como movimento acima e para além das coisas. É sempre com respeito à substância ou à quantidade ou à qualidade ou ao lugar que a mudança acontece*" (*Física* III, 1, 200^{b33-35}).

---

[20] Para Maier, a diferença entre medievais e gregos não se encontra na noção de forma, mas na compreensão sobre como o sujeito na forma: "*As formas continuam sendo, por natureza, imutáveis. O fluxo resulta da sucessiva realização, em um sujeito, de diferentes espécies do mesmo gênero (como a cor ou o tamanho) ou de diferentes graus entre as mesmas espécies (como no caso em que há um aumento ou remissão da intensidade). Não é a forma, propriamente falando, que flui, mas o seu modo de ser, i.e, sua realização como algo inerente ao sujeito*" (MAIER, 1982: 29).

[21] Para as citações da *Física*, exceto expresso em contrário, sigo a tradução contemporânea de Hardie e Gaye em BARNES. *The complete works of Aristotle:* The revised Oxford translation, 1984, v. 1. Para as citações da *Metafísica*, ARISTOTLE. Metaphysics. In: BARNES, J. (Ed.). *The complete works of Aristotle*; The revised Oxford translation. New Jersey: Princeton University Press, 1984, v. 2. Quando necessário, apresento em rodapé a tradução latina do comentário de Averróis (ARISTÓTELIS. De Physico auditu. In: AVERRÓIS. *Aristotelis opera cum Averrois commentariis*. Juntas, 1562-1574 (Reimpresso em Frankfurt, 1962) v. IV).

Cabe notar que o termo "movimento" (*motus - ι.:<0Φ4H*) tem sentido próximo ao do termo "mudança" (*mutatio -:γϑ∀∃≅8Z*):

> A natureza é princípio do movimento e da mudança; é a natureza que estamos investigando. Devemos, portanto, entender o que o movimento é, pois se o movimento nos é desconhecido, a natureza também nos é desconhecida. (*Física* III, 1, $200^{b12\text{-}14}$)

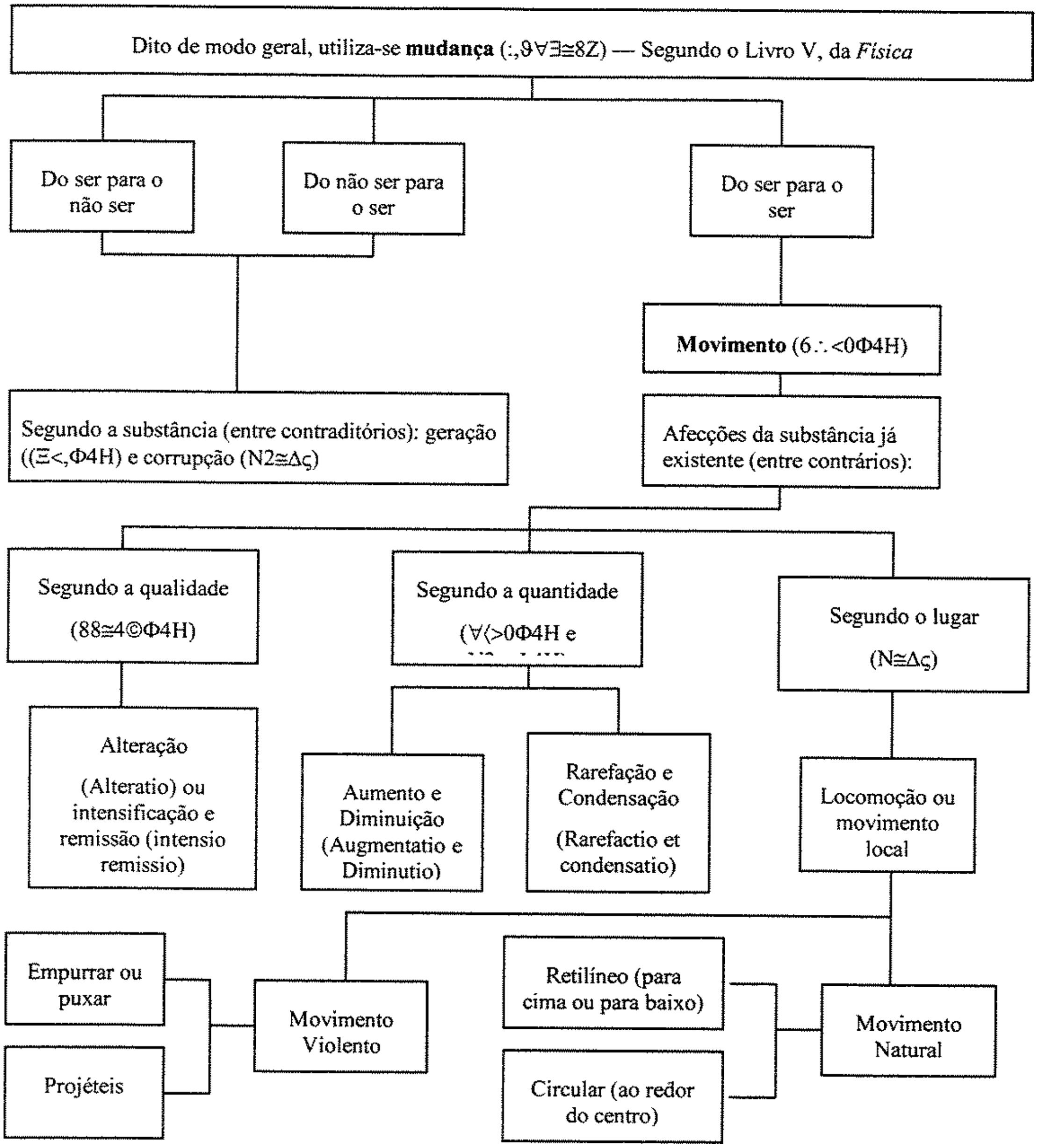
Embora os termos, muitas vezes, sejam empregados indistintamente — "*para o presente, nós podemos dizer que não é necessário estabelecer qualquer diferença entre os termos 'mudança' e 'movimento'*" (*Física* IV, 10, $218^{b19\text{-}20}$) — em um sentido estrito "*mudança difere de movimento*" (*Física* V, 5, 229^{a31}): "*Movimento é a passagem de um certo sujeito para um certo sujeito*" (*Física* V, 1, 225^{b2} e V, 5, $229^{a31\text{-}32}$), enquanto "*mudança é a passagem de um sujeito para um não-sujeito ou de um não-sujeito para um sujeito*" (*Física* V, 1, 225^{a3} e seguintes).[22]

---

[22] Como esclarece Tomás de Aquino: "*Deve-se compreender que quando Aristóteles definiu movimento acima, no livro III, usou a palavra 'movimento' de modo comum a todos os tipos de mutação. Aqui* [Livro V], *ele atribui este significado a palavra 'mutação'. E usa'movimento' em um sentido mais limitado, como certos tipos de mutação. Deste modo, esta parte é dividida em duas partes. Na primeira parte, divide mutação em duas espécies, uma das quais é o movimento. Na segunda parte, subdivide o movimento em suas espécies, aonde diz 'Se, então, as categorias...'.*

No que diz respeito a primeira parte, estabelece dois pontos. Primeiro, dá a divisão da mutação. Em segundo lugar, aonde diz 'Agora a mudança do não-ser...', ele esclarece as partes dessa divisão.

No que diz respeito a primeira parte, estabelece três pontos. Primeiro, estabelece certas coisas que são necessárias para a divisão da mutação. Em segundo lugar, aonde diz 'Assim, segue-se necessariamente...', conclui a divisão da mutação. Em terceiro lugar, aonde diz '... pois desse modo...', ele refuta certas objeções" (*Commentary on Aristotle's Physics*. leitura 2, 649). Vide



---

também: ÉVORA. Physis, kinesis, topos e kenon: um estudo da teoria aristotélica do movimento. 2002, p. 68, n. 04. Os textos de Tomás e de Évora foram de grande auxílio na sistematização da tabela sobre a divisão do movimento, apresentada na seqüência do texto.

A mudança ou o movimento, em sentido genérico, pode referir-se à distinção potência-ato em quatro categorias,[23] das quais geração e corrupção, enquanto criação ou destruição, é a única chamada, *stricto senso*, de mudança, por tratar da passagem do não ser para o ser ou vice-versa. As outras três categorias referem-se sempre à transição do ser para o ser e são chamadas de movimento: o aumento ou a diminuição da quantidade, que pode ocorrer com os seres vivos (*augmentatio et diminutio*) ou simplesmente a perda ou ganho de volume (*rarefactio et condensatio*); a alteração (*alteratio*), que trata da intensificação ou remissão de uma qualidade (*intensio et remissio*); e, por fim, o movimento local ou locomoção.

Deve-se acrescentar a esta caracterização geral que o movimento não é simplesmente o processo pelo qual algo transita da potência para o ato ou vice-versa, mas um modo específico de transição. O uso do termo sucessão, portanto, indica que não pode haver movimento repentino, instantâneo ou por saltos bruscos. Em outras palavras, o movimento é um contínuo e não pode ser compreendido como um conjunto de saltos abruptos ordenados um após o outro. A única passagem da potência para o ato que ocorre abruptamente se dá na categoria da substância, recebe o nome de "mutação" (*mutatio*), e não é movimento, mas um tipo de mudança; assim, "*não há movimento* [estrito senso] *na*

---

[23] *Categorias* 14, 15^{a13} ss.

categoria da substância" (*Física* V, 2, 225^{b10-11}), somente a mudança do par de opostos geração e corrupção.[24] Segundo Maier:

> Pensadores escolásticos, em sua maior parte, referem-se ao fenômeno da geração e corrupção como um exemplo de *mutatio*: a atualização da forma em potência na matéria e sua reincidência, de novo, em potência na matéria era considerado um processo que acontecia abrupta e instantaneamente, e não em graus. Em conseqüência, geração e corrupção não eram classificados como movimento, exceto em um sentido abandonado da palavra 'movimento'.[25]

Nesta medida, geração e corrupção não são movimentos[26], mas mudanças.[27]

---

[24] Passagens que classificam os tipos de mudança, incluindo a categoria da substância: *Física* III, 1, 200^{b33-44}; *Metafísica* VIII, 1, 1042^{a32-b3} et XII, 2, 1069^{b9} ss; *De gen. et corr.* I, 4, 319^{b31} ss. Há, ainda, duas passagens nas quais Aristóteles emprega o termo (Ξ<,Φ4H com um sentido implícito de "mudança": *Física* I, 7, 190^{a31} ss (que inclui a categoria do tempo e da relação), *Metafísica* VII, 7, 1032^{a13-15}. Nas *Categorias* (14, 15^{a13} ss), há uma passagem na qual aparecem seis tipos diferentes de movimento: "*Para o movimento há seis espécies, geração, corrupção, aumento, diminuição, alteração e mudança de lugar*". Contudo, trata-se de desdobramentos das quatro espécies: substância (geração e corrupção), quantidade (aumento e diminuição), qualidade (alteração) e lugar.

[25] MAIER, A. The nature of motion. In: SARGENT, S. *On the threshold of exact science,* 1982, p. 23.

[26] Passagens que classificam os tipos de movimento, excluindo a categoria da substância: Física V, 1, 225^{b7-9}; 2, 226^{a24-25}; VII, 2, 243^{a6-7}; VIII, 7, 260^{a26-28}; *De caelo* IV, 3, 310^{a23-24}. Na passagem *De anima* I, 3, 406^{a12} ss, aparecem quatro tipos de movimento, uma vez que o termo "qualidade" é dividido em aumento e diminuição.

[27] Há uma variação no modo de apresentar o movimento (*De anima* I, 3, 406^{a12} ss) e *Tópicos* IV, 1, 121^{a30} ss, trata do movimento das paixões da alma (note que não há mudança para paixão, ação e relação).

No texto da *Física*, contudo, a investigação dirige-se quase que exclusivamente ao movimento local. Assim, não é incomum que Thomas Bradwardine, no *De proportionibus,* use o termo "movimento" significando "movimento local" e entenda o cálculo da velocidade como a sua medição. Ao lado desta redução na noção de movimento com a qual Bradwardine irá tratar, há uma outra: o desaparecimento das noções de ato e potência no discurso sobre o movimento. Bradwardine afirma que estas questões já foram suficientemente respondidas por Aristóteles que, em contrapartida, não teria finalizado a análise do movimento em separado do móvel e do motor.

1.2 A Ciência para Calcular o Movimento

Posso a investigar, agora, como Bradwardine vale-se do sistema de Aristóteles para o estudo do movimento e se propõe a ampliá-lo. Bradwardine parte do pressuposto que movimentos locais podem ser comparados quanto às suas grandezas, que recebem o nome de velocidades. A comparação ocorre com o uso de proporções, numa operação que recebe o nome de cálculo.

Para Aristóteles, a questão relevante não era o cálculo, mas investigar quais as determinantes naturais que explicam, objetivamente, a experiência sensível do aumento ou da diminuição da velocidade do movimento. Esta investigação podia ser feita considerando, por um lado o efeito e, por outro, a causa. Não se trata ainda de investigar o ato do movimento por ele mesmo, como propõe Bradwardine, mas de fazê-lo sob o ponto de vista do móvel, no primeiro caso, e sob o ponto de vista do motor, num segundo caso; sendo que a estes dois estudos somava-se um terceiro, relativo às causas.

A investigação do ponto de vista do móvel era feita pela comparação das distâncias que dois corpos em movimento retilíneo e uniforme percorrem. Comparar a distância,permitia a Aristóteles estabelecer qual entre os dois movimentos era mais veloz, o que equivale a dizer "mais intenso". O corpo, cujo movimento é mais veloz, percorre uma distância maior durante o mesmo tempo em que o outro móvel da comparação (*Física* IV, 2, $232^{a23\text{-}b20}$). Porém, Aristóteles é incapaz de dar uma solução satisfatória para o cálculo, uma vez que toda e qualquer tentativa para tornar precisa a velocidade era feita a partir do estudo das causas, isolando e definindo a potência do motor e a resistência do ar. Se o móvel do movimento que se pretende estudar é um grave, sua potência motora decorre de sua inclinação para baixo, e a gravidade do móvel é diretamente proporcional[28] a sua

---

[28] A expressão "diretamente proporcional" é adequada para expressar a relação das variáveis no cálculo do movimento em Aristóteles, pois satisfaz ao conceito de variação mútua a que faz referência, a saber, a relação entre duas variáveis, x e y, na qual a razão é sempre constante. Assim, é dito que y varia diretamente de acordo com x, ou diretamente proporcional a x. Em notação contemporânea: y= kx, na qual k é a constante de proporcionalidade. Se, no entanto, y é proporcional ao recíproco de x — i.e, se y é proporcional a 1 dividido x — então é dito que varia inversamente proporcional a x: y=k/x. A aplicação de expressões matemáticas como "diretamente proporcional" à filosofia da natureza de Aristóteles não é consenso entre os historiadores da ciência. Koyré, por exemplo, não admite qualquer tipo de matematização das leis do movimento. Para ele, as relações de proporcionalidade são conseqüências que a posteridade pode extrair das leis de Aristóteles, mas nunca as próprias leis. Moody, contudo, possui uma visão contrária a Koyré (*Estudos Galilaicos*) e da qual compartilho: "*Tentar interpretar estes fatores de 'potência motriz' e 'resistência' em termos da física moderna é obviamente inútil e anacrônico. Porém o fato de que Aristótles sustenta que a relação que determina a velocidade é uma razão entre a potêntia e a resistência, e não uma diferença aritmética, é definitivo*" (Moody. Galileo and Avempace. v. 1 Apud ÉVORA, 2002: 59). A passagem de Aristóteles a qual Mood faz referência é bastante

velocidade. Assim, dois corpos igualmente pesados, homogêneos (constituídos dos mesmos elementos naturais) terão a mesma velocidade. Entre dois corpos com a mesma grandeza, mas de constituição diferente, o de menor gravidade cairá mais lentamente.[29] Para o caso do movimento natural, portanto, é possível concluir que a velocidade é igual à inclinação do corpo para o lugar natural, dividida pela resistência do meio, sabendo-se que algum desvio eventual deve-se a forma do corpo que interfere na resistência.[30]

---

esclarecedora: "*Portanto, A mover-se-á através de B no tempo C, e através de D, que é mais fino, no tempo E (se o comprimento de B for igual ao de D), na proporção da densidade em que o corpo está situado. Pois assuma que B seja água e D ar; então, tanto quanto o ar é mais fino mais incorpóreo que a água, A mover-se-á através de D mais rápido que através de B. Assuma que a velocidade tem a mesma razão para a velocidade, assim como o ar tem para a água. Então, se o ar é duas vezes mais raro, o corpo atravessará B em duas vezes o tempo que leva para fazê-lo em D, e o tempo C será duas vezes o tempo E. E sempre, quanto mais o meio for mais incorpóreo e menos resistente e mais facilmente divisível, mais rápido será o movimento*" (*Física* IV, 8, 215^{b1-13}).

[29] De modo semelhante, entre dois corpos leves, o de maior leveza subirá mais rapidamente. Vide: *Física* IV, 8, 216^{a13-16}; ÉVORA. Physis, kinesis, topos e kenon: um estudo da teoria aristotélica do movimento, p. 70, n. 10.

[30] Vide *Física* IV, 8, 216^{a11-16}; VI, 7, 237^{b28}-238^{a11}; VII, 5 249^{b30}-250^{a10}. Sobre o modo como o corpo e o meio interferem no cálculo: "*Nós vemos o mesmo peso ou corpo mover-se mais rapidamente que outro por duas razões, ou porque há uma diferença naquilo pelo qual se move, como por entre a água, o ar e a terra, ou porque, estes sendo iguais, o corpo móvel difere do outro por possuir excesso de peso ou de leveza*". // "*Agora, o meio causa uma diferença porque impede o móvel, esteja ele movendo-se na direção oposta, como na maioria das vezes, esteja ele em repouso; e especialmente um meio que não é facilmente dividido, i.e, um meio que é de algum modo denso*" (*Física* IV, 8, $215^{a24-b10}$).

Quanto ao movimento violento, leva-se em conta o motor — i.e., sua capacidade para sustentar um certo grau de intensidade da velocidade — e a inclinação ($\Pi \cong BZ$) do corpo em direção ao seu lugar natural. A inclinação corresponde, no cálculo do movimento natural, à matéria do corpo, o motor substitui a gravidade, presente no cálculo do movimento natural, de modo que o movimento violento é igual à capacidade do motor para sustentar o móvel a um certo grau de intensidade, dividido pela grandeza da matéria do corpo.

A diferença entre Aristóteles e Bradwardine se caracteriza por uma dupla divisão para o estudo do movimento: *sub specie causae motivae* e *sub specie effectus*. Os estudos diferenciam-se pelo que perguntam: como é possível avaliar a velocidade segundo a ordem das causas? Como é possível avaliar a velocidade segundo a ordem dos efeitos? Não se deve, contudo, compreender que esta dupla divisão, por si só, seja um rompimento com Aristóteles para a elaboração de um novo edifício teórico, tal qual a ciência moderna distingue entre dinâmica e cinemática. O próprio Aristóteles estabeleceu a possibilidade de estudar, em separado, os efeitos da velocidade (*Física* VII, 5). Em Bradwardine, todos os esforços são direcionados para compreender o movimento *quod effectus* e nada é dito sobre o estudo *quod causas*. Estes esforços permitiram ir além de Aristóteles quanto a uma melhor conceitualização da velocidade, por intermédio da noção de intensidade e remissão das formas.

A noção de intensidade de remissão das formas toma por base grandezas extensivas, como a longitude e a latitude, que podem ser diretamente medidas, para tratar das formas susceptíveis de mais e de menos, cujo exemplo primeiro são as qualidades definidas por

Aristóteles (o quente e o frio, o úmido e o seco) e outras acrescentadas pela tradição escolástica (o luminoso e o tenebroso, a variação de intensidade das cores, e mesmo as virtudes). As dificuldades dessa concepção residem na noção de aumento e redução de intensidade (*intensio remissio formarum*).

Considere, por exemplo, o aumento do calor. Cada momento do processo de intensificação desta mudança corresponderá a um grau de intensidade a mais, o que equivale a dizer que o grau que corresponde ao primeiro momento do calor, não corresponderá ao segundo momento da intensificação em curso; em outras palavras, nenhum grau permanece para além do momento a que corresponde, pois é determinado, único e indivisível. Assim, o calor nunca acumulará graus, i.e., sempre apresentar-se-á como determinado, único e indivisível. A causa da intensificação ou remissão, a primeira vista, parece ser um aumento ou uma redução do número de partes da qualidade em questão. Porém, para explicar o calor que se intensifica, ou uma outra qualidade, não é possível recorrer a essa linguagem quantitativa, posto que não teria sentido falar em partes do calor, muito menos em aumento ou diminuição das partes qualitativas.

Como, então, conceber o processo de intensidade e remissão de formas, uma vez que não faz sentido utilizar a linguagem quantitativa que requer a individualização dos graus da mudança? Duhem[31] sustenta que a solução padrão, i.e, repetida durante todo o século XIV, portanto possivelmente também conhecida por Bradwardine, foi estabelecida

---

[31] DUHEM. *Le système du monde*, 1958, T. VIII, p. 304-305.

primeiramente por Duns Scotus[32], com a teoria do *ubi*. É preciso, contudo, esclarecer que a interpretação de Duhem para o problema baseia-se em sua tese sobre a relevância da condenação das proposições de Aristóteles, em 1277, pelo Bispo de Paris, Etienne Tempier, assim como na redução das teorias sobre o lugar a duas proposições essenciais: que o lugar de um corpo deve conter um corpo; que o lugar de um corpo deve ser desprovido de movimento, posto que é o termo fixo para ao qual todo movimento local se refere.[33]

Duhem, então, divide as teorias aristotélicas do lugar em dois padrões de interpretação. As anteriores a 1277 estão em estreita relação com o texto de Aristóteles e preocupam-se com a contradição entre a teoria do lugar e o movimento local ao se tratar da última esfera celeste.[34] São teorias que se preocupam em reparar o sistema de Aristóteles:

---

[32] Scotus (1265-1308) foi contemporâneo de Bradwardine. Meu intuito não é estabelecer uma vinculação direta entre os textos de ambos, mas esclarecer como, à época de Bradwardine, as teorias do movimento ganharam mais autonomia em relação ao texto de Aristóteles. Scotus, um pouco antes de Bradwardine, desenvolveu uma teoria do movimento que comportava questões quantitativas.

[33] Todas as passagem significativas de *Le système du monde* sobre o lugar foram reunidas e ordenadas por Roger Ariew. Assim, por uma questão de praticidade, para a discussão sobre o lugar segundo Duhem, neste capítulo, ao invés do texto original de *Le système,* prefiro: DUHEM, P; ARIEW, R. (Ed.). *Medieval cosmology; theories of infinity, place, time, void, and the plurality of words.* 1985.

[34] Cito Duhem: "*Em virtude da primeira proposição* [o lugar de um corpo deve conter um corpo], *a última esfera celeste não pode ter um lugar, uma vez que nada pode contê-la. Não tendo lugar, não pode ser capaz de movimento local em virtude da segunda proposição* [o lugar de um corpo deve ser desprovido de movimento, posto que é o termo fixo para ao qual todo movimento

"*estes reparos são soluções parciais e, sempre, insuficientes, uma vez que as contradições que procuravam resolver tinham raízes nos princípios essenciais da teoria Peripatética de lugar*" (DUHEM, 1985: 139). Embora os autores desse período tenham elaborado teorias próprias, há, segundo Duhem, pontos comuns: que não é possível movimento local sem um referencial, fixo por definição, segundo o qual se diz que os corpos estão em movimento ou em repouso, de acordo com suas mudanças de posição comparadas ao termo fixo; que o termo fixo é um corpo existente.[35]

Em 1277, o decreto de Tempier estabelecia uma proposição contradizendo a tradição aristotélica e estabelecendo a possibilidade da mobilidade da última esfera, bem como de todo o cosmo.[36] Coincidência ou não, após 1277 começaram a aparecer teorias sobre o

---

local se refere] *uma vez que todo movimento local requer um lugar, ou seja, um termo fixo ao qual o movimento se refere.*

Entretanto, não só a última esfera do sistema Peripatético é capaz de movimento local, mas também move, uma vez que o movimento diurno é seu movimento" (DUHEM, 1985: 139).

[35] Uma vez que para Duhem o problema da teoria do lugar diz, prioritariamente, respeito à última esfera, há mais dois pontos comuns às teorias anteriores a 1277 que devem ser destacados: "*(3) Em particular, a revolução de um orbe celeste requer que o seu centro fixo seja incorporado por uma massa inteiramente imóvel; (4) Este corpo é a Terra, que permanece perpetuamente imóvel no centro do mundo.*" Estes pontos não poderiam ser abandonados sob pena de deterioração de qualquer sistema de mundo aristotélico: "*Estas proposições são o suporte e a moldura das doutrinas pelas quais os Árabes e os Escolásticos Cristãos levaram adiante o assunto do lugar e do movimento; se essas proposições fossem negadas, a doutrina seria destruída, levando com ela toda a física Escolástica*" (DUHEM, 1985: 179).

[36] As proposições sobre o lugar que, segundo Duhem, davam suporte a toda física escolástica não eram imunes a ataques. Poder-se-ia afirmar, como Averróis (DUHEM, 1985: 180),

lugar que abandonam a pretensão de firme vinculação ao texto de Aristóteles.[37] A nova posição teórica, continua Duhem, foi inaugurada por Duns Scotus que, entretanto, não possui um texto dedicado ao estudo do lugar ou do movimento.[38]

---

que se todo movimento circular dos céus ocorre, necessariamente, ao redor de um centro no qual se localiza um corpo imóvel, o sistema astronômico de Ptolomeu deve ser descartado, posto que para cada ecêntrico de cada um dos planetas deveria haver uma Terra servindo de centro, sendo que o mesmo deveria ocorre para cada epiciclo. De acordo com as proposições sobre o lugar, a imobilidade da Terra no centro do cosmo era uma necessidade lógica, além de uma necessidade física, i.e, negá-la implicaria na privação de sentido aos conceitos de lugar e movimento local, e como diz Duhem, "*seria a proclamação do absurdo*" (DUHEM, 1985: 180).

A imobilidade da Terra no centro teria, ainda, a função de afirmar a imobilidade do cosmo (*secundum substantiam*). Isto permite afirmar a mobilidade das partes do cosmo (*secundum dispositionem*) sem que o todo do cosmo seja submetido a um deslocamento, ou mudança, posto que a esfera do mundo permaneceria inalterável com seu centro fixo. Assim, o deslocamento do mundo como um todo é desnecessário para explicar o movimento no mundo e, mais ainda, é logicamente impossível, não podendo ser produzido, portanto, nem pelo deus onipotente. A submissão da onipotência divina à lógica teria, segundo Duhem, irritado a ortodoxia cristã até levá-la ao ponto de ruptura com a autonomia escolar na interpretação de Aristóteles. O marco histórico dessa ruptura seria, então 1277, e a solicitação do Papa João I ao Bispo Tempier para que convocasse uma assembléia de doutores da Sorbonne com o intuito de condenar as proposições que refutassem o poder de deus sob o pretexto de contradição com a *Física* de Aristóteles e os comentários de Averróis. Entre as condenações está a seguinte: "*Que Deus não pode mover o céu com movimento retilíneo. E que a razão para isso é que permaneceria um vazio*" (*Quod Deus non possit movere Caelum moto recto. Et ratio est quia tunc relinqueret vacuum*" (DUHEM, 1985: 181).

[37] Duhem vai ainda mais longe, uma vez que, para ele, estas teorias que surgem após 1277 são fonte das idéias sobre espaço desenvolvidas mais tarde pelos filósofos modernos: "*Além do mais, apareceram então teorias sobre o lugar que quebravam seus vínculos com a tradição*

Scotus compreende lugar como a relação entre dois termos, a saber, o corpo contido e a contenção do corpo. A noção de lugar compreende, ainda, a noção de superfície, mas é mais ampla, uma vez que deve considerar do quê é feito o contêiner, i.e, o que contém o corpo (*ultimum continentis*).[39] O contêiner é um corpo que tem como contrapartida um outro corpo, que é contido. Dizer que algo é um contêiner é o mesmo que dizer que algo exerce a ação de localizar (*locare*) uma outra coisa que possui a paixão oposta a esta ação, a saber, ser localizado (*locari*), que Scotus denomina *ubi.*[40] O lugar é intrínseco ao corpo que exerce a ação de localizar e extrínsico ao corpo localizado, enquanto o *ubi* é extrínsico ao corpo que exerce a ação de localizar e intrínseco ao corpo que é localizado.[41] Há ainda um terceiro termo aplicado às partes do corpo que possui um certo *ubi*, à disposição (*positio*). Trata-se do arranjo das partes do corpo segundo a ordem em que ocupam as várias partes

---

aristotélica; estas teorias adiantavam e desenvolviam idéias para as quais os filósofos modernos freqüentemente retornavam" (DUHEM, 1985: 139).

38 "*Ele não fez uma única exposição sistemática de suas idéais sobre o lugar e o movimento; estabeleceu-as aqui e ali, incidentalmente, no escopo de discussões teológicas. Este fato é suficiente para dificultar o trabalho de entendê-lo completamente; sua extrema sutileza torna o trabalho ainda mais árduo*" (DUHEM, 1985: 183). Trabalhei exclusivamente com os excertos sobre o lugar e o movimento coletados por Duhem das *Questiones quodlibetales* e *Secundus scripti oxoniensis,* ambas disponíveis na *Opera omnia*. Facsimile da edição de 1639. Nova Iorque: Olms, 1968. 12 volumes.

39 *Quaestiones in librum IV sententiarum*, X, q. II.

40 *Quest. quodlibetales*, q. XI.

41 *Quaestiones in librum IV sententiarum*, X, q. II.

do lugar. A disposição é um conjunto quantitativo de elementos geométricos que permite especificar o *ubi* do corpo.[42]

A ruptura com as teorias aristotélicas do lugar possibilitam a ruptura com as teorias aristotélicas tradicionais do movimento. Em Scotus, o movimento se divide em dois tipos: movimento qualitativo, aquele que ocorre no interior do móvel; e movimento quantitativo, a locomoção (*N≅Δς*), que é exterior e decorre da atualização, sempre renovada, no móvel, de um *ubi*. Consolida-se, assim, a percepção escolástica de que o movimento local é distinto de todas as outras formas de movimento e de mudança; sua característica principal é ocorrer em uma sucessão de graus que se intensificam ou que diminuem de intensidade. Para Maier, esta concepção de movimento se impôs como padrão, logo no início do século XIV.[43] Sua vantagem explicativa reside na relação entre a sucessão contínua, no processo de intensificação ou remissão, de um *ubi* para um outro *ubi e a* concomitante passagem de um grau de velocidade para outro grau de velocidade. Mesmo não havendo cumulatividade no *ubi*, nem na velocidade (*termini motus sunt incompossibiles*), é razoável conceber um *ubi* mais intenso que outro e, do mesmo modo, uma velocidade mais intensa. A diferença desse processo para o movimento local com relação aos outros tipos de movimento e

[42] Deve-se notar que o lugar para Soctt não é absoluto, mas sempre uma relação entre o corpo que contém, ao qual Duhem denomina corpo ambiente, e o corpo contido. Assim, uma vez que haja qualquer alteração no corpo contido ou no contênier haverá, necessariamente uma alteração no lugar. Mesmo que o corpo contido permaneça imóvel, se o ambiente que contém, i.e, o contêiner, se alterar, o lugar também se alterará (DUHEM, 1985: 184).

[43] MAIER. *Zwei Grundprobleme der Scolastichen Naturphilosophie,* p. 59-61.

mudança, como o exemplo da intensificação do calor, reside, então, no *ubi* como suporte garantidor da intensidade e remissão, e na comparabilidade dos movimentos locais.

Bradwardine, semelhantemente a Duns Scotus, trabalha com a noção de intensificação e remissão do movimento devido à resistência do meio, i. e, do lugar em que se encontra o corpo. Esta questão aparece no *De proportionibus* (cap. III, parte 2, p. 117-125):

> ...três tipos de movimento devem ser pensados quando se trata da resistência, a saber, qualitativamente, quantitativamente e ambos. Qualitativamente, pode haver igualdade da resistência por três modos: intrisecamente, extrinsecamente e ambos (neste último modo que se diz que há igualdade absoluta de resistências). Intrisecamente, diz-se que há igualdade de resistência para aquelas coisas que movem-se com igual facilidade em virtude da densidade, raridade ou de alguma outra virtude intrínseca igual. Extrinsicamente diz-se que há igualdade de resistência para aquelas coisas que são igualmente resistivas em virtude de alguma assistência externa (este é o caso em que uma coisa resiste em virtude de algo exterior a si mesmo). Deve-se notar, nesta conexão, que é mais difícil dividir ou alterar uma parte existente no todo que uma separada dele. (*De proportionibus* III, 223-233)[44]

Deste modo, pode-se dizer que uma porção de terra e uma de ar possuem resistência quantitativa igual, desigualdades qualitativas intrínsecas e igualdades qualitativas

---

[44] "*Dicendum quod aliqua esse aequalis resistentiae est tripliciter: scilicet qualitative, et quantitative, et utroque modo. Et qualitative tripliciter: scilicet intrinsece, et extrinsece, et utroque modo. Et hoc est aequalitas resistentiae aliquorum simpliciter. Intrinsece dicuntur illa esse aequalis resistentiae quae, quantum ad densitatem et raritatem ac alias conditiones intrínsecas, sunt aequefacilia ad movendum. Extrinsece dicuntur illa aequalis reaequefacilia ad movendum. Extrinsece dicuntur illa aequalis resistentiae quae, per sua iuvamenta extrínseca, sunt aequaliter resistentia; (aliquid enim resistit per aliquid extra ipsum). Et ideo difficilius est dividere vel alterare partem inexistentem toti quam si a toto esset separata.*"

extrínsicas e extrínsicas-intrínsecas; ou seja, é possível que duas desigualdades qualitativas (o ar e a terra, ou a parte e o todo), tenham igualdade quantitativa.

A *intensio* diz respeito à qualidade, não à quantidade do movimento. Por "qualidade" deve-se entender a grandeza da velocidade, enquanto por "quantidade" deve-se entender o espaço percorrido pelo móvel. Deste modo, dois movimentos, quando comparados, podem mostrar-se iguais quanto à grandeza de suas qualidades e diferentes quanto a suas respectivas quantidades (*De proportionibus*, cap. III, parte 2, p. 117-125). Como o movimento é a atualização de uma qualidade, os calculadores de Oxford e os parisienses entendem ser necessário separar a intensidade da extensão. Como diz Oresme: "*A* intensio [no que diz respeito ao movimento] *é manifesta, palpável e anterior segundo a ordem da natureza, enquanto a* extensio *é anterior segundo a ordem do conhecimento*" (*De configurationibus* I, 3).[45]

Contudo, tratar a velocidade como susceptível de intensidade põe a questão da natureza da velocidade. A dificuldade reside no uso aparentemente ambíguo dos termos "movimento" e "velocidade". Bradwardine ora trata da intensificação do movimento, ora trata da intensificação da velocidade. É o movimento ou é a velocidade que se intensifica? Para Aristóteles, a velocidade não tem significação física além da representação da relação entre a potência motora e a resistência do meio em um movimento local. Não há porque acreditar que Bradwardine postule a velocidade como algo diferente do movimento. Nesta

---

[45] ORESME. *De configurationibus qualitatum,* I, 3. In: CLAGETT, M. *Science of Mechanics in Middle Age,* p. 370.

medida, o uso do termo velocidade pelo termo movimento indica que a preocupação do discurso é o cálculo e não a caracterização ontológica da intensificação e remissão das formas. Em cada um dos três primeiros capítulos do tratado *De continuo*, o movimento é tratado de modo distinto, sempre privilegiando a possibilidade do cálculo em detrimento do tratamento metafísico:

a) Capítulo I, o movimento em vista de sua produção: i.e, enquanto uma relação de proporção entre as potências motoras e resistivas;

b) Capítulo II, o movimento em vista de seu efeito: i.e, a medida da distância percorrida, ou da latitude ou graus obtidos;

c) Capítulo III, o movimento em vista de seus limites: i.e, limites temporais, o início e o fim, e limites quanto à potência ou ação, mínima e máxima, envolvida. No capítulo III, o conhecimento dos limites diz respeito ao alcance das potências motora e resistiva, a distância percorrida pelo móvel e o tempo em que o movimento ocorre — todos considerados contínuos, o que equivale dizer infinitamente divisíveis.[46]

---

[46] A relação entre o movimento e o problema do contínuo decorre da leitura de duas passagens da *Física*. A primeira é o capítulo 5 do livro VI, que trata do primeiro momento em que ocorre o movimento, "*aquele em que pela primeira vez algo é alterado*" (*Física* VI, 5, $236^{a10\text{-}15}$), conclui que se o movimento de fato é contínuo, não pode haver tal momento. O segundo trata da necessidade de considerar o primeiro momento do movimento, mesmo para o caso de um móvel que já se encontra em movimento retilíneo, pois este pode reverter o seu curso *Física* VIII, 8, $262^{a10\text{-}17}$.

Uma vez que movimento e velocidade são considerados indistintamente, então é razoável conceber que Bradwardine esteve próximo de enunciar uma nova divisão no estudo do movimento. Primeiro, a *Física*, de Aristóteles, que trata o movimento com o intuito de entender-lhe a causa em duas subdivisões, no que diz respeito ao ser, ao explicar a passagem da potência para o ato e vice-versa, respondendo ao problema posto pelos eleatas, e no que diz respeito à cosmologia, i.e., a ordenação do mundo, compatibilizando ordem e movimento local. Segundo, uma outra ciência que estude a velocidade, não tratada adequadamente por Aristóteles.

Bradwardine afirma que a filosofia da natureza não pode prescindir de conhecer as proporções das velocidades: "*Todo movimento sucessivo é proporcional a outro com respeito à velocidade; a filosofia natural, que considera o movimento, não deve ignorar a proporção dos movimentos e suas velocidades*" (*De proportionibus*, Proêmio, 1, 1-3). A noção de proporcionalidade é tratada como parte integrante do movimento local. Assim, os movimentos locais são de tal forma que suas velocidades são proporcionais entre si. Sobre este axioma assentar-se-á todo o tratado. O axioma traz, ainda, uma outra proposição embutida, que se revela na continuidade do parágrafo: "*E assim como testemunha Boécio no primeiro livro de sua Arithmeticae: 'Aquele que se omite no estudo das matemáticas põe a perder todo o conhecimento filosófico'...*" (*De Proportionibus*, Proêmio, 6-9).[47]

[47] *"Et quia testante Boethio, primo* Arithmeticae *suae: Quisquis scientias mathematicales praetermiserit, constat eum omnem philosophiae perdisse doctrinam...".*

Esta proposição, dita pela boca de Boécio, indica que o autor considera a relação de proporcionalidade como uma relação matemática. Está, portanto, por princípio, descartada qualquer relação de proporcionalidade não-matemática:[48]

> *...se não houvesse proporção entre as potências por não serem elas quantidades* [do mesmo gênero], do mesmo modo não poderia haver proporção entre sons, e toda a modulação da música pereceria, pois o tom consiste em uma proporção sesquioitava, o diatesseron em uma sesquitertia, o diapasão, que é composto pelo diatesseron e pelo diapente, e seu dobro, diapson cum diapente, e o triplo, bis diapason em uma proporção quádrupla. (*De Proportionibus* II, 445-447).[49]

Estabelecido como axioma primeiro, o contexto proporcional e matemático em que se desenvolve o movimento local, o autor deixa claro, desde o início, que o leitor não deve esperar uma investigação sobre a origem do movimento, uma investigação sobre o "por quê". Se o objeto do filósofo é a natureza e a natureza é movimento, então a velocidade, enquanto um aspecto relevante do movimento, é parte do estudo da natureza. Entretanto, logo a seguir, Bradwardine informa que o estudo da velocidade não é fácil, faz uso de uma matemática avançada, e, efetivamente, nenhum filósofo investigou esse assunto com profundidade. Trata-se de um estudo especializado de um aspecto abstraído do movimento, que nada diz sobre sua natureza e, nesta medida, constitui uma ciência à parte:

---

48 No Capítulo II, Bradwardine utiliza o axioma da proporcionalidade para atacar seus adversários que estabelecem uma relação não matemática entre os movimentos.

49 "*...si inter potentias non esset proportio (eo quod non sunt quantitates) eadem ratione nec inter voces. Et tunc totius musicae modulatio deperiret, Namepogdous seu tonus in sesquioctava proportione consistit: diatessaron autem in sesquitertia: diapente in sesquialtera: diapson (quae ex diatessaron et diapente componitur) in duplo; diapason cum diapente in tripla: et bis diapson in quadrupla proportione fundatur...*"

> E uma vez que o conhecimento desse assunto é ao mesmo tempo necessário e difícil, sendo que ainda não foi tratado em nenhuma parte da tradição filosófica de modo pleno, nós escrevemos a seguinte obra sobre a proporção das velocidades dos movimentos. (*De proportionibus*, Proêmio, 1, 3-6)[50]

Se a ciência do movimento de Bradwardine é, na verdade, uma ciência da velocidade do movimento, separada do estudo da física pela sua subordinação à matemática, então, no sistema escolástico de classificação do conhecimento, esta nova ciência só pode ser entendida como intermediária entre a física e a matemática; ou seja, seu estatuto epistemológico pode ser assim colocado: tratar de um aspecto do mundo físico por intermédio do instrumental analítico da matemática, i.e, aritmética e geometria. Esta caracterização ainda não é suficiente para aproximar Bradwardine dos modernos. Sua ciência do movimento, mesmo enquanto ciência intermediária[51], não possui a mesma

---

[50] "*Et quia cognitio illius est necessaria et multum difficilis, nec in aliqua parte philosophiae tradita est ad plenum, ideo de proportione velocitatum in motibus fecimus istud opus.*"

[51] O caráter intermediário das *scientiae mediae* pode ser melhor compreendido a partir da seguinte coleção de passagens de Tomás de Aquino: "*Algumas ciências são intermediárias, isto é, as que aplicam os princípios matemáticos à matéria sensível.*" (In *I Post anal.*, lect. 41, n° 3) – "*E de acordo com o mesmo modo de falar, a astronomia e a perspectiva são espécies da matemática, na medida em que os princípios matemáticos são aplicados à matéria natural.*" (*Summa theologiae*, Ia. IIae, q. 35, a. 8) – "*Com efeito, a astronomia considera o movimento, pois a astronomia é uma ciência intermediária entre a matemática e a ciência da natureza. Com efeito, a astronomia e as outras ciências intermediárias aplicam seus princípios às coisas naturais.*" (In *I Metaphysicorum*, lect. 13, n° 202). "...encontra-se *três ordens de ciências* acerca das coisas naturais e matemáticas. *De fato, algumas,* que consideram as propriedades das coisas naturais, enquanto tais, são puramente naturais, como a física, a agricultura e similares. *Algumas*, que determinam acerca das quantidades de modo abstrato, como a geometria acerca da magnitude e a aritmética acerca do número, são

autonomia e a mesma relevância epistemológica que Galileu impôs à sua cinemática. A falta de relevância epistemológica a que me refiro diz respeito ao caráter sempre secundário da ciência intermediária no sistema de classificação escolástico, pois ela nada diz sobre o quê de fato importa saber: a natureza última das coisas, não representando, assim, uma mudança na concepção do que é ciência.

---

puramente matemáticas. *Algumas, porém*, que aplicam os princípios matemáticos às coisas naturais, são intermediárias, como a música, a astronomia e similares." AQUINO. *In Boethii* De trinitate (q. 5, a 3, ad 8^{m}).

Capítulo II – A Viabilidade da Matematização da Física

O presente capítulo apresenta e examina o arcabouço matemático da *Geometria speculativa*[52] e do primeiro capítulo do *De proportionibus*[53]. Meu intuito é compreender a relevância que a descrição da linguagem geométrica e aritmética das proporções tem para que Bradwardine alcance seu objetivo: calcular o movimento. Ao mesmo tempo, quero compreender a ausência de proposições sobre as alterações que o cálculo provoca na ciência aristotélica.

Como mostrei no capítulo anterior, autores do século XIII prepararam o terreno para que o movimento pudesse ser calculado. É sintomático que o tema do movimento deixe de freqüentar exclusivamente os comentários ao texto da *Física* e passe a constituir-se autonomamente, sob a forma de tratados de geometria, ou que se valem da linguagem e organização textual dos geômetras. Minha hipótese é que Bradwardine buscava estabelecer uma nova linguagem para a filosofia da natureza a partir de valores da geometria e de termos e sintaxe da aritmética. Este esforço, contudo, não se encontra sob a forma de um

---

[52] O texto mais antigo da *Geometria speculativa* que se tem notícia data de 1495. Não é possível determinar quando foi escrita. Contudo, por se tratar de uma exposição manualesca do assunto, é possível supor que Bradwardine a compôs para sua regência em artes; supondo o seu nascimento entre 1290 e 1300, o texto deve ter sua origem entre 1320 e 1330.

[53] Não é possível precisar quando o *Tractatus de proportionibus* foi escrito. Há, contudo, consenso que entre 1330 e 1340 outros autores do Merton College — William Heytesbury, Richard Swineshead, John Dumbleton — já fazem menção ao seu conteúdo.

texto coeso, nem é alardeado pelo autor. Ao contrário, a *Geometria* ora parece incompleta, pela ausência de proposições metodológicas, ora o *De proportionibus,* aparece manualesco, ao reproduzir sistemas de proporções que não são utilizados pelo autor em nenhum outro momento. Contudo, entendo que tanto o caráter incompleto de uma obra, quanto o caráter manualesco de outra, são peças relevantes para a compreensão da ciência do movimento promovida pelo autor. Com o intuito de investigar o estabelecimento da linguagem matemática para o movimento, procedo à análise de texto destas duas obras de Bradwardine. Ao final do capítulo, analiso os textos expostos com o intuito de responder a duas questões: o quê o cálculo do movimento produz, no interior da filosofia da natureza aristotélica? Como Bradwardine julga o sucesso ou o fracasso do seu e de outros cálculos?

Antes, porém, é preciso esclarecer que o esforço de Bradwardine não é fora de propósito para o seu tempo. Não só, segundo a hipótese de Duhem apresentada no capítulo anterior, a condenação de 1277 e a obra de Duns Scotus marcam o afastamento do tratamento metafísico movimento, como também, o século XIII, — segundo a hipótese de Clagett que passo a apresentar — retoma contato e passa a dar importância ao tratamento do movimento em tradições de pesquisa desvinculadas da filosofia da natureza de Aristóteles. O precursor dessa retomada é Gerard de Bruxelas[54] que, tendo como base textos de astronomia, geometria do movimento e mecânica, escreve seu *Libe de motu,*[55]

[54] CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

[55] O título recebe essa grafia e pertence ao primeiro quarto do século XIII.

trabalho que não chegou a constituir um novo corpo de conhecimento sobre o movimento, mas um aglomerado de definições, teoremas e pontos de vista recolhidos de fontes gregas.

Na astronomia, segundo Clagett, o *De Motu* aproxima-se do trabalho de Autolycus de Pitinae (IV d.C.), intitulado *De spera mota*[56] (310 d.C.). O *De spera* é uma tentativa para sistematizar e tornar mais preciso o cálculo do movimento nos sistemas astronômicos resultantes do "problema de Platão."[57] Em um dos passos para compreender o movimento planetário,[58] Autolycus estabelece uma definição de movimento igual (velocidade uniforme):

> Um ponto é dito ter se movido com movimento igual quando ele atravessa quantidades iguais e similares em tempos iguais. Quando um ponto sobre um arco de um círculo ou sobre uma linha reta atravessa duas linhas com movimento igual, a proporção do tempo em que atravessa uma de duas linhas para o tempo em que atravessa

---

[56] A grafia "*spera*" é forma medival (no caso, século XIV) da palavra *sphaera*.

[57] Segundo Duhem, Platão teria sido o primeiro a enunciar aquele que, até o século XVII, foi o mais importante problema da astronomia. Tal problema chegou até os dias atuais por Simplício, que o recebeu de Sosígenes, professor de Alexandre de Afrodísias, que, por sua vez o recolheu da *História da Astrologia* que teria sido escrita por Eudemos, discípulo imediato de Aristóteles, que o recebeu de Eudóxo, que primeiro teria recebido e trabalhado sob a teoria astronômica de Platão. Eis o problema transmitido por Simplício: "*Platão admite, em princípio, que corpos celestes se movem com um movimento circular, uniforme e constantemente regular [i.e., no mesmo sentido]; ele coloca então este problema aos matemáticos: quais são os movimentos circulares, uniformes e perfeitamente regulares que convém tomar como hipótese, a fim de poder salvar as aparências apresentadas pelos planetas?*" (SIMPLÍCIO. *In Aristotelis quatuor libros de Coelo commentaria*, livro 2, comentários 43 e 46. Apud DUHEM, Pierre. Salvar os fenômenos: ensaio sobre a noção de teoria física de Platão a Galileu, p. 7)

[58] MICHEL, Paul-Henri. *De Pythagore à Eucide*. Paris, 1950. Especialmente p. 84-85.

> a outra é a proporção de uma das duas linhas para a outra." (AUTOLYCUS. *De spera mota*: 146, 4-9)[59]

Para Clagett, essa passagem de Autolycus é exemplar do tipo de influência que o tratamento do movimento tem a partir do século XIII, a saber, o modo geométrico de tratar o movimento e a terminologia empregada. Sobre o tratamento geométrico do movimento, o texto ensina a não fazer referência a corpos materiais, com dimensão, uma vez que não é um corpo, mas um ponto geométrico, que o geômetra pode tratar como móvel; de modo semelhante, as "superfícies" dos corpos são descritas como linhas, arcos de círculos e retas, e não matéria.[60] Sobre a terminologia utilizada na tarefa de tratar dos fenômenos celestes a partir da geometria, o termo "*motus*" é empregado no mesmo sentido de "*velocitas*", tanto em Autolycos e em Gerard de Bruxelas.[61] Da mesma forma, o termo "*equalis*" é empregado como um aspecto do movimento, também designado "*uniformis*". Assim, a expressão "*motus equalis*" é equivalente a expressão "*velocitas uniformis*".[62]

---

[59] Fonte em CLAGETT (1979: nota 4, p. 165).

[60] Na mesma tradição de Autolycus estava Geminus (1 D.C ?), que acentuou a importância da geometria para a astronomia, especialmente em seus aspectos cinemáticos: "*...o astrônomo os provará pelas propriedades das figuras ou magnitudes ou pela contagem do movimento e do tempo apropriado para ele*" (Apud COHEN; DRABKIN, 1948: 90).

[61] Como procurarei mostrar, esse uso também ocorre em Bradwardine.

[62] Se for possível sustentar a equivalência absoluta das duas expressões, poder-se-á traduzir as proposições de Autolycos e Gerard de Bruxelas como Clagett sugere: "(1) a velocidade [o movimento] de um ponto é uniforme [igual] quando este ponto atravessa distâncias lineares iguais em iguais períodos de tempo e (2) se a velocidade [movimento] de um ponto é uniforme [igual] e ele atravessa duas distâncias com velocidade uniforme [movimento igual], então as distâncias

Ao lado da astronomia, a geometria do movimento, que trata da revolução de figuras planas e tridimensionais, é a outra tradição de pesquisa que serve ao estudo do movimento. É possível perceber a diferença de tratamento entre a geometria estática e a geometria do movimento a partir da descrição da circunferência de um círculo. Para a geometria estática, a circunferência de um círculo é definida como o local em que todos os pontos estão eqüidistantes do ponto central. Para a geometria do movimento, a

---

atravessadas são diretamente proporcionais aos períodos de tempo em que foram atravessadas: Ou, para a velocidade uniforme (movimento igual): S1:T1=S2:T2" (CLAGETT, 1979: 166).

Ao lado desta interpretação sobre a definição de velocidade, Autolycos desenvolve os dois teoremas apresentados abaixo sobre a movimentação de pontos na superfície esférica: "1. Quando a esfera gira sobre seu eixo com revolução uniforme, os pontos sobre sua superfície (exceto os pontos polares) descrevem círculos paralelos, dos quais os pólos são os pólos da esfera sobre seu eixo; 2. Quando a esfera é movida com movimento uniforme sobre seu eixo, todos os pontos em sua superfície, em igual tempo, descrevem arcos similares aos círculos paralelos que atravessam..." (AUTOLYCOS, *De spera mota*: linhas 13-19). Os teoremas tratam dos efeitos provocados pela esfera em movimento sobre os pontos em sua superfície. O primeiro trata da trajetória de círculos paralelos descritos por qualquer ponto da superfície da esfera, exceto os polares. O segundo afirma que quando a rotação uniforme da esfera está ocorrendo, os pontos descrevem arcos similares em períodos iguais de tempo. Ambos teoremas buscam definir o movimento de rotação da esfera a partir dos movimentos de seus pontos de superfície. É nesse contexto que Gerard de Bruxelas escreve, tendo como preocupação procurar alguma velocidade linear uniforme de um ponto que possa ser representante de uma multidão de pontos, i.e., de velocidades iniciadas a partir do movimento da esfera sobre seu eixo. Porém Autolycos só desenvolve seus trabalhos sobre a esfera; sendo astrônomo, estava interessado na figura do céu. Gerard de Bruxelas, ao contrário, interessa-se pela rotação de todas as figuras geométricas. Não há citações textuais de Autolycos no texto de Gerard de Bruxelas, embora seja provável que o texto lhe fosse conhecido, visto que a tradução feita por Gerard de Cremona era popular no século XIII. Além da obra de Autolycos, é provável que Gerard conhecesse Euclides e Arquimedes, o que é justificável pelo seu interesse em geometria.

circunferência é definida como uma curva gerada por um ponto que se move em um plano de uma certa maneira que sempre esteja a mesma distância de um outro ponto designado como ponto central e que retorne ao ponto de partida.[63] Teria sido por intermédio de Arquimedes que a tradição de pesquisa da geometria do movimento teria influenciado os estudos medievais de cinemática, em especial de Gerard de Bruxelas, que cita exaustivamente o *Dimensio circuli*.[64] Além das especulações de ordem geométrica, Gerard

---

[63] É possível que a geometria do movimento tenha surgido como forma de resolver três antigos problemas da geometria grega: a trisecção do ângulo de um triângulo (a divisão do ângulo segundo qualquer razão), a quadratura do círculo (o tamanho de qualquer arco de um círculo) e a duplicação do cubo. A solução empregada para esses problemas foi uma curva conhecida como quadratrix, cuja definição exige o emprego de pontos e linhas em movimento. O emprego da quadratrix aparece já em Hípias de Elis (nascido em 460 a.C.). O aspecto cinemático da definição dessa curva pode ser compreendido a partir da descrição preservada por Pappus de Alexandria (HEATH, 1921: 225-6).

Não se pode, contudo, afirmar que Pappus teve influência direta sobre Gerard de Bruxelas, uma vez que não era conhecido na cristandade, durante a Idade Média. Também porque, ao contrário de Pappus, Gerard não empregou os conceitos de movimento de rotação e translação aplicados à linha. Para o estudo da cinemática medieval importa mais o fato da tradição de pesquisa na resolução dos problemas da trisecção do ângulo, da quadratura do círculo e da duplicação do cubo ter apontado para a geometria do movimento e a metodologia que a envolvia, como o método da exaustão, que teria sido usado pela primeira vez por Eudóxo, no século IV a.C., depois por Euclides e completamente desenvolvido por Arquimedes.

[64] *Dimensio circuli* mereceu a atenção de três traduções para o latim: a primeira feita por Platão de Tívoli, a segunda por Gerard de Cremona (no século XII) e a terceira por Guilherme de Moerbeke (1269), como parte de um compêndio de traduções de obras arquimedianas. Sobre a presença dos textos de Arquimedes durante a medievalidade vide: CLAGETT. Archimedes in the Middle Ages: De mensura circuli. *Osiris*, v. 10, 1952: 591-618; CLAGETT. The use of the Moerbeke translations of Archimedes in the works of Johannes de Muris. *Isis*, v. 43, 1952: 236-42;

de Bruxelas valeu-se do tipo de prova freqüentemente empregado por Arquimedes, a redução ao absurdo.[65] Segundo Clagett, a influência de Arquimedes manteve-se relacionada a questões de linguagem e argumentação em Gerard de Bruxelas. A geometria do movimento só iria contribuir diretamente com suas proposições para a cinemática medieval a partir do estudo da espiral[66] feito por dois autores posteriores, o mertoriano[67] William Heytesbury, discípulo de Bradwardine, e o parisiense Nicole Oresme, que em seu *De configurationibus qualitatum*[68] desenvolveu as demonstrações de Arquimedes para delas extrair considerações sobre a velocidade uniforme de um ponto ao longo de uma linha reta. A definição de espiral dada por Arquimedes, a qual Gerard de Bruxelas não teve acesso, torna o movimento elemento sem o qual não haveria a figura. Segundo a definição, se uma linha reta gira 360° em um plano com velocidade uniforme tendo uma das extremidades

---

CLAGETT. The curvis superficiebus Archimenidis: a medieval commentary of Johannes de Tinemue on Book I of the De sphaera et cylindro of Archimedes. *Osiris*, v. II, 1954: 295-358.

[65] Porém, ao lado da citação do texto de Arquimedes, encontra-se uma série de proposições do comentário de Johannes de Tinemue, o *Commentum in demonstrationes*, conhecido na época como *De curvis superficiebus Archimenidis* e nomeado por Gerard de Bruxelas como *De pyramidibus*. Sobre o texto de Johannes de Tinemue, vide CLAGETT, 1954: 295-358.

[66] O estudo da espiral provavelmente era desconhecido até a publicação de um trabalho híbrido chamado *De quadratura circuli*, formado pelas treze primeiras de um total de dezoito proposições do texto de Arquimedes sobre as linhas espirais, além da primeira proposição do *Dimensio circuli*. Clagett (1952) especula sobre esse texto ter sido escrito em Paris, por volta de 1340, por Guilherme de Moerbeke.

[67] Membro do Merton College, Oxford University.

[68] Fonte primária: ORESME, N. De configuarationibus qualitatum. Bk. I, chap. 21, *Isis*, v. 43, 1952: 239, n. 7.

fixadas em um ponto e, ao mesmo tempo, um ponto sobre a linha em rotação parte da extremidade fixa da linha no mesmo instante do início do movimento da linha, também com velocidade uniforme, e dirige-se a outra extremidade da linha, a trajetória do ponto descreverá uma espiral no plano. Não se trata só de movimento, mas de dois movimentos diferentes que acontecem simultaneamente. Muito embora seja possível encontrar a definição e um estudo dos efeitos do movimento uniforme já no texto de Arquimedes, o estudo do movimento necessita de um requisito ausente, i.e., a possibilidade de estabelecer uma fórmula geral capaz de tratar da distância percorrida (espaço) e do tempo transcorrido de modo que, dado o mesmo tempo para dois móveis diferentes, fosse possível comparar a velocidade dos móveis em vista da comparação dos espaços percorridos[69]. Embora, olhando retrospectivamente, possa não ser complicado o procedimento matemático de passar da definição de movimento uniforme de Arquimedes para uma fórmula geral de comparação de velocidades, é complicado validar tal conhecimento a partir da tradição de pesquisa inaugurada pela *Física* de Aristóteles.

Da *Mecânica*,[70] atribuída a Aristóteles, destaca-se a discussão sobre o movimento circular e, nele, a rotação de um raio no qual dois pontos, distantes diferentemente do

---

[69] *De motu*, Livro I.

[70] Quanto à *Mecânica*, atribuída a Aristóteles, é de autoria desconhecida. Clagett (1979: 182) especula a possibilidade de Stratos, sucessor de Aristóteles no Liceu em 287 A.C. e autor de uma obra intitulada *Sobre o Movimento* (da qual se conhece apenas as passagens preservadas por Simplício), tê-la escrito. Outro tratado de mecânica da antigüidade é o de Hero de Alexandria (O livro 2, cap. 2, Sobre os círculos da *Mechanics*, de Hero, encontra-se em CLAGETT, 1979: 38-51), que pode ter influenciado a *Mecânica* atribuída a Aristóteles.

centro, movem-se de modo diferente, sendo que o mais distante do centro move-se mais rápido.[71] O problema, na *Mecânica*, surge a partir da discussão sobre a precisão das balanças: por que, como é sabido, balanças maiores são mais precisas que balanças menores? Para resolver esse problema é necessário, primeiro, compreender porque uma linha em um círculo, quando guarda maior distância do centro é movida mais suavemente que quando está mais próxima do centro, embora em ambos os casos seja movida pela mesma força. Esta questão leva a definição de mais rápido: "*Algo é dito ser mais rápido de duas maneiras, a que atravessa um espaço igual em menos tempo ou que em um tempo igual atravessa um espaço maior.*"[72] Também a *Mecânica* de Hero de Alexandria[73] discute, nos termos de Pseudo-Aristóteles, o movimento circular e, particularmente os círculos em movimento. Em Gerard de Bruxelas o problema dos círculos em movimento é tratado a partir do exemplo da carruagem de rodas pequenas e da carruagem de rodas grandes, sendo sabido que as rodas pequenas perfazem maior número de voltas no mesmo tempo em que as grandes.

Para Clagett (1979: 184), o contato com tratados de mecânica transmitiu a Gerard modelos de explicação do movimento que, mais tarde, viriam a ser compreendidos como velocidade curvilíniea e velocidade angular. Assim, a principal herança da tradição de pesquisa presente nos tratados de mecânica, para a cinemática pelas mãos de Gerard de

---

[71] *Liber de motu*, livro I, suposição I.

[72] ARISTOTLE (Pseudo-). *Mechanica*. Leipzig: Apelt edition, 1888. 848^b, 1-9. Apud Clagett (1979: 183) et Landmarks of science.

[73] Toda a parte cinemática da *Mecânica* de Hero encontra-se em Clagett (1979).

Bruxelas foi o interesse pela comparação das velocidades, além do estabelecimento de uma distinção de tratamento para os movimentos retilínios e curvilíneos. Porém, se se pode apontar Gerard de Bruxelas como o primeiro medieval a retrabalhar sistematicamente as idéias cinemáticas gregas, foi no Merton College, em Oxford, um século depois que elas se desenvolveram, pelas mãos de Thomas Bradwardine.

Já no primeiro capítulo do *De proportionibus*, Bradwardine introduz uma nova terminologia no tratamento do movimento; o vocabulário da filosofia da natureza passa a nomear quantidades, em substituição ao vocabulário que nomeava qualidades, i.e, o vocabulário do ser. O novo vocabulário não foi construído para dar conta do problema do conhecimento lançado por Parmênides e construir um discurso rigoroso sobre o ser. A *Geometria speculativa*, por seu turno, anterior em ordem cronológica ao *De proportionibus*, já especulava sobre as regras sintáticas dessa nova linguagem, i. e, como relacionar proporções. Novamente, as regras aristotélicas sobre como ocorre o movimento nas categorias, que põe a física a serviço da metafísica, desaparecem do texto. Em seu lugar, aparecerá uma tentativa de estabelecer, com base no texto de Euclides, regras que permitam relacionar diferentes proporções.

Este trabalho de construção de uma nova linguagem, contudo, só pode ser percebido, em Bradwardine, se se acompanha a progressão de seu pensamento, dos textos menores, do ainda aluno da Faculdade de Artes, passando pelo *De proportionibus*, ponto máximo de estabelecimento da linguagem do movimento, e prosseguindo para os textos de maturidade, no qual são tratados pontos confusos ou não trabalhados no *De proportionibus*, como ocorre no *De continuo* e no *De causa Dei*. Passo agora a tratar do início desse processo de construção, i.e, da *Geometria speculativa* e, na seqüência, do primeiro capítulo do *De proportionibus*.

1 A Geometria speculativa

Começo a análise da obra pela *Geometria speculativa,* texto em que, pela primeira vez, Bradwardine trata das proporções. Traço o seguinte itinerário: apresento a divisão interna do texto, trato do problema da precisão da medida, a discussão sobre haver ou não movimento na geometria, a existência relativa dos objetos geométricos, o uso dos ângulos e das proporções como unidades de medida e o problema da igualdade entre os objetos medidos.

1.1 A Organização do Texto

O texto conhecido como *Geometria speculativa*, cuja provável autoria é de Thomas Bradwardine, assemelha-se mais a um conjunto de notas que a um tratado.[74] Escrito nos anos de permanência na Faculdade de Artes, mas anterior ao *De proportionibus*, organiza

---

[74] Atribui-se a obra a Bradwardine desde a primeira edição impressa, 1495, estabelecida por Pedro Sanchez Cirvelo. Na página título lê-se: "*Geometria speculativa Thome brauardini recoligens omnes conclusiones geométricas studentibus artium et philosophie aristotelis valde necessárias simul cum quodam tractatu de quadratura circuli noviter editio*" (*Geometria speculativa,* p. 16) Valho-me da única edição contemporânea: BRADWARDINE, T. Geometria speculativa. In: MOLLAND, G. *Thomas Bradwardine, Geometria speculativa*; text and English translation with an introduction and a commentary, 1989.

os ensinamentos recebidos dos professores de matemática do *quadrivium*.[75] Apesar de provavelmente ter sido escrito enquanto Bradwardine ainda era um estudante de Artes, teve boa aceitação,[76] talvez por servir como um guia, tanto para a leitura de Euclides[77] quanto pelas citações a Arquimedes e passagens em que Aristóteles trata da matemática nos *Primeiros analíticos* (*Geometria speculativa,* p. 121).

O texto tem como característica evitar qualquer assunto que possa desencadear polêmica. A maioria dos temas é tratada de forma introdutória, como notas de aula e de estudo. Pedro Cirvelo, ao editá-lo em 1495, comentou que o texto de Bradwardine

---

[75] Não se exigia nada parecido para a obtenção do título de Mestre em Artes. Molland (1989:15) comenta que, por vezes, poder-se-ia exigir uma "resenha" de Euclides ou de Boécio.

[76] Restaram 31 manuscritos (vide relação em MOLLAND, 1989: 12-15).

[77] Sabe-se que, por volta de 1350, Oxford exigia que os candidatos a mestre em artes jurassem ter ouvido, com propriedade (*competenter*), os primeiros seis livros dos *Elementos*, a *Arithmetica*, de Boécio e obras de João de Sacrobosco. GIBSON (Ed.) *Statua antiqua universitatis oxoniensis*, 1931, p. 33-34, apud WEISHEIPL, J. A. Curriculum of the faculty of arts at Oxford in the Fourteenth Century, p. 159-161. O tempo necessário para essas leituras variava, contudo supõe-se três semanas para a aritmética e cinco semanas para a geometria. No início do século XIV, um aluno de artes em Oxford escreveu: "*Anote-se que eu tive de Bokynham doze dias em geometria e todo o texto do segundo livro da geometria; e de Westcot nove dias de geometria. Também de Bokynham o texto completo do primeiro livro da* Arithmetica *e doze dias de aritmética*" — "*Memorandum quod habui a Bokynham xii d(ies) in gemetria et totalem literam ii libri geometrie et a Wescot ix dies in gemetria. Item a Bokynham literam totalem primi libri Arsmetrice et xii dies Arsmetrice.*" RASHDALL. The universities of Europe in the Middle Age. In: POWICKE; EMDEN. 1949, V. III, p. 482.

"*acomodava juntas, todas as conclusões geométricas necessárias para os estudantes de artes e da filosofia de Aristóteles.*" [78]

O texto divide-se em quatro partes. Na primeira, há uma introdução geral na qual se explica a relação de subalternância entre a geometria e a aritmética, muito semelhante a explicação de Boécio no início do *De arithmetica.* Na seqüência, são estabelecidos os elementos geométricos necessários à compreensão do restante do texto. Primeiro, são apresentadas as definições do ponto, como um princípio de magnitude, da linha, superfície e corpo, como possuidores de dimensões; em seguida, estabelece-se a lógica para dividir e nomear figuras, define-se ângulo reto, obtuso e agudo. Por fim, encerra-se com os postulados e noções comuns. A segunda parte trata das figuras geométricas e pode ser internamente subdividida em quatro partes menores: os triângulos, os quadrângulos, os círculos e os isoperiméticos: "*Nesta segunda parte, eu considero especialmente as figuras planas; falo dos triângulos, quadrângulos e círculos, seguindo a ordem de Euclides; falo dos isoperimétricos, parte que Euclides omite*" (*Geometria speculativa*, p. 124).[79] A quarta parte trata dos sólidos ou corpos (os que possuem largura, altura e profundidade). São abordados a relação entre a linha e o sólido, os corpos regulares, o preenchimento do lugar e a esfera. No que concerne ao estudo da velocidade, a terceira parte chama a atenção por ser a primeira teoria das proporções apresentada por Bradwardine. Inicia-se pela definição e divisão das proporções, sendo, na seqüência, apresentadas seis regras básicas:

---

[78] Apud MOLLAND. The geometrical background to the Merton School: an exploration into the application of mathematics to natural philosophy, 1968, p. 112.

[79] Conforme índice proposto por MOLLAND.

- "Do mesmo modo que uma quantidade está para outra, a proporção de uma é o denominador da proporção de outra"[80]

- "A proporção de extremos é composta pelas proporções dos meios" (*ex mediorum proportionibus*)[81]

- "Proporções são similares ou iguais nas circunstâncias em que os denominadores são iguais"[82]

- "Proporções são desiguais quando seus denominadores são desiguais. Para as [proporções] multiplex, o denominador e a proporção seguem a mesma ordem, mas para as superparticulares a ordem é inversa."[83]

- "Quantidades são iguais quando, comparadas com a mesma quantidade, têm uma proporção igual"[84] (Argumento sobre a igualdade entre infinitos).

- "Quantidades são mutuamente iguais quando seus eqüimúltiplos são iguais"[85] (Argumento sobre um infinito ser maior que outro).

A seguir, apresenta-se as proporções aritméticas e geométricas:

---

[80] "*Quanta est aliqua quantitas ad aliam tanta denominatur proportio eius ad ipsam*" (*Geometria speculativa* III, p. 96).

[81] "*Proportio extremorum ex mediorum proportionibus est composita*" (*Geometria speculativa* III, p. 96).

[82] "*Proportiones sunt equales quarum denominationes sunt equales*" (*Geometria speculativa* III, p. 96).

[83] "*Porportiones sunt ineguales quarum denominationes sunt ineguales. Et in multiplicibus quidem secundum eundem ordinem se habent denominatio et proportio, in superparticularibus vero ordine econverso*" (*Geometria speculativa* III, p. 98).

[84] "*Quantitates sunt equales que ad unam quantitatem comparate proportionem habent equalem*" (*Geometria speculativa* III, p. 98).

[85] "*Quantitates quarum equemultiplices sunt equales ipse inter se snt equales*" (*Geometria speculativa* III, p. 98).

> Porque a intenção da 'proporção' é estender e ampliar praticamente todas as coisas que são mutuamente comparáveis de acordo com o maior e o menor, ela pode ser definida de acordo com conceitos gerais: uma proporção é uma certa disposição que algumas coisas têm para serem mutuamente comparáveis umas com as outras. Por exemplo, um número com um número, uma magnitude com uma magnitude, um som com um som, um tempo com um tempo, um movimento com um movimento, um humor com um humor, um calor com um calor, um gosto com um gosto. Porém a geometria descreve a intenção da 'proporção' da magnitude e deve ser definida da seguinte forma: uma proporção é uma certa disposição de duas qualidades do mesmo gênero, uma para a outra. Eu digo 'do mesmo gênero' porque somente desse modo pode-se estabelecer a mútua comparação. (*Geometria speculativa* III, p. 86)[86]

Na seqüência, assim como estabeleceu Euclides (*Elementos,* livro V), divide-se as proporções em racionais ou irracionais:

> A proporção é dividida em duas espécies, segundo a comparação da proporcionalidade de diversas quantidades. Pois algumas quantidades são comunicáveis ou comensuráveis e algumas são incomunicáveis e incomensuráveis. São comensuráveis as quantidades que possuem uma quantidade comum mensurável entre elas. Diz-se que uma quantidade numera outra se, considerada um certo número de vezes, ela produz [uma segunda quantidade], como uma linha de um pé está para uma linha de dois pés e para uma linha de três pés. Por essa proporção, uma linha de dois pés e uma linha de

---

[86] "*Quonian autem intentio proportionis extensa est et lata, et applicatur fere omnibus adinvicen comparabilibus secundum magis et minus, ideo secundum hunc comceptum communem potest sic diffiniri: Proportio est aliquorum adinvicem comparabilium unius ad alterum certa habitudo. Verbi gratia, ut numeri ad numerum, magnitudinis ad magnitudinem, soni ad sonum, temporis ad tempus, motus ad motum, humaris ad humorem, caloris ad calorem, saporis ad saporem. Geometer autem qui trahit intentionem proportionis as magnitudinem, habet eam sic diffiniri: Proportio est diarum quantitatum eiusdem generis unius as alteram certa habitudo. Dico autem eiusdem generis quia sola talia comparabilia.*"

> três pés são quantidades comunicativas que uma linha [medida em] pés numera por Dois e Três. (*Geometria speculativa*, p. 151)[87]

Dito de outro modo, são racionais as proporções que possuem um denominador comum e irracionais as que não possuem. Bradwardine trata somente das irracionais, com o intuito de compreender como pode haver alguma comunicação entre elas:

- "Qualquer quantia é proporcional a qualquer quantia, mas nem todas são comensuráveis umas com as outras."[88]
- "No caso das quantidades comensuráveis, a proporção de uma para outra é a do número para o número. Porém, se as proporções não são de um número para um número, então elas são incomensuráveis"[89]
- "O diâmetro do quadrado em relação a seu lado é uma proporção irracional. Todo diâmetro é assimétrico (*asymeter*) com relação ao seu lado."[90]

---

[87] "*Dividitur autem proportio in duas species, que accipiuntur in comparatione ad quantitates proportionaliter diversas, nam qualitates quedam sunt communicantes sive commensurabiles, quedam incommunicantes et incommensurabiles. Quantitates que dicuntur communicantes sunt ille quibus est uma quantitas communis eas numerans. Dicitur autem una quantitas numerare aliam que secundum aliquem numerum acepta producit ipsam [seu equalem], ut linea pedalis lineam bipedalem vel tripedalem.*"

[88] "*Ominis quantitates omni quantitati est proportionalis, sed nom omnis omni commnesurabilis*" (*Geometria speculativa* III, p. 100).

[89] "*Omnium duarum quantitatem communicantium est porportio alterius ad alteram tanquam numeri ad numerum. Si autem earum non fuerit proportio sicud numeri ad numerum, incommunicantes erunt*" (*Geometria speculativa* III, p. 100).

[90] "*Dyameter quadrati ad latus eiusdem est proportio irrationalis. Estque omnis dyameter sue coste assimeter*" (*Geometria speculativa* III, p. 100). Em Aristóteles, vide *Segundos Anal.* I, 23, 41^{a27}.

- "Dadas duas linhas que unem-se de um modo retilinear (*directe coniunctis et linealiter*), se um semicírculo for descrito pelo todo da linha então composta e agregada das duas, a linha que proceder perpendicularmente do término comum das duas linhas que estão unidas na circunferência será um meio na proporção contínua entre as linhas descritas."[91]

- "Se houver duas quantidades comensuráveis uma outra, elas também serão mutuamente comensuráveis. Se não forem comensuráveis entre si, não serão comensuráveis com a outra."[92]

- "Se houver duas quantidades comensuráveis, o todo formado por elas também será comensurável com cada uma."[93]

- "Dadas quatro quantidades proporcionais quaisquer, se a primeira for comensurável com a segunda, a terceira também será comensurável com a quarta. Porém, se a primeira for incomensurável com a segunda, a terceira também será incomensurável com a quarta."[94]

A terceira parte ainda contempla um estudo sobre a multiplicação ou, na nomenclatura de Bradwardine, da potência da linha: "*A superfície na qual a linha pode (in quam potest)* [ser elevada ao] *quadrado dessa linha*" (*Geometria speculativa*, p. 128). Por

---

[91] "*Datis duabus lineis illisque directe coniunctis et linealiter, si super totam lineam sic compositam et ex duabus aggregatam describatur semicirculus. Linea que a communi termino duarum linearum coniunctarum orthogonaliter ad circunferentiam venerit inter datas líneas secundum proportionalitatem continuam mediabit*" (*Geometria speculativa* III, p. 102-104).

[92] "*Si fuerint due quantitates uni communicantes, ipse quoque invicem communicant. Quod, si non communicant invicem inter se, nulli communicantes erunt*" (*Geometria speculativa* III, p. 104).

[93] "*Si fuerint due quantitates communicantes, totum quoque ex eis confectum unique earum erit communicans*" (*Geometria speculativa* III, p. 104).

[94] "*Omnium quatuor quantitatum proportionalium, si prima fuerit communicans secundae, tertia quoque communicans erit quarte. Si vero prima fuerit incommensurabilis secunde, tertia quoque incommensurabilis erit quarte*" (*Geometria speculativa* III, p. 106).

fim, trata-se das quadraturas, i.e., de como encontrar o quadrado igual em área a uma dada figura, o que é útil para medir comparativamente, conforme esclarece o autor.

1.2 Precisão e Construção

Bradwardine toca na noção de precisão geométrica ao posicionar-se sobre a natureza e existência dos objetos matemáticos, e sobre o caráter conceitual da geometria, por oposição a uma compreensão realista.[95] O ponto de partida da concepção de geometria para Bradwardine era a afirmação de que os matemáticos consideravam os objetos sensíveis abstraídos[96] de suas qualidades sensíveis.[97] Segundo esta concepção, os geômetras, ao elaborarem construções mentais, atualizam o que anteriormente só existe em potência

---

[95] Esta terminologia foi estabelecida por MOLLAND e largamente utilizada em seus textos. Mesmo que em outros autores da história da matemática haja uma outra nomenclatura, há um consenso quanto à dupla distinção. Confira a coletânea de artigos do autor sobre matemática medieval em MOLLAND. *Mathematics and the medieval ancestry of physics,* 1995.

[96] "*As investigações dos matemáticos dão-se sobre coisas alcançadas por abstração; pois investigam as coisas após eliminarem todas as qualidades sensíveis, tais como o peso, a leveza, a dureza e seu contrário, assim como o calor e o frio, e outros sensíveis contrários, permanecendo apenas o quantitativo e o contínuo — este sendo contínuo por uma via, duas ou três, segundo o caso — e as propriedades destas coisas sendo quantitativas e contínuas; e investigam-nas não tendo nada mais como relação, considerando em alguns casos suas posições relativas e os fatos que a eles se seguem, em outros casos suas comensurabilidades e incomensurabilidades, em outros casos ainda sua proporções; mas indubitavelmente nós afirmamos que é uma única ciência que lida com todas essas coisas, a saber, a geometria*" (*Metafísica*, K, 3, 1061[a28-b3]). Ainda sobre "abstração", vide HEATH. *Mathematics in Aristotle*, 1949, pp. 64-67.

[97] Sobre a persistência deste debate na história da matemática, vide MAYBERRY. On the consistency problem of set theory, 1977, pp. 1-34.

(*Metafísica* IX, 9, 1051^{a21-34}). Tanto as construções mentais quanto o mundo sensível fazem parte da análise do matemático. Inicialmente, a liberdade de pensamento parece não ter limites, mas qualquer pensamento toma por base o mundo sensível para estabelecer uma construção geométrica. Dessa tensão, surgem concepções distintas de matemática: uma que privilegia o contato da geometria com o mundo sensível, i.e., as ciências intermediárias, e não tem dificuldades em adaptar sua geometria às figuras e relações dos objetos reais; outra que centra suas atenções no poder da imaginação (*imaginatio*), mas que não consegue estabelecer um uso da matemática na investigação sobre a natureza. Estas duas concepções distintas de geometria fiavam-se em tradições que, aos poucos, tornaram-se opositoras.

A tradição escolástico-aristotélica de leitura dos *Elementos* tinha dificuldades para explicar o espaço em que residiam as figuras geométricas. Aparentemente, tratava-se de um infinito tridimensional que não se conformava com a finitude do cosmo aristotélico, para além do qual nada há. Em Aristóteles: "*não apenas o número, mas também as magnitudes matemáticas e o que está fora do céu supõe-se ser infinito*[98], *porque nunca termina em nosso pensamento*" (*Física* III, 4 203^{b22-24}). Em uma outra passagem, Aristóteles afirma:

> O tamanho que [a magnitude] pode ter potencialmente, também pode ter em ato. Uma vez que nenhuma magnitude sensível é infinita, é impossível exceder a cada uma das magnitudes; pois se fosse possível haveria algo maior que os céus. (*Física* III, 8, 207^{b17-21}).

Porém, o próprio Aristóteles apresenta um dos modos de tratar o problema:

> Nosso modo de pensar não retira dos matemáticos sua ciência, pela desaprovação da existência em ato do infinito em direção ao

[98] Tratarei detalhadamente do problema do infinito no capítulo V.

> crescimento, entendendo-se por isto, aquilo que não pode ser atravessado. Na verdade, eles não precisam do infinito e não o usam. Eles postulam somente que a linha reta finita pode ser produzida tão longa quanto se desejar. É possível dividir, com a mesma proporção, a maior largura em outra magnitude de qualquer tamanho que se desejar. Deste modo, para os propósitos da prova, não fará diferença para eles ter tal infinito, uma vez que sua existência será na esfera das magnitudes reais. (*Física* III, 8, $207^{b27\text{-}34}$)

A passagem acima pode, ainda, ser lida apenas pelo seu caráter restritivo, i.e, afirmar a impossibilidade, para o geômetra, em produzir uma linha fora do céu. Restrição esta que, interpretada de modo extremo, pode causar sérios transtornos na compreensão do texto de Euclides, chegando mesmo a impossibilitar a definição 23. Esta impossibilidade em estabelecer a definição 23 deve ser compreendida como o reflexo de uma tensão maior com a necessidade da geometria em estabelecer axiomas.[99] Porém, Hintikka[100] afirma que Aristóteles nunca pretendeu opor-se à geometria axiomática, apenas não teria conhecido a definição 23 das paralelas, do modo como é apresentado por Euclides: "*Linhas retas paralelas* [B∀Δς8808 4̄] *são linhas retas que, no mesmo plano e produzidas indefinidamente em ambas direções, não se encontram, uma com a outra, em nenhuma das direções.*"[101] Se Hintikka estiver correto, não estava, então, em Aristóteles, a tensão entre a geometria e a filosofia da natureza, mas nos comentadores posteriores que conheceram os *Elementos*. Este é o caso do comentário de Simplício ao segundo postulado de Euclides:

---

[99] De um modo mais preciso, diz-se em inglês "*axiomatised geometry*". Vide MOLLAND. Bradwardine's geometry. In: *Mathematics and the medieval ancestry of physics*, 1995, p. 132.

[100] HINTIKKA, J. *Time and necessity*: Studies in Aristotle's theory of modality, 1973, pp. 117-121.

[101] EUCLID. *The thirteen books of the elements*, v. I, def. 23, p. 190.

"*Um oponente talvez levante objeção sobre, dizendo: eu não posso produzir uma linha reta sobre a superfície do mar, nem posso produzi-la ao infinito, uma vez que não há infinito.*"[102] Deste modo, percebe-se que a discussão sobre a existência ou não de objetos matemáticos estava relacionada com a própria discussão epistemológica sobre o grau de certeza que se poderia obter de uma ciência intermediária.

A não existência de objetos matemáticos aparecia vinculada a uma compreensão sempre anti-realista dessas ciências.[103] Deste modo, entendia-se que o geômetra nunca falava sobre seus diagramas, mas sobre o que deles era compreendido. Assim, um diagrama geométrico para o cálculo da velocidade não era a representação figurativa de algo com existência substancial,[104] mas a representação de algo que em nada se assemelha ao

---

[102] Extraído de *Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschdschii cum commentariis al-Narizi.* Apud SABRA. Simplicius's proof of Euclid's parallel postulate, 1969, pp. 1-24.

[103] Para os que defendem uma concepção anti-realista das ciências intermediárias, sempre é possível relembrar a seguinte passagem de Aristóteles: "*Por um lado, a astronomia não pode lidar com magnitudes perceptíveis nem com o céu acima de nós. Pois nem as linhas perceptíveis são aquelas das quais os geômetras nos falam — pois nada perceptível é reto ou redondo do modo em que o geômetra define 'reto' e 'redondo'; pois um arco não toca um fio reto como se fosse um ponto, mas como Protágoras costumava dizer em sua refutação aos geômetras, ele* [o arco] *o faz -, nem os movimentos e as órbitas espirais dos céus são iguais àquelas que o astrônomo trata, nem são da mesma natureza os pontos geométricos e as estrelas atuais*". (*Metafísica* III, 2, 977^{b34}-988^{a6})

[104] Sobre a representação do diagrama geométrico, vide *Segundos Analíticos* I, 10, 76^{b40}-77^{a3} e *Primeiros Analíticos* I, 41, 49^{b33-37}.

diagrama.[105] Dito de outro modo, trata-se da diferença entre o que é verdade *in re* e o que é verdade *secundum imaginationem mathematicorum*.

Bradwardine, frente a esta questão, deve ser compreendido como um crente no poder da matemática. "Crente", por nunca ter teorizado a respeito e ter adotado, sem nenhuma justificativa, a geometria como a ciência que, por excelência, destina-se a ser um instrumento preciso de cálculo. Na *Geometria speculativa,* ao apresentar os cinco sólidos regulares de Euclides, Bradwardine preocupa-se apenas com a prova que não poderiam ser mais que cinco, sem, contudo, nunca mencionar o problema de sua existência, muito embora talvez haja uma pista sobre sua posição no freqüente uso do termo "*fabricatio*":

> E disto segue um claro modo de fabricar tais corpos (4.24). E, então, haverá 12 superfícies pentagonais naquele corpo, como é evidente na fabricação do corpo, motivo pelo qual é chamado dodecaedro (4.26). Deste modo, nós investigamos brevemente no presente capítulo o número e a disposição dos corpos regulares pela evidência da demonstração, e o modo pelo qual fica evidente para nós a fabricação de tais corpos (4.27). (*Geometria speculativa,* p. 132-134)[106]

No capítulo sobre a esfera, Bradwardine afirma que é possível dispor treze esferas de modo que uma delas seja tocada pelas outras doze, ao mesmo tempo em que cada uma

---

[105] Eis que aparece o velho problema de saber se a estátua de Hermes está ou não, em potência, no bloco de mármore. Vide *Metafísica* III, 5, 1001^{b15-25}; V, 7, 1017^{b6-9} e IX, 6, 1048^{a31-35}.

[106] "*Et per hoc sequitur via clara ad fabricandum talia corpora*" (4.24). "*Et tunc in isto corpore erunt duodecim superficies pentagone, sicud patet in fabricatione huius corporis, et ob hoc vocatur duodecedron*" (4.26). "*Sic igitur in hoc capitulo presenti investigavimus breviter numerum et dispositiones corporum regularium per evidentiam demonstrationum, et patet nobis via ad fabricandum talia corpora satis clare*" (4.27). Todos em *Geometria speculativa*, nas respectivas páginas 132-134.

dessas doze que toca a esfera central, também esteja tocando quatro esferas circunvizinhas.[107] Bradwardine afirma que a prova dessa propriedade da esfera é dada a *posteriori*, por meio de um experimento com esferas feitas (*facio, facere*) com cera:

> E como o sentido indica, pois, quando fazemos 13 pequenas esferas de cera, vemos que 12 podem ser aplicadas ao redor da décima terceira de modo que cada uma toque quatro esferas laterais, de modo que o contato de cada uma das esferas laterais ocorre em cinco pontos, que são os finais dos diâmetros que cortam cada uma delas ortogonalmente, exceto aquela que se encontra no final do diâmetro uno, que é o sexto ponto, [aonde] não há contato, porque não tocam outras esferas acima. (*Geometria speculativa*, p. 142)[108]

Segundo estas passagens, é possível afirmar que Bradwardine atribuía à geometria a exatidão nos resultados, muito embora esta exatidão, para ele, não pareça constituir-se em um problema. O que confere precisão à geometria é a inviolabilidade dos postulados e a suficiência das definições; os objetos que daí derivam são, sempre, precisamente os mesmos, não havendo a menor possibilidade de mudança. Ocorre que a "exatidão" leva ao problema da construção do conhecimento geométrico; dito de outro modo, os objetos geométricos, dada a suficiência dos postulados e definições e a impossibilidade da

---

[107] Isto é impossível, o que prova não apenas o erro dessa conclusão (4.42 é a segunda conclusão sobre a esfera), mas também deixa claro que nenhum experimento foi de fato realizado.

[108] "*Et sensus quidem hoc indicat, nam, cum fecerimus tredecim sperulas equales de cera, videmus quod duodecim sic possunt appicari circa tertiam decimam quod quelibet eam tangit inferius, et, cum hoc, quatuor de speris lateralibus, ut sit contactus cuiuslibet sperarum lateralium quinque puncta, qui sunt termini dyametrorum se secantium orthogonaliter in unoquoque, nisi quod apud terminum unius daymetri, qui est sextus punctus, non est contactus, quia superius alias speras non tangunt.*" (*Geometria speculativa*, p. 142)

mudança, parecem eternos e imutáveis, para o realista.[109] Quando um enunciado, em forma de problema, exige uma construção, não está, de fato, impondo movimento à geometria, nem a resolução de um problema é a geração de um novo objeto. Um conceitualista pode argumentar que o processo de construção é a atualização de objetos geométricos — que anteriormente só existiam em potência —, realizada por intermédio do pensamento do geômetra. Contudo, este tipo de solução é bastante desconfortável, posto que o recurso ao "pensamento do geômetra", leva-a para o domínio do subjetivo.[110] O problema se agrava dada a importância da construção no texto dos *Elementos*: os três primeiros postulados são construções de retas e círculos, um razoável número de proposições é enunciada na forma de um problema, cuja solução é a construção de um objeto; as provas dos teoremas, em sua maior parte, requerem construções. Segundo a tradição de leitura que evidencia o comentário de Proclus, Euclides seria platônico,[111] mas como o próprio texto dos *Elementos*, já bem conhecido no século XIV permite outra interpretação, o terreno para a divergência estava aberto.

Novamente, Bradwardine não declara sua posição e é necessário encontrá-la no tratamento que o autor dá ao seu texto. Neste sentido, dois pontos permitem compreender melhor a *Geometria*: primeiro, é um texto exclusivamente especulativo, ou seja, nenhuma

---

[109] PLATÃO. *República* VII, 9 $^{526c\text{-}527b}$.

[110] *Metafísica* IX, 9, 1051$^{a21\text{-}24}$.

[111] Sigo CLAGETT. The medieval latin translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath, 1953, pp. 16-42.

construção cuja compreensão dependa do uso de compasso é aceita;[112] segundo, as construções são simples, ainda que a simplicidade não permita que a *Geometria* tenha o mesmo escopo que os *Elementos*. Por "simplicidade" deve-se entender o menor número de postulados e definições possível para que se construa o edifício da geometria. Assim, para um conjunto de 3 proposições na *Geometria*, há 32 nos *Elementos*. Um exemplo dessa redução pode ser encontrado no capítulo sobre a linha em cuja primeira conclusão já aparece a noção de perpendiculariedade:

> Pois a linha CD que incide na linha AB em um ponto D será ou não perpendicular a ela. Se for, há dois ângulos que são retos em suas formas, pela definição de ângulo reto. Se não, serão iguais a dois ângulos retos, mesmo que não sejam retos em suas formas. Como mostro a seguir. Assuma que a linha ED seja perpendicular a AB, e os dois ângulos ADE e EDB sejam retos, pela definição de ângulo reto, com [visto] anteriormente. Porém, os dois ângulos ADC e CDE adequam-se [são iguais ao] no ângulo ADE, pela primeira concepção da alma. Assim, os mesmos dois ângulos juntamente com o ângulo EDB serão iguais a dois ângulos retos, pela quinta noção comum, proporção pela qual todos os três ângulos são iguais a dois ângulos retos. Porém, o ângulo obtuso CDB é igual a dois deles, porque todos são suas partes. Deste modo, o ângulo obtuso CDB juntamente com o ângulo ADC, que é agudo, é igual a dois ângulos retos. E isto é o que nós queríamos. (*Geometria speculativa*, p. 26)[113]

---

[112] Bradwardine sequer menciona a palavra "compasso" ao longo do texto.

[113] "*Nam super lineam AB incidens CD linea in puncto D vel perpendicularis super eam vel non. Si sic, habentur duo anguli recti in forma, per diffinitionem anguli recti. Si non, erunt igitur equales duobus rectis, et si non sint in forma recti. Quod ostendo sic. Sit linea ED perpendicularis super AB, eruntque duo anguli ADE et EDB recti, per diffinitionem anguli recti, ut prius. Sed duo anguli ADC et CDE adequantur angulo ADE, per primam animi conceptionem. Igitur idem duo anguli cum angulo EDB erunt equales duobus rectis, per quintam communem scientiam. Quare omnes illi três anguli sunt equales duobus rectis. Sed angulus CDB obtusus est equalis duobus*

Em Euclides, a construção da perpendicular exige um número maior de pressupostos, muito embora a quantidade de etapas da demonstração seja semelhante a de Bradwardine:

> Quando uma linha reta cai sobre uma outra linha reta, o faz de modo que os ângulos adjacentes sejam um igual ao outro, cada um dos ângulos sendo reto, e a linha reta que se mantém sobre a outra é chamada perpendicular àquela sobre a qual se sustenta. (*Elementos*, I, def. 11: 153)

Euclides faz uso das nove definições anteriores, de cinco postulados e de igual número de noções comuns (*Elementos*: 153-155). A economia de Bradwardine reside, ainda, no afastamento quanto aos problemas relacionados à existência dos objetos em questão, o que não ocorre com Euclides. A definição de ponto — "*Um ponto é o que não tem parte*" (def. I.1) — pode ser lida como a afirmação da existência do que não possui partes. Do mesmo modo, a definição de Posidonius evita questões sobre a existência: "*uma extremidade que não tem dimensão ou uma extremidade de uma linha.*"[114] Note como al-Nairizi vê-se obrigado a comentar sobre a existência do ponto: "*Se alguém procurar saber da essência de um ponto, algo mais simples que uma linha, leve-o a pensar, no mundo sensível, sobre o centro do mundo e os pólos.*"[115]

---

illorum, quia sunt omnes eius partes. Ergo angulus obtusus CDB cum angulo ADC, qui est acutus, est equalis duobus rectis. Et hoc est quod volumus." (*Geometria speculativa*, p. 26).

[114] Segundo HEATH (*Elementos*: 156).

[115] Segundo HEATH (*Elementos*: 157).

Bradwardine não define ponto e nenhum dos elementos correspondentes as nove primeiras definições de Euclides.[116] Sua primeira definição é a perpendicular e para enunciá-la o autor julga necessário lançar mão somente de cinco postulados e de cinco noções comuns, que traduzo a seguir:

> Cinco postulados são estabelecidos por Euclides (1.02). O primeiro é sobre a linha reta deste modo: DE QUALQUER PONTO PARA QUALQUER PONTO DESENHA-SE UMA LINHA RETA. E todos os postulados são estabelecidos por Euclides no infinitivo, como *dicta* e não como proposições. Ao postulado apresentado eu adiciono: E ESTE É O CAMINHO MAIS CURTO DE TODOS ENTRE OS LIMITES (1.021). O segundo trata da linha circular, deste modo: SOBRE QUALQUER CENTRO E OCUPANDO QUALQUER ESPAÇO PARA DESCREVER UM CÍRCULO. Pois um círculo, quanto ao seu propósito, deve ser compreendido como uma linha circular, isto é, a circunferência ou o limite do círculo, pois freqüentemente os nomes das figuras são acomodados segundo seus limites (1.022). O terceiro postulado é sobre ângulos, deste modo: TODO ÂNGULO RETO É MUTUAMENTE IGUAL. Pois a forma do ângulo reto é posta pela indivisibilidade e, deste modo, não pode variar (1.023). O quarto e o quinto são sobre a superfície. O primeiro é afirmativo, assim: SE UMA LINHA RETA INCIDIR SOBRE DUAS LINHAS RETAS, E SE OS DOIS ÂNGULOS INTERIORES DE UMA PARTE FOREM MENORES QUE DOIS ÂNGULOS RETOS, AQUELAS DUAS LINHAS PRODUZIDAS EM CADA UMA DAS PARTES IRÃO SE ENCONTRAR. Pois é patente que dessas três linhas fecham-se em uma superfície (1.024). A quinta é semelhante quanto à superfície, mas negativa: DUAS LINHAS RETAS NÃO FECHAM NENHUMA SUPERFÍCIE. Desta negativa e da afirmativa precedente conclui-se que o triângulo é a primeira figura retilínea. Proposições e *dicta* deste tipo são chamadas de postulados ou suposições porque propõem e supõem, mas não provam, pois elas parecem ter evidência suficiente e só de uma confusa concepção de termos (1.025). (*Geometria speculativa,* p. 23-25)[117]

---

[116] O ponto (def. I.1), a linha (def. I.2), a extremidade da linha (def. I.3), linha reta (def. I.4), superfície (def. I.5), superfície plana (def. I.7), ângulo plano (def. I.8), ângulo retilíneo (def I.9). Vide *Elementos:* 153.

[117] "*1.02. Petitiones ab Euclyde ponuntur quinque. 1.021. Prima est de recta linea talis: A QUOLIBET PUNCTO IN QUEMLIBET PUNCTUM LINEAM RECTAM DUCERE. Et ponuntur omnes petitiones*

2 Para Além da Geometria

O material apresentado por Bradwardine na *Geometria speculativa* não se diferencia do trabalho feito por outros autores de sua época. O texto representa um afastamento das discussões sobre movimento que, até o século XIII, ocorriam, em sua maioria, em comentários às obras de Aristóteles, particularmente à *Física*. Já no início do século XIV, tratados específicos começaram a se tornar comuns, seja agregado a tratados de geometria, como é o caso do texto de Bradwardine, seja como parte dos comentários às *Sentenças* de Pedro Lombardo, revelando que o assunto interessava não apenas à Filosofia da Natureza, mas também à Teologia. Estes textos são o prenúncio de obras que tratavam, segundo

---

ab Euclyde sub infinitivo modo, tamquam dicta non ut propositiones. Ad predictam petitionem addo: ET IPSAM OMNIUM CONTERMINALIUM BREVISSIMAM ESSE. *1.022. Secunda est de línea curva sive circulari talis:* SUPRA CENTRUM QUODLIBET QUANTUMLIBET OCCUPANDO SPATIUM CIRCULUM DESIGNARE. *Per circulum enim in proposito intelligitur línea circularis, id est circumferentia sive terminus circuli, sepe enim nomina figurarum accomodantur terminis. 1.023. Tertia petitio est de angulis talis:* OMNES ANGULOS RECTOS SIBI INVICEM EQUALES ESSE. *Est enim forma recti positain indivisibili, et ideo variari non potest. 1.024. Quarta et quinta sunt de superficie. Prima est affirmativa talis:* SI RECTA LINEA SUPER DUAS LINEAS RECTAS CECIDERIT, DUO QUOQUE ANGULI INTERIORES EX UMA PARTE DUOBUS ANGULI RECTIS MINORES FUERINT, ILLAS DUAS LINEAS IN EANDEM PARTEM PROTRACTAS CONIUNCTIM IRE. *Ex quo patet tales treslineas superficiem concludere. 1.025. Quinta similiter est de superficie sed negativa talis:* DUAS LINEAS RECTAS SUPERFICIEM NULLAM CONCLUDERE. *Ex hac negativa et precedenti affirmativa concluditur triangulum esse primam figuram rectilineam. Dicuntur igitur huiusmodi propositiones vel dicta petitiones sive suppositiones, quoniam petuntur et supponuntur nec probantur, videntur enim evidentiam sufficientem habere ex solo confuso terminorum conceptu.*" (*Geometria spectulativa*, p. 23-25)

Clagett, "*problemas como a possibilidade do movimento no vazio ou a especulação sobre a natureza do movimento*" desvinculados dos "*respectivos comentários aos livros III e IV*".[118] Estes novos textos têm uma característica em comum, a saber, o tratamento matemático.

Junto à modificação na estrutura formal do texto, há um deslocamento do eixo de investigação. Os tratados passam a ser escritos de modo axiomático, tendo como modelo Euclides e Arquimedes o que, freqüentemente, leva o estudo a abordar a rotação de linhas, superfícies e sólidos e a possibilidade da determinação das velocidades envolvidas em tais movimentos.[119]

Dos primeiros trabalhos do séc. XIV sobre movimento, destaca-se o de autoria de Gerard de Bruxelas, *Liber de motu,* que é citado por Bradwardine.[120] Gerard realiza um

---

[118] Clagett enumera uma grande quantidade de obras sobre o movimento, como é o caso do *Liber de motu,* de Gerard de Bruxelas (*Osíris*, 12, 1956: 73-175); SYLLA e MURDOCH citam Magister Ricardus (possivelmente Ricardo de Kilringtom): *Questiones de motu* (apud MURDOCH, J. E; SYLLA, E. The science of motion. In LINDBERG, D (ed.). *Science in the Middle Age,* 1978, p. 254, n. 49

[119] Em Gerard de Bruxelas encontra-se o estado do movimento rotacional dos elementos geométricos e a determinação de suas velocidades médias de rotação. Deve-se notar, contudo, que Gerard determina o que chamaríamos de velocidade linear, e não angular, da rotação. Para encontrar a velocidade média, Gerard localiza o ponto médio. Por "comparar" dois móveis, o autor sempre entende comparar a velocidade média. Estes pontos distinguem-se de Bradwardine, que dele discorda textualmente no capítulo III do *De Proportionibus*, como veremos adiante.

[120] O título extenso citado por Bradwardine é o *Sobre a proporcionalidade dos movimentos e suas magnitudes*. Clagett afirma que este texto teve grande influência entre os Calculadores de Merton, especialmente a primeira proposição, que equaciona os movimentos do raio e de seu ponto médio (*Osíris*, op. cit). No entanto, como lembra Sylla, embora a afirmação de Clagett seja

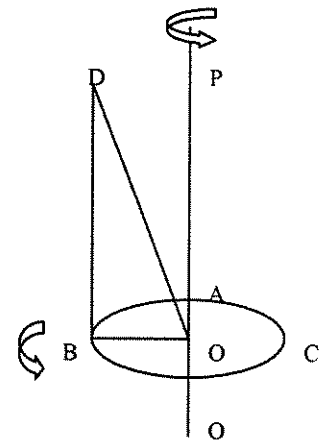
estudo do movimento sem, entretanto, considerá-lo como parte da natureza. Tal qual as formas geométricas, o movimento é separado e estudado no plano geométrico. Sylla expõe um dos estudos do *De motu*: [121] para encontrar a velocidade média circular de um disco (ABC), que gira ao redor do eixo PQ, que coincide com o centro do disco O, Gerard substitui a figura do disco pela figura do triângulo DBO; o triângulo pode ser girado com movimento perpendicular ao seu plano, sem se possa marcar pontos em sua superfície que sejam sobrepostos pelo movimento, o que não ocorre com o disco, no qual dois pontos podem ser tais que se sobreponham, impossibilitando o cálculo por comparação. No caso do triângulo (cuja base BO coincide com a superfície do disco e a largura da base coincide com o raio), sua rotação em três dimensões faz com que o movimento da base seja igual ao movimento ao movimento do disco; na mesma rotação, um vértice do triângulo produzira um cilindro; e para cada ponto ou linha do disco, corresponderá um ponto ou uma linha no triângulo movendo-se com igual movimento e velocidade; o movimento do triângulo pode, ainda, ser comparado ao de um retângulo que gire ao redor do mesmo eixo.

---

plausível, não há evidência histórica que sustente que Gerard teve grande influência (SYLLA; MURDOCH, op. cit, p. 256; n. 54).

[121] Vide SYLLA. *The Oxford Calculators and the Mathematics of Motion, 1320-50*: Physics and Measurement by Latitudes. PhD Dissertartion, 1970, Appende B, pp. B1-B14.

O trabalho de Gerard de Bruxelas, contudo, não avança para além das comparações



que se pode encontrar no exemplo citado, e sua aplicação em geometria não se compara aos trabalhos de Bradwardine ou Nicole Oresme[122], que buscam tratar do movimento que pode ocorrer como fenômeno natural. Pela pouca complexidade matemática e por não estender

[122] Vide ORESME. *De configuarationibus qualitatum*. Bk. I, chap. 21 (MS London, British Museam Sloane 2156, f. 166v). *Isis*, v. 43, 1952: 239, n. 7; Nicole Oresme and the kinematics of circular motion: *Tractatus de commensurabilitate vel incommensurabilitate motuum celi*. Ed. introd. and trans. Edward Grant, 1971; Nicole Oresme, *De proportionibus proportionum* and *Ad pauca respicientes*. Ed. E. Grant, 1966.

seus estudos em geometria à filosofia da natureza, Gerard pode ser compreendido como o elemento de transição para o tratamento do movimento que floresceu no século XIV.[123]

O mesmo não ocorre com Bradwardine. As discussões preliminares sobre as proporções, iniciadas na *Geometria speculativa,* são reelaboradas no *De proportionibus* com o intuito de imediata aplicação ao estudo do movimento. Para atingir este objetivo, Bradwardine passa a trabalhar com a sistematização das proporções presente no *De arithmetica,* de Boécio,[124] que permite nomear as proporções trabalhadas na *Geometria.* A abordagem de Boécio dá a Bradwardine uma linguagem para falar da proporção dos fenômenos da natureza, livrando-o da necessidade de tratar com figuras geométricas, como ocorreu com Gerard de Bruxelas.

---

[123] Evidências externas ao texto também suportam esta concepção de Gerard como elemento de transição: suas obras são catalogadas como matemáticas e se encontram em manuscritos que contêm obras das ciências intermediárias; nunca são tratadas como filosofia natural, o que viria a ser uma característica dos trabalhos dos calculadores. Porém, cabe lembrar que Bradwardine cita Gerard para contestá-lo, e não há evidência que tenha antecipado algo do trabalho dos calculadores.

[124] Foram utilizadas duas edições da *Arithmetica*: a edição com o texto latino que consideramos como padrão e da tradução comentada em inglês. Na tradução que fizemos para a língua portuguesa, muitas vezes a estrutura original das orações teve que ser sacrificada. Como a mesma dificuldade se apresentou para o tradutor de língua inglesa, algumas vezes nos apoiamos na tradução para definir quando quebrar uma sentença latina em duas, ou mesmo quando fugir da tradução literal. Meu intuito foi fornecer ao leitor uma tradução instrumental em português, da qual ele pode se servir para, sem muitas dificuldades, comparar com a tradução para a língua inglesa e utilizar como referência para acessar o texto latino. Vide BOÉCIO. *De arithmetica*, 1983 e *De arithmetica*, 1999.

2.1 A Organização do De proportionibus

O texto divide-se em quatro capítulos. O primeiro visa esclarecer ao leitor a linguagem das proporções. Ele é necessário uma vez que se dirige a um leitor muitas vezes não familiarizado com as matemáticas, o filósofo natural, e encontra-se dividido em três seções. A primeira estabelece as definições de "proporção" e detalha o uso matemático do termo. A segunda seção continua a tratar sobre os diferentes tipos de proporção e, por fim, a terceira seção expõe, de modo exaustivo, todos os axiomas a serem utilizados até o final do tratado. Assim, segundo o método dos geômetras, o leitor encontra, logo no inicio do texto, todo o conjunto de definições, axiomas e procedimentos que serão adotados. O autor se compromete a não apresentar argumentos que não estejam fundados ali; não deve haver, por exemplo, espaço para o argumento da autoridade. O leitor, uma vez informado, deve poder facilmente refazer o caminho do autor, passo a passo, das definições e axiomas até a conclusão, e deve comprometer-se a procurar erros cometidos pelo autor no limite das definições, axiomas e procedimentos expostos no primeiro capítulo.

O segundo capítulo tem por objetivo investigar as teorias sobre a proporção dos movimentos já existentes, bem como mostrar pontualmente seu erro. Bradwardine apresenta quatro teorias; a análise de cada uma representa uma seção do capítulo. Percebe-se, claramente, a intenção deste capítulo, colocado propositalmente entre o primeiro (axiomas, definições e procedimentos) e o terceiro, no qual a teoria de Bradwardine aparecerá. Trata-se de limpar o terreno, eliminar os erros já cometidos para que eles não representem um empecilho para que o leitor adote a nova teoria apresentada.

O terceiro capítulo é, como dito, a exposição da teoria de Bradwardine e se divide em duas partes. A primeira delas constrói teoremas sobre a proporção das velocidades e, a segunda, expõe e refuta objeções que porventura venham a ser levantados contra eles.

O quarto e último capítulo trata, em sua primeira seção, de um caso especial de movimento, o circular, e o cálculo de velocidade nos móveis compostos de partes móveis, o que representa um grande desafio para o autor. Na segunda seção, o capítulo apresenta e responde refutações dirigidas ao uso de proporções para o cálculo de velocidades de corpos móveis. A terceira e última seção trata da proporção entre as esferas dos elementos e não trata da velocidade. Pode ter sido incluída por lidar com proporções.

É possível perceber o propósito da divisão tal qual apresentada acima. Para além da composição do texto na forma de tratado, Bradwardine persegue, de modo organizado, respostas para duas questões. Primeira: qual a natureza das proporções? Tal questão é aparentemente acessória e deve ser estudada apenas até o limite de sua utilidade para o cálculo da medida do movimento propriamente dita. Deter-se demasiado no estudo da natureza da proporção é trabalho do matemático e do geômetra, o que explica o fato de Bradwardine ocupar-se de longas transcrições de Boécio e de Campano/Euclides. Segunda: quais são os fatores que devem ser considerados para o cálculo da proporção das velocidades dos movimentos? Esta questão é respondida por duas vias, i.e, negando todas as respostas dadas pelos comentadores até então (segundo capítulo), e elaborando uma teoria nova, universal e precisa para dar conta do cálculo da velocidade do movimento (terceiro e quarto capítulos). O segundo capítulo é, desta forma, uma investigação da questão pela via da negação, i.e., em primeiro lugar deve-se perguntar quais são os fatores que se sabe, por estarem presentes em teorias falsas, não contribuírem para o cálculo. O terceiro e o quarto capítulos representam a via positiva, i.e., percebe-se que é possível calcular, por meio de uma única fórmula, a velocidade de qualquer movimento (terceiro capítulo, primeira seção), e que as duas objeções que se pode alegar são respondidas com facilidade (terceiro capítulo, segunda seção) ou constituem-se em casos especiais (quarto capítulo), como os movimentos circulares.

2.2 *A Linguagem das Proporções*

A primeira definição a ser dada ao leitor é a de "proporção", uma vez que todos os demais assuntos do tratado são discutidos em vista da obtenção de proporções de velocidades. Contudo, é preciso esclarecer que se diz "proporção" de duas maneiras, uma geral (*dicta communiter*) e outra própria (*proprie est accepta*). No que concerne à maneira específica em que se diz "proporção", há que se classificar todos os subtipos e, imediatamente, defini-los, de modo que o leitor não se engane na leitura do tratado.

O que há de revelador na extensa classificação feita por Bradwardine é exatamente sua ausência de originalidade, i.e., sua classificação é muito semelhante à de Boécio, na *Arithmetica*. Sua relação com Boécio fornece elementos para levantar duas hipóteses de análise da primeira parte do primeiro capítulo: primeiro, a noção de número de Boécio é utilizada por Bradwardine para justificar a utilização da matemática na filosofia natural; segundo, a nomenclatura utilizada por Boécio para classificar números decimais é copiada e utilizada por Bradwardine para tratar de proporções.

Deve-se, primeiro, entender como Bradwardine interpreta e utiliza a noção de "número". A introdução da *Arithmetica* de Boécio remete a uma forte interpretação do número como sendo real e por oposição aos corpos materiais, que mudam constantemente. Assim, uma ciência dos números é mais certa que uma ciência dos corpos materiais, uma vez que a ciência dos números obtém um conhecimento sobre o que permanece para além da mudança. Já uma ciência dos corpos materiais não é capaz de obter conhecimento que permanece para além da mudança.

> Nós dizemos que as coisas não são aquilo que cresce nem que diminui, nem o que se altera pela variação, mas aquilo que é por sua própria força e que mantém a si próprio seguro por sua própria natureza.Tais coisas são qualidades, quantidades, configurações, largura, pequenez, igualdades, relações, atos, disposições, lugares, tempos e o que mais puder ser encontrado nos corpos, que seja de natureza incorpórea e existindo em vista de uma substância imutável e que, quando afetada pela participação em um corpo e por contato com alguma coisa variável, passe para a condição de inconstante mutabilidade. Estas coisas, assim como dissemos, substâncias naturais imutáveis, são verdadeira e propriamente chamadas ser. A sabedoria nomeia uma ciência em termos dessas coisas, i.e., coisas que propriamente existem, quaisquer que sejam suas essências. (BOÉCIO. *Arithmetica*: I, 9-22)

A segunda hipótese interpretativa que se pode levantar é que a falta de originalidade na classificação das proporções, ou seja, o fato de Bradwardine adotar, praticamente sem alterações a classificação feita por Boécio, pode indicar que ele, tantos séculos depois, ainda enfrentava a mesma carência de símbolos matemáticos para lidar com equações algébricas. A *Arithmetica* de Boécio expressa uma tentativa de resolver este problema através do uso da linguagem comum, criando uma tipologia para ordenar, classificar e falar mais facilmente dos diversos tipos de fração numérica que aparecem no cálculo de proporções. Diz respeito ao conjunto simbólico necessário para tratar delas. Coincidentemente, treze anos antes do *De proportionibus* ser publicado, Leonardo de Pisa, em 1225, começava a adaptar os sinais árabes para operações matemáticas no ocidente[125] em um esforço para substituir os extensivos sistemas classificatórios, como o de Bradwardine, dotando a matemática algébrica de uma linguagem própria, como contraponto à tradição boetiana.

A necessidade em classificar as proporções, em última instância, decorre da noção que o termo preserva em Bradwardine: modernamente falando, proporção é a função da razão entre dois números. Contudo, tal clareza de definição apenas se apresenta para nós, modernos. Para Bradwardine, o termo "proporção" encontrava-se vinculado ao seu uso na tradução do termo grego "αναλογια" no contexto das discussões que envolviam o chamado texto 71 da *Física* (IV, 8), sempre acompanhado do comentário de Averróis, que tratava da discussão da causa das mudanças locais. As discussões que envolvem o texto 71 da *Física* definem o problema do cálculo da velocidade do movimento tal como ele atravessa toda a Idade Média.[126]

A primeira classificação a ser feita é a distinção entre proporção em geral e proporção dita em sentido próprio, ou, respectivamente, os sentidos equívoco e unívoco em que se diz "proporção".

---

[125] SMITH, David. *History of mathematics* II, p. 378 ss.

[126] Por sua importância e complexidade, inclusive para compreender o universo no qual o *De proportionibus* foi escrito, toda a discussão será analisada no capítulo III.

I - *Proporção em Geral: "Proporção é a comparação de duas coisas, na relação entre uma e outra, naquilo em que podem ser comparadas"* (I, 5-7)[127]. Em termos gerais, ou seja, em um uso não técnico, se diz, de modo equívoco, que proporção é uma propriedade, que duas coisas possuem, de serem comparadas entre si. No caso, "comparar" significa verificar se as duas coisas em comparação são iguais, se uma é maior ou se é menor que a outra. O equívoco de tal afirmação reside no fato de que apenas quantidades do mesmo tipo podem ser comparadas (nos termos em que se entende "comparar"), e não quaisquer duas coisas. Assim, segue a definição unívoca de proporção.

II - *Proporção em Sentido Próprio: "Proporção é a relação entre duas quantidades do mesmo gênero"* (I, 9-10)[128]. Esta definição, unívoca, é idêntica a de Euclides: *"Uma razão é um tipo de relação da grandeza de duas magnitudes de mesmo tipo"* (V, def. 3)[129].

Uma vez dito que só se pode comparar e, conseqüentemente, obter a proporção, entre quantidades do mesmo gênero, é preciso especificar quais os gêneros e subdivisões de quantidades que existem. Este é o propósito da classificação. Sua primeira etapa, diferenciar entre dois grandes subtipos: a proporção entre racionais e a proporção entre irracionais.

---

127 *"Proportio est duorum comparatorum in aliquo in quo comparantur, unius ad alterum habitudo."*

128 *"Proportio est duorum quantitatum eiusdem generis unius ad alteram."*

129 Salvo expresso em contrário, todas as citações de Euclides referem-se aos *Elementos*, sendo utilizada a seguinte edição: EUCLID. *The thirteen books of the Elements*. Trad., introd. e com. de Heath, 3 vols, 1984.

III - *Proporção entre Racionais e Irracionais:* Bradwardine esclarece o uso dos termos "racional" e "irracional". Racionalidade, comensurabilidade e comunicabilidade, termos sinônimos, aplicam-se àquelas quantidades que possuem uma medida comum e que, por conseguinte, podem ser comparadas de maneira precisa.[130] Assim, por exemplo, uma linha de dois pés e uma linha de três pés são proporções racionais porque possuem uma medida em comum, i.e., a linha de um pé. Através da medida em comum é possível estabelecer a proporção de um termo em relação a outro de maneira precisa, i.e., representada por um número: dupla ou 2 para 1 e tripla ou 3 para 1, respectivamente para as linhas de dois e três pés.

Por oposição, quantidades irracionais, incomensuráveis e não-comunicantes *"...são aquelas que não possuem uma medida comum: deste modo são entendidos o diâmetro e o lado do quadrado"* (I, 28-30)[131]. Essas proporções não podem ser imediatamente representadas por números: têm que se recorrer a outras proporções para que se possa representá-las.

Proporções racionais ocorrem em números, i.e., na representação aritmética, e em quantidades, i.e., tudo o que, mesmo não podendo ser representado pelo conjunto dos números naturais, ainda assim pode ser medido. As proporções irracionais, por definição,

---

[130] *"Quantitates commensurabiles seu rationales sunt quibus est una mensura communis, illarum est una mensura communis, illarum quamlibet praecise mensurans"* (I, 23-25).

[131] *"...sunt quibus non est aliqua mensura communis, quamlibet illarum praecise mensurans: cuiusmode sunt diameter et costa quadrati."*

só ocorrem em quantidades, uma vez que o conjunto do s naturais não contém número que represente um irracional.

IV - *Proporções Racionais de Igualdade e de Desigualdade: "A proporção propriamente dita, que pertence à aritmética, os matemáticos dividem do seguinte modo: a proporção pode ser igual ou desigual"* (I, 36-39) [132]. As proporções de igualdade são as relações entre duas quantidades iguais. As proporções de desigualdade, por sua vez, são de dois tipos: maior desigualdade (*maioris inaequalitatis*) que compreende a relação entre uma grande quantidade e uma quantidade menor; menor desigualdade (*minoris inaequalitatis*), que compreende a relação entre uma pequena quantidade e uma maior.

V - *Proporções Racionais de Maior Desigualdade e de Menor Desigualdade:* Cada um dos dois tipos de proporções possuem cinco subtipos. Para as proporções de maior desigualdade são três simples (múltiplo, superparticular e superpartiente) e dois compostos pela combinação dos três subtipos simples (múltiplo superparticular e múltiplo superpartiente). Para as proporções de menor desigualdade, acresenta-se o prefixo "sub-" a designação dos subtipos, assim formando os três tipos simples (submúltiplo, subsuperparticular, subsuperpartiente) e os dois compostos (submúltiplo subsuperparticular, submúltiplo subsuperpartiente). A definição dos subtipos "sub-" é a mesma da dos outros subtipos, com a ressalva de que se aplicam às proporções racionais de menor desigualdade.

---

[132] *"Proportio autem magis proprie dicta, quae arithmetico pertinet, ab arithmeticis dividitur isto modo: Proportio quaedam est aequalitatis, quaedam inaequalitatis."*

Assim, basta definir os cinco subtipos aplicados às proporções racionais de maior desigualdade:

VI - *Proporção Múltipla: "A Proporção é dita múltipla quando a proporção maior se relaciona com a menor de modo a contê-la uma ou mais vezes"* (I, 50-51)[133]. Deste modo, nomeiam-se as proporções múltiplas pelo número de vezes que a maior contém a menor: *duplex*, se contém duas vezes, *triplex*, se contém três e assim indefinidamente.

VII - *Proporção Superparticular: "Por outro lado, a proporção superparticular é a relação de uma quantidade maior e de uma menor , na qual a quantidade maior contém a menor uma única vez, mais uma certa parte (aliquot)"* (I, 55-57)[134]. A "certa parte" (*aliquot*) tem a característica de poder reconstituir a quantidade maior, quando multiplicada um certo número de vezes. Já a outra parte da proporção, i.e., a parte similar à quantidade menor, não pode reconstituir a quantidade maior, independente do número de vezes em que seja tomada. Por exemplo, para uma proporção cujo número é cinco, a parte dois, independente do número de vezes que seja tomada, não poderá reconstituir a proporção.

As proporções superparticulares, por sua vez podem ser divididas em um número infinito de subtipos. Bradwardine cita dois exemplos: *"Este tipo de proporção, por sua vez está aberto a um número infinito de divisões: se a maior quantidade contém a menor uma vez, mais a metade dela, é chamada 'sequialternada' (sesquialtera) ou 'hemiolia', como é*

---

[133] *"Multiplex vero proportio est habitudo quantitatis maioris ad minorem, illam multotiens continentis."*

[134] *"Superparticularis autem proportio est habitudo quantitatis maioris ad minorem, illam semel et eius partem aliquotam continentis."*

o caso da proporção de três para dois. Se, de outro modo, a quantidade maior possui a menor e uma terça parte de seu conteúdo, é chamada 'sesquiterça' (sesquitertia); assim como o quatro é para o três. Logo, é possível produzir tipos ao infinito" (I, 60-66).[135]

VIII - *Proporção Superpartiente: "Para a proporção superpartiente tem-se que a quantidade maior está para a menor, de modo que contém a menor uma vez e mais de uma de suas partes"* (I, 67-69).[136] Como o tipo anterior, esta proporção também pode ter infinitos subtipos obtidos de três maneiras: de acordo com o número (numerador), de acordo com a denominação (denominador) e por uma combinação desssas duas maneiras. De acordo com o número, por exemplo, se a quantidade maior possui a menor uma vez, mais três partes dela, então ela é chamada *supertripartiente*. De acordo com a denominação (denominador), se a maior proporção contém a menor uma vez, mais um certo número de terços dela, então é chamada *superpartiente tertias* ou proporção *supertertia.*

Assim, para a obtenção do nome de outras proporções, segue-se o esquema adotado acima. Por exemplo, se a maior quantidade possui a menor um vez por inteiro, mais duas vezes partes que correspondem, cada uma a um terço da proporção menor, chama-se a esta

---

[135] *"Haec autem proportio infinitam recipit sectionem, quia, si maior quantitas semel minorem et eius medietatem contineat, sesquialtera et hemiolia proportio nuncupatur: ut est proportio trium ad duo. Si autem maior quantitas semel minorem et eius tertiam partem contineat, sesquitertia dicitur: sicut quattuor ad tria se habet. Et sic, in finitum, species producuntur."*

[136] *"Superpartiens vero proportio est habitudo quantitatis maioris ad minorem, illam semel et aliquot eius partes aliquotas (ex quibus non sit una pars aliquota) continentis."*

proporção de *superbipartiens tertia* ou *superbitertia*, e assim para as outras proporções assemelhadas.[137]

IX - *Proporção Múltipla Superparticular: "Proporção superparticular múltipla é aquela cuja maior quantidade possui a menor um múltiplo de vezes, mais uma parte dela"* (I, 91-93).[138] Este tipo de proporção é infinitamente divisível de três modos distintos. Primeiro, com respeito à multiplicidade, i.e., quantas vezes a proporção e superparticular (duplamente, triplamente, etc.). Segundo, com respeito à superparticularidade (*superparticularitatis*), por exemplo, múltipla sesquialternada (*multiplex sesquialtera*), múltipla sesquiterça (*multiplex sesquitertia*), *"...et sic sine fine"* (I, 94-97). Terceiro, pela composição dos dois tipos anteriores.[139]

X - *Proporção Múltipla Superpartiente: "Proporção múltipla superpartiente é aquela cuja quantidade maior possui a menor um múltiplo de vezes, além de conter mais de uma parte (aliquot) dela"* (I, 101-103).[140] Há três diviões primárias, das quais a segunda e a terceira subdividem-se em três cada uma, totalizando sete subdivisões para este tipo de

---

[137] *"Et si istae partes sint quintae totius, superbipartiens quintas uel superbiquintas dicetur: qualis est proportio septem ad quinque. Et processus huius nullatenus terminatur"* (I, 84-86).

[138] *"Proportio autem multiplex superparticularis es habitudo quantitatis maioris ad minorem illam multitotiens et eius partem aliquotam continentis."*

[139] *"...dupla sesquitertia, tripla sesquitertia, tripla sesquialtera, tripla sesquitertia, et sic proceditur sine fine"* (I, 97-100).

[140] *"Proportio autem multiplex superpartiens est habitudo quantitatis maioris ad minorem, illam multotiens et aliquot eius partes aliquotas (ex quibus non fit una pars eius aliquota) continentis."*

proporção. A primeira subdivisão diz respeito à multiplicidade, ou seja, se a proporção é duplamente superpartiente, triplamente, etc. A segunda subdivisão diz respeito ao tipo superpartiente e, por sua vez, subdivide-se em três.[141] Da composição entre a primeira e a segunda subdivisão gera-se uma terceira que, de acordo com as três subdivisões da segunda, tambem possui três subdivisões,[142] e assim segue de modo interminável.

A tipologia acima refere-se à proporção de maior desigualdade. Contudo, as proporções de menor desigualdade possuem a mesma divisão e nomenclatura, acrescentando-se ao termo o prefixo "sub". Numa proporção de maior desigualdade, o primeiro termo é maior que o segundo, enquanto numa proporção de menor desigualdade o segundo é maior que o primeiro. Assim, se é dito que uma proporção é o dobro, isto significa que a primeira quantidade é duas vezes a segunda. Por oposição, se se diz que a proporção é subdobro, então significa que a primeira quantidade e metade da segunda.

Finalizando a primeira parte do primeiro capítulo, Bradwardine alerta para que o leitor tenha em mente que a tipologia elencada só se aplica à proporção própria, tomada em

---

141 *"...primo sic multiplex superbipartiens, multiplex supertripartiens; secundo sic: multiplex superpartiens tertias, multiplex superpartiens quartas; tertio sic: multiplex superbipartiens tertias uel multiplex superbitertias, multiplex supertripartiens quartas uel multiplex supertriquartas"* (I, 107-111).

142 *"Primo sic: duplex superbipartiens, triplex supertripartiens, et conuersim, superbipartiens duplex, superbipartiens triplex. Secundo sic: duplex superpartiens tertias, triplex superpartiens tertias, et conuersim, duplex superpartiens quartas. Tertio sic: duplex superbitertia, triplex superbitertia, et econtra, duplex superbitertia, duplex superbiquarta"* (I, 114-119).

stricto senso e não em geral. Contudo, por transferência, pode se dizer o mesmo das proporções em geral.

2.3 *Esboço da Gramática das Proporções de Bradwardine*

Do exposto no capítulo I do *De proportionibus*, é possível extrair uma teoria geral das proporções, que descreve seus aspectos matemáticos, como uma gramática descreve uma língua. Eis o esboço dos principais elementos desse código em Bradwardine, segundo o que expus na unidade anterior:

- As proporções dividem-se em:
  - **Racionais**: aquelas que podem ser diretamente representadas por um número (dobro, 2; triplo, 3)
  - **Irracionais**: aquelas que não são diretamente representadas por números, mas que podem ser representadas pela mediação de proporções racionais (a metade do dobro; a caso da proporção entre a diagonal do quadrado e seus lados). Tratam-se de proporções que não podem ser expressas por um número singular, mas que podem ser representadas por duas proporções **denominadas**: $(2/1)^{1/2}=\sqrt{2}$.

Denominar uma equação por outra é o equivalente a elevar a potência ou extrair a raiz.

  - **Proporção de maior desigualdade** é aquela em que o denominador é um e o numerador um inteiro maior que um; sua aplicação geométrica equivale à potenciação.

- **Proporção de menor desigualdade** é, por sua vez, o equivalente a extração da raiz; trata-se de uma proporção em que o numerador é um e o denominador é maior que um.

Note que a linguagem é falha por não estabelecer termos distintos para os processos de exponenciação e de fatoração. Assim, *duplum* pode significar "duplo" (A=B+B) ou "duas vezes" (2B). Contemporaneamente, um fator entre frações indica multiplicação aritmética, enquanto para Bradwardine pode indicar potenciação ou radiciação. Para saber com certeza como ler o termo *duplum, por exemplo,* se dobro ou quadrado, deve-se ler todo o argumento, buscando o melhor sentido para o termo. Campano/Euclides[143] evitam este problema: para dizer A/C é o dobro de A/B, diz-se A/C e igual à proporção duplicada de A/B (contemporaneamente $A/C=(A/B)^2$).

- Aplicação das proporções segundo seu tipo:
  - Em **quantidades comensuráveis**, i.e, aquelas para as quais existe uma medida comum exata na forma de uma parte *aliquot* (i.e, um múltiplo exato de cada proporção), aplica-se somente proporções racionais. Os números são a principal quantidade comensurável para Bradwardine. Logo, lidam com o comensurável todas a aritmética e todas as ciências que lhe são subalternas, i.e, a geometria e todas as intermediárias (harmonia, ótica e astronomia).

[143] *Elementos* V, def. 10-11.

- Em **quantidades incomensurávis**, i.e, àquelas que não possuem fator *aliquot,* aplica-se somente proporções irracionais. Todos os tipos de quantidades possuem comensuráveis, exceto os números inteiros (estes podem participar do incomensurável sob a forma mediada). Lidam com incomensuráveis a geometria e as ciências intermediárias que lhe são subalternas (ótica e astronomia).

É possível discernir as regras para a criação de vocabulário. Note que a divisão obedece ao critério da especialização. Por exemplo:

- Gênero: *proportio*
    - Espécie: *inaequalitas*, *maior*, *multiplex*
        - Espécie especialíssima: *dupla*
            - Indivíduos: 2/1, 4/2, 6/3...

Os vários tipos de proporção podem ser gerados pela variação e permutação de não mais que três termos da notação contemporânea. O significado dos termos, por sua vez, é dado pela comparação dos outros termos do sistema, i.e, sincronicamente. Assim, *multiplex* quer dizer multiplicado por um inteiro, *superparticular* o que possui como agregado uma parte *aliquot*, *superpartiens*, o que possui mais de uma parte *aliquot*. A seguir, apresento a relação completa sobre as proporções de maior desigualdade. Para as proporções de menor desigualdade ocorre exatamente o inverso.

- <u>Proportio aequalitatis</u>: n/n
- <u>Proportio **in**aequalitatis</u> (considere n>m):
    - Maior: n/m
    - Minor: m/n
- <u>Proportio maioris inaequalitatis</u>:
    - Multiplex: n/1 (n>1):

        - Dupla (2/1), tripla (3/1)...
    - Superparticular: n+1/n:
        - Sesqui**altera** (3/2), sesqui**tertia** (4/3)...
    - Superpartiente: n+m/n (n>m):
        - [variante m]: super**bi**partiens ((n+2)/n), super**tri**partiens ((n+3)/n)
        - [variante n]: superpartiens **tertia** ((3+m)/3)
        - [variante m e n]: super**bi**partiens **tertias** ou **super bitertias** ((3+2)/3)
    - <u>Multiplex superparticularis</u>: mn+1/n (m, n >1)
        - [variante m]: **duplex** superparticularis ((2n+1)/n)...
        - [variante n]: multiplex sesqui**altera** ((m2+1)/2)...
        - [variante m e n]: **dupla** sesqui**altera** ((2.2+1)/2)...
    - <u>Multiplex superpartiens</u>: (kn+m)/n (k,n,m>1)
        - [variante k]: duplex superpartiens ((2n+m)/n)...
        - [variante m]: multiplex super**bi**partiens ((kn+2)/n)...
        - [variante n]: multiplex superpartiens **quartas** ((k4+m)/4)...
        - [variante m e n]: multiplex super**bi**partiens **tertias** ou multiplex super**bitertias** ((k3=2)/3)...
        - [variante k e m]: **triplex** super**bi**partiens ((3n+2)/n)...
        - [variante k e n]: **duplex** superpartiens **tertias** ((2.3+m)/3)
        - [variação de k, n e m]: **duplex** super**bitertias** ((2.3+2)/3)

3 Linguagem Matemática e Procedimentos de Investigação Científica

Qualquer relação que se procure estabelecer entre os calculadores e a fundação da ciência do século XVII deve considerar a distância terminológica, a começar pelo próprio termo "calcular." O verbo *calculare* abrange um campo semântico mais alargado e ambigüo que seu correspondente moderno. "Calcular" significa introduzir símbolos no lugar de termos ou de proposições,[144] o que é mais amplo que uma definição moderna, como utilizar letras para designar grandezas variáveis com o intuito de oferecer modelos algébricos ou geométricos.[145]

No século XIV, o cálculo se aplicava a problemas teológicos, médicos e óticos sem distinção, posto que era percebido como uma reformulação do problema do movimento e da mudança pela via da quantificação da qualidade ou, como era dito, pela latitude das formas.[146] A vontade de quantificar, não importa quê qualidade, foi a principal característica dos calculadores, fosse tal qualidade o tempo, a distância percorrida, a velocidade, o calor, a densidade, o peso, a cor ou mesmo a certeza, a beatitude, a virtude e a saúde. Deste modo, os calculadores ensaiaram uma certa homogeneidade formal do conhecimento, i.e, a aplicação dos mesmos procedimentos racionais e os mesmos instrumentos lingüísticos tanto aos problemas de filosofia natural quanto aos problemas de teologia. Resta saber se os estudos teológicos chegaram a ser utilizados como ocasião ou pretexto para dar suporte ao estudo da natureza ou se este, na verdade, é subproduto do discurso teológico. De qualquer modo, a fama de que submetiam qualquer questão ao cálculo já estava presente à época do autores, como sugere um contemporâneo: "*Posto que*

---

[144] Vide SYLLA. *The Oxford calculatores,* p. 562.

[145] BIANCHI; RANDI. Cap. V – L'impossible exactitude; science et "calculators au XIV^{e} ciecle. In: Vérités dissonantes; Aristote à la fin du Moyen Âge. Fribourg: Éditions Universitaires, s/d, p. 155.

[146] Trato da latitude das formas no último capítulo desta tese. Sobre a extensão do cáculo vide: CROMBIE, A. Quantificator in medieval physics, *Isis*, 52, 1961: 143-80.

neste caso não se trata de uma contradição, nem de algo inimaginável, os calculadores não irão deixar de tratá-la."[147]

Esta forma de cálculo enquanto matematização da filosofia da natureza, entretanto, é incapaz de expressão por números e de, portanto, tornar extado o cálculo. Esta incapacidade se revela pelo uso do termo *attenditur*, ao invés de *mensuratur*. *Attenditur* não significa "medição",[148] mas "determinação", o que indica que a quantificação das qualidades se refere ao estudo de regras de proporcionalidade. Uma vez que estas não são numeráveis, apela-se, invariavelmente para uma ordem de grandeza vaga como maior/menor, mais rápido/mais lento, mais extenso/menos extenso.

Não se deve, portanto, compreender a notação contemporânea das proporções como equações algébricas. Nem se deve esperar o uso dos nomes das proporções em larga escala nos textos de Bradwardine. O modo correto de interpretá-los é tratá-los como regras de determinação de proporção (razão) e proporcionalidade a serem utilizados como proposições de um determinado argumento. Deste modo, a característica mais relevante do conjunto de proporções descritas acima, é constituírem-se em uma tentativa de liguagem única para o tratamento de problemas pertencentes a distintas ciências.

Esta tendência unificadora parece chocar-se com a classificação das ciências do aristotelismo escolástico, para o qual cada disciplina têm seus princípios e é um equívoco

---

[147] WILSON; HEYTESBURY. Medieval logic and the rise of mathematical physics. Madison: The University of Wisconsin Press, 1956, p. 24-25.

[148] Tratarei do problema da medida no último caítulo desta tese.

trasferir argumentos de uma disciplina para outra, a menos que se trate de disciplinas relacionadas pelas regras da subalternação.[149] Institucionalmente, contudo, no século XIV, o ensino dessas disciplinas não se dava por especialistas que só estudavam e ministravam uma ciência, ou seja, os professores da faculdade de artes ensinavam mais de uma arte liberal. Se em Paris os mestres em artes eram advertidos para não ensinarem assuntos puramente teológicos, a restrição servia mais para um propósito velado, a saber, previnir os mestres em teologia a não utilizar assuntos das artes liberais na elaboração de argumentos teológicos.[150]

A partir desse contexto, é possível afirmar que a ciência do século XIV distingue-se do modelo de ciência a partir do século XVII pela ausência de uma comunidade fechada, que se constitua enquanta a elite mantenedora dos paradigmas ou do núcleo duro de uma ciência liberal, a menos que se suponha que todos os professores da universidade, mestres em artes e teologia era a comunidade e que o conjunto de paradigmas era todo o aristotelismo cristão.

---

[149] Vide: LIVESEY, S. Metabasis: The interrelationship of the sciences in Antiquity and the Middle Ages. PhD. Diss. University of California. Los Angeles. 1982.

[150] Sigo a argumentação de GRANT, que ainda afirma que tais restrições nunca foram proclamadas em Oxford (*Foundations of modern science in the Middle age: their religious, institutional, and intelectual contexts*. Cambridge: Cambridge university Press, 1996, p. 152).

Capítulo III – A Restauração da *Física*

Defendi nos capítulos I e II que, para Bradwardine, tratar do movimento no interior da Filosofia da Natureza significa tentar formular, com o auxílio da matemática, uma teoria que expresse a relação entre as mudanças na velocidade do móvel e a intesidade ou remissão nas potências que interferem no movimento. Este "novo" problema do movimento, resolvido com o auxílio da matemática, já fora lançado por Aristóteles, no livro VII, capítulo 5, da *Física* e, para Bradwardine, foi perseguido sem sucesso pelos comentadores, que incorreram em três tipos de erros ao tertar solucioná-lo. Estes erros estão compilados no segundo capítulo do *De proportionibus*, em quatro teorias apresentadas ao leitor com o propósito de mostrar que o filósofo da natureza não deve insistir em tratar qualitativamente o movimento, pois incorrerá em tentativas fracassadas de interpretação das velocidades.

Meu objetivo é identificar a exposição sistemática das "teorias equivocadas" com o propósito primeiro do *De proportionibus,* a saber, a restauração do que Bradwardine acreditava ser o sentido original da afirmação de Aristóteles, na *Física*, sobre o cálculo das velocidades dos movimentos. O expurgo das teorias equivocadas representa, nesse contexto, o expurgo do aristotelismo medieval. De modo contraditório, esta tentativa de restauração resulta em uma teoria que não tem como base o conceito de movimento definido na *Física*, mas, ao contrário, requer um conceito não aristotélico. Tratarei dessa questão no capítulo subseqüente, no qual exponho a teoria do movimento de Bradwardine, os desdobramentos de sua formulação e exemplos. Para compreender esse processo, entretanto, é necessário antes esclarecer o desafio que Bradawardine vislumbrou na *Física*.

1 O Desafio de Aristóteles

Pode-se localizar sem dificuldades, em Aristóteles, passagens que relacionam as velocidades com as potências e resistências que determinam o movimento. Em duas passagens, tal relação é apresentada como partícipe em argumentos que tratam de outros assuntos: a negação da existência do vazio (*Física* IV, 8) e a negação da magnitude infinita (*De Caelo* I, 6-7). Porém, na *Física* VII, 5, o assunto é tratado por si mesmo, e se pergunta sobre a possibilidade de generalizar uma relação que trata da velocidade:

> Considerando que um motor sempre move algo e está em algo e se prolonga por algo (por "está em algo" quero dizer que ocupa um tempo e por "se prolonga por algo" quero dizer que envolve uma certa quantidade de distância), pois para qualquer momento em que algo causa movimento, também já causou movimento, de modo que deve sempre haver uma certa quantidade de distância que foi atravessada e uma certa quantidade de tempo que foi ocupada. Se, A é o motor, B o movido, C a distância movida e D o tempo, então no mesmo tempo, a mesma força A moverá metade de B duas vezes a distância C, e na metade de D moverá metade de B por toda a distância C; pois deste modo as regras da proporção serão observadas. (*Física* VII, 5, 249^{b27}- 250^{a3})

Neste início de capítulo, Aristóteles estabelece a relação entre movimento, potência motora e resistência, e esclarece que tal relação segue as regras matemáticas da proporção. Se P move M a uma distância S em um tempo T,[151] então:

a) P move ½ M por 2S em T;

b) P move ½ M por S em ½ T;

Na seqüência do capítulo, são estabelecidas outras cinco proporções:

> Novamente, se uma dada força move um dado objeto a uma certa distância em um certo tempo e metade da distância em metade do tempo, metade da potência motora moverá metade do objeto a mesma distância no mesmo tempo. Assuma E como representante da metade da potência motora A, e F metade de B: então, eles estão relacionados por semelhança, e a potência motora é proporcional ao peso, de modo que cada potência causará a travessia da mesma distância no mesmo tempo.
>
> Porém, se E mover F a uma distância C em um tempo D, não segue necessariamente que E pode mover duas vezes F a metade da distância C no mesmo tempo. Se, então, A move B a uma distância C em um tempo D, não segue que E, sendo metade de A, no tempo D ou em qualquer fração [desse tempo], fará com que B atravesse uma parte C na proporção em que esta e o todo de C é proporcional a A e E — de fato, pode ser que nenhum movimento venha a ocorrer; pois não se segue de uma dada potência motora, que cause uma certa quantidade de movimento, que metade desta potência causará alguma quantidade de movimento durante um certo período de tempo; de outro modo, um homem poderia mover um navio, uma vez que tanto a potência motora dos estivadores quanto à distância que causam ao navio atravessar são divisíveis em tantas partes quantos são os homens. Uma vez que o argumento de Zenon é falso, quando afirma que não há parte de Mileto que não produza som; pois não há proporção pela qual tal parte não possa em qualquer período de tempo, falhar em mover o ar que todo o fardo move ao cair. De fato,

---

[151] Considere P a potência motora, M o móvel, que para Bradwardine é inseparável da potência resistiva (R, como será representado mais adiante, quando a ênfase do texto for a resistência), S a distância percorrida e T o tempo decorrido ao longo do movimento.

não move mesmo uma tal quantidade de ar que moveria se esta parte estivesse sozinha; pois nenhuma parte sequer existe senão potencialmente no todo.

Se houver duas potências motoras, cada uma das quais capaz de mover em separado um de dois pesos a uma certa distância por um certo tempo, então as forças combinadas moverão os pesos combinados a uma distância igual em um tempo igual; pois neste caso, as regras da proporção se aplicam.

Então isto também ocorre com a alteração e com o aumento? Claro que ocorre, pois há algo que causa o aumento e algo que sofre o aumento, e ambas causas sofrem certa porção de aumento em um certo período de tempo. De modo semelhante ocorre com o que altera e o que é alterado – algo é alterado em uma certa porção ou grau, em um certo período de tempo; deste modo, no dobro de tempo ocorrerá o dobro da alteração, e o dobro da alteração irá ocupar o dobro de tempo; e a metade na metade do tempo, na metade da metade, ou novamente, no mesmo período de tempo, será duplamente alterado.

Por outro lado, se o que causa a alteração ou o aumento causa uma certa porção de aumento ou alteração em um certo período de tempo, não o fará, necessariamente, pela metade na metade do tempo ou na metade a metade do tempo; pode ocorrer que não haja alteração ou aumento nenhum, pelo mesmo motivo que ocorre com o peso. (*Física* VII, 5, 250[a3-b7])

Sistematizando:

c) P move M por S/2 durante T/2;

d) P/2 move M/2 por S durante T;

e) P não move necessariamente 2M a uma distância S/2 durante T;

f) P/2 não move necessariamente M a uma distância S/2 durante T;

g) Se P_1 move M_1 por S durante T e P_2 move M_2 por S durante T, então P_1+P_2 move M_1+M_2 por S durante T.

Duas características sobressaem das relações estabelecidas por Aristóteles. Primeiro, com exceção de (d) e (g), não há regra que permita prever o que ocorre com a variação de P. Segundo, o uso dos termos "não necessariamente" indica que não se obteve uma fórmula geral sobre a relação entre a potência motora, a resistência e a velocidade. Nem é este o intuito de Aristóteles, uma vez que o exemplo do homem que puxa um navio esclarece existir uma outra preocupação no texto, i.e, a causa da potência motora. O exemplo sugere que Aristóteles não trabalha o movimento em separado da causa. A primeira preocupação da passagem é a potência dos motores, como fica expresso no parágrafo que introduz o capítulo 5:

> Agora, uma vez que haja um móvel, seu movimento sempre atuará sobre alguma coisa, estará sempre em alguma coisa e estender-se-á sempre a alguma coisa (por 'estará sempre em alguma coisa' quero dizer que ocupará um tempo; e por 'estender-se-á a alguma coisa' quero dizer que envolverá uma certa porção de distância — pois, a qualquer momento, quando uma coisa causa movimento, também causou movimento, assim como deve sempre haver uma certa porção de distância que foi atravessada e uma certa porção de tempo que foi ocupada). (*Física* VII, 5, 249^{b27-32})

A despeito desse início de capítulo esclarecer qual a preocupação central de Aristóteles, o texto deu margem a tentativas, no decorrer da Idade Média, em tornar explícita a lei que rege a velocidade do movimento. O modo mais usual de representar o cálculo expresso na passagem pode ser assim convencionado: P/R=V; no qual P é a potência motora, R a potência resistiva, e V expressa a velocidade escalar. Entendendo-se V, P e R segundo os limites do texto, a relação de função expressa em notação contemporânea pode ser aceita, desde que se acrescente que, quando P varia, R permanece constante e vice-versa. Esta é a terceira das quatro "teorias equivocadas" expostas por

Bradwardine, a qual ele mais devota espaço no capítulo dois para refutar, não antes sem explicitar que se trata de um trabalho dos comentadores, não de Aristóteles.

De fato, o capítulo 5 do livro VII despertou interesse por apresentar a possibilidade de comparar movimentos bem antes de Bradwardine. Em seu comentário à *Física*, Tomás de Aquino sustenta que é possível inferir leis gerais, por comparação de movimentos, que preservem sempre a mesma proporção entre a velocidade do movimento e a alteração da resistência, uma vez que se suponha que a potência motora é constante, ou entre a velocidade do movimento e a mudança da potência motora, desde que se suponha que a resistência é constante:

> Depois que o Filósofo mostrou que os movimentos são mutuamente comparáveis, aqui ele explica como podem ser comparados. Ele o faz primeiro com respeito ao movimento local, e em seguida com respeito a outros movimentos, aonde diz 'Então isto ocorre também para'[745]. No que diz respeito à primeira parte, estabelece dois pontos. Primeiro expõe o que governa a mútua comparação dos movimentos locais. Segundo, aonde diz 'Se, então, A, o motor...' [739], ele estabelece, pelo que segue, as regras para comparação. [152]

Embora Tomás de Aquino fale em regras, seu texto não ultrapassa as possibilidades de relação entre potência motora, resistência e velocidade já presentes no texto de Aristóteles, a saber, sempre que a resistência varia, a potência motora permanece constante, e vice-versa. Esta característica, expressa pelo texto de Tomás, é um bom representante dos comentários medievais sobre a velocidade dos movimentos até o *De proportionibus*.

---

[152] AQUINO, Tomas. *Comentary on Aristotle's Physics*, 1999, Leitura 9 [249^{b26}-250^{b9}], 956, p. 495.

2 As Quatro Teorias Equivocadas

Na exposição das quatro teorias equivocadas que ocupam todo o segundo capítulo do *De proportionibus,* Bradwardine norteia suas críticas por um deslocamento do foco original das teorias, i.e, do estudo das causas do movimento para a coerência da operação de cálculo realizada. Por este motivo, não se pode dirigir a crítica de Bradwardine a um determinado autor. Há uma inverção na ordem do que era prioridade no discurso aristotélico. No *De proportionibus*, o interesse central é estabelecer uma lei do movimento que obedeça aos limites impostos apenas pela linguagem das proporções. É compreensível, portanto, que ao transpor as teorias das obras originais dos filósofos, Bradwardine eliminasse os problemas que as originaram, deixando permanecer, apenas, esqueletos matemáticos.

O exame de tais "esqueletos matemáticos" tem a função de instruir o leitor no uso do aparato matemático exposto no capítulo I do *De proportionibus*, mostrar-lhe como manipular "séries exponenciais" com o intuito de escapar dos problemas que a noção aristotélica — segundo a qual as velocidades são proporcionais às proporções das potências envolvidas (motora e resistiva) — podem acarretar àquele que busca uma lei de movimento. Tais problemas resultam do modo como se concebe a relação entre a velocidade e suas potências. Esta relação foi trabalhada pelos comentadores segundo duas perspectivas: ou a velocidade era compreendida como um valor absoluto, ou era uma função relativa à potência motora e a resistência.[153] No primeiro caso, a resistência deveria ser subtraída da potência motora para a obtenção do próprio valor da velocidade, enquanto no segundo caso, a velocidade era a resultante de potências opostas. A primeira teoria equivocada apresentada no cap. II do *De proportionibus* é do primeiro caso. A segunda e a terceira teorias são do segundo caso, enquanto a quarta nega a possibilidade de relacionar potência motora e resistência[154] (magnitudes intensivas) com a velocidade (magnitude extensiva).

<table>
<tr><td colspan="2">Não pode haver relação de proporção: a velocidade (magnitude extensiva) não pode ser relacionada com a potência motora e a potência resistiva (magnitudes extensivas)</td><td>Teoria IV</td></tr>
<tr><td>Velocidade como um valor absoluto</td><td>Proporção aritmética: a velocidade é obtida subtraíndo resistência da potência motora</td><td>Teoria I</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Velocidade como valor relativo</td><td rowspan="2">Proporção geométrica: a velocidade é resultante de potências opostas</td><td>Teoria II</td></tr>
<tr><td>Teoria III</td></tr>
</table>

Uma vez que a teoria IV exclui todas as outras, uma vez que lida com a impossibilidade de qualquer relação de proporção, não seguirei a ordem do texto e trata-la-ei em primeiro lugar. Esta reordenação permitirá deixar por último a teoria III, a fórmula mais próxima da proposta por Bradwrdine, que trabalharei no próximo capítulo.

---

[153] CROSBY. Descriptive and critical analysis. In: BRADWARDINE. T. *Tractatus de proportionibus,* p. 32.

[154] Note que a resistência é, na maioria dos casos, tratada por Bradwrdine como um potência interna do corpo móvel.

2.1 Da impossibilidade da relação de proporção (Teoria IV)

> Uma quarta teoria declara não haver nenhuma proporção ou relação do excesso entre as potências motiva e resisitiva. Sustenta que ao invés de existir uma relação do excesso da potência motiva sobre a coisa movida, o movimento ocorre devido a um tipo de hábito [domínio] natural do motor sobre a coisa movida. (*De proportionibus*, cap. II, 397-401, p. 104).[155]

A quarta e última teoria afirma que não há qualquer relação matemática entre as velocidades e suas potências. A velocidade ocorre e varia segundo a disposição natural do motor em relação ao móvel. A teoria tem um triplo suporte:

1. "Potência" não é um corpo, logo não possui magnitude e, conseqüentemente, não pode ser proporcional a nada, uma vez que proporção é relação de grandeza (magnitude):

   > Do que foi dito segue que nenhuma potência motora pode ser finita ou infinita, maior ou menor, ou por qualquer modo, proporcional a potência dos móveis, porquê nenhuma potência motora é um corpo ou separada. (*De proportionibus*, cap. II, 409-413, p.104) [156]

2. As potências motora e resistiva são gêneros diferentes, logo não podem ser comparadas em relação de proporção:

---

[155] "*Quarta vero opinio ponit quod nulla est proportio nec aliquis excessus potentiae motivae ad potentiam resistivam, et ideo proportio velocitatum in motibus non sequitur aliquam proportionem nec excessum potentiae motivae ad potentiam mobilis, sed quoddam dominium et habitudinem naturalem motoris ad motum*".

[156] "*Ex istis videtur sequi quod nulla potentia motiva est finita vel infinita nec maior vel minor, nec aliquo modo proportionalis potentiae rei motae, quia omnis potentia motiva non est corpus, sed forma extensa in corpore vel a corpore separata.*"

> Primeiro: Proporção é uma comparação entre duas coisas do mesmo gênero (como é evidente com base na definição de proporção estabelecida no Primeiro Capítulo). É evidente que potências ativa e passiva não são do mesmo gênero, como vimos. (*De proportionibus*, cap. II, 416-417, p. 104)[157]

3. No caso de uma proporção de maior desigualdade entre potência motora e a potência resistiva, i.e, no caso do denominador (potência resistiva) ser maior que o numerador (potência motora), a potência motora seria dividida. No entanto, algo que não é corpo não pode ser dividido:

> Além do mais, se houvesse alguma proporção entre a potência motora e a coisa por ela movida, poderia existir uma maior desigualdade, uma vez que poderia exceder a potência do móvel. E uma vez que tudo o que excede é divisível pelo que excede e o que é excedido (como aparece no livro 4 da *Física*, no capítulo sobre o vazio) daí segue que qualquer potência motora pode ser dividida. Isto é falso, pois toda potência motora incorpórea é fundamentalmente indivisível e uma potência motora é menor em extensão que a potência da coisa movida. (*De proportionibus*, cap. II, 429-434, p. 106)[158]

Embora as refutações à quarta teoria não apareçam separadas no texto, seguindo o padrão estabelecido por Bradwardine na apresentação das demais teorias, é possível identificá-las e separá-las. Tratam-se de duas refutações:

---

[157] "*Primo: proportio est comparatio rerum eiusdemgeneris (ut patet per definitionem proportionis primo capitulo assignatam). Sed potentia activa et passiva non sunt eiusdem generis, ut videtur.*"

[158] "*Praetera, si potentiae motivae esset aliqua proportio ad potentian rei motae, illa esset proportio inaequalitatis mioris quia deberet exceder potentiam rei motae. Te cum omne excedens aliud dividitur in excellentiam et in illud quod excellitur (ut patet quarto Physicorum, capitulo de vacuo) sequitur quod quaelibet potential motive posset divide isto modo. Quod falsum est, quia omnes potentiae motivae incorporeae sunt indivisibiles simpliciter, et aliqua potentia corpórea est minor secundum extensionem quam potentia rei motae.*"

2.1.1 Primeira Refutação

> Se não houvesse proporção entre potências pelo fato de não serem quantidades de um mesmo tipo, não poderia haver proporção entre padrões musicais, e toda a ciência da harmonia entraria em colapso, pois o "epogdo" ou "tom" é constituído na proporção de nove para oito, o diatesaron na proporção de quatro para três, o diapente na proporção de três para dois, o diapasão (composto do diatesaron e do diapente) na proporção de dois para um, o diapasão e diapente são combinados na proporção de três para um, e o dobro do diapasão na proporção de quatro para um. Isto é suficientemente evidente em várias passagens da *Música*. (*De proportionibus*, cap. II, 445-452, p. 106) [159]

A primeira das refutações expostas por Bradwardine recorre à própria existência da harmonia. Se não houvesse proporção entre diferentes, não poderia haver relações harmônicas. A teoria é falsa por não considerar dois tipos distintos de proporção: unívoca, ou própria, que só se aplica ao mesmo gênero, e equívoca ou comum, que se aplica às comparações que não se dão no interior do gênero. Bradwardine afirma, então, que as proporções entre as potências motora e resistiva são equívocas. Porém, é necessário esclarecer qual é o tipo de comparação que se aplica neste caso, uma vez que, para além do gênero, pode-se comparar de duas maneiras: a) com o gênero mais geral, por exemplo, "*a*

---

[159] "*Ista autem posito poterit reprobari, quia si inter potentias non esset proportio (eo quod non sunt quantitates) eadem ratione nec inter voces. Et tunc totius musicae modulatio deperiret. Nam epogdous seu tônus in sesquioctava proportione consistit: diatessaron autem in sequitertia: diapente in sesquialtera: diapason (quae ex diatessaron et diapente componitur) in duplo; diapason cum diapente in tripla: et bis diapason in quadrupla proportione fundatur (ut ex diversis locis Musicae satis patet).*" A "*Música*" citada é uma referência a Boécio.

forma é substância, assim como a matéria ou um composto de ambas"[160]; b) para além de todo gênero, por exemplo "*substância é ser, assim como o acidente*"[161]. Conclui-se que a teoria é falsa, pois é possível afirmar que há algum tipo de proporção entre as potências.

2.1.2 Segunda Refutação

> Todo excedente de alguma coisa é dividido, de modo geral em excesso e o que é excedido não em si mesmo, mas em comparação com alguma outra coisa fora de si (por exemplo, ação e passividade ou resistência). (*De proportionibus*, cap. II, 506-509, p.108)[162]

Valendo-se do mesmo argumento que utiliza na segunda refutação à teoria II, Bradwardine afirma que a proporção da potência com o seu excesso não implica no ato de divisão da potência, mas apenas na consideração da possibilidade de divisão.

Os argumentos contra a quarta teoria constituem-se no único momento do *De proportionibus* em que o autor trata da necessidade de justificar a possibilidade de medição matemática de termos de gêneros diferentes. Bradwardine insiste que a "potência", seja ela de que tipo for, motora ou resistiva, é mensurável, sem que, para tanto, seja necessário compreendê-la como um corpo. Nesta segunda refutação, a potência não é corpo, nem

---

[160] *De proportionibus*, cap. II, 489-490, p. 108 (*"nam forma est magis substantia quam materia, vel compositum ex ambobus"*).

[161] *De proportionibus*, cap. II, 490-492, p.108 ("*substantia est magis ens quam accidens*").

[162] "*Vel sic: Omne excellens aliud, communiter dividitur in excellentiam et in illud quod excellitur (verum est non in se, sed in comparatione ad aliud extrinsecum, puta actionem vel passionem seu resistentiam).*"

possui existência separada do corpo, mas é tratada como o comportamento quantificável de certos corpos. Deste modo, as potências são mensuráveis por excelência.[163]

2.2 *Velocidade como Valor Absoluto (Teoria I)*

> Há quatro falsas teorias propostas que são relevantes para a nossa investigação, a primeira das quais sustenta que a proporção entre as velocidades dos móveis varia conforme a diferença pela qual a potência do motor excede a resistência oferecida pela coisa movida. (*De Proportionibus*, cap. II, 5-6, p. 86)[164]

A apresentação das teorias segue as citações dos autores que lhes dão suporte e, em seguida, os argumentos em contrário. Como suporte para a primeira teoria, Bradwardine cita Aristóteles e Averróis:

> Esta teoria tem a seu favor a passagem do primeiro livro do *De caelo et mundo*, capítulo sobre o infinito, no texto em que se lê: 'É necessário que a proporção leve em consideração o excesso do motor', juntamente com o comentário 71 de Averróis ao livro IV da *Física* que diz: 'todo movimento ocorre de acordo com o excesso da potência do motor sobre a potência [resistiva] da coisa movida'. No comentário 35 sobre o livro VII, também diz: 'a velocidade própria a cada movimento decorre do excesso da potência motora sobre a potência do móvel' [potência resistiva]; e no comentário 39: 'a velocidade da alteração e a quantidade de tempo variam segundo o

[163] Segundo Anneliese Maier, Bradwardine elimina a necessidade de se compreender as velocidades como "forma fluens", incorpóreas, sem geração ou corrupção e incomensuráveis, como era comum entre comentadores da *Física* no século XIV. Vide MAIER, A. *Die Lehre von der Bewwegung bei Nicolaus Oresme*, p. 156.

[164] "*Oniniones erroneae propositio pertinentes sunt quattor, quarum prima ponit proportionem velocitatum in motibus esqui excessum potentiae motoris ad potentiam rei motae*".

excesso da potência do que causa a alteração sobre a potência do que é alterado'. E muitas outras passagens afirmam o mesmo."[165]

Seguem-se sete argumentos contrários, organizados de modo a apresentar primeiro os atribuídos a autoridades, seguidos dos argumentos que dependem apenas da razão e da experiência. As refutações de 1 a 3 são baseadas em passagens de Aristóteles e Averróis, as refutações de 4 a 6 argumentam "pela impossibilidade" das conclusões que se pode extrair da teoria e a refutação 7 apela para a experiência comum. [166]

Antes de iniciar o tratamento das refutações, é necessário compreender o cálculo envolvido na primeira teoria, para o qual há duas interpretações. Anneliese Maier sustenta que se trata da seguinte equação: V/V'= (P-R) – (P'-R'), enfatizando que o texto fala da proporção entre velocidades e não entre potências. O termo "velocidade", afirma Maier, aparece sempre escrito no plural, enquanto "excesso" de potência aparece no singular (*sequi excessum*), variando segundo o excesso. Crosby, embora concorde com a argumentação de Maier, sugere que ao invés de uma proporção geométrica (V/V'), a primeira teoria trata de uma proporção aritmética (V-V'), de modo que a notação correta

---

[165] BRADWARDINE. *De proportionibus*, cap. II, 6-16, p. 86: "*Et hoc capit endentiam primo De caelo et mundo, capitulo infinito, ex textu dicente: 'Proportionaliter oportet secundum excellentiam motoris; et ex dictis Averois super quartum Physicorum, commentio 71, dicentis quod, 'Omnis motus est secundum excessum potentiae motoris super rem motam'. Et septimo Physicorum, commento 35, sic decit: 'Velocitas própria unicuique motui sequitur excessum potentiae motoris super potentiam moti', et commento 39, scilicet ultimo, dicit sit: 'Secundum excessum potentiae alterantis super potentian alterati erit velocitas alterationis et quantitas temporis'. Et multa similia asserit multis locis*".

[166] Tratarei da noção de "experiência" no próximo capítulo.

seria: V-V'= (P-R) – (P'-R').[167] Não há elementos textuais suficientes para que se opte definitivamente por uma ou outra solução.

2.2.1 Primeira Refutação

> A primeira teoria pode ser refutada de muitas maneiras. Primeiro, de acordo com a teoria, segue-se que se um dado motor mover um dado móvel a uma certa distância em um certo tempo, metade do motor não poderia mover metade do móvel a mesma distância durante o mesmo tempo, mas somente a metade da distância. A conseqüência é clara, porque se o lado do motor excede o lado do móvel pelo lado do excesso, então a metade do motor excede a metade do móvel pela metade da quantidade; do mesmo modo, 4 excede 2 em 2, metade de 4 [i.e, 2] excede metade de si mesmo [i.e, 1] por 1, o que é a metade daquela quantidade de excesso. (*De proportionibus*, cap II, 17-23, p. 86)[168]

A primeira teoria afirma que se P move M através de S durante T, P/2 não moverá M/2 por S durante T, mas somente por S/2. Disto resulta que se V=P-M, sendo M a potência resistiva interna do móvel, então V/2= P/2-M/2, o que contraria a afirmação de Aristóteles:

> Que tal conseqüência é falsa fica evidente da prova dada por Aristóteles no final do livro VII da *Física*: 'Se uma dada potência move um dado móvel por uma certa distância durante um certo tempo, metade daquela potência moverá metade do móvel pela mesma distância durante o mesmo tempo'. O argumento de

---

[167] Vide MAIER. Der Funktionsbegiff, *Divus Thomas*, p. 153; CROSBY. Descriptive and critical analysis. In: BRADWARDINE. *Tractatus de proportionibus*, p. 188, n. 84.

[168] *"Haec autem opinion destrui poterit multis modis. Primo sic: Secundum istum modum sequitur quod, aliquot motore movente aliquod mobile per aliquod spatium in aliquot tempore, medietas motoris medietatem moti per medietatem excessus; sicut quarternarius excedit binarium per binarium, et medietas eius (scilicet binaries) excedit medietatem eius (scilicet unitatem) per unitatem tantum, quae est medietas prioris excessus."*

> Aristóteles é evidente, pois uma vez que a metade está relacionada com a metade pela mesma proporção que o lado está relacionado com o todo, os dois movimentos serão iguais em velocidade. (*De proportionibus*, cap. II, 24-30, p. 86)[169]

A refutação de Bradwardine assenta-se na afirmação de que se a teoria segue Aristóteles para o caso da potência como um todo, também deve fazê-lo para a metade da potência. A refutação ocorre porque a teoria não mantém o que Bradwardine considera um axioma, i.e, a relação de proporção presente na afirmação de Aristóteles.

2.2.2 Segunda Refutação

> Segundo: segue da teoria que, dados dois motores a mover dois móveis por iguais distâncias em tempos iguais, os dois motores juntos não moveriam os dois móveis juntos exatamente pela mesma distância durante o mesmo tempo, mas o fariam pelo dobro da distância. Esta conseqüência segue-se necessariamente, porque o excesso dos dois motores, juntos, sobre os dois móveis, juntos, é duas vezes o excesso de cada um em relação ao seu próprio móvel; pois assim como qualquer coisa que tenha o valor dois, excede a unidade em um, assim dois e dois (o que perfaz quatro) excede dois uns (o que perfaz dois) por dois, o que é duas vezes o excesso de dois sobre um. (*De proportionibus*, cap. II, 31-41, p.86-88).[170]

---

[169] *"Et falsitas consequentis patet per Aristotelem, septimo Physicorum, in sine, ubi probat istam conclusionem: 'Si aliqua potential moveat aliquod mobile per aliquod spatium in aliquot tempore, medietas movebit medietatem per aequale in aequali tempore.' Et haec ratio Aristotelis satis probat, nam 'similiter se habet et secundum eandem proportionem medietas ad medietatem sicut totum ad totum. Igitur motus sunt aequeveloces'."*

[170] *"Secundo sic: Tunc sequitu quod, duobus motoribus moventibus duo mobília per aequale spatium in aequali tempore, illi duo motores coniunctim non moverent illa duo mobília coniuncta praecise per aequale spatium in aequali tempore, sed simper per duplum. Consequentia patet, quia excessus istorum duorum motorum coniunctorum ad ista duo mobilia coniuncta est duplus ad excessumunius istorum motorum super suum mobile; sicut quilibet binarius excedit unitatem per*

A segunda refutação pode ser compreendida da seguinte maneira: a teoria afirma que se P move M por S em T, então 2P não moverá 2M por S em T, mas por 2S; isto ocorre posto que se V= P-M, então 2V=2P-2M. Do mesmo modo que foi argumentado na primeira refutação, Bradwardine afirma que isto é falso posto que na *Física* (VII, cap. 5) Aristóteles mostra que a combinação das potências e resistências, tal qual sugerida acima, deve produzir a mesma velocidade.

2.2.3 Terceira Refutação

> Terceiro segue [da teoria] que da proporção geométrica, i.e, da semelhança das proporções do motor e do móvel, não se produz velocidades iguais, assim como também não ocorre com o excesso; pois muito embora a proporção de 2 para 1 e de 6 para 3 seja a mesma, o excesso de um termo sobre o outro é 1 no primeiro caso e 3 no segundo.
>
> A conseqüência a que isto nos leva é, contudo falsa e oposta à opinião de Aristóteles, como está expresso no final do livro VII da *Física* e em muitos outros lugares, aonde, de uma igualdade de proporções dos motores em relação aos seus móveis, sempre se argumenta pela igualdade das velocidades. Averróis sustenta a mesma opinião ao tratar da passagem já mencionada e também em seu comentário 71 sobre a *Física* IV, comentário 63 sobre o *De caelo et Mundo* e muitas outras passagens. (*De proportionibus*, cap. II, 50-60, p. 88).[171]

---

unitatem, duo autem binarii (qui quarternarium faciunt) excedunt duas unitates (quae dualitatem constituunt) per dualitatem, quae est dupla ad excessum binarii super unitatem."

[171] "*Tertio sic: tunc ex proportione geométrica, scilicet similitudine proportionem motorum ad sua mota, nom sequitur aequalis velocitas motuum, quia nec excessuum; quoniam eadem est proportio duorum ad unum et sex ad tres, excessus tamen unius est unitas, alius autem ternarius. Consequens autem ad quod deducitur est falsum, et contra Aristotelem septimo* Physicorum, *in fine et multis locis, ubi semper, ex aequalitate proportionum motorum ad sua mota, arguit aequalitatem*

Nesta refutação Bradwardine distingue entre proporção geométrica (P/M) e proporção aritmética (P-M). Da proporção geométrica não segue a igualdade de velocidades, uma vez que não há igualdade nos excessos da potência: 6/3=2/1, o que não ocorre na proporção aritmética (6-3 e 2-1). Este resultado contraria a afirmação de Aristóteles de que a igualdade das velocidades depende da igualdade da proporção entre as potências dos motores e as respectivas resistências dos móveis. Por discordar de Aristóteles, a afirmação é falsa.

Note o padrão nas três refutações: as duas primeiras negam que Aristóteles tenha afirmado que a igualdade das velocidades esteja relacionada à proporção aritmética entre as potências motoras e as resistências, enquanto esta terceira nega que esteja relacionada à proporção geométrica.

2.2.4 Quarta Refutação

> Quarta: deve-se obter, da presente teoria, que um corpo misto, possuindo uma resistência interna, pode mover-se mais rapidamente no meio que no vácuo. Assume A, por exemplo, como um corpo pesado (possuidor de potência motora e resistiva), e imagine-o caindo em um meio B. Assuma que C represente uma quantidade de terra possuidora de menos potência [resistiva] que o excesso de potência motora sobre a resistência em A. A mover-se-á a uma determinada velocidade no vácuo. Agora assuma o meio B, como rarefeito ao ponto em que C move-se nele a uma velocidade igual a de A no vácuo. Se A for, agora, localizado no mesmo meio que C, deverá mover-se mais rápido que C (pois possui maior excesso de potência motiva sobre a resistência). C mover-se-á no meio com a velocidade igual a de A movendo-se no vácuo. Assim, A mover-se-á mais rápido no meio que no vácuo.

---

velocitatum in motibus. Idem vult Averroes super loca praedicta, et similiter quarto Physicorum, *commento 71, et super primum* De caelo et mundo, *commento 63, et allis multis locis*".

> De fato, é verdade que é possível rarefazer B até o ponto em que C mova-se com a velocidade especificada, pois pela rarefação do meio, o movimento local pode ser acelerado a qualquer grau desejado. Isto é mostrado no livro IV da *Física* (no capítulo sobre o vazio) onde se afirma que, se a potência motora permanecer constante, é possível chegar a qualquer grau de velocidade no movimento local tornando o meio rarefeito. Logo (assumindo que o movimento local pode ocorrer no vácuo), um mesmo corpo pode mover-se com a mesma velocidade no meio e no vácuo. (*De proportionibus*, cap. II, 96-116, p. 90) [172]

Novamente o argumento é refutado por não concordar com o texto de Aristóteles, e não "por ser impossível". Da teoria segue que um corpo misto (entenda-se possuidor de resistência interna) pode mover-se mais rápido no meio (pleno) que no vazio: considere A o corpo misto, que cai em queda livre no meio B, e C um corpo puro de terra cuja potência motiva é menor que a potência motiva resultante de A; em seguida, rarefaça B até que C mova-se em B com a mesma velocidade que A se move no vazio. Então posicione A no mesmo meio que está C; A mover-se-á mais rápido, uma vez que sua potência motiva é

---

[172] "*Quarto sic: tunc sequeretur quod aliquod mixtum habens resistentiam intrisecam velocius movetur in pleno quam in vácuo. Sit enim A grave mixtum habens potentiam motivam et potentiam resistivam in se, et descendat ex se in aliquo médio (quod sit B) et sic C terra pura, minoris potentiae quam excessus A super totam suam resistentiam. Tunc A haberet ex se motum certae velocitatis in vácuo. Subtilietur igitur B médium donec C moveatur aequali velocitate in B cum A in vácuo. Et tunc ponatur A in illo médio cum C, et movebitur velocius illo; habet enum maiorem excessum. Et C movetur in illo médio aequali velocitatre cum A in vácuo. Igitur movetur velocius in illo médio pleno quam in vácuo. Quod autem B possit tantum subtiliari donec C movetur in illo velocitate praedicta, apparet; quia ad quamtamcumque velocitatem datam potest motus localis velocitari per subtiliationem medii, ut patet quaro* Physicorum*, capitulo de vácuo, ubi supponitur quod per subtiliationem medii (manente eodem motore), possibile est devenire ad quamtamcumque velocitatem motus localis datam. Et per hoc concluditur quod, posito motu locali in vácuo, idem movetur localiter aequevelociter in vácuo et in pleno.*"

maior; e uma vez que C move-se em B com a mesma velocidade que A no vácuo, A mover-se-á mais rápido no pleno que no vácuo. Note que Bradwardine assume que Aristóteles estabelece uma relação inversamente proporcional ilimitada entre a redução da resistência e o aumento da velocidade.

2.2.5 Quinta Refutação

> Quinto: segue da teoria que se um dado motor exceder sua resistência por uma quantidade menor que outro motor excede sua resistência, aquele movimento deve ser o mais lento. Assuma que uma quantidade de terra, possuindo uma certa resistência, que sua potência de queda excede grandemente, esteja a cair. Então assuma outra quantidade de terra, possuindo excesso menor, também em queda. Suponha que a maior quantidade de terra e a resistência a ela associada permaneçam constantes, e suponha que o meio relacionado com a quantidade menor de terra torne-se rarefeito a ponto que a velocidade torne-se igual a da maior quantidade. A menor quantidade agora move sua resistência com a mesma velocidade de que a maior quantidade de terra move a sua, e também a excede por uma pequena quantidade. (*De proportionibus*, cap. II, 116-125, p. 90-92) [173]

Bradwardine argumenta que, da teoria, é possível extrair a seguinte conclusão: se P-R<P'-R', então V<V', o que é falso. Bradwardine distingue, então, entre a resistência do móvel e a resistência do meio (assuma R como resistência do móvel e r como a resistência

---

[173] "*Quinto sic: tunc sequeretur quod, si aliquis motor excederet suam resistentiam per minorem excessum quam alius suam, tardius moverte illam. Descendat igitur terra magna cum aliqua resistentia, quam secundum excessum magnum excedat, et descendat qliqua terra minoris potentiae excessu maioris terrae ad suam resistentiam. Et manet maior terra et sua resistentia non alterata et subtilietur médium in quo movetur monor terra, donec moveatur aequevelociter cum maiori. Tunc minor terra aequevelociter movet suam resistentiam sicut maior terra suam, et tamem illa per excessum minorem excedit.*"

do meio), então: P-R> P'-R', e (P-R)-r = (P'-R')-r'. Deste modo, é possível que as velocidades sejam iguais enquanto as resistências sejam diferentes, o que falseia a teoria.

2.2.6 Sexta Refutação

> Sexta: também segue que se um pouco de terra pura mover-se em algum meio cuja resistência sua potência excede na proporção de dois para um, ou mais, não poderá mover-se com o dobro da velocidade em qualquer outro meio. Não poderá exceder qualquer meio pelo dobro do excesso do primeiro, pois, neste caso, toda a potência motora será excedida, e, como potência motora permanecendo constante, não seria possível aumentar a velocidade do movimento indefinidamente pela rarefação do meio. Tal conseqüência já foi estabelecida como falsa. (*De Proportionibus*, cap. II, 126-133, p. 92)[174]

Esta refutação afirma que se P=2R ou se P>2R, a velocidade não pode ser dobrada em qualquer outro meio, pois o dobro da diferença entre P e R seria igual a P. Se P=8 e R=4, de acordo com a primeira teoria, V=4; para dobrar V, é necessário dobrar o excesso, de 4 para 8, o mesmo valor que o móvel pode atingir caso R=0; isto implica que P não pode mover o corpo com velocidade maior que 8, mesmo no vazio (no qual a resistência é 0). Já se mostrou, com base em Aristóteles (Quarta Refutação) que esta conclusão é inconsistente.

2.2.7 Sétima Refutação

> Sétima: outra conseqüência é que se um dado móvel exceder sua resistência por um grau de quantidade, comparando com o excesso

[174] "*Sexto sic: tunc sequeretur quod, si terra pura movetur in aliquo médio quod in dupla proportione excederet vel maiori, non posset moveri in duplo velocius in aliquo médio alio. Non enim posset excedere aliquod médium per duplum excessum, quoniam tunc totum esset excessus. Et tunc, manent eodem motore, non in infinitum per subtiliationem medii posset velocitas motus generari (quod ex prioribus constat esse falsum)*".

> de outro motor em relação a sua resistência, o movimento deve ser mais rápido. Então, se um homem forte exceder o que ele move uma grande potência em comparação com um homem mais fraco, como um rapaz, uma mosca ou alguma coisa deste tipo, o forte deve mover com maior rapidez. A experiência, contudo, mostra-nos o contrário, pois vemos que uma mosca, voando, carrega uma partícula mais rapidamente, e um garoto carrega um pequeno objeto mais rapidamente. Um homem forte, por outro lado, move vagarosamente um objeto que mal pode suportar, e se lhe for acrescentada a quantidade carregada pela mosca ou pelo rapaz, ele não moverá tão mais lentamente quanto movia antes. (*De Proportionibus*, cap. II, 134-150, p. 92)[175]

Segue da teoria que se P-R>P'-R', então V>V', também segue que quanto maior for à diferença positiva de P em relação a R, maior será V. Uma vez que um homem forte possui um excesso de potência em relação à resistência muito maior que uma mosca, de acordo com a teoria, o homem forte deve mover qualquer coisa mais rápido que a mosca. Isto é falseável pela experiência.

Com base nas sete refutações, Bradwardine conclui que a velocidade não decorre do excesso de potência do motor sobre o móvel (i.e, a resistência). Quanto às opiniões de Aristóteles e Averróis, Bradwardine afirma que quiseram dizer por "*a velocidade decorre*

---

[175] "*Septimo sic: tunc sequeretur quod, si aliquis motor excederet suam resistentiam per miorem excessum quam alius suam, velocius moveret illam; et tunc quodcumque móbile fortis homo per maiorem excessus excederet quam debilior motor (sicut puer vl musca vel aliquid huismodi) excederet suum mobile, moveret et illud cvelocius. Et cum homo fortis per maiorem excessum excedit quodcum que móbile cum quo potest moveri maius quam debilior motor excedit aliquod mobile, sequitur quod fortis homo moveret quodcumque mobile cum quo possit moveri velocius quam debilior motor moveret aliquod mobile cum quo posset moveri, cuius contrarium declarat experimentum. Videmus enim quod musca portando aliquod modicum velvet, et homo fortis unum magnum mobile (quod vix potest movere) movet valde tarde. Et licet illi mobili apponatur maius quam musca vel puer posset movere, movet totum non multum tardius tunc quam prius*".

do excesso", que o movimento é produzido por uma proporção de maior desigualdade entre P e R, ou seja, o que podemos representar por P/R sendo P>R.

2.3 *Velocidade como Valor Relativo (Teoria II)*

> Avançamos agora para o exame da segunda teoria errônea, que supõe que a proporção das velocidades varia de acordo com a proporção dos excessos das potências motoras sobre as potências resistivas. Esta idéia é, evidentemente, baseada no comentário 36 sobre o livro VII da *Física*, no qual se afirma que *a velocidade de um movimento é determinado pelo excesso da potência do motor em proporção a potência da coisa movida*" (*De proportionibus*, cap. II 160-165, p. 92)[176]

Do mesmo modo que ocorre com a primeira teoria, a segunda é interpretada pelos comentadores de duas maneiras: Crosby[177] sustenta que se trata V= P-R/R (p.35); Maier[178] propõe a seguinte fórmula V/V= (P/P')-(R/R'). A compreensão de Maier está próxima da primeira teoria (V=P-R). Embora o enunciado da segunda teoria seja confuso, a leitura da primeira refutação não deixa dúvidas quanto a possível correção da fórmula proposta por Crosby; ao mesmo tempo, fica claro que a refutação não se dirige a uma fórmula como a proposta por Maier. Bradwardine aponta duas refutações para a teoria:

---

176 "*Sequitur de secunda opinione erronea ponente proportionem velocitatum in motibus sequi propotionem excessus potentiae motoris super potentiam rei motae. Et hoc videtur fundari in dicto Averrois super septimo Physicopum, commento 36: ibi enim dicit quod 'velocitas motus est secundum proportionem excessus potentiae motoris super potentiam rei motae'*".

177 CROSBY, L. Descreptive and critical analysis. In: BRADWARDINE, T. *De proportionibus*, p. 35.

178 MAIER, A. Der Funktionsbegriff; *Divus Thomas*, p. 155.

2.3.1 Primeira Refutação

> Esta teoria deve ser refutada por ser falsa. Pois imagine o caso em que o excesso de potência do motor sobre a potência da coisa movida é igual à potência da coisa movida. Nenhum móvel será capaz de mover qualquer móvel mais rápida ou mais lentamente que a velocidade produzida por esta proporção, porque nenhuma outra proporção pode ser maior ou menor que aquele caso em que o excesso da potência do motor sobre a do móvel está relacionada à potência do móvel como um todo - como é demonstrado pelo Teorema VII, capítulo I. (*De proportionibus*, cap II, 166-172, p.92-94).[179]

A refutação proposta por Bradwardine pode ser assim compreendida:

a) Supondo que P-R=R (excesso de potência do motor sobre a potência da coisa movida é igual à potência da coisa movida);

b) A segunda teoria pode ser representada com P/R-R/R;

c) Pelo teorema VII, do Cap. I, *De proportionibus*, fica estabelecido que nenhum movimento pode surgir de uma proporção de igualdade;

d) Contudo, a teoria afirma que R/R=V, i.e, produz um excesso de potência do motor sobre a resistência do móvel. Das duas uma: ou a teoria é um contra-senso ou afirma que todo móvel se move sempre com a mesma velocidade, determinada em função de sua potência resistiva, o que é falso.

---

[179] "*Haec autem opinio debet redargui tamquam falsa. Ponatur enim quod excessus potentiae motoris super potentiam rei motae sit aequalis potentiae rei motae.Tunc nullus motor potest movere aliquod móbile velocius tardius illo motu; quia nullius motoris proportio excessus suae potentiae ad potentiam rei motae potest esse maior vel minor (ut per septimam conclusionem primi capituli patet).*"

2.3.2 Segunda Refutação

> Segundo: uma potência motora move um móvel por meio de toda a sua potência, e não por meio de um resíduo dessa força. Um movimento e sua velocidade variam, primeira e essencialmente, com relação ou proporção entre toda a potência do motor e a do móvel, e não de acordo com a proporção do excesso, exceto acidentalmente ou secundariamente. (*De proportionibus*, cap. II, 173-177, p. 94)[180]

Bradwardine não oferece, nesta passagem, uma refutação efetiva, apenas evidencia a incompletude da teoria. É sabido que o motor põe-se a mover o móvel com toda a sua potência e que o móvel resiste também com toda a sua potência, então a velocidade deve resultar da proporção das potências integrais, e não do excesso da potência motora. Do mesmo modo que Bradwardine considera que lançou dúvidas sobre o uso da proporção aritmética para o cálculo da velocidade (Teoria I), agora pretende tê-lo feito para a proporção geométrica como cálculo da velocidade.

2.4 A velocidade como valor relativo (Terceira III)

> Há uma terceira teoria errônea, como segue: (se a potência motora permanecer constante) a proporção das velocidades dos movimentos varia de acordo com a proporção das resistências, e (com a resistência permanecendo constante) varia de acordo com a proporção das potências motoras. (*De Proportionibus*, cap. II, 183-186, p. 94)[181]

---

180 *"Secundo sic: Movens primo movet totum suam potentiam et non per excessum suae potentiae. Igitur motus et velocitas eius primo et essentialiter habitudinem vel proportionem excessus, nisi fuerit accidentaliter et ex consequenti."*

181 *"Sequitur de tertia opinione errônea, quae ponit proportionem velocitatum in motibus (manente eadem motore vel aequqli) sequi proportionem passorum et (manente eodem passo vel aequali) sequi proportionem motoris."*

A terceira teoria pode ser facilmente representada por V=P/R e será rejeitada pela falta de generalidade com que foi enunciada, posto que ou P ou R tem que ser uma constante para que se possa comparar duas velocidades. Assim, para que a fórmula V=P/R esteja correta, deve-se considerar que ou P ou R é uma constante.[182] Deste modo, uma representação mais precisa da teoria[183] seria ou V=P/K ou V=K/R.

2.4.1 Primeira Refutação

> A teoria pode ser refutada, por ser falsa, pois a mesma razão pela qual afirma que uma potência motora pode mover um dado móvel com um certo grau de lentidão, pode também ser a causa de um movimento duas vezes mais lento. De acordo com a teoria, portanto, pode mover o dobro do móvel. E uma vez que pode mover com quatro vezes de lentidão, pode mover quatro vezes o móvel, e assim ao infinito. Dessa maneira, qualquer potência motiva teria uma capacidade infinita. (*De proportionibus*, cap. II, 254-259, p. 98)[184]

A primeira conseqüência falsa que se pode extrair da teoria é que qualquer motor, com qualquer potência, pode mover qualquer resistência. Isto ocorre posto que se V= P/R, então V/2= P/2R e V/n= P/nR. Não importa a grandeza de P, sempre existirá um nR maior e, mesmo assim, P move. Esta situação, em que P não excede R e, mesmo assim move, é

---

[182] "*A teoria é refutável segundo duas argumentações; primeiro, sobre a sua insuficiência, segundo, porque leva a conseqüências falsas*". (*De proportionibus*, cap. II, 248-249)

[183] Para Crosby, a fórmula para o cálculo da velocidade estabelecida por Bradwardine no cap III é uma tentativa de generalização desta terceira teoria. Vide CROSBY. op. cit, p.36.

[184] "*Est autem ista positio ex mendacio arguenda, quia aliqua potentia motiva localiter potest movere aliquot móbile aliqua tarditate, et potest movere dupla tarditate. Ergo (per istam positionem) potest movere duplum mobile. Et potest movere quadrupla tarditate: igitur quadruplum móbile, et sic in infinitum. Igitur quaelibet potentia motiva localiter esset infinita.*"

uma violação do axioma estabelecido por Aristóteles segundo o qual P deve exceder R para produzir movimento; por este motivo, a teoria é falsa.

2.4.2 Segunda Refutação

> Pode-se argumentar de modo semelhante tendo como ponto de partida o móvel, pois qualquer móvel pode ser movido com um certo grau de lentidão, com duas vezes esse grau, com quatro vezes, e assim se segue sem um fim; e, portanto, é [movido] por um certo motor, por sua metade, por seu quarto e assim sucessivamente sem um fim. Deste modo, qualquer móvel pode ser movido por qualquer motor. (*De proportionibus*, cap. II, 260-264, p.98)[185]

A segunda refutação é apenas uma variação da primeira:

a) Teoria III: $V= P/R$;

b) Então: $V/n= P/nR$;

c) Conclui-se falsamente que qualquer móvel pode ser movido por qualquer motor.

2.4.3 Terceira Refutação

> Em terceiro lugar, a presente teoria pode ser refutada posto que a experiência dos sentidos nos mostra o contrário. Podemos ver que se um homem, ao mover um peso, mal consegue fazê-lo com um movimento muito lento, quando um segundo homem junta-se a ele, ambos conseguem mover com uma rapidez maior que o dobro.
>
> O mesmo princípio é válido para o caso de um peso suspenso por um eixo giratório que se move insensivelmente durante o curso de seu próprio insensível movimento descendente (como é o caso dos relógios). Se um relógio de peso igual for acrescentado ao primeiro,

---

[185] "*Similiter autem potest argui de quolibet mobili. Nam quodlibet móbile potest moveri aliqua tarditate et dupla et quadrupla et sic sine statu: igitur ab aliquo motore, et a subduplo, et a sub quádruplo et sic sine fine. Igitur quodlibet móbile a quolibet motore potest moveri.*"

> o todo descerá e o eixo, ou a roldana, mover-se-á com rapidez muito maior que o dobro (como é suficientemente evidente pelos sentidos). (*De proportionibus*, cap. II, 287-297, p. 98)[186]

Nesta terceira refutação Bradwardine apela, pela única vez no texto do *De proportionibus*, de modo elaborado, à experiência comum, i.e, basta ver os pesos de um relógio em funcionamento para perceber que a teoria é falsa.

Bradwardine preocupa-se em esclarecer, no texto sobre a teoria III, que nem Aristóteles nem Averróis, nem o autor de um certo *Tractatus de ponderibus*[187] afirmaram que V=P/R ou que é igual à distância sobre o tempo. Para Bradwardine, os autores apenas afirmaram que a velocidade varia na proporção em que P está para R ou S está para T, o que pode ser compreendido como a sinalização de que esta teoria é o embrião de sua própria teoria. Nesse contexto, encontram-se duas passagens significativas para compreender as fontes da teoria: Averróis e o *De ponderibus*. Sobre Averróis:

> Esta parece ser a interpretação de Averróis (...): 'Quando nós dividimos o movimento (ou a coisa movida), segue necessariamente que a proporção da potência do motor em relação ao movimento (ou à coisa movida) é duas vezes a proporção anterior. Isto, não obstante, poderia ser falso, a menos que seja entendido como previamente

---

[186] "*Tertio est ista positio super mendacio arguenda, quoniam experimentum sensibile docet huius positionis contrarium. Videmus enim quod, uno homine movente aliquod ponderosum (quod potest vix solus movere motu valde tardo) si alius sibi adiungatur, illi duo movent illud multo plus quam in duplo velocius. Et patet manifeste de pondere suspenso ad axem circumvolubilem, quod per suum descensum movet insensibiliter et volvit axem seu rotam motu insensibili (sicut accidit in horologio) ad quod si suspendatur tantum pondus, totum descendet et circumvolvet axem seu rotam multum plus quam in duplo velocius (ut sensui sufficienter constat).*"

[187] Possivelmente Joradnus Nemorarius. Sobre tais especulações vide: GRANT, E. *Oresme's De proportionibus proportionum and Ad pauca respientes,* 1966, p. 22, n. 26.

> indicado, pois embora um certo todo suporte uma certa proporção em relação a um outro todo, disso não segue que suporte uma proporção para a metade do todo, i.e, da metade da proporção original. (*De proportionibus*, cap. II, 328-336, p. 100)

Sobre o *De ponderibus:*

> O teorema do *De ponderibus* deve ser lido do mesmo modo: 'Entre quaisquer corpos pesados, i.e, entre quaisquer corpos pesados a proporção da velocidade descendente e a proporção do peso em relação à resistência são assumidas na mesma ordem." (*De proportionibus*, cap II, 338-341, p. 100-102)

A despeito das fontes medievais, a terceira teoria guarda relações com a passagem da *Física* (VII, 5, 250^{a15-20}, *supra cit*). Para Grant (1966: 19, n. 21), Bradwardine teria distinguido entre os comentários medievais da passagem, que, em sua época, levaram aos equívocos apresentados sob a forma da terceira teoria, e o significado de Aristóteles, que ele acredita ter alcançado ao estabelecer sua própria teoria. A distinção entre os comentários medievais e a recuperação do sentido original que Bradwardine acredita ter empreendido está na prova matemática, ou inexistência dela:

> O autor desta obra [*De ponderius*], contudo, não propôs nenhuma prova para este teorema, e isto pode servir como objeção contra a citada interpretação, pois, do mesmo modo, nenhum dos comentadores prova o teorema, nem aquilo que o teorema sustenta (i.e, que há alguma proporção ou excesso de potência sobre a potência resistiva) e que é, de fato, aquilo que as palavras desse teorema realmente querem dizer. (*De proportionibus*, cap. II, 344-348, p.102)

A "prova" encontrada por Bradwardine, como tratarei no próximo capítulo, torna-se possível pelo uso do conceito de proporção de proporções, desenvolvido ao longo de doze teoremas.

Capítulo IV – A Estrutura da Lei do Movimento

Passo, agora, a analisar o cálculo de Bradwardine tomando como ponto de partida a exposição que fiz da apresentação dos capítulos II e III do *De proportionibus*. Para tanto, divido esta exposição em partes. Primeiro, reafirmo que o cálculo não é visto pelo autor como a instauração de uma nova ciência, mas como a restauração do sentido original de Aristóteles para as passagens da *Física* que tratam da velocidade; introduzo a noção de proporção das proporções como um fator fundamental para o sucesso de Bradwardine. Segundo, exponho os doze teoremas sobre o cálculo do movimento e, discuto a ausência de experiência elaborada no texto. Por fim, procuro mostrar como, a despeito de tencionar um retorno a Aristóteles, o sentido do termo movimento, utilizado por Bradwardine, estabelece um novo problema e uma nova forma de pesquisa. O novo problema e a nova forma de pesquisa, indissociáveis da linguagem das proporções, estão a um passo da fundação de uma nova ciência.

1 O Cálculo de Bradwardine (Teorema I)

Após investigar e rejeitar as quatro teorias, Bradwardine estabelece, logo no início do terceiro capítulo, sua própria solução para o cálculo:

> A proporção das velocidades dos móveis segue a proporção das potências motoras em relação às potências resistivas e vice-versa. Ou, para dizer a mesma coisa em outros termos: as proporções das potências motoras em relação às potências resistivas e as velocidades dos móveis são, nesta mesma ordem, proporcionais e vice-versa. E

isto deve ser compreendido como uma proporção geométrica. (*De proportionibus*, cap. II, 44-50, p.112) [188]

A lei do movimento de Bradwardine tem o mérito de sustentar-se aonde todas as outras não obtiveram êxito, i.e, sobreviver as objeções que afirmam que o cálculo não funciona se a operação for invertida, uma vez que, neste caso, qualquer corpo, não importando a grandeza, poderia ser movido por qualquer potência, não importando quão pequena fosse. Até a lei de Bradwardine, apenas um corte arbitrário poderia dar conta desse tipo de objeção, como negar que um movimento reverso pudesse ocorrer. Bradwardine dá conta da objeção pela reinterpretação da passagem de Aristóteles. Assim, se "dividir por dois" significar a obtenção do meio geométrico entre a potência e a resistência por um lado e a unidade por outro, então não restará excesso de P sobre R, não importanto se se divide P pela metade ou dobra-se R. É o que o cálculo de Bradwardine permite realizar. Suas notações mais comuns são: n^v=P/R ou V=$\log_n$(P/R) ou ainda $P_2/R_2=(P_1/R_1)^{V2/V1}$.

Os teoremas (e exemplos) que se seguem são um esforço para esclarecer que as velocidades variam aritmeticamente quando a relação de proporção entre potência motora e potência resistiva variam geometricamente: se uma certa proporção da potência motora em relação à resistência produz uma certa velocidade, então, quando a proporção é elevada ao quadrado, a velocidade dobrará; se a proporção for elevada ao cubo, a velocidade triplicará, e assim sucessivamente.

---

[188] "*Proportio velocitatum in motibus sequitur proportionem potentiarum moventium ad potentias resistivas, et etiam econtrario. Vel sic sub aliis verbis, edem sententia remanente: proportiones potebtiarum moventium ad potentias resitivas et velocitates in motibus, eodem ordine proportionales existunt, et similiter econtrario. Et hoc geometrica proportionalitate intelligas*".

Contudo, há uma restrição no modo como devemos olhar para a representação da lei do movimento. Os capítulos II e III do *De proportionibus,* dão a entender que Bradwardine não trabalhou com a noção de números reais, mas com uma concepção limitada a dobrar ou dividir pela metada as velocidades, e obter múltiplos inteiros positivos e repetidas raízes quadradas de proporções numéricas. Assim, quando dizemos "ao quadrado", lê-se "o dobro", quando dizemos "raiz quadrada", lê-se "subdobro".[189]

Com o auxílio da linguagem sistematizada por Boécio[190], Bradwardine dá uma solução aparentemente simples para o cálculo da velocidade: o aumento ou a redução das proporções ocorre, respectivamente, pela multiplicação ou divisão, para usar termos contemporâneos. Deste modo, para aumentar a proporção 3 por 1 ao seu dobro, basta multiplicá-la por si mesma, de modo a se obter 9 para 1; para reduzir a proporção 16 por 1 pela metade, basta dividi-la pela sua metade (4/1).

Estes dois exemplos supra citados tratam de proporções iguais, cuja divisão ou multiplicação produzem uma outra proporção com números inteiros. No entanto, Bradwardine também tem meios para lidar com proporções desiguais. Para aumentar a proporção 3 por 2 em 2 por 1, deve-se multiplicá-la por 4 por 3, o que resulta em 12 por 6 que é igual 2 por 1. O modo como Bradwardine aumenta e reduz proporções é o mesmo

---

[189] "*Eu sugiro que o propósito específico de Bradwardine era justificar matematicamente uma proposição específica de Aristóteles, e que a fonte para esta solução não requer mais explicações do que a existência, na teoria medieval das proporções, de dois sentidos da palavra 'dobrado', um que era aplicado a quantidade e outro a proporção*" (Drake, 1973: 74).

[190] Vide *De proportionibus*, cap. I.

que Boécio utilizou para tratar da harmonia.[191] As proporções desiguais são particularmente abundantes na teoria musical, como, por exemplo, quando se pretende acrescentar um diatessaron (1/4) ao diapente (1/5) para se obter o diapasão (1/8), como ficou claro na análise da terceira teoria.

O termo utilizado por Boécio para nomear a adição e a subtração de proporções é "composição." Assim, compor uma proporção significativa, por exemplo, somar (*additur*) a proporção 9/8 à proporção 4/3, obtendo-se a proporção 36/24, que é igual à proporção 3/2; ou então subtrair (*subtrahatur*), por exemplo, a proporção 9/8 da proporção 36/24, dir-se-ia que é composta por (*componitur ex*) 9/8 e 4/3. Contemporaneamente: (4/3).(9/8)=36/24= 3/2. Deste modo, sendo Bradwardine versado na composição de proporções da teoria musical de Boécio e preocupado com as relações expressas no capítulo 5 do livro VII da *Física* de Aristóteles sobre velocidade, potência motora e potência resistiva, convicto de que a velocidade varia na relação destas potências, parece ter obtido a solução mais óbvia para o cálculo.

De acordo com a terceira teoria, quando a velocidade varia inversamente proporcional a resistência, a potência motora é uma constante, e quando a velocidade varia diretamente proporcional à potência motora a resistência é constante. A inovação introduzida pelo autor supera esta divisão com o auxílio da composição de proporções. Cabe, entretanto, uma ressalva. Bradwardine foi o primeiro a se valer da composição para abordar aspectos da filosofia da natureza, mas não foi o primeiro a propor a composição

---

[191] BOÉCIO. *De institutione musica,* 1867.

proporcional de elementos naturais, uma vez que a elaboração de medicamentos utilizava-se desse procedimento.[192]

O cálculo da velocidade dos móveis em movimento local é apresentado no capítulo III do *De proportionibus*. É a última de cinco teorias sobre a velocidade apresentadas pelo autor. As primeiras quatro teorias, como vimos, não tiveram sucesso em demonstrar que há proporção entre as velocidades dos móveis em movimento local. Resta apenas uma teoria a ser analisada, a quinta, apresentada no III capítulo sob a forma de doze teoremas, 2 axiomas e 2 corolários. Segundo Bradwardine, o leitor que o acompanhou, aprendeu a linguagem das proporções e pode compreender os erros das quatro teorias abordadas: "*Agora que estas névoas da ignorância os ventos da demonstração puseram a voar, a luz do conhecimento e da verdade pode brilhar*" (*De proportionibus* cap. III, §1-2). A quinta teoria é, sem mais demora, apresentada logo no início do capitulo:

> Agora que testas névoas da ignorância os ventos da demonstração puseram a voar, a luz do conhecimento e da verdade pode brilhar. Pois o conhecimento verdadeiro propõe uma quinta teoria que afirma que a proporção das velocidades dos movimentos varia em acordo com a potência motora e a potência da coisa movida. (*De proportionibus* III, 2-5, p. 110) [193]

---

[192] Vide MURDOCH, J; SYLLA, E. The science of motion. In: LINDBERG, D. (Ed.). *Science in the Middle Ages*, 1978, pp. 226 e 258, n. 67.

[193] "*His igitur ignorantiae nebulis demonstrationum flatibus effugatis, superest ut lumen scientiae resplendeat veritatis. Scientia autem veritatis ponit quintam opinionem, dicentem quod proportio velocitatum in motibus sequitur proportionem potentiae motoris ad potentiam rei motae.*"

Feito o enunciado, Bradwardine apressa-se em esclarecer que esta é a verdadeira teoria de Aristóteles, como atesta Averróis nos comentários 71 (*Física* IV), 36 (*De caelo* II) e 35 (*Física* VII) que Bradwardine faz questão de transcrever no início do III capítulo:

> É universalmente manifesto que a causa da diversidade e da igualdade do movimento é a igualdade e a diversidade da proporção do motor com a coisa movida. Deste modo, se há dois motores e duas coisas movidas, e as proporções entre estes motores e as duas coisas movidas respectivamente forem iguais, então os dois movimentos têm velocidades iguais. Se a proporção varia, o movimento também varia naquela mesma proporção. (Comentário 71. In: *De proportionibus* III, 7-13)[194]

Bradwardine complementa a citação com um trecho descontinuado do comentário: "*A diferença entre movimentos no que concerne à lentidão e a rapidez varia de acordo com a proporção entre duas potências (a saber, motiva e resistiva)*" (*De proportionibus* III, 14-16)[195]. Segue-se o comentário ao *De caelo*:

> Rapidez e lentidão não ocorrem por outro motivo que não seja a proporção da potência do motor em relação à potência da coisa movida. Por conseqüência, quanto maior for a proporção, mais rapidez terá o movimento; e quanto menor for a proporção, mais

---

[194] "*Universaliter manifestum est quod causa diversitatis et aequalitatis motuum est aequalitas et diversitas proportionis motoris ad rem motam. Cum igitur fuerit duo motores et duo mota, et proportio alterius motoris ad alterum motum fuerit sicut proportio reliqui ad reliquum motum, tunc duo motus erunt aequales in velocitate; etc um diversatur proportio, diversabitur motus secundum istam proportionem.*"

[195] "*'Diversitas motuum in velocitate et tarditate est secundum hanc proportionem quae est inter duas potentias' (scilicet motivas et resistivas).*"

> lentidão terá o movimento. (Comentário 36. In: *De proportionibus.* III, 17-21)[196]

Por último, Bradwardine cita Averróis como chancela para a afirmação de que o dobro da proporção do motor em relação ao móvel dobra a velocidade do movimento:

> Se nós dividirmos o móvel em dois, será necessário que a proporção da potência do motor em relação ao móvel seja o dobro da proporção anterior, e então a velocidade será o dobro do que era antes. (*De proportionibus* III, 22-26)[197]

O suporte textual de Averróis não deve, contudo, ser confundido com um argumento de autoridade. Os textos transcritos são perfeitamente dispensáveis para a demonstração geométrica que se segue. Sua inclusão no início do III capítulo, antes da argumentação propriamente dita, dá-se em virtude da prentensão de Bradwardine, anunciada no proêmio da obra, em firmar-se como restaurador da Filosofia Natural de Aristóteles. Averróis é apresentado como o intermediário que permite ao leitor relacionar Bradwardine a Aristoteles:

> Com respeito ao mesmo assunto, ambos, Aristóteles e Averróis, (como é evidente no terceiro argumento contra a primeira teoria) expressaram, em muitas passagens, a opinião segundo a qual, de uma

---

[196] "*Velocitas enim et tarditas non fit nisi secundum proportionem potentiae motoris ad potentiam rei motae; quanto igitur proportio maior, tanto magis motus erit velocior; et quanto proportio minor, tanto motus erit tardior.*"

[197] "*Cum diviserimus motum contingit necessário ut proportio potentiae motoris ad motum sit dupla istius proportionis, et sic velocitas dupla ad istam velocitatem.*"

> igualdade de proporção entre o motor e o móvel, segue a igualdade de velocidade. (*De proportionibus* III, 31-33)[198]

O uso da matemática no cálculo do movimento, desse modo, não tem o objetivo de fundar uma nova ciência, mas precisamente resgatar o sentido de Aristóteles para a velocidade, livrando-o dos equívocos do aristotelismo. Após as considerações iniciais, Bradwardine enumera e explica os 11 teoremas que, ao final da apresentação permitem compreender as dificuldades de implementação de um cálculo para todo tipo de movimento.

1.1 Teorema II

> Se a proporção da potência do motor em relação a do móvel for de dois para um, o dobro da potência motora moverá o mesmo móvel exatamente duas vezes mais rápido. (*De proportionibus* III, 51-53, p. 112)[199]

Crosby (1955: 32) faz acompanhar sua tradução do teorema II pela representação P/R=V, o que é a terceira teoria equivocada.[200] Não é o caso, conforme a prova apresentada por Bradwadine esclarece:

> Isto pode ser demonstrado por meio de um exemplo: considere a potência motiva A duas vezes a potência resistiva B, considere também que a potência motiva C seja duas vezes A. Então (segundo

---

[198] "*Ad idem Aritoteles et Averroes (ut patet tertio argumento contra primam opinionem) volunt multis locis quod aequalitatem proportionis motoris ad motum sequitur aequalis velocitas motuum*".

[199] "*Si potentiae moventis ad potentiam sui moti sit dupla proportio, potentia motiva geminata movebit idem motum praecise in duplo velocius.*"

[200] Vide o capítulo anterior desta tese.

> o teorema I do capítulo I), a proporção de C para B é exatamente o dobro de A para B. Deste modo, (segundo o teorema precedente), C moverá B exatamente duas vezes mais rápido que A, como queríamos demonstrar. (*De proportionibus* III, 54-59, p. 112)[201]

Ou seja:

- Assuma: P=2R e P'=2P;
- Teorema I do cap. I: $P'/R=(P/R)^2$;
- Logo, se P/R=V, então P'/R=2P/R=2V.

Não se deve compreender que Bradwardine assumiu a teoria III. Ocorre que o resultado da teoria III coincide com o resultado da teoria de Bradwardine.[202]

1.2 Teorema III

> Se a proporção da potência do motor em relação a do móvel é de dois para um, a mesma potência moverá metade do móvel com exatamente o dobro da velocidade. O que pode ser demonstrado por um argumento semelhante ao do Teorema II (*De proportionibus* III, 60-63, p. 112). [203]

Formalizando: se P=2R, então P/ (1/2R)=2V.

---

[201] "*Hanc ostensive demonstres. Sit enim A potentia motiva dupla ipsius B potentiae resistivae, et sit C potentia motiva dupla ipsius A. Tunc (per primam conclusionem primi capituli) proportio C ad B est praecise dupla ad proportionem A ad B. Igitur (per proximam) C movebit B praecise in duplo velocius quam A moveat B. Et hoc est propositum.*"

[202] Como mostrari mais adiante, este é o único caso de coincidência.

[203] "*Si potentiae moventis ad potentiam sui moti sit dupla proportio, eadem potentia movebit medietatem eiusdem moti velocitate praecise duplata. Hanc, ut proximam, rationaliter demonstrabis.*"

O grupo dos três primeiros teoremas está assentado em Aristóteles:

> Se, então, A é o motor, B o móvel, C a distância percorrida e D o tempo, então no mesmo tempo a mesma potência A moverá metade de B duas vezes a distância C, e na metade de D moverá a metade de B por toda a distância C; pois para este assunto as regras da proporção devem ser observadas. (*Física* VII, $250^{2\text{-}4}$)

No *De caelo*, substituindo resistência por peso, encontra-se a seguinte passagem: "*Por exemplo, se um peso é o dobro de outro, percorrerá metade de um dado movimento*" (*De caelo* I, 6, $274^{a1\text{-}3}$). Nas duas passagens, a velocidade varia de acordo com a relação das potências motora e resistiva, de modo que do dobro da potência motora resulta o dobro da velocidade, dada uma mesma potência resistiva.

Os teoremas II e III têm por objetivo mostrar a reversibilidade da relação de proporções afirmada no teorema I, o que era uma forte objeção lançada ao uso da proporção aritmética pela teoria I.

1.3 Teorema IV

> Se a proporção da potência do motor em relação à potência do móvel é maior que dois para um, quando a potência motora é duplicada o movimento não alcançará duas vezes a velocidade (*De proportionibus* III, 64-66, p . 112).[204]

---

[204] "*Si potentiae moventis ad potentiam sui moti sit maior quam dupla proportio, potentia motiva geminata motus eiusdem duplam velocitatem nequaquam attinget. Hoc per quartam primi capitulu et per primam tertii concluditur ostensive.*"

Formalizando: $P_2/R_2<(P_1/R_1)^2$, se $P_2=2P_1$, então $V_2<2V_1$.[205]

1.4 Teorema V

> Se a proporção da potência do motor em relação a do móvel é menor que dois para um, quando a resistência do móvel é reduzida à metade o movimento não dobrará a velocidade. (*De proportionibus* III, 68-70, p. 112)[206]

Formalizando: Considerndo $P_2/R_2>(P_1/R_1)^2$, se $R_2/2=R_1$, então $V_2<2V_1$.[207]

1.5 Teorema VI

> Se a proporção da potência do motor em relação a do móvel é menor que dois para um, quando a potência motora deste móvel dobrar, a velocidade aumentará mais que duas vezes em relação ao que era antes. (*De proportionibus* III, 71-74: 112)[208]

Formalizando: $P_2/R_2>(P_1/R_1)^2$, se $P_2=2P_1$, então $V_2>2V_1$.[209]

---

[205] Novamente Crosby (1955: 39) se equivoca na formalização: se $P/R > 2/1$, então $2P/R < 2V$. Como já fizera no teorema I, Crosby supõe que Bradwardine faz uso da terceira teoria $P/R=V$. Porém, se este fosse o caso, o resultado da formalização do teorema IV deveria ser: $2P/R=V$.

[206] "*Si potentiae moventis ad potentiam sui moti sit maior quam dupla proportio, eadem potentia movente medietatem eiusdem moti, velocitas motus nullatenus fiet dupla.*"

[207] Crosby, equivocadamente: "se $P/R< 2/1$, então $P/ (1/2)R<2V$."

[208] "*Si potentiae moventis ad potentiam sui moti sit minor quam dupla proportio, dupla potentia movente idem motum, motus ultra duplum velocitatem excrescet.*"

[209] Novamente, a formalização de Crosby (se $P/R < 2/1$, então $2P/R>2V$) é equivocada por confundir a teoria de Bradwardine com a teoria III.

Este teorema relaciona-se com o argumento sobre o homem que empurra pesos, enunciado por Bradwardine no capítulo II do *De proportionibus*. Se um homem mal consegue mover um determinado peso, dois homens podem movê-lo com rapidez maior que duas vezes a anterior. A potência motora deste homem não é duas vezes a potência resistiva do móvel. Quando um outro homem, com a mesma potência motora do primeiro, ajuda a mover o peso, ambos vencerão a resistência com mais que o dobro da velocidade. Porém, se o primeiro homem puder mover o peso com facilidade, o auxílio de um segundo homem não fará dobrar a velocidade do movimento.

1.6 Teorema VII

> Se a proporção da potência do motor em relação a do móvel é menor que dois para um, quando o mesmo motor mover metade do móvel, a velocidade do movimento será mais que dobrada (*De proportionibus* III, 76-79, p. 112).[210]

Formalizando: $P_2/R_2>(P_1/R_1)^2$, se $R_2=(R_1/2)$, então $V_2>2V_1$.[211]

1.7 Teorema VIII

> Nenhum movimento é possível, seja de uma proporção de igualdade ou de menor desigualdade entre o motor e o móvel. (*De proportionibus* III, 80-81, p. 114).[212]

---

[210] "*Si fuerit potentiae moventis ad potentiam sui moti minor quam dupla proportio, eadem potentia movente meditatem eiusdem moti, motus ultra duplam velocitatem transibit.*"

[211] Crosby: se $P/R < 2/1$, então $P/(1/2)R > 2V$.

[212] "*Ex nulla proportione aequalitatis vel minoris inaequalitatis motoris ad motum sequitur ullus motus.*"

Formalizando: se $P/R = 1/1^x$, então o cálculo segundo o teorema I levará a $V=0$.

Este teorema vem acompanhado do Axioma I: "*Todo movimento da mesma espécie pode ser comparado com outro no que dizer respeito à lentidão e a rapidez*" (*De proportionibus* III, 83-85).[213]

1.8 Teorema IX

> Todo movimento é produzido por uma proporção de maior desigualdade, e de uma proporção de maior desigualdade surge o movimento. (*De proportionibus* III, 86-87)[214]

Formalizando: se $P/R=1^x/1$, então o cálculo segundo o teorema I levará a $V>0$.

Este teorema é um desdobramento do anterior: eliminadas as possibilidades elencadas em VIII e considerando o teorema I, a única possibilidade de movimento é a apresentada em IX. O teorema deixa claro que basta P ser maior que R para que seja produzido movimento.

---

[213] Crosby tece o seguinte comentário sobre a prova deste teorema: "*Desde que, a fortiori, há uma descontinuidade essencial entre proporções de maior e menor desigualdade, e dados os axiomas segundo os quais os movimentos são relacionáveis por uma proporção, e que movimentos surgem de proporções de maior desigualdade, por conseguinte, uma vez que se suponha algum movimento de uma proporção de menor desigualdade, este não poderá ser relacionado com um outro de uma proporção de maior desigualdade; motivo pelo qual é impossível que exista tal movimento*" (1955: 40).

[214] "*Omnis motus ex proportione maioris inaequalitatis producitur, et ex omni proportione maioris inaequalitatis fieri potest motus.*"

1.9 Teorema X

> Dado um movimento qualquer, é possível encontrar um movimento duas vezes mais rápido e um duas vezes mais lento. (*De proportionibus* III, 92-93, p. 114)[215]

Formalizando: para qualquer valor V, é possível encontrar proporções de P em relação a R que permita 2V e ½ V. Este teorema evidencia o tipo de relação que há entre a velocidade e a proporção de P para R: o dobro da velocidade pode ser obtido elevando-se P/R ao quadrado e, inversamente, a metade da velocidade pode ser obtida extraindo-se a raiz de P/R.

1.10 Teorema XI

> Um mesmo objeto pode cair, no mesmo meio, rápida ou lentamente, ou ainda de modo similar a outro objeto mais leve. (*De proportionibus* III, 98-99, p. 114)[216]

Com este teorema, Bradwardine, deixa claro que considera que há uma resistência do meio e uma resistência intrínseca, no objeto. Esta resistência intrínseca deve ser considerada quando o móvel for um corpo misto, i.e, composto de partes leves e pesadas. O teorema indica que mesmo nestes casos, a velocidade continua a ser obtida da proporção da

---

[215] "*Quocumque motu dato, potest motus in duplo velocior et motus in duplo tardior inveniri.*"

[216] "*Quantumcumque gravius alio in eodem médio tardius et velocius illo et aequali velocitate potest descendere.*"

potência motora para a potência resistiva, que passa a ser compreendida como R+r (resistência do meio + resistência intrínseca). Para efeito de cálculo, a resistência do meio é considerada como parte da potência resistiva, portanto "interna" e, excetuando as passagens referentes a este teorema, a resistência do meio não aparece mais no texto. Bradwardine a introduz para dar prova do teorema:

> Considere, por exemplo, que A representa um corpo misto pesado, composto por leve e pesado, e possuidor de um certo peso, e considere ainda B como um corpo pesado puro, tão pequeno quanto desejares. Agora considere um meio rarefeito em que B exerce sobre ele uma proporção igual ou maior que aquela da gravidade sobre a leveza em A. Então, assuma que ambos estão localizados no mesmo meio. A gravidade de A agora estará em uma proporção menor em relação a sua resistência total, intrínseca e extrínseca, do que B está para sua resistência. Desse modo, pelo teorema I do capítulo III, A move-se mais vagarosamente que B. (*De proportionibus* III, 100-120, p. 114)[217]

Da prova apresentada, segue o Corolário I:

> É manifesto, pelo que foi dito acima, que a rapidez e a lentidão de um corpo puro e a lentidão de um corpo misturado podem ser dobradas indefinidamente, mas a rapidez de um corpo misto pode

[217] *"Sit enim A grave mixtum ex gravi et levi quantum habens pondus, et B grave simplex ita parvi ponderis ut desideras. Et subtilietur aliquod medium donec B habeat ad illud aequalem proportionem proportioni gravitatis A ad levitatem in eo, vel maiorem; et ponantur ambo in illo medio. Tunc gravitas A habet minorem proportionem ad totam suam resistentiam intrinsecam et extrinsecam quam B habeat ad suam resistentiam. Igitur (per primam tertii) A tardius movetur quam B."*

não ser dobrada pela rarefação do meio. (*De proportionibus* III, 121-126, p. 114)[218]

O corolário é evidente pelo que foi enunciado na prova, uma vez que o corpo misto possui uma resistência intrínseca. A novidade do corolário fica por conta da noção de "corpo misto", embora nenhum esclarecimento sobre a natureza desse corpo tenha sido feita. Não temos como saber se corpos mistos são homogêneos ou um aglomerado artificial de dois corpos contingencialmente unidos, facilmente discerníveis enquanto dois ou mais corpos distintos. Como os demais, os corpos mistos possuem uma potência resistiva ou resistência intrínseca. Todavia não é o caso de se perguntar sobre a relação entre a natureza mista do corpo e a noção intrínseca de resistência. O que recebe o nome de "resistência" em uma dada situação pode muito bem, em um outro caso, vir a receber o nome de potência motora. Se um corpo misto é formado por elementos que, em uma dada posição, possuem um movimento natural contrário à potência motora, então há resistência, expressa pela seguinte modificação do teorema I: $n^v=P/(r)$. Porém o mesmo corpo pode posicionar-se de tal maneira que o movimento natural de seus componentes atuem no mesmo sentido e direção que a potência motora, caso em que a fórmula alterar-se-ia para $n^v=(P+p)/R$.

1.11 Teorema XII

> Todo corpo misto de uma composição similar mover-se-á com igual velocidade no vácuo. (*De proportionibus* III, 126-127, p. 116)[219]

---

218 "*Unde manifestum est quod cuiuslibet gravis simplicis quaelibet velocitas et tarditas, et cuiuslibet gravis mixti quaelibet tarditas, per subtiliationem et condensationem medii, in infinitum poterit duplicari; necnon quod cuiuslibet gravis mixti quaelibet velocitas per subtiliationem medii geminari non potest.*"

Não se deve considerar que este teorema postule a existência do vazio. O vazio é tomado por hipótese com o intuito de esclarecer a relação das potências motora e resistiva intrínseca, bem como serve para afirmar que dois corpos cuja relação entre as potências for de igual proporção, terão a mesma velocidade.

Ao teorema, Bradwardine agrega o corolário II: "*Se dois corpos desigualmente pesados, mas de composição semelhante, estiverem suspensos no vácuo, o mais pesado cairá*" (*De proportionibus* III, 131-133, p. 116)[220]. O corolário estabelece um vínculo entre a teoria das velocidades e a teoria dos pesos. Novamente, supondo o vácuo com o intuito de eliminar do cálculo a resistência do meio, Bradwardine afirma que o corpo mais pesado cairá, i.e, movimentar-se-á; deste modo, peso e velocidade passam a ter relação.

Os corpos são apresentados como "suspensos", ao invés de "soltos", o que se assemelha à situação de dois pesos em lados opostos de uma balança, de modo que a potência motora de um corpo é somada à potência resistiva do outro. A explicação deste tipo de movimento só é possível graças à universalidade da fórmula do cálculo da velocidade de Bradwardine que, trabalhada ao longo dos doze teoremas, considera o movimento como o resultado da oposição de potências, não importando para o cálculo as causas de tais potências. A própria nomenclatura que as potências recebem não designam suas naturezas; ou seja, o que é potência motora em uma circunstância pode, em outra, se

---

[219] "*Omnia mixta compositionis consimilis aequali velocitate in vacuo movebuntur.*"

[220] "*Ex hoc quoque scies quod, si duo gravia mixta inaequalia, compositionis consimilis, in vacuo suspendatur, gravius declinabit.*"

constituir em resistência para o movimento e, em um terceiro caso, não ter influência nenhuma na velocidade. É bem verdade que esta relativização da noção de potência é precária e ocorre intermediada por um vocabulário aristotélico — como é o caso da noção de corpos mistos, i.e, aqueles compostos do leve e do pesado.

2 Objeção

A segunda parte do capítulo III apresenta três objeções, das quais me interessa expor a segunda,[221] que trata do seguinte argumento: se velocidades iguais são produzidas por proporções de potência iguais, então uma grande quantidade de terra possui a mesma

---

[221] No texto, Bradwardine anuncia três objeções. A primeira delas, no entanto, consiste apenas na alegação de que tudo o que foi dito contra as teorias equívocas também pode ser dito contra a teoria de Bradwardine. Ao que o autor simplesmente responde que isto já foi tratado pelos teoremas (*De proportionibus* III, 141-145, p. 116). A terceira não traz maiores problemas para o cálculo das velocidades, mas evidencia a preocupação de Bradwardine em construir uma teoria universalizante, i.e., que valha para todo tipo de movimento. Assim, também se coloca como problema o movimento resultante da interação entre um imã e um pedaço de metal. Bradwardine ataca a afirmação de que uma pequena peça de metal pode ser movida por um imã com mais rapidez que uma grande: "*Um imã pode mover, em sua direção, uma pequena peça de metal com maior rapidez que uma grande. [Acredita-se que isto ocorre em virtude] da potência do magneto exceder em grande proporção [a potência da] pequena peça*" — *tunc magnes velocius ferrum parvum traheret quam magnum; habet enim maiorem proportionem ad illud* (*De proportionibus* III, 242-244, p. 120). Isto é falso, segundo o autor, uma vez que uma peça qualquer de metal, aderida a um imã, pode deslocar-se em qualquer velocidade que o imã também se desloque. Chega-se à conclusão que, neste caso, a velocidade não é obtida em função da relação de proporção entre as potências do magneto e do metal, mas em função da relação entre a potência motora do que move o magneto e o que obstrui o movimento do metal.

proporção para uma grande quantidade de ar que uma pequena quantidade de terra possui para uma pequena quantidade de ar, de modo que as duas quantidades de terra atravessam os respectivos ares com a mesma velocidade. Porém isto não pode ocorrer, posto que a grande quantidade de terra necessita de uma velocidade maior para atravessar uma maior quantidade de ar no mesmo tempo em que a quantidade de terra pequena atravessa uma quantidade de ar pequena, como a seguir:

> Por exemplo, assuma A e B como duas quantidades desiguais de terra pura, sendo A maior e B menor; e assuma que C e D são duas quantidades desiguais, mas uniformes, de ar, igualmente proporcionais a A e B, C sendo a maior e D a menor. Em sua queda, A divide C e B divide D. Agora, estes corpos em queda ou ocupam tempos iguais ou não. Se ocupam, então A cai mais rápido que B, uma vez que atravessa uma distância maior em um mesmo período de tempo. Esta é a primeira inconsistência. Por outro lado, com a proporção de B para D permanecendo constante, assuma que a proporção de A para C diminui até que finalmente A mova-se a mesma velocidade que B. Esta é a segunda inconsistência. Seguindo por uma outra direção, assuma que a proporção de A para C aumente um pouco, mas não o suficiente para tornar-se igual a proporção entre B e D. Agora, A cai mais rapidamente que no segundo caso e, por este motivo, mais rápido que B. Esta é a terceira inconsistência." (*De proportionibus* III, 153-164, p . 116)[222]

Trata-se de uma retomada da relação que Aristóteles estabelece entre o peso do corpo e sua velocidade em queda livre:

---

[222] "*Sit enim A et B dua terrae purae inaequales, A maior, B minor; et sint C et D duo aeres inaequales uniformes proportionales A et B, et C maior, D minor. Et A per suum descensum, dividit C, B vero D. Vel ergo istae divisiones sunt aequales secundum tempus vel non. Sic, igitur dividit et movetur velocius B; pertransit enim maius spatium in aequali tempore. Et sic patet primum. Iterum, manente proportione B ad D, minoretur proportio A ad C donec Movetur aequevelociter cum B: et tunc patet secundum. Rursus maioretur etiam econtra modicum proportion A ad C, non tamen ad aequalitatem proportionis B ad D Tunc A dividit et movetur velocius quam in secundo casu. Igitur velocius quam B; et sic sequitur tertium.*"

> Nós vemos o mesmo peso ou corpo mover-se mais rapidamente que outro por duas proporções, pela diferença daquilo no qual se move, se entre a água, o ar ou a terra, ou porque, estas coisas sendo as mesmas, o móvel difere-se de outro por possuir um excesso de peso ou de leveza. (*Física* IV, 3, $215^{a25\text{-}28}$)

Bradwardine aplica seu cálculo do movimento a distinção entre proporcionalidade qualitativa e quantitativa. A proporcionalidade qualitativa nos informa que cada parte do corpo move-se com a mesma proporção contra cada parte de resistência do meio: deste modo determina-se à velocidade qualitativa, que é a mesma para qualquer tamanho do corpo formado pela mesma substância:

> ...não é inconsistente que uma certa potência tenha a mesma proporção qualitativa (no que diz respeito a capacidade de agir), seja no todo ou em parte, muito embora isto não ocorra quantitativamente. Mesmo que o todo e a parte sejam diferentes em quantidade, possuem a mesma capacidade de resistir; e não diferem na qualidade, mas somente na quantidade da resistência; deste modo, o movimento para percorre o meio não difere em qualidade (i.e, rapidez ou lentidão), mas em quantidade (isto é, na longevidade ou brevidade do tempo). (*De proportionibus* III, 190-197, p. 118)[223]

Quantitativamente, contudo, a proporção ocorre pela comparação dos tempos de execução dos movimentos: "*da proporção quantitativa corresponde a igualdade*

---

[223] "*...non esse inconveniens idem habere eandem proportionem qualitative (scilicet in virtute agendi) ad totum et ad partem sed quantitative non; quia licet totum et pars sint inaequalia in quantitate, possunt tamen esse aequalia in qualitate resistendi. Et ideo sicut non differunt in qualitate resistendi sed in quantitate, sic nec motus per media differeunt in qualitate motus (quae est velocitas et tarditas) sed in quantitate motus (quae est longitudo vel brevitas temporis).*"

quantitativa de movimentos, i.e, igualdade com respeito a longevidade ou brevidade temporal do movimento" (*De proportionibus* III, 202-205, p. 118)[224].

Nada mais é dito sobre velocidade quantitativa e qualitativa, nem mesmo sobre a compatibilidade destes cálculos com o teorema I. Nenhuma prova é dada sobre corpos de mesma substância, mas diferentes quantidades, caírem com uma mesma velocidade, talvez pela ausência de um método exeperimental.

3 Ambivalência Conceitual e Ausência da Experiência

Ao longo dos teoremas, muitas vezes Bradwardine faz uso da expressão "*experimentum sensibile*" para exemplificar ou mesmo para encerrar uma discussão. Como afirmei na introdução desta tese, o uso que faço do termo ciência é limitado ao estudo do movimento local, que no século XVII caracterizou-se pela formalização matemática de leis que explicavam a queda dos corpos, bem como se caracterizou pela medida e determinação experimental da correspondência da lei matematizada com a realidade. Nesse contexto qualquer relação que um historiador pretenda efetura entre a ciência de Bradwardine e aquela do século XVII recai sobre dois pontos, a saber, a análise do movimento e sua respectiva verificação experimental.

Até agora tratei da análise matemática. Cabe, entretanto, abordar o problema da experimentação e medição. A ausência[225] de um componente experimental claro e evidente

---

[224] "*...et ex tali proportionalitate sequitur aequalitas motuum correspondenter (videlicet quantitative), et hoc est in longitudine et brevitate temporali motus*".

no texto deve-se a ambivalência[226] com que Bradwardine trata o conceito de movimento, que resulta da fusão de elementos do aristotelismo com elementos matemáticos que lhe são estranhos, tendo como resultado uma alteração na noção de problema e objetivo da ciência.

Bradwardine define a si mesmo como um aristotélico, uma vez que, como procurei monstrar, seu interesse original era recuperar o sentido do texto da *Física* em seu tratamento do moviento. Porém, ao definir o movimento, Bradwardine se afasta de Aristóteles. Este afastamento é o resultado contraditório da tentativa de recuperação do sentido original do texto, que requereu alterações substanciais no tratamento matemático da lei exposta na *Física*. A alteração resulta da impossibilidade que Bradwardine tem em continuar trabalhando o movimento como uma passagem do ato para a potência e vice-versa, uma vez que necessita tratá-lo como uma proporção. Detalhei a ocorrência dessa transição nos capítulos I e II que podem ser sintetizados nos seguintes passos:

1. Bradwardine rejeita os princípios que condicionam a proporção como uma relação de entidades do mesmo tipo;

---

[225] Wallace chegou a sugerir que o texto de Bradwardine deve ser compreendido como fonte primeira da experimentação e da medição, embora tais componentes, ao contrário da matemática, não sejam evidentes. Não me interessa discutir a tese de Wallace de que os mertorianos seriam a fonte primeira da experiência dos autores do século XVII, mas a análise que o comentador faz do conceito de movimento em Bradwardine, precisamente ao tratar da ausência clara no texto de processos de medição (WALLACE, W. Mechanics from Bradwardine to Galileu, 1971, p. 15-28).

[226] Retomo a hipótese que lancei na Introdução desta tese, sobre a tensão existente no interior da obra de Bradwardine, entre seu compromisso com Aristóteles e a aplicação da linguagem das proporções à Filosofia da Natureza.

2. Este abandono fica evidente nas tentativas de associação do movimento contínuo ou sucessivo a uma ou outra categoria, como a *passio* ou o *ubi*;
3. Na medida em que se procurou efetivar esta associação, também se deu a discussão sobre se o movimento poderia ser compreendido como uma *forma fluens* ou um *fluxus formae*;
4. Ao fim da discussão, a atenção voltou-se para o caráter relativo do movimento, o que possibilita sua compreensão como um *ens rationis*;
5. Como a categoria da relação é aquela em que se encontra a proporção, está dada a possibilidade para se compreender o movimento como uma relação de proporção.

No *De proportionibus*, o movimento e a velocidade são tomados um pelo outro. Assim, o movimento passa a ser definido pela proporção da distância atravessada em um dado tempo, o que permite o abandono de qualquer questão acerca da existência física do movimento. Excetuando o termo "movimento", prefeitamente substituído pelo termo "velocidade", nada mais resta, exceto a própria coisa movida. Muito embora Bradwardine cite a passagem da *Física* sobre as proporções das velocidades, não há menção sobre a distinção entre movimento natural e movimento violento, que poderia encetar a discussão sobre um movimento que não fosse velocidade da coisa movida.

Neste contexto, a ambivalência de Bradwardine se manisfesta em sua distinção quanto a dois estudos do movimento, um do ponto de vista das causas ou da produção, e um outro estudo do ponto de vista dos efeitos ou do que é próprio do movimento, i.e, à distância percorrida e o tempo gasto (*De proportionibus* III, 52-54). Tal distinção pode até estar na iminência de surgir, como o quer Clagett,[227] mas não chega a gerar o nascimento de duas novas ciências, uma dinâmica e uma cinemática, respectivamente. Ao contrário, aumenta a tensão no conceito: se de fato o movimento é um *ens rationis*, então não há razão alguma para buscar conhecer suas causas ou efeitos, pois a linguagem da causalidade perde sentido, uma vez que um *flatus vocis* não se diferencia em causa e efeito. Mesmo que se denomine uma proporção de causa e outra de efeito, daí não decorre um conhecimento da causa, mas da relação "funcional" entre as proporções, o que está de acordo com o discurso universalizante desenvolvido no tratado, que se propõe a examinar todo tipo de movimento sem nunca diferenciar natural e violento, que examina e concebe as potências motoras e resistivas somente em suas relações proporcionais-numéricas. Este pode ter sido o fundamento matemático da ciência moderna. Porém, deve-se complementar a informação: tal fundamento surge da tentativa de conservação do edifício da ciência de Aristóteles, não como um substituto, muito menos como um substituto "revolucionário".

É precisamente esta ambivalência que explica a ausência do experimento. O experimentador causa o movimento com o intuito de estudar-lhe os efeitos, e o faz por também acreditar que replicou uma situação natural. Mesmo não tendo abandonado as noções de causa e efeito do movimento local, Brawardine não os inclui em sua teoria do movimento. Uma vez que causa e efeito não participam do cálculo, não há porque realizar experimentos. Assim, as menções feitas a experiência nos teoremas, são de conho

---

[227] CLAGETT, M. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

estritamente aristotélico, são ilustrações que não participam da teoria do movimento, nem do cálculo.

4 O Conceito de "Proporção de Proporções"

Ao afirmar que cada proporção da potência em relação à resistência faz surgir uma velocidade específica de tal modo que qualquer proporção de velocidades implique uma certa proporção de potências que lhe são associadas, Bradwardines estabeleceu, pela primeira vez, o conceito de proporção de proporções que, mais tarde, Oresme nomeou e desenvolveu.[228]

A rigor, o termo "proporção" é equivalente ao termo contemporâneo "razão" e não deve ser compreendido como "igualdade de razões", sentido ao qual o restringimos. No século XIV, o termo empregado para expressar a igualdade das razões é "proporcionalidade" conforme foi empregado por Campano: proporcionalidade é uma semelhança de proporções (*proportionalitas est similitudo proportionum*).[229]

Drake notou uma diferença relevante entre o texto de Euclides tal qual o conhecemos da edição acompanhada dos comentários de Campano de Novara.[230] A

---

[228] ORESME, N. *Nicole Oresme, De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes,* 1966.

[229] Apud GRANT, E. *Oresme's De proportionibus proportionum and Ad pauca respientes,* 1966, p. 14-24.

[230] Vide: DRAKE, S. Medieval ratio theory vs compound medicines in the origins of Bradwardine's rule, 1973, p. 67-77.

definição 4 (livro V), que apresenta o conceito de proporção está ausente do texto medieval: "*Diz-se que duas magnitudes possuem uma proporção se uma, por multiplicação, puder exceder a outra*" (*Elementos*, V, def. 4: 114). Há, somente, a definição 3 sobre o conceito: "*Uma proporção é um tipo de relação de duas magnitudes do mesmo tipo com respeito ao tamanho.*"[231]

A ausência da definição 4 não permitu conhecimento do termo "multiplicação" implícito a aplicação das proporções às quantidades, uma vez que fala somente em magnitudes. Apenas o comentário de Campano esclarece a possibilidade de conferir proporção às coisas que possuem magnitutes, do mesmo modo que se confere às quantidades:

> A proporção é a mútua disposição de duas coisas do mesmo tipo, no que diz respeito àquilo no qual uma é maior, menor ou igual à outra. A proporção não é encontrada somente em quantidades, mas também em pesos, potências e sons...[232]

Deste modo, o conceito de proporção, chave para a aplicação da matemática a Filosofia da Natureza, necessitava de um complemento, a saber, o conceito de proporcionalidade. Este se encontra presente na edição contemporânea dos *Elementos,* tanto no livro V quanto no livro VII, o qual trata dos números: "*Os números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes do*

---

[231] EUCLID. *The thirteen books of Euclid's Elements*, 1956.

[232] "*Proportio est habitude duarum rerum eiusdem generic adinvicem ineo quod earum altera maior aut minor est reliqua uel sibi aequalis. Non enim solum in quantitatibus reperitur proportio: sed in ponderibus, potentiis et sonis...*" (Euclides; Campanus. Paris, 1516. Apud DRAKE, 1973: 68).

segundo que o terceiro é do quarto" (*Elementos* VII, def 20: 278). Os termos, "múltiplo", "parte" e "partes" dizem respeito à operação de multiplicação dos números,[233] muito embora esta seja desconhecida para a geometria.[234] A definição 20, contudo, também não se encontra no texto de Euclides/Campano. Há em seu lugar três definições:

> (def. 20) A denominação da proporção de um número menor para um maior será dito da parte ou das partes do menor que existir no maior e [a denominação da proporção do] maior para o menor será dito do todo, ou do todo e da parte, ou do todo e das partes pelas quais o maior excede o menor.
>
> (def. 21) Proporções que possuem a mesma denominação são ditas similares, uma, a mesma; e aquelas que têm a mairo [denominação] são chamadas [proporções] maiores, e aquelas que têm a menor, menores;
>
> (def. 22) Números que possuam uma proporção são ditos proporcionais.

O objetivo dessas definições era permitir a redução da proporção a termos menores, como é expresso na seqüência: "*(def. 23) Números são chamados 'termos' ou 'raizes' de uma proporção quando números menores que aqueles não podem ser obtidos da mesma proporção.*"[235] Estas variações do Euclides contemporâneo, segundo Drake, que ocorrem nos livros aritméticos dos *Elementos* (VII-IX), facilitam o uso de números na expressão da proporções, muito embora estes sejam sempre representados por segmentos de retas.

---

[233] Vide o comentário de Heath à definição em *Elementos*: 292-293.

[234] Segundo Heath: "*Fala 'dos tamanhos das proporções sendo multiplicadas juntas (literalmente, por elas mesmas)', uma operação desconhecida para a geometria*" (*Elementos*: 190).

[235] Apud DRAKE, 1973: 69.

Drake (1973: 69) nota que as definições, especialmente a definição 21, embora não tenham permitido a Bradwardine a constituição de uma teoria aplicada das proporções, complementa a linguagem de Boécio, uma vez que permite colocar em uma única ordem, a do tamanho, qualidades diferentes. Mais relevante, estabelecem a proporção de igualdade ou unidade como um marco inicial, semelhante ao que atribuímos ao zero. Assim, as proporções eram maiores em relação ao afastamento do ponto de partida, i.e., a unidade, e menores segundo a proximidade. Deve-se, entretanto, ser cauteloso com a afirmação de Drake: a unidade não deve ser entendida, aqui, como um número, uma vez que este era definido como uma "*multidão de unidades*", e a unidade não era, ela mesma, uma multidão.[236]

Deste modo, a maior parte das definições do livro VII lida com números e operações numéricas, enquanto o livro V lida com uma terminologia especial para as proporções que surgem do contínuo, chamadas proporcionalidades geométricas: a duplicação ou triplicação, o dobrado e o triplicado,[237] nomenclatura que, no texto medieval dos *Elementos*, aparece na definição 18 do livro VII:

> "Quando há algum número de números continuamente proporcionais, a proporção do primeiro para o terceiro é aquela do

---

[236] "*Do mesmo modo, não pensamos o zero como o menor positivo possível, mas como um marcoposicional entre os números, possuidor de propriedades que não são compartilhadas pelos outros números*" (DRAKE, 1973: 190).

[237] Não "o dobro" ou "o triplo".

primeiro para o segundo duplicada; e [aquela do primeiro] para o quarto é aquela do primeiro para o segundo triplicada."[238]

O livro VII abriga, no texto medieval, um complexo de definições e terminologia capaz de fornecer informações sobre as proporções sem a necessidade do recurso ao livro V. Porém, com um limitador, qual seja, a teoria das proporções dali extraída não poderia ser aplicada às magnitudes em geral. Trata-se de uma teoria aritmética, na qual as proporções são relações entre números inteiros positivos, sendo os irracionais compreendidos não como números, mas como relações de proporcionalidade de números.[239] Deve-se ressalvar que proporções não estão sujeitas a quaisquer operações aritméticas. A multiplicação de uma proporção por um número não é definida. A noção de composição de proporção não aparece explicitamente no texto medieval, embora presente no Euclides que conhecemos (livro IV, def. 23). Disto decorre que o uso dos termos está limitado pela concordância quanto à impossibilidade de movimento para proporções de igualdade em que a potência motora é igual a potência resistiva; o mesmo vale para as proporções de menor desigualdade, na qual a potência é menor que a resistência (vide teorema VIII). Esta possibilidade não está implícita em Aristóteles, exceto talvez *Física* VII, 5, $250^{a15\text{-}20}$, no qual não se exclui a possibilidade de, ao utilizar a proporção para tratar

---

[238] Apud DRAKE, 1973: 69.

[239] "*Por exemplo, enquanto nós consideramos a raiz quadrada de dois como número, portanto sujeita as operações aritmética usuais, os medievais a consideravam como um termo médio, a saber, entre a unidade e o 2, sem existência emseparado da contínua proporcionalidade na qual participava*" (DRAKE, 1973: 70).

da velocidade, chegar a conclusão que pode haver movimento mesmo quanda a potência é dividida a ponto de ser menor que a resistência.

Cabe retomar os dois argumentos que Bradwardine lança contra essa possibilidade. O primeiro afirma que esta opinião falsa só é capaz de lidar com proporções de velocidades nas quais ou o motor ou o móvel é constante. Dito de outro modo, movimentos nos quais as potências motoras, assim como os móveis variam, a teoria não dá conta do movimento. Esta limitação é apresentada na formulação da terceira teoria equivocada.[240] O segundo sustenta que V= P/R leva ao absurdo em que qualquer potência pode mover qualquer móvel, independente da resistência que este possua. Formalizando, se P/R=V, e P>R, então, dobrando R sucessivamente (P/Rn)=V/n; sendo n=2,4,8,16,32...) obter-se-á nR>P, caso em que ainda haverá alguma velocidade (V/n), o que é absurdo. Pode-se também manter R constante e sucessivamente dividir P ((P/n)/R=V/n). Quando R>(P/n), ainda restará alguma velocidade (V/n), o que também é um absurdo.

A solução de Bradwardine para evitar uma conclusão absurda é fazer uso da proporção de proporções. Formalizando: $P_2/R_2=(P_1/R_1)^n$, sendo $n=V_2/V_1=(P_2-R_2)/(P_1-R_1)$. Logo, $P_2/R_2=(P_1/R_1)^{((P2-R2)/(P1-R1))}$. Assim, para Bradwardine, uma progressão geométrica, iniciada pela unidade e expressa por uma sucessão de proporções da potência e da resistência pode ser utilizada, e para duas proporções quaisquer selecionadas na progressão, a proporção das velocidades é dada dos termos correspondentes em progressão aritmética. Para dobrar a velocidade de uma proporção P/R é necessário que se eleve à proporção ao

[240] Vide capítulo anterior.

quadrado, e para triplicar, ao cubo. A operação reversa está, deste modo, salva, como procurei mostrar na seção anterior: a metade da velocidade é obtida extraindo a raiz quadrada da proporção e um terço extraindo a raiz cúbica.

Este é o procedimento pelo qual a equação de Bradwardine remedia os equívocos apontados nas teorias do aristotelismo. Para qualquer valor inicial em que P>R, não ocorrerá velocidade quando P for igual ou menor que R. Deste modo, Bradwardine é capaz de manter-se fiel a Aristóteles, uma vez que mantém que a velocidade é determinada pela relação entre a potência e a resistência ao mesmo tempo em que evita as dificudades matemática.

Para melhor compreender os melhores resultados da teoria de Bradwardine em relação à terceira teoria, os teoremas II, IV e VI do capítulo III do *De proportionibus* podem ser sistematizados.[241] Note que as teorias concordam apenas quanto ao primeiro caso.

Teoremas	Terceira Teoria Equívoca	Teoria de Bradwardine
(Teorema III) $P_1/R_1=2/1$	$P_2/R_2=2P_1/R_1$, então $V_2=2V_1$	$P_2/R_2=(P_1/R_1)^2$, então $V_2=2V_1$
(Teorema V) $P_1/R_1>2/1$	$P_2/R_2=2P_1/R_1$, então $V_2=2V_1$	$P_2/R_2<(P_1/R_1)^2$, então $V_2<2V_1$
(Teorema VII) $P_1/R_1<2/1$	$P_2/R_2=2P_1/R_1$, então $V_2=2V_1$	$P_2/R_2>(P_1/R_1)^2$, então $V_2>2V_1$

241 GRANT (1966: 21) propõe sistematização semelhante.

Contudo, para evitar anacronismos, não se deve esquecer que P é potência, não força, no âmbito estudado no capítulo I desta tese. O mesmo se aplica à resistência, que deve ser compreendida como uma potência resistiva interna ao corpo, como procurei esclarecer na seção anterior. O termo V (velocidade – *velocitas*), por sua vez, deve ser compreendido como velocidade escalar, i.e, a medida de quão rapidamente algo se move a uma certa distância em um certo tempo, sem referência à direção e ao sentido.

Resta saber se os conceitos no interior da equação não produzem um resultado anacrônico. Comentadores[242] têm procurado esclarecer que o uso da noção de igualdade, presente na notação contemporânea, já está implícito na linguagem das proporções harmônicas de Boécio e, especialmente, na composição de remédios na medicina, o que faz de Bradwardine um devedor destas tradições.

A noção de exponencial, estaria presente no texto de Bradwardine na relação entre proporções, de modo a estabelecer:

- Que há duas proporções entre duas potências e duas resistência; que a relação de proporcionalidade entre ambas é geométrica, i.e, exponencial;
- Que o expoente da relação entre as duas proporções é a proporção das duas velocidades, expressa em uma relação aritmética obtida das proporções entre as respectivas potências e resistências.

---

[242] Especialmente: McVAUGH, M. Arnald of Villanova and Bradwardine's law, 1967: 56-64. Os outros autores que apontam para esta possibilidade são: GRANT, E. *Oresme's De proportionibus proportionum and Ad pauca respientes*, 1966: 14-24. DRAKE, S. Medieval ratio theory vs compound medicines in the origins of Bradwardine's rule, 1973: 67-77

Deste modo, Bradwardine pôde explicar que o "dobro" de uma velocidade é aquele obtido da proporção $(P/R)^2$. Do mesmo modo, para triplicar a velocidade, eleva-se a proporção ao cubo: $(P/R)^3$.

Cabe, entretanto, relembrar a restrição que apontei na seção anterior, i.e, que a relação entre as proposições em Bradwardine é limitada a casos em que a velocidade é dobrada ($V_2=2V_1$) ou dividida pela metade ($V_2=V_1/2$). O por quê dessa restrição revela o real caráter do *De proportionibus*: restaurar o sentido original ao texto da *Física* ou, mais precisamente, argumentar contra os partidários da terceira teoria equivocada, que, como vimos, pode ser indentificada com a passagem da *Física* (VII, 5, $250^{a15\text{-}20}$). Ao invés de Bradwardine negar a correção da passagem, uma vez que ela está associada à terceira teoria, ele atua de modo a proteger o texto de Aristóteles. A terceira teoria, enquanto interpretação da passagem de Aristóteles é equivocada, o que abre a possibilidade para que Bradwardine compreenda sua teoria do movimento como a correta interpretação e extensão da passagem de Aristóteles.[243]

Do ponto de vista de seu autor, o principal trabalho do *De proportionibus* foi mostrar que os procedimentos utilizados até então para dobrar as velocidades não permitiam a reversão do processo, com as divisões pela metade das velocidades, enquanto a teoria do movimento de Bradwardine, que usa o conceito de proporção das proporções, o faz.

---

[243] Esta situação é exemplificada por Bradwardine no teorema VI do cap. III do *De proportionibus*, exposto no capítulo anterior desta tese.

Capítulo V – Continuidade e Movimento

Em seu tratado posterior ao *De proportionibus*, conhecido como *De continuo* (escrito entre 1325 e 1343), Bradwardine trata da medição da natureza. Sua estratégia consiste em estabelecer uma correspondência entre o contínuo geométrico (linha, plano e figura) e o contínuo físico (por exemplo, temperatura, cor e, fundamentalmente, movimento local), valendo-se de pontos como ordenadores da medição. Ao mesmo tempo, Bradwadine procura deixar claro para o leitor que adere a crítica de Aristóteles ao atomismo, o que lhe traz dificuldades: como medir o contínuo sem numerá-lo? Ou é possível numerá-lo? Como utilizar pontos sem admitir a existência de indivisíveis?

Meu objetivo, neste capítulo, é refazer esta estratégia de Bradwardine que, acredito, foi concebida como um suporte epistemológico ao cálculo do movimento do *De proportionibus*, de modo a ajustá-lo às teses sobre o contínuo e o indivisível de Aristóteles. Este ajuste, de modo ambivalente, quase conduziu à efetiva possibilidade de medição da natureza.

1 A Estrutura do *De continuo*

O *De continuo* pode ser descrito como um texto polêmico contra os que afirmavam que o contínuo é composto por partes indivisíveis. Dadas as fortes divergências de posicionamento frente à física aristotélica, alguns historiadores da ciência defendem que seria uma resposta direta a Ockham.[244]

Como o *De proportionibus*, o *De continuo* também está escrito sob a forma axiomática, com definições e suposições que forçam o leitor a acatar as conclusões do texto. Apesar dessa estrutura prevalecer, há algumas seções nas quais o autor simplesmente apresenta uma contra-hipótese a qual segue uma série de conclusões que iniciam com o mote "*se isto for assim, então...*", ou seja, se a contra-hipótese fosse verdadeira, então, seguir-se-ia tal conclusão que, no esquema de argumentação, ou é falsa ou impossível. Estas seções têm o objetivo de reduzir as contra-hipóteses ao absurdo.

As partes estritamente axiomáticas do *De contínuo* são as primeiras e encontram-se assim dividida:

- Parte I – Definições;
- Parte II – Suposições
- Parte III – Trinta e quatro conclusões preliminares

---

[244] Este é o caso de: TACHAU, K. The influence of Richard Campsall on Fourteenth-Century Thought. In: HUDSON; WILKS (Ed.). *From Ockham to Wyclif*, 1987, pp. 121-123. A visão de Tachau sobre Ockham não é nada peculiar, posto que ela acredita que muitas das inovações do filósofo já estavam presentes em Richard Campsall. Tachau também acredita que Campsall tenha sido uma forte influência sobre Bradwardine. Campsall explicaria as semelhanças entre Ockham e Bradwardine, que optaram por caminhos divergentes para desenvolverem suas filosofias.

Seguem-se duas partes negativas, IV e V, escritas ao modo dialético, lançando-se mão de contra-hipóteses sobre relações de indivisíveis com o contínuo; todas reduzidas ao absurdo. Na seqüência, o texto encerra-se com duas partes axiomáticas:

- Parte VII – Afirma que todas as hipóteses que sustentam que o contínuo é composto por indivisíveis são falsas;
- Parte VIII – Conclui que indivisíveis não existem, mas que o contínuo existe.

A obra não possui um caráter puramente matemático, como é patente pelos termos definidos na Parte I: contínuo, contínuo permanente, contínuo sucessivo, corpo, superfície, linha, ponto, instante, movimento, ser movido (*motum esse*), sujeito de movimento e grau de movimento. Na definição 3, o contínuo sucessivo é exemplificado como sendo o tempo e o movimento. Assim, de acordo com as definições, o termo contínuo pertence tanto a matemática quanto a filosofia da natureza. Do mesmo modo, nas suposições da Parte II, as suposições 3 e 4 — que segundo Bradwardine são auto-evidentes — também não pertencem somente ao domínio da matemática:

> Sup. 3 - Quando não houver causa para a diversidade ou para a dissimilaridade, o julgamento a se assumir preza pelo similar;
>
> Sup. 4 – Deve-se assumir toda ciência como verdadeira se ela não supõe um contínuo composto por indivisíveis.[245]

---

[245] "*3 – Ubi diversitatis vel dissimilitudinis nulla est, causa simile iudicatur. 4 – Omnes acientias veras esse ubi non supponitur continuum ex indivisibilibus componi.*" (*De continuo*, 11*/349)

A suposição 30 permite transferir as conclusões alcançadas na filosofia da natureza para a matemática: "*Se um contínuo tiver átomos imediatos, seja ele finito ou infinito, então cada contínuo deverá possuir tais átomos.*"[246] A conclusão 120 esclarece sobre esta suposição:

> Assuma que dois líquidos se unem para formar um contínuo. Então, dois indivisíveis, que eram anteriormente o término dos dois corpos líquidos, não serão nem corrompidos nem outros serão gerados a partir deles. Assim, eles permanecem imediatos e também os pontos de quantidade situados neles. Desse modo, por [conclusão] 30, isto ocorre com todo e qualquer contínuo.[247]

Bradwardine não vê diferença entre um contínuo matemático e o contínuo-natureza, ainda que reconheça, como tratarei a seguir, que tal aproximação lhe traga dificuldades.

2 Continuo-Natureza e Espaço Geométrico

A relação entre contínuo e movimento já esta presente em Aristóteles. Na *Física*, Aristóteles esclarece que o movimento e a mudança ocorrem no tempo, entendido enquanto medida do movimento. Aristóteles não estabelece bases sólidas para a medição do movimento, mas relaciona-o com o contínuo que, no século XIV, é visto pelos mertorianos como base para o estabelecimento do cálculo. Esta relação encontra-se na *Física*:

---

[246] "*Si unum continuun habeat athoma immediata et infinita sive finita, quodlibet sic habere.*" (*De continuo*, 41*/379)

[247] "*Concurrant duo liquida ad continuationem; tunc due prime materie indivisibiles, que prius fuerunt termini illorum corporum liquidorum, non corrumpuntur; nec alia generatur inter eas. Igitur manent ibi immediate, igitur et puncts quantitatis situata in illis. Igitur per 30 est ita de omni continuo.*" (*De continuo*, 105*-106*/443-444)

> Algo é em sucessão quando está depois do início em posição, ou em forma, ou de alguma outra maneira que esteja relacionada, de modo que não haja nada do mesmo tipo entre si e o que está em sucessão; por exemplo, uma linha ou linhas em se tratando de linha, uma unidade ou unidades em se tratando de unidades, uma casa em se tratando de casas — não há nada que previna algo de um tipo diferente de estar entre. Pois o que é por sucessão é em sucessão a uma coisa particular, e é algo posterior; deste modo, um não está em sucessão a dois, nem o primeiro dia do mês em relação ao segundo: em cada um desses casos, o último está em sucessão ao anterior. Algo que está em sucessão e toca é contíguo. O contínuo é a subdivisão do contíguo: diz-se que algo é contínuo quando os limites do que se toca tornam-se um e o mesmo e, em poucas palavras, estão contidos um no outro: a continuidade é impossível para extremidades que sejam duas. Esta definição explicita que a continuidade pertence a coisas que naturalmente, em virtude de seu mútuo contato, formam uma unidade. E qualquer que seja a relação que os mantém juntos, eles são um, assim como o todo será um, por exemplo, por rebite ou cola ou contato ou união orgânica. (*Física* V, 3, 226^{b34}-227^{a16})

Contudo, para permitir o cálculo do movimento, os mertorianos precisaram geometrizar a definição de contínuo que se aplica na filosofia da natureza

A primeira questão a ser investigada, portanto, é saber como a noção geométrica de continuidade participa da noção de movimento em Bradwardine.

Há duas ordens de dificuldades sobre a aplicação da noção geométrica de continuidade aos fenômenos estudados pela filosofia da natureza: a primeira, se o arranjo geométrico de Bradwardine dá suporte para o cálculo do movimento em uma filosofia da natureza aristotélica; a segunda, se o uso de definições matemáticas para obter conclusões naturais é permitido sem que, com isso, seja rompida a classificação das ciências do aristotelismo da época. Tratarei aqui da primeira ordem de dificuldades.[248] Para cumprir

---

[248] Minha aboradgem sobre o estatuto da matemática e das ciências intermediárias na classificação das ciências do aristotelismo medieval foi desenvolvida em: CUSTÓDIO, M.

esse objetivo, esta seção se subdivide em duas: a definição de contínuo e a aplicação da definição à natureza.

2.1 Definição de Contínuo

Murdoch[249] comenta que a dificuldade em definir o contínuo decorre de duas características que se lhe atribuía: que uma quantidade contínua é aquela cujas partes têm extremidades comuns e que uma quantidade contínua é divisível em partes divisíveis ao infinito. A primeira afirmação sustenta que cada parte é distinta e, portanto, tem um limite definido, mas, ao mesmo tempo, sustenta que cada parte está conectada com a outra de modo que seus limites sejam comuns e formem uma unidade. A segunda afirmação, ao contrário da primeira, designa a multiplicidade do contínuo. Juntas, as duas afirmações indicam como as partes compõem o contínuo: essencialmente uno e, mesmo assim, divisível em partes.

Implicações do problema da interdependência entre a História e a Filosofia da Ciência em Imre Lakatos, 1998.

[249] MURDOCH. *Geometry and the continuum in the Fourteenth Century: a philosophical analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*. Tese de Doutorado. Madison: University of Wisconsin, 1957, especialmente pp. 1-74; MAIER, A. Kontinuum, Minima und aktuell Unendliches. in: *Vorläufer Galileis*. Dadas as diferenças, sugiro que se consulte também o texto como apareceu pela primeira vez, dividido em duas partes: Das Problem des Kontinuums in der Philosophie des 13 und 14 Jahrhunderts, Antonianum; Diskussion über das aktuell Unendliche in der ersten Hälfte des 14 Jahrhunderts, in *Divus Thomas*; DUHEM, P. Leonard de Vinci et les deux infinis. in: *Etudes sur Leonard de Vinci,* Cap. IX.

Aristóteles propõe um caminho para superar o problema, i.e, negar que pontos ou quaisquer outros indivisíveis possam compor um contínuo. Todavia, tal proposta não elimina as dificuldades de compreensão da relação entre o contínuo e suas partes. Por exemplo, o ponto, enquanto um discreto indivisível, pode ser compreendido como o limite de duas partes contínuas de um contínuo. Nesse caso, teríamos que afirmar que o ponto está no contínuo, o que leva a possibilidade de compreensão do contínuo como composto por indivisíveis, no caso, pontos. Contudo, não se deve considerar a possibilidade de discretos, indivisíveis, como pontos, conectarem-se.

O caminho de Aristóteles para a solução do problema do contínuo é base para as variações propostas pelos que se ocupam da questão em Oxford e Paris, no final do século XIII e início do século XIV.[250] Mesmo Thomas Bradwardine e Nicole Oresme trabalham sob o problema tal qual posto por Aristóteles, ainda que apresentem soluções diferentes das sustentadas pelos aristotélicos da época. Para Maier, a única exceção relevante é a teoria da indivisibilidade de Roberto Grosseteste. Maier ressalta que é a partir dos trabalhos de

---

[250] Maier e Duhem chegam a sugerir que todas as variações escolásticas do problema do contínuo decorrem do caminho apontado por Aristóteles. Maier (*Vorläufer Galileis*, p. 159) menciona, como se tratando apenas de variações de Aristóteles, os trabalhos de: Roger Bacon, Alberto Magno, Tomás de Aquino, Siger Brabante, Aegidius Romanus, Richard de Middleton, Duns Scotus, Walter Burley, Guilherme de Ockham, Jean Buridan, Alberto da Saxônia e Marsílio de Inghen.

Bradwardine, Oresme e Buridan, bem como do anti-aristotelismo de Grosseteste, que pôde surgir uma série de indivisibilistas, ainda no século XIV.[251]

Do mesmo modo, Murdoch sustenta que há um "problema do contínuo" obrigatório para qualquer um que escrevesse sobre a *Física*, as *Categorias* ou mesmo o *De caelo*:

> O problema era, evidentemente, tratado em quase toda *expositio*, *commentaria* e *questiones* sobre a *Física* de Aristóteles. De tempos em tempos, as discussões também apareciam em seus comentários sobre outras obras de Aristóteles, como as *Categorias* e o *De caelo*. Deve-se também levar em conta que os motivos para a discussão da continuidade eram encontrados em outros e bem diversos problemas. Este era um estímulo particularmente medieval: investigações sobre a continuidade são encontradas, por exemplo, em questões como: 'Pode um anjo mover-se de um lugar para outro em movimento contínuo?', ou 'toda causa é, segundo sua própria natureza, circunscrita por certos limites?', etc.[252]

Murdoch chama a atenção para uma outra característica do pensamento medieval., ou seja, noções que para nós se caracterizam unicamente como de interesse da física, bem como de ciências correlatas a ela, eram discutidas não apenas no âmbito da filosofia da natureza, mas também no âmbito da teologia. Contudo, por trás das discussões envolvendo o movimento contínuo dos anjos ou a infinitude de Deus, se encontrava o problema lançado por Aristóteles e que interessa ao historiador da ciência investigar. No século XIV, o tratamento do problema do contínuo deu-se de dois modos: lógico e geométrico. Como

---

[251] Como: Gerard Odo, Henry de Harclay, Nicolau de Autrecourt, Walter de Chatton, Gregório de Rimini, Richard Killington, John Gedo e Nicole Bonetus.

[252] MURDOCH, 1957: 15. A duas citações presentes no texto de Murdoch transcrito acima são, respectivamente, de DUNS SCOTUS. *In lib. II sententiarum. Dist.* II, q. 9 e RICHARD KILLINGTON. *Commentaria sententiarum*. Q. 3.

Bradwardine escreve sob uma perspectiva geométrica, tratarei, no corpo do texto, apenas desse modo de argumentar.

2.1.1 As Definições de Aristóteles

Há duas definições de contínuo[253] em Aristóteles:

a) *"Diz-se que algo é contínuo quando os limites de cada um, que se tocam, tornam-se um e o mesmo e estão, como a palavra indica, contidos em cada um"* (*Física* V, 3, 227^{a11-12}); também: *"Uma linha, por outro lado, é uma quantidade contínua, pois é possível encontrar um limite comum no qual suas partes se juntam"* (*Categoria* 6, 5^{a1-2}).

b) *"Por contínuo eu quero dizer aquilo que é divisível em divisíveis que são infinitamente divisíveis"* (*Física* VI, 2, 232^{b24-25}).[254]

A dupla definição de Aristóteles contraria sua própria proibição da múltipla definição (*Tópicos* VI, 4, 141^{b37}). Mais ainda, a definição (b), que as partes do contínuo são infinitamente divisíveis, tem origem na definição (a): no contínuo, todas as partes estão conectadas. A argumentação que parte de (a) para obter (b) pode ser assim exposta:

1. Impossibilidade dos Indivisíveis pela noção de limite:

---

[253] A duplicidade de definições é claramente notada pelos mertorianos. Vide Walter de Burley: "*per continuum possumus duo intelligere, scilicet, vel illud cuius partes copulantur ad terminum communem, ... alio modo per continuum potest intelligi illud, quod est divisibile in infinitum*" (*Super Aristotelis libros de physica*, col. 522).

[254] Veja também *De caelo* I, 1, 268^{a6-7} e *Física* I, 2, 185^{b10}.

1.1. Indivisíveis não podem ter limites, pois limite é limite de algo, o quer dizer que o limite é diferente deste algo que limita, integrando-o como parte; contudo, o indivisível não pode ser dividido em partes.

1.2. Por não possuírem limite, os indivisíveis não podem ser as partes do contínuo, i.e., aquelas que possuem limites comuns.

2. Impossibilidade dos Indivisíveis pela noção de contato:

2.1. Todo contato dá-se de três formas: parte com parte; parte com todo; todo com todo;

2.2. As duas primeiras são impossíveis uma vez que o indivisível não tem partes; quanto ao terceiro, se as partes indivisíveis do contínuo forem o todo do contínuo, isto implica afirmar que uma parte não será distinta de outra parte.

3. Se o contínuo é divisível em indivisíveis, estes indivisíveis têm que estar em contato uns com outros. Porém, isto é um absurdo, pois indivisíveis parecem não poder entrar em contato.

Bradwardine parte da dupla definição de Aristóteles, mas não esboça os argumentos apresentados para a derivação da definição (a) para (b). Como lembra, Murdoch (1957: 78-79), uma definição derivada de outra não é um princípio, o que possibilita, ao menos por suposição, que se admita que o contínuo é composto por indivisíveis, conectados de algum modo. Neste caso, o argumento de Aristóteles é inútil, uma vez que não pode responder a questão da noção de conexão.

Aristóteles pressupõe que toda conexão se dá por limite comum ou por contato; e a argumentação mostra que ambos são impossíveis. Ao optar por não expor a derivação de

(a) para (b), Bradwardine está livre para pensar um terceiro modo de conexão, que dispensa as noções de limite comum e de contato, i.e, a conexão geométrica. Por meio dela, Bradwardine abre espaço para afirmar que o contínuo é infinitamente divisível, ao mesmo tempo em que abre a possibilidade para calculá-lo. Porém, antes de tratar do cálculo, devo explicitar qual a definição de contínuo de Bradwardine e o quanto ela difere ou se assemelha da definição de Aristóteles.

Na definição dada por Aristóteles, o contínuo é uma espécie do gênero contíguo. Algo é contíguo de duas maneiras. Primeiro, são contíguas as coisas que estão em contato, de modo que suas extremidades ou limites estejam juntas ou estejam em um único lugar. Segundo, são contíguas as coisas que estão em sucessão, i.e., dispostas de modo que uma está após o início de outra, sem que haja algo do mesmo tipo entre ambas. O contínuo é o segundo tipo de contíguo, uma vez que suas extremidades ou limites são um.

Todavia, deve-se perguntar como duas coisas podem ter suas extremidades ou limites comuns, uma vez que, se a extremidade pertence a *A*, parece estar excluída a possibilidade de que a mesma extremidade pertença também a *B*, muito embora a particularidade do contínuo seja precisamente o lugar das extremidades em contato. Aristóteles as denomina de "união natural" (προσφβσις) ou "junção natural" (σβνφυσις),[255] emprestando o exemplo da geometria:

> Uma linha não pode ser composta por pontos, sendo a linha contínua e o ponto indivisível. Pois as extremidades de dois pontos nem podem ser uma — uma vez que um indivisível não pode ter uma

[255] Sigo a tradução de MURDOCH, op. cit., p. 81.

> extremidade distinta de qualquer outra parte — nem podem estar juntas — uma vez que, por não possuirem partes, não podem ter extremidades, sendo que a extremidade e aquilo da qual ela é extremidade seriam distintos—... Nem um ponto pode ser em sucessão a um ponto ou um agora [em sucessão] a um agora, de modo que a largura possa ser composta por pontos ou o tempo por agoras; pois entre os que são em sucessão não há nada de seu tipo, e entre pontos há sempre uma linha e entre agoras um período de tempo... Por este motivo, todo contínuo é divisível em divisíveis que são sempre divisíveis. (*Física* VI 1, 231^{a24}-231^{b15})

Pode-se compreender essa passagem considerando que o ponto não tem existência por si mesmo, mas que dele pode ser dito existir na linha:

> Tome a linha enquanto um contínuo que pode ser dividida em duas partes por qualquer ponto nela. A extremidade das duas partes é um único ponto ou, em outras palavras, eles têm um limite comum (*Metafísica* III, 1090^{b5-13})

Esta é a propriedade que, para Aristóteles, só pode ser aplicada ao contínuo, i.e, a diferença específica em relação a outras formas de contigüidade. Porém, como as partes estão contidas no contínuo e como constituem o contínuo? Se as partes são divisíveis, a solução para as duas questões é a mesma. De uma parte divisível pode ser dito que ela está contida no e constitui o contínuo, uma vez que suas extremidades são comuns a outras extremidades de outras partes. Porém, se as partes em questão forem indivisíveis, como o ponto, i.e, sem extensão (causa última da indivisibilidade), a resposta às questões se complica. Embora as partes sem extensão possam estar contidas no contínuo, não podem compô-lo. Dito de outro modo, embora se possa dizer que essas partes indivisíveis existam no contínuo, não se pode afirmar que possuem existência por si mesmas, i.e, separadas do contínuo.

O problema que persiste decorre do modo como Aristóteles o formulou, i.e, a compreensão de que a resposta sobre como as partes constituem o contínuo só pode ser dada se se compreende como as partes estão conectadas. Bradwardine segue Aristóteles de perto e continua relacionando "constituição" e "conexão". Para Murdoch, o ponto presta-se como melhor exemplo para Aristóteles tornar clara sua concepção:

> ...cada ponto de uma divisão, enquanto extremidade comum de duas partes, pertence a cada parte, porque é uma extremidade de cada parte; e deste modo, porque estas partes são partes do todo contínuo, este ponto pertence também ao contínuo. Ou, de modo mais simples, a extremidade comum é sempre um ponto de uma linha contínua. Esta consideração é novamente confirmada se recordarmos que, para Aristóteles, qualquer ponto só existe enquanto limite ou extremidade de uma linha. (MURDOCH, 1957: 85-86)

Qualquer ponto corta uma linha em duas partes, servindo ao mesmo tempo de limite para ambas. Este tipo de extremidade, a extremidade comum, é diferente da extremidade de contato dos contíguos. Ao distinguir claramente entre essas duas extremidades, Aristóteles abre a possibilidade de se distinguir entre o contínuo e o descontínuo. Dois segmentos contíguos pedem duas extremidades de contato, com um lapso, um corte entre ambas, sendo que nem o ponto, nem a linha são o lapso ou corte. Em outras palavras, há um salto entre uma linha de um lado e uma linha de outro. No caso de dois segmentos de um contínuo, não há lapso, uma vez que os extremos dos dois segmentos são comuns. Esta propriedade, necessária para a definição de contínuo, fica evidenciada a partir da noção de ordenação.

Para compreender a noção de ordenação, note que é possível afirmar que as extremidades de uma reta são o antes e o depois — e o que não é extremidade é o meio. Do mesmo modo, o ponto, enquanto extremo de dois segmentos contínuos de reta, ordena o que vem antes e o que vem depois de si. O ponto é o extremo que vem depois para um segmento, ao mesmo tempo em que é o extremo que vem antes para o outro segmento, ou seja, ordena, ao mesmo tempo, os dois segmentos do contínuo. Esta ordenação é limite ou limitação do posicionamento espacial: o antes e o depois só adquirem sentido em relação ao limite, i.e., o ponto. Porém, a continuidade só se mantém se o limite e o limitado não forem distintos, pois, neste caso, ter-se-ia algo da reta, o ponto, enquanto algo diferente da reta. Escapa-se desta objeção por uma redução ao absurdo, uma vez que o ponto, cuja definição é "sem extensão", só pode ser dito estar na reta enquanto aquilo que ordena impondo limite. Em outras palavras, o que limita está no que é limitado não como constituinte, mas como ordenador. Logo, o ponto como extremidade comum, compreendido a partir da idéia de ordenação, diferencia-se da extremidade contígua e garante a noção de continuidade.

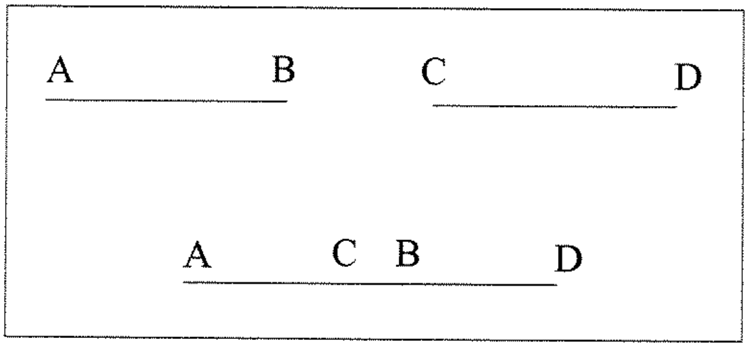
2.2 *Alterações nos Termos da Definição*

Há duas novidades introduzidas por Bradwardine na explicação do contínuo. Primeiro, o abandono da noção de extremidades (*termini*) e da adoção das noções de conexão mútua e de cópula (*copulatio*). Segundo, a despeito da adesão ao ataque de Aristóteles ao atomismo, Bradwardine prepara o terreno para, mais tarde no tratado, afirmar a possibilidade de ordenar o contínuo com o uso de pontos. Seu intuito, ao fazê-lo, é que, por meio da representação do contínuo-natureza no espaço geométrico, seja possível medi-lo.

2.2.1 Conexão Mútua ou Cópula

Quanto ao primeiro ponto, a cópula passa a ser pensada como sobreposição, o que não parece conciliável com as definições de Aristóteles (a, b *supra cit.*), uma vez que da sobreposição de dois, permanecem dois distintos em quantidade e, por conseqüência, esta sobreposição não pode formar o contínuo, que é um. Dito de outro modo, a sobreposição é a presença de duas quantidades distintas, em ato no mesmo lugar, enquanto o contínuo é em ato um e suas partes são potencialmente distintas.

Bradwadine escapa do problema posto para a sobreposição de duas quantidades apelando para o exemplo geométrico. Ou seja, por "cópula" não se deve compreender sobreposição, empilhamento, mas junção, tal qual ocorre com duas semi-retas:



Bradwardine denomina esta propriedade geométrica de impostação (*impositio*), que é introduzida com o intuito de prescindir dos termos "extremo" e "limite". Porém, se a noção de impostação é compreensível no plano geométrico, não o é na natureza: como é possível "impostar" dois corpos em um mesmo lugar? Para lidar com essa dificuldade, Bradwardine tipifica o contínuo, o qual diz ser permanente se suas partes existem simultaneamente (em ato), ou sucessivo, se suas partes existem sucessivamente, de acordo com o antes e o depois.

Contínuos permanentes são de três tipos: corpos (o que é longo, largo e profundo)[256], superfícies e linhas. Os dois últimos tipos de contínuos são necessariamente geométricos, diferentemente do primeiro tipo. Os contínuos sucessivos, por sua vez, são o movimento e o tempo.

2.2.2 Infinito

Quanto ao segundo ponto, o infinito, há duas definições no *De continuo*:

> Def. 23 – O infinito, dito categoricamente, isto é, absolutamente, é uma quantidade sem fim.
>
> Def. 24 – O infinito, dito sincategoricamente, isto é, com respeito a algo, é uma quantidade finita, e uma quantidade finita maior que esta [quantidade finita], e uma quantidade finita maior do que esta maior [quantidade finita], e assim sem um último término final, e isto é uma quantidade, e embora não tão grande, porém, pode ser grande.[257]

---

[256] Bradwardine dá a seguinte definição para corpos: "*corpo é tudo que tem longitude, latitude e profundidade" — Dico ergo 'corpus' illud omne quod habet longitudinem, latitudinem, et profunditatem... (Geometria speculativa,* Trac. IV, cap 1).

[257] "*23 – Infinitum cathegorematice et simpliciter est quantum sine fine. 24 – Infinitum sinkathegorematice et secundum quid est quantum finitum, et finitum maius isto, et finitum mauius isto maiori, et sic sine fine ultimo terminante; et hoc est quantum, et non tantum quin maius*" (*De continuo,* 3*/341). O texto crítico foi integralmente estabelecido por Murdoch, porém não há tradução ou qualquer outra publicação disponível. BRADWARDINE, T. *De continuo*. Latin Text with introductory notes and descriptive commentary In: MURDOCH. *Geometry and the continuum in the Fourteenth Century: a philosophical analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*. Tese de Doutorado. Madison: University of Wisconsin, 1957. Cito sempre a página do manuscrito entre parêntesis, seguida da página do texto na tese.

O infinito categoremático, absoluto, corresponde ao infinito que Aristóteles trata em sua definição (b) de contínuo. Se apresenta completo e, se pudesse ser dividido, dele não restaria nenhuma parte numerável (*Física* III, 6). O infinito sincategoremático é o infinito potencial, não é completo, porém: "*é tal que nós sempre podemos tomar uma parte para além da parte que já foi tomada*" (*Física* III,6, 207^{a8}). Este é o infinito ao qual Bradwardine se refere quando trata do contínuo, ao lado da noção de cópula.

2.2.3 Indivisível

Compete agora tratar da noção de indivisível: "*Um indivisível é o que nunca pode ser dividido*"[258]. Diz-se, do indivisível, que há três tipos:

a) Indivisível espacial, o ponto (Def. 8);

b) Indivisível temporal, um "átomo de tempo", o "instante" (Def. 9);

c) Indivisível de movimento, *motum esse* (Def. 10).

A definição de indivisível é escrita com o intuito de excluir duas interpretações: a de Demócrito e a interpretação comum à época de Bradwardine segundo a qual o indivisível é não-quantitativo. A exposição sobre o indivisível no *De continuo* visa, precisamente, combater qualquer posição indivisibilista. Ao final, o indivisível aceito por Bradwardine está muito distante da noção de átomo e já não causa dano à física aristotélica.

---

[258] "*Indivisibile est quod numquam dividi potest*" (*De continuo*, def. 7, 1*/339). Esta definição é muito semelhante, à primeira vista, às definições Aristóteles (*Física* VI, 1, 231^{b3}) e Euclides. *The thirteen books of the elements,* Book 1, prop. 1.

A primeira interpretação, atribuída a Demócrito[259], é a que compreende o átomo como um corpóreo indivisível. A indivisibilidade do átomo democritiano não decorre deste não possuir partes, mas de ser incapaz de divisão. Em outras palavras, se o átomo possui partes, estas não podem nunca se atualizar, isto é, se separar. Logo, pode-se dizer que o indivisível é o que, possuindo ou não partes, não pode ser dividido. Esta concepção de indivisível pode ser encontrada em Alberto da Saxônia[260]. A segunda interpretação evitada por Bradwardine trata o indivisível como um não-quantitativo[261]. Novamente, é Alberto da Saxônia que nos informa que os escolásticos muitas vezes argumentam a partir do caráter não-quantitativo do contínuo, ao invés de argumentarem a partir da definição democritiana de privação da divisão.

---

[259] Também defendida pelos que sustentam que o contínuo é composto por pontos não extensos (MURDOCH, 1957: 42).

[260] Vide: Alberto da Saxônia. *Questiones in octe libros physicorum Aristotelis*, lib VI, Q1, folio 64D, apud MURDOCH, 1957: 99.

[261] A definição quantitativa de indivisível é dada, ipsis literis, em um outro texto de Bradwardine, *Geometria speculativa* (Tract I, cap 1). Murdoch especula sobre a origem desta definição: "*...parece ser diretamente extraída da que Hero de Alexandria atribuiu a al-Nairizi em seu comentário a Euclides [a proposição original de Hero é baseada em suas definições, que eram desconhecidos pelos medievai...]. Contudo, o comentário de al-Nairizi era conhecido pelos latinos por meio da tradução de Gerard de Cremona. A definição de Hero era citada nesta tradução... A importância disto reside no fato de que a definição, na* Geometria *speculativa de Bradwardine, fala do ponto como tendo magnitude*" (MURDOCH, 1957: 100-101, n.5).

A argumentação de Bradwardine contra os indivisibilistas parte da proposição que nenhum indivisibilista pode negar: "*Nenhum indivisível é maior que outro*"[262]. A proposição é extensivamente demonstrada, isto é, a conclusão pode ser extraída diretamente das proposições apresentadas (*Segundos Analíticos* II, 14), como premissas (*De continuo*, Sup. 1, def. 7; conclusão da Prop.1):

1. Se $a<b$, então há um c tal que $a+c=b$, sendo c parte de b; ou se $a>b$, então há um c tal que $b+c=a$, sendo c parte de a (Suposição 1)

2. Há um a_1 e um b_1 para os quais não há c (Definição 7)

3. Logo, $a_1 \copyright b_1$ e $a_1 \Sigma b_1$, ou seja, $a_1=b_1$ (Proposição 1)

A propriedade estabelecida na conclusão (3), isto é, a igualdade, põe em questão da existência dos indivisíveis, uma vez que (1) e (2) isolam e igualam um contínuo a outro. Deste contínuo isolado, não se pode postular a existência dos indivisíveis enquanto partes, mas apenas a possibilidade de existência: "se há um a_1...". Isto porque a segunda premissa é uma definição e, enquanto tal, nada diz respeito da existência do que toma com postulado (os indivisíveis); as definições apenas tratam dos significados dos termos. Logo, quanto à existência, o argumento trata dos indivisíveis na condicional.

Quanto à (1), há uma outra dificuldade, a saber: em que medida faz sentido falar de igualdade entre indivisíveis. Qual o significado das cláusulas "igual a", "maior que" e "menor que"? De acordo com Aristóteles, a igualdade e a desigualdade são predicáveis

---

[262] "*Nullum indivisibile maius alio esse.*" (*De continuo*, 12*/350)

somente da quantidade e não da qualidade:

> A marca mais característica da quantidade é que a igualdade e a desigualdade lhe são predicáveis (...) O que não é uma quantidade não pode, de modo algum, ser nomeado igual ou desigual a qualquer outra coisa... Desse modo, essa é a marca da quantidade, que pode ser chamada igual e desigual. (*Categorias* VI, 6^{a27-35})

Quando se fala da igualdade ou desigualdade das qualidades[263], se faz por intermédio de uma referência à quantidade. No que diz respeito à quantidade, a igualdade pode ser de dois tipos: positiva ou privativa. A igualdade positiva afirma que as duas coisas em comparação possuem precisamente a mesma quantidade. A igualdade privativa afirma que as duas coisas são iguais se puderem ser superpostas sem que uma exceda a outra. Quando a igualdade é privativa, necessariamente também será positiva, mas com uma ressalva: a propriedade só pode ser compreendida se a igualdade positiva for entendida como igualdade de contenção, isto é, igualdade de área. Em outras palavras, a igualdade privativa apenas iguala no plano geométrico e nada diz sobre a natureza das coisas em relação.

Cabe agora investigar como a noção de igualdade pode ser aplicada aos indivisíveis, ressaltando que estes eram entendidos ou como quantitativos ou como não-quantitativos. Se quantitativos, os indivisíveis podem facilmente receber a noção de igualdade, bastando para isso que dois indivisíveis comparados sejam sobrepostos: se houver coincidência, eles são

---

[263] Os autores do séc. XIV que falam da igualdade e desigualdade das qualidades, isto é, da determinação quantitativa de um certo estado de intensidade de uma qualidade com o intuito de medi-la. A esta determinação quantitativa da qualidade dá-se o nome de intensificação e remissão da forma, da qual tratarei mais adiante.

privativamente iguais. Porém, é ainda mais relevante que entidades quantitativas podem ser positivamente comparadas, i.e., pode-se saber se são a mesma quantidade. Todavia, se são quantidades, os indivisíveis podem ser numerados e, seus números, por sua vez, podem sofrer divisão; o que, em se tratando de indivisíveis, é absurdo.

No caso de indivisíveis não-quantitativos, diz Bradwardine, suponha a utilização da noção quantitativa de igualdade por privação, i.e, estabelecida pelo processo de sobreposição, posto que não é possível encontrar alguma quantidade positiva na entidade não-quantitativa. Se duas entidades não-quantitativas forem sobrepostas, poder-se-á estabelecer uma certa relação, de igualdade ou desigualdade (por privação) entre as áreas das entidades. Contudo, a igualdade por privação é geométrica, i.e., o que pode ser comparado são as áreas das figuras das entidades não-quantitativas. Logo, já não se está falando mais de indivisíveis, que só poderiam ser representados por pontos na geometria, mas de contínuos, i.e, áreas.

2.2.4 Ordenadores Geométricos da Medição do Contínuo

Cabe agora finalizar a argumentação de Bradwardine contra o atomismo democritiano. Considere que todas coisas são compostas de pequenos átomos, discretos, em movimento incessante no vazio. Embora da mesma substância, os átomos possuem formas e tamanhos diferentes. Do modo como interagem e colidem resulta a variedade de objetos que podemos observar.[264] O sistema democritiano, portanto, conflita com pelo menos duas

[264] Há um complexo sistema de leis e teorias que sustenta a natureza composta por átomos em Demócrito. Vide: SCHRÖDINGER, E. *Nature and the greeks*, 1954, p. 74-77.

condições da natureza para Aristóteles: a existência do vazio e a matéria do mundo físico, que para o atomista pode ser isolada em indivisíveis, ao invés de ser considerada, como no sistema aristotélico um todo, contínuo e pleno.[265] A crítica de Bradwardine ataca desse modo, a possibilidade da existência de átomos na natureza. Os indivisíveis não são parte constituinte do contínuo natureza, e compreendê-lo como tal significaria encontrar uma quantidade — posto que o indivisível é discreto — no não-quantitativo, o contínuo, o que é absurdo.

O que o argumento geométrico permite fazer é comparar contínuos por privação, i.e., comparar a área ou a extensão da linha e, desse modo, medir a natureza, posto que ela é contínua. Os pontos necessários para estabelecer os limites da área ou linha comparados, nada mais são do que ordenadores da medida e em nada se assemelham ao átomo democritiano. Isto porque a medid ocorre no plano geométrico, no qual os pontos não representam nada do contínuo-natureza medido. Tudo o que da natureza é representado, o é por áreas e retas. Os pontos, por sua vez, são apenas ordenadores do espaço. Deste modo, Bradwardine adere ao argumento de Aristóteles que o contínuo não é composto por partes indivisíveis. Quanto ao termo "indivisível", este só pode ser usado com o significado de ordenador geométrico da medição do contínuo.

---

[265] A oposição entre Aristóteles e os atomistas é patente em inúmeras passagens, como a seguinte: "*Nenhum demente é capaz de se apartar tanto da razão a ponto de supor que o fogo e o gelo são um; somente entre o que é correto e o que parece ser correto pelo hábito, que uma pessoa é demente o suficiente para não ver diferença*" (*De generatione et corruptione* I, 8, 325$^{a17\text{-}23}$).

3 A Medição do Contínuo-Natureza

De imediato cabe uma advertência quanto a não efetivação da medição sob qualquer procedimento experimental. Não apenas pode-se alegar uma incapacidade instrumental ou tecnológica para a efetivação da medição, mas também uma compreensão da experiência apenas como um exemplo ilustrativo das teorias. Por um lado, as experiências são utilizadas para sugerir ou esclarecer o leitor do porquê da escolha de uma teoria. Por outro lado, o recurso a experiência permitia apenas um tipo limitado de verificação das teorias. Dito de outro modo, a experiência não verificava o conteúdo das teorias, mas a extensão de seu poder explicativo ao maior número de casos que o senso comum pudesse ter conhecimento pelos sentidos. Com os dados obtidos pelo senso coum, era possível verificar a capacidade da teoria em conceitualizar os dados pertencentes ao fenômeno em questão e a extravagância ou improbabilidade da teoria. Nessa perspectiva, De Libera afirma:

> Tais textos não se engajaram em uma confrontação com a experiência ou com a experimentação ativa. Pois não buscavam o conhecimento do real e nem mesmo a verificação de uma hipótese ou de uma conjectura, mas sim a produção de novas regras ou o estabelecimento de novos quebra-cabeças lógicos, os sofismata. O progresso se fazia, assim, sobre o terreno da análise lógica e não sobre aquele da indução científica.[266]

Não se deve, portanto, compreender que a medição tratada, por Bradwardine, envolva uma intervenção elaborada da experiência, muito menos deve-se imaginar que qualquer forma de verificabilidde do conteúdo de teorias esteja envolvido. Longe disso, o que se busca é produzir um artifício matemático que responda pela defesa intransigente da

---

[266] DE LIBERA, A. *La philosophie médiévale,* p. 64.

infinita divisibilidade do contínuo e ataque a impossibilidade de quantificá-lo, o que é feito, tomando como ponto de partida, a comparação por privação — quanto à área ou à extensão da linha.

Este caminho, em busca da medição do contínuo-natureza, é construído, por Bradwardine em três etapas. A primeira etapa busca mostrar como atua a geometria na medição, por intermédio da noção de "gradação do movimento", o que parece implicar em uma aparente absurda quantificação do não-quantificável. As duas etapas seguintes propõem uma forma de graduar o movimento sem cair neste absurdo. A segunda etapa expõe a noção de intensidade e remissão das formas, na qual as qualidades são descritas como possuidoras de uma certa variabilidade, ou seja, que o branco pode ser mais ou menos branco, que o quente pode ser mais ou menos quente. A terceira e última etapa trata do movimento como capaz de latitude, i.e., de se intensificar ou reduzir de intensidade. Bradwardine propõe que a gradação do movimento em mais veloz ou menos veloz deve ser compreendida como a própria intensidade e remissão do movimento.

3.1 Geometria e Medição do Movimento

Bradwardine, valendo-se do contínuo tal qual estudado acima, nas proposições 21-25 e 32, sustenta que há graus ou velocidades no movimento, como é patente na proposição 24: "*Qualquer um pode encontrar um movimento local uniforme e contínuo (mais rápido ou mais lento) em toda e qualquer proporção entre uma reta finita e outra reta finita.*" A proposição 24 permite compreender que, se o movimento for ordenado segundo sua magnitude, pode ser colocado em correspondência, um para um, com retas ordenadas de modo similar. Esta proposição supõe que, potencialmente, qualquer reta finita pode ser dividida em um infinito número de retas. A proposição 24 também requer as proposições de 21 à 23, que afirmam que uma reta finita pode ser movida com pelo menos um tipo de movimento, i.e., o circular, uma vez que este ocorre sem deformação, i.e, uniformemente, e que os graus de movimento podem ser relacionados às magnitudes espaciais dos pontos na reta. A proposição 21, que inicia a discussão segundo a ordem do texto, anuncia que o movimento em questão é geométrico, i.e., perfeito:

> Prop. 21 – Se um ponto ou uma parte de uma reta finita é movida [com movimento local], qualquer parte grande ou ponto do meio, que não é nenhum dos extremos, também pode ser movido. (*De continuo,* 14*/373)[267]

Há duas provas para esta proposição, uma física e outra geométrica. A prova geométrica requer o postulado da rigidez geométrica, segundo a qual a reta, bem como todas as formas geométricas, são rígidas[268], caso contrário, a reta em movimento sofreria de superposição ou de separação, o que destruiria a continuidade da reta geométrica. Logo, se a reta se move, ela deve fazê-lo perfeitamente rígida.

A proposição 22 afirma a existência de pelo menos uma reta móvel, a que se move com movimento circular, tendo um dos seus extremos fixos:

> Se um término de qualquer reta finita estiver (estacionado, parado) o outro término pode estar continua e uniformemente em revolução, com o todo da linha e cada uma de suas partes até o término imóvel, descrevendo um círculo e cada um de seus pontos móveis

---

[267] "*21 – Si linee recte punctum aliquod vel pars aliqua moveatur localiter, quamlibet partem eius magnan et quodlibet medium punctum, quod <non> est cum eius uno extremo, necessario commoveri.*"

[268] *Elementos*, 4° postulado.

> descrevendo uma circunferência de um círculo. (*De continuo*, 36*/374)[269]

Embora a proposição garanta a existência de pelo menos uma reta móvel, que move uniformemente todos os pontos nela contidos — ou seja, embora Bradwardine tenha explicado a mecânica do movimento circular da reta e do que ela contém — não há, na proposição, nenhuma garantia para a superação da condicional e a afirmação certa de que a reta pode se mover. Estas garantias são dadas na prova à 6ª suposição, que afirma que: "*todo corpo, superfície, linha e ponto pode ser movido.*" A prova é, na verdade, um retorno a Aristóteles, uma vez que o movimento só pode ocorrer em um corpo ou magnitude[270], mas não separadamente. Desta maneira, de uma superfície ou de uma linha, pode ser dito "*ser movido*" se pertencerem a um **corpo** ou magnitude em movimento.[271]

O termo "corpo" tem dois significados: é um sólido geométrico que, possuindo magnitude, dele pode-se dizer "em movimento" ou é um objeto do mundo físico. Todo sólido geométrico existe em potência na naturezae todo corpo natural é capaz de

---

[269] "*22 – Cuiuslibet recte linee finite uno termino quiescente potest alius eius terminus circulariter, uniformiter, et continue circumferri tota recta et qualibet parte eius magna ad terminum eius immobilem terminata circulum describente et quolibet eius puncto moto circumferentiam circuli faciente.*"

[270] "*...ponto é que o que é sem partes e não pode estar em movimento exceto acidentalmente (6∀ϑς ΦΛ:∃,∃06 λ̄) dito de outra maneira, pode estar em movimento somente enquanto o corpo ou a magnitude esteja em movimento e o desprovido de partes está em movimento por inclusão nele.*" (*Física* VI, 10, 240^{b8-10})

[271] Na verdade, Bradwardine chega a contestar a existência de pontos, linhas e outros objetos geométricos, o que torna desnecessário o retorno a Aristóteles: "*Não há superfícies, linha ou pontos*". (*De continuo*, prop. 151, 132*/470)

movimento. Logo, o movimento que atribuímos aos planos e linhas é movimento por analogia aos corpos físicos, dos quais se pode construir corpos geométricos que, por sua vez, possuam linhas e planos.

Pode-se objetar contra esta interpretação que as entidades matemáticas são, para o aristotelismo, derivadas dos corpos materiais pela eliminação de todas as propriedades, exceto a extensão; como o movimento é uma das propriedades eliminadas, não se poderia dizer, destas entidades, que se movem. Contudo, do mesmo modo que somos capazes, em pensamento, de eliminar qualquer propriedade, somos igualmente capazes de reconsiderá-las uma a uma. Desta forma, ao lado da extensão, reconsideramos o movimento.

Embora Bradwardine acredite que deste modo demonstrou a possibilidade de estabelecimento de um movimento geométrico por analogia ao movimento físico, resta uma dificuldade: o tempo. Movimento geométrico é movimento fora do tempo, pois quando se diz "uma linha se move", não se pode dizer que primeiro está aqui e, depois, está ali. Em outras palavras, não se pode dizer que se moveu de um *lugar* para outro, posto que não há lugar no plano geométrico. Porém, como todo movimento geométrico é em vista do movimento físico, e foi dito que toda linha é no corpo, ao falar em movimento geométrico, Bradwardine o tempo de um suposto movimento da potência da entidade a qual a linha se relaciona.

Retornando à proposição 22, fica claro que Bradwardine escolhe falar da reta que gira sob um de seus pontos extremos, que se encontra fixo, por ser este o caso perfeito para estabelecer uma relação direta entre o movimento de qualquer ponto da reta e a magnitude do próprio segmento, como fica claro na proposição seguinte:

> Se uma reta gira ao redor de um ponto terminal estacionário, a velocidade de quaisquer dois pontos que determinem retas que iniciem no ponto imóvel será proporcional às magnitudes destas retas. (*De continuo*, prop. 23, 37*/375)[272]

Tal proposição só pode ser afirmada uma vez assumida a relação entre a representação geométrica e as respectivas entidades físicas. Em outras palavras, o que foi dito para o movimento geométrico só é válido se, no movimento físico de uma entidade rígida, cada ponto traçar seu círculo ao mesmo tempo.

Na argumentação sobre a proposição 24, tendo como base as proposições 20 e 23, Bradwardine apresenta sua conclusão sobre movimento contínuo, que pode ser sistematizado como segue:

1. Suponha que uma linha reta finita (segmento de reta) pode ser dividida em infinitas linhas retas (Prop. 20);
2. Deve-se admitir, de (1), que a proporção de uma linha reta finita para outra é infinita em número, não havendo uma proporção última ou maior;
3. Deve-se considerar que para todo movimento há um movimento mais rápido e um mais lento (Prop. 24), na proporção de uma linha reta finita para outra;
4. Do mesmo modo que (3), pode-se considerar que há um número potencialmente infinito de graus de movimento de móveis;

---

[272] "*23 – Si recta finita super unum eius terminum quiescentem circulariter moveatur, omnes duas rectas terminatas ad punctum immotum et alia puncta mota, et velocitates istorum punctorum proportionales certissime scias esse.*"

5. Se (4), não há o mais lento nem o mais rápido (Prop. 32);
6. Sabe-se que a velocidade de um móvel é medida pela razão da distância percorrida pelo tempo no qual a distância foi percorrida;
7. Se (6), pode ser dito que qualquer distância finita pode ser percorrida em um tempo finito (Corolário a prop. 24).

A argumentação de Bradwardine está calcada na equivalência geométrica dos contínuos, de modo que a infinita divisibilidade potencial da linha é tomada como um equivalente dos infinitos graus potenciais do movimento. Em outros termos, Bradwardine igualou uma quantidade extensiva, a linha, a uma quantidade intensiva, i.e, o grau de movimento. Cada grau do movimento é equivalente ao raio de uma circunferência, sobre o período de tempo que este raio necessita para perfazer uma rotação. Pode-se acrescentar que a velocidade é inversamente proporcional ao tempo, uma vez que este é igual para qualquer ponto no raio. Deve-se ressaltar, ainda, que Bradwardine ordenou os graus de movimento de acordo com a sua intensidade ao torná-los equivalentes à distância dos pontos do raio em relação ao ponto fixo no centro da circunferência.

Esta solução de Bradwardine guarda, contudo, duas limitações: trata-se de um cálculo que só pode ser aplicado ao movimento circular de uma reta e trata-se de um cálculo que só pode ser aplicado ao movimento local, embora Bradwardine espere obter um modo de calcular qualquer intensidade de movimento, não só local, mas também de aumento e diminuição, e de alteração.[273] Esta pretensão de universalidade leva Bradwardine a elaborar uma teoria sobre a intensidade e remissão de formas.

3.2 Intensidade e Remissão das Formas

Como afirma Clagett,[274] quando se escreve sobre intensidade e remissão das formas, é impossível não mencionar Nicole Oresme, que estabeleceu normas claras para o uso do termo "latitude das formas"[275] (*latitudo formarum*). Oresme procurou manter a dimensão geométrica do termo, afirmando que as qualidades do movimento formam uma figura, cuja intensidade é a latitude e a extensão é a longitude. Porém, Oresme não era o único a trabalhar com tal noção. Em Oxford, os mertorianos ganharam o nome de calculadores por elaborarem uma profusão de teorias sobre intensidade e remissão das formas. Seguindo o mapa traçado por Duhem, os mertorianos Bradwardine, Willian Heytesbury, Richard Swineshead, John Dumbleton Walter Burley e Roger Swineshead[276] tiveram suas teorias

---

[273] Vide *De continuo*, prop. 25 (39*/377) e suposição 3 (11*/349).

[274] Vide CLAGETT (Ed.) *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, 1968, pp. 164-177.

[275] "Latitude", de "*latus*", é a segunda dimensão das figuras geométricas. Segundo Anneliese Maier, foi introduzido no mundo medieval latino pelas traduções das obras médicas de Galeno, Avicena e Averróis. Maier traduziu "*latitude formarum*" por "*intensiven Spielraum*" com o intuito de enfatizar o intervalo no qual pode ocorrer uma variação. Vide MAIER. *An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft,*1952, p. 26, 29 e 39.

[276] O trabalho de mapeamento das teorias sobre a intensidade e remissão das formas foi primeiro executado por Duhem em seu *Étude sur Leonard de Vinci*, 1913, v. III, p. 414 ss. Contudo,

largamente copiadas. Na verdade, o uso do termo "latitude" para designar intensidade e remissão das formas é muito anterior aos autores do século XIV, de Oxford e de Paris, e se encontra (Sylla 1974: 226-233) nas obras médicas de Galeno e Avicena. Galeno dividia a saúde em três latitudes: a latitude dos corpos saudáveis, a latitude dos corpos nem saudáveis nem doentes e a latitude dos corpos doentes. Para Crombie, a noção de latitude de Galeno já era conhecida entre os comentadores antigos de Aristóteles, como é possível constatar em Filoponos de Alexandria:

> ...cada propriedade é definida com um certo platô, e não em um determinado ponto. A brancura é definida em um certo platô — pois quando a brancura extrema está perdida, um corpo não deixa de ser imediatamente branco —, e a doçura é definida em um platô — há uma ampla variedade de substâncias doces — e assim por diante. Se as propriedades têm alcances, é óbvio que as misturas das quais estas substâncias resultam devem ter platôs. Deste modo, com o intuito de exercitar nossas mentes, conceba que dez partes do quente, frio, seco e úmido sejam a quantidade do valor total da doçura. Se esta quantidade for reduzida para um em cada uma das qualidades primárias, a doçura irá decrescer significativamente, mas não irá desaparecer. (FILOPONOS, *De generatione et corruptione*: 77)[277]

Em Avicena, a noção de intensidade e remissão das formas aparece para explicar como o homem não corresponde, de modo proporcional, aos elementos ou qualidades que o compõe, uma vez que suas partes ou intensidades podem variar e, ainda assim, formarem o

---

Duhem é impreciso ao referir-se aos manuscritos que atribui aos mertorianos. Coube a Maier, Weisheipl e Sylla refazerem a trajetória de Duhem: MAIER, A. *Ausgehendes Mittelalte*, 1964, v I, p. 497; WEISHEIPL, J. Roger Swyneshead. In: CALLUS, D. *Oxford studies presented to Daniel Callus*, 1964, pp. 234-5, 246. Para Sylla, estas teorias eram competidoras e mutuamente inconsistentes, i.e., optar por uma, implicaria em abandonar todas as demais SYLLA, E. Medieval concepts of the latitude of forms: the Oxford calculators, 1974, pp. 223-283.

[277] Valho-me da tradução publicada em CROMBIE (Ed.). *Scientific change*, 1961, p. 77.

humano e não levarem a corrupção. Estes autores, ao lado de Averróis e Tomás de Aquino, seriam as fontes dos calculadores.[278] Deles, os calculadores herdaram a concepção de que qualidades ou quantidades podem variar em uma certa latitude e longitude que não existe em ato simultaneamente (Sylla 1974: 229-231). Este é o caso da temperatura ou da cor de um corpo. O grau de latitude de uma determinada qualidade pode ser concebido apelando-se para a comparação de vários corpos separados que possuem tal qualidade, de modo que se é capaz de determinar o mínimo e o máximo da latitude.[279]

Muito embora seja possível aceitar essa característica comum nos textos dos calculadores, nada mais é possível dizer que seja aplicado a todos, indistintamente. Quando se pergunta pelos detalhes ou pela aplicação da noção de intensidade e remissão das formas, qualquer tentativa para caracterizar a existência de uma escola desaparece.

3.3 Intensidade e Remissão do Movimento

A noção de intensidade e remissão das formas em Bradwardine aparece como uma explicação da continuidade do movimento. Como assinalei na seção anterior, um movimento é contínuo se duas condições forem satisfeitas: a distância atravessada pelo móvel deve ser contínua, bem como o tempo no qual o móvel o faz. Se, por hipótese,

---

[278] Para Averróis, Duhem não especifica o texto em que a noção apareceria. No caso de Tomás, a referência dada é AQUINAS, T. Quaestiones disputatae, de virtutibus in communi. Q. I, art. XI, utrum virtus infusa augugeatur. In: *Opera omnia,* 1948. v. VIII, p. 572.

[279] Isto não é verdade para os parisienses e para Oresme em particular, para quem as latitudes são medidas de intensidade de uma qualidade particular, e não de uma abstração; Vide CLAGETT, 1968.

houvesse um lapso na distância, de modo a não se constituir mais em um contínuo, haveria um tempo (momento) em que o móvel não poderia estar em lugar algum. Se o lapso fosse no percurso, então, o móvel estaria em mais de um lugar simultaneamente; mas nenhuma dessas duas possibilidades é razoável. Por conseqüência, da infinita divisibilidade do espectro de todas as velocidades possíveis de um movimento contínuo, deve-se, necessariamente, poder extrair a divisibilidade infinita da distância atravessada e a infinita divisibilidade do tempo em que tal travessia durou.[280] É esta preocupação que leva Bradwardine a lançar mão da noção de remissão das formas no *De continuo*: "*32 – Não há um grau remississimo para qualquer forma suscetível de mais ou de menos*" (*De continuo*, 43*/381).[281]

Uma vez que se aplique a noção de intensidade e remissão ao movimento, passa a ser necessário discernir se o movimento é tratado como uma forma distinta do corpo móvel. Se distinta, como o corpo móvel vem a possuir mais ou menos intensidade dessa forma, i.e., o movimento? Havia, no século XIV, dois grupos de resposta para a questão, a saber: ontológico e geométrico.[282] As respostas ontológicas alegavam que a intensificação dava-se

---

[280] Murdoch resume esse problema em uma pergunta: "*É possível, da densidade do espectro de todas as velocidades possíveis, inferir tudo que diga respeito à continuidade do movimento?*" (1957: 167)

[281] "*Nullius forme suscipientis magis et minus remississimum gradum esse.*"

[282] Sigo a tipificação estabelecida por WILSON, C. *William Heytesbury:* Medieval logic and the rise of mathematical physics, 1956, p. 20. Porém, Wilson trabalha um terceiro tipo, o lógico, que, acredito, não se diferencia do ontológico. Segundo Wilson, as respostas lógicas procuravam dar a conhecer como denominar um sujeito no qual ocorre a variação de qualidades.

pela adição de partes da forma ao móvel, enquanto a remissão decorria da subtração dessas mesmas partes. Assim, um corpo móvel tinha sua velocidade aumentada quando incorporava mais partes de movimento. As respostas matemáticas, dentre elas a de Bradwardine, procuravam descrever e relacionar as possíveis variações no tempo e na distância do movimento.

Deve-se ressaltar o esforço empreendido por Bradwardine para manter-se fiel a Aristóteles, conciliando-o com o esforço para medir o movimento. Deve-se acrescentar que o tratamento do movimento requer três características distintas: o móvel, o lugar que o móvel atravessa e o tempo que dura a travessia. Cada uma das três considerações tem que ser uma se o movimento tem que ser um. Dito de outro modo, o móvel, o lugar e o tempo têm que permanecer um e o mesmo durante todo o movimento: isto é "ser contínuo".

Sustentar a permanência do móvel não parece ser problema, mas sustentar a permanência do tempo e do lugar ao longo do movimento não parece ser possível, uma vez que Bradwardine afirma a infinita divisibilidade do movimento. Se o movimento é infinitamente divisível a distância atravessada por um móvel também é infinitamente divisível, bem como o tempo.

Acredito que é impossível, para Bradwardine, demonstrar que a distância e o tempo são infinitamente divisíveis, o que é um claro fracasso da noção de intensidade e remissão das formas aplicada ao movimento. Para esclarecer esta impossibilidade, valho-me da proposta de tradução das proposições de Bradwardine para a linguagem matemática contemporânea defendida por Murdoch em sua tese de doutorado:

> Vamos partir da suposição que o espectro das velocidades ou dos graus é infinitamente divisível, i.e., os termos v_{-1}, v_{-2}, v_{-3},...v_{-n},... formam uma série compacta. Vamos então assumir que Bradwardine assim estabeleceu para todo tipo de movimento, não apenas o movimento circular. Agora, qualquer grau v_{-k} é igual ao quociente da distância atravessada, dividido pelo tempo no qual foi atravessada. Então: $v_k=d_k/t_k$. Substituindo estes valores na série compacta acima temos: $d_1/t_1,d_2/t_2,d_3/t_3,...d_n/t_n,...$ (MURDOCH, 1957: 171)

É possível sustentar que, na substituição de valores proposta acima, ou a distância "d" ou o tempo "t" permaneça constante. Para "d" constante: $d/t_1,d/t_2,d/t_3,...,d/t_n,...$ Para "t" constante: $d_1/t,d_2/t,d_3/t,...,d_n/t,...$ Bradwardine não mostrou que ambos, distância e tempo, têm que ser infinitamente divisível, mas que apenas um tem que sê-lo. Afirmar a latitude dos graus do movimento é infinitamente divisível, então, é o mesmo que afirmar que qualquer movimento continuamente uniforme, acelerado ou desacelerado, é infinitamente divisível. Porém, esta aparência é enganosa, pois nos leva a assumir que a distância atravessada em um movimento contínuo, bem como o tempo no qual a travessia foi feita, são infinitamente divisíveis. Contudo, no caso de um movimento continuamente uniforme, acelerado ou desacelerado, apenas há uma correspondência um a um entre os vários graus pelos quais passam o movimento. Entenda "graus", no plano geométrico, como os pontos (ordenadores) da distância atravessada, infinitamente divisível, e os respectivos pontos (ordenadores) do tempo de travessia. Como diz Murdoch (1957: 172), "*é nesta bi-única correspondência que a aparente viabilidade da prova bradwardiniana reside.*" Aparente porque, em um movimento uniforme, contínuo, não há uma relação um para um entre "d" e "t", mas uma relação de um para mais de um.[283]

Esta falha no tratamento da continuidade do movimento reside na escolha da noção de intensidade e remissão das formas para a elaboração da resposta. O movimento, entendido como forma, fez com que Bradwardine se afastasse do problema que originalmente o levou a noção de intensidade e remissão, i.e, descrever as possíveis variações na distância e no tempo do movimento. Ao final da discussão sobre intensidade das formas, Bradwardine acaba por tratar de mais ou menos quantidades do movimento, ao invés de tratar das posições do móvel no tempo e na representação do espaço euclidiano.

Tratou-se de um projeto que mostrou a possibilidade de correspondência entre o contínuo geométrico e o contínuo físico, mas falhou no estabelecimento de um procedimento de medição com o auxílo de pontos ordenadores. Foi, contudo, uma elaborada tentativa de encontrar um suporte epistemológico para o cálculo do movimento do *De proportionibus*, de modo a ajustá-lo as teses sobre o contínuo e o indivisível de Aristóteles. A falha na medição e o esforço no ajuste epistemológico com Aristóteles adequam-se ao pensamento ambivalente do autor, nem fundador efetivo da ciência moderna, nem aristotélico.

---

[283] É bem verdade que Bradwardine não fala especificamente de um movimento "uniforme". Contudo, há uma pretensão de universalidade ao se tratar o movimento, o que justifica a análise feita.

Conclusão

Há duas reflexões que devem ser feitas sobre a reconstrução histórica do cálculo do movimento em Thomas Bradwardine. A primeira versa sobre os resultados da pesquisa e a segunda sobre o seu significado para a historiografia da ciência do período.

Verificou-se que a estrutura do cálculo do movimento de Bradwardine consolidou-se sobre uma linguagem pouco estável, dado o seu parco grau de ajustamento à aplicação na filosofia da natureza de Aristóteles. Não houve condições para que o cálculo se firmasse enquanto uma teoria prevalente, nem mesmo enquanto uma nova ciência, dada a restrição a relações de proporção (em sua maioria de base 2 (quanto à potência e à raiz)) a inoperância do sistema de medições (que impossibilitaram a fundação de uma nova tradição de pesquisa) e a ausência de um ajuste epistemológico adequado com a ciência de Aristóteles, que impediram que a teoria de Bradawardine se posicionasse como a interpretação definitiva da teoria aristotélica do movimento.

Em Bradwardine, os movimentos locais são de tal forma que suas velocidades são proporcionais entre si. Deste modo, a ciência do movimento trata, tão somente, da velocidade. Vista desse modo, no sistema escolástico de classificação do conhecimento, este tratamento só tem lugar enquanto uma nova ciência intermediária entre a física e a matemática. Seu estatuto epistemológico não é suficiente para aproximar Bradwardine dos modernos. Enquanto ciência intermediária, não possui a mesma autonomia e a mesma relevância epistemológica que Galileu impôs à sua cinemática, uma vez que possui um caráter sempre secundário no sistema de classificação, pois nada diz sobre a natureza última das coisas, não representando, assim, uma mudança na concepção do que é ciência.

O material matemático fornecido por Thomas Bradwardine na *Geometria* e no *De proportionibus*, contudo, permite compreender a proposta de Bradwardine como desvinculada da discussão sobre a classificação escolástica do conhecimento ou sobre o estatuto das ciências intermediárias. Bradwardine age como um técnico que estuda seus instrumentos e é capaz de calcular sem se perguntar sobre a verdade ou a adequação. Esta teria sido uma estratégia do autor: ao invés de lançar novas proposições metodológicas do interior da linguagem aristotélica, os escritos sobre as proporções caracterizam-se como uma tentativa de ensino do que Bradwardine acredita ser a nova linguagem para a filosofia da natureza. Linguagem cujos termos e a sintaxe não são novos, mas de Euclides e de Boécio e que, rearranjados e aplicados à filosofia da natureza, acabam por impor a necessidade de uma teoria a velocidade dos movimentos.

Na verdade, a necessidade de tal teoria já fazia parte dos comentários ao capítulo 5 do livro VII da *Física*. Contudo, via de regra o que se sustenta é a possibilidade de inferir leis gerais, por comparação de movimentos, que preservem a mesma proporção entre a velocidade do movimento e a alteração da resistência, desde que a potência motora ou a resistência seja constante. Bradwardine sustenta que tais inferências equivocam-se por não terem deslocado do foco de atenção do estudo das causas do movimento para a coerência da operação de cálculo realizada. O interesse central deve ser tão somente estabelecer uma lei do movimento que obedeça aos limites impostos apenas pela linguagem das proporções, mas sem abdicar da filosofia da natureza de Aristóteles.

A solução de Bradwardine faz uso do conceito de proporção de proporções, só posteriormente formalizado por Oresme: $P_2/R_2=(P_1/R_1)^n$, sendo $n=V_2/V_1=(P_2-R_2)/(P_1-R_1)$. Logo, $P_2/R_2=(P_1/R_1)^{((P2-R2)/(P1-R1))}$. Deste modo, Bradwardine organiza uma progressão geométrica — iniciada pela unidade e expressa por uma sucessão de proporções da potência e da resistência — elevada a uma progressão aritmética — a proporção das velocidades. Por meio deste procedimento, Bradwardine remedia os equívocos apontados nas teorias do aristotelismo. Para qualquer valor inicial em que P>R, não ocorrerá velocidade quando P for igual ou menor que R. Assim, Bradwardine sustenta que restaurou o sentido original de Aristóteles, uma vez que mantém que a velocidade é determinada pela relação entre a potência e a resistência ao mesmo tempo em que obtém um resultado matemático satisfatório.

A despeito do esforço de Bradwardine em manter-se fiel a Aristóteles, sua escolha pela noção de intensidade e remissão ds formas leva-o a falhar em demonstrar que a distância e o tempo são infinitamente divisíveis. Mais ainda, o movimento como forma, não dá suporte epistemológico para, do interior da ciência de Aristóteles, descrever as possíveis variações na distância e no tempo do movimento e Bradwardine acaba por tratar de mais ou menos quantidades do movimento, ao invés das posições do móvel no tempo e na representação do espaço euclidiano.

Estes resultados trazem para a historiografia do período uma dificuldade quanto a utilizar critérios de periodização para o desenvolvimento da ciência. A habitual vinculação das noções de "novo" e de "revolução" não parecem adequadas para o caso de Bradwardine e, extrapolando, para os calculadores, por duas razões: primeiro, pela ambivalência do desenvolvimento da física e da matemática em Bradwardine, que só ocorre em seu projeto de restauração do sentido original da *Física*; segundo, pela característica dos calculadores em desenvolverem simultaneamente teorias excludentes sem, contudo, que uma houvesse sobressaído e eliminado as competidoras.

Há duas perspectivas que podem ser exploradas sobre a multiplicidade de teorias na filosofia natural do século XIV. Uma, sugerida por Grant (1978), defende que a flexibilidade adquirida pelo programa aristotélico, nas mãos dos calculadores, deu-lhe sobrevida, mas ao preço da coexistência de teorias rivais sem nenhum mecanismo efetivo de escolha. Outra sustenta que a ciência medieval tinha como característica, distinta da ciência posterior, a coexistência pacífica de programas competidores, sem que se quisesse optar ou rejeitar qualquer um deles.

Nessa perspectiva, a noção de intensidade e remissão de Bradwardine, assim como dos outros mertorianos, não pode ser vista como pré-paradigmática da matematização e medição da física ocorrida no século XVII, mas como partícipe de uma situação multiparadigmática. Nem a ambivalência presente no pensamento de Bradwardine, nem a situação multiparadigmática em que ele se encontrava, encaixam-se em qualquer história da ciência.

Bibliografia

1 Fontes primárias

1.1 Thomas Bradwardine

BRADWARDINE, T. An intriguing Fourteenth-Century document: Thomas Bradwardine's *De arte memorativa*. In: GILLMEISTER, Hünter (Ed.). *Archiv für das Studium des neuren Sprachen und Literaturen*, 220, 1983: p. 111-14.

BRADWARDINE, T. *De causa Dei contra Pelagium et de virtute causarum as suos Mertorenses, libri tres*. Ed. Henry Saville. London: Ex Officina Nortoniana apud Ioannem Billium, 1618.

BRADWARDINE, T. De motu incerti auctoris. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

BRADWARDINE, T. La lecture de Thomas Bradwardine sur les Sentences. *Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Age*, 1990.

BRADWARDINE, T. La problématique des propositions insolubles au XIII siècle et au début du XIV. *Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Age,* 1970.

BRADWARDINE, T. Le De futuris contingentibus de Thomas Bradwardine. *Recherches augustiniennes*, 14, 1979.

BRADWARDINE, T. Sermo epinicius. *Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Age*, 1959.

BRADWARDINE, T. *Thomas Bradwardine, geometria speculativa*. Ed. Molland. Sttutgart: Verlag, 1989.

BRADWARDINE, T. *Le traité "De continuo" de Bradwardine.* Paris, 1960.

BRADWARDINE, T. Geometry and the Continuum in Fourteenth Century: A philosophical analysis of Thomas Bradwardine's "*Tractatus de Continuo*". Ed. John Emery Murdoch. Dissertation. University of Wisconsin, 1957.

BRADWARDINE, T. La lecture de Thomas Bradwardine sur les Sentences. GENET, J-F; TACHAU, K. (Ed.). *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen age*, t. 57, 1990-1991: p. 301-306.

BRADWARDINE, T. Le *De futuris contingentibus* de Thomas Bradwardine. Ed. M. Jean-François Genest. *Recherches augustiniennes*, 14, 1979: p. 249-336.

BRADWARDINE, T. On the continuum, definitions 1-3, 7-14, 23-24, suppositions 6-9, conclusions 22-24, 26. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

BRADWARDINE, T. The *"Geometria speculativa"* of Thomas Bradwardine: Text with critical edition. Ed. A. G. Molland. Dissertation. University of Cambridge, 1967.

BRADWARDINE, T. *Thomas Bradwardine and his treatise of proportions*. Ed. Crosby, L. Madison: The University of Wisconsin Press, 1955.

BRADWARDINE, T. Thomas Bradwardine's *Treatise on 'incipit' and 'desinit'*: edition and introduction. Ed. Lauge Olaf Nielsen. *Cahiers de l'Institute du moyen âge grec et latin,* 42, 1982: p. 1-83.

1.2 Outras

AGOSTINHO. *Confissões*. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1979.

ALBERT OF SAXONY. Questions on the eight books of the physics of Aristotle, book VI, question 5. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

APOLLONIUS OF PERGA. *Conics*. Trad. Catesby Taliaferro. The Great Books. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

AQUINO, T. de. *Commentary on Aristotle's Physics*. Notre Dame: Dumb Ox Books, 1999.

AQUINO, T. de. *Comentário ao* Tratado da Trindade *de Boécio*, questões 5 e 6. Trad., introd. e notas Carlos Arthur R. do Nascimento. São Paulo: Editora Unesp, 1998.

ARCHIMEDES. *The works of Archimedes:* including *The Method.* Trad. Thomas L. Heath. The Great Books. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

ARCHIMEDES. *The works of Archimedes*. Trad. e ed. Thomas L. Heath. Nova Iorque: Dover, 2002.

ARISTÓTELES (Pseudo-). *Mechanica*. Leipzig: Apelt edition, 1888. Landmarks of science.

ARISTÓTELES. *Physica*: translatio vaticana. Ed. Augustinius Mansion. In: *Series Aristoteles Latinus* VII, 2. *Corpus philosophorum medii aevi*. Bruges: Desclée de Brower, 1957.

ARISTÓTELES. Physica: translation vetus. In: Aristoteles Latinus, VII 1, Fasciculus secundus, *Corpus philosophorum medii aevi*. Eds. Fernand Bossier and Josef Brams. Leiden: E.J. Brill, 1990.

ARISTÓTELES. Physics. Trad. R. P. Hardie e R. K. Gaye. In: *The complete works of Aristotle*: the revised Oxford translation. Princeton: Princeton University Press, 1995, v. 1.

ARISTÓTELES. Posterior Analytics. Trad. J. Barnes, texto Ross, OCT Oxford, 1964. In: *The complete works of Aristotle*: the revised Oxford translation. Princeton: Princeton University Press, 1995. v. 1.

AVERRÓIS. De physico auditu. In: *Aristotelis opera cum Averrois commentariis*. Frankfurt am Main: Minerva (Junctas 1562-1574), 1962. vol. IV

AVERRÓIS. *Averröes' questions in physics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1990.

AVERRÓIS. *Epitome de Fisica*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Instituto Hispano-Arabe de Cultura, 1987.

BARNES, J. *History of Edward III*. Cambridge: 1688.

BIRCHINGTON, S. (atribuído a). Vita Archiepiscoporum Cantuariensium a prima sedis fundatione ad unnum 1369. In: *Anglia Sacra*. London: Henry Wharton Ed, 1691. I, 42-43.

BOÉCIO. *De arithmetica*. Amsterdam: (texto inglês). Rodopi, 1983.

BOÉCIO. *De arithmetica*. Turnhout: Brepols Publishers, 1999.

CHAMBRE, William de. Continuatio historiae Dunelmensis. In: *Anglia Sacra*. London: Henry Wharton Ed., 1691.

CHAUCER, G. *The riverside Chaucer*. Ed. Larry D. Benson. Boston: Houghton Mifflin, 1987.

D'ALVERNY, Marie T. Translations and Translators. In: BENSON, R. E.; CONSTABLE, G. (Ed.). *Renaissance and Renewal in the Twelfth Century*, Oxford: Clarendon Press, 1982: p. 421-462.

DANTE, A. *Divina commedia*. Edizione integrale. Roma: TEN, 1993.

DENE, William de. Historia Roffensis. In: *Anglia Sacra*. London: Henry Wharton Ed., 1691. I, 375.

EUCLID. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Trad. Thomas L. Heath. The Great Books. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

GERARD OF BRUXELAS. On motion, book I, suppositions 1-8, proposition 1; book II, proposition 1. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

HERO OF ALEXANDRIA. Mechanics. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

HEYTESBURY, William. *Medieval logic and the rise of mathematical physics.* Ed. by Curtis Wilson. Madison: University of Wisconsin Press, 1975.

HEYTESBURY, William. *On insoluble sentences*: chapter one of his rules for solving sophisms. E. J. Brill, 1950.

HEYTESBURY, William. *On maxima and minima:* chapter 5 of Rules ofr solving sophismata, with na anonymous 14th Century discussion. D. Reidel Pub. Co., 1985.

JOHN DUMBLETON. The summa of logical and natural things, part III, chapters 10, 11. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

MARSILIUS OF INGHEN. *Treatises on the properties of terms.* Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 1983.

MURIMUTH, Adam of. Continuatio chronicarum. *Rerum Britannicarun Medii Aevi Scriptores*, n. 93, Londres, 1889.

NICOMACHUS OF GERASA. *Introduction to arithmetic.* Trad. Martin L. Ooge. The Great Books. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

OCKHAM, G. *Brevis summa libri physicorum; summa philosophiae naturalis et quaestiones in libros physicorum aristotelis.* Nova Iorque: St. Bonaventure University, 1984.

OCKHAM, G. *Tractatus de quantitate et tractatus de corpore christi.* Nova Iorque: St Bonaventure University, 1986.

OCKHAM, W. *Predestination, God s foreknowledge, and future contingents.* Indianapolis: Hackett, 1983

ORESME, N. *De configuarationibus qualitatum.* Bk. I, chap. 21 (MS London, British Museam Sloane 2156, f. 166v). *Isis,* v. 43, n. 7, 1952.

ORESME, N. *Nicole Oresme and the kinematics of circular motion: Tractatus de commensurabilitate vel incommensurabilitate motuum celi.* Ed. introd. and trans. Edward Grant. Madison: University of Wisconsin Press, 1971.

ORESME, N. *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes.* Ed. E. Grant. Madison: University of Wisconsin Press, 1966.

PANTIN, W. *The English Church in the Fourteenth Century.* Cambrigde: Cambridge University Press, 1955.

PAPPUS OF ALEXANDRIA. *Mathematical collection.* Berlin: Edition of F. Hultsch, 1876 (Landmarks of Science).

PERDERSEN, O. *Early physics and astronomy*: a historical introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

PLOTINUS. *Enneades.* Paris : Belles Lettres, 1976. 2 v.

RABELAIS, F. *The histories of Gargantua and Pantagruel.* Harmondsworth: Peguin Books, 1955.

SÃO VICTOR, H. The Didascalicon of Hugh of ST. Victor. In: TAYLOR (Ed.). *A Medieval Guide to the Arts*. New York: Columbia University Press, 1961.

SHERWOOD, W. Syncategoremata. E. J. Reginald O'Donnell. *Mediaeval Studies* 3, 1941: p. 46-93.

SIMPLICIUS. *Corollaries on place and time*. Trad. J.O. Urmson. London: Duckworth, 1992.

SIMPLICIUS. *On Aristotle Physics 4.1-5, 10-14*. Trad. J.O. Urmson. London: Duckworth, 1992.

SWINESHEAD, R. (atribuído a). On motion (a fragment). In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

SWINESHEAD, R. The book of calculations: rules on local motion, second supposition to conclusion 38 and other conclusions. In: CLAGETT, Marshall. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

2 Fontes Secundárias

Dictionnaire de théologie catholique. Paris, 1903-1950.

Munimenta academica, parte I: "Libri cancellarii et procuratorum". In: ANSTEY, H. (ed.). Rerum Britannicarum Medii Aevi Scriptores, n. 50, p. 113.

Rule of St. Benedict. Trad. Charles Gasquet. London: Chatto & Winders, 1925.

BIARD, J. Les logiciens médiévaux face aux textes d'Aristote: l'exemple de Guillaume d'Ockham. In: SINACEUR, M. *Penser avec Aristote*. Toulouse: Erès, 1991.

BONNAUD, R. L'Education scientifique de Boèce. *Speculum* IV, 1929: 198-206.

BROWN, G. The evolution of the term "mixed science". *Journal of the History of Ideas*, n. 33, 1991.

BROWN, J. The miracle of science. *The Philosophical Quarterly*, v. 32, n. 128, 1982.

BROWN, J. The science of weights. In: LINDBERG, D. (Ed). *Science in the middle ages*. Chicago: University of Chicago Press, 1978.

BUSARD, H. Die arithmetica speculativa des Johannes de Muris. *Scientiarum Historia*, XIII, 1971: 103-132. (também atribuída a Bradwardine)

CAJORI, F. The history of Zeno's arguments on motion: in the development of the theory of limits. *The American Mathematica Monthly*, v. 22, n. 2, 1915: 39-47.

CALLUS, A. The Oxford career of Robert Grosseteste. *Oxoniensia* X, 1945.

CLAGETT, M. Richard Swineshead and late medieval physics: 1. The intension and remission of qualities (1), *Osiris*, v. 9, 1950: 131-161.

CLAGETT, M. Archimedes in the Middle Ages: De mensura circuli. *Osiris*, v. 10, 1952.

CLAGETT, M. *Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1979.

CLAGETT, M. The curvis superficiebus Archimenidis: a mediaeval commentary of Johannes de Tinemue on Book I of the De sphaera et cylindro of Archimedes. *Osiris*, v. II, 1954, p. 295-358.

CLAGETT, M. The use of the Moerbeke translations of Archimedes in the works of Johannes de Muris. *Isis*, v. 43, 1952.

CLAVELIN, M. *La philosophie naturelle de Galilée*. Paris: Armand Colin, 1968.

CLAVELIN, M. A revolução galileana: revolução metodológica ou teórica. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* 9, 1986.

CLAVELIN, M. Conceptual and technical aspects of the galilean geometrization of the motion of heavy bodies. In: SHEA, W (Ed.) *Nature Mathematized*. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

COHEN; DRABKIN. *Source book in greek science*. New Yorkr: Dover, 1948.

COURTENAY, W. Recent Work on Fourteenth-Century Oxford Thought. *History of Education Quartely*, 1985: 227-232.

CROMBIE, A. C. *The history of science from Augustine to Galileo*. New York: Dover, 1996.

CROMBIE, A. *Robert Grosseteste and the experimental science, 1100-1700*. Oxford: Claredon Press, 1953.

CROMBIE, A. Quantification in medieval physics. *Isis*, v. 52, n. 2, 1961: 143-160.

CROSBY, A. W. *A mesuração da realidade*: a quantificação e a sociedade ocidental 1250-1600. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

CUSTÓDIO, M. *Implicações do problema da interdependência entre a História e a Filosofia da Ciência em Imre Lakatos*. Diss. Mestrado. Campinas: IFCH, 1998

DI LISCIA, D. A. Aceleracion y caida de los graves en Oresme. *Patristica et Mediaevalia*, XIII, 1992.

DIJKSTERHUIS. *The mechanization of the world picture*. Princeton: Univ. Press, 1961.

DOLNIKOWSKI, W. *Thomas Bradwardine*: a view of time and a vision of eternity in Fourteenth-Century thought. Leiden: Brill Academic Publishers, 1997.

DRAKE, S. Bradwardine's function, mediate denomination, and multiple continua. Physis, *Riv. Internaz. Storia Sci.*, 12 (1), 1970: 51-68.

DRAKE, S. Mediaeval ratio theory vs compound medicines in the origins of Bradwardine's rule. *Isis* 64, n. 221, 1973: 67-77.

DUBOIS, J. *Le temps et l'instant selon Aristote*. Paris: Desclée de Brouwer, 1967.

DUHEM, P. *Études sur Léonard de Vinci*. Paris: A. Hermann et Fils, 106-1913. 3 v;

DUHEM, P. *Le système du monde:* histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Paris: Hermann, 1988. 10 v.

DUHEM, P. *Les origins de la statique*. Paris: Hermann, 1905-1906. 2 v;

DUHEM, P; Ariew, R. (Ed.). *Medieval Cosmology*: Theories of Infinity, Place, Time, Void, and the Plurality of Worlds. Trans. by Roger Ariew. Chicago /London: University of Chicago Press, 1985.

DUHEM, P. Salvar os fenômenos: ensaio sobre a noção de teoria física de Platão a Galileu. Trad. R A Martins. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência,* Campinas, Ed. do CLE, suplemento 3, 1984.

DURAND, D. Nicole Oresme and the medieval origins of modern science. *Speculum*, v. XVI, 1941.

ETZKORN, J. Codex Merton 284: Evidence of Ockham's Early Influence at Oxford. In: HUDSON, A.; WILKS, M. (Ed). *From Ockham to Wyclif.* Oxford: Basil Blackwell, 1987: 31-42.

ÉVORA, F.R.R. Physis, kinesis, topos e kenon: um estudo da teoria aristotélica do movimento. *Cadernos Espinosanos* VIII, 2002: 52-74.

FLEMING, B. *Thomas Bradwardine*: Oxford Scholar, Royal Servant and Archbishop of Canterbury. Thesis. Université Catholique de Louvain, 1964.

FORTIN, E; O'NEILL, P. Condemnation of 219 propositions. In: LENHER, R; MAHDI, M. *Medieval political philosophy*: a source book. Toronto: The Free Press, 1963.

FRYDE, E.B; HIGHFIELD, J.R.L. An Oxfordshire Deed of Balliol College. *Oxoniensia*, t. 20, 1955.

GERSH, S. Middle Platonism and Neoplatonism: The Latin Transition. *Medieval Studies* XXIII. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 1986.

GIBSON, S. *Statua Antiqua Universitatis Oxoniensis*. Oxford, 1931: p. cix-cxii.

GRANT, E. *Much Ado about Nothing*: Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution. Cambridge /London /New York: Cambridge University Press, 1981.

GRANT, E. Medieval and seventeenth-century conceptions of an infinite void space beyond the cosmos. *Isis*, v. 60, n. 1, 1969: 39-60.

GRANT, E. *Physical science in the Middle Ages*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

GRANT, E. *Planets, stars, and orbs*: the medieval cosmos, 1200-1687. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

GRANT, E. *Oresme's* De proportionibus proportionum *and* Ad pauca respientes. Madison: University of Wisconsin Press, 1966.

GRANT, E. Science and Medieval Universtity. In: KITTELSON, J.; TRANSUE, P. J. *Rebirth, Reform and Resilience*: Universties in Transition, 1300-1700. Columbus, Ohio: Ohio University Press, 1984: 68-102.

GRANT, E. *The foundations of Modern science in the Middle Ages:* their religious, institutional, and intellectual contexts. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

GRANT, E; MURDOCH, J. (Ed.). *Mathematics and its application to science and natural philosophy in the Middle Ages*: essays in honor of Marshall Clagett. Cambridge: Cambridge University Press, 2987.

HAHN, S. Thomas Bradwardinus und seine Lehre von der menschlichen Willensfreiheit. *Beiträge zur Gesch. Der Philos. des Mittelalter.* Münster: 1905.

HASKINS, C. *Studies in the History of Mediaeval Science*. Cambridge, 1927.

HASKINS, C. *The Renaissance of the Twelfth Century*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1927.

HEATH, Thomas. *A history of greek mathematics*. Oxford: Oxford Press, 1921.

HEATH, Thomas. *Mathematics in Aristotle*. New York/London: Garland Publishing Inc., 1980.

HINTIKKA, J. Necessity, universality, and time in Aristotle. *Articles on Aristotle 3,* London, 1979: 108-124.

JAOUICHE, K. La mécanique. In: SINACEUR, M. *Penser avec Aristote*. Toulouse: Erès, 1991.

JESSEPH, D. Philosophical theory and mathematical practice in the seventeenth century, *Stud. Hist. Phil. Sci*, v. 20, n. 2, 1989: 215-244.

KENNEDY, A. Philosophical Scepticism in England in the Mid-Fourteenth Century. *Vivarium* 21, 1983: 35-57.

KIBRE, P; NANCY G. The Institutional Setting. The Universities. In: LINDENBERG, D. C. (Ed.). *Science in the Middle Ages*. Chicago: University of Chicago Press, 1978: 120-144.

KOYRÉ, A. *Estudos de história do pensamento científico*. Rio de Janeiro: Forense, 1982.

KOYRÉ, A. *Estudos Galilaicos*. Lisboa: Dom Quixote, 1986.

KOYRÉ, A. Giambattista Benedetti, critic of Aristotle. In: McMULLIN, E (Ed.). *Galileo; man of science*. New Jersey: The Scholar's Bookshelf, 1988.

KRETZMAN, N. Incipit/Desinit. In: *MTSM*, p. 101-136.

KUHN, T. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1992.

KUHN, T. *A revolução copernicana*. Lisboa: Edições 70, 1957.

KUHN, T. Dubbing and redubbing: the vulnerability of rigid designation. *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, v. XIV, 1990.

KUHN, T. The halt and the blind: philosophy and history of science. *British Journal for the Philosophy of Science*, v. 31, n. 2, 1980.

LAIRD. The school of merton and the middle sciences. *Bulletin de Phil. Med.*, 38, 1996.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático:* provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

LAKATOS, I. *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Buenos Aires, 1983.

LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

LAKATOS, I. *The methodology of scientific research programmes; Philosophical papers*. Cambridge: University Press, 1978. Tomos I e II.

LANDES, D. S. *Revolution in time*: clocks and the making of the modern world. Cambridge: Harvard University Press, 1983.

LAUDAN L. Teorias do método científico de Platão a Mach. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, sup. 1, 1980.

LAUN, J. Recherches sur Thomas Bradwardin, précurseur de Wyclif. *Revue d'histoire et de philosophie religieuse* 9, 1929: 217-233.

LEAR, J. Aristotle's philosophy of mathematics. *The Philosophical Review* XCI, n. 2, 1982.

LECHLER, G. *De Thomas Bradwardino commentatio*. Leipzig: 1862.

LEFF, G. *Bradwardine and the pelagians*: a study of his "De causa Dei" and its opponents. Cambridge: University Press, 1957.

LEFF, G. The fourteenth century and the decline of scholasticism. *Past and Present*, n. 9, 1956: 30-41.

LEFF, G. The Transmission of Greek and Arabic Learning in the West. In: LINDBERGH, D. C. *Science in the Middle Ages*. Chicago: University of Chicago Press, 1978.

LENNOX, J. Aristotle, Galileo, and "mixed science". In: WALLACE, W. *Reinterpreting Galileo*. Washington: The Catholic University Press.

LINDBERG, D, (Ed.). *Science in the Middle Ages*. Chicago History of Science and Medicine Series. Chicago /London: University of Chicago Press, 1978.

LINDBERG, D. *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*. The University of Chicago History of Science and Medicine. Chicago /London: University of Chicago Press, 1976.

LIVESEY. The Oxford calculatores, quantification of qualities, Aristotle's prohibition of metabasis. *Vivarium*. XXIV, n. 1, 1986.

MAIER, A. *Die Vörlaufer Galileis im 14. Jahrhundert*: I: Studien zu Naturphilosophie der Spätscholastik. Rome: Ed. Storia e letteratura, 1949.

MAIER, A. The nature of motion. In: SARGENT, S. D. (Ed.) *On the threshold of exact science:* Selected writings of Anneliese Maier on late medieval natural philosophy. Philadelphia: University of Pennsylvania Press, 1982.

MAIER, A. *On the Threshold of Exact Science*: In: SARGENT, S. D. (Ed.). *On the threshold of exact science:* Selected Writings of Anneliese Maier on Late Medieval Natural Philosophy. Philadelphia: University of Pennsylvania Press, 1982.

MASI, M. *Boethian number theory*: a translation of the De Instituitione Arithmetica. Amsterdam: Rodopi, 1983.

McCARTHY, D. *Free Choice and Liberty According to Thomas Bradwardine* Diss. University of Toronto, 1965.

McGRADE, A. Enjoyment at Oxford after Ockham. In: HUDSON, A.; WILKS, M. (Ed.). *From Ockham to Wyclif.* Basil Blackwell, 1978: 63-88.

McGRATH, A. The Anti-Pelagian Structure of 'Nominalist' Doctrines of Justification. *Ephemerides Theologicae Lovanienses* 57, 1981: 107-119.

McKEON, R. Aristotle's conception of the development and the nature of scientifc method. *Journal of the History of Ideas* VIII, n. 1, 1947.

McMULLIN, E (Ed.). *Galileo; man of science*. New Jersey: The Scholar's Bookshelf, 1988.

McVAUGH, M. Arnold of Villanova and Bradwardine's Law. *Isis* 58, 1967: 56-54.

MESNAGE, P. The building of clocks. In: DAUMAS, M. (Org.). *A history of technology and invention through the ages*. New York: Crow, 1969.

MICHEL, P-H. *De Pythagore à Euclide*. Paris, 1950.

MOLLAND, A. An examination of Bradwardine's geometry. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Ancestrors of physics. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Campanus and Eudoxus: or trouble with texts and qualities. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Colonizing the world for mathematics: the diverity of medieval strategies. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Continuity and measure in medieval natural philosophy. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Cornelius Agrippa's mathematical magic. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. G. An examination of Bradwardine's geometry. *Archive for History of Exact Science* 19, 1978: 113-175.

MOLLAND, A. Implicit versus explicit geometrical methodologies: the case of construction. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. John Dumbleton and the status of geometrical optics. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Mathematics in the thought of Albertus Magnus. In MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Medieval ideas of scientific progress. *Journal of the History Ideas* XXXIX, n. 4, 1978.

MOLLAND, A. Nicole Oresme and scientific progress. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Richard Swineshead and continuously varying quantities. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Roger Bacon as a magician. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. Shifting the foundations: Descartes' transformation of ancient geometry. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. The atomisation of motion: a facet of the scientific revolution. *Stud. In Hist. and Phil. of Sci.*, v. 13, 1982.

MOLLAND, A. The atomization of motion: a facet of the scientific revolution. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. The geometrical background to the Merton school. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, A. The oresmian style: semi-mathematical semi-holistic. In: MOLLAND, A. *Mathematics and the medieval ancestry of physics*. Aldershot: Variorum: 1995.

MOLLAND, G. The Geometrical Background to the 'Merton School: An Exploration into the Application of Mathematics to Natural Philosophy in the Fourteenth Century. *British Journal for the History of Science* 4, 1968: 108-125.

MOLLAND. Atomism and Motion in the Fourteenth Century. In: MENDELSOHN, E. (Ed.). *Transformation and Tradution in the Sciences*: Essays in Honor of I. Bernard Cohen. Cambridge: Cambridge University Press, 1984: 45-66.

MOLLAND. From Social to Intellectual Factors: An Aspect of Unitary Character of Late Mediaeval Learning. In: MURDOCH, J. E.; SYLLA, E. D. (Ed.). *The Cultural Context of Mediaeval Learning*. Boston, Massachusetts: D. Reidel, 1975: 271-348.

MOODY, E. Ockham and Aegidius of Rome. *Franciscan Studies* IX.

MOODY, E. Studies in medieval philosophy, science, and logic. *Collected Pappers,* 1933-1969. Berkely: University of California Press, 1975.

MOODY, E.; CLAGETT, M. (Ed.). *The medieval science of wights (scientia de ponderibus)*: treatises ascribed to Euclid, Archimedes, Thabit ibn Qurra, Jordanus de Nemore, and Blasius of Parma. Madison: University of Wisconsin, 1970.

MOREAU, J. Le temps selon Aristote. *Revue Philosophique de Louvain* 46, 1948.

MURDOCH, E. Infinity and Continuity In *CHLMP*, p. 564-591.

MURDOCH, E. Proportional analysis in natural philosophy: a case study. *Synthese* 40, 1979: 117-146.

MURDOCH, E. Superposition, Congruence and Continuity in the Middle Ages. In: *L'Aventure de la science*: Mélanges Alexandre Koyré, Vol I. Historie de la pensée, Vol. XII. Paris: École pratique des hautes études, 1964: 416-441.

MURDOCH, E. The Mediaeval Language of Proportions: Elements of the Interaction with Greek Foundautions and the Development of New Mathematical Techniques. In: CROMBIE, A. C. (Ed.). *Scientific Change*. London: Heinemann, 1963: 237-271.

MURDOCH, J, The Analytic Character of Late Mediaeval Learning: Natural Philosophy Without Nature. In: ROBERTS, L. D. *Approaches to Nature in the Middle Ages*. Binghamton, New York: Center for Medieval and Early Renaissance Studies, 1982: 171-213.

MURDOCH, J.E. Thomas Bradwardine: mathematics and continuity in the fourteenth century. In: MURDOCH (Org.) *Mathematics and its applications to science and natural philosophy in Middle Ages*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

MURDOCH, J; SYLLA, E. The Science of Motion. In: LINDBERGH, D. C. *Science in the Middle Ages*. Chicago: University of Chicago Press, 1978: 206-264.

MURRAY, A. *Reason and Society in the Middle Ages*. Oxford: Oxford University Press, 1978.

NAYLOR, R. Galileo's method of analysis and synthesis. *Isis* 81, n. 309, 1990.

OBERMAN, H. *Archbishop Thomas Bradwardine, a Fourteenth-Century Augustinian*: A Study of this Theology in its Historical Context. Utrecht: Kemink and Zoon, 1958.

OBERMAN, H. Thomas Bradwardine: um précurseur du Luther? *Revue d'histoire et de philosophie religieuse* 40, 1960: 146-151.

PEDERSEN, O. Logistics and theory of functions: an essay in the history of Greek mathematics. In: *XXXI Semaine de Synthèse 1-7 juin, 1973; Avant, avec, après Copernic; La representacion de l'univers et ses conséquences épistémologiques*. Paris: Albert Blanchard, 1975.

PUIG, J. Quelques remarques sur les notions de "nécessité" et de "puissance". In: SINACEUR, M. *Penser avec Aristote*. Toulouse: Erès, 1991.

RASHDALL, H. *Medieval universities*. Editado por Powicke and Emden. Oxford: University Press, 1936.

RASHED, R. Mathématiques et physique. In: SINACEUR, M. *Penser avec Aristote. Toulouse*: Erès, 1991.

ROSS, W. David. *Aristóteles*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

ROSS, W. David. *Aristotle's Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1966.

ROURÉ, L. La problématique des propositions insolubles au XIII siècle – Willian Shyreswood, Walter Burleigh et Thomas Bradwardine. *Archives d'histoire doctrinale et litteraire du Moyen Age* 37, 1970-1971: 205-326.

ROWLAND, B. Bishop Bradwardine on the Artificial Memory. *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 41, 1978: 307-312.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

SCHOECK, R. On rhetoric in fourteenth-century Oxford. *Mediaeval Studies*. XXX, 1968.

SHAPIN, S; SCHAFFER, S. Lev*iathan and the air-pump; Hobbes, Boyle, and the experimental life*. Princeton: Princeton University Press, 1995.

SHEA, W (ed.) *Nature Mathematized*. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

SHERMAN, Claire Richter. Imaging Aristotle: verbal and visual representation. In: *Fourteenth-Century France*. Berkeley: University of California Press, 1995.

SHEROVER, C. M. *The human experience of time*: the development of its philosophical meaning. New York: New York University Press, 1975.

SINACEUR, M (Ed.). *Penser avec Aristote*. Toulouse: Erès, 1991.

SPADE, P. Insolubilia and Bradwardine's Theory of Signification. *Annuaire de l'école pratique des hautes études* 85, 1977-1978: 391-393.

SPADE, P. *Insolubilia and Bradwardine's theory of signification, lies, language and logic in the late Middle Ages*. London, 1988.

STRONG, E. The relationship between metaphysics and scientific method. In: McMULLIN, E (Ed.). *Galileo; man of science*. New Jersey: The Scholar's Bookshelf, 1988.

SYLLA, E. Compounding Ratios: Bradwardine, Oresme, and the First Edition of Newton's Principia. In: MENDELSOHN, E. *Transformation and Tradition in the Sciences: Essay in Honor of I. Bernard Cohen*. Cambrigde: Cambridge University Press, 1984: 11-43.

SYLLA, E. *Oxford calculators and the mathematics of motion*, 1320-1350. Harvard Dissertations in the History of Science.

SYLLA, E; McVAUGH, M. (Ed.). *Texts and contexts in ancient and medieval science: studies on the occasion of John E. Murdoch's seventieth birthday*. Leiden: Brill Academic Publishers, 1997.

SZABÓ, A. *Le débuts des mathématiques grecques*. Paris: Vrin, 1977.

TACHAU, K. The Problem of species in medio at Oxford in the Generation after Ockham. *Mediaeval Studies* 44, 1982: 394-443.

TAIT, J. *Chronica Johannis de Reading et Anonymi Cantuarensis 1346-1367*. Manchester, 1914.

TAKAHASHI, K. The mathematical foundations of Bradwardine's rule. *Historia Sci.* 26, 1984: 19-38.

TANNERY, P. Des principes de la science de la nature chez Aristotle. In: *Mémoires scientifiques*. v. VII. Paris: Gauthier-Villars, 1925.

TANNERY, P. Galileo and the principles of dynamics. In: McMULLIN, E (Ed.). *Galileo; man of science*. New Jersey: The Scholar's Bookshelf, 1988.

THORNDIKE, L. Calculator. *Speculum* VII, n. 2, 1932: 221-230.

VAZ, H. Fisionomia do século XIII. *Kriterion* XIX, n. 66, 1966.

VILLA-AMIL Y CASTRO, J. *Catálogo de los manuscritos existentes em la Biblioteca Del Noviciado de la Universidad Central*. Madrid: 1878.

VISCOVINI, G. Due commenti anonimi al 'Tractatus proportionum'di Tommaso Bradwardine. *Rinascimento*, Series 2, 19, 1979: 231-233.

WALLACE, W. *Causality and Scientific Explanation*. Volume I: Medieval and Early Classical Science. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1972.

WALLACE, W. Mechanics from Bradwardine to Galileo. *Journal of the History of Ideas* v. 32, n. 1, 1971: 15-28.

WALLACE, W. *Galileo and his sources*. New Jersey: Princeton University Press, 1984.

WALSH, K. *A Fourteenth-Century Scholar and Primate*: Richard FitzRalph in Oxford, Avignon and Armagh. Oxford: Clarendon Press, 1981.

WEISHEIPL, A. Ockham and Some Mertonians. *Mediaevel Sudies* 30, 1968: 163-213.

WEISHEIPL, A. Ockham and the Mertonians. In: CATTO, J. I. *The History of the University of Oxford*, vol. I. Oxford: Clarendon Press, 1984: 607-658.

WEISHEIPL, J. A. Classification of the sciences in Medieval Thought. *Mediaeval Studies* XXVII, Toronto, 1965.

WEISHEIPL, J. A. Developments in the arts curriculum at Oxford in the early Fourteenth Century. *Mediaeval Studies*. XXVIII, Toronto, 1966.

WEISHEIPL, J. A. *Early Fourteenth Century physics of the Merton 'School' with special reference to Dumbleton and Heytesbury*. PhD Thesis. Oxford: 1956.

WEISHEIPL, J. A. Ockham and some mertorians. *Mediaeval Studies* XXX, Toronto, 1968.

WEISHEIPL, J. A. Repertorium Mertorense. *Mediaeval Studies* XXXI, 1969: 174-224.

WEISHEIPL, J. Galileo and his precursors. In: McMULLIN, E (Ed.). *Galileo; man of science*. New Jersey: The Scholar's Bookshelf, 1988.

WEISHEIPL, J. Medieval natural philosophy and modern science. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. Motion in a void: Aquinas and Averroes. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press, 1985.

WEISHEIPL, J. Natural and compulsory moviment. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press, 1985.

WEISHEIPL, J. The celestial movers in medieval phyasics. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. The commentary of St Thomas on the *De caelo* of Aristotle. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. The concept of nature. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. The Curriculum of the Faculty of Arts at Oxford in the Early Fourteenth Century. *Mediaeval Sudies* 26, 1964: 143-185.

WEISHEIPL, J. Classification of the sciences in medieval thought. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. *The development of physical theory in the middle ages*. Michigan: Ann Arbor.

WEISHEIPL, J. *The interpretation of Aristotles's Physics and the Science of Motion*, *CHLMP*, p. 521-536.

WEISHEIPL, J. The omne quod movetur ab alio movetur in medieval physics. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press, 1985.

WEISHEIPL, J. Galileo and the principle of inertia. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. The evolution of the scientific method. In: *Nature and motion in the Middle Ages.* Washington: The Catholic University of America Press,1985.

WEISHEIPL, J. The specter of motor coniunctus in medieval physics. In: *Nature and motion in the Middle Ages*. Washington: The Catholic University of America Press, 1985.

WIELAND, Wolfgang. *La Fisica di Aristotele*. Bologna: Socictà editrice il Mulino, 1993.

WOLFSON, Harry Austryn. *Crescas' critique of Aristotle:* problems of Physics in jewish and arabic philosophy. Cambridge: Harvard University Press, 1929.

WULF, M. de. *Histoire de la philosophie médiévale*. Louvain et Paris: 1947.