Semântica Algébrica de Traduções Possíveis

Juliana Bueno

Dissertação apresentada ao
Instituto de Filosofia e
Ciências Humanas da
Universidade de Campinas
para a obtenção do grau de
Mestre em Filosofia (Área de Lógica)

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio**
CLE-UNICAMP, Campinas, Brasil

Co-orientador: **Prof. Dr. Carlos Caleiro**
CLC-IST, Lisboa, Portugal

*Durante a elaboração deste trabalho
a autora recebeu apoio financeiro da CAPES.*

31 de agosto de 2004

Dedico aos meus pais

Dentro da eternidade e a cada instante.

(Vinícius de Moraes, *Soneto do amor total*)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço profundamente ao Walter A. Carnielli−muito, muito mais que professor e amigo−pela extrema dedicação e apreço e também pelo estímulo constante nesses últimos anos, que teve como fruto esta dissertação.

Desejo também agradecer aos orientadores, professores Marcelo E. Coniglio e Carlos Caleiro (IST, Portugal), que juntos fizeram com que meus horizontes intelectuais se expandissem.

Às professoras e ao professor: Itala M. Loffredo D'Ottaviano por ter sempre acreditado na proposta deste trabalho e por tê-lo apreciado desde quando ele nem bem existia; Hércules A. Feitosa por ter acreditado em mim e por me incentivar a perseguir meu sonho; e Cristina Sernadas (IST, Portugal) pelo convite e acolhimento junto ao excelente grupo do Centro de Lógica e Computação do IST em Lisboa, e também pela extrema atenção para comigo durante minha estada em Portugal.

Agradeço também aos colegas Hugo Mariano e Peter Arndt pelas brilhantes explicações sobre álgebra universal, ao Víctor Fernández por ter feito o papel de preceptor no começo da minha carreira de lógica, à Sabrina Guellis, companheira de aventuras e desventuras, e aos colegas Eleonoura Enoque, Paulo Petrillo, Tomás Barrero e Douglas Bassani pelas intermináveis tardes de estudo em várias disciplinas.

Agradeço ainda ao colega João Marcos pela leitura crítica de textos sobre algebrização, e aos professores Renato Lewin (UCC, Santiago, Chile) Xavier Caicedo (Un. de Los Andes, Bogotá, Colômbia) e Paulo Veloso (PUC e UFRJ, Rio de Janeiro) que assistiram à minha palestra no XIII Encontro Brasileiro de Lógica e deram sugestões para melhoria do trabalho (que espero tenha sido o caso...).

Agradeço aos professores Josep M. Font, Ramon Jansana, Ventura Verdu e Francesc Estevà da Universitat de Barcelona pelas sugestões e críticas valiosas que serviram de estímulo para a conclusão deste trabalho. Ao professor Jean-Yves Béziau, pela oportunidade dada para a exposição de minhas idéias num seminário sobre o tema em Neuchâtel.

Agradeço o suporte técnico oferecido pelos softwares livres Mik-TeX e TeXnicCenter que me permitiram a redação desta dissertação no editor Latex.

Enfim, agradeço à minha mãe, ao meu pai e às minhas irmãs pela compreensão a respeito da minha ausência, e que mesmo á distância, como as álgebras que estudo, sempre me deram o maior carinho e apoio.

Finalmente agradeço ao Walter, meu namorado, por existir e por me fazer feliz−sem isso, nada faria sentido...

RESUMO

A motivação para esta dissertação é estudar uma nova definição de algebrização que seja capaz de algebrizar lógicas às quais não bastam nem o método clássico e nem o método mais geral devido a W. Blok e D. Pigozzi chamado de algebrização finitária. Tal é o caso de várias lógicas paraconsistentes, entre elas a hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$ de N. C. A. da Costa Primeiramente, revemos o método de algebrização clássica, e apoiado no resultado de C. Mortensen, discutimos o fato de que toda álgebra quociente para C_n é trivial. Seguindo esta mesma linha, apresentamos a abordagem mais geral de algebrização de W. Blok e D. Pigozzi, culminando no resultado de R. Lewin, I. Mikenberg e G. Schwarze que mostra que C_n não é algebrizável mesmo na acepção mais geral de Blok e Pigozzi.

A fim de apresentar uma noção de algebrizabilidade ainda mais ampla, abordamos o tema das semânticas de traduções possíveis, propostas por W. A. Carnielli, para então conectá-las com a noção de algebrizabilidade de Blok e Pigozzi. Daí resultam as chamadas *semânticas algébricas de traduções possíveis*, que são capazes de algebrizar C_n. Desta conexão resulta uma surpreendente relação entre a lógica C_1 e as MV-álgebras trivalentes. Apresentamos ainda as semânticas algébricas de traduções possíveis em termos da teoria das categorias, e finalizamos a Dissertação discutindo alguns problemas e levantando questões relacionadas.

Palavras Chaves: Algebrização finitária, semânticas de traduções possíveis, semânticas algébricas de traduções possíveis, teoria das categorias, lógicas paraconsistentes.

ABSTRACT

The central interest of this master thesis is to invstigate a new definition of algebraization that is able to algebraize paraconsistent logic, including the well-known hierarchy C_n, $1 \leq n \leq \omega$ of N. C. A. da Costa.

In this master thesis we concentrade on explaining why C_n is not algebraizable, neither in the classical nor in the extended sense of W. Blok and D. Pigozzi, also known as finite algebraizability. First, after revising the classical method of algebraizability, we discuss the result of C. Mortensen that shows that every quotient algebra for C_n is trivial. In the sequence, we discuss the general method of finite algebraizability and again show that C_n is not algebraizable even in this general sense, following results by R. Lewin, I. Mikenberg and G. Schwarze.

As the aim is to study a new solution for this question, we consider the possible-translations semantics, devided by W. A. Carnielli, so as connect it with the notion of algebraizability of Blok and Pigozzi. From this connection the notion of *possible-translations algebraic semantics* emerges, and this leads to interesting relations between paraconsistent logics and the three-valued MV-algebras. A substantial part of the work is devoted to recast the possible-translations algebraic semantics in categorial terms. Some related problems and questions are also discussed.

Keywords: Finite algebraization, possible-translations semantics, possible-translations algebraic semantics, category theory, paraconsistent logics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma pergunta muito natural é a seguinte: para que introduzir mais uma noção de algebrização de lógicas, sendo que já existem tantas na literatura, desde as abordagens creditadas a Alfred Tarski e Adolf Lindenbaum a partir da década de 1930? Antes de tentar responder a essa questão vou contar como começou o meu interesse pelo tema.

Meu primeiro contato com a questão da algebrização de lógicas ocorreu na tentativa de resolver um exercício acerca da algebrização do cálculo proposicional clássico. A solução do problema teve a colaboração do colega Víctor Fernández, que pacientemente me explicou toda a argumentação relativa à existência de um vínculo comum entre a lógica proposicional, as álgebras de Boole e a teoria de conjuntos elementar. Pelo fato de não ter compreendido muito bem a solução, senti um verdadeiro fascínio por esse tipo de problema; tentar compreender tudo o que estava por trás tornou-se um desafio. O segundo contato, e definitivo para a escolha do tema desta dissertação, ocorreu durante uma aula, exposta pelo professor Walter Carnielli, onde ele discutia alguns problemas acerca da algebrização, abordando desde a algebrização clássica até a proposta mais geral de Blok e Pigozzi, mostrando em linhas gerais o esboço da algebrização do cálculo proposicional clássico e expondo alguns dos problemas dessa área. Um deles era a algebrização das lógicas paraconsistentes, tema da disciplina.

Este tópico foi tratado em um dos seminários porque os estudantes estavam interessados em saber mais sobre o tema, pois, a rigor, a disciplina versava sobre "lógicas paraconsistentes" e "semânticas de traduções possíveis" e não sobre algebrização de lógicas. Num certo momento, durante a exposição, foi mostrado que a hierarquia de lógicas paraconsistentes C_n, propostas por Newton da Costa no artigo [dC63] de 1963, não eram algebrizáveis pelo método clássico de Lindenbaum e Tarski, e nem mesmo pela acepção mais geral (e que nos parecia um tanto misteriosa) de Blok e Pigozzi.

Durante a exposição tive a seguinte dúvida. Se por meio da noção de traduções é lícito prover uma interpretação semântica para as lógicas paraconsistentes C_n, então por que não se poderia fazer o mesmo para algebrizar essas lógicas? O professor não soube responder, e incentivou-me a propor uma definição, utilizando o aparato das semânticas de traduções possíveis, capaz de algebrizar lógicas com deficiência em interpretação algébrica. Esse fato marca o início da minha dedicação na área, e que culminou nesta dissertação.

A seção de dúvidas a respeito desse assunto estava apenas começando. A primeira grande questão com que me deparei foi: algebrizar, por quê? Parte deste trabalho é para tentar dar uma resposta também a esse problema e, para tanto, sem pretender oferecer um enfoque histórico (para tanto veja textos competentes como por exemplo o de Eves Howard em [How02]), é sempre bom começarmos por um passeio despretencioso pela história. Assim, poderemos dar os primeiros passos no entendimento sobre o que é álgebra, qual o seu papel na matemática e na lógica, para então começarmos a responder o que significa a algebrização das lógicas.

Quase todas as fontes históricas concordam em que a palavra álgebra foi usada pela primeira vez pelo matemático árabe Mohammed ibn Mûsa al Khowârizmî, em seu tratado *Kitab al-jebr w'al-muqâbalah*, por volta do ano 825 publicado em Bagdad, no atual Iraque. Matematicamente, em termos contemporâneos, este título poderia ser traduzido aproximadamente como "cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação". Dessa forma a palavra álgebra seria uma latinização da palavra árabe *al-jabr* ou *al-jebr*, que significaria algo como a "arte de reunir".

O desenvolvimento da arte de resolver problemas com esse tipo de enfoque, precursor do que podemos chamar de enfoque algébrico, exerceu grande influência no desenvolvimento posterior da matemática no ocidente, principalmente na Itália, quando foram introduzidas as primeiras noções da aritmética aplicada, tratando de operações, proporções, etc.; esta prática de cálculo foi chamada de *algoritmo* (*Arte d'Alkarismi*), sendo um dos primeiros livros de álgebra publicado na Europa "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*" (cf. [Pac94]), devido a Luca Pacioli, matemático italiano do século XV, editado em Veneza em 1494. Ligada a isso está também a noção de *algarismo*.

Os gregos, extraordinários geômetras, mas que não dominavam a arte da álgebra, empregaram a geometria para resolver, por processos por vezes complicados, problemas de facílima solução algébrica. Houve contudo a contribuição de Diofante de Alexandria (séc. III d.C.), que introduziu o uso de símbolos e sinais para denotar quantidades e operações, constituindo uma das mais notáveis contribuições gregas à álgebra. Os métodos de Diofante permitiam substituir a chamada *álgebra retórica*, ou seja, os raciocínios verbais até então usados para calcular, pela chamada *álgebra sincopada*, em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações mais repetidas. A excepcional contribuição de Diofanto chega até à matemática contemporânea através das *equações diofantinas*, aparecendo como o décimo problema de Hilbert, que pergunta se existe ou não um algoritmo que decida se toda equação diofantina tem solução[1].

Há outras notícias do Oriente sobre soluções dadas a problemas hoje resolvidos algebricamente: os chineses saberiam resolver algumas equações do segundo grau, adotando fórmulas empíricas e receitas, e teriam também uma técnica próxima ao cálculo de determinantes, usando números positivos e negativos.

A matemática hindu registra, principalmente, nos escritos de Brahmagupta, Mahāvīra e Bhāskara (homenageado na conhecidíssima fórmula de resolução das equações de segundo grau) uma grande variedade de problemas resolvidos por métodos algébricos.

A partir da contribuição de Diofanto, que pode ser vista como marcando o início da álgebra como disciplina ou conjunto de conhecimentos e métodos independente dos demais, não parece haver nenhum trabalho digno de referência no mundo antigo.

Para o que nos interessa, podemos então saltar para o século XVI. Apesar dos trabalhos de Pacioli, o verdadeiro criador da álgebra é considerado, porém, o matemático francês François Viète, também conhecido pelo nome latinizado Vieta, que introduziu o emprego das letras para representar quantidades arbitrárias. Seu livro *In Artem Analyticem Isagoge* (cf. [Viè91]) é considerado a obra mais antiga da terceira fase da álgebra, a chamada *álgebra simbólica*. Ao livro foi acrescentado um primeiro apêndice, *Logistica Speciosa*, no qual se trata a adição, multiplicação, e binômios até a sexta potência; um segundo apêndice, *Zetetica*, explica a resolução das equações. Seu trabalho influenciou inclusive René Descartes, que adaptou a idéia de Viète de utilizar vogais para representar incógnitas e consoantes para constantes, e introduziu a notação atual de representar as incógnitas pelas últimas letras do alfabeto e as constantes pelas primeiras.

De especial interesse para o tratamento algébrico da lógica, é interessante notar o aparecimento do símbolo de igualdade. Robert Record, matemático inglês, será sempre lembrado na história da Matemática por ter sido o primeiro a empregar o sinal "=", constituído por dois pequenos traços paralelos, para indicar igualdade. Este sinal só apareceu em 1557 em *The Whetstone of witte* (cf. [Rec69]). Record justificava o uso das barras horizontais paralelas como símbolizando a igualdade alegando que "não poderia haver duas coisas mais iguais". Até então a palavra *aequalis* aparecia, por

[1] Esse problema foi respondido nos anos 70 negativamente por Mathijasevic.

extenso, ligando os dois membros da igualdade. Comentam alguns autores, contudo, que em manuscritos da Idade Média o sinal "=" aparece como uma abreviatura da palavra *est*.

De um ponto de vista da síntese histórica, e tentando entender e explicar o que significa "algebrizar a lógica", ou mais ainda "algebrizar uma lógica" em geral, poderíamos afirmar que algebrizar teria a intenção de concretizar, de realizar, de reunir os elementos, significando algo como a arte de reunir em pedrinhas, ou em símbolos concretos, no sentido de algo que se possa colocar no bolso, na algibeira (veja de novo os termos *al-jabr* ou *al-jebr*). A idéia é que sobre tais símbolos concretos se possa operar e cancelar termos semelhantes (de certa forma, iguais) em grupos iguais (isto é, em membros opostos da equação). O que é notável é que isso possa ser feito quase que exclusivamente estudando-se as propriedades do símbolo de igualdade de Robert Record.

Este trabalho pretende abordar não somente o caráter matemático-formal da questão da algebrizabilidade, entendida como a propriedade de ser algebrizável (concretizável, realizável no sentido acima), mas também abordar o aspecto conceitual com algum viés histórico. Dentro desta perspectiva, os tópicos abordados aparecem tanto quanto possível em ordem cronológica, e todas as citações bibliográficas relevantes para que se tenha um panorama intelectual razoável sobre a obscura questão de se relacionar álgebras a lógicas. Boa parte das asserções elementares que não aparecem na literatura são demonstradas em detalhes, tornando o trabalho acessível a principiantes.

Os capítulos estão estruturados procurando num primeiro momento situar o ambiente de trabalho, mostrando as motivações que conduziram aos tópicos pesquisados e fazendo um breve esquema dos ítens abordados. As seções são reservadas para uma abordagem mais técnica e conceitual do tema apresentado, procurando deixar o texto auto-contido.

No que concerne à notação, usamos como é de hábito o símbolo $\Box$ para indicar final de argumento em demonstrações, e "sse" para abreviar "se e somente se". Outras notações são explicadas conforme a necessidade e para um guia rápido apresentamos, no final dessa Dissertação, um Índice Remissivo de Símbolos. Outros dois índices são também acrescentados, um Índice Remissivo de Autores, onde citamos todas as ocorrências de todos os nomes que de alguma forma foram citados no corpo do texto, e um Índice Remissivo de Conceitos que, assim como o Índice Remissivo de Símbolos, remete à primeira ocorrência do conceito (símbolo) que está sendo citado. Se um conceito tiver duas apresentações equivalentes no corpo do texto, então as duas apresentações são citadas.

No primeiro capítulo mostramos as motivações para o trabalho de Alfred

Tarski, que se baseia nas idéias de Adolf Lindenbaum, para a algebrização do cálculo proposicional clássico PC. Iniciamos o capítulo com as propostas de George Boole (1815-1864) que lança a moda de expressar o raciocínio lógico por meio de simbolismo algébrico, isto é, inicia a tentativa de converter um ramo da filosofia em um ramo da matemática. Ainda que nessa tarefa tenha sido precedido por Leibniz, não parece claro que Boole tenha deliberadamente retomado as idéias de Leibniz como argumentamos no capítulo.

Após esse período, o estudo da lógica se divide em dois ramos distintos, o *algorítmico* representado por Ernest Schröder, que tenta elaborar a lógica das relações do mesmo modo que se tinha elaborado uma lógica de classes, seguindo as idéias de Peirce, sugeridas numa série de ensaios escritos entre 1870 e 1903. O outro enfoque, mais *fundacionalista*, representado por Bertrand Russell e Alfred Whitehead, após os trabalhos de Gottlob Frege (1848-1925), intentava mostrar que a aritmética era idêntica a lógica. O objetivo do capítulo é mostrar como essas duas abordagens convergem em algum ponto, culminando no trabalho de Tarski que algebriza a lógica clássica, isto é, mostra que esta pode ser vista como uma álgebra de Boole – chamamos a essa técnica de *algebrização clássica* ou *método clássico de algebrização*. Para tanto apresentamos a sintaxe da lógica proposicional clássica, alguns resultados acerca da teoria das álgebras (esses resultados são úteis também no Capítulo 2), começando dos reticulados, passando pela definição formal das álgebras de Boole e chegando até alguns resultados da chamada álgebra universal devidos a Garret Birkhoff. Finalizamos o capítulo, mostrando a algebrização do cálculo proposicional clássico em todos os seus detalhes, e por meio de exemplos, mostramos as limitações da maquinaria do método de algebrização clássica.

Pode-se dizer que o trabalho de Helena Rasiowa e Roman Sikorski, em que os autores introduzem as lógicas implicativas cf. [RS53], constitui uma tentativa de esclarecer a abrangência da algebrização clássica. Poderíamos pensar que a intenção dos autores, ao impor condições para a implicação com a finalidade de tornar o sistema algebrizável, fosse atender a um desejo de ter um critério objetivo, algo na direção do que em filosofia da ciência poderia ser visto como "atender aos critérios falsificacionistas de Popper para a algebrização" (cf. [Pop59]): em outras palavras, algo que possibilitasse poder afirmar com certeza quando uma lógica *não* fosse algebrizável. Se essa interpretação fosse aceitável, o trabalho teria sido o primeiro a tornar científico o conceito de algebrização. Porém, se essa era a intenção, tal objetivo não foi alcançado, e o máximo que eles obtiveram nesse campo foi estabelecer condições necessárias para que uma lógica adquirisse o status de ser algebrizável dentro dos critérios impostos por Lindenbaum e Tarski.

O Apêndice é o ambiente que abriga as demonstrações detalhadas dos resultados elementares que aparecem no decorrer do texto, e especialmente as do Capítulo 1.

O segundo capítulo inicia com a motivação que conduziu Willem Blok e Don Pigozzi a generalizar o método de algebrização clássica, isto é, a responder quando um sistema lógico não é algebrizável, completando, portanto, o estudo iniciado por Rasiowa e Sikorski. A partir disso, mostramos quais eram as intuições de Blok e Pigozzi, que culminaram nas "semânticas algébricas equivalentes", o novo modo de algebrizar lógicas; mais ainda, vamos ver como e porquê o método clássico de algebrização pode ser visto como um caso particular dessa nova definição.

Para uma clarificação desse novo conceito de algebrização, mostramos que a lógica paraconsistente P^1, proposta por Antonio M. Sette em [Set73], é algebrizável dentro dessa nova perspectiva. Seguimos de perto os resultados de Renato Lewin, Irene Mikenberg e Glória Schwarze em [LMS90], preenchendo todos os detalhes das demonstrações.

Com base na motivação de Blok e Pigozzi, finalizamos o Capítulo 2 mostrando que a hierarquia de lógicas paraconsistentes C_n é privada da qualidade de ser algebrizável. Esse resultado é extraído de [LMS91], outro artigo de Renato Lewin *et alia*. Os detalhes das demonstrações, sempre que possível exibidos no corpo do texto da dissertação, têm por objetivo clarificar a técnica para a obtenção de resultados positivos e negativos quanto à algebrização.

Por um lado, os resultados negativos acerca da algebrização servem para mostrar que a definição estendida de algebrização não é trivial, no sentido que não se algebrizam todos os sistemas lógicos. Por outro lado, criam problemas que estimulam a pesquisa científica, nesse caso, a propor um outro mecanismo de algebrização que seja capaz de prover uma interpretação algébrica para lógicas desprovidas dessa condição. Como dissemos, esta dissertação foi motivada, em grande parte, por tal estímulo.

Não podemos deixar de lembrar que a algebrização também pode ser vista como uma ferramenta útil para axiliar na obtenção de completude para lógicas. No caso das lógicas infinitovalentes propostas por Jan Łukasiewicz, uma prova de completude alternativa foi proposta por Chang em 1959 (cf. [Cha59]), e esta faz uso do aparato algébrico. Essa questão não é tratada aqui, porém, para um estudo mais detalhado recomendamos os trabalhos de Roberto Cignoli, Ítala D'Ottaviano e Danielli Mundici (cf. [CDM95] e [CDM99]).

O Capítulo 3 refere-se às pesquisas realizadas, até então, no campo da paraconsistência, começando pelos trabalhos de Newton da Costa, considerado juntamente com Stanislaw Jaśkowski o criador da paraconsistência, e mencionando muitos de seus seguidores no Brasil que contribuiram para a frutificação desse novo ramo da lógica. As lógicas paraconsistentes têm como princípio o poder de suportar contradição, isto é, o sistema não se trivializa perante uma contradição. A completude dessas lógicas foi estudada por Elias H. Alves em sua Dissertação de Mestrado de 1976 (cf. [Alv76]) e por Alves e da Costa em [dCA77], contudo, os detalhes da demostração aparecem somente para o caso C_1. A demostração para os demais casos foi dada pelos autores como imediata, porém isso não é o caso, e somente em 1980 esse resultado foi corrigido por Andréa Loparić e Elias Alves em [LA80]. Um ponto debatível na lógica paraconsistente foi sempre a semântica de valorações, que na opinião de alguns dificultava suas possíveis aplicações, por se tratar de uma semântica que não explica realmente o fato sintático de que uma contradição não trivializa a lógica em questão, mas repete o aparato sintático. Um modo de contornar esse ponto frágil da paraconsistência surgiu por meio das "semânticas de traduções possíveis", propostas por Walter Carnielli em [Car90] e estudadas detalhadamente por João Marcos em [Mar99].

A intenção substancial do Capítulo 3 é concentrar-se no conceito das semânticas de traduções possíveis, que constitui uma forma de transferir a interpretação de uma lógica de partida mais complexa para um conjunto de lógicas mais simples. Em muitos exemplos, tal é o caso em que a lógica de partida não é vero-funcional, mas pode ser traduzida para lógicas em que o caráter vero-funcional é preservado pela semântica. Com isso tem-se uma explicação de como uma lógica pode suportar contradição mantendo deduções não triviais. As semânticas de traduções possíveis se baseiam na idéia de múltiplos contextos, isto é, para testar a validade de uma fórmula em uma lógica paraconsistente, é necessário que os diversos contextos onde a lógica é interpretada concordem para que tal fórmula seja tida como válida. Olhando por esta perspectiva, é bastante natural aceitar que um sistema suporte contradições, pois a contradição, nesse caso, se reduz a uma discordância entre os diversos contextos. O maquinário das semânticas de traduções possíveis poderia ser utilizado também para dar uma interpretação para as "Teorias da Quase-Verdade", propostas por Newton da Costa em [dC02] e formalizadas por Carlos Hifume em [Hif03]. Poderíamos postular que a quase-verdade de uma sentença seria estabelecida se a maioria dos contextos concordassem quanto a veracidade desta, e a partir daí poderíamos obter uma outra formalização para tais teorias.

Todos os resultados apresentados no Capítulo 3 foram extraídos dos artigos [CM02] e [CCM04], em que os autores procuram mostrar como as lógicas paraconsistentes podem ser classificadas tomando por base a tolerância com a contradição. Nesses trabalhos os autores mostram como construir uma hierarquia de lógicas a partir de sistemas tidos como elementares que contêm em sua assinatura (isto é, entre seus conectivos) um conectivo de consistência $\circ$. A lógica **bC** é um dos primeiros sistemas da hierarquia, isto é, um dos sistemas mais elementares que é correto e completo via semânticas de traduções possíveis. Os resultados desses artigos são de muita relevância porque oferecem um panorama evolutivo para a hierarquia C_n, mostrando também como essas lógicas podem ser expandidas, e com base nessa evolução é feita toda a classificação taxonômica das lógicas paraconsistentes.

Nosso particular interesse é lidar com os subsistemas de C_n, pois dado que a algebrizabilidade de uma lógica é transmitida para seus descendentes, isto é, para lógicas que são extensões dedutivas na mesma linguagem, então partindo do fato que as lógicas paraconsistentes C_n não são algebrizáveis, tampouco serão seus sub-sistemas.

Nesse momento já mostramos que existe uma grande quantidade de lógicas que são desprovidas de caráter algébrico, mesmo *à la* Blok e Pigozzi, porém muitas dessas lógicas gozam do privilégio de ter uma interpretação via semânticas de traduções possíveis. Aproveitando essa maquinaria, nossa proposta é definir um conceito de "algebrizar à distância", ou seja, exigir apenas que os contextos que estabelecem uma interpretação semântica para a lógica em questão sejam algebrizáveis na acepção de Blok e Pigozzi. Daí pode-se entender que uma lógica, que antes era desprovida de interpretação algébrica, seja agora vista como algebrizável a menos das traduções.

O desafio nesse momento é mostrar que os contextos são algebrizáveis, a fim de aplicarmos o novo conceito de algebrizabilidade, as "semânticas algébricas de traduções possíveis", que serão apresentadas no Capítulo 4. Formalmente referimo-nos aos contextos como "traductos" da respectiva lógica a ser algebrizável, no sentido em que quando uma lógica é munida de um teorema de completude com relação às semânticas de traduções possíveis, as lógicas que estabelecem tal interpretação semântica são chamadas de traductos. Ainda no Capítulo 3 são mostrados alguns resultados originais que se referem à algebrização dos traductos de alguns dos subsistemas de C_n.

O quarto capítulo, a parte original do trabalho, é reservado a elucidar a nova proposta de algebrização (a saber, as semânticas algébricas de traduções possíveis), que como já dissemos é apoiada na definição de algebrização de Blok e Pigozzi e nas semânticas de traduções possíveis. Começamos mostrando que as álgebras paraconsistentes, propostas por Walter Carnielli e Luiz P. de Alcantara em [CdA84] são a contraparte algébrica[2] da lógica Cil, e não a lógica C_1 como os proponentes acreditavam.

Um resultado bastante surpreendente é a relação que pode ser mostrada entre as MV-álgebras trivalentes (para estas álgebras, ver [Cha58]) e a lógica paraconsistente C_1. Reservamos toda uma seção para ilustrar esta conexão e mostrar exemplos de lógicas que são algebrizáveis por esse novo viés.

Fechamos o capítulo expondo as principais idéias, mas com todos os detalhes, do nosso trabalho (cf. [BCC04]) com Marcelo E. Coniglio e Walter Carnielli, motivando os conceitos e as tecnicalidades categoriais, a fim de reescrever os sistemas dedutivos em termos de categoria. Esta categoria é munida de produto, da qual a categoria das lógicas algebrizáveis na acepção de Blok e Pigozzi é uma subcategoria. O produto nesta categoria preserva algebrizabilidade. Mostramos, a partir daí, que as semânticas de traduções possíveis (munidas de completude) em termos categoriais ressurgem como uma importante tradução conservativa, no sentido de Jairo da Silva, Ítala D'Ottaviano e Antonio M. Sette em [dSDS99] e de Hércules A. Feitosa em [Fei97], num produto categorial de lógicas. As semânticas algébricas de traduções possíveis podem ser finalmente vistas sob nova ótica, como composição de morfismos ligando a lógica de partida com a única quase-variedade associada ao produto categorial.

Com base nesses resultados, e tirando proveito da formulação categorial que elucida este novo objeto matemático, levantamos algumas questões e discutimos as possíveis conseqüências que poderão ser fruto dessa nova definição.

O itinerário desta dissertação mostrou que o desafio que eu imaginava ingenuamente ser muito difícil há dois anos, diversos artigos e alguns livros atrás, pode de fato ser vencido, mas por meio destes me deparei com outros. Pelo menos, sem pretender ser socrática, agora sei quão pouco sei sobre isso.

[2] Estamos ulizando o termo "contraparte algébrica" de maneira informal, pelo fato desse mesmo termo já ser utilizado na literatura com o significado de que o sistema é algebrizável na acepção clássica.

1. ALGEBRIZAR, NO SENTIDO DE CONCRETIZAR

Segundo alguns autores, a lógica matemática tem início com a publicação do livro de George Boole *The Mathematical Analysis of Logic* em 1847 (cf. [Boo47]). Este livro é visto como uma expansão das especulações de Leibniz sobre as relações entre lógica e matemática, insistindo sobretudo em que a lógica seria mais uma disciplina matemática do que filosófica. Contudo, a herança leibniziana de Boole não parece ser uma certeza histórica: em [Sch97] p. 54, Michael Schroeder afirma que "The similarity Leibniz's idea of the *calculus ratiotinatior* is striking, but Boole did not know Leibniz's work".

O livro de 1847 foi estendido, em 1854, como *An Investigation of the Laws of Thought* (cf. [Boo58]). Nele, Boole ambicionava estabelecer as leis da mente que produzem o raciocínio e expressar tais leis em forma simbólica, para estabelecer a ciência da Lógica e esclarecer seus métodos.

Boole se referia à lógica aristotélica tradicional, e aparentemente, conforme Burris em [Bur98], cometeu erros graves que confundiram o cenário da nascente álgebra da lógica.

Quarenta anos depois, entre 1890 e 1910, Ernst Schröder retomou as idéias de George Boole, em sua coletânea de três volumes *Algebra der Logik* (cf. [Sch05]), em que retoma também idéias de S. MacColl, A. De Morgan, W. S. Jevons, J. Venn e C. Peirce.

O enfoque nesta época era muito mais algorítmico, explorando a similaridade entre a equivalência lógica e a igualdade. O grande objetivo era investigar todas as possibilidades de aplicar métodos matemáticos ao raciocínio lógico, um ramo da filosofia, transformando-o em álgebra.

A idéia de algebrizar lógicas iniciou-se no século XIX com a tentativa dos lógicos de conectar duas abordagens independentes da pesquisa em lógica, como vemos a seguir; uma estava centrada na noção de *equivalência lógica* e a outra nas noções de *asserção e inferência*.

O estudo fundacional da lógica, nesse mesmo período, estava sendo liderado por B. Russell e A. Whitehead, após a publicação do *Principia Mathematica* entre 1910 e 1913 (cf. [RW13]), e pelo trabalho de G. Frege, cujas idéias fundamentais do seu *Begriffsschrift*, de 1879 (cf. [Fre79]), nortearam o desenvolvimento da lógica no século XX. Como se sabe, Frege tentou demonstrar todos os teoremas da matemática de uma maneira puramente lógica em seu *Grundgesetze der Mathematik* em dois volumes (1893 e 1903) (cf. [Fre93] e [Fre03]); este foi, contudo, o sistema que Russell mostrou ser contraditório.

Estimulada pelo programa formalista de David Hilbert, a tendência das pesquisas em lógica começou a ser focada em torno das noções formais de asserção e inferência lógica. Hilbert pode, então, ser visto como um primeiro sintetizador dos dois programas, o algorítmico que vem da tradição de Boole e Schröder, e o fundacional, que vem da tradição de Frege, Russell e Whitehead.

A partir das idéias de Hilbert, diante das duas abordagens distintas acerca da lógica, começaram as tentativas de conectá-las. Tarski, baseado nas idéias de Lindenbaum de ver o conjunto das fórmulas como uma álgebra com operações induzidas por conectivos lógicos, foi quem primeiro descreveu uma conexão precisa entre essas duas abordagens para a lógica, como exposto em seu artigo *Grundzüge des Systemenkalküls* publicado em duas partes na *Fundamenta Mathematica* em 1935 (cf. [Tar35]). A tradução dos dois artigos aparece como *Foundations of the calculus of systems* em [Tar83] (p. 342- 383)[1]. Neste artigo o autor investiga as bases para a algebrização do cálculo proposicional clássico, por meio do que ele chama de "álgebra da lógica" (que não é outra coisa que a álgebra de Boole). Portanto, tais álgebras, que estavam de alguma maneira implícitas no trabalho de Boole, são bastante naturais, pois refletem parte da estrutura do raciocínio clássico.

O método para algebrizar uma lógica consiste em definir uma álgebra a partir do sistema lógico (ou sistema dedutivo) que se pretende algebrizar; tal álgebra deve refletir a essência da lógica, ou ainda de certa forma concretizá-la, como vimos na Introdução. Para isso, primeiramente deve-se esclarecer o que é um sistema dedutivo.

Seja *For* um conjunto de fórmulas e $\vdash$ uma relação entre um conjunto Γ de fórmulas e uma fórmula φ, tal que $\vdash \subseteq \wp(For) \times For$, em que $\wp(For)$ representa o conjunto das partes de *For*. Quando a relação $\vdash$ satisfaz as cláusulas (Con1)-(Con3) abaixo, esta define um *operador de fecho*.[2] Se o operador de fecho satisfizer também as cláusulas (Con4) e (Con5) abaixo,

[1] Estes artigos encontram-se disponíveis na "Biblioteka Wirtualna Matematyki" em http://matwbn.icm.edu.pl.

Ver também resenha de W. V. O. Quine do artigo de Tarski *Grundzüge des Systemenkalküls* em *Journal of Symbolic Logic* 1: 71 - 72. 1936.

[2] Os operadores de fecho foram definidos por Tarski em [Tar83], porém é usual, em textos de Introdução à Lógica, referir-se a estes por "relação de conseqüência tarskiana".

então este é chamado de *relação de conseqüência*.[3]

Para todas α e β fórmulas, e subconjuntos Γ e Δ de *For*, temos:

(Con1) $\alpha \in \Gamma$ implica $\Gamma \vdash \alpha$ (reflexividade)

(Con2) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma)$ implica $\Gamma \vdash \alpha$ (monotonicidade)

(Con3) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash \beta)$ implica $\Delta, \Gamma \vdash \beta$ (transitividade)

(Con4) $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma'_{fin} \vdash \varphi$ para algum $\Gamma'_{fin} \subseteq \Gamma$[4] (finitariedade)

(Con5) $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$, para toda substituição σ (estrutural)

Para a definição rigorosa da noção de substituição σ, ver Seção 2.1.

Um *sistema lógico* ou *sistema dedutivo* $\mathcal{S}$ é uma estrutura da forma $\langle For, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ contendo um conjunto (em princípio, qualquer) e uma relação de conseqüência. Nos casos tratados nesta dissertação, os conjuntos têm uma estrutura de *fórmulas bem-formadas* definidas de forma indutiva a partir de um conjunto fixado de variáveis proposicionais e de um conjunto de conectivos como esclarecido abaixo. O mais importante nesta construção são os conectivos, que são coletados numa família chamada de *assinatura* do sistema, denotada por Σ.

A rigor, basta levar em conta a assinatura Σ, a qual determina estruturalmente o conjunto de fórmulas For. Dessa forma, para muitos resultados, principalmente categoriais, basta considerar sistemas dedutivos como $\langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$. Usamos então indiferentemente $\langle For, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ ou $\langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, conforme nos pareça mais didático ou conveniente.

Dado que todas as lógicas de nosso interesse têm o conceito de finitude de prova associado, pois verificam a cláusula (Con4), então é interessante notar que existem outras formulações equivalentes a (Con3), levando em conta as demais condições, por exemplo:

(Con3') Se $\Delta \vdash \alpha$ para toda $\alpha \in \Gamma$ e $\Gamma \vdash \beta$, então $\Delta \vdash \beta$.

(Con3") Se $\overline{\Delta} = \{\delta \in For : \Delta \vdash \delta\}$ e $\overline{\Delta} \vdash \beta$, então $\Delta \vdash \beta$.

[3] Optamos por trabalhar com lógicas em que a relação de conseqüência satisfaz às cláusulas (Con1)-(Con5), pelo fato de que tanto a algebrização clássica, tema deste capítulo, quanto da algebrização extendida proposta por Blok e Pigozzi, ver Capítulo 2 desta dissertação, se aplicarem a tais lógicas.

[4] Utilizamos a notação "Γ_{fin}" para indicar que Γ é um conjunto finito.

Para mostrar que "(Con3) implica (Con3')", fazemos uso apenas das condições (Con2) e (Con4), além da hipótese (Con3), que "(Con3) implica (Con3")", da condição (Con4), e para mostrar que "(Con3') implica (Con3)" e "(Con3") implica (Con3)", fazemos uso das condições (Con1) e (Con2), além das hipóteses. Conferir a demonstração desses fatos no Apêndice.

Assumiremos que a linguagem de cada sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é definida sobre uma *assinatura proposicional* denotada por Σ, ver Definição 4.3.17, que consiste de um conjunto de conectivos. Assumiremos que o conjunto $\mathcal{V} = \{p_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de todas as variáveis proposicionais a partir das quais se gera a álgebra livre das fórmulas **For** através de Σ. Detalhamos a construção apenas no caso clássico, dado que a construção para o caso geral é análoga.

Os axiomas do sistema dedutivo são fórmulas que são incontestavelmente verdadeiras no sistema. Para a formação de outras fórmulas verdadeiras (teoremas) são introduzidas regras de inferência que preservam a validade.

A menos de menção em contrário, estaremos sempre trabalhando com um sistema dedutivo arbitrário $\mathcal{S} = \langle For, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ com uma assinatura fixada satisfazendo (Con1)-(Con5).

Partindo das fórmulas de um sistema dedutivo $\mathcal{S}$, por exemplo, partindo das fórmulas do sistema CP, devemos então separar as fórmulas em classes de equivalência no seguinte sentido:

1. $\varphi \cong \psi$ sse $\vdash_{CP} \psi \leftrightarrow \varphi$[5]

2. Verificar que a relação $\cong$ é uma congruência, isto é:
Se $\varphi \cong \psi$, então $(\neg\varphi) \cong (\neg\psi)$;
Se $\varphi_1 \cong \psi_1$ e $\varphi_2 \cong \psi_2$, então, $(\varphi_1 \sharp \varphi_2) \cong (\psi_1 \sharp \psi_2)$, onde $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Tarski mostrou que se tomarmos a álgebra quociente $\mathbf{For}/_{\cong}$, esta forma uma álgebra de Boole, procedimento hoje conhecido como *algebrização de Lindenbaum-Tarski* do cálculo proposicional clássico. Mostrou também como construir um sistema dedutivo equacional na *variedade* das álgebras de Boole, isto é, na classe de álgebras similares que verificam as mesmas equações. Este sistema equacional representa algebricamente o cálculo proposicional clássico.

Esse método funciona para algumas lógicas, mas não consegue algebrizar todos os sistemas lógicos, como mostrou Mortensen em [Mor80] provando que não é possível separar a lógica C_1 em classes de equivalência interessantes: qualquer tentativa de formar classes de equivalência que sejam uma congruência produz apenas classes unitárias.

[5] Como é usual a fórmula $\psi \leftrightarrow \varphi$ denota $(\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$

O resultado de Mortensen mostra que o método clássico de algebrização não é universal, no sentido que não algebriza todos os sistemas lógicos. Uma questão porém permanece: é possível ou não algebrizar as lógicas que não têm uma algebrização dada pelo método clássico? Para respondermos a esta questão precisaríamos de uma definição do que fosse algebrizar uma lógica, mas isso não foi definido por Tarski. Portanto, podemos declarar que uma lógica é algebrizável quando é possível definir uma álgebra para a lógica de maneira similar aos critérios estabelecidos por Tarski; caso contrário, não sabemos o que dizer.

O objetivo deste capítulo é apresentar, de maneira concreta, como se procede para algebrizar uma lógica pelo método clássico. Para isso mostramos em detalhes os passos a serem seguidos para a obtenção da chamada álgebra de Lindenbaum-Tarski, que coincide com a álgebra de Boole e algebriza o cálculo proposicional clássico CP. Finalizamos este capítulo exibindo exemplos de lógicas que são algebrizáveis nesse sentido, e mostramos também alguns exemplos de lógicas às quais o método não se aplica.

1.1 O conceito clássico de algebrização da lógica: Lindenbaum e Tarski

A idéia básica para se algebrizar uma lógica é portanto criar uma álgebra a partir da assinatura da lógica, de tal modo que esta álgebra expresse as propriedades da lógica. Informalmente, chamamos de *álgebra* a uma estrutura que é composta de um domínio (ou universo de discurso) e é munida de um conjunto de operações; no nosso caso em questão é conveniente que tais operações sejam induzidas pelos conectivos da lógica.

A álgebra criada a partir da assinatura da lógica é conhecida como *álgebra das fórmulas* (cf. [Ras74]). Seu universo é composto pelas fórmulas da lógica e suas operações são definidas a partir dos conectivos da lógica.

A álgebra das fórmulas é uma *álgebra livre* na classe de todas as álgebras similares, no sentido em que gera irrestritamente todas as fórmulas a partir da assinatura e das variáveis proposicionais.

Para algebrizar a lógica, devemos definir uma álgebra menos fina que a álgebra das fórmulas, no sentido em que separe menos as fórmulas e permita desprezar diferenças insignificantes entre as fórmulas, mas de tal maneira que a aglutinação resultante não esteja em desacordo com os conectivos. Para isso, devemos proceder fazendo o quociente dessa álgebra, através de uma relação de equivalência que seja também uma congruência.

A equivalência estabelecida dentro da lógica em questão proporciona uma noção de igualdade generalizada na álgebra quociente. Essa igualdade relaciona as fórmulas da lógica, isto é, as coloca dentro da mesma classe de equivalência, e o fato de se tratar de uma congruência nos garante que o resultado de uma dada operação induzida nas classes é a classe obtida pelo resultado da operação em representantes das classes de partida. De forma abreviada, a operação entre classes "coincide" com a operação dentro da classe. Em outras palavras, os conectivos (ou operações) induzem homomorfismos, no sentido em que por exemplo, a classe das disjunções é a junção das classes.

Tal algebrização é conhecida como algebrização de Lindenbaum-Tarski ou também como *método clássico de algebrização*.

Nesse método, associa-se a cada teoria $\mathcal{T}$ da lógica uma relação de equivalência nas fórmulas. Duas fórmulas φ e ψ são equivalentes se existe uma demonstração do bicondicional $\varphi \leftrightarrow \psi$ a partir dos axiomas lógicos e axiomas que definem $\mathcal{T}$ e regras de inferência da lógica. Esta relação de equivalência respeita os conectivos lógicos; por exemplo se φ e ψ são equivalentes, respectivamente, a φ' e ψ', então $\varphi \wedge \psi$ é equivalente a $\varphi' \wedge \psi'$.

Conseqüentemente, uma álgebra quociente pode ser definida de tal maneira que seus elementos são classes de equivalência de fórmulas, e cujas operações são induzidas pelos conectivos da lógica.

Este procedimento garante que cada classe de álgebra possa ser vista como a exata contraparte algébrica de sua lógica correspondente, no sentido em que existe uma correspondência muito próxima entre a teoria dedutiva da lógica e a teoria equacional da álgebra, entendendo-se por "equacional" a prática de se trabalhar com quase-identidades, isto é, com identidades condicionais e não apenas com identidades.

É interessante observar que apesar de ser sempre possível estabelecer uma álgebra das fórmulas para qualquer lógica (basta lembrar que esta é uma álgebra livre, como vimos) isso não é suficiente para se obter uma algebrização para um sistema dedutivo: de fato, isso nem sempre é possível, pois depende de que seja possível definir uma relação de equivalência que seja uma congruência não trivial, ou seja, uma noção abstrata de igualdade "bem comportada". Como veremos na Seção 1.5, nem sempre é possível definir tal equivalência.

A seguir listamos os passos do método que devemos seguir para a obtenção de uma álgebra das fórmulas para o sistema dedutivo $\mathcal{S}$, que é candidata para algebrizar $\mathcal{S}$ pelo método de Lindenbaum-Tarski. Assumimos que a assinatura de $\mathcal{S}$ contém os conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$, a fim de que seja possível definir o bi-condicional $\leftrightarrow$.

1º *Passo:* Definir a álgebra das fórmulas $\mathbf{For} = \langle For, \omega_0^{\mathbf{For}}, \ldots, \omega_{n-1}^{\mathbf{For}} \rangle$, em que For é o conjunto das fórmulas de $\mathcal{S}$ e $\omega_i^{\mathbf{For}}$, com $0 \leq i \leq n-1$, são as operações induzidas pelos conectivos do sistema dedutivo $\mathcal{S}$, o qual se pretende algebrizar.

2º *Passo:* Definir uma relação de equivalência $\cong$ em $\mathcal{S}$ do seguinte modo:[6]

$$\varphi \cong \psi \text{ sse } \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \vdash_{\mathcal{S}} \psi \rightarrow \varphi$$

3º *Passo:* Testar a relação de equivalência $\cong$ acima para saber se esta estabelece uma congruência não trivial, no seguinte sentido:

Se $c_0 = [\psi_0], \ldots, c_{k-1} = [\psi_{k-1}]$, então para um conectivo qualquer ω_i de aridade k definimos $\omega_i^{\mathbf{For}}(c_0, \ldots, c_{k-1}) = [\omega_i(\psi_0, \ldots, \psi_{k-1})]$.

4º *Passo:* Se a relação de equivalência $\cong$ estabelece uma congruência, então definimos a álgebra quociente $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \omega_0^{\mathbf{For}/\cong}, \ldots, \omega_{n-1}^{\mathbf{For}/\cong} \rangle$, onde $For/_{\cong}$ é o universo composto pelas classes de equivalência das fórmulas, e $\omega_i^{\mathbf{For}/\cong}$, com $0 \leq i \leq n-1$, são as operações da álgebra quociente induzidas pelos conectivos do sistema dedutivo $\mathcal{S}$.

No caso da algebrização do cálculo proposicional clássico CP, verifica-se também que a álgebra $\mathbf{For}/_{\cong}$ satisfaz todas as propriedades das álgebras de Boole.

Como já observamos, nem sempre é possível definir uma relação de equivalência que estabeleça uma congruência não trivial entre as classes; mais ainda, é muito difícil definir uma álgebra a partir do sistema lógico que coincida com alguma álgebra já conhecida na literatura. A algebrização de CP é um evento histórico muito importante pelo fato de ser o primeiro sistema dedutivo a ser algebrizado, e também pelo fato de a álgebra das fómulas de CP verificar as propriedades das álgebras de Boole. As álgebras cilíndricas, e as álgebras de Post são, respectivamente, exemplos de álgebras que surgiram a partir da algebrização das lógicas de predicados e das lógicas n-valentes e infinito-valentes de Łukasiewicz.

Não é difícil se convencer que o método de algebrização proposto por Tarski nos mostra apenas como tentar definir uma álgebra a partir da assinatura da lógica, por meio de uma relação de equivalência que é uma congruência e nada mais. Nesse caso, é postulado, portanto, que a álgebra

[6] Este modo de definir a relação de equivalência é típico deste método, conforme esclarecem W. Blok e D. Pigozzi no prefácio do volume especial de *Studia Logica*, dedicado à algebrização de lógicas publicado em 1991 (cf. [BP91]).

obtida é capaz de algebrizar a lógica, já que a álgebra preserva todas as propriedades do sistema dedutivo em questão de maneira muito natural, pois as operações da álgebra são induzidas a partir dos conectivos da lógica. Porém esse método não nos fornece subsídios para afirmar quando um sistema lógico não pode, nesta acepção, ser algebrizável. Em outras palavras, quando não obtemos uma algebrização para um sistema dedutivo não somos capazes de decidir se tal sistema pode ser algebrizável ou não.

O trabalho de Rasiowa e Sikorski (cf. [RS53]) pode ser visto como uma tentativa de sanar essa deficiência da algebrização clássica, isto é, tenta traçar as condições necessárias e suficientes que um sistema dedutivo deve satisfazer, a fim de que este seja algebrizável. Mas o máximo que obtiveram nesse campo foi traçar condições necessárias que o par de implicações $(\alpha \to \beta, \beta \to \alpha)$ devem satisfazer, a fim de tornar o sistema algebrizável. Com isso os autores obtiveram uma classe de lógicas algebrizáveis, conhecidas por *lógicas implicativas*, e associaram a cada uma destas a *contra-parte algébrica* correspondente, porém não conseguiram um método para responder negativamente a respeito da algebrizabilidade de um sistema dedutivo em geral.

As próximas seções serão dedicadas a uma breve exposição do cálculo proposicional clássico CP e das álgebras de Boole, para então esclarecermos a algebrização de CP pelo método clássico em todos os seus detalhes. Finalizamos mostrando alguns exemplos de sistemas lógicos aos quais o método de Lindenbaum-Tarski se aplica, e outros aos quais não se aplica.

1.2 O Cálculo Proposicional Clássico: uma preparação para sua versão algébrica

Apresentamos aqui uma versão sintática do cálculo proposicional clássico, denotado por CP, com vistas a construir sua versão algébrica no sentido em que foi discutido na seção anterior. Seguimos a mesma axiomática adotada no texto tradicional de E. Mendelson (cf. [Men64]). O estudo semântico de CP, por meio de matrizes semânticas, não é tratado nesta dissertação. Para detalhes a respeito desta recomendamos o mesmo livro mencionado acima.

Mostramos, a seguir, um elenco de resultados elementares a respeito de CP que serão úteis no decorrer deste capítulo, e tomamos o cuidado de apresentar todos os detalhes daquelas demonstrações que não são feitas explicitamente em [Men64].

Assinatura A assinatura para CP é composta por:

- Variáveis proposicionais ou fórmulas atômicas: $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$
- Conectivos proposicionais: $\neg$ (negação) e $\rightarrow$ (implicação)
- Símbolos metalinguísticos:) e ((parênteses fechado e aberto)

Fórmulas O conjunto das fórmulas de CP, For, é constituído pelas seqüencias de símbolos do alfabeto acima, que satisfazem à seguinte definição recursiva:

- Cada fórmula atômica é fórmula.
- Se φ é uma fórmula, então $\neg\varphi$ também é uma fórmula.
- Se φ e ψ são fórmulas, então $\varphi \rightarrow \psi$ é fórmula.
- As fórmulas são formadas somente pelos ítens acima.

Axiomas (Ax)

1. $\vdash_{CP} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $\vdash_{CP} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \lambda)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \lambda))$
3. $\vdash_{CP} ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi))$

Regra Modus Ponens (MP)

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Símbolos Definimos outros conectivos

$Def_\wedge$: $\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ {lê-se: e}

$Def_\vee$: $\varphi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ {lê-se: ou }

$Def_\leftrightarrow$: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ {lê-se: equivalente}

Lema 1.2.1. *(Teorema da Dedução) Se* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For$, *então:* $\Gamma, \alpha \vdash_{CP} \beta$ *sse* $\Gamma \vdash_{CP} \alpha \rightarrow \beta$. *Em particular,* $\alpha \vdash_{CP} \beta$ *sse* $\vdash_{CP} \alpha \rightarrow \beta$.

Demonstração. Conferir em [Men64] p. 32-33. □

Lema 1.2.2. *Para quaisquer fórmulas α, β e γ, temos:*

(a) $\vdash_{CP} \alpha \to \alpha$
(b) $\vdash_{CP} (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$
(c) *Se* $\vdash_{CP} (\alpha \to \beta)$ *e* $\vdash_{CP} (\beta \to \gamma)$, *então* $\vdash_{CP} (\alpha \to \gamma)$
(d) *Se* $\vdash_{CP} \alpha \to (\beta \to \lambda)$, *então* $\vdash_{CP} \beta \to (\alpha \to \lambda)$
(e) $\vdash_{CP} \neg\neg\alpha \to \alpha$
(f) $\vdash_{CP} \alpha \to \neg\neg\alpha$
(g) $\vdash_{CP} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
(h) $\vdash_{CP} (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
(i) $\vdash_{CP} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
(j) $\vdash_{CP} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
(k) $\vdash_{CP} \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
(l) $\vdash_{CP} \alpha \wedge \beta \to \beta$
(m) $\vdash_{CP} \alpha \wedge \beta \to \alpha$
(n) $\vdash_{CP} \alpha \to \alpha \vee \beta$
(o) $\vdash_{CP} \beta \to \alpha \vee \beta$
(p) $\vdash_{CP} \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
(q) *Se* $\vdash_{CP} (\alpha \to \gamma)$ *e* $\vdash_{CP} (\beta \to \gamma)$, *então* $\vdash_{CP} (\alpha \vee \beta) \to \gamma$
(r) *Se* $\vdash_{CP} (\alpha \to \beta)$ *e* $\vdash_{CP} (\alpha \to \gamma)$, *então* $\vdash_{CP} \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$
(s) *Se* $\vdash_{CP} (\alpha \to \beta)$ *e* $\vdash_{CP} (\alpha \to \gamma)$, *então* $\vdash_{CP} \alpha \to (\beta \vee \gamma)$
(t) $\vdash_{CP} (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$
(u) $\vdash_{CP} \beta \to (\neg\alpha \vee \alpha)$
(v) $\vdash_{CP} \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
(w) $\vdash_{CP} (\alpha \wedge \beta)$ *sse* $\vdash_{CP} \alpha$ *e* $\vdash_{CP} \beta$
(x) $\vdash_{CP} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
(y) $\vdash_{CP} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
(z) *Se* $\vdash_{CP} \alpha_0 \leftrightarrow \beta_0$ *e* $\vdash_{CP} \alpha_1 \leftrightarrow \beta_1$, *então* $\vdash_{CP} (\alpha_0 \to \alpha_1) \leftrightarrow (\beta_0 \to \beta_1)$

Demonstração. :
- Conferir em [Men64] p.31-35: (a), (e)-(j);
- Encontram-se no Apêndice: (b)-(d), (k)-(q), (s), (t), (v), (w), (y) e (z);
- Aplicação de (i) e (q): (r) ;
- Aplicação de (i) e (e): (u) ;
- Análoga à demonstração de (v): (x). □

A completude do sistema dedutivo CP, como é amplamente conhecido, é obtido com relação à semântica verofuncional usual dada pelas tabelas clássicas da implicação ($\to$) e da negação ($\neg$), dadas abaixo. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [Men64] p. 37.

$\to$	1	0
1	1	0
0	1	1

	$\neg$
1	0
0	1

A formulação que adotamos para CP, fixada sobre a assinatura composta pelos conectivos $\neg$ e $\to$, não é única. Existem outras formulações equivalentes a esta construídas a partir de outro conjunto de conectivos. Por exemplo, para se obter a algebrização de CP, é conveniente fixar a assinatura composta pelos conectivos $\neg, \vee$ e $\wedge$, e pelas constantes 0 e 1, dado que os conectivos se assemelham às respectivas operações conjuntistas de complementação ($^{-}$), união ($\cup$) e interseção ($\cap$), e as constantes aos primeiro e último elementos respectivamente. Portanto torna-se mais natural induzir as operações da "álgebra das fórmulas" sobre essa assinatura.

A assinatura que adotamos para CP não oferece muita intuição para a algebrização, mas baseado no resultado de equivalência entre as diversas formulações de CP, nos referimos de agora em diante, de maneira abusiva, a tais formulações como sendo as mesmas.

O objetivo da próxima seção é apresentar a definição das álgebras de Boole, juntamente com algumas de suas propriedades, procurando evidenciar a semelhança existente entre a lógica clássica e as álgebras de Boole, justificando a necessidade de um resultado, como da algebrização, que explica tal fenômeno.

1.3 A classe das álgebras de Boole

Álgebra universal é a área da matemática que investiga as propriedades e relações entre estruturas e classes de estruturas algébricas distintas, que têm algum grau de similaridade. Não faz sentido falarmos de álgebra sem referência à igualdade. A abstração da igualdade permite atingir um nível muito alto de abstração em álgebra.

Fazemos uma sinopse de algumas construções universais em álgebra, tais como as noções de isomorfismo, sub-álgebras, produto direto e produto sub-direto, finalizando com os resultados de Stone acerca da variedade das álgebras de Boole. Muitos dos resultados apresentados nesta seção serão utilizados também no Capítulo 2.

Uma função $t : A^n \longrightarrow A$ é dita uma operação de aridade n sobre o conjunto A.

Definição 1.3.1. Um *tipo* $\mathcal{T}$ é um par formado por um conjunto T junto com uma função $f : T \to \mathbb{N}$, denotado por $\mathcal{T} = (T, f)$. É conveniente denotar o tipo por $\mathcal{T}_n = \{t_i \in T : f(t_i) = n\}$, $i \in I$ e $n \in \mathbb{N}$.

É por meio do tipo $\mathcal{T}$ que, em álgebra universal, podemos associar estruturas distintas e isso permitirá operar com estas estruturas.

Definição 1.3.2. Uma *álgebra* $\mathscr{A}$ de tipo $\mathcal{T}$, ou uma $\mathcal{T}$*-álgebra*, é uma estrutura $\mathscr{A} = \langle A, t_i^{\mathscr{A}} \rangle$, em que A é o domínio da álgebra e $t_i^{\mathscr{A}}$, $1 \leq i \leq k$, são as operações da álgebra, em que $t_i^{\mathscr{A}} : A^{f(t_i)} \longrightarrow A$, para cada $t_i \in T$.

Sem perda de generalidade podemos ordenar as operações da álgebra, associando a aridade com o índice da operação da seguinte maneira:

$$t_1^{\mathscr{A}} \leq t_2^{\mathscr{A}} \leq \cdots \leq t_k^{\mathscr{A}}$$

Definição 1.3.3. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathcal{T}$-álgebras; dizemos que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são *iguais* se $A = B$ e $t_i^{\mathscr{A}} = t_i^{\mathscr{B}}$, para todo $t_i \in T$.

Definição 1.3.4. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathcal{T}$-álgebras. A função $\alpha : A \longrightarrow B$ é chamada um *homomorfismo* de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$ quando α é uma função de A em B, e para todo $t \in T$ e todo $a_1, \cdots, a_n \in A$, temos:

$$\alpha(t^{\mathscr{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = t^{\mathscr{B}}(\alpha(a_1), \cdots, \alpha(a_n))$$

Quando $A = B$ dizemos que α é um *endomorfismo* de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$.
Quando $\alpha : A \longrightarrow B$ é uma função bijetora dizemos que α é um *isomorfismo* de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$.

As estruturas algébricas mais simples estudadas em álgebra universal são os reticulados. Existem dois modos de se definir reticulados: um de caráter algébrico, que é do mesmo padrão das definições de grupos, anéis, etc., em que é levado em conta as propriedades das operações. O outro modo é baseado na noção de ordem. Este último nos oferece uma visão geométrica relacional dos reticulados. Exibimos as duas definições e demostramos que elas são equivalentes.

Usamos o símbolo $\approx$ para denotar uma igualdade algébrica formal que tem a intenção de expressar uma forma abstrata que generaliza ao mesmo tempo a equivalência lógica (por exemplo a lógica de primeira ordem).

A disciplina chamada *lógica equacional* estuda as propriedades da igualdade $\approx$ de maneira geral. Para mais detalhes recomendamos [Bur98].

Além do símbolo "$\approx$" usamos também o símbolo "$\cong$" especificamente para relação de equivalência conjuntista e o símbolo "$=$" para expressar o fato de que o que aparece em ambos os lados da igualdade denotam o mesmo objeto, em particular o mesmo conjunto se estamos trabalhando na teoria de conjuntos, por exemplo em ZF.

Definição 1.3.5. Um conjunto não vazio $\mathcal{R}$ junto com duas operações binárias $\sqcup$ e $\sqcap$ (junção e cruzamento respectivamente) em $\mathcal{R}$ é chamado de *reticulado* se satisfaz as identidades equacionais abaixo[7]:

Ret_1: Leis comutativas.

(a) $x \sqcup y \approx y \sqcup x$

(b) $x \sqcap y \approx y \sqcap x$

Ret_2: Leis associativas.

(a) $x \sqcup (y \sqcup z) \approx (x \sqcup y) \sqcup z$

(b) $x \sqcap (y \sqcap z) \approx (x \sqcap y) \sqcap z$

Ret_3: Leis da idempotência.

(a) $x \sqcup x \approx x$

(b) $x \sqcap x \approx x$

Ret_4: Leis de absorção.

(a) $x \approx x \sqcup (x \sqcap y)$

(b) $x \approx x \sqcap (x \sqcup y)$.

Introduzimos primeiramente a noção de ordem parcial em um conjunto e depois apresentamos a segunda definição de reticulados.

Definição 1.3.6. Um *conjunto parcialmente ordenado* é uma estrutura $\mathscr{P} = \langle P, \leq \rangle$, em que P é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação binária sobre P satisfazendo às seguintes propriedades:

(i) $a \leq a$ (reflexiva)

(ii) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica)

(iii) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva)

Se ainda $\leq$ satisfizer a propriedade abaixo,

[7] Note que as cláusulas da Definição 1.3.5 estão, a rigor, axiomatizando as identidades equacionais.

(iv) $a \leq b$ ou $b \leq a$ (tricotomia)

então, dizemos que $\mathscr{P}$ é um *conjunto totalmente ordenado*.

Definição 1.3.7. Sejam $\mathscr{Q} = \langle Q, \leq \rangle$ e $\mathscr{P} = \langle P, \leq \rangle$ conjuntos parcialmente ordenados tal que $Q \subseteq P$. Um elemento $p \in P$ é um *limite superior* de $\mathscr{Q}$ se $q \leq p$, para todo $q \in Q$. Analogamente, um elemento $p \in P$ é um *limite inferior* de $\mathscr{Q}$ se $p \leq q$, para todo $q \in Q$.

Definição 1.3.8. Sejam $\mathscr{Q} = \langle Q, \leq \rangle$ e $\mathscr{P} = \langle P, \leq \rangle$ conjuntos parcialmente ordenados tal que $Q \subseteq P$. O *supremo* de Q, *sup* Q, é o menor limite superior de Q, quando existir. Analogamente, o *ínfimo* de Q, *inf* Q, é o maior limite inferior de Q, quando existir.

Definição 1.3.9. Um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{R} = \langle R, \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $a, b \in R$, o $sup\{a, b\}$ e o $inf\{a, b\}$ existem em $\mathcal{R}$.

Lema 1.3.10. *As definições 1.3.5 e 1.3.9 são equivalentes considerando as seguintes definições:*

(A) Se $\mathcal{R}$ é um reticulado pela definição 1.3.5 e $\leq$ é definido em $\mathcal{R}$ por $a \leq b$ sse $a = a \sqcap b$ ou $b = a \sqcup b$;

(B) Se $\mathcal{R}$ é um reticulado pela definição 1.3.9 e as operações $\sqcup$ e $\sqcap$ forem definidas por $a \sqcup b = sup\{a, b\}$ e $a \sqcap b = inf\{a, b\}$.

Demonstração. (1.3.5 $\Rightarrow$ 1.3.9) Conferir em [BS81] p. 6.

(1.3.5 $\Leftarrow$ 1.3.9) Suponhamos que $a \sqcup b = sup\{a, b\}$ e $a \sqcap b = inf\{a, b\}$, então:

1. Comutativa
   - $a \sqcap b = inf\{a, b\} = inf\{b, a\} = b \sqcap a$
   - $a \sqcup b = sup\{a, b\} = sup\{b, a\} = b \sqcup a$
2. Associativa

   Pela definição de supremo temos:

   (a) $a \leq sup\{a, b\}$;
   (b) $b \leq sup\{a, b\}$;
   (c) $c \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$;
   (d) $sup\{a, b\} \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$;
   (e) de *(a)* e *(d)* temos que $a \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$;
   (f) de *(b)* e *(d)* temos que $b \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$;
   (g) de *(c)* e *(f)* temos que $sup\{b, c\} \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$;

(h) de *(e)* e *(g)* temos que $sup\{a, sup\{b, c\}\} \leq sup\{sup\{a, b\}, c\}$.

Portanto de *(h)* temos que $a \sqcup (b \sqcup c) \leq (a \sqcup b) \sqcup c$. Pelo mesmo raciocínio tiramos que $(a \sqcup b) \sqcup c \leq a \sqcup (b \sqcup c)$, daí, pela anti-simetria, concluímos que $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$.
É análogo que $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$.

3. Idempotência
   - $a = sup\{a, a\} = a \sqcup a$
   - $a = inf\{a, a\} = a \sqcap a$
4. Absorção
   - Como $inf\{a, b\} \leq a$, então $a = sup\{a, inf\{a, b\}\} \stackrel{\text{def}}{=} a \sqcup (a \sqcap b)$.
   - $a = a \sqcap (a \sqcup b)$ é análogo.

□

É interessante observar que existe uma outra forma de demonstrar a equivalência dos conceitos de reitculados, isto é, mostrar que a categoria dos reticulados como álgebras nas categorias é equivalente à categoria dos reticulados como conjuntos parcialmente ordenados. O procedimento para se demonstrar o mesmo resultado, mas por outra via, é mais imediata. Vejamos o procedimento:

1.3.5 $\stackrel{(A)}{\Longrightarrow}$ 1.3.9 $\stackrel{(B)}{\Longrightarrow}$ 1.3.5, vejamos a demonstração:

$a = a \sqcap b$ sse $a = inf\{a, b\}$, mas $inf\{a, b\} \leq a$ e $inf\{a, b\} \leq b$, daí por substituição $a \leq b$.

A demostração de 1.3.9 $\stackrel{(B)}{\Longrightarrow}$ 1.3.5 $\stackrel{(A)}{\Longrightarrow}$ 1.3.9 se encontra em [BS81] p. 6 e 7.

Na verdade, esse fato expressa que existe um isomorfismo de categorias associado às estruturas de reticulados, pois a equivalência das definições sempre volta às estruturas originais, como visto acima. Este comentário prepara o leitor para o Capítulo 4.

Definição 1.3.11. Um *reticulado distributivo* é um reticulado que satisfaz as seguintes leis distributivas abaixo.

D1: $x \sqcap (y \sqcup z) \approx (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$;

D2: $x \sqcup (y \sqcap z) \approx (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

Teorema 1.3.12. *Um reticulado $\mathcal{R}$ satisfaz D1 sse satisfaz D2.*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 10. □

O Teorema 1.3.12 acima esclarece que basta uma das leis distributivas. Ainda mais, todo reticulado satisfaz uma parte das leis distributivas, na forma das duas desigualdades do Lema a seguir.

Lema 1.3.13. *Todo reticulado satisfaz as seguintes desigualdades:*
(1) $x \sqcap (y \sqcup z) \leq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$;
(2) $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 10–11. □

Definição 1.3.14. Dado um reticulado $\mathcal{R}$ chamamos de *primeiro elemento* $0^{\mathcal{R}}$ (respectivamente, *último elemento* $1^{\mathcal{R}}$) ao elemento tal que $x \sqcap 0^{\mathcal{R}} = 0^{\mathcal{R}}$ (respectivamente, $x \sqcup 1^{\mathcal{R}} = 1^{\mathcal{R}}$), para todo $x \in R$.

Definição 1.3.15. Seja $\mathcal{R}$ um reticulado com primeiro e último elementos, e $x \in R$. Se existir $\sim x$ em $\mathcal{R}$, para todo $x \in R$, tal que $x \sqcap \sim x = 0^{\mathcal{R}}$ e $x \sqcup \sim x = 1^{\mathcal{R}}$, nesse caso dizemos que x é *complementado* em $\mathcal{R}$ ou que $\sim x$ é *complemento* de x.

Lema 1.3.16. *Seja $\mathcal{R}$ um reticulado distributivo e $x \in R$. Se $\sim x$ é o complemento de x, então $\sim x$ é único.*

Demonstração. Coferir em [Cur63] p. 139. □

Definição 1.3.17. Uma *Álgebra de Boole* $\mathscr{A} = \langle A, \sqcup^{\mathscr{A}}, \sqcap^{\mathscr{A}}, \sim^{\mathscr{A}}, 1^{\mathscr{A}}, 0^{\mathscr{A}} \rangle$ é um reticulado ordenado distributivo e complementado, em que A é o universo, $\sqcup^{\mathscr{A}}, \sqcap^{\mathscr{A}}$ são operações binárias, $\sim^{\mathscr{A}}$ é uma operação unária, chamada complementação. As operações têm o mesmo comportamento das tabelas de verdade e $0^{\mathscr{A}}$ e $1^{\mathscr{A}}$ são respectivamente primeiro e último elemento.

Muitas são as noções abrangentes e repetitivas em álgebra universal; as próximas definições e resultados mostram algumas dessas noções que serão úteis, mesmo que de forma longínqua, também no próximo capítulo. Apresentamos alguns resultados de Birkoff e de Stone apenas como complementação de resultados acerca das álgebras booleanas.

Definição 1.3.18. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathcal{T}$-álgebras. Dizemos que $\mathscr{B}$ é uma *sub-álgebra* de $\mathscr{A}$ se $B \subseteq A$ e toda operação de $\mathscr{B}$ é uma restrição da operação correspondente de $\mathscr{A}$, isto é, para cada operação $t_n^{\mathscr{A}}$ em $\mathscr{A}$, para $n \in \mathbb{N}$, temos que $t_n^{\mathscr{A}}(b_1, \cdots, b_n) \in B$, com $b_1, \cdots, b_n \in B$.

Definição 1.3.19. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathcal{T}$-álgebras. Então o *produto direto* de $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ é a $\mathcal{T}$-álgebras $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \langle A \times B, t_i^{\mathscr{A}\times\mathscr{B}} \rangle$, em que o universo é o conjunto $A \times B$, e para cada $t_i \in T$ e $a_j \in A$, $b_j \in B$, $1 \leq j \leq n$, temos que:

$$t_i^{\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(\langle a_1, b_1\rangle, \cdots, \langle a_n, b_n\rangle) = \langle t_i^{\mathscr{A}}(a_1, \cdots, a_n), t_i^{\mathscr{A}}(b_1, \cdots, b_n)\rangle$$

Definição 1.3.20. Seja $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ uma família indexada de $\mathcal{T}$-álgebras e $I \neq \emptyset$. O *produto direto* $\mathscr{A} = \prod_{i\in I} \mathscr{A}_i$ é uma $\mathcal{T}$-álgebra com universo $\prod_{i\in I} A_i$ e para cada $t_k \in \mathcal{T}_n$ e $a_1, \cdots a_n \in \prod_{i\in I} A_i$, temos que:

$t_k^{\prod_{i\in I}\mathscr{A}_i}(a_1, \cdots, a_n)(i) = t_k^{\mathscr{A}_i}(a_1(i), \cdots, a_n(i))$

para cada $i \in I$, $t_k^{\prod_{i\in I}\mathscr{A}_i}$ é definido cordenada a cordenada.

Definição 1.3.21. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathcal{T}$-álgebras e α um homomorfismo de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$. É evidente que $\alpha(A) \subseteq B$, daí a $\mathcal{T}$-álgebra $\alpha(\mathscr{A}) = \langle \alpha(A), t_i^{\alpha(\mathscr{A})}\rangle$ é uma sub-álgebra de $\mathscr{B}$, e nesse caso chamamos $\alpha(\mathscr{A})$ de *imagem homomorfa* de $\mathscr{B}$.

Definição 1.3.22. Uma álgebra $\mathscr{A}$ é um *produto sub-direto* de uma família indexada $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ de álgebras se:
(i) $\mathscr{A}$ é sub-álgebra do produto direto de $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$; e
(ii) $\pi_i(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_i$, para cada $i \in I$.

Teorema 1.3.23. *(Birkhoff). Toda álgebra $\mathscr{A}$ é isomorfa a um produto sub-direto de álgebras sub-diretamente irredutíveis (que são imagens homomorfas de $\mathscr{A}$).*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 58-59. □

Introduzimos, agora, os conceitos de operadores de classe e de variedades, que servem para relacionar classe de álgebras de mesma similaridade ou tipo. Os operadores são definidos como segue:

- $\mathscr{A} \in I(\mathcal{C})$ sse $\mathscr{A}$ é isomorfa a algum membro da classe $\mathcal{C}$;
- $\mathscr{A} \in S(\mathcal{C})$ sse $\mathscr{A}$ é uma sub-álgebra de algum membro da classe $\mathcal{C}$;
- $\mathscr{A} \in H(\mathcal{C})$ sse $\mathscr{A}$ é uma imagem homomorfa de algum membro da classe $\mathcal{C}$;
- $\mathscr{A} \in P(\mathcal{C})$ sse $\mathscr{A}$ é um produto direto de uma família não vazia de álgebras da classe $\mathcal{C}$;
- $\mathscr{A} \in P_S(\mathcal{C})$ sse $\mathscr{A}$ é produto sub-direto de uma família não vazia de álgebras da classe $\mathcal{C}$

Note que estamos aplicando os operadores somente para famílias indexadas não vazias, a fim de evitar complicações desnecessárias.

Definição 1.3.24. Uma *variedade* é uma classe de álgebras de mesmo tipo, fechada por imagens homomorfas, sub-álgebras e produtos diretos.

Definição 1.3.25. Se $\mathcal{C}$ é uma classe de $\mathcal{T}$-álgebras, seja $V(\mathcal{C})$ a menor variedade contedo $\mathcal{C}$, e chamamos $V(\mathcal{C})$ de *variedade gerada* por $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ é uma classe trivial, isto é, formada por um único elemento $\mathscr{A}$, nesse caso denotamos a variedade gerada por $V(\mathscr{A})$. Uma variedade é *finitamente gerada* se $V = V(\mathcal{C})$ para alguma classe finita $\mathcal{C}$ de álgebras finitas.

Teorema 1.3.26. *(Tarski). $V(\mathcal{C}) = HSP(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 61-62. □

Teorema 1.3.27. *(Birkhoff). $\mathcal{C}$ é uma classe equacional sse $\mathcal{C}$ é uma variedade.*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 75-76. □

Lema 1.3.28. *Toda álgebra de Boole $\mathscr{A}$ satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) Se $a_1 \sqcap^{\mathscr{A}} a_2 = 0^{\mathscr{A}}$ e $a_1 \sqcup^{\mathscr{A}} a_2 = 1^{\mathscr{A}}$, então $a_1 =\sim^{\mathscr{A}} a_2$;
(ii) $\sim^{\mathscr{A}} (\sim^{\mathscr{A}} a) = a$;
(iii) $\sim^{\mathscr{A}} (a_1 \sqcup^{\mathscr{A}} a_2) =\sim^{\mathscr{A}} a_1 \sqcap^{\mathscr{A}} \sim^{\mathscr{A}} a_2$ e
$\sim^{\mathscr{A}} (a_1 \sqcap^{\mathscr{A}} a_2) =\sim^{\mathscr{A}} a_1 \sqcup^{\mathscr{A}} \sim^{\mathscr{A}} a_2$.

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 117-118. □

Definição 1.3.29. Seja X um conjunto. A *álgebra booleana dos sub-conjuntos de X* é $Sub(X) = \langle \wp(X), \cup, \cap, ^-, \emptyset, X \rangle$, em que $\wp(X)$ é o domínio da álgebra e $\cup$, $\cap$, $^-$ são as operações conjuntistas usuais. A *álgebra booleana de dois valores*, $\mathbf{2} = \langle 2, \sqcup^{\mathbf{2}}, \sqcap^{\mathbf{2}}, \sim^{\mathbf{2}}, 0^{\mathbf{2}}, 1^{\mathbf{2}} \rangle$, em que $\langle 2, \sqcup^{\mathbf{2}}, \sqcap^{\mathbf{2}} \rangle$ é um reticulado de dois elementos com $0^{\mathbf{2}} < 1^{\mathbf{2}}$, $\sim^{\mathbf{2}} (0^{\mathbf{2}}) = 1^{\mathbf{2}}$ e $\sim^{\mathbf{2}} (1^{\mathbf{2}}) = 0^{\mathbf{2}}$.

Um resultado muito conhecido de Stone mostra que toda álgebra booleana finita é isomorfa à álgebra booleana de todos os subconjuntos de algum conjunto finito X. Muitas outras caracterizações foram feitas pelo próprio Stone que mostram que as álgebras booleanas são essencialmente os anéis booleanos. Essa parte não tem aplicabilidade para o presente trabalho, e para um estudo mais detalhado sobre este tema recomendamos o capítulo 4 do livro de Burris e Sankappanavar (cf. [BS81]).

Definição 1.3.30. Seja I um conjunto. Um *filtro* F sobre I é um conjunto $F \subseteq \wp(I)$ tal que:
(i) $I \in F$;
(ii) Se $X, Y \in F$, então $X \cap Y \in F$;
(iii) Se $X \in F$ e $X \subseteq Y$, então $Y \in F$.

- Se $\wp(I) \neq F$, então F é chamado um *filtro próprio*.
- Se F é maximal (isto é, para todo filtro F', $F' \subseteq F$), então F é chamado de *ultrafiltro*.

A noção geral de filtros e ultrafiltros pode ser particularizada para reticulados (e obviamente para álgebras de Boole) conforme a definição abaixo.

Definição 1.3.31. Seja $\mathcal{R} = \langle R, \sqcup^{\mathcal{R}}, \sqcap^{\mathcal{R}}, \leq \rangle$ um reticulado e $F \subseteq R$. F é chamado um *filtro* de $\mathcal{R}$ se:
(i) Se $x, y \in F$, então $x \sqcap^{\mathcal{R}} y \in F$;
(ii) Se $x \in F$ e $x \leq y$ para $y \in R$, então $y \in F$.

As definições de *filtro próprio* e *ultrafiltro* para reticulados são as mesmas do caso geral dado acima.

Definição 1.3.32. Seja $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ uma família indexada de $\mathcal{T}$-álgebras, e suponha que F é um filtro sobre I. A relação binária Θ_F sobre $\prod_{i \in I} A_i$ é definida como:

$$\langle a, b \rangle \in \Theta_F \quad \text{sse} \quad \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$

Lema 1.3.33. *Para $(\mathscr{A}_i)_{I \in I}$ e F definidos acima, a relação Θ_F é uma relação de equivalência em $(A_i)_{I \in I}$. Para uma operação n-ária f em $(A_i)_{I \in I}$ e para $\langle a_1, b_1 \rangle, \cdots, \langle a_n, b_n \rangle \in \Theta_F$ temos que $\langle f(a_1, \cdots, a_n), f(b_1, \cdots, b_n) \rangle \in \Theta_F$, isto é, Θ_F é uma congruência para a "álgebra das partes de $\mathscr{A}$".*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 206. □

Definição 1.3.34. Dado um conjunto não vazio I, uma família indexada de $\mathcal{T}$-álgebras $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ e um filtro próprio F sobre I, definimos o *produto reduzido* $(\prod_{i \in I} \mathscr{A}_i)/F$ como segue. O universo $(\prod_{i \in I} A_i)/F$ é o conjunto $(\prod_{i \in I} A_i)/\Theta_F$, e seus elementos denotados como a/Θ_F. Para cada $t_i \in \mathcal{T}$ um símbolo de função n-ária e para $a_1, \cdots, a_n \in \prod_{i \in I} A_i$ temos:

$$t_i^{\prod_{i \in I} \mathscr{A}_i / F}(a_1/F, \cdots, a_n/F) = t_i^{\prod_{i \in I} \mathscr{A}_i / F}(a_1, \cdots, a_n)/F$$

e para r um símbolo de relação n-ário seja:
$r(a_1/F, \cdots, a_n/F)$ é válido sse $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models r(a_1(i), \cdots, a_n(i)\} \in F$.

Definição 1.3.35. Uma *quase-identidade* é uma identidade ou uma fórmula da forma $(t_1 \approx u_1 \wedge \cdots \wedge t_n \approx u_n) \to (t \approx u)$. Uma *quase-variedade* é uma classe de álgebras fechada por isomorfismo, sub-álgebras e produto reduzido, contendo uma álgebra trivial.

Teorema 1.3.36. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de $\mathcal{T}$-álgebras. Então $\mathcal{C}$ é uma quase-variedade sse $\mathcal{C}$ pode ser axiomatizada por quase-identidades.*

Demonstração. Conferir em [BS81] p. 219-220. □

Para mais detalhes a respeito da teoria de reticulados e de álgebras de Boole recomendamos os livros [Mir87] e [BS81].

1.4 A algebrização do cálculo proposicional clássico

Esta seção tem por objetivo apresentar de forma sistemática uma das mais interessantes conexões entre álgebra e lógica, a algebrização do cálculo proposicional clássico CP. Esse resultado aparece na maioria dos livros elementares de introdução à lógica, e a demostração desse resultado quase sempre é apresentada como um esboço, ou em forma de exercício, ou então dispersa no meio do texto. Nossa intenção é preencher essa lacuna deixada pela maioria dos livros textos que tratam dessa questão.

Teorema 1.4.1. *A álgebra do Cálculo Proposicional Clássico é a álgebra de Boole. Mais explicitamente, temos que a álgebra de Lindenbaum-Tarski associada a CP é isomorfa à álgebra de Boole livremente gerada por um conjunto infinito enumerável.*

Demonstração. A demonstração consiste em 13 passos, seguindo nosso esquema anterior, que parte da estrutura dedutiva de CP, estabelece a álgebra correspondente e mostra que esta álgebra é a álgebra de Boole livre em ω-geradores.

1^o *Passo:* Dada a assinatura $\Sigma_{CP} = \{\neg, \vee, \wedge\}$, a álgebra das fórmulas definida a partir de Σ_{CP} é a seguinte:

$$\mathbf{For} = \langle For, \neg, \vee, \wedge, 0, 1\rangle,$$

em que For é o conjunto das fórmulas de CP e $\neg$, $\vee$ e $\wedge$ são os conectivos de CP e 0 e 1 as constantes.

2^o *Passo:* Definimos uma relação no conjunto das fórmulas de CP para a construção do conjunto universo da álgebra quociente.[8]

$$\varphi \cong \psi \text{ sse } \vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \psi.$$

3^o *Passo:* Vejamos que a relação $\cong$ é uma relação de equivalência:

1. Reflexiva: $\varphi \cong \varphi$, pelo Lema 1.2.2 (a) e (w).
2. Simétrica: Se $\varphi \cong \psi$, então $\psi \cong \varphi$, pelo Lema 1.2.2 (w) duas vezes.
3. Transitiva: Se $\varphi \cong \psi$ e $\psi \cong \lambda$ então $\varphi \cong \lambda$, pelo Lema 1.2.2 (c) e (w).

4^o *Passo:* Vejamos que a relação de equivalência $\cong$ é uma congruência.[9]

1. Se $\varphi \cong \psi$, então (Passo 2) $\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \psi$, daí pelo Lema 1.2.2 (w) temos que $\vdash_{CP} \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash_{CP} \psi \rightarrow \varphi$, daí pelo Lema 1.2.2 (i) temos respectivamente que $\vdash_{CP} \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ e $\vdash_{CP} \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ e, portanto, $\neg\varphi \cong \neg\psi$.
2. Se $\varphi_0 \cong \psi_0$ e $\varphi_1 \cong \psi_1$, então $\vdash_{CP} \varphi_0 \leftrightarrow \psi_0$ e $\vdash_{CP} \varphi_1 \leftrightarrow \psi_1$, daí pelo Lema 1.2.2 (z) temos que $\vdash_{CP} (\varphi_0 \rightarrow \varphi_1) \leftrightarrow (\psi_0 \rightarrow \psi_1)$ e, portanto, $(\varphi_0 \rightarrow \varphi_1) \cong (\psi_0 \rightarrow \psi_1)$.

5^o *Passo:* A partir da álgebra das fórmulas considerada no Passo 1, definimos a álgebra quociente a partir da relação de equivalência definida no Passo 2, em que o universo é formado pelas classes de equivalência das fórmulas de CP e as operações são induzidas a partir de seus conectivos.

$$\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \neg^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, 0^{\mathbf{For}/_{\cong}}, 1^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle.$$

Os próximos passos consistem em verificar que a álgebra $\mathbf{For}/_{\cong}$ satisfaz todas as propriedades das álgebras de Boole.

[8] Não devemos esquecer que existem várias formulações equivalentes de CP, então é sempre possível definir o conectivo $\leftrightarrow$ a partir dos conectivos da assinatura original. Por exemplo $\varphi \leftrightarrow \psi$ é definido como $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$.

[9] Note que os conectivos $\wedge$, $\vee$ e as constantes 0 e 1, são definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ do seguinte modo: $(\varphi \vee \psi)$ é $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$; $(\varphi \wedge \psi)$ é $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$; 0 é $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ e 1 é $(\varphi \vee \neg\varphi)$. Portanto é suficiente fazer a demonstração somente para os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$.

6^o *Passo:* Considere a estrurura $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq \rangle$, tal que para quaisquer $[\varphi]$, $[\psi]$ e $[\lambda]$ elementos de $For/_{\cong}$ a relação $\leq$ é definida como:

$$[\varphi] \leq [\psi] \text{ sse } \vdash_{CP} \varphi \to \psi.$$

Pelo Lema 1.2.2 (z) é claro que $\leq$ está bem definida. Se $\varphi \cong \varphi'$ e $\psi \cong \psi'$ então $\vdash_{CP} \varphi \to \psi$ sse $\vdash_{CP} \varphi' \to \psi'$.

Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong}$ é parcialmente ordenado.

1. Reflexividade:
$[\varphi] \leq [\varphi]$, pois pelo Lema1.2.2 (a) $\vdash_{CP} \varphi \to \varphi$.
2. Transitividade:
Se $[\varphi] \leq [\psi]$ e $[\psi] \leq [\lambda]$, então pela definição de $\leq$ temos que $\vdash_{CP} \varphi \to \psi$ e $\vdash_{CP} \psi \to \lambda$, daí pelo Lema1.2.2 (c) temos $\vdash_{CP} \varphi \to \lambda$ e pela definição novamente temos que $[\varphi] \leq [\lambda]$.
3. Anti-simetria: Se $[\varphi] \leq [\psi]$ e $[\psi] \leq [\varphi]$ então $\vdash_{CP} \varphi \to \psi$ e $\vdash_{CP} \psi \to \varphi$, daí pelo Lema 1.2.2 (w) temos que $\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \psi$ e portanto $[\varphi] \cong [\psi]$.

7^o *Passo:* Vejamos que $\langle For/_{\cong}, \leq \rangle$ tem supremos, dados por $\vee^{\mathbf{For}/_{\cong}}$.

1. $[\varphi] \leq [\varphi \vee \psi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (n) $\vdash_{CP} \varphi \to \varphi \vee \psi$.
2. $[\psi] \leq [\varphi \vee \psi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (o) $\vdash_{CP} \psi \to \varphi \vee \psi$.
3. Suponhamos, agora, que $[\varphi] \leq [\lambda]$ e $[\psi] \leq [\lambda]$, então pela definição de $\leq$ temos que $\vdash_{CP} \varphi \to \lambda$ e $\vdash_{CP} \psi \to \lambda$, daí pelo Lema 1.2.2 (q) temos que $\vdash_{CP} (\varphi \vee \psi) \to \lambda$ e portanto $[\varphi \vee \psi] \leq [\lambda]$. Logo, $[\varphi \vee \psi]$ é o supremo de $[\varphi]$ e $[\psi]$.

8^o *Passo:* Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq \rangle$ tem ínfimos, dados por $\wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}$.

1. $[\varphi \wedge \psi] \leq [\varphi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (m) $\vdash_{CP} (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.
2. $[\varphi \wedge \psi] \leq [\psi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (l) $\vdash_{CP} (\varphi \wedge \psi) \to \psi$.
3. Suponhamos, agora, que $[\lambda] \leq [\varphi]$ e $[\lambda] \leq [\psi]$, então pela definição de $\leq$ temos que $\vdash_{CP} \lambda \to \varphi$ e $\vdash_{CP} \lambda \to \psi$, daí pelo Lema 1.2.2 (r) temos que $\vdash_{CP} \lambda \to (\varphi \wedge \psi)$ e portanto $[\lambda] \leq [\varphi \wedge \psi]$. Logo, $[\varphi \wedge \psi]$ é o ínfimo de $[\varphi]$ e $[\psi]$.

Portanto, a partir dos passos 6, 7 e 8 verificamos que a estrutura $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle$ é reticulado.

9^o *Passo:* Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle$ é um reticulado distributivo. Definimos:

(a) $[\varphi] \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} [\psi] = [\varphi \vee \psi]$
(b) $[\varphi] \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}} [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$
(c) $\neg^{\mathbf{For}/_{\cong}}[\varphi] = [\neg\varphi]$

As definições (a) e (b) correspondem ao que mostramos no 7^o Passo. Utilizamos $\sqcap$ e $\sqcup$ no lugar de $\wedge^{\mathbf{For}/_{\approx}}$ e $\vee^{\mathbf{For}/_{\approx}}$, respectivamente.

1. $([\varphi] \sqcap [\psi]) \sqcup [\gamma] \overset{\text{Pas.9(b)}}{=} [(\varphi \wedge \psi)] \sqcup [\gamma] \overset{\text{Pas.9(a)}}{=} [(\varphi \wedge \psi) \vee \gamma] \overset{1.2.2(x)}{=} [(\varphi\vee\gamma)\wedge(\psi\vee\gamma)] \overset{\text{Pas.9(b)}}{=} [(\varphi\vee\gamma)]\sqcap[(\psi\vee\gamma)] \overset{\text{Pas.9(a)}}{=} ([\varphi]\sqcup[\gamma])\sqcap([\psi]\sqcup[\gamma])$
2. $([\varphi] \sqcup [\psi]) \sqcap [\gamma] = ([\varphi] \sqcap [\gamma]) \sqcup ([\psi] \sqcap [\gamma])$ é análogo ao anterior usando o Lema 1.2.2 (v).

10^o *Passo:* Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle$ tem primeiro elemento, a saber, a classe das contradições, isto é, $[\psi \wedge \neg\psi]$.[10]

Para todo $[\varphi] \in For/_{\cong}$, sabemos que $[\psi\wedge\neg\psi] \leq [\varphi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (t) temos que $\vdash_{CP} (\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi$. Portanto $0^{\mathbf{For}/_{\cong}}$, a classe das contradições, é o primeiro elemento da álgebra $\mathbf{For}/_{\cong}$.

11^o *Passo:* Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle$ tem último elemento, a saber, a classe das tautologias (teoremas), isto é, $[\psi\vee\neg\psi]$.[11]

Para todo $[\varphi] \in For/_{\cong}$, sabemos que $[\varphi] \leq [\neg\psi\vee\psi]$, pois pelo Lema 1.2.2 (u) $\vdash_{CP} \varphi \to (\neg\psi \vee \psi)$. Portanto $1^{\mathbf{For}/_{\cong}}$, a classe das tautologias, é o último elemento da álgebra $\mathbf{For}/_{\cong}$.

12^o *Passo:* Vejamos que $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/_{\cong}}, \vee^{\mathbf{For}/_{\cong}} \rangle$ é complementado.

1. $\neg^{\mathbf{For}/_{\cong}}[\varphi] \sqcup [\varphi] \overset{\text{Pas.9(c)}}{=} [\neg\varphi] \sqcup [\varphi] \overset{\text{Pas.9(a)}}{=} [\neg\varphi \vee \varphi] \overset{\text{Pas.11}}{=} 1^{\mathbf{For}/_{\cong}}$
2. $\neg^{\mathbf{For}/_{\cong}}[\varphi] \sqcap [\varphi] \overset{\text{Pas.9(c)}}{=} [\neg\varphi] \sqcap [\varphi] \overset{\text{Pas.9(b)}}{=} [\neg\varphi \wedge \varphi] \overset{\text{Pas.10}}{=} 0^{\mathbf{For}/_{\cong}}$
3. Sabemos que o complemento é único, ver Lema 1.3.16.

13^o *Passo:* A álgebra $\mathbf{For}/_{\cong}$ pode ser vista como livremente gerada pelo conjunto $\{[p_i] : i \in \mathbb{N}\}$, em que $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis proposicionais (cf. [RS68]).

---

[10] Não devemos esquecer que todas as contradições são equivalentes.
[11] Não devemos esquecer que todas as tautologias são equivalentes.

Em conseqüência dos argumentos acima, concluímos que a estrutura algébrica $\mathbf{For}/_{\cong} = \langle For/_{\cong}, \leq, \wedge^{\mathbf{For}/\cong}, \vee^{\mathbf{For}/\cong}, \neg^{\mathbf{For}/\cong}, 0^{\mathbf{For}/\cong}, 1^{\mathbf{For}/\cong} \rangle$ é uma álgebra de Boole. $\square$

O significado deste resultado é bastante profundo: mostra que há uma estreita similaridade entre a lógica proposicional e uma estrutura algébrica simples e natural como as álgebras de Boole. Por um lado, o teorema parte da estrutura dedutiva de CP e obtém uma álgebra de Boole. Por outro lado, a definição de álgebra de Boole como um reticulado distributivo complementado, evidencia que uma álgebra de Boole segue as mesmas leis de CP. Esta amarração é neste caso apenas intuitiva, porque não existe uma definição formal do que é ser algebrizável na acepção de Lindenbaum-Tarski. Muito se tem feito para completar essa proposta, por exemplo, como no trabalho de Rasiowa e Sikorski mencionado acima. Seus resultados, embora sejam elucidativos, são apenas parciais, já que não apontam quais são os elementos que eventualmente impediriam a algebrização da lógica. A proposta de Blok e Pigozzi oferece uma definição rigorosa de algebrização, da qual o método clássico é visto como um caso particular, que permite apontar quando uma lógica não é algebrizável e, portanto, ajuda a concluir de certa forma a pesquisa nesse campo.

Os passos e os resultados que utilizamos evidenciam que existe uma grande similaridade entre argumentar ou demonstrar na álgebra e na lógica, um fenômeno que todo estudante de lógica sente, mas que não é imediato verificar. O problema central da álgebra da lógica é então investigar até que ponto esta analogia entre álgebra e lógica pode ser seguida, e isto será estudado nos próximos capítulos.

Em seu tratado de 1854 (*apud* [Bur98]) G. Boole sonhava construir o método da lógica:

> The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of the mind by which reasoning is performed; to give expression to them in the symbolical language of a calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and construct its method...

Apesar das críticas que se pode, com ou sem justiça, atribuir aos métodos erráticos de Boole cf.[Bur98], (pp. 29 a 35), não podemos dizer que suas intuições estavam erradas, uma vez que resultados como os famosos Teorema da Representação de Stone e a Dualidade de Stone (cf. [BS81]) mostram a estreitíssima relação entre álgebras de Boole (na lógica), conjuntos e espaços topológicos.

1.5 O alcance do enfoque algébrico de Lindenbaum e Tarski

A partir do exposto, é natural agora esclarecer alguns exemplos adicionais de lógicas que são e que não são Lindenbaum-Tarski algebrizáveis. Fazemos essa abordagem de modo sucinto, apontando diretamente onde se encontram os problemas para com a algebrização e as soluções dadas a esses problemas. O procedimento de algebrização de Lindenbaum e Tarski pode ser aplicado para muitas lógicas além da lógica clássica. Os seguintes exemplos se referem às lógicas algébrizáveis seguindo o mesmo processo do cálculo proposicional clássico CP.

- A lógica proposicional intuicionista é algebrizável pelas álgebras de Heyting.
- As lógicas proposicionais modais são algebrizáveis pelas álgebras chamadas álgebras modais.
- A lógica de primeira ordem é algebrizável pelas álgebras cilindricas.
- As lógicas Polivalentes são algebrizáveis pelas álgebras n-valentes de Łukasiewicz e pelas MV-álgebras.

Há ainda muitos outros exemplos de lógicas algebrizáveis pelo método clássico, porém contra-exemplos são bem mais difíceis de serem obtidos, uma vez que não existe um procedimento de falsificação para esse método de algebrização. Há, sim, muitos exemplos de lógicas cuja questão não foi decidida ainda. Nosso interesse foge desse escopo, pois nossa intenção é propor um novo método de algebrização que seja capaz de prover uma algebrização para lógicas recalcitrantes com relação á algebrização.

Mesmo não havendo um método de falsificação para a algebrização clássica, Mortensen mostrou em [Mor80], que a lógica paraconsistente C_1 não é algebrizável nessa acepção, mostrando que não há maneira de separar as fórmulas de C_1 em classes de equivalência que não seja a trivial. Mostrou também que esse mesmo resultado pode ser estendido para toda a hierarquia C_n. Vejamos, em linhas gerais, qual foi o argumento de Mortensen para o caso de C_1.

Seja $\Sigma_{C_1} = \{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge\}$ a assinatura de C_1. As seguintes fórmulas são definidas:

- $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- $\alpha^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Axiomas:

Ax1. $\vdash_{C_1} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax2. $\vdash_{C_1} (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \delta)) \to (\varphi \to \delta))$

Ax3. $\vdash_{C_1} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

Ax4. $\vdash_{C_1} (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

Ax5. $\vdash_{C_1} (\varphi \wedge \psi) \to \psi$

Ax6. $\vdash_{C_1} \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

Ax7. $\vdash_{C_1} \psi \to (\varphi \vee \psi)$

Ax8. $\vdash_{C_1} (\varphi \to \delta) \to ((\psi \to \delta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \delta))$

Ax9. $\vdash_{C_1} (\varphi \vee \neg\varphi)$

Ax10. $\vdash_{C_1} (\neg\neg\varphi \to \varphi)$

Ax11. $\vdash_{C_1} \varphi^\circ \to (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi))$

Ax12. $\vdash_{C_1} (\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to (\varphi \wedge \psi)^\circ$

Ax13. $\vdash_{C_1} (\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to (\varphi \vee \psi)^\circ$

Ax14. $\vdash_{C_1} (\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to (\varphi \to \psi)^\circ$

Regra: *Modus Ponens*

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Uma C_1-valoração é uma função $v : \mathcal{L} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que, para toda $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ temos:

1. Se $v(\alpha) = 0$, então $v(\neg\alpha) = 1$;
2. Se $v(\neg\neg\alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 1$;
3. Se $v(\beta^\circ) = v(\alpha \to \beta) = v(\alpha \to \neg\beta) = 1$, então $v(\alpha) = 1$;
4. $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$ sse $v(\alpha \to \beta) = 1$;

5. $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ sse $v(\alpha \wedge \beta) = 1$;

6. $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$ sse $v(\alpha \vee \beta) = 1$;

7. Se $v(\alpha^\circ) = v(\beta^\circ) = 1$, então $v((\alpha \wedge \beta)^\circ) = v((\alpha \to \beta)^\circ) = 1$;

Uma fórmula α é verdadeira em uma valoração v sse $v(\alpha) = 1$. A completude de C_1 é obtida com relação à semântica de valorações dada acima, isto é: Dado $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas, então $\Gamma \vdash_{C_1} \alpha$ sse para toda valoração v, se $v(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$, então $v(\alpha) = 1$. Para detalhes da demonstração recomendamos a Dissertação de Mestrado de E. Alves (cf. [Alv76]), o artigo original de da Costa e Alves (cf. [dCA77]), e também o artigo de Loparić e Alves (cf. [LA80]) e a dissertação de mestrado de J. Marcos (cf. [Mar99] p. 48).

O ponto crucial que impede a algebrização de C_1, e que já havia sido detectado pelo próprio Newton da Costa em [dC66] é que a lógica C_1 é desprovida da regra (SED), *substituição por equivalentes demonstráveis* :

(SED) Se $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, então $\vdash \varphi_{[\alpha]} \leftrightarrow \varphi_{[\beta]}$, para toda $\varphi_{[\alpha]}$[12].

Observação 1.5.1. (SED) não é válida em C_1

Demonstração. Considere as seguintes fórmulas em C_1 :
- $\alpha = p_1 \wedge p_2$;
- $\beta = p_2 \wedge p_1$;
- $\varphi_{[\psi]} = \neg\psi$;

Suponhamos que seja válida a regra (SED). Não é difícil verificar que $\vdash_{C_1} \alpha \leftrightarrow \beta$, ou seja, $\vdash_{C_1} (p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1)$. A partir de (SED) temos que: $\vdash_{C_1} \varphi_{[\alpha]} \leftrightarrow \varphi_{[\beta]}$, isto é, $\vdash_{C_1} \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$ e portanto $\vdash_{C_1} \neg(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow \neg(p_2 \wedge p_1)$.

Considere duas valorações v e v' tais que $v(p_1) = v(p_2) = 1$, $v'(p_1) = v'(p_2) = 1$, mas $v(\neg\alpha) = 1$ enquanto $v'(\neg\beta) = 0$, que existem por definição (o que é possível porque as C_1–valorações não são vero-funcionais). Conseqüentemente $\nvdash_{C_1} \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$, o que é um absurdo. Logo (SED) não pode ser válida em C_1. □

Seja For um conjunto de fórmulas, $\cong$ uma relação de equivalência e $For/_{\cong}$ uma álgebra quociente satisfazendo às seguintes cláusulas:

1. $\cong$ é uma relação de equivalência;

2. Se $\alpha \cong \beta$, então $\varphi_{[\alpha]} \cong \varphi_{[\beta]}$, para toda $\varphi_{[\alpha]}$;

[12] Denotamos $\varphi_{[\alpha]}$ a toda fórmula que contém α como sub-fórmula.

3. Se $\alpha \cong \beta$ e $\vdash \alpha$ então $\vdash \beta$.

Definição 1.5.2. Seja $\mathcal{L}/_{\cong}$ uma álgebra quociente satisfazendo as cláusulas (1)-(3) acima. Dizemos que $For/_{\cong}$ é *trivial* sse para toda fórmula $\alpha \in For$ temos que $[\alpha] = \{\alpha\}$, em que $[\alpha]$ é a classe de equivalência de α, ou, se para toda fórmula $\alpha, \beta \in For$ temos que $[\alpha] = [\beta]$. Caso contrário, dizemos que $For/_{\cong}$ é *não trivial*.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada no próprio artigo mencionado acima, serve de alicerce para o argumento central.

Teorema 1.5.3. *Se uma relação de equivalência $\cong$ satisfaz as cláusulas (2) e (3), então necessariamente satisfaz a seguinte condição: se $\alpha \cong \beta$, então $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.*

Depois disso são provados alguns lemas técnicos que recorrem às quase-matrizes que dão uma semântica de valorações para C_1 e permitem provar um teorema de completude. Não vamos citá-los aqui, uma vez que não exibimos a demonstração desse resultado. O resultado central do artigo é o seguinte:

Teorema 1.5.4. *Nenhuma relação de equivalência para C_1, satisfazendo às condições (1), (2) e (3), determina uma álgebra quociente não-trivial.*

Demonstração. A demonstração é feita por redução ao absurdo, mostrando que se $\alpha \cong \beta$, então $\alpha = \beta$.
- Por um lado, se assumimos por hipótese que $\alpha \cong \beta$, então usando a condição (2) e o Teorema 1.5.3 chega-se facilmente que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, $\vdash \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$, $\vdash (\alpha \vee p_1) \leftrightarrow (\beta \vee p_1)$ e $\vdash \neg(\alpha \vee p_1) \leftrightarrow \neg(\beta \vee p_1)$.
- Por outro lado, se assumirmos que $\alpha \neq \beta$, concluímos que $\nvdash \neg(\alpha \vee p_1) \leftrightarrow \neg(\beta \vee p_1)$, ou seja, uma contradição. Esse resultado é obtido raciocinando-se por meio das valorações de C_1 juntamente com a aplicação de outros resultados mais técnicos. $\square$

O artigo finaliza mostrando que esse mesmo resultado pode ser estendido para toda a hierarquia C_n, dado que são todos sub-sistemas de C_1.

Com esse resultado Mortensen coloca um ponto final ao problema da algebrização dos C_n. Poderíamos precipitadamente concluir que as lógicas paraconsistentes são desprovidas de conteúdo matemático, pelo fato de não serem algebrizáveis, uma vez que outras lógicas não-clássicas como a intuicionista e a modal não compartilham tal fragilidade. Porém, o próprio Mortensen contorna esse problema mostrando em [Mor89] que se pode estender C_n a outra hierarquia de lógicas paraconsistentes, estas algebrizáveis.

Tais lógicas são conhecidas por $C_{k/(k+1)}$, para $k > 0$, são extensões de C_1, isto é, constituem as lógicas $C_{1/2}$, $C_{2/3}$, $C_{3/4}$,$\cdots$, compreendidas entre C_0 e C_1. Portanto, o problema com a algebrização não reside na lógica paraconsistente, mas é apenas um problema pontual da hierarquia C_n.

Outras extensões algebrizáveis de C_1 foram propostas por N. C. da Costa, Jean-Yves Béziau e Otávio Bueno em [dCBB95], conhecidas por C_1^+, que em [CM02] são classificadas como a lógica **Cilo**.

O próximo capítulo mostra como pode se estender a definição de algebrização de Tarski, permitindo finalmente decidir se um sistema é algebrizável ou não.

2. ALGEBRIZANDO: DE LINDENBAUM E TARSKI, A BLOK E PIGOZZI

Como vimos no capítulo anterior, o método de Lindenbaum-Tarski para algebrizar lógicas não tem poder para expressar quando um sistema dedutivo não pode ser algebrizável, ou seja, o método não incorpora uma definição verificável de algebrizabilidade. Diante deste problema, W. J. Blok e D. Pigozzi em [BP89] se propuseram a responder tal questão. Nesse livro, eles definem precisamente quando um sistema dedutivo é algebrizável, e com isso torna-se possível dizer se a não algebrizabilidade é inerente ou não ao sistema dedutivo em questão. Esse novo método de algebrização, conhecido por *algebrização finitária*, e que também chamamos de *algebrização Blok-Pigozzi*, é uma generalização do método clássico no sentido em que toda lógica que é Lindenbaum-Tarski algebrizável também é Blok-Pigozzi algebrizável. Usamos doravante a expressão "finitamente algebrizável" como sinônimo da expressão "Blok-Pigozzi algebrizável".

Tal como no método de algebrização clássica, a definição de algebrização, proposta por Blok e Pigozzi, não expressa as propriedades da quase-variedade algébrica, aqui denotada por $\mathcal{K}$, que algebriza o sistema dedutivo, mas apenas garante sua existência. Extrair as propriedades da variedade algébrica, a fim de traçar o "código genético" do sistema dedutivo em questão, é a parte árdua da algebrização de Blok e Pigozzi, tal como o é no método clássico. Vimos no Capítulo 1 que definir a álgebra das fórmulas para CP a partir da sua assinatura não é tão difícil: a artimanha é mostrar que aquela álgebra satisfaz todas as propriedades das álgebras de Boole. O Teorema 2.1.22 mostra como, a partir dos axiomas e regras do sistema dedutivo, se obtêm de maneira construtiva as equações que definem a quase-variedade algébrica, permitindo um estudo mais aprofundado da mesma. Este tema não é tratado em detalhes pelos autores, e tampouco o será nesta dissertação.

Um resultado bastante relevante da teoria de algebrização de Blok e Pigozzi, dado pelo Teorema 2.1.20, mostra que a quase-variedade algébrica capaz de algebrizar um sistema, se existe, é única. Outro resultado bastante significativo que permite apontar a não algebrizabilidade de uma lógica é dado pelo Teorema 2.1.24. Esse resultado é crucial, pois é o ponto em que o método de algebrização de Blok e Pigozzi se distingue do clássico, já que permite conhecer mais sobre a natureza algébrica do sistema dedutivo em questão: se o sistema não for algebrizável na acepção de Blok e Pigozzi, também não o será na de Lidenbaum e Tarski. Saberemos então que se trata de um sistema lógico excêntrico.

Conforme Blok e Pigozzi, uma classe $\mathcal{K}$ de álgebras é uma *semântica algébrica* de um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ se a relação de conseqüência $\vdash_{\mathcal{S}}$ pode ser interpretada em $\models_{\mathcal{K}}$ por meio de uma tradução equacional. $\mathcal{K}$ é uma *semântica algébrica equivalente* de $\mathcal{S}$ se $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica para $\mathcal{S}$, e se existe uma tradução recíproca de $\models_{\mathcal{K}}$ em $\vdash_{\mathcal{S}}$. Um sistema dedutivo é dito *algebrizável* se tem uma semântica algébrica equivalente.

A idéia da tradução entre a relação de conseqüência sintática e a relação de conseqüência equacional, a qual é referida acima, é a mesma que a de tradução entre lógicas, tratada em [dSDS99], [Fei97], [CC02]. Na lógica a tradução é uma operação que leva um operador de conseqüência (que relaciona um conjunto de fórmulas com uma fórmula de um sistema) a outro operador de conseqüência (que também relaciona um conjunto de fórmulas com uma fórmula). Aqui a tradução é uma operação que leva um operador que relaciona um conjunto de fórmulas com uma fórmula, para um operador de conseqüência que relaciona um conjunto de equações com uma equação.

É interessante notar que um mesmo sistema dedutivo pode ter muitas semânticas algébricas, e todas essas semânticas provêem um teorema de completude algébrico para esse sistema, porém tais semânticas não refletem as propriedades meta-lógicas desse sistema, conforme argumentam W. Blok e Jordi Rebagliato em [BR03]. Para que um sistema seja algebrizável a variedade algébrica terá que resgatar o critério básico da algebrização, ou seja, o conceito de congruência, que é uma meta-propriedade do sistema dedutivo. A proposta é que o conceito de congruência tenha que representar, de alguma forma, o conceito de semântica do sistema dedutivo. Espera-se que o sistema dedutivo que se pretende algebrizar seja correto e completo, portanto se o conceito de congruência coincidir com o modelo do sistema, este é algebrizável.

O modelo é expresso pela noção dos $\mathcal{S}$-filtros, e o conceito de congruências pelo de $\mathcal{K}$-congruências compatíveis com os $\mathcal{S}$-filtros. Para tanto define-se uma relação entre os $\mathcal{S}$-filtros e as $\mathcal{K}$-congruências compatíveis e mostra-se que se existir um isomorfismo entre o reticulado dos $\mathcal{S}$-filtros e o reticulado das $\mathcal{K}$-congruências compatíveis, então o sistema é algebrizável.

A generalização da noção de "esquema de fórmulas equivalentes" do sistema dedutivo, utilizado no método clássico de algebrização para separar as classes de equivalência, é substituído por um conjunto finito de fórmulas em duas variáveis, denotado por $\Delta(\varphi, \psi)$. A generalização da noção abstraída de igualdade ocorre similarmente, utilizando o conceito de *equações definidoras*, que constitui um conjunto finito de equações formadas por fórmulas em uma variável, denotadas por $\epsilon_i(p_i) \approx \delta_i(p_i)$. O fato desses conjuntos serem finitos explica a denominação de algebrização finitária.

A validade das fórmulas de um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é testada na classe $\mathcal{K}$ de álgebras por meio das equações definidoras, respeitando-se a seguinte formulação, que nada mais é, como já dissemos, que um teorema de completude cujo modelo é uma classe de álgebras:

$$\Gamma \vdash_S \varphi \text{ sse } \{\epsilon_i(\gamma_i) \approx \delta_i(\gamma_i) : \gamma_i \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \epsilon(\varphi) \approx \delta(\varphi)$$

Um problema deixado em aberto em [BP89] é se existe um sistema dedutivo que não verifica a Definição 2.1.16. Para solucionar esse problema, Blok e Rebagliato em [BR03] estabelecem condições necessárias para a existência de uma semântica algébrica, e exibem exemplos de sistemas dedutivos que não possuem semântica algébrica.

O Teorema 2.1.23, muito útil para testar a algebrizabilidade de um sistema dedutivo, trabalha com o conceito de conjunto de fórmulas de equivalência em duas variáveis e de equações definidoras. Chamamos *conjunto de algebrizadores* o conjunto $\langle \Delta(\varphi, \psi), \langle \epsilon(\alpha), \delta(\alpha) \rangle \rangle$ que é capaz de algebrizar um sistema dedutivo $\mathcal{S}$. No caso da algebrização clássica, o conjunto de algebrizadores é sempre o mesmo, a saber:

$\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \leftrightarrow \psi\}$;

$\epsilon(\alpha) = \alpha$;

$\delta(\alpha) = \top$.

No caso do cálculo proposicional clássico CP a algebrização finitária é imediata, uma vez que o conjunto de algebrizadores é muito natural, mas isso não implica que essa nova técnica de algebrização seja facilmente obtida. Não existe um método para especificar o conjunto de algebrizadores para um determinado sistema. Como, no caso clássico, o conjunto de algebrizadores é sempre o mesmo, então fica explicado o porquê de ser tão difícil, para um sistema dedutivo, obter o status de ser classicamente algebrizável.

A generalização do método clássico permite que o conjunto $\Delta(\varphi, \psi)$, ao invés de ser unitário, seja apenas finito. Com isso é possível expressar a noção de fórmula de equivalência sem necessariamente ter como símbolo definido o conectivo bi-implicacional. O ganho é permitir que alguns sistemas lógicos atípicos sejam algebrizáveis, por exemplo algumas lógicas modais e até mesmo algumas lógicas paraconsistentes, como é o caso de P^1 de A. M. Sette.

Algumas propriedades da quase-variedade algébrica podem ser transferidas para o sistema dedutivo por meio da algebrização, como por exemplo se a quase-variedade algébrica goza das propriedades de amalgamação, então o sistema dedutivo satisfaz as propriedades de interpolação de Craig e vice-versa, conforme mostra o Teorema 3.12 do artigo de Font, Jansana e D. Pigozzi em [FJP03], assim como outras. Para mais sobre este tópico indicamos também o artigo [BP].

Nosso interesse consiste apenas em exibir a tecnologia do método para algebrizar lógicas. Neste capítulo expomos um resumo da teoria de algebrização de Blok e Pigozzi, seguindo de perto as definições e teoremas de [BP89]. Para destacar, de forma didática, como a algebrização Blok-Pigozzi generaliza o método clássico, mostramos na Seção 2.2 como a classe das álgebras de Boole pode ser vista como uma semântica algébrica equivalente para CP (cf. [BP]). Ilustramos também que um mesmo sistema dedutivo pode ter mais de uma semântica algébrica (não equivalente). Exemplificamos esse fato, mostrando que tanto a classe das álgebras de Heyting como a classe das álgebras de Boole formando uma semântica algébrica (não equivalente) para o cálculo proposicional clássico CP, seguindo a proposta de Blok e Rebagliato em [BR03].

Mostramos a algebrização da lógica paraconsistente P^1, detalhando as demonstrações de [LMS90], e da lógica paracompleta I^1 seguindo [SC95]. Para finalizar o capítulo mostramos alguns exemplos de lógicas para as quais o método Blok-Pigozzi não se aplica e detalhamos a demonstração do resultado obtido por Lewin *et alia* (cf. [LMS91]), que mostra que a lógica paraconsistente C_1 não é algebrizável e estendemos este resultado para toda a hierarquia C_n de da Costa.

2.1 O conceito de algebrização de Blok e Pigozzi

Para analisarmos um sistema dedutivo, em particular, primeiramente devemos estudar as propriedades que o operador de conseqüência desse sistema satisfaz. Nosso interesse é tratar de sistemas dedutivos cujo operador de conseqüência seja reflexivo, monotônico, transitivo, finitário e estrutural. A proposta de Blok e Pigozzi para algebrizar lógicas também é direcionada para tais sistemas, o que é muito natural, uma vez que a maioria dos sistemas dedutivos satisfaz essas propriedades.

O objetivo da algebrização é aproximar, tanto quanto possível, o operador de conseqüência equacional $\models_{\mathcal{K}}$ de uma classe de álgebras, do operador de conseqüência $\vdash_S$ do sistema dedutivo, até que estes possam ser intertradutíveis. Como propusemos na Introdução, isso é o que permite uma concretização matemática da noção de derivabilidade. Para ilustrar como se obtém a algebrização finitária mostramos o porquê de se trabalhar com as quase-variedades algébricas, para então apresentarmos os resultados que são utilizados na prática para se algebrizar os sistemas dedutivos. As definições mais usuais serão relegadas ao corpo do texto; as mais relevantes merecerão destaque e serão numeradas. Muitos dos conceitos listados abaixo já foram citados de alguma forma, mas para uniformidade os definimos explícita e formalmente.

Seja Σ uma assinatura proposicional e $\mathcal{V} = \{p_1, \cdots, p_n, \cdots\}$ um conjunto de variáveis proposicionais. Em um contexto algébrico os elementos de Σ são chamados de *operações fundamentais*. O conjunto das fórmulas, denotado por For, é construído a partir da assinatura Σ sobre o conjunto $\mathcal{V}$, da mesma forma que no Capítulo 1. A partir de agora nos referimos aos sistemas dedutivos de forma mais geral, indicando, ao invés do conjunto das fórmulas, o conjunto dos conectivos que formam as fómulas.

Um *sistema dedutivo* é um par $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, em que $\vdash_{\mathcal{S}}$ é uma relação de conseqüência em For, que verifica as condições (Con1)-(Con5) do Capítulo 1.

Seja $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow For$ uma função. Uma *substituição* é um endomorfismo $\sigma : For \longrightarrow For$, isto é, $\sigma(\varphi[p_1, \cdots, p_n]) = (\varphi[\sigma(p_1), \cdots, \sigma(p_n)])$, em que $(p_1, \cdots, p_n)$ são as variáveis que ocorrem em φ.

Uma *regra de inferência* é um par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, em que Γ é um conjunto finito de fórmulas, que chamamos de premissas da regra, e φ é uma fórmula, chamada de conclusão. Um *axioma* é uma regra de inferência cujo conjunto Γ de premissas é vazio, isto é, $\langle \varnothing, \varphi \rangle$.

Definição 2.1.1. Uma *dedução* de φ a partir de um conjunto Γ de fórmulas, denotado por $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, é uma seqüência finita de fórmulas $\gamma_0 \ldots \gamma_{n-1}$ tal que $\gamma_{n-1} = \varphi$ e, para todo $i < n$, uma das seguintes condições é válida:
(i) $\gamma_i \in \Gamma$;
(ii) existe um axioma $\langle \varnothing, \psi \rangle$ e uma substituição σ tal que $\gamma_i = \sigma(\psi)$;
(iii) existe uma regra $\langle \Delta, \psi \rangle$ e uma substituição σ tal que $\gamma_i = \sigma(\psi)$ e $\sigma(\Delta) \subseteq \{\gamma_j : j < i\}$.

Nota 2.1.2. Note que a partir da Definição 2.1.1 pode-se demonstrar uma cláusula adicional da relação de conseqüência, a saber:

- Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta \vdash \Gamma$ então $\Delta \vdash \varphi$, em que $\Delta \vdash \Gamma$ sse $\Delta \vdash \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$ [1].

[1] Em [BP89], Blok e Pigozzi assumem esta cláusula como básica.

De fato, se $\Gamma \vdash \varphi$, existe uma demonstração $\gamma_1, \ldots, \gamma_n = \varphi$. Como $\Delta \vdash \Gamma$, então podemos substituir cada $\gamma_i \in \Gamma$ pela sua demonstração a partir de Δ, obtendo uma demonstração de φ a partir de Δ. Veja no Apêndice a demonstração de "(Con3) implica (Con3')" que mostra esse fato.

As definições seguintes dizem respeito à classe de álgebras. Seguimos na mesma linha das definições acima, objetivando evidenciar o paralelo existente entre as definições do sistema dedutivo $\mathcal{S}$, acima, e da quase-variedade algébrica $\mathcal{K}$, culminando na caracterização do operador de conseqüência equacional $\models_{\mathcal{K}}$ com o operador de consequência sintático $\vdash_{\mathcal{S}}$.

Entendemos por Σ-*álgebra* a estrutura $\mathscr{A} = \langle A, \omega^{\mathscr{A}} \rangle$, em que A é um conjunto não vazio, chamado de *universo* de $\mathscr{A}$ e $\omega^{\mathscr{A}}$ é uma operação em A, de aridade n, induzida pelo conectivo n-ário ω da assinatura Σ.

Uma Σ-*matriz* é um par $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D \rangle$, em que $\mathscr{A}$ é uma Σ-álgebra e $D = \{a \in A : a \text{ tem valor distinguido}\}$.

Definição 2.1.3. Definimos uma *interpretação* ou *denotação* de uma fórmula φ na Σ-álgebra $\mathscr{A} = \langle A, \omega^{\mathscr{A}} \rangle$, indicada por $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}$, como segue:

1. Se φ é uma variável, então:
   $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}} \in A$;

2. Se φ é uma fórmula do tipo $\omega(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1})$, então:
   $[\![\omega(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1})]\!]_{\mathscr{A}} = \omega^{\mathscr{A}}([\![\varphi_0]\!]_{\mathscr{A}}, \cdots, [\![\varphi_{n-1}]\!]_{\mathscr{A}})$, em que $\omega^{\mathscr{A}}$ é uma operação n-ária.

Definição 2.1.4. Uma fórmula φ é *válida em uma* Σ-*matriz* $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D \rangle$ sse $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}} \in D$, para tal interpretação $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}$.

Definição 2.1.5. Seja $\mathcal{S}$ um sistema dedutivo e $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D \rangle$ uma matriz. $\mathscr{M}$ é chamada de *matriz modelo* se:
$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $[\![\Gamma]\!]_{\mathscr{A}} \models_{\mathscr{M}} [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}$, para toda interpretação em $\mathscr{A}$, onde $[\![\Gamma]\!]_{\mathscr{A}} \models_{\mathscr{M}} [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}$ denota o seguinte: se $[\![\gamma]\!]_{\mathscr{A}} \in D$, para toda $\gamma \in \Gamma$, então $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}} \in D$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\}$ fórmulas de $\mathcal{S}$.

Definição 2.1.6. Um subconjunto F de A é chamado um $\mathcal{S}$-*filtro* se $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, F \rangle$ é matriz modelo de $\mathcal{S}$.

Observação 2.1.7. F é um $\mathcal{S}$-filtro sse F contém todas as interpretações dos axiomas lógicos de $\mathcal{S}$ e é fechado para cada regra de inferêrencia. Note que o conjunto dos valores distinguidos da matriz modelo está contido em F, isto é, $D \subseteq F$.

Definição 2.1.8. Seja $\mathfrak{M}$ uma classe de matrizes e $\models_{\mathfrak{M}}$ a relação de conseqüência em $\mathfrak{M}$. Dizemos que φ *é conseqüência semântica de* Γ na classe das matrizes se:
$\Gamma \models_{\mathfrak{M}} \varphi$ sse $[\![\Gamma]\!]_{\mathscr{A}_i} \models_{\mathscr{M}_i} [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}_i}$ sse $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}_i} \in D_i$ sempre que $[\![\gamma_j]\!]_{\mathscr{A}_i} \in D_i$, onde $[\![\Gamma]\!]_{\mathscr{A}_i} = \{[\![\gamma_j]\!]_{\mathscr{A}_i} : \gamma_j \in \Gamma\}$, para toda $\mathscr{M}_i \in \mathfrak{M}$.

Definição 2.1.9. Seja $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ um sistema dedutivo e $\mathfrak{M}$ uma classe de Σ-matrizes. $\mathfrak{M}$ é chamada uma *semântica matricial de* $\mathcal{S}$ se, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\}$ fórmulas de $\mathcal{S}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ sse $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} \varphi$.

As seguintes definições e teoremas são úteis para mostrar quando um sistema dedutivo não é algebrizável.

Definição 2.1.10. Seja $\mathscr{A}$ uma álgebra qualquer. Para cada filtro F, a relação de Leibniz $\Omega_{\mathscr{A}}(F)$, também chamada de *operador de Leibniz*, é uma relação binária sobre o domínio A da álgebra, definida por:
$\Omega_{\mathscr{A}}(F) = \{\langle a, b\rangle : [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}(a, c_0 \cdots, c_{k-1}) \in F$ sse $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}(b, c_0, \cdots, c_{k-1}) \in F$, para toda fórmula $\varphi(p, q_0 \cdots, q_{k-1})$ de $\mathcal{S}$ e todo $c_0, \cdots c_{k-1} \in A\}$.

Definição 2.1.11. Uma relação de equivalência Θ sobre a álgebra $\mathscr{A}$ é chamada uma *congruência*, se para toda Σ-fórmula $\varphi(p_0, \cdots, p_{n-1})$ temos: $\langle [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1}), [\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}}(b_0, \cdots, b_{n-1})\rangle \in \Theta$ sempre que $\langle a_i, b_i\rangle \in \Theta$, para todo $i < n$.

Definição 2.1.12. Uma congruência Θ é chamada de *congruência compatível* com um subconjunto F da álgebra $\mathscr{A}$ quando:
$a \in F$ e $\langle a, b\rangle \in \Theta$ implica $b \in F$.

Teorema 2.1.13. *Para qualquer álgebra $\mathscr{A}$ e qualquer filtro $F \subseteq A$, $\Omega_{\mathscr{A}}(F)$ é a maior congruência de $\mathscr{A}$ compatível com F.*

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 11. □

Seja Σ uma assinatura proposicional. Uma Σ-*equação* $\varphi \approx \psi$ é uma expressão formal em que φ, ψ são fórmulas de $\mathcal{S}$. Chamamos de Eq_{Σ} o conjunto de todas as Σ-equações.

Temos dois níveis diferentes de equações: na álgebra e na classe de álgebras. Para deixar claro em que contexto estamos trabalhando, utilizamos um símbolo para cada contexto; o símbolo "=" relaciona termos da álgebra e neste contexto expressa o fato que um mesmo objeto tem nomes distintos. O símbolo "≈" relaciona fórmulas na classe de álgebras [2].

[2] Este depende da interpretação dos elementos da classe. Este é um caso particular da noção de classe de modelos validar uma sentença φ, a saber: $Mod(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Definição 2.1.14. Sejam φ, ψ fórmulas de $\mathcal{S}$ e $p_0, \cdots, p_{n-1}$ as variáveis que ocorrem em φ e ψ. Uma Σ-equação $\varphi \approx \psi$ é *válida* em uma Σ-álgebra se a identidade é mantida para toda interpretação de $\varphi \approx \psi$ em $\mathscr{A}$, isto é, ao substituir as variáveis das fórmulas por termos $a_0, \cdots, a_{n-1}$ da álgebra $\mathscr{A}$ temos que $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}} = [\![\psi]\!]_{\mathscr{A}}$.

Com o intuito de não carregar a notação, deixamos de explicitar as variáveis que ocorrem nas fórmulas e os termos da álgebra utilizados para interpretar uma equação. Para expressar este processo utilizamos a notação da Definição 2.1.14 acima, a saber, $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}} = [\![\psi]\!]_{\mathscr{A}}$.

Definição 2.1.15. Seja $\mathcal{K}$ uma classe qualquer de Σ-álgebras e $\models_{\mathcal{K}}$ a relação de conseqüência equacional em $\mathcal{K}$. Dizemos que $\varphi \approx \psi$ é $\mathcal{K}$-*conseqüência* do conjunto de equações Γ, denotada por $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$, quando para toda $\mathscr{A}_i \in \mathcal{K}$, se $[\![\eta]\!]_{\mathscr{A}_i} = [\![\upsilon]\!]_{\mathscr{A}_i}$ para toda equação $\eta \approx \upsilon \in \Gamma$, então $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{A}_i} = [\![\psi]\!]_{\mathscr{A}_i}$.

Uma equação $\varphi \approx \psi$ é uma *identidade* da álgebra $\mathscr{A}$ se $\models_{\mathscr{A}} \varphi \approx \psi$. Similarmente uma quase-equação $\eta_0 \approx \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \eta_n \approx \vartheta_n \rightarrow \varphi \approx \psi$ é uma *quase-identidade* da álgebra $\mathscr{A}$ se $\eta_0 \approx \vartheta_0, \ldots, \eta_n \approx \vartheta_n \models_{\mathscr{A}} \varphi \approx \psi$.

A classe das álgebras que satisfazem um dado conjunto de equações (respectivamente, de quase-equações) é chamada de *variedade* (*respectivamente, quase-variedade*). Uma variedade (respectivamente, quase-variedade) é *trivial* se contém apenas uma álgebra como elemento. A noção de variedade de álgebras é um caso particular de classe de álgebras, pois é uma classe restrita pelas equações que devem ser verificadas.

Definição 2.1.16. Seja $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ um sistema dedutivo e $\mathcal{K}$ uma classe de álgebras. $\mathcal{K}$ é chamada uma *semântica algébrica* para $\mathcal{S}$ se $\vdash_{\mathcal{S}}$ pode ser interpretada em $\models_{\mathcal{K}}$ do seguinte modo: existe um sistema finito $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$, para $i < n$, de equações com uma variável p tal que, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\}$ fórmulas de $\mathcal{S}$ e para cada $j < n$,

(i) $\Gamma \vdash_{S} \varphi$ sse $\{\delta_i[\gamma/p] \approx \epsilon_i[\gamma/p] : i < n, \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta_j[\varphi/p] \approx \epsilon_j[\varphi/p]$.

$\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$, para $i < n$, são chamadas *equações definidoras* para $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$.

Lema 2.1.17. *Se $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica para um sistema dedutivo $\mathcal{S}$, também o é a quase-variedade $\mathcal{K}^Q$ gerada por $\mathcal{K}$.*

Demonstração. Conferir em [BP89], p. 14. □

Teorema 2.1.18. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema dedutivo, $\mathcal{K}$ uma quase-variedade, e $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$ um sistema de equações definidoras. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{K}$ *é uma semântica algébrica de* $\mathcal{S}$*, com equações* $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$.

(ii) A classe $\mathfrak{M} = \{\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, F^{\delta\approx\epsilon}\rangle : \mathscr{A} \in \mathcal{K}$ *e* $F^{\delta\approx\epsilon} = [\![\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)]\!]_{\mathscr{A}}\}$ *é uma semântica matricial para* $\mathcal{S}$.

Demonstração. Conferir em [BP89], p. 15. □

Definição 2.1.19. Seja $\mathcal{S}$ um sistema dedutivo e $\mathcal{K}$ uma classe de álgebras. $\mathcal{K}$ é uma *semântica algébrica equivalente* para $\mathcal{S}$ se $\vdash_{\mathcal{S}}$ pode ser interpretada em $\models_{\mathcal{K}}$ do seguinte modo: existe um sistema finito $\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)$, $i < n$ de equações definidoras em uma variável p, tal que para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For_{\mathcal{S}}$ e para cada $j < n$, temos:

(a) $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Longleftrightarrow \{\delta_i[\gamma/p] \approx \epsilon_i[\gamma/p] : i < n, \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta_j[\varphi/p] \approx \epsilon_j[\varphi/p]$;

(b) Se existe um sistema finito $\Delta(p, q)$, para $j < m$, de fórmulas em duas variáveis (formadas por conectivos binários derivados) tal que para toda equação $\varphi \approx \gamma$,

$$\varphi \approx \gamma \dashv\models_{\mathcal{K}} \delta(\varphi\Delta\gamma) \approx \epsilon(\varphi\Delta\gamma)$$

Teorema 2.1.20. *Seja* $\mathcal{S}$ *um sistema dedutivo algebrizável, e* $\mathcal{K}$ *e* $\mathcal{K}'$ *duas semânticas algébricas equivalentes para* $\mathcal{S}$*. Então* $\mathcal{K}^Q = \mathcal{K}'^Q$*, isto é,* $\mathcal{K}$ *e* $\mathcal{K}'$ *geram a mesma quase-variedade.*

Seja Δ *e* $\delta \approx \epsilon$ *fórmulas de equivalência e equações definidoras para* $\mathcal{K}$*, e similarmente* Δ' *e* $\delta' \approx \epsilon'$ *para* $\mathcal{K}'$*. Então* $\Delta \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta'$ *e* $\delta \approx \epsilon \dashv\models_{\mathcal{K}} \delta' \approx \epsilon'$.

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 23. □

Definição 2.1.21. Um sistema dedutivo $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ é *finitamente algebrizável* se $\mathcal{S}$ tem uma semântica algébrica equivalente.

Teorema 2.1.22. *Seja* $\mathcal{S}$ *um sistema dedutivo dado por um conjunto de axiomas e regras de inferência RI. Assuma que* $\mathcal{S}$ *é algebrizável com fórmulas de equivalência* Δ *e equações* $\delta \approx \epsilon$*. Então a única quase-variedade semântica para* $\mathcal{S}$ *é axiomatizada pelas identidades:*

(i) $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$ *para cada* $\varphi \in Ax$.

(ii) $\delta(p\Delta p) \approx \epsilon(p\Delta p)$ *junto com as seguintes quase-identidades:*

(iii) $\delta(\psi_0) \approx \epsilon(\psi_0) \wedge \ldots \wedge \delta(\psi_{n-1}) \approx \epsilon(\psi_{n-1}) \Longrightarrow \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$ *para cada* $< \{\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\}, \varphi > \in$ *RI.*

(iv) $\delta(p\Delta q) \approx \epsilon(p\Delta q) \Longrightarrow p \approx q$

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 24-25. □

Existe uma versão sintática da noção de algebrizabilidade de Blok-Pigozzi.

Teorema 2.1.23. *Um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é algebrizável sse existe um sistema Δ finito de fórmulas em duas variáveis e um sistema $\delta \approx \epsilon$ de equações em uma variável tal que as seguintes condições sejam válidas para toda φ, ψ, λ fórmulas de $\mathcal{S}$.*

(i) $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\varphi$;

(ii) $\varphi\Delta\psi \vdash_{\mathcal{S}} \psi\Delta\varphi$;

(iii) $\varphi\Delta\psi, \psi\Delta\lambda \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\lambda$;

(iv) Para todo conectivo n-ário ω e toda $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ fórmulas de $\mathcal{S}$ temos:
$\varphi_0\Delta\psi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \vdash_{\mathcal{S}} \omega(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})\Delta\omega(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})$;

(v) Para toda $\varphi \in For_{\mathcal{S}}$, temos
$\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)$.

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 39-40. □

Lembramos que $\Gamma \vdash \Delta$ abrevia o seguinte: $\Gamma \vdash \delta$, para todo $\delta \in \Delta$.

Teorema 2.1.24. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema dedutivo e $\mathcal{K}$ uma quase-variedade. $\mathcal{S}$ é algebrizável com semântica algébrica equivalente $\mathcal{K}$ sse para toda álgebra $\mathscr{A}$ o operador de Leibniz $\Omega_{\mathscr{A}}$ é um isomorfismo entre o reticulado dos $\mathcal{S}$-filtros e o reticulado das $\mathcal{K}$-congruências.*

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 43. □

Definição 2.1.25. Sejam $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ e $\mathcal{S}' = \langle \Sigma', \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle$ dois sistemas dedutivos. Dizemos que $\mathcal{S}'$ é uma *extensão* de $\mathcal{S}$ se:

1. $\Sigma' = \Sigma$;

2. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}'} \varphi$ para toda $\Gamma \cup \{\varphi\}$ fórmulas de $\mathcal{S}$.

Nesse caso $\mathcal{S}$ é chamado de *subsistema* de $\mathcal{S}'$.

Corolário 2.1.26. *Qualquer extensão de um sistema dedutivo algebrizável é algebrizável com o mesmo conjunto de algebrizadores.*

Demonstração. Conferir em [BP89] p. 41. □

2.2 Generalizando as idéias de Lindenbaum e Tarski

A classe das álgebras de Boole, como mencionado no Capítulo 1, é uma variedade algébrica muito bem estudada, cujas origens históricas remontam a George Boole. Uma álgebra de Boole de particular interesse é a álgebra $\mathbf{2} = \langle\{0^{\mathbf{2}}, 1^{\mathbf{2}}\}, \to^{\mathbf{2}}, \vee^{\mathbf{2}}, \wedge^{\mathbf{2}}, \neg^{\mathbf{2}}, 0^{\mathbf{2}}, 1^{\mathbf{2}}\rangle$, em que os operadores são definidos como nas tabelas-verdade usuais.

Como mostramos no Capítulo 1, o processo de Lindenbaum-Tarski permite associar álgebras de Boole ao cálculo proposicional clássico CP. Fazemos aqui uma retomada do que fizemos nos detalhes matemáticos do Capítulo 1, mas de forma a enfatizar as intuições básicas de Blok e Pigozzi ao propor a definição de semântica algébrica e semântica algébrica equivalente.

Seja $\mathcal{T}$ uma teoria de CP, definimos a relação binária $\cong_{\mathcal{T}}$ sobre fórmulas como:

$$\varphi \cong_{\mathcal{T}} \psi \text{ sse } \mathcal{T} \vdash_{CP} \psi \leftrightarrow \varphi$$

É imediato que a relação $\cong_{\mathcal{T}}$ é de equivalência, como já mostramos. Mais ainda, $\cong_{\mathcal{T}}$ é uma relação de congruência. Como vimos, a álgebra quociente $\mathbf{For}/_{\cong_{\mathcal{T}}}$, cujos elementos são as classes de equivalência de fórmulas, é uma álgebra de Boole.

É um fato bastante conhecido que toda álgebra de Boole enumerável é isomorfa a alguma álgebra $\mathbf{For}/_{\cong_{\mathcal{T}}}$, para alguma teoria $\mathcal{T}$ (veja [BP], p. 10, para uma demostração rápida e instrutiva).

Sabemos que para toda fórmula φ, $\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \top)$, em que $\top$ é equivalente a uma tautologia qualquer. Podemos assumir que $\top$ é uma constante na nossa linguagem proposicional, isto é, uma fórmula atômica distinguida. Portanto, $\vdash_{CP} \varphi$ sse $\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \top$ sse $\mathcal{T} \vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \top$ sse $\varphi \cong_{\mathcal{T}} \top$, para toda teoria $\mathcal{T}$ sse $\varphi^{\mathbf{For}/\cong_{\mathcal{T}}} = 1^{\mathbf{For}/\cong_{\mathcal{T}}}$, para toda álgebra de fórmulas $\mathbf{For}/_{\cong_{\mathcal{T}}}$. Mostramos particularmente o seguinte:

(Teorema da Completude Fraca)

$\vdash_{CP} \varphi$ sse $\models_{AB} \varphi \approx \top$, para toda álgebra de Boole AB. Isto decorre do fato de que o resultado foi mostrado para a álgebra de Boole $\mathbf{2}$, que gera a variedade das álgebras de Boole.

Já que, como vimos, toda álgebra de Boole é isomorfa a alguma álgebra $\mathbf{For}/_{\cong_{\mathcal{T}}}$, o teorema de completude forte pode ser enunciado como uma extensão deste:

(Teorema da Completude Forte)

$\Gamma \vdash_{CP} \varphi$ sse $\Gamma \leftrightarrow \top \vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \top$, em que $\Gamma \leftrightarrow \top = \{\gamma \leftrightarrow \top : \gamma \in \Gamma\}$.
mas isto equivale a:

$$\Gamma \vdash_{CP} \varphi \ \text{ sse } \ \Gamma \approx 1^{AB} \models_{AB} \varphi \approx 1^{AB}.$$

Este resultado formaliza o fato de o aparato dedutivo de CP ser representável fielmente dentro do formalismo de derivação de equações (lógica equacional) das álgebras de Boole. É nesse sentido então que as álgebras de Boole constituem uma *semântica algébrica* para CP.

Um sistema dedutivo pode ter várias semânticas algébricas (não equivalentes), e pode não ter qualquer semântica algébrica equivalente. Um caso interessante ocorre com a variedade das álgebras de Heyting AH e das álgebras de Boole AB. Ambas constituem semânticas algébricas (não equivalentes) para CP. De fato, sabe-se pela conhecida tradução de Glivenko, 1929 (cf. [Eps00] p. 290) entre o cálculo proposicional clássico CP e o cálculo proposicional intuicionista CPI que:

$$\Gamma \vdash_{CP} \varphi \text{ sse } \neg\neg\Gamma \vdash_{CPI} \neg\neg\varphi$$

Segue daí que, considerando a equação $\neg\neg\varphi \approx 1$, temos:

$$\Gamma \vdash_{CP} \varphi \ \text{ sse } \ \{\neg\neg\gamma \approx 1 : \gamma \in \Gamma\} \models_{AH} \neg\neg\varphi \approx 1.$$

No caso de CP, vale também um teorema inverso, que mostra que a lógica equacional é fielmente refletida dentro do aparato dedutivo de CP.

(Completude Inversa)

Sejam $\{\psi_0^i, \psi_1^i : i \in I\} \subset For$ e $\gamma_0, \gamma_1 \in For$, então:

$$\{\psi_0^i \approx \psi_1^i : i \in I\} \models_{AB} \gamma_0 \approx \gamma_1 \text{ sse } \{\psi_0^i \leftrightarrow \psi_1^i : i \in I\} \vdash_{CP} \gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$$

Quando vale esta dualidade completa entre uma lógica e uma variedade algébrica, como no presente caso entre CP e AB, temos então uma *semântica algébrica equivalente* (conceito que só foi possível ser elucidado após a definição de Blok e Pigozzi.

No caso abstrato, o método de Blok-Pigozzi generaliza a noção de equivalência dedutiva entre duas fórmulas por um esquema Δ em duas variáveis que satisfaz uma "relação de equivalência conjuntista", uma "congruência" e o "teorema de completude inversa", tudo isso de forma abstrata para um sistema lógico $\mathcal{S}$, como esclarece o Teorema 2.1.23.

Dessa forma, fica claro como o método de Blok-Pigozzi generaliza o processso de Lindenbaum-Tarski.

Como uma simples ilustração de como se aplica o Teorema 2.1.23 para verificar quando um sistema dedutivo é algebrizável (versão sintática), fazemos a algebrização da lógica proposicional clássica, levando em conta que o conjunto de algebrizadores é sempre o mesmo, a saber, $\langle\{\varphi \leftrightarrow \psi\}, \langle p, \top\rangle\rangle$. Vejamos:

Demonstração. A verificação das cláusulas (i)-(iv) é idêntica à dos Passos 3 e 4 do Teorema 1.4.1.

(v) $\varphi \dashv\vdash_{CP} \delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)$
Basta verificar que $\varphi \dashv\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \top$:

($\Longrightarrow$)

1. $\vdash_{CP} \varphi$	[Hip]
2. $\vdash_{CP} \varphi \rightarrow (\top \rightarrow \varphi)$	[Ax1]
3. $\vdash_{CP} \top \rightarrow \varphi$	[MP em 1 e 2]
4. $\vdash_{CP} \top \rightarrow (\varphi \rightarrow \top)$	[Ax1]
5. $\vdash_{CP} \varphi \rightarrow \top$	[MP em 4, pois $\vdash_{CP} \top$]
6. $\vdash_{CP} \varphi \leftrightarrow \top$	[$Def_{\leftrightarrow}$ em 3 e 5]

($\Longleftarrow$) Segue facilmente por Modus Ponens, uma vez que toda tautologia é teorema de CP. □

Com base nessa mesma tecnologia, a próxima Seção tem duplo propósito: apresentar a algebrização da lógica paraconsistente P^1, também classificada como **Civw** em [CM02], a fim de ilustrar o funcionamento desse novo método de algebrização e também de ressaltar que as lógicas paraconsistentes não são necessariamente desprovidas de algebrização finitária.

2.3 *Algebrizando lógicas trivalentes*

Nesta seção estudamos o sistema dedutivo trivalente $P^1 = \langle\Sigma, \vdash_{P^1}\rangle$, proposto por Antonio Mário Sette em [Set73]. Mostramos aqui uma algebrização desse sistema dedutivo que difere ligeiramente daquela mostrada em [LMS90]. Incluímos detalhes das demonstrações para elucidar o método de algebrização finitária no caso de uma lógica trivalente. A seguir, apresentamos também um esboço da algebrização da lógica paracompleta (ou fracamente intuicionista) I^1. Veremos que, embora esta lógica reflita um ponto de vista diametralmente oposto ao de P^1, a tarefa de algebrizá-la é muito facilitada em razão de seu caráter dual ao de P^1: de fato, a algebrização é matematicamente análoga à de P^1, utilizando até o mesmo conjunto de algebrizadores (isto é, formalmente os mesmos δ, ϵ e Δ). Na verdade, há um ponto ainda mais surpreendente: como veremos no Capítulo 4, a quase-variedade que algebriza P^1 e I^1 é a mesma, mas isso poderá ser melhor apreciado mais adiante.

2.3.1 A lógica trivalente paraconsistente P^1

Em [LMS90], os autores, seguindo o artigo original de A. M. Sette em [Set73], trabalham com um axioma a mais, a saber, $\vdash_{P^1} \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$. Este axioma, porém, pode ser demonstrado a partir dos demais (cf. [Cân92]); para uma demonstração detalhada da irrelevância deste axioma, que então passa a ser um teorema do sistema, ver [Mar99] p.183.

Axiomas (Ax)

$P^1$1. $\vdash_{P^1} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

$P^1$2. $\vdash_{P^1} (\varphi \to (\psi \to \lambda)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda))$

$P^1$3. $\vdash_{P^1} ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to \varphi))$

$P^1$4. $\vdash_{P^1} (\varphi \to \psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

Regra Modus Ponens (MP)

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Símbolos Definimos os outros conectivos

$$\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{=} (((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to \neg((\psi \to \psi) \to \psi)) \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$$

$$\varphi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

- P^1 é uma lógica paraconsistente, pois $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ não é uma contradição explosiva em geral;
- P^1 é maximal, uma vez que se φ é uma tautologia clássica não demonstrável em P^1, então o acréscimo de φ em P^1 gera o cálculo proposicional clássico CP.

Dizemos que uma fórmula φ é *regular* se $\vdash_{P^1} (\varphi \to \neg\neg\varphi)$. Todas as fórmulas não atômicas são regulares e a classe de todas as fórmulas não atômicas comportam-se como em CP.

Proposição 2.3.1. *Para toda fórmula φ, $\vdash_{P^1} \varphi \to \varphi$.*

Demonstração. Confira Lema 1.2.2 (a). □

Proposição 2.3.2. *Se Γ é um conjunto de fórmulas e φ, ψ são duas fórmulas tais que $\Gamma, \varphi \vdash_{P^1} \psi$, então $\Gamma \vdash_{P^1} \varphi \to \psi$.*

Demonstração. Consequência dos axiomas $P^1 1$ e $P^1 2$. □

Corolário 2.3.3. *Para toda φ, ψ e λ vale:*
(*a*) *Se* $\vdash_{P^1} \varphi \to \psi$ *e* $\vdash_{P^1} \psi \to \lambda$ *então* $\vdash_{P^1} \varphi \to \lambda$
(*b*) $\varphi \to (\psi \to \lambda), \psi \vdash_{P^1} \varphi \to \lambda$

Demonstração. (a) Confira Lema 1.2.2 (c).
(b) Aplicação direta do Lema 1.2.2 (d) e Modus Ponens. □

Proposição 2.3.4. *As seguintes fórmulas são teoremas de P^1.*
(*a*) $\vdash_{P^1} (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$
(*b*) $\vdash_{P^1} (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$
(*c*) $\vdash_{P^1} (\psi \to \neg\neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$
(*d*) $\vdash_{P^1} (\psi \to \neg\neg\psi) \to (\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)))$
(*e*) $\vdash_{P^1} (\psi \to \neg\neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi))$

Demonstração. Conferir em [Mar99] p. 184-187. □

A completude de P^1 se obtém por meio das seguintes matrizes trivalentes $\mathscr{M} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \{1, 1/2\}\rangle$, onde 1 e $1/2$ são valores distinguidos.

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
$1/2$	1
0	1

A seguir fazemos a algebrização de P^1 seguindo de perto o artigo de [LMS90]. Tomamos o cuidado em detalhar as demonstrações, a fim de se obter uma algebrização construtiva, uma vez que P^1 tem também uma completude construtiva. Em outra palavras, é interessante, quando possível, oferecer a algebrização de uma lógica à altura da sua completude (entendendo obviamente que ter um procedimento construtivo é melhor do que ter um não construtivo).

2.3.2 A algebrização de P^1

Teorema 2.3.5. *A lógica P^1 é Blok-Pigozzi algebrizável.*

Demonstração. Tome:
$\delta(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \varphi) \to \varphi$
$\varepsilon(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \varphi)$
$\varphi\Delta_1\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \psi)$
$\varphi\Delta_2\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\psi \to \varphi)$
$\varphi\Delta_3\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\varphi \to \neg\psi)$
$\varphi\Delta_4\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Devemos mostrar que δ, ϵ e Δ satisfazem as condições (i)-(v) do Teorema 2.1.23.

(i) $\vdash_{P^1} \varphi\Delta_i\varphi$, com $1 \leq i \leq 4$, o que é imediato pela proposição 2.3.1.

(ii) $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} \psi\Delta\varphi$. Devemos lembrar que $\varphi\Delta\psi$ denota um conjunto de fórmulas em duas variáveis, no nosso caso $\varphi\Delta\psi = \{\varphi\Delta_i\psi : 1 \leq i \leq 4\}$, daí é fácil ver que $\varphi\Delta\psi$ e $\psi\Delta\varphi$ determinam o mesmo conjunto, bastando notar que $\varphi\Delta_1\psi = \psi\Delta_2\varphi$ e $\varphi\Delta_2\psi = \psi\Delta_1\varphi$ e $\varphi\Delta_3\psi = \psi\Delta_4\varphi$ e $\varphi\Delta_4\psi = \psi\Delta_3\varphi$.

(iii) $\varphi\Delta\psi, \psi\Delta\lambda \vdash_{P^1} \varphi\Delta\lambda$ é obtido a partir do corolário 2.3.3 (a).

(iv) Devemos provar:

(a) $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} \neg\varphi\Delta\neg\psi$.
(b) $\varphi_0\Delta\psi_0, \varphi_1\Delta\psi_1 \vdash_{P^1} (\varphi_0 \to \varphi_1)\Delta(\psi_0 \to \psi_1)$.

(a) Note que $\varphi\Delta\psi = \{\varphi\Delta_i\psi : 1 \leq i \leq 4\}$, ou seja:
$\varphi\Delta\psi = \{(\varphi \to \psi), (\psi \to \varphi), (\neg\varphi \to \neg\psi), (\neg\psi \to \neg\varphi)\}$.
Com base na Nota 2.1.2 deve-se mostrar que:
$\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} \{(\neg\varphi \to \neg\psi), (\neg\psi \to \neg\varphi), (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi), (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)\}$

1. $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} (\neg\varphi \to \neg\psi)$, pois $\vdash_{P^1}$ é reflexivo.
2. $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} (\neg\psi \to \neg\varphi)$, pois $\vdash_{P^1}$ é reflexivo.
3. Dado que $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ são regulares e que $(\neg\psi \to \neg\varphi) \in \varphi\Delta\psi$, então pela Proposição 2.3.4 (c) e o fato de $\vdash_{P^1}$ ser monotônico temos que $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$.
4. $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$, raciocínio análogo ao anterior.

Portanto, de (1.)–(4.) temos que $\varphi\Delta\psi \vdash_{P^1} \neg\varphi\Delta\neg\psi$.

(b) Se $\varphi_0\Delta\psi_0, \varphi_1\Delta\psi_1$, então pela Definição do Δ temos que:

1.	$\vdash_{P^1} \varphi_0 \to \psi_0$	[$\varphi_0\Delta_1\psi_0$]
2.	$\vdash_{P^1} \psi_0 \to \varphi_0$	[$\varphi_0\Delta_2\psi_0$]
3.	$\vdash_{P^1} \neg\varphi_0 \to \neg\psi_0$	[$\varphi_0\Delta_3\psi_0$]
4.	$\vdash_{P^1} \neg\psi_0 \to \neg\varphi_0$	[$\varphi_0\Delta_4\psi_0$]
5.	$\vdash_{P^1} \varphi_1 \to \psi_1$	[$\varphi_1\Delta_1\psi_1$]
6.	$\vdash_{P^1} \psi_1 \to \varphi_1$	[$\varphi_1\Delta_2\psi_1$]
7.	$\vdash_{P^1} \neg\varphi_1 \to \neg\psi_1$	[$\varphi_1\Delta_3\psi_1$]
8.	$\vdash_{P^1} \neg\varphi_1 \to \neg\psi_1$	[$\varphi_1\Delta_4\psi_1$]

A partir das hipóteses acima, devemos mostrar que:
$\vdash_{P^1} (\varphi_0 \to \varphi_1)\Delta_i(\psi_0 \to \psi_1)$ para todo $1 \leq i \leq 4$.

- Para $i = 1$, devemos mostrar que $\vdash_{P^1} (\varphi_0 \to \varphi_1) \to (\psi_0 \to \psi_1)$:

1.	$\vdash_{P^1} \varphi_0 \to \varphi_1$	[Hip.]
2.	$\vdash_{P^1} \psi_0 \to \varphi_0$	[$\varphi_0\Delta_2\psi_0$]
3.	$\vdash_{P^1} \varphi_1 \to \psi_1$	[$\varphi_1\Delta_1\psi_1$]
4.	$\vdash_{P^1} \psi_0 \to \varphi_1$	[Cor.2.3.3 (i) em 1 e 2]
5.	$\vdash_{P^1} \psi_0 \to \psi_1$	[Cor.2.3.3 (i) em 3 e 4]
6.	$\vdash_{P^1} (\varphi_0 \to \varphi_1)\Delta_1(\psi_0 \to \psi_1)$	[Prop. 2.3.2 de 1-5 + Def_Δ

($\Longrightarrow$)

1.	φ	[Hip]
2.	$(\varphi \to \varphi) \to [((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)]$	[$P^1 1$]
3.	$(\varphi \to \varphi)$	[2.3.1]
4.	$((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$	[MP 3, 2]
5.	$((\varphi \to \varphi) \to \varphi)\Delta_1(\varphi \to \varphi)$	[Def_Δ

I^1 é análoga a de P^1 e é mostrado que estas lógicas são duais por Walter Carnielli e Andreas Brunner (cf. [BC03]).

- A lógica I^1 é maximal com relação ao cálculo proposicional CP, no mesmo sentido de P^1.

A sintaxe de I^1 é composta de três classes de símbolos:

1. Variáveis proposicionais: $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$;

2. Conectivos lógicos: $\rightarrow$ e $\neg$

3. Símbolos auxiliares:), (.

As noções de fórmula atômica, fórmula bem formada, fórmula esquema, etc, são como no caso clássico.

- **Axiomas**($\mathbf{Ax_I}$)

  I_1. $\vdash_{I^1} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  I_2. $\vdash_{I^1} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \lambda)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \lambda))$
  I_3. $\vdash_{I^1} ((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi))$
  I_4. $\vdash_{I^1} \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

- **Regra** (MP) Se φ e ψ são fórmulas, então:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

As noções de demonstração, teoremas e conseqüência de um conjunto de fórmulas Γ são como no caso clássico e são denotados aqui como $\vdash_{I^1} \varphi$ e $\Gamma \vdash_{I^1} \varphi$. É claro, pelos axiomas, que I^1 é um subsistema de CP.

Mostramos alguns resultados elementares necessários para a algebrização de I^1.

Para toda I^1-fórmula ψ, φ e λ, vale:

Lema 2.3.6. *(Teorema da Dedução) Para todo conjunto de I^1, $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$, vale:* $\Gamma, \varphi \vdash_{I^1} \psi$ *sse* $\Gamma \vdash_{I^1} \varphi \rightarrow \psi$

Demonstração. Conferir Lema 1.2.1. □

Lema 2.3.7. *Reflexividade:* $\vdash_{I^1} \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstração. Conferir Lema 1.2.2 (a). □

Lema 2.3.8. *Transitividade* $\varphi \to \psi, \psi \to \lambda \vdash_{I^1} \varphi \to \lambda$.

Demonstração. Lema 1.2.2 (c). □

Lema 2.3.9. *Simplificação* $(\varphi \to \psi) \to \lambda \vdash_{I^1} \psi \to \lambda$.

Demonstração. Vejamos:

1.	$\vdash_{I^1} (\varphi \to \psi) \to \lambda$	[Hip]
2.	$\vdash_{I^1} \psi$	[Hip]
3.	$\vdash_{I^1} \psi \to (\varphi \to \psi)$	[I_1]
4.	$\vdash_{I^1} \varphi \to \psi$	[MP em 2 e 3]
5.	$\vdash_{I^1} \lambda$	[MP em 4 e 1]

Assim, $(\varphi \to \psi) \to \lambda,\ \psi \vdash_{I^1} \lambda$, daí pelo Teorema da Dedução temos que $(\varphi \to \psi) \to \lambda \vdash_{I^1} \psi \to \lambda$.

□

Lema 2.3.10. *Permutação* $\varphi \to (\psi \to \lambda) \vdash_{I^1} \psi \to (\varphi \to \lambda)$.

Demonstração. Lema 1.2.2 (d). □

Lema 2.3.11. *Se φ é uma fórmula não atômica, então* $\vdash_{I^1} \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Demonstração. Conferir em [SC95]. □

Lema 2.3.12. *As seguintes leis são válidas em I^1:*

(*a*) $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \vdash_{I^1} (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(*b*) $(\neg\neg\psi \to \psi) \vdash_{I^1} (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Demonstração. Conferir em [SC95], p. 185. □

A completude de I^1 se obtém por meio das seguintes matrizes trivalentes $\mathscr{M} = \langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}\rangle$, em que 1 é o único valor distinguido.

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Discutimos agora, brevemente, o caso da algebrização da lógica trivalente I^1; como veremos, em conseqüência do fato de I^1 e P^1 serem duais, o aparato algébrico não consegue distinguir suas peculiariadades, o que acaba resultando em que a tarefa de algebrizar I^1 repete a de P^1.

Teorema 2.3.13. *A lógica I^1 é Blok-Pigozzi algebrizável.*

Demonstração. Tome:
$\delta(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \varphi) \to \varphi$
$\varepsilon(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \varphi)$
$\varphi\Delta_1\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \to \psi)$
$\varphi\Delta_2\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\psi \to \varphi)$
$\varphi\Delta_3\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\varphi \to \neg\psi)$
$\varphi\Delta_4\psi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Devemos mostrar, com basse no Teorema 2.1.23, que $\langle\Delta, \langle\delta, \epsilon\rangle\rangle$ é um conjunto de algebrizadores para I^1.

(i) $\vdash_{I^1} \varphi\Delta_i\varphi$, com $1 \leq i \leq 4$, o que é imediato pelo Lema 2.3.7.

(ii) $\varphi\Delta\psi \vdash_{I^1} \psi\Delta\varphi$. Idem a de P^1.

(iii) $\varphi\Delta\psi, \psi\Delta\lambda \vdash_{I^1} \varphi\Delta\lambda$ é obtido a partir do Lema 2.3.8.

(iv) Devemos provar:

(a) $\varphi\Delta\psi \vdash_{I^1} \neg\varphi\Delta\neg\psi$.
(b) $\varphi_0\Delta\psi_0, \varphi_1\Delta\psi_1 \vdash_{I^1} (\varphi_0 \to \varphi_1)\Delta(\psi_0 \to \psi_1)$.

(a) Dado que φ e ψ não são fórmulas atômicas, então pelo Lema 2.3.11 temos $\vdash_{I^1} (\neg\neg\psi \to \psi)$, daí pelo Lema 2.3.12 e raciocínio análogo ao de P^1 temos que $\neg\varphi\Delta_i\neg\psi$.

(b) Demonstração é análoga a de P^1.

(v) $\varphi \dashv\vdash_{I^1} \delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)$, isto é, devemos mostrar que:

$$\varphi \dashv\vdash_{I^1} ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)\Delta(\varphi \to \varphi).$$

A demonstração é análoga a de P^1.

□

É interessante observar que os processos de algebrização obtidos para P^1 e I^1 são tecnicamente os mesmos, pois fazem uso do mesmo conjunto de algebrizadores e basicamente, das mesmas propriedades (compare, os resultados de P^1 e I^1 usados como ingredientes para a algebrização). Esses fatos somente não garantem, contudo, que as duas lógicas sejam algebrizáveis pela mesma quase-variedade. Ter o mesmo conjunto de algebrizadores não garante que se obtenha a mema quase-variedade algébrica, pois se assim fosse, todas as lógicas algebrizáveis pelo método clássico seriam algebrizáveis pela mesma quase-variedade, o que sabemos não ser o caso.

Para que duas lógicas sejam algebrizáveis pela mesma quase-variedade, mais do que ter propriedades similares, é preciso primeiramente que as lógicas em questão sejam expressadas em uma mesma linguagem, e a partir daí deve-se mostrar que tais lógicas são inter-tradutíveis, no sentido da Definição 4.2.7.

Contudo, as lógicas P^1 e I^1 *são de fato* algebrizáveis pela mesma quase-variedade, como mostraremos no Capítulo 4, Seção 4.2, ainda que expressem paradigmas lógicos duais (a saber, paraconsistente e intuicionista). Isso pode nos levar a pensar que a algebrização é cega para finuras lógicas, um pouco como o fato conhecido em teoria de modelos de que a noção de equivalência elementar é estritamente mais fina que a noção algébrica de isomorfismo: estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes, mas a recíproca não seja verdadeira. Porém, não seria esse o motivo para desmerecer o método, pois ele apenas evidencia que a quase-variedade algébrica, como uma boa álgebra, cumpre o papel de desprezar diferenças. Isso acontece somente porque os sistemas dedutivos são inter-tradutíveis, daí a quase-variedade não ser capaz de distinguí-los.

Dado que P^1 e I^1 têm ambas uma demonstração construtiva do teorema de completude *à la* Kálmar, optamos em apresentar a algebrização na versão sintática desses sistemas, pois assim evitamos qualquer uso de elementos não construtivos, como por exemplo o uso do infinito completado. Por tal razão, sempre que possível e quando tivermos à disposição uma demonstração de completude construtiva, optamos por exibir a algebrização por meios sintáticos.

Um resultado análogo à relação entre I^1 e P^1 pode ser estendida de maneira quase imediata aos cálculos da hierarquia I^n e P^n definidas em [FC03], de forma a obter uma algebrização finitária dependendo do valor de n (cf. [Bue]). Conjecturamos que um pouco mais de esforço poderá resultar também em uma algebrização finitária para a hierarquia mista I^nP^n, considerada no mesmo artigo [FC03].

2.4 Limitações do método de Blok-Pigozzi

Apesar de sua generalidade, nem todo sistema lógico pode ser algebrizável na acepção de Blok-Pigozzi; um contra-exemplo muito simples é o fragmento implicativo CPI^* da lógica proposicional intuicionista. É certo que, do ponto de vista algébrico, CPI^* é mais complicado do que parece: CPI^* não é nem mesmo protoalgebrizável, um conceito estudado por exemplo em [BP86], [Cze80] e [FJ96] (veja [BP89], pp. 56). Vejamos as várias formulações equivalentes que mostram quando um sistema dedutivo é protoalgebrizável.

Definição 2.4.1. Um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é chamado *protoalgebrizável* se para toda $\mathcal{S}$-teoria $\mathcal{T}$, todo par de $\Omega\mathcal{T}$-fórmulas equivalentes são interderiváveis relativamente a $\mathcal{T}$, isto é,

$$\langle \varphi, \psi \rangle \in \Omega\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \ \text{ e } \ \mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi$$

Definição 2.4.2. Um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é *protoalgebrizável* quando, para toda álgebra $\mathscr{A}$, o operador de Leibniz $\Omega_{\mathscr{A}}$ é monótono sobre o conjunto de todos os $\mathcal{S}$-filtros de $\mathscr{A}$, isto é: se F e G são $\mathcal{S}$-filtros e $F \subseteq G$, então $\Omega_{\mathscr{A}}(F) \subseteq \Omega_{\mathscr{A}}(G)$.

Definição 2.4.3. Um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é *protoalgebrizável* , se existe um conjunto de fórmulas $\Delta(p_1, p_2)$, com no máximo duas variáveis, tal que:

1. Para toda fórmula $\delta(p_1, p_2) \in \Delta$, tem-se que $\vdash_{\mathcal{S}} \delta(p_1, p_1)$;
2. p_1, $\Delta(p_1, p_2) \vdash_{\mathcal{S}} p_2$.

O método Blok-Pigozzi falha também para outras lógicas, como para muitas lógicas paraconsistentes, mas por alguma estranha razão os autores não citam esse fato em seu livro, nem em qualquer de seus artigos posteriores. Vejamos então que a lógica paraconsistente C_1 não cai no escopo da algebrização Blok-Pigozzi.

Teorema 2.4.4. *C_1 não é finitamente algebrizável.*

Demonstração. Considere a matriz $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D \rangle$, onde $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra e $A = \{0, a, b, 1, u\}$ são seus termos ordenados conforme o reticulado $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, esboçado na figura abaixo, e $D = \{u, 1\}$ são os valores distinguidos.

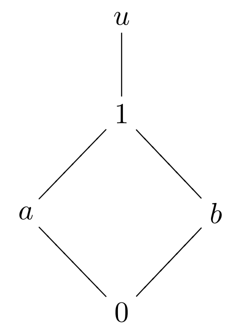

figura 1

As operações $\to$ e $\neg$ são definidas pelas tabelas abaixo.

$\to$	u	1	a	b	0
u	u	u	a	b	0
1	u	1	a	b	0
a	u	1	1	b	b
b	u	1	a	1	a
0	u	1	1	1	1

φ	$\neg\varphi$
u	1
1	0
a	b
b	a
0	1

φ	$\neg\neg\varphi$
u	0
1	1
a	a
b	b
0	0

φ	φ°
u	0
1	1
a	1
b	1
0	1

É fácil verificar que $\mathscr{M}$ é uma matriz modelo para C_1, pois satisfaz todos seus axiomas, isto é, estabelece uma corretude para C_1. Portanto, conforme a Definição 2.1.6, D é um C_1-filtro.

Vamos mostrar que as únicas congruências compatíveis que podemos definir são as congruências trivias, a saber: a identidade Δ e a universal ∇.

Seja Θ uma congruência qualquer e suponhamos que $\Theta \neq \Delta$, isto é, existem $a_i, a_j \in A$, com $a_i \neq a_j$, tal que $(a_i, a_j) \in \Theta$:

Caso 1: $(u, x) \in \Theta$ e $x \neq u$.

(a) Dado que Θ é uma congruência, então $(\neg\neg u, \neg\neg x) \in \Theta$, isto é, $(0, x) \in \Theta$. Pela simetria $(x, u) \in \Theta$, por transitividade temos que $(0, u) \in \Theta$.

(b) Como $\Delta \subseteq \Theta$, pois Θ é uma relação de equivalência, e dado que $(0, u), (a_i, a_i) \in \Theta$, então pela congruência temos que $(0 \to a_i, u \to a_i) \in \Theta$, para todo $a_i \in A$.

- Se $a_i = 0$, então $(0 \to 0, u \to 0) \in \Theta$, isto é, $(1, 0) \in \Theta$.
- Se $a_i = 1$, então $(0 \to 1, u \to 1) \in \Theta$, isto é, $(1, u) \in \Theta$.

- Se $a_i = b$, então $(0 \to b, u \to b) \in \Theta$, isto é, $(1, b) \in \Theta$.
- Se $a_i = a$, então $(0 \to a, u \to a) \in \Theta$, isto é, $(1, a) \in \Theta$.
- Se $a_i = u$, então $(0 \to u, u \to u) \in \Theta$, isto é, $(u, u) \in \Theta$, daí $(\neg u, \neg u) \in \Theta$, logo $(1, 1) \in \Theta$.

Portanto, $(1, a_i) \in \Theta$ para todo $a_i \in A$.

(c) Pela simetria temos também que $(a_i, 1) \in \Theta$, para todo $a_i \in A$. Seja $a_i, a_j \in A$. Como $(a_i, 1)$ e $(1, a_j) \in \Theta$, concluímos por transitividade que $(a_i, a_j) \in \Theta$ para todo $a_i, a_j \in A$. Portanto, de (a)-(c) temos que $\Theta = \nabla$.

Caso 2: $(1, x) \in \Theta$ com $x \neq 1$ e $x \neq u$.

(a) Dado que (u, u) e $(1, x) \in \Theta$, então pela congruência temos que $(u \to 1, u \to x) \in \Theta$, isto é $(u, x) \in \Theta$. Portanto, pelo caso anterior temos que $\Theta = \nabla$.

Caso 3: $(a, x) \in \Theta$ com $x \neq a$, $x \neq 1$ e $x \neq u$.

(a) Se $x = 0$, então $(a, 0) \in \Theta$, daí $(\neg a, \neg 0) \in \Theta$, isto é, $(b, 1) \in \Theta$ e pela simetria $(1, b) \in \Theta$. Portanto, pelo caso anterior concluímos que $\Theta = \nabla$.

(b) Se $x = b$, então $(a, b) \in \Theta$. Como $(a, a) \in \Theta$, então pela congruência de Θ temos que $(a \to a, b \to a) \in \Theta$, ou seja, $(1, a) \in \Theta$. Portanto, pelo caso anterior, concluímos que $\Theta = \nabla$.

Caso 4: $(b, x) \in \Theta$ com $x \neq b$, $x \neq a$, $x \neq 1$ e $x \neq u$.

(a) Como $x = 0$, então $(b, 0) \in \Theta$, daí $(\neg b, \neg 0) \in \Theta$, isto é, $(a, 1) \in \Theta$ e pela simetria $(1, a) \in \Theta$. Portanto, pelo caso anterior, concluímos que $\Theta = \nabla$.

Portanto, em todos os casos concluímos que, se $\Theta \neq \Delta$ então $\Theta = \nabla$. Isso mostra que as únicas congruências obtidas da relação de equivalência são as congruências trivias.

É fácil verificar, com base na Definição 2.1.6, que $F_1 = \{a, 1, u\}$ e $F_2 = \{b, 1, u\}$ são C_1-filtros, uma vez que os valores distinguidos de A pertencem aos filtros F_1 e F_2. Mais ainda, sabemos que $F_1 \neq F_2$, já que $a \in F_1$ e $a \notin F_2$. Agora, $\Omega_{\mathscr{A}}(F_1) = \Delta = \Omega_{\mathscr{A}}(F_2)$, pois $(a, 0) \in \Theta$ e $a \in F_1$ e $0 \notin F_1$, ou seja, a congruência ∇ não é compatível com D. Portanto, com base no

Teorema 2.1.24, $\Omega_{\mathscr{A}}$ não é um isomorfismo entre os reticulados dos C_1-filtros e as $\mathcal{K}$-congruências, isto é C_1 não é algebrizável. □

Corolário 2.4.5. *Nenhum sub-sistema de C_1 é finitamente algebrizável.*

Demonstração. Suponhamos que existisse um sub-sistema de C_1 que fosse algebrizável, então pelo Corolário 2.1.26 teríamos que C_1 também o seria, o que contraria o Teorema 2.4.4. □

Um problema aparentemente difícil, e que deixamos em aberto, é mostrar que um argumento análogo ao do Teorema 2.4.4 pode ser adaptado para as extensões conservativas $C_n^{\neg\neg}$ de C_n (cf. [Car00]). Essa extensão é obtida, acrescentando-se às lógicas C_n a lei da introdução da dupla negação, isto é, $\alpha \to \neg\neg\alpha$, o que permite que a dedução paraconsistente se aproxime da dedução clássica (vide Seção 3.2). Tudo leva a crer que os $C_n^{\neg\neg}$ também não são algebrizáveis na acepção de Blok e Pigozzi. Contudo, considerando que, como veremos, as mesmas semânticas de traduções possíveis que interpretam C_n ajustam-se com poucas modificações a $C_n^{\neg\neg}$, então podemos associar aos $C_n^{\neg\neg}$ semânticas algébricas de traduções possíveis.

Podemos ver a questão da algebrização da seguinte maneira: cabe à álgebra universal, quando esta entra em confronto com a lógica, a proeza de elucidar a noção de conseqüência lógica. Essa noção é tão essencial que podemos reduzir o estudo da lógica ao estudo das relações de conseqüência.

Dessa forma, compreender bem a relação entre premissas e conclusões, do ponto de vista matemático, é o que possibilita dar modelos concretos à lógica, e aplicar esta à engenharia de softwares ou aos programas e procedimentos do computador.

A algebrizabilidade se encarrega desta tarefa e de dar conteúdo operacional às relações lógicas abstratas. Nesse sentido, o Meta-Teorema da Dedução tem um papel essencial, como esclarecido em [FJP03]. A importância da relação entre o Meta-Teorema da Dedução os Teoremas da Interpolação é também investigada, por exemplo em [CS04].

A algebrização abstrata de Blok e Pigozzi tenta capturar, de alguma forma, a possibilidade de dar conteúdo matemático à noção de derivabilidade: quando tal não é possível, como é o caso da hierarquia de lógicas paraconsistentes C_n, então a correspondente estrutura algébrica deve ser ainda mais complicada. Como veremos no Capítulo 4, as SATP's dão uma solução a esta questão, olhando as deduções paraconsistentes como uma família de objetos algébricos com uma certa dinâmica interna, dada pelo conceito de traduções, e não meramente como um único objeto estático.

Não é difícil mostrar, contudo, que as lógicas paraconsistentes C_n são protoalgebrizáveis[3], uma vez que em toda a hierarquia vale a regra de *Modus Ponens* e $\vdash_{C_n} \alpha \to \alpha$, ou seja, verifica as cláusulas da Definição 2.4.3.

Com base no ponto de vista manifestado dois parágrafos acima, vale observar que a noção de protoalgebrização não é capaz de concretizar as deduções dentro de um contexto algébrico. Em outras palavras, não consideramos que a protoalgebrização seja uma solução satisfatória, uma vez que a maior parte dos sistemas lógicos minimamente interessantes são munidos da regra de *Modus Ponens* e contêm uma fórmula $\delta(\alpha, \alpha)$ que é teorema do sistema. Vemos, portanto, que C_n é trivialmente protoalgebrizável, e tal fato nada acrescenta à compreensão algébrica destas lógicas. Dessa forma, justifica-se a proposta das SATP's, que será estudada no Capítulo 4.

[3] Esta observação é devida a Carlos Caleiro e João Marcos, em comunicação privada.

3. SEMÂNTICAS DE TRADUÇÕES POSSÍVEIS

As *semânticas de traduções possíveis*, uma nova abordagem em semântica formal para lógicas não-clássicas, foram propostas por Walter Carnielli em [Car90] e estudadas minuciosamente em [Mar99]. A idéia básica das semânticas de traduções possíveis inclui resgatar a verofuncionalidade da semântica de lógicas que não sejam necessariamente verofuncionais, além da idéia de analisar uma lógica complexa em termos de componentes mais simples. Tecnicamente, é mais imediato prover semânticas de traduções possíveis que já sejam corretas e completas em relação a semânticas de valorações (em geral, não-verofuncionais).

As lógicas paraconsistentes, propostas em 1963 por Newton da Costa no artigo [dC63], como mencionado na Introdução desta Dissertação, são capazes de suportar contradições sem cair na banalidade dedutiva. Nesse trabalho, a hierarquia C_n, $1 \leq n < \omega$, é um exemplo de lógicas que são caracterizadas por semânticas de valorações não verofuncionais. A completude desta hierarquia foi sugerida em [Alv76] e [dCA77], e os autores acreditavam que a completude dos C_n poderia ser obtida por uma simples adaptação da prova de completude de C_1, o que não foi o caso, como mostrado mais tarde em [LA80].

Um estudo bastante detalhado das lógicas paraconsistentes é feito em [CM02] e [CCM04], onde é investigada em detalhes uma hierarquia de lógicas tal que as noções primitivas de consistência e inconsistência são expressáveis na linguagem. Tais lógicas são chamadas *lógicas da inconsistência formal* e denotadas por **LFI**s. Uma classe especial das **LFI**s são os **C**-*sistemas baseados em* $\mathcal{L}$, que estendem a parte positiva de uma lógica consistente $\mathcal{L}$ (acrescentando à parte positiva de $\mathcal{L}$ conectivos para a negação e para a noção de consistência).

Na lógica clássica as noções de contradição, inconsistência e trivialidade equivalem. A lógica paraconsistente, na versão dos **C**-sistemas, leva em conta uma postura filosófica que propõe que tais conceitos não se equivalem necessariamente, mas se relacionam no sentido em que *contradição + consistência = trivialidade*, conforme [CM02] e [CCM04].

A lógica C_1, primeira componente da hierarquia citada acima, foi construída utilizando implicitamente o pressuposto de que *contradição + bom comportamento das fórmulas = trivialidade.* Em princípio, a preocupação de da Costa era propor um sistema tolerante à contradição, pois ele acreditava que o problema de um sistema dedutivo estava na trivialidade e não na contradição.

A semântica proposta originalmente por da Costa e Alves para o cálculo C_1 (semântica de valorações) não é totalmente satisfatória, pois parece não explicar a possibilidade de uma contradição ser aceita no âmbito de uma teoria sem causar trivialidade. A proposta das semânticas de traduções possíveis tenta ser mais esclarecedora, na medida em que transfere o problema do significado da contradição não-explosiva para o contexto de vários sistemas lógicos consistentes. No caso especial dos cálculos C_n, por exemplo, esta semântica interpreta estes sistemas complexos em termos de sistemas trivalentes, cujo significado é mais aceitável.

Juntamente com os cálculos C_n, da Costa propôs outro sistema lógico, o C_ω, que exclui do seu corpo de axiomas os esquemas, que expressam respectivamente a "propagação do bom comportamento de uma fórmula" e "redução ao absurdo paraconsistente", descritos abaixo:

- $(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \rightarrow ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \rightarrow B)^{(n)})$
- $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

lembrando que $A^{(n)}$ abrevia a fórmula $A^\circ \wedge A^{\circ\circ} \wedge A^{\circ\circ\circ} \wedge \ldots \wedge A^{\circ\circ\ldots\circ}$, para n ocorrências de $\circ$.

Pela maneira como C_ω foi criado, este poderia ser pensado como o *limite dedutivo* da hierarquia C_n, porém, de acordo com Carnielli e Marcos em [CM99], sabemos não ser esse o caso: os autores mostraram que em todo C_n vale a Lei de Dummet, a saber $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$, e mostraram também que tal lei não é válida em C_ω. Contudo, de acordo com a definição de limite dedutivo, proposta pelos mesmos autores em [CM99], tal lei deveria ser validada nesse limite. Como isso não acontece, conclui-se que C_ω não pode ser considerado o limite nesse sentido.

Na tentativa de encontrar tal limite, Carnielli e Marcos acrescentaram a C_ω a lei de Dummet como axioma adicional, e chamaram esse novo cálculo de C_{Min}. Esta nova lógica tem uma semântica de valorações metodologicamente análoga à dos C_n, enquanto que a semântica de valorações para C_ω é muito mais complicada. Este fato contribuiu para que Carnielli e Marcos imaginassem que estavam mais próximos do limite de C_n, porém novamente depararam com o mesmo problema, pois a fórmula

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

conhecida por *quase de Morgan* é demonstrável em todos os C_n e não demonstrável em C_{Min}. O problema de caracterizar sintaticamente o limite de C_n continua em aberto, porém, de acordo com a definição de limite dedutivo proposta por Carnielli e Marcos, é possível obter uma caracterização semântica para C_{Lim} por meio das semânticas de traduções possíveis. Esse fato ilustra o alcance deste novo tipo de semântica, ainda não totalmente explorado.

Acrescentando à linguagem de C_{Min} um operador de consistência ($\circ$) (isto é, um novo conectivo lógico unário), resulta na lógica **bC**. Esta extensão de C_{Min} é uma das lógicas básicas que assume como primitivo o operador de consistência, permitindo expressar a noção de consistência de uma fórmula. **bC** é chamada de gentilmente explosiva, pois não se trivializa diante de uma contradição, mas permite que a trivialidade apareça somente se a contradição ocorrer junto com a consistência da fórmula, como mostram as relações abaixo:

$$\alpha, \neg\alpha \nvdash_{\mathbf{bC}} \beta \qquad\qquad \circ\,\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{bC}} \beta$$

bC é um dos primeiros sistemas lógicos corretos e completos que expressa a noção de consistência de uma fórmula. A partir desse sistema podemos definir uma outra lógica que também é de nosso interesse, a saber, a lógica **Ci**. Esta lógica é obtida fazendo valer algumas propriedades que não eram válidas em **bC** e, com isso, **Ci** é uma lógica capaz de tratar da noção de inconsistência ($\bullet$), a qual é definida através da negação do conectivo de consistência da lógica **bC** e acrescentando-se mais um axioma. Repetindo este mesmo raciocínio, pode-se obter muitas outras extensões que dão origem aos chamados **C**-sistemas, os quais determinam uma classe especial das **LFI**s.

Ao longo deste capítulo fazemos um breve estudo dessa classe de lógicas, as quais são de nosso interesse por se tratar de sub-sistemas de C_n. Na terminologia de [CM02] e [CCM04] os C_n são chamados de **dC**-sistemas e tais lógicas, como já sabemos, não são algebrizáveis nas acepções estudadas nos Capítulos 1 e 2 desta dissertação.

Reservamos o presente capítulo para tratarmos mais de perto das **LFI**s, que como já dissemos são de nosso interesse. Expomos também a idéia e a definição das semânticas de traduções possíveis. Todas as lógicas que tratamos aqui são exemplos de lógicas às quais se aplica a definição de semântica de traduções possíveis e todos os resultados que apresentamos neste capítulo foram extraídos basicamente dos artigos [CM02] e [CCM04].

Introduzimos o conceito de *traducto*, designação para as lógicas que são capazes de prover um teorema de completude via semântica de traduções possíveis para uma dada lógica $\mathcal{S}$, e o denotamos por $Trad_{\mathcal{S}}$. Finalizamos com um resultado original que mostra que os traductos trivalentes $Trad_{\mathbf{bC}}$, $Trad_{\mathbf{Ci}}$, $Trad_{\mathbf{Cie}}$ e outros são Blok-Pigozzi algebrizáveis. Esse resultado é de suma importância para o Capítulo 4, parte original desta dissertação, e que tem por objetivo apresentar uma proposta de algebrização que seja capaz de algebrizar C_1 e seus sub-sistemas via semântica de traduções possíveis.

3.1 Semânticas de valorações para **LFI***s*

Nesta seção fazemos uma revisão do problema de se obter interpretações semânticas para algumas **LFI**s, começando primeiramente pela semântica de valorações. Como salientamos, um dos grandes problemas a respeito das lógicas paraconsistentes é a sua semântica.

Os primeiros **C**-sistemas, os cálculos C_n de da Costa, foram introduzidos do ponto de vista puramente sintático, e somente mais tarde é que se obtiveram interpretações semânticas para tais sistemas em termos das chamadas semânticas de valorações, que são semânticas bivalentes, mas não vero-funcionais. Mais tarde, como mencionamos, um novo tipo de semântica, as chamadas *semânticas de traduções possíveis*, foram propostas para muitas destas lógicas (cf. [Car90], [Car00] e [CM02]).

Seguindo o artigo [CCM04], esclarecemos como estas novas semânticas se relacionam com as semânticas multivalentes, em especial com as trivalentes. Este ponto é crucial para o desenvolvimento do nosso trabalho, uma vez que estas lógicas trivalentes são em geral Blok-Pigozzi algebrizáveis; fato que será importante para o que vem a seguir.

Deve-se ressaltar que, embora alguns **C**-sistemas sejam polivalentes, a grande maioria não pode ser caracterizada como lógicas polivalentes, isto é, os **C**-sistemas não podem ser semanticamente caracterizados por matrizes finitas. A primeira demonstração desse resultado, no âmbito da paraconsistência, foi obtida para a hierarquia C_n de da Costa, para $1 \leq n \leq \omega$, e é devida a Ayda Arruda (cf. [Alv76]). O argumento, nesse caso, se apóia no fato de que nesses sistemas não vale a redução de negações. O seguinte teorema mostra que é impossível tornar as lógicas **bC**, **Ci** e várias outras lógicas tais como **bCe**, **Cie**, **Cil**, **Cile**, **Cila**, **Cilae**, **Cia**, **Ciae**, **Cior** e **Ciore** (ver [CM02] e [CCM04] para mais detalhes sobre esses sistemas), vero-funcionais. Aqui o resultado é mais amplo, pois é válido para lógicas em que a redução de negações é válida, e o argumento se apóia no fato de que o problema não se resolve simplesmente aumentando o número de valores-verdade:

Teorema 3.1.1. *Os* **C***-sistemas* **bC***,* **bCe***,* **Ci***,* **Cie***,* **Cil***,* **Cile***,* **Cila***,* **Cilae***,* **Cia***,* **Ciae***,* **Cior** *e* **Ciore** *não são caracterizáveis por matrizes finitas.*

Demonstração. Conferir em [CCM04]. □

A demonstração do teorema acima segue por absurdo, supondo que exista uma matriz finita que caracterize os **C**-sistemas mencionados e definindo-se um esquema de fórmulas, que chamamos informalmente de α, tal que para cada matriz finita existe uma instância de α que tem valor distinguido. Por outro lado, existe uma matriz infinita que valida os axiomas de cada um dos **C**-sistemas acima e que não valida nenhuma instância de α, o que contradiz o fato de as matrizes finitas validarem α; portanto tais lógicas não podem ser caracterizadas por matrizes finitas. A prova deste teorema abstrai o argumento central do conhecido teorema de James Dugundji, que mostra um resultado análogo para as lógicas modais normais, demonstrando que nenhuma matriz característica para **S5** pode ter um número finito de valores (cf. [CP01] p. 29).

Da mesma forma que o teorema de Dugundji foi importante para as lógicas modais, no sentido em que ele justifica a proposta de um outro tipo de semântica para tais sistemas (a saber, a conhecida semântica de mundos possíveis de Saul Kripke) o Teorema 3.1.1 mostra também que, sendo os **C**-sistemas incaracterizáveis por matrizes finitas, precisamos de uma outra maneira de se pensar alguma semântica para os **C**-sistemas. Isso ajuda a explicar o surgimento das semânticas de traduções possíveis. Tais semânticas, de certa forma, poderiam ser vistas como uma generalização da semântica de mundos possíveis, no sentido de que os mundos poderiam ser vistos como lógicas mais simples, tais como por exemplo, lógicas multivalentes. Apesar de não ser, a rigor, necessário o uso de lógicas multivalentes dentro da concepção das semânticas de traduções possíveis, todos os exemplos estudados até agora, como veremos, fazem uso apenas de lógicas trivalentes.

Embora o Teorema 3.1.1 se aplique a outros sistemas de lógicas, não se sabe se sistemas como **Cilo**, **Cio**, **Ciloe**, **Cior**, **Cid(b)o** e **Cid(b)** teriam ou não semânticas polivalentes; em [CCM04] conjectura-se que não possam ser caracterizados por matrizes finitas.

Mostramos agora, antes de passar às semânticas de traduções possíveis, alguns exemplos de semânticas de valorações, tomando como exemplo as lógicas **bC**, **Ci** e **LFI1**. As semânticas de valorações que faremos a seguir, são semânticas bivalentes, necessariamente não-vero-funcionais, à luz do Teorema 3.1.1, que impede que tais lógicas sejam caracterizáveis por matrizes finitas de tamanho fixado com um número finito de valores de verdade.

Portanto, as semântica de valorações para essas lógicas, se são semânticas bivalentes, não podem ser descritas por matrizes finitas, e são então necessariamente não-vero-funcionais: de fato, as semânticas de valorações dão origem às chamadas quase-matrizes (para mais detalhes ver [Mar99] e [CCM04]).

Dessa forma, as semânticas de valorações são funções que interpretam os conectivos como funções parciais, e este caráter de não-totalidade é inerente a um certo tipo de interpretação das lógicas paraconsistentes[1].

Vejamos agora alguns exemplos:

Definição 3.1.2. Uma **bC**-valoração é uma função $v_{\mathbf{bC}} : For_{\mathbf{bC}} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que:

(v1) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$;
(v2) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$;
(v3) $v(\alpha \to \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$;
(v4) $v(\neg\alpha) = 0$ implica $v(\alpha) = 1$;
(v5) $v(\neg\neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 1$;
(v6) $v(\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$.

Para uma coleção $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de fórmulas de **bC**, $\Gamma \models_{\mathbf{bC}} \alpha$ significa, como usualmente definido, que α recebe valor 1 para toda **bC**-valoração que atribui valor 1 aos elementos de Γ.

A prova de corretude para **bC** com respeito às **bC**-valorações segue o mesmo padrão usual, e a completude está feita em detalhes, por exemplo, em [CM02] e [CCM04], utilizando as funções características dos conjuntos saturados maximais, como é praxe neste tipo de argumento.

Para a lógica **Ci**, a definição de valoração é a seguinte:

Definição 3.1.3. Uma **Ci**-valoração é uma função $v_{\mathbf{Ci}} : For_{\mathbf{Ci}} \longrightarrow \{0,1\}$ satisfazendo às cláusulas (v1)-(v6) para **bC**-valoração, mais as seguintes:

(v7) $v(\bullet\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 1$;
(v8) $v(\bullet\alpha) = 1$ sse $v(\neg\circ\alpha) = 1$;
(v9) $v(\neg\bullet\alpha) = 1$ implica $v(\circ\alpha) = 1$.

Analogamente ao caso de **bC**, pode-se demonstrar que **Ci** é correta e completa com respeito às **Ci**-valorações.

Seguindo ainda na mesma trilha, podemos estender as **Ci**-valorações para dar conta da lógica trivalente paraconsistente **LFI1**, a qual, como

[1] Seria interessante investigar a relação desse fato com as funções recursivas parciais, que como é bastante conhecido, impedem que argumentos diagonais (por redução ao absurdo) sejam aplicados como o são em relação às funções recursivas totais (cf. [EC00]).

veremos mais adiante, é equivalente à lógica J_3, introduzida em 1970 por D'Ottaviano e da Costa como uma possível solução para o problema de Jaśkowski (cf. [DdC70]), e reapareceu muitas vezes na literatura.

Definição 3.1.4. Uma **LFI1**-valoração é uma função $v_{\mathbf{LFI1}} : For_{\mathbf{LFI1}} \longrightarrow \{0, 1\}$ satisfazendo às cláusulas (v1)-(v9) para **Ci**-valoração, mais as seguintes cláusulas adicionais:

(v10) $v(\neg\neg\alpha) = 0$ implica $v(\alpha) = 0$;
(v11) $v(\bullet(\alpha \wedge \beta)) = 1$ sse $v(\bullet\alpha \wedge \beta) = 1$ ou $v(\alpha \wedge \bullet\beta) = 1$;
(v12) $v(\bullet(\alpha \vee \beta)) = 1$ sse $v(\bullet\alpha \wedge \neg\beta) = 1$ ou $v(\neg\alpha \wedge \bullet\beta) = 1$;
(v13) $v(\bullet(\alpha \to \beta)) = 1$ sse $v(\alpha \wedge \bullet\beta) = 1$.

Novamente, como seria de se esperar, **LFI1** é correta e completa com respeito às **LFI1**-valorações. É importante ressaltar aqui uma questão que pode parecer, à primeira vista, intrigante: como é possível, sendo **LFI1** uma lógica trivalente (cf. [dACM02] e [CM02]), que seja também correta e completa em relação a uma semântica de dois valores?

A resposta a esta indagação é que a semântica bivalente definida pelas **LFI1**-valorações perde a verofuncionalidade, enquanto a semântica trivalente de **LFI1** dada pelas matrizes trivalentes é vero-funcional. Esta dupla completude é parte de um fenômeno mais abragente, conforme descrito em [CCCM03].

Para sumarizar, nosso interesse em tratar aqui rapidamente da semântica de valorações para **LFI**s se prende aos seguintes pontos:

1. As semânticas de valorações são obtidas de maneira bastante natural a partir das relações de conseqüência, através dos conjuntos de fórmulas chamados não-triviais maximais (que são conjuntos contendo possivelmente contradições, mas que não são dedutivamente triviais). De maneira informal, podemos dizer que as funções características de conjuntos não-triviais maximais definem semânticas de valorações, o que possibilita demonstrações canônicas de teoremas de completude para a maioria das **LFI's**.

2. Apesar de serem bastante naturais, as semânticas de valorações são quase um retrato fiel da axiomática dos sistemas paraconsistentes. Dessa forma, ainda que tecnicamente sirvam muito bem à tarefa de fazer ver que teorias contraditórias podem ter modelos construídos com funções parciais, não comportam uma explicação aceitável para o fenômeno da ocorrência de contradições em certas teorias.

3. Estas considerações justificam a preocupação em investigar novas semânticas para tentar melhor explicar a paraconsistência, como é o caso das semânticas de traduções possíveis.

4. As semânticas de valorações são, porém, um passo intermediário importante para obtenção das semânticas de traduções possíveis, como veremos na Seção seguinte.

3.2 Semântica de traduções possíveis para **LFI***s*

Apesar de, como vimos, muitas **LFI**s serem corretas e completas com relação às semânticas de valorações, e estas semânticas serem bastante simples e tecnicamente bastante tratáveis, elas não explicam bem a natureza da paraconsistência: de fato, em todas as semânticas de valorações, em particular todas as valorações que consideramos acima, estendem as **bC**-valorações, e incluem a cláusula abaixo (ver Definição 3.1.2):

(v4) $v(\neg\alpha) = 0$ implica $v(\alpha) = 1$

Esta cláusula tem como consequência que pode haver sentenças α tais que $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 1$, pelo simples fato de não se tratar de uma cláusula "sse", mas simplesmente de uma cláusula apenas condicional. Contudo, esta simples possibilidade matemática, como notamos, não oferece qualquer explicação filosoficamente aceitável para que tal anomalia seja compreensível. Ainda mais, do ponto de vista técnico, é sempre difícil demonstrar que tais sistemas são decidíveis. Dessa forma, embora as semânticas de valorações constituam um artifício técnico bastante conveniente, torna-se desejável propor um tipo de semântica que possa ajudar a compreender o fenômeno da paraconsistência do ponto de vista intuitivo.

As semântica de traduções possíveis, introduzidas em [Car90] e estudas em [Mar99], se propõem a oferecer tal explicação.

Para um tratamento muito mais detalhado do que estamos oferecendo aqui, cujo intuito é preparar o caminho para a proposta das algebrizações com base nestas semânticas, recomendamos os artigos já citados.

Seja $\mathscr{A} = \langle\{0, {}^1\!/\!{}_2, 1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg_w, \neg_s, \circ_w, \circ_s\rangle$ uma Σ-álgebra, cujas operações são determinadas pelas tabelas abaixo, e seja $\mathscr{M} = \langle\mathscr{A}, \{{}^1\!/\!{}_2, 1\}\rangle$ uma Σ-matriz, lembrando que 1 e ${}^1\!/\!{}_2$ são valores distinguidos em $\mathscr{A}$:

$\wedge$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	$1/2$	$1/2$	0

$\to$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	$1/2$	$1/2$	$1/2$

	$\neg_w$	$\neg_s$	$\circ_w$	$\circ_s$
1	0	0	1	1
$1/2$	$1/2$	0	1	0
0	1	1	1	1

Com finalidade de dar interpretações aos conectivos de **bC** e de **Ci** com respeito às semânticas de traduções possíveis, é necessário compreender o significado destas tabelas: o valor de verdade $1/2$ pode ser entendido como "verdadeiro por *default*", ou "verdadeiro por falha", no sentido de ser verdadeiro por falta de evidência em contrário, enquanto 1 e 0 significam "verdadeiro" e "falso" respectivamente.

Considerando que as matrizes para os conectivos binários de conjunção, disjunção e implicação nunca retornam o valor 1, podemos entender tais operações como informando que nunca estamos absolutamente seguros da verdade de uma sentença composta, isto é, não-atômica.

A negação é um caso particularmente importante: há duas interpretações distintas para negação, a interpretação fraca $\neg_w$ e a interpretação forte $\neg_s$. Do mesmo modo, há também duas interpretações distintas para o operador de consistência $\circ$: a interpretação fraca $\circ_w$ e a interpretação forte $\circ_s$.

As semânticas de traduções possíveis (estamos nos fixando no caso de **Ci**) interpretam as fórmulas lógicas em dois cenários distintos. Num primeiro cenário, uma informação pode ser tão inconclusiva ou dúbia a ponto de receber o valor de verdade $1/2$. É claro que os outros dois valores de verdade são clássicos, e o ponto delicado é entender o comportamento do valor $1/2$. Pode ocorrer que sua negação também seja da mesma natureza dúbia ou inconclusiva; essa possibilidade é expressa pela negação fraca $\neg_w$. Vejamos o exemplo a seguir.

Suponhamos que num processo judicial o promotor acusa uma pessoa de ser um assassino, apresentando certas evidências muito fortes, mas ainda não conclusivas. Os jurados e o juiz, levando em conta as evidências apresentadas pelo promotor, aceitam a verdade da sentença α: "O réu é culpado" como provisoriamente verdadeira, ou seja, atribuem a ela o valor de verdade $1/2$. Mas o advogado de defesa também tem boas evidências que tentam mostrar que o réu não é culpado, e os jurados só podem atribuir, provisoriamente à sentença $\neg\alpha$: "O réu não é culpado" o valor de verdade $1/2$.

O que a semântica de traduções possíveis nos oferece é a possibilidade de expressar tal situação através da negação fraca $\neg_w$.

Por outro lado, com o passar do tempo, os jurados e o juiz podem ter chegado à conclusão da culpa do réu e, portanto, ao sair a sentença judicial, a sentença α "O réu é culpado", que havia sido avaliada como $1/2$ não tem mais o estatuto de verdade provisória, e sua negação $\neg\alpha$ só pode ser falsa. Este cenário é expresso pela negação $\neg_s$.

Em termos combinatórios, faltaria um cenário: aquele em que o réu fosse considerado inocente, e a sentença α: "O réu é culpado", que havia sido avaliada como $1/2$, revelasse um grande erro, pois na verdade adquiriria o valor 0. Contudo, a semântica de traduções possíveis assim definida não é adequada para este tipo de cenário: note que havíamos esclarecido haver evidências muito fortes para que α fosse avaliada como $1/2$. Isso não quer dizer que outras semânticas de traduções possíveis não possam ser assim definidas, mas simplesmente que as semânticas de traduções possíveis para **Ci** não se comportam desta maneira. Ou seja, em outras palavras, **Ci** (e no fundo, todas as lógicas paraconsistentes classificadas como **LFI**s) são adequadas para expressar aqueles casos em que há evidências fortes para que sentenças não-negadas α sejam avaliadas como $1/2$, no sentido de serem quase (no sentido de muito próximas) verdadeiras.

Falta ainda entender o comportamento do operador de consistência $\circ$. De maneira similar ao que discutimos acima, a interpretação fraca $\circ_w$ assume que a situação descrita no primeiro cenário é coerente, e vê a consistência de $1/2$ como verdadeira. A interpretação forte $\circ_s$, contudo, reconhece, no segundo cenário, que a proposta provisória de haver classificado α como $1/2$ não foi consistente, e em consequência atribui à consistência de α, dada pela fórmula $\circ\alpha$, o valor 0.

Podemos ver, então, as lógicas paraconsistentes classificadas como **LFI**s, como aquelas lógicas adequadas para modelar situações onde pode-se fazer uma revisão das crenças vigentes, mas de maneira que as crenças atribuídas provisoriamente não sejam muito disparatadas. Essa situação não é muito diferente dos critérios de verdade pragmáticos da atividade científica; podemos mesmo considerar a lógica paraconsistente como a "lógica da atividade de avaliar conjecturas no decorrer do tempo", como por exemplo ocorreu com o chamado Teorema de Fermat (que na verdade, deveria ter sido chamado Conjectura de Fermat antes da sua prova). Sabe-se que este problema foi resolvido recentemente de forma positiva: havia muita evidência favorável para que fosse julgado como provisoriamente verdadeiro (isto é, com valor de verdade $1/2$). Contudo, sua negação poderia, em princípio, ser verdadeira, e até há pouco tempo atrás seria classificada como $1/2$. Após a publicação da solução, o valor provisório $1/2$ revelou-se definitivo, como consequência do fato de a negação do Teorema de Fermat ser agora claramente falsa. Por outro lado, a questão da demonstração da consistência da aritmética por meios aritméticos, que como se sabe, fazia parte da crença de David Hilbert expressa no chamado Programa de Hilbert, foi resolvida de forma negativa pelos Teoremas de Gödel. Este tipo de situação não seria, então, adequado para ser tratado pelo paradigma paraconsistente. Uma objeção a esta interpretação seria que o paradigma paraconsistente só serviria, então, para se aplicar a situações que não conduzissem a falsas conjecturas: contudo, não se trata aqui de uma máquina de futurologia: simplesmente isso não está no escopo da lógica. O que estamos argumentando é que o paradigma paraconsistente seria bastante adequado para dar suporte a uma análise lógica da atividade de busca por explicações, ou de decisão entre teorias científicas conflitantes. Um exemplo muito interessante de como o raciocínio paraconsistente pode de fato ser aplicado a situações plausíveis envolvendo busca de explicações entre cenários contraditórios, no caso concreto das aplicações às bases de dados, é proposto em [CMdA00].

Como afirmamos, as tabelas descritas acima são a base para uma semântica de traduções possíveis para **Ci**. Para obter uma semântica de traduções possíveis para **Ci**, considere a álgebra $\mathscr{A}$, a álgebra das fórmulas induzidas pelos conectivos $\mathscr{M}$ e gerada a partir do conjunto das variáveis proposicionais $\mathcal{V}$. Chamaremos essa álgebra, de agora em diante, de $For_{\mathscr{M}}$. Defina a classe Tr das funções, chamadas *traduções* (para o caso geral, ver Definição 3.2.2), $t : For_{\mathbf{Ci}} \longrightarrow For_{\mathscr{M}}$ definidas pelas cláusulas a seguir:

$$\begin{array}{lcl}
t(p) & = & p \text{ se } p \in \mathcal{V}; \\
t(\neg\alpha) & \in & \{\neg_s t(\alpha),\ \neg_w t(\alpha)\}; \\
t(\alpha\sharp\beta) & = & t(\alpha)\ \sharp\ t(\beta), \quad \text{para todo } \sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}; \\
t(\circ\alpha) & = & \circ_s t(\alpha) \ \text{ se } \ t(\neg\alpha) = \neg_w t(\alpha); \text{ e} \\
t(\circ\alpha) & = & \circ_w t(\alpha) \ \text{ se } \ t(\neg\alpha) = \neg_s t(\alpha).
\end{array}$$

Dizemos que o par $\mathbf{TP} = \langle \mathscr{M}, Tr \rangle$ é uma *estrutura semântica de traduções possíveis* para **Ci** (para o caso geral, ver Definição 3.2.3). Uma valoração w de **TP** é uma valoração de $\mathscr{M}$, tal que $w : For_{\mathscr{M}} \longrightarrow \mathbf{V}_{\mathscr{M}}$, em que $\mathbf{V}_{\mathscr{M}}$ denota o conjunto de valores verdade de $\mathscr{M}$, isto é, $\mathbf{V}_{\mathscr{M}} = \{0, 1/2, 1\}$. Como

$\mathbf{V}_{\mathscr{M}}$ é um conjunto composto por três valores de verdade, nesse caso w é chamada de *valoração trivalente*. Se $\models_{\mathscr{M}}$ denota a relação de conseqüência em $\mathscr{M}$, e $\Gamma\cup\{\alpha\}$ é um conjunto de fórmulas em **Ci** a relação de conseqüência da estrutura de semântica de traduções possíveis $\models_{\mathbf{TP}}$ é definida como:

$$\Gamma \models_{\mathbf{TP}} \alpha \;\text{ sse }\; t(\Gamma) \models_{\mathscr{M}} t(\alpha) \text{ , para toda } t \in Tr.$$

Chamamos *tradução possível* de uma fórmula α a qualquer imagem de α através de uma função-tradução em Tr.

Vamos retomar, a seguir, as demonstrações dadas em [Mar99] e [Car90] e refeitas em [CCM04].

Não é difícil demonstrar o seguinte teorema de correção:

Teorema 3.2.1. *(Corretude) Seja* $\Gamma\cup\{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* **Ci**. *Então* $\Gamma \vdash_{\mathbf{Ci}} \alpha$ *implica* $\Gamma \models_{\mathbf{TP}} \alpha$.

Demonstração. A prova consiste em notar que cada fórmula (ou cada esquema de fórmulas) tem uma coleção de finitas traduções possíveis, de acordo com as definições acima. Basta então mostrar, em primeiro lugar, que a coleção finita das traduções dos axiomas produz fórmulas válidas de acordo com as matrizes de $\mathscr{M}$. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a regra (MP), que é a única regra de **Ci**, preserva validade das fórmulas traduzidas. Os únicos casos não trivias são os axiomas específicos de **Ci**. □

O mesmo resultado se aplica para **bC** fazendo uso, inclusive, da mesma Σ-matriz $\mathscr{M}$ dada acima.

Definição 3.2.2. Sejam $\mathcal{S} = \langle For, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ e $\mathcal{S}' = \langle For', \vdash_{\mathcal{S}'}\rangle$ sistemas dedutivos. Uma *tradução* t de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}'$ é uma função entre seus conjuntos de fórmulas, a qual preserva a derivabilidade:

$$\text{Se } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha, \text{ então } t(\Gamma) \vdash_{\mathcal{S}'} t(\alpha).$$

Quando o "se ... então" é substituído por "se, e somente se", a tradução é dita *conservativa*.[2]

Definição 3.2.3. Uma estrutura de traduções possíveis para um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é um par $\mathbf{TP} = \langle\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}, Tr\rangle$, em que $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}$ é uma família de sistemas dedutivos e $Tr = \{t_i : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_i\}_{i\in I}$ uma família de traduções. Uma relação de conseqüência na estrutura **TP**, denotada por $\models_{\mathbf{TP}}$, é definida da maneira a seguir, para todo conjunto $\Gamma\cup\alpha$ de fórmulas de $\mathcal{S}$ (é conveniente distinguir entre uma relação local e uma relação global):

[2] A noção de tradução que tratamos aqui é a mesma de [dSDS99] e [Fei97].

- Relação de forçamento local para $\mathcal{S}$ ($\models^{t_i}_{\mathbf{TP}}$):

$$\Gamma \models^{t_i}_{\mathbf{TP}} \alpha \text{ sse } t_i(\Gamma) \models_{\mathcal{S}_i} t_i(\alpha), \text{ para algum } t_i \in Tr.$$

"Γ força α sob a tradução t_i"

- Relação de forçamento global para $\mathcal{S}$ ($\models_{\mathbf{TP}}$):

$$\Gamma \models_{\mathbf{TP}} \alpha \text{ sse } \Gamma \models^{t_i}_{\mathbf{TP}} \alpha, \text{ para toda tradução } t_i \in Tr.$$

"Γ força α sob todas as traduções"

3.3 Lógicas caracterizáveis por Semânticas de Traduções Possíveis

Passamos agora a tratar do problema muito mais complicado de se obter demonstrações de completude via semântica de traduções possíveis. Embora não exista um método geral de se obter provas de completude em relação as semânticas de traduções possíveis, existe uma certa técnica já estabelecida quando dispomos da completude com respeito à semântica de valorações. Tal é o que fazemos aqui.

A estratégia da demonstração, no caso de **Ci**, consiste em mostrar que para cada tradução t e cada valoração trivalente w definida com base nas matrizes $\mathscr{M}$ fica determinada uma **Ci**-valoração $v_{\mathbf{Ci}}$, e vice-versa, para cada fórmula α de **Ci**,

$$w(t(\alpha)) \in \{1, 1/2\} \text{ sse } v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = 1.$$

Na verdade, para a parte mais difícil da demonstração da completude basta um resultado mais simples do que este, já tradicionalmente chamado de "Lema de Representabilidade". A partir disso, devemos fazer também uso da completude da semântica de valorações para **Ci**.

Lema 3.3.1. *(Representabilidade) Dada uma* **Ci***-valoração* $v_{\mathbf{Ci}}$ *é possível encontrar uma tradução* t *em* $\textsc{Tr}$ *e uma valoração* w *em* $\mathbf{M}$ *tal que, para toda fórmula* α *em* **Ci***:*

$$w(t(\alpha)) \in \{1, 1/2\} \text{ sse } v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = 1.$$

Demonstração. A prova consiste em definir simultaneamente uma tradução t e uma valoração trivalente w definidas por indução na complexidade das fórmulas. Devemos começar estabelecendo t e w no caso $p \in \mathcal{V}$.

i) Para $p \in \mathcal{V}$
- Para a valoração w temos:

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_{\mathbf{Ci}}(\neg p) = 0, \\ 1/2 & \text{se } v_{\mathbf{Ci}}(p) = v_{\mathbf{Ci}}(\neg p) = 1, \\ 0 & \text{se } v_{\mathbf{Ci}}(p) = 0. \end{cases}$$ - Para a tradução t temos:

- $t(p) = p$,
- $t(\neg p) = \neg_w p$

ii) Para fórmulas complexas
- Para a valoração w temos:

A extensão, nesse caso, é determinada pelas tabelas de $\mathscr{M}$, dadas acima.

- Para a tradução t temos:

- $t(\alpha \sharp \beta) = (t(\alpha) \ \sharp \ t(\beta))$ para $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- $t(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_w(t(\alpha)) & \text{se } v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = v_{\mathbf{Ci}}(\neg\alpha) = 1, \\ \neg_s(t(\alpha)) & \text{caso contrário, para } \alpha \notin \mathcal{P}\ . \end{cases}$
- $t(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_w(t(\alpha)) & \text{se } v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = v_{\mathbf{Ci}}(\neg\alpha) = 1, \\ \circ_s(t(\alpha)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Isto completa a definição de t e w por indução na complexidade das fórmulas. A demonstração de $w(t(\alpha)) \in \{1, 1/2\}$ sse $v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = 1$ é, a partir daí, facilmente estabelecida, fazendo uso, novamente, da indução na complexidade das fórmulas. $\square$

Teorema 3.3.2. *(Completude) Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas em* **Ci**. *Então* $\Gamma \models_{\mathbf{TP}} \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_{\mathbf{Ci}} \alpha$.

Demonstração. A demonstração segue diretamente do lema da Representabilidade e da completude em relação às **Ci**-valorações.

De fato, se $\Gamma \nvdash_{\mathbf{Ci}} \alpha$, pelo resultado mencionado após a Definição 3.1.3, então tendo em conta que **Ci** é correto e completo em relação às **Ci**-valorações, existe uma **Ci**-valoração $v_{\mathbf{Ci}}$ tal que $v_{\mathbf{Ci}}(\Gamma) = 1$ e $v_{\mathbf{Ci}}(\alpha) = 0$. Daí, pela Representabilidade, é possível encontrar uma tradução t em Tr e uma valoração w em $\mathscr{M}$ tal que, $w(t(\Gamma)) \in \{1, 1/2\}$ e $w(t(\alpha)) = 0$. Portanto, por definição, $\Gamma \not\models_{\mathbf{TP}} \alpha$.

□

Como um exemplo do poder interpretativo das semânticas de traduções possíveis, mostramos a equivalência entre duas fórmulas, aparentemente distintas em **Ci**. Considere as seguintes fórmulas escritas na linguagem de **Ci**: $\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\alpha \wedge \circ\alpha)$ e $\urcorner\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \to \bot)$, em que $\bot \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \circ\alpha)$.

Vejamos as traduções possíveis dessas fórmulas, de acordo com as cláusulas de traduções dadas anteriormente, de **Ci**.

$$t(\sim\alpha) = \begin{cases} (\neg_s\alpha \wedge \circ_w\alpha) \\ (\neg_w\alpha \wedge \circ_s\alpha) \end{cases} \quad \text{e} \quad t(\urcorner\alpha) = \begin{cases} (\alpha \to (\alpha \wedge \neg_s\alpha \wedge \circ_w\alpha)) \\ (\alpha \to (\alpha \wedge \neg_w\alpha \wedge \circ_s\alpha)) \end{cases}$$

As tabelas produzidas pelas fórmulas traduzidas, acima, são as seguintes:

	$\sim$	$\urcorner$
1	0	0
$1/2$	0	0
0	$1/2$	$1/2$

Através da tradução dessas fórmulas tornou-se possível construir suas tabelas verdade, permitindo compará-las, a fim de concluir a equivalência entre as mesmas.

A mesma técnica de demonstração de completude mostrada acima, pode ser usada para se obter semânticas de traduções possíveis para virtualmente dezenas de outras lógicas, como mostrado em [CCM04].

Sabe-se que a lógica paraconsistente C_1 tem uma semântica de traduções possíveis em $Trad_{C_1}$, que é a lógica **LFI1**. Fazemos um esclarecimento histórico aqui, pelo fato de esta lógica ter ocorrido na literatura com diferentes apresentações, mostrando que este sistema dedutivo é de certa forma muito natural.

Com o objetivo de esclarecer a trajetória do conceito de semânticas de traduções possíveis, que como vimos é essencial para esse trabalho, retomo aqui alguns fatos básicos. O conceito de semânticas de traduções possíveis foi imaginado por W. Carnielli, tendo sido proposto em 1990 em [Car90], onde se argumentava que a inconsistência é uma espécie de mau necessário, explicando-se esse fenômeno por meio das traduções possíveis. Nesse artigo a lógica C_1 é chamada de lógica ***Meta***, e seu traducto de LCD. Mais tarde, em 2000, numa versão revisada em [Car00], o traducto de C_1 aparece com a designação de LCD, com a diferença de que as lógicas tratadas via semânticas de traduções possíveis são agora extensões de C_n, chamadas de $C_n^{\neg\neg}$. A idéia era tratar lógicas paraconsistentes mais próximas possíveis da lógica clássica, atendendo às intuições de da Costa. Virtualmente as mesmas semânticas de traduções possíveis então ajustam-se a C_n e a $C_n^{\neg\neg}$, o que acresce o interesse por esta nova semântica.

Mas as mudanças e caracterizações não param por aí. J. Marcos em [Mar99] refere-se a lógica LCD como $\mathcal{W}_3$, e mostra nesse mesmo trabalho que $\mathcal{W}_3$ é a lógica paraconsistente J_3, introduzida por D'Ottaviano e N. da Costa em [DdC70][3]. Surpreendentemente, esta lógica aparece também, em abordagens independentes, com as seguintes designações: **CLuNs** em [Bat89], como **LFI1** em [CMdA00], e como sistema Φ_v introduzido anos antes em [Sch60][4].

Uma pergunta que poderia ser feita é por que C_1 não foi traduzida diretamente em J_3 ao invés de LCD ou $\mathcal{W}_3$? A explicação dada pelos autores é que, *a priori*, J_3 não oferece a intuição necessária para exprimir o significado dos conectivos de C_1, e para isso fez-se necessário a criação da lógica LCD ou $\mathcal{W}_3$, com uma multiplicidade de conectivos, para que as traduções fossem definidas a fim de se obter um teorema de completude, baseado nos resultados de conveniência e representabilidade, vistos acima. Somente *a posteriori* soube-se que estes sistemas eram os mesmos.

Depois, em [CM02], W. Carnielli e J. Marcos renomeiam o traducto de C_1 como **LFI1**, fixando a nomenclatura adotada em [CMdA00]. Em nosso caso chamamos todas essas lógicas por $Trad_{C_1}$, significando que esta é capaz de prover um teorema de completude com base nas semânticas de traduções possíveis para C_1.

Além do interesse conceitual, as semânticas de traduções possíveis determinam imediatamente um procedimento de decisão em muitos casos. Se $\mathcal{S}$ é um sistema dedutivo que é correto e completo com respeito a uma semântica de traduções possívies com base em lógicas decidíveis, então o seguinte algoritmo dá um critério de decidibilidade para $\mathcal{S}$:

Dada uma fórmula α, queremos decidir se α é (ou não) um teorema de $\mathcal{S}$.

[3] A demonstração detalhada de que $\mathcal{W}_3$ e J_3 são dedutivamente equivalentes é feita na dissertação de mestrado de J. Marcos em [Mar99], na seção 3 do Capítulo 2, p.55-59.

[4] Para detalhes de demonstações conferir no capítulo II.7.

1. Considere a classe (finita) das traduções de α;
2. Verifique se cada tradução é um teorema em cada uma das lógicas decidíveis (nas quais se baseia a semântica de traduções possíveis para $\mathcal{S}$);
3. Em caso positivo, α é um teorema de $\mathcal{S}$. Caso contrário, não é.

Não tratamos aqui, obviamente, da questão da complexidade deste procedimento de decisão, o que é uma questão em aberto.

3.4 Os traductos trivalentes e suas propriedades algébricas

Os traductos trivalentes que estudamos nessa seção são aqueles capazes de prover um teorema de completude via semântica de traduções possíveis para as lógicas da inconsistência formal, que como já vimos, constituem uma importante família de lógicas paraconsistentes que permitem expressar a noção de consistência e inconsistência.

Com base no artigo de J. Marcos (cf. [Mar]), em que o autor esquematiza o conjunto das traduções que garantem completude para muitas das lógicas da inconsistência formal, estudadas em [CM02] e [CCM04], é possível especificar quais são os traductos dessas respectivas lógicas.

Considere as seguintes tabelas abaixo, em que $1/2$ e 1 são valores distinguidos:

$\wedge$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	$1/2$	$1/2$	0

$\to$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	$1/2$	$1/2$	$1/2$

	$\neg_1$
1	0
$1/2$	0
0	1

	$\neg_2$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	$1/2$

	$\neg_3$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

	$\circ_1$
1	1
$1/2$	0
0	1

	$\circ_2$
1	$1/2$
$1/2$	0
0	$1/2$

	$\circ_3$
1	0
$1/2$	0
0	0

Os traductos $Trad_{PI}$, $Trad_{\mathbf{mbC}}$, $Trad_{\mathbf{mCi}}$, $Trad_{PId}$, $Trad_{\mathbf{bC}}$, $Trad_{\mathbf{Ci}}$, $Trad_{PIde}$, $Trad_{\mathbf{bCe}}$ e $Trad_{\mathbf{Cie}}$ são todos caracterizados por combinações das tabelas dadas acima. Vejamos, agora, as assinaturas dos traductos mencionados acima:

- $\Sigma_{Trad_{PI}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_2\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{mbC}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_2, \circ_2, \circ_3\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{mCi}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_2, \circ_1\}$.

- $\Sigma_{Trad_{PId}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{bC}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3, \circ_2, \circ_3\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{Ci}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3, \circ_1\}$.

- $\Sigma_{Trad_{PIde}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{bCe}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3, \circ_2, \circ_3\}$.

- $\Sigma_{Trad_{\mathbf{Cie}}} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg_1, \neg_3, \circ_1\}$.

O Teorema a seguir refere-se sobre a definibilidade dos conectivos expressos pelas tabelas acima. Denotamos por $\mathscr{M}$ a Σ-matriz formada pelas tabelas dadas acima.

Teorema 3.4.1. (a) *Os conectivos $\rightarrow$, $\circ_1$ e $\neg_3$ são suficientes para expressar todos os demais.*

(b) *Qualquer conjunto que expresse todos os conectivos em $\mathscr{M}$ deve conter $\neg_3$ necessariamente.*

(c) *$\neg_3$ não é suficiente como único conectivo unário em um conjunto de funções que expressem todos os conectivo em $\mathscr{M}$.*

Demonstração. (a) O leitor pode verificar que:

- $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$
- $\circ_2\alpha \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \circ_1\alpha)$
- $\neg_1\alpha \Leftrightarrow \circ_1(\alpha \vee \alpha)$
- $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \circ_2(\neg_1\alpha \vee \neg_1\beta)$
- $\circ_3\alpha \Leftrightarrow \circ_1\alpha \wedge (\circ_1(\alpha \rightarrow \circ_1\alpha))$
- $\neg_2\alpha \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \neg_1(\circ_1\alpha))$

(b) Observe que nenhuma das funções unárias, com exceção de $\neg_3$, é injetora. É claro que composição de funções não injetoras produz funções não injetoras.

Por outro lado, qualquer composição das funções binárias $(\wedge, \vee, \rightarrow)$ deixa de ser sobrejetora, pois o valor 1 não está na imagem destas compostas (verifique na tabela). Em decorrência, como qualquer tentativa de se definir $\neg_3$ será uma função unária aplicada a uma composição qualquer de funções (e portanto não injetoras), ou casos particulares de funções binárias aplicadas a uma composição qualquer de funções e, portanto, não sobrejetora. Como $\neg_3$ é bijetora (ver tabela), então não pode ser obtida em nenhum dos casos.

(c) Qualquer composição g de funções binárias obtida de $(\vee, \wedge, \rightarrow)$ sob o valor $1/2$, isto é, $g(1/2, 1/2) = 1/2$, também $\neg_3(1/2) = 1/2$.

Portanto se não usarmos alguma função adicional, não poderemos obter $\circ_1$, $\circ_2$, $\circ_3$, $\neg_1$ e $\neg_2$.

$\square$

Teorema 3.4.2. *Seja $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ um sistema dedutivo. Se os conectivos $\wedge, \rightarrow, \circ_1$, dados pelas tabelas acima, são definíveis em Σ, então $\mathcal{S}$ é finitamente algebrizável.*

Demonstração. Cosidere os seguintes símbolos definidos:

- $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \Delta \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\circ_1 \alpha \leftrightarrow \circ_1 \beta)$

Suas tabelas são as seguintes:

$\leftrightarrow$	1	$1/2$	0
1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	0	$1/2$

Δ	1	$1/2$	0
1	$1/2$	0	0
$1/2$	0	$1/2$	0
0	0	0	$1/2$

Seja $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle \rangle$ um conjunto tal que:

- $\alpha \Delta \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\circ_1 \alpha \leftrightarrow \circ_1 \beta)$
- $\varepsilon(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \rightarrow \varphi)$
- $\delta(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

Vejamos que $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle \rangle$ é um conjunto de algebrizadores para $\mathcal{S}$.

(i) $\models_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\varphi$: é evidente pela tabela do Δ.

(ii) $\varphi\Delta\psi \models_{\mathcal{S}} \psi\Delta\varphi$: é evidente pela tabela do Δ.

(iii) $\varphi\Delta\psi, \psi\Delta\lambda \models_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\lambda$: basta verificar que quando $\varphi\Delta\psi$ e $\psi\Delta\varphi$ tem valor distinguido na tabela, também é o caso que $\varphi\Delta\lambda$ têm valor distinguido, isto é, (1 ou $1/2$).

(iv) $\varphi_0\Delta\psi_0, \varphi_1\Delta\psi_1 \models_{\mathcal{S}} \sharp(\varphi_0, \varphi_1)\Delta\sharp(\psi_0, \psi_1)$, em que $\sharp \in \{\wedge, \vee, \to, \circ_1, \neg_1, \neg_3\}$: Basta notar que $\varphi\Delta\psi$ tem valor distinguido (1 ou $1/2$) quando $w(\varphi) = w(\psi)$ (confira tabela), daí é imediato ver que $\models_{\mathcal{S}} \sharp(\varphi_0, \varphi_1)$ $\Delta\sharp(\psi_0, \psi_1)$

(v) $\varphi \dashv\models_{\mathcal{S}} \delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)$:

- Se $w(\varphi) = 1$, então $w[\delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)] = 1/2$
- Se $w(\varphi) = 1/2$, então $w[\delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)] = 1/2$
- Se $w(\varphi) = 0$, então $w[\delta(\varphi)\Delta\epsilon(\varphi)] = 0$

Isto significa que se φ tem valor distinguido, então $((\varphi \to \varphi) \to \varphi)\Delta(\varphi \to \varphi)$ também tem valor distinguido e caso contrário tem valor não distinguido.

□

Corolário 3.4.3. *Os seguintes traductos são finitamente algebrizáveis:* $Trad_{\mathbf{mbC}}$, $Trad_{\mathbf{mCi}}$, $Trad_{\mathbf{bC}}$, $Trad_{\mathbf{Ci}}$, $Trad_{\mathbf{bCe}}$ *e* $Trad_{\mathbf{Cie}}$.

Demonstração. É fácil ver que $\circ_1\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg_1\neg_1\circ_2\alpha$. Com base no Teorema 3.4.2 sabemos que os traductos que contiverem na assinatura o conectivo $\circ_1$ é finitamente algebrizável (uma vez que os conectivos $\wedge$ e $\to$ são comuns a todas as assinaturas consideradas acima). Também o são os que contém os conectivos $\neg_1$ e $\circ_2$, pois $\circ_1$ é definido a partir destes. Portanto (veja a relação dos conectivos acima) os traductos $Trad_{\mathbf{mbC}}$, $Trad_{\mathbf{mCi}}$, $Trad_{\mathbf{bC}}$, $Trad_{\mathbf{Ci}}$, $Trad_{\mathbf{bCe}}$ e $Trad_{\mathbf{Cie}}$ são todos finitamente algebrizáveis. □

É importante notar que, apesar de os traductos estarem sendo algebrizados pelo mesmo conjunto de algebrizadores, isto não significa que eles são algebrizáveis pela mesma quase-variedade algébrica. Para tal precisaríamos aplicar o mesmo raciocínio utilizado no Capítulo 4 para mostrar que P^1 e I^1 são algebrizáveis na mesma quase-variedade, mostrando que essas lógicas podem ser escritas na mesma linguagem, e mais ainda, mostrar que estas são fortemente inter-tradutíveis, com base na Definição 4.2.7.

O Teorema 3.4.1 mostra que todos os traductos são expressáveis na mesma linguagem, portanto bastaria mostrar que existem traduções conservativas entre estes sistemas, e também que eles são todos fortemente intertradutíveis. Não atacamos esta questão aqui, mas conjecturamos que o resultado pode ser demonstrado sem grandes complicações.

Os resultados obtidos nessa seção serão úteis para o próximo capítulo, que é reservado para a apresentação de uma nova propoposta de algebrização que é capaz de algebrizar lógicas antes não algebrizáveis, como é o caso de algumas lógicas paraconsistentes.

4. SEMÂNTICAS ALGÉBRICAS DE TRADUÇÕES POSSÍVEIS

Este capítulo, que é a parte original e a mais importante desta Dissertação, tem por objetivo apresentar uma nova definição de algebrização que estende o método de Blok-Pigozzi, a qual chamamos de *semânticas algébricas de traduções possíveis* , e que denotamos por SATP's.

Nosso objetivo consiste em propor uma solução a um problema em aberto desde 1963, a algebrização das lógicas paraconsistentes C_n. A primeira tentativa se deu em [dC66], um trabalho do próprio da Costa de 1966, intitulado "Álgebras de Curry", numa Tese apresentada em um concurso de Cátedra no departamento de Filosofia da USP. Nesse trabalho, ele define as chamadas álgebras de Curry e seus casos particulares, as álgebras C_n, e mostra que tais álgebras preservam muitas propriedades das álgebras de Boole.

Newton da Costa percebe que a lógica C_1 apresenta uma incompatibilidade entre a negação e a equivalência, no sentido que se $\vdash_{C_1} \alpha \leftrightarrow \beta$ não implica que $\vdash_{C_1} \neg\beta \leftrightarrow \neg\alpha$, e nota que isso impede de passar o quociente. Mesmo assim continua a investigação dessas álgebras, do ponto de vista estritamente algébrico e não do lógico, e mostra que toda álgebra C_1 é um reticulado implicativo clássico.

É bom lembrar que, embora ele se refira vagamente à aproximação entre a álgebra C_1 e a lógica C_1, assumindo que lógica e álgebra estão conectadas, em nenhum instante é mostrado que existe uma correlação forte, similar às das álgebras de Boole com CP, entre tais estruturas. Hoje se sabe que isso não é possível, dado que C_1 não é algebrizável nem pela acepção clássica, tão pouco pela noção estendida de Blok e Pigozzi, cf. [Mor80] e [LMS91]. Isso evidencia a falta de clareza com relação a algebrização de lógicas existente nesse período, de resto aceitável, dado que o método de Lindenbaum-Tarski, além de ser o único, de certa forma também faz uma aproximação informal entre lógica e álgebra, exigindo que se estabeleça uma relação de equivalência que seja uma congruência, conectando as duas estruturas. Embora tivesse notado a existência do problema em separar as classes de equivalência pela operação quociente nos cálculos C_n, talvez Newton da Costa não tivesse percebido que a solução para a algebrização desses cálculos devesse abandonar de vez qualquer tentativa de se obter uma congruência que os algebrizasse, fato somente demonstrado por Mortensen em [Mor80].

Em 1971, Antonio Mário Sette retoma a pesquisa nesse campo e faz um estudo dos hiper-reticulados C_ω em sua Dissertação de Mestrado (cf. [Set71]). Esse trabalho ataca um dos problemas deixados em aberto por Newton da Costa, no trabalho mencionado acima, acerca das álgebras C_ω.

Em 1977, Manuel M. Fidel introduz modelos algébricos para os cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$, em [Fid77]. Neste artigo aparece um resultado muito interessante que mostra que o produto direto de uma família de $C_\omega(C'_\omega, C_n)$-estruturas (N-saturadas) é uma $C_\omega(C'_\omega, C_n)$-estrutura (N-saturada). Este resultado é a melhor aproximação entre as lógicas paraconsistentes e a álgebra universal, até o presente momento. Este tópico merece um estudo mais aprofundado, mas aqui não nos ocupamos deste problema.

Anos mais tarde, em 1980, Mortensen mostra no artigo [Mor80] que todo quociente de álgebra para C_1 é trivial. Mesmo assim, em 1984, Carnielli e Alcântara retomam as idéias de da Costa e A. M. Sette, e definem claramente o que se entende por álgebra paraconsistente, referindo-se a tais álgebras como *álgebras de da Costa*, conforme [CdA84]. Neste artigo, eles investigam as propriedades dessas álgebras e mostram exemplos e caracterizações importantes, tal como o resultado que toda álgebra de da Costa é isomorfa a uma álgebra paraconsistente de conjuntos, e que o sistema de fecho de todos os filtros das álgebras de da Costa é paraconsistente. Para a época era a melhor caracterização que se tinha, pois ainda não havia uma definição formal do que significa uma lógica ser algebrizável, que como já vimos no Capítulo 2, ocorreu somente em 1989 com o trabalho de Blok e Pigozzi cf. [BP89]. O trabalho de Lewin *et allia* cf. [LMS91] é a resposta final à questão da algebrização de C_n. Agora entramos em cena. Nossa proposta para contornar a questão é algebrizar via semânticas de traduções possíveis.

Começamos este Capítulo mostrando que a lógica que verifica as condições das álgebras de da Costa é a lógica **Cil**, e não C_1, como pensavam Carnielli e Alcantara em [CdA84], pois o axioma de propagação do bom comportamento de uma fórmula, em C_1 (ou **Cila**, pela classificação taxonômica de [CM02]) propagação da consistência, não pode ser expressado nessas álgebras. A lógica que cumpre esse papel é um subsistema de C_1, a lógica **Cil**. Para a compreensão deste resultado apresentamos a definição das álgebras de da Costa ou da Costa-álgebras.

A definição de algebrização via semânticas de traduções possíveis é classificada por três vias, com grau de rigorosidade crescente: SATP's *ampla*, *estrita* e *n-valentes*. No caso das definições ampla e estrita, uma é caso particular da outra, e a definição mais rigorosa é a *semântica algébrica de traduções possíveis n-valentes*. Esta última limita o escopo de atuação das semânticas de traduções possíveis, e isso refletirá na algebrização via traduções. Todos os exemplos obtidos de lógicas algebrizáveis via semântica de traduções possíveis são do tipo n-valentes. O ponto positivo desta abordagem é a preservação da finitariedade, tal como em Blok e Pigozzi, a menos de tradução.

Finalizamos fazendo uma análise categorial, despretenciosa, das semânticas de traduções possíveis, olhando para estas por meio do produto categorial. Obtemos resultados de preservação da algebrização finitária, e mostramos também que o conjunto de traduções possíveis pode ser substituído por uma tradução conservativa.

Esses resultados permitem tirar conclusões interessantes a respeito das SATP's, e abre campo para discutirmos quais são as possíveis propriedades que podemos extrair da definição das SATP's.

4.1 Álgebras de da Costa e a lógica **Cil**

Conforme nos referimos no início deste capítulo, o artigo [CdA84] resolve da melhor maneira possível, dentro das disponibilidades conceituais na década de 80, a questão da caracterização algébrica da hierarquia C_n, em particular no caso de C_1, propondo uma contrapartida algébrica para certas lógicas paraconsisentes e mostrando que tal contrapartida seria a melhor possível, por meio de um teorema de representação.

Argumentamos aqui que as álgebras de da Costa definidas em [CdA84] constituem o retrato algébrico da lógica **Cil**, e não da lógica C_1. Dessa forma, não parece possível que a solução de Carnielli e Alcântara possa dar conta dos sistemas paraconsistentes mais complexos (conforme a hierarquização de [CM02]).

Nosso objetivo é mostrar que a lógica que tem como contrapartida algébrica as lógicas paraconsistentes de da Costa é a lógica **Cil**.

Vejamos, então a axiomática de **Cil**:

Axiomas

Ax1. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\alpha \to (\beta \to \alpha))$

Ax2. $\vdash_{\mathbf{Cil}} ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)));$

Ax3. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$

Ax4. $\vdash_{\mathbf{Cil}} ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$

Ax5. $\vdash_{\mathbf{Cil}} ((\alpha \wedge \beta) \to \beta)$

Ax6. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\alpha \to (\alpha \vee \beta))$

Ax7. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\beta \to (\alpha \vee \beta))$

Ax8. $\vdash_{\mathbf{Cil}} ((\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)))$

Ax9. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\alpha \vee (\alpha \to \beta))$

Ax10. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\alpha \vee \neg\alpha)$

Ax11. $\vdash_{\mathbf{Cil}} (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

Ax12. $\vdash_{\mathbf{Cil}} \neg \circ \alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Ax13. $\vdash_{\mathbf{Cil}} \circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

Ax14. $\vdash_{\mathbf{Cil}} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \circ\alpha$

Regra: *Modus Ponens*

$$\frac{\alpha, \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Definição 4.1.1. Considere a estrutura $\mathscr{U} = \langle U,\ 0,\ 1,\ \leq,\ \wedge,\ \vee,\ \supset,\ '\rangle$, em que U é o domínio da estrutura e $\leq$ é uma quase ordem. Chama-se *álgebra de da Costa* à estrutura que satisfaz ás seguintes propriedades:

(1) $a \wedge b \leq a$; $a \wedge b \leq b$;

(2) Se $c \leq a$ e $c \leq b$, então $c \leq a \wedge b$;

(3) $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$; onde $a = b$ sse $a \leq b$ e $b \leq a$;

(4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

(5) $a \leq a \vee b$; $b \leq a \vee b$;

(6) Se $a \leq c$ e $b \leq c$, então $a \vee b \leq c$;

(7) $a \wedge (a \supset b) \leq b$;

(8) Se $a \wedge c \leq b$, então $c \leq (a \supset b)$;

(9) $0 \leq a$; $a \leq 1$;

(10) $x^o \leq (x^{'})^o$, onde $x^o = (x \wedge x^{'})$;

(11) $x \vee x^{'} = 1$;

(12) $(x^{'})^{'} \leq x$;

(13) $a^o \leq (b \supset a^{'}) \supset b^{'})$;

(14) $(x^o \wedge (x^o)^{'}) = 0$;

O próximo teorema mostra que a lógica que satisfaz às propridades das álgebras paraconsistentes (álgebra de da Costa) é a lógica **Cil**, uma extensão conservativa da lógica **bC**.

Proposição 4.1.2. *A Álgebra de da Costa* $\mathscr{U} = \langle U,\ 0,\ 1,\ \leq,\ \wedge,\ \vee,\ \supset,\ ' \rangle$ *é a contrapartida algébrica de* **Cil** *considerando a estrutura:*
$\boldsymbol{Cil} = \langle For,\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{1},\ \leq_{\mathbf{Cil}},\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \neg \rangle$ *e definindo:* $a \leq_{\mathbf{Cil}} b$ *sse* $a \vdash_{\mathbf{Cil}} b$, $\boldsymbol{0} = \circ p_0 \wedge p_0 \wedge \neg p_0$ *e* $\boldsymbol{1} = (p_0 \vee \neg p_0)$.

Demonstração. Vejamos:

(a) $(a \wedge b) \leq_{\mathbf{Cil}} a$;
É imediato do axioma Cil 4.

(b) $(a \wedge b) \leq_{\mathbf{Cil}} b$;
É imediato do axioma Cil 5.

(c) Se $c \leq_{\mathbf{Cil}} a$ e $c \leq_{\mathbf{Cil}} b$, então $c \leq_{\mathbf{Cil}} a \wedge b$;
É direto do axioma Cil 3.

(d) $a \wedge a = a$;
Basta mostrar que $a \wedge a \leq_{\mathbf{Cil}} a$ e $a \leq_{\mathbf{Cil}} a \wedge a$, ou seja, $a \wedge a \dashv\vdash_{\mathbf{Cil}} a$.

($\Longrightarrow$) Direto do axioma Cil 4.

($\Longleftarrow$)

1.	a	[Hip]
2.	$(a \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge a)))$	[Cil 3]
3.	$a \rightarrow (a \wedge a)$	[M.P em 1 e 2]
4.	$a \wedge a$	[M.P em 1 e 3]

(e) $a \vee a = a$;
Basta mostrar que $a \vee a \dashv\vdash_{\mathbf{Cil}} a$.

($\Longleftarrow$) Direto do axioma Cil 6.

($\Longrightarrow$)

1.	$(a \to a) \to ((a \to a) \to ((a \vee a) \to a))$	[Cil 8]
2.	$a \to a$	[Lm 1.2.2 (a)]
3.	$(a \to a) \to ((a \vee a) \to a))$	[M.P em 2 e 1]
4.	$(a \vee a) \to a$	[M.P em 2 e 3]
5.	$a \vee a \vdash_{\mathbf{Cil}} a$	[Teo. Ded em 4]

(f) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

Devemos mostrar que $a \wedge (b \vee c) \dashv\vdash_{\mathbf{Cil}} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

($\Longrightarrow$)

1.	$(a \to (b \to (a \wedge b))$	[Cil 3]
2.	$a, b \vdash_{\mathbf{Cil}} a \wedge b$	[Teo. Ded. em 1]
3.	$a, c \vdash_{\mathbf{Cil}} a \wedge c$	[Análogo em 2]
4.	$(a \wedge b) \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[Cil 6]
5.	$a, b \vdash_{\mathbf{Cil}} (a \wedge b) \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[Monot. em 4]
6.	$a, b \vdash_{\mathbf{Cil}} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[M.P em 1 e 5]
7.	$a, c \vdash_{\mathbf{Cil}} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[Análogo em 6]
8.	$a \vdash_{\mathbf{Cil}} b \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[Teo. Ded. em 6]
9.	$a \vdash_{\mathbf{Cil}} c \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	[Teo. Ded. em 7]
10.	$a \vdash_{\mathbf{Cil}} (b \vee c) \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$	[Cil 8 + M.P em 8 e 9]
11.	$a, (b \vee c) \vdash_{\mathbf{Cil}} ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$	[Teo. Ded. em 10]
12.	$(a \wedge (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$	[Teo. Ded. em 10]

($\Longleftarrow$)

1.	$(a \wedge b) \to a$	[Cil 4]
2.	$(a \wedge b) \to b$	[Cil 5]
3.	$b \to (b \vee c)$	[Cil 6]
4.	$(a \wedge b) \to (b \vee c)$	[Trans. em 2 e 3]
5.	$a \to ((b \vee c) \to (a \wedge (b \vee c)))$	[Cil 3]
6.	$(a \wedge b) \to ((b \vee c) \to (a \wedge (b \vee c)))$	[Trans. em 1 e 5]
7.	$((a \wedge b) \to (b \vee c)) \to [(a \wedge b) \to ((b \vee c)$ $\to (a \wedge (b \vee c))) \to ((a \wedge b) \to a \wedge (b \vee c))]$	[Cil 2]
8.	$(a \wedge b) \to ((b \vee c) \to (a \wedge (b \vee c)))$ $\to ((a \wedge b) \to a \wedge (b \vee c))$	[M.P em 4 e 7]
9.	$((a \wedge b) \to a \wedge (b \vee c))]$	[M.P em 6 e 8]
10.	$((a \wedge c) \to a \wedge (b \vee c))]$	[Análogo 1-9]
11.	$((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \to a \wedge (b \vee c))]$	[Cil 8 em 9 e 10]

(g) $a \leq_{\mathbf{Cil}} a \vee b$;

Direto do axioma Cil 6.

(h) $b \leq_{\mathbf{Cil}} a \vee b$;
Direto do axioma Cil 7.

(i) Se $a \leq_{\mathbf{Cil}} c$ e $b \leq_{\mathbf{Cil}} c$, então $a \vee b \leq_{\mathbf{Cil}} c$;
Direto do axioma Cil 8.

(j) $a \wedge (a \rightarrow b) \leq_{\mathbf{Cil}} b$;

1.	$a \wedge (a \rightarrow b)$	[Hip]
2.	$(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)$	[Cil 5 [b/$(a \rightarrow b)$]]
3.	$a \rightarrow b$	[M.P em 1 e 2]
4.	$a \wedge (a \rightarrow b) \rightarrow a$	[Cil 4]
5.	a	[MP em 1 e 4]
6.	b	[MP em 5 e 3]

(k) Se $a \wedge c \leq_{\mathbf{Cil}} b$, então $c \leq_{\mathbf{Cil}} a \rightarrow b$;

1.	$a, c \vdash_{\mathbf{Cil}} a \wedge c$	[Cil 3]
2.	$a \wedge c \vdash_{\mathbf{Cil}} b$	[Hip]
3.	$a, c \vdash_{\mathbf{Cil}} b$	[Trans em 1 e 2]
4.	$c \vdash_{\mathbf{Cil}} a \rightarrow b$	[Teo.Ded em 3]

(l) $\mathbf{0} \leq_{\mathbf{Cil}} a$;
Direto da definição de **0** e pelos axiomas Cil 4, Cil 13 e (MP).

(m) $a \leq_{\mathbf{Cil}} \mathbf{1}$;
Direto da definição de $\mathbf{1} = (x \vee \neg x)$ e do axioma Cil 10.

(n) $\circ x \leq_{\mathbf{Cil}} \circ(\neg x)$, onde $\circ x = \neg(x \wedge \neg x)$;
Direto do axioma Cil 11 e De Morgan.

(o) $x \vee \neg x = \mathbf{1}$, onde $a = b$ sse $a \leq_{\mathbf{Cil}} b$ e $b \leq_{\mathbf{Cil}} a$;
Sai do fato de **1** ser uma instância do axioma Cil 10.

(p) $\neg(\neg x) \leq_{\mathbf{Cil}} x$;
Direto do axioma Cil 11.

(q) $\circ a \leq_{\mathbf{Cil}} (b \rightarrow a) \rightarrow ((b \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg b)$;
Direto do axioma Cil 13.

(r) $\circ x \wedge \neg(\circ x) = \mathbf{0}$.

1.	$\circ x \wedge \neg(\circ x)$	[Hip]
2.	$(\circ x \wedge \neg(\circ x)) \to \neg(\circ x)$	[Cil 5]
3.	$\neg(\circ x)$	[M.P em 1 e 2]
4.	$\neg\neg(x \wedge \neg x)$	[$Def_{\circ x}$ em 3]
5.	$\neg\neg(x \wedge \neg x) \to (x \wedge \neg x)$	[Cil 11]
6.	$(x \wedge \neg x)$	[M.P em 4 e 5]
7.	$\mathbf{0}$	[$Def_{\mathbf{0}}$ em 6]

□

Uma questão que surge é se as álgebras de da Costa formam uma semântica algébrica (não equivalente) para a lógica **Cil**, pois sabemos que não se trata de uma semântica algébrica equivalente, dado que todo subsistema de C_1 não é finitamente algebrizável (ver Corolário 2.4.5).

4.2 Semânticas algébricas de traduções possíveis

As semânticas *algébricas de traduções possíveis* (SATP's), também chamadas de *algebrização à distância*, constituem uma nova maneira de se pensar a algebrização, baseada na idéia das semânticas de traduções possíveis. Chamamos as SATP's de algebrização à distância, pelo fato de que esta usa as traduções como mediadoras para a algebrização. Como dissemos anteriormente, nossa pretenção é estabelecer um resultado de algebrização para lógicas que não são algebrizáveis pelos métodos conhecidos considerados nos Capítulos 1 e 2.

As definições são classificadas ordenadamente visando, de maneira gradual, adequá-las aos exemplos obtidos para essa nova abordagem, e também para evitar que a definição seja trivializável. Há ainda muito o que investigar acerca desse novo objeto matemático, e a nossa pretenção, aqui, consiste apenas em expor as idéias por meio de exemplos concretos e convencer que essa proposta pode ser vista como uma algebrização. Mostramos que as características algébricas de uma lógica pode ser resgatada, em partes, por meio das traduções.

Um ponto que ainda precisa ser investigado a respeito dessa nova proposta, é a respeito das propriedades algébricas que são refletidas para a lógica, por meio das traduções. Na próxima seção iniciamos uma análise, por intermédio das categorias, visando investigar as potencialidades da definição, deixando para o futuro aprofundamentos nessa área.

Definição 4.2.1. Uma *estrutura algébrica ampla de traduções possíveis* para um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é uma tripla $\mathbf{PA} = \langle \{(Trad_{\mathcal{S}})_t\}_{t\in T}, \{\mathcal{K}_t\}_{t\in T}, T\rangle$

tal que:
(i) $\mathbf{TP} = \langle\{(Trad_{\mathcal{S}})_t\}_{t\in T}, T\rangle$ é uma estrutura de traduções possíveis para $\mathcal{S}$;
(ii) Para cada $t \in T$, $\mathcal{K}_t$ é uma semântica algébrica equivalente[1] para $Trad_{\mathcal{S}}$.

Definição 4.2.2. Uma *estrutura algébrica estrita de traduções possíveis* para um sistema dedutivo $\mathcal{S}$ é uma tripla $\mathbf{PA} = \langle Trad_{\mathcal{S}}, \mathcal{K}, T\rangle$, tal que:
(i) $\mathbf{TP} = \langle Trad_{\mathcal{S}}, T\rangle$, é uma estrutura de traduções possíveis para $\mathcal{S}$;
(ii) $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica equivalente[2] para $Trad_{\mathcal{S}}$.

A definição de semântica de traduções possíveis, *a priori*, permite que qualquer lógica tenha uma tal semântica por essa via. Poderíamos pensar que as semânticas algébricas de traduções possíveis são triviais, no sentido que toda lógica, *a priori*, pode ser associada a um traducto finitamente algebrizável, pois não existe um resultado de unicidade com relação às semânticas de traduções possíveis. Com isso, nada nos garante que não existe um outro conjunto de traduções em um outro traducto algebrizável. Por enquanto essa é uma questão em aberto, embora temos a crença de que isso não seja o caso. Uma evidência a nosso favor está no artigo [BR03], em que Blok e Rebagliato mostram quais são as condições necessárias para que um sistema tenha uma semântica algébrica. Nesse artigo, eles mostram exemplos de lógicas que não possuem semânticas algébricas, logo não terão semântica algébrica equivalente, e portanto não serão finitamente algebrizáveis. Sendo tais lógicas tão débeis, tais lógicas poderiam também ser desprovidas de uma semântica de traduções possíveis, mas são questões a serem analisadas. Com o intuito de dificultar a possibilidade de trivialização, modificamos a Definição 4.2.1, uma vez que a Definição 4.2.2 é uma caso particular desta, da seguinte maneira:

Definição 4.2.3. Seja $\mathbf{PA} = \langle Trad_{\mathcal{S}}, \mathcal{K}, T\rangle$, uma semântica algébrica de traduções possíveis para $\mathcal{S}$, chamamos $\mathbf{PA}$ de *semântica algébrica n-valente de traduções possíveis* se os traductos $Trad_{\mathcal{S}}$ são lógicas n-valentes.

Como vimos no Capítulo 3, a lógica paraconsistente C_1 tem uma semântica de traduções possíveis em $Trad_{C_1}$, que é a lógica **LFI1**, que é mostrada equivalente a J_3.

É importante aqui notar (veja Fato 4.2.4) que as fórmulas de da lógica trivalente Ł$_3$, proposta por Łukasiewicz , podem ser definidas pelos conectivos $\vee^{J_3}$, ∇^{J_3} e $\neg^{J_3}$, isto é, os conectivos primitivos de Ł$_3$ são definidos

[1] Cada traducto $Trad_{\mathcal{S}}$ é Blok-Pigozzi algebrizável.
[2] O traducto $Trad_{\mathcal{S}}$ é Blok-Pigozzi algebrizável.

por meio dos conectivos de J_3. O resultado inverso também acontece (veja Fato 4.2.5), isto é, os conectivos de J_3 são definidos através dos de Ł$_3$. Contudo J_3 e Ł$_3$ não são as mesmas lógicas, pois Ł$_3$ tem um único valor distinguido, a saber, $\{1\}$, enquanto que J_3 tem dois valores distinguidos, isto é, $\{1, 1/2\}$. Pelo fato de terem diferentes conjuntos de valores distinguidos, não validam os mesmos teoremas. Para um contra-exemplo, veja Fato 4.2.6.

Apesar de não serem a mesma lógica, J_3 e Ł$_3$ têm uma conexão algébrica bastante surpreendente; ambas são algebrizáveis pela mesma quase-variedade algébrica, a saber, pela variedade das MV-álgebras trivalentes de Moisil, confira Corolário 4.2.10. Para tanto, vejamos as suas tabelas.

As matrizes de J_3:

$\vee^{J_3}$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

	∇^{J_3}
1	1
$1/2$	1
0	0

	$\neg^{J_3}$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

As matrizes de Ł$_3$:

$\vee^{Ł_3}$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

$\wedge^{Ł_3}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	0	0

$\rightarrow^{Ł_3}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

	$\neg^{Ł_3}$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

Como a negação $\neg^{L}$ de Ł$_3$ é a mesma de $\neg^{J_3}$ de J_3, podemos então definir os conectivos básicos de J_3 em Ł$_3$ e vice-versa, conforme os fatos abaixo:

Fato 4.2.4. *Os conectivos de Ł$_3$ são definidos, em J_3, da seguinte maneira:*
(i) $A \rightarrow^{Ł_3} B \stackrel{def}{=} ((\nabla^{J_3}(\neg^{J_3}A)) \vee^{J_3} B) \wedge^{J_3} ((\nabla^{J_3}B) \vee^{J_3} (\neg^{J_3}A))$.

Fato 4.2.5. *Os conectivos de J_3 são definidos, em Ł$_3$, da seguinte maneira:*
(i) $A \vee^{J_3} B \stackrel{def}{=} (A \rightarrow^{Ł_3} B) \rightarrow^{Ł_3} B$;
(ii) $\nabla^{J_3} A \stackrel{def}{=} (\neg^{Ł_3} A) \rightarrow^{Ł_3} A$.

Como os valores distinguidos de J_3 e Ł$_3$ não são os mesmos, isto é, $1/2$ é valor distinguido somente em J_3, então é fácil verificar o seguinte resultado abaixo.

Fato 4.2.6. $\vdash_{J_3} (\neg p \to p) \to p$ *e* $\nvdash_{L_3} (\neg p \to p) \to p$.

A possibilidade de definir os conectivos de uma lógica na outra e vice e versa, como é o caso de Ł$_3$ e J_3, permite que tais lógicas possam ser escritas sobre a mesma linguagem, mesmo sendo, historicamente, definidas em linguagens distintas como mostramos acima[3].

Definição 4.2.7. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sistemas dedutivos sobre a mesma linguagem $\mathcal{L}$, e $\tau : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ e $\rho : \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_1$ traduções conservativas. Dizemos que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são *fortemente inter-tradutíveis*[4] se:
(i) $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{S}_1} \rho(\tau(\varphi))$, para φ fórmula de $\mathcal{S}_1$;
(ii) $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{S}_2} \tau(\rho(\varphi))$, para φ fórmula de $\mathcal{S}_2$.

Lema 4.2.8. *Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sistemas dedutivos fortemente inter-tradutíveis. Se $\mathcal{S}_1$ é finitamente algebrizável, então $\mathcal{S}_2$ é finitamente algebrizável na mesma quase-variedade algébrica de $\mathcal{S}_1$*

Demonstração. Conferir em [BP] p. 51, exemplo 4.3.1. □

Teorema 4.2.9. *As lógicas J_3 e Ł$_3$ são fortemente inter-tradutíveis*

Demonstração. Considere as seguintes traduções:
$\tau(\alpha) = \Diamond\alpha$ de J_3 em Ł$_3$, em que $\Diamond(\alpha) = \neg^{L_3}\alpha \to^{L_3} \neg^{L_3}\alpha$, e
$\rho(\alpha) = \Box(\alpha)$ de Ł$_3$ em J_3, em que $\Box(\alpha) = \neg^{L_3}\Diamond\neg^{L_3}\alpha$.
As tabelas de $\Diamond$ e $\Box$ são as seguintes:

	$\Diamond$
1	1
½	1
0	0

	$\Box$
1	1
½	0
0	0

Vejamos que $\tau : J_3 \longrightarrow$ Ł$_3$ e $\rho :$ Ł$_3 \longrightarrow J_3$ são traduções conservativas, isto é:

(i) $\Gamma \models_{J_3} \alpha$ sse $\Diamond\Gamma \models_{L_3} \Diamond\alpha$, em que $\Diamond\Gamma = \{\Diamond\gamma : \gamma \in \Gamma\}$;

[3] Quando Blok e Pigozzi afirmam que as tabelas de $\to^{L}$

(ii) $\Gamma \models_{L_3} \alpha$ sse $\Box\Gamma \models_{J_3} \Box\alpha$, em que $\Box\Gamma = \{\Box\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Para verificar (i), basta notar que $v(\alpha) \in \{1, 1/2\}$ sse $v(\Diamond\alpha) \in \{1\}$, isto é, a tradução τ transforma valores distinguidos de J_3 no único valor distinguido de Ł$_3$, e a verificação de (ii) é análoga. Com o mesmo tipo de raciocínio é fácil verificar que: $\alpha \dashv\vdash_{L_3} \Diamond\Box\alpha$, e $\alpha \dashv\vdash_{J_3} \Box\Diamond\alpha$ (note que estamos fazendo uso dos teoremas de correção e completude), ou seja:
$\alpha \dashv\vdash_{L_3} \tau(\rho(\alpha))$, para α fórmula de Ł$_3$.
$\alpha \dashv\vdash_{J_3} \rho(\tau(\alpha))$, para α fórmula de J_3;
Portanto, com base na Definição 4.2.7, J_3 e Ł$_3$ são fortemente inter-tradutíveis.

□

Corolário 4.2.10. *As lógicas J_3 e Ł$_3$ são álgebrizáveis pela mesma quase-variedade algébrica, a saber, as MV-álgebras trivalentes de Moisil* [5].

Demonstração. É conhecido que a lógica trivalente Ł$_3$ é algebrizável pela variedade das MV-álgebras trivalentes de Moisil, daí a partir do Teorema 4.2.9 e Lema 4.2.8 o resultado segue. □

Um resultado análogo ao Corolário 4.2.10 pode ser obtido entre a lógica trivalente paraconsistente P^1 e a lógica trivalente paracompleta I^1. Esse resultado era de certa forma esperado, uma vez que essas lógicas são topologicamente as mesmas, no sentido de serem duais e preservarem os mesmos teoremas suficientes para a algebrização.

Embora essas lógicas sejam ideologicamente distintas, isto é, uma seja paraconsistente e a outra intuicionista, a diferença entre elas é muito sutil, pois mesmo sendo o conjunto de valores distinguidos destas diferentes (conferir Capítulo 2), se escrevermos P^1 e I^1 numa mesma linguagem (o que é possível pelos Fatos 4.2.11 e 4.2.12 a seguir) e considerarmos que as tabelas complexas absorvem o valor intermediário $1/2$, então toda fórmula complexa *nesta linguagem* que é teorema de P^1 é também teorema de I^1 e vice-versa, daí a única diferença, entre tais lógicas, é a nível das deduções,

[5] Em [BP], os autores se referem erroneamente às MV-álgebras trivalentes como "álgebras de Wajsberg". O nome "álgebras de Wajsberg" é reservado somente para o caso infinito valentes. Para o caso finito essas álgebras são comumente chamadas de MV$_n$-álgebras de Łukasiewicz.

As MV-álgebras 3 e 4 valentes foram estudas por Moisil, e os demais casos por R. Cignoli. Em [Fei97], H. Feitosa batiza as MV-álgebras n-valentes, para $n \geq 5$, de Cignoli álgebras. Seguindo esta motivação, chamamos o caso trivalente de MV-álgebras trivalentes de Moisil.

veja Lema 4.2.13. Isso ajuda a entender o fato de a algebrização de P^1 e I^1 (conforme argumentamos abaixo) serem as mesmas.

Considere os seguintes fatos:

Fato 4.2.11. *Os conectivos de I^1 são definidos, em P^1, da seguinte maneira:*
(i) $\neg^{I^1}\alpha \stackrel{def}{=} \neg^{P^1}(\neg^{P^1}\alpha \to^{P^1} \alpha)$;
(ii) $(\alpha \to^{I^1} \beta) \stackrel{def}{=} (\neg^{P^1}\neg^{P^1}\alpha \to^{P^1} \neg^{P^1}\neg^{P^1}\beta)$.

Fato 4.2.12. *Os conectivos de P^1 são definidos, em I^1, da seguinte maneira:*
(i) $\neg^{P^1}\alpha \stackrel{def}{=} (\alpha \to^{I^1} \neg^{I^1}\alpha)$;
(ii) $(\alpha \to^{P^1} \beta) \stackrel{def}{=} (\neg^{I^1}\neg^{I^1}\alpha \to^{I^1} \neg^{I^1}\neg^{I^1}\beta)$.

Lema 4.2.13. *P^1 e I^1 não têm as mesmas deduções quando escrito sob uma mesma linguagem.*

Demonstração. Considere P^1 e I^1 escritos na linguagem de P^1 e tome as fórmulas atômicas p_1 e p_2. Como p_1 e $\neg^{P^1}p_1$ estão disponíveis dentro de I^1, podemos escrever $p_1, \neg^{P^1}p_1 \nvdash_{P^1} p_2$, pois tomando $v(p_1) = 1/2$, $v(\neg^{P^1}p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$ tem-se que p_1 e $\neg^{P^1}p_1$ são satisfeitas, mas p_2 não é satisfeita, já que 1 e $1/2$ são distinguidos em P^1. Agora $p_1, \neg^{P^1}p_1 \vdash_{I^1} p_2$, pois p_1 e $\neg^{P^1}p_1$ nunca são satisfeitas em I^1, já que 1 é o único valor distinguido de I^1. Portanto, pelo menos a nível atômico, P^1 e I^1 não têm as mesmas deduções, quando escritos sob uma mesma linguagem. $\square$

Teorema 4.2.14. *As lógicas P^1 e I^1 são fortemente inter-tradutíveis*

Demonstração. Partindo dos Fatos 4.2.11 e 4.2.12, acima, notamos que é possível escrever ambas as lógicas dentro da mesma assinatura. Fixemos agora a assinatura $\Sigma = \{\neg^{I^1}, \to^{I^1}\}$. Considere as seguintes traduções:

1. $\tau : P^1 \longrightarrow I^1$
   $\tau(\alpha) = \Diamond\alpha$, em que $\Diamond\alpha = \neg^{I^1}\neg^{I^1}\alpha$

2. $\rho : I^1 \longrightarrow P^1$
   $\rho(\alpha) = \Box\alpha$, em que $\Box\alpha = (\alpha \to^{I^1} \neg^{I^1}\alpha) \to^{I^1} \neg^{I^1}(\alpha \to^{I^1} \neg^{I^1}\alpha)$

Observe que as tabelas de $\Diamond$ e $\Box$ são idênticas as do Teorema 4.2.9 e com isso temos que a demostração de que τ e ρ são traduções conservativas de P^1 em I^1 e vice-versa é idêntica. Isso mostra, portanto, com base na

Definição 4.2.7, que P^1 e I^1 são fortemente inter-tradutíveis, isto é:

(i) $\Gamma \models_{P^1} \alpha$ sse $\Diamond\Gamma \models_{I^1} \Diamond\alpha$, em que $\Diamond\Gamma = \{\Diamond\gamma : \gamma \in \Gamma\}$;
(ii) $\Gamma \models_{I^1} \alpha$ sse $\Box\Gamma \models_{P^1} \Box\alpha$, em que $\Box\Gamma = \{\Box\gamma : \gamma \in \Gamma\}$;
(iii) $\alpha \dashv\vdash_{I^1} \tau(\rho(\alpha))$, para α fórmula de I^1;
(iv) $\alpha \dashv\vdash_{P^1} \rho(\tau(\alpha))$, para α fórmula de P^1. □

Este resultado nos permite concluir, com base no Lema 4.2.8, que P^1 e I^1 são algebrizáveis na mesma quase-variedade algébrica, e esse mesmo resultado pode ser estendido para toda a hierarquia P^n e I^n como mostrado em [Bue].

Poderíamos pensar que a única quase-variedade capaz de algebrizar P^1 e I^1 fosse a mesma de J_3 e Ł$_3$, mas isso não é o caso, pois não é possível definir nem os conectivos de P^1 e nem os de I^1 em J_3 ou Ł$_3$, já que os conectivos de J_3 e Ł$_3$ não absorvem o valor $1/2$, e portanto não podemos expressar os conectivos de todas essas lógicas numa mesma linguagem. Isso mostra que a noção de expressabilidade da lógica reflete diretamente na algebrização, mais ainda, na determinação da quase-variedade algébrica.

Teorema 4.2.15. *Seja $\mathcal{S}$ uma lógica correta e completa em relação a $Trad_{\mathcal{S}}$. Se $Trad_{\mathcal{S}}$ é finitamente algebrizável, então a lógica $\mathcal{S}$ tem uma Semântica Algébrica de Traduções Possíveis.*

Demonstração. É imediato da definição de semântica algébrica de traduções possíveis. □

Teorema 4.2.16. *A variedade das MV-álgebras trivalentes de Moisil é uma semântica algébrica de traduções possíveis 3-valente para C_1 .*

Demonstração. Sabe-se que a lógica trivalente **LFI1** é um traducto para a lógica C_1, conferir Capítulo 3, mais ainda, sabemos que **LFI1** e J_3 são equivalentes, no sentido que ambas têm as mesmas deduções. Dado que J_3 e Ł$_3$ são ambas algebrizáveis na mesma variedade algébrica conforme Corolário 4.2.10, então pelo Teorema 4.2.15 e pela Definição 4.2.3 C_1 é algebrizável à distância pela variedade das MV-álgebras trivalentes de Moisil, isto é, é algebrizável a menos de traduções. □

Teorema 4.2.17. *As lógicas* **mCi**, **Ci**, **bC**, **bCe** *e* **Cie** *têm uma Semântica Algébrica de Traduções Possíveis.*

Demonstração. Dado que todas essas lógicas são corretas e completas com relação aos seus respectivos traductos, como visto no Capítulo 3, e também que esses traductos são algebrizáveis pelo mesmo conjuto de algebrizadores conforme mostra o Teorema 3.4.3, daí pela Definição 4.2.3 concluímos que todas essas lógicas têm uma semântica algébrica de traduções possíveis. □

O argumento acima mostra que as lógicas paraconsistentes C_n e alguns de seus sub-sistemas, podem ser algebrizados por meio de um conceito estendido de algebrizabilidade definido aqui, as semânticas algébricas de traduções possíveis. Esta nova noção de algebrizabilidade generaliza a noção de Blok-Pigozzi: de fato, considerando o sistema dedutivo $\mathcal{S}$, para a qual $\mathcal{K}$ é uma semântica algébrica para $\mathcal{S}$ na acepção de Blok-Pigozzi, esta coincide com uma semântica algébrica de traduções possíveis $\mathbf{PA} = \langle \{L\}, \{K\}, T \rangle$, em que T é um conjunto unitário contendo somente a tradução identidade.

4.3 Uma visão categorial das SATP's

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e propriedades básicas a respeito da teoria das categorias de tal forma a apresentar uma abordagem matemática abstrata, que a nosso ver pode ser também relevante para ajudar a compor uma interpretação filosófica das semânticas algébricas de traduções possíveis.

O interesse em se estudar um assunto sob o ponto de vista categorial tem a ver com o fato de que muitas definições, conceitos e argumentos formais são análogos e mesmo repetitivos. A noção de categoria sintetiza tudo isso de forma a ressaltar apenas os elementos básicos comuns a tais noções. Dessa forma, quando conseguimos uma abordagem categorial de um conceito, ganhamos muito em generalidade a custa de introduzir tecnicalidades que podem parecer complicadas, mas que no final podem resultar em conclusões surpreendentes. Estas idéias são usadas aqui, onde mostramos que toda lógica $\mathcal{L}$ que puder ser caracterizada por uma semântica de traduções possíveis é de uma certa forma equivalente ao produto $\mathcal{L}'$ de uma família de lógicas numa categoria **RC** de sistemas lógicos definidos através de relações de conseqüência. Isto confirma a intuição de que a semântica de traduções possíveis é uma importante ferramenta para desintegrar[6] ou decompor uma lógica em termos de uma família de lógicas mais simples ou elementares.

Nesta Seção construímos diversas categorias de lógicas proposicionais, baseadas na categoria das assinaturas proposicionais, e mostramos que uma subcategoria dessas lógicas, formada pelas lógicas finitamente algebrizáveis, preserva a algebrizabilidade, isto é, tal categoria admite produto e tal produto é finitamente algebrizável se seus componentes o forem. Esse resultado

[6] *Desintegrar* é a melhor tradução para o termo *splitting* introduzido em [CC02].

é de grande relevância para o trabalho, pois provê, como explicamos, um significado matemático profundo para as SATP's.

Finalizamos com uma breve discussão sobre possíveis generalizações dessas idéias que levam a novas interpretações para as SATP's e sugestões para trabalhos futuros, listando alguns problemas em aberto.

4.3.1 As categorias e sua relevância para a formalização da lógica

O conceito de *categoria* permite formular uma teoria matemática geral que é capaz de relacionar diferentes tipos de estruturas matemáticas; um de seus principais objetivos é extrair propriedades universais de famílias de estruturas similares. A inauguração da teoria das categorias deu-se com a publicação do artigo "General Theory of Natural Equivalences" de Samuel Eilemberg e Saunders Mac Lane (cf. [EL45]) embora três anos antes os mesmos autores já tivessem publicado um outro artigo dentro deste mesmo tema, a saber, "Group Extension and Homology" (cf. [EL42]).

A fim de esclarecer as noções centrais em categoria, como por exemplo a de transformação natural, os fundadores tomaram por empréstimo o conceito de "funtor" de Rudolf Carnap; para definir este último, foi necessário definir o conceito de categoria sendo a própria noção de categoria tomada por empréstimo de Immanuel Kant e Aristóteles. A partir daí esta teoria vem sendo explorada com amplo sucesso nos fundamentos da matemática, da computação e até da física teórica. Contudo se bem que conceitos categorias possam ser usados por filósofos em problemas lógicos e filosóficos, parece que esta tarefa está ainda completamente imatura, e falta ainda aos filósofos a tarefa de clarificar os conceitos filosóficos e explicar como e porque a teoria das categorias pode substituir a teoria dos conjuntos como fundamento das ciências formais, em particular da matemática. Para mais sobre este ponto, inclusive com informações históricas e conceituais ver [Mar04] e [Mar95].

Em termos formais, uma *categoria* ξ pode ser descrita, em linhas gerais, como uma coleção ξ_{Obj}, chamada de ξ-*objetos*, que satisfaz às seguintes condições:

- para todo $a, b \in \xi_{Obj}$, existe uma coleção $\xi_{Mor(a,b)} = \{f : a \longrightarrow b\}$, chamadas de ξ-*morfismos* ou *flechas* de a em b;

- para toda tripla $a, b, c \in \xi_{Obj}$, existe uma operação parcial $\circ$ que associa pares de morfismos a morfismos tal que $\circ : \xi_{Mor(a,b)} \times \xi_{Mor(b,c)} \longrightarrow \xi_{Mor(a,c)}$, chamada de *composição* de morfismos, em que $\circ(f, g) = g \circ f$, para $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ e $g \circ f : a \longrightarrow c$;

- Para todo $a \in \xi_{Obj}$, existe um morfismo $id_a \in \xi_{Mor(a,a)}$, chamado de *identidade* em a;
- os morfismos devem satisfazer aos seguintes axiomas:
  1. se $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ e $h : c \longrightarrow d$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & c \arrow[r, "h"'] & d \end{tikzcd}$$

  2. se $f : a \longrightarrow b$, então $(id_b \circ f) = f$ e $(g \circ id_b) = g$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_b \circ f"'] & b \arrow[r, "id_b"] \arrow[rr, bend left, "g \circ id_b"] & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

Observação 4.3.1. Note que entre dois objetos pode existir mais de uma flecha como também pode não existir qualquer flecha.

O que é supreendente é que quase todas as estruturas formalizadas em matemática podem ser vistas como categorias, conforme a definição acima. Ilustramos com alguns exemplos:

(i) A categoria **Set**, formada pelos conjuntos, tem como **Set**-objetos todos os conjuntos e como **Set**-morfismos todas as funções entre os conjuntos;

(ii) A categoria **Top** dos espaços topológicos tem como **Top**-objetos todos os espaços topológicos e como **Top**-morfismos todos as funções contínuas entre os espaços topológicos;

(iii) A categoria **Grp** dos grupos tem como **Grp**-objetos todos os grupos e como **Grp**-morfismos todos os homomorfismos entre grupos.

Uma categoria é caracterizada por seus morfismos (ou flechas) e não por seus objetos; de fato, considere o exemplo da categoria dos espaços topológicos tomando como morfismos as funções descontínuas; pode-se mostrar que essa nova categoria não preserva estruturas topológicas, diferente do que ocorre com a categoria **Top**. Mais ainda, a composição de duas funções decontínuas poderia não ser descontínua.

De modo geral, podemos dizer que a noção de categoria é uma generalização de dois conceitos matemáticos, o de monóide e o de pré-ordem juntos. Quase qualquer estrutura generalizada tem por trás tais conceitos, e esse fato é salientado na teoria das categorias; com isso é possível extrair propriedades universais das categorias. Desse modo, a teoria deixa de ter um caráter estático e isso permite uma abordagem do caráter dinâmico que existe por trás das estruturas matemáticas.

Os conceitos gerais de independência e unicidade são fundamentais no pensamento formal. Exemplos desse tipo de abstração em matemática são "unicidade de soluções", "soluções a menos de isomorfismos", "a independência do representante", "univocidade", etc.. Na teoria das categorias existe um procedimento fundamental, que ocorre freqüentemente nas demonstrações, que é o conceito de "diagrama comuta". Este procedimento generaliza, ao mesmo tempo, todas as questões de unicidade e independência sugeridas acima, entre outras. Ao mesmo tempo, este princípio ocorre no âmbito das chamadas construções universais, que permitem, agora, definir novos e importantes conceitos lógicos, matemáticos e computacionais de uma forma abstrata e criativa. Para mais detalhes sobre este tema recomendamos o livro de Peter Freyd e Andrej Šcedrov em [FS90].

No presente trabalho, por exemplo, quando falamos de algebrização finitária no Capítulo 2, a noção de algebrizabilidade garante a existência de uma única quase-variedade algébrica, o que constitui uma propriedade universal na algebrização e que pode portanto ser representada em termos de categorias. As semânticas de traduções possíveis têm a propriedade de que as traduções preservam a derivabilidade, uma outra construção universal. Juntando-se tais propriedades é possível extrair outras propriedades universais, gerando a nova noção de algebrizabilidade que é a proposta desta dissertação. Visto dessa foma, o objetivo desta seção é mostrar, através das liguagem das categorias, quais são as propriedades universais que são preservadas dentro deste novo objeto matemático que aqui criamos.

Definição 4.3.2. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos $\mathcal{C}$ é *sub-categoria* de $\mathcal{D}$, e denotamos por $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, quando:
(a) $\mathcal{C}_{Obj} \subseteq \mathcal{D}_{Obj}$;
(b) Se $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_{Obj}$, então $\mathcal{C}_{Mor(c_1,c_2)} \subseteq \mathcal{D}_{Mor(c_1,c_2)}$;
(c) Se f, g são $\mathcal{C}$-morfismos, então $f \circ^{\mathcal{C}} g = f \circ^{\mathcal{D}} g$, em que $\circ^{\mathcal{C}}$ e $\circ^{\mathcal{D}}$ denotam composições em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente;
(d) Se $a \in \mathcal{C}_{Obj}$, então $id_a^{\mathcal{C}} = id_a^{\mathcal{D}}$, em que $id_a^{\mathcal{C}}$ e $id_a^{\mathcal{D}}$ denotam os morfismos identidade em a nas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente.

Definição 4.3.3. Uma flecha $f : a \longrightarrow b$ em uma categoria é *mônica* se para qualquer par de flechas paralelas $g, h : c \rightrightarrows a$, a igualdade $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$.

Notação: $f : a \rightarrowtail b$

Definição 4.3.4. Um objeto $\mathbb{1}$ é *terminal* em uma categoria ξ, se para todo ξ-objeto a, existe uma única flecha $!_a : a \longrightarrow \mathbb{1}$ em ξ.

Definição 4.3.5. Um *diagrama* D em uma categoria ξ é uma coleção de ξ-objetos $d_i, d_j, \ldots$ junto com uma coleção de ξ-flechas $g : d_i \longrightarrow d_j$ entre certos ξ-objetos.

Vamos definir a noção de produto finito apenas para privilegiar a intuição e logo em seguida apresentamos a definição geral de produto arbitrário da qual esta é apenas um caso particular.

Definição 4.3.6. Um *produto* de dois objetos a e b em uma categoria ξ, é um ξ-objeto $a \times b$ junto com o par de ξ-flechas $(\pi_a : a \times b \to a, \pi_b : a \times b \to b)$ tal que para qualquer par de ξ-flechas da forma $(f : c \longrightarrow a, g : c \longrightarrow b)$ existe exatamente uma ξ-flecha $\langle f, g\rangle : c \longrightarrow a \times b$, fazendo comutar o diagrama, isto é: $\pi_a \circ \langle f, g\rangle = f$ e $\pi_b \circ \langle f, g\rangle = g$

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\pi_a"'] \arrow[r, "\pi_b"] & b \end{tikzcd}$$

É claro que a definição de produto de dois objetos na categoria ξ, dada acima, é facilmente generalizável para famílias finitas de ξ-objetos. Contudo, para famílias arbitrárias (infinitas e de qualquer cardinalidade) é conveniente dar uma definição geral.

Definição 4.3.7. Um *produto* na categoria ξ de uma família arbitrária $(a_i)_{i\in I}$ de ξ-objetos é um ξ-objeto a' junto com a familia de ξ-morfismos $(f_i : a' \longrightarrow a_i)_{i\in I}$ tal que se b é um ξ-objeto e $(g_i : b \longrightarrow a_i)_{i\in I}$ é uma família de ξ-morfismos, então existe um único morfismo $h : b \longrightarrow a'$ tal que $g_i = f_i \circ h$.

Estes são todos os elementos de teoria das categorias que usaremos nesta seção. Contudo, para que o leitor possa ter uma idéia do que pode ser feito no âmbito da abordagem categorial seguimos com algumas poucas definições que rapidamente permitem chegar a resultados extremamente profundos tanto no que diz respeito à formalização da noção de sistemas dedutivos, como em relação aos fundamentos da matemática; tal é por exemplo o conceito de *topos* que generaliza a noção de conjuntos. Abandonando a noção elementar de pertinência em favor da noção de morfismos (como transformações entre conjuntos vistos como objetos). Embora não daremos qualquer detalhe a respeito (para tanto, convidamos a consultar o livro de Robert Goldblatt, em [Gol84]) notamos a curiosa relação existente entre os topoi (plural pedante de topos) e as álgebras de Heyting (que algebrizam a lógica intuicionista): a lógica que governa os topoi é precisamente a lógica intuicionista, da mesma forma que a lógica que governa os conjuntos é a lógica clássica. Isso mostra que a abordagem categorial pode ser extremamente reveladora.

Definição 4.3.8. Uma ξ-flecha $i : e \longrightarrow a$ em ξ é um *equalizador* de um par de ξ-flechas $f, g : a \longrightarrow b$ se:

(i) $f \circ i = g \circ i$ e

(ii) Se $h : c \longrightarrow a$ tem $f \circ h = g \circ h$ em ξ, então existe uma única ξ-flecha $k : c \longrightarrow e$ tal que $i \circ k = h$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, dotted, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ e \arrow[r, "i"'] & a \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Definição 4.3.9. Um *cone* para o diagrama D consiste de um ξ-objeto c junto com uma ξ-flecha $f_i : c \longrightarrow d_i$ par cada objeto d_i em D, tal que para cada flecha $g : d_i \longrightarrow d_j$ em D, temos que $g \circ f_i = f_j$.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ d_i \arrow[rr, "g"'] & & d_j \end{tikzcd}$$

Notação $\{f_i : c \longrightarrow d_i\}$ denota um cone para D.

Definição 4.3.10. Um *limite* para um diagrama D é um D-cone $\{f_i : c \longrightarrow d_i\}$ com a propriedade que para qualquer outro D-cone $\{f'_i : c' \longrightarrow d_i\}$, existe uma única flecha $h : c' \longrightarrow c$ tal que para todo objeto d_i em D, temos que: $f_i \circ h = f'_i$

$$\begin{tikzcd} & d_i & \\ c' \arrow[ur, "f'_i"] \arrow[rr, dotted, "h"'] & & c \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

Observação 4.3.11. As definições de produto, produto arbitrário, objeto terminal, equalizador e outros são exemplos de construções que desfrutam de *propriedade universal*, no sentido de que são construções definidas por uma propriedade abstrata que requer a existência de morfismos únicos sob certas condições. No caso, a Definição 4.3.7 de produto arbitrário é um caso particular de limite de um diagrama sem flechas. Quando o limite existe ele é único, a menos de isomorfismos, graças à propriedade universal.

Definição 4.3.12. Um *pullback* de um par de ξ-flechas $f : a \longrightarrow c$ e $g : b \longrightarrow c$ é um par de ξ-flechas $g' : d \longrightarrow a$ e $f' : d \longrightarrow b$ tal que:

(i) $f \circ g' = g \circ f'$, e

(ii) Se $h : e \longrightarrow a$ e $j : e \longrightarrow b$ são tais que $f \circ h = g \circ j$, então existe uma única ξ-flecha $k : e \dashrightarrow d$ tal que $h = g' \circ k$ e $j = f' \circ k$.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Definição 4.3.13. Uma categoria ξ tem *exponenciação* se:

(i) ela tem um produto para quaisquer dois objetos

(ii) para quaisquer ξ-objetos a e b existe um objeto b^a e uma flecha $ev : b^a \longrightarrow b$, chamada flecha avaliação, tal que para qualquer objeto c e flecha $g : c \times a \longrightarrow b$, existe uma única flecha $\widehat{g} : c \longrightarrow b^a$ fazendo o diagrama comutar, isto é, $ev \circ (\widehat{g} \times id_a) = g$

Definição 4.3.14. Um *sub-objeto* de um ξ-objeto d é uma classe de equivalência de flecha mônica $f : a \rightarrowtail d$ com co-domínio d.

Definição 4.3.15. Se ξ é uma categoria com um objeto terminal $\mathbb{1}$, então um *classificador de sub-objetos* para ξ é um ξ-objeto Ω junto com uma ξ-flecha $true : \mathbb{1} \longrightarrow \Omega$ tal que satisfaz o seguinte axioma:

Ω-axioma Para cada flecha mônica $f : a \rightarrowtail d$ existe uma única ξ-flecha $\chi_f : d \longrightarrow \Omega$, chamada flecha característica, tal que o quadrado é um pullback.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Definição 4.3.16. Um *topos* τ é uma categoria tal que:

1. τ tem objeto terminal
2. τ tem pullback
3. τ tem exponencição
4. τ tem classificador de sub-objetos.

Não é muito difícil se convencer de que a noção de topos se parece com a de conjuntos, porque tem as mesmas propriedades fundamentais. Estas propriedades, contudo, têm origem completamente diferentes, e chegamos então, em poucos passos, à definição de um novo objeto matemático que por si só pode ser considerado revolucionário. O conceito de topos só pôde ser revelado através da abordagem categorial.

4.3.2 As SATP's como um constructo universal

Nosso propósito agora é caracterizar categorialmente as semânticas de traduções possíveis, que como vimos, são adequadas para prover interpretação para muitas lógicas não clássicas como por exemplo para as lógicas paraconsistentes e as lógicas multivalentes. A partir daí podemos extrair as propriedades universais da nova noção de algebrizabilidade, as SATP's propostas na segunda seção deste capítulo, por meio de uma extensão da algebrização finitária (ver Capítulo 2). Como sabemos, tal noção é capaz de algebrizar as lógicas parconsistentes.

O resultado mais relevante desta seção é o Lema 4.3.39, que mostra a preservação da finitariedade, isto é, mostra que o produto de lógicas proposicionais finitamente algebrizáveis é finitamente algebrizável, sob certas condições. Para tanto, precisamos definir a categoria das assinaturas proposicionais, denotada por **AP**, a categoria das lógicas proposicionais, denotada por **RC** (definidas por meio de operadores de consequência) e mostrar que tais categorias são fechadas sob produtos arbitrários. Isto permitirá especificar uma outra categoria, das lógicas algebrizáveis, que é uma sub-categoria de **RC**, à qual denotamos por **RCA**.

Os resultados técnicos que vêm a seguir serão necessários para a obtenção dos resultados citados acima.

Definição 4.3.17. Uma *assinatura* é uma família enumerável $\Sigma = \{\Sigma_k\}_{k\in\omega}$, em que cada Σ_k é um conjunto (de conectivos de aridade k) tal que $\Sigma_k \cap \Sigma_n = \varnothing$ sempre que $k \neq n$. O domínio de Σ é o conjunto $|\Sigma| = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n$.

O conjunto dos conectivos 0-ários Σ_0 corresponde (de forma bastante intuitiva) ao conjunto das constantes proposicionais[7].

Consideramos fixado um conjunto enumerável $\mathcal{V} = \{p_k \ : \ k \in \omega, k \geq 1\}$ de variáveis proposicionais tal que $p_k \neq p_n$ se $k \neq n$.

Definição 4.3.18. A *linguagem proposicional gerada por* Σ *sobre* $\mathcal{V}$, denotada por $L(\Sigma)$, denotada por $L(\Sigma)$ é a álgebra do tipo Σ livremente gerada por $\mathcal{V}$. Elementos de $L(\Sigma)$ são chamados *fórmulas.* Para todo $n \geq 0$ seja,

$$L(\Sigma)[n] = \{\varphi \in L(\Sigma) : \ \varphi \text{ tem exatamente as variáveis } p_1, \ldots, p_n\}.$$

A notação $L(\Sigma)$ é livre de ambigüidades, uma vez que $\mathcal{V}$ está doravante fixado. Note que $L(\Sigma)[n]$ está definido tendo em conta *precisamente* as primeiras n variáveis $p_1, \ldots, p_n$, e não n variáveis quaisquer. A intenção aqui é normalizar a escritura das fórmulas.

$L(\Sigma)[0]$ corresponde às fórmulas sem variáveis, isto é, às constantes proposicionais (e portanto contém o conjunto Σ_0 dos conectivos 0-ários).

Escrevemos $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ para indicar que as variáveis proposicionais ocorrendo em φ estão entre $p_1, \ldots, p_n$.

A noção de *complexidade* $l(\varphi)$ de uma fórmula φ é definida de forma a evidenciar o número de construtores e de variáveis da fórmula, de maneira usual, estipulando-se que:

- $l(\varphi) = 1$, se $\varphi \in \mathcal{V} \cup \Sigma_0$;
- $l(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = 1 + l(\alpha_1) + l(\alpha_2) + \ldots + l(\alpha_n)$, se $c \in \Sigma_n$, para $n \geq 1$.

[7] No caso da lógica proposicionais clássica, por exemplo, $\top$ e $\bot$.

Definição 4.3.19. Seja Σ uma assinatura. Uma *substituição* em $L(\Sigma)$ é uma função $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma)$. Denotamos por $\widehat{\sigma}$ a única extensão de σ para um endomorfismo $\widehat{\sigma} : L(\Sigma) \longrightarrow L(\Sigma)$ tal que:

(a) $\widehat{\sigma}(p) = \sigma(p)$, se $p \in \mathcal{V}$;

(b) $\widehat{\sigma}(c) = c$, se $c \in \Sigma_0$;

(c) $\widehat{\sigma}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = c(\widehat{\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\alpha_n))$, se $c \in \Sigma_n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L(\Sigma)$.

Definição 4.3.20. Dada duas substituições $\sigma, \sigma' : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma)$, então o *produto* $\sigma'\sigma$ é a substituição $\widehat{\sigma'} \circ \sigma$.

Notação 4.3.21. Dado uma fórmula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ e uma substituição σ, tal que $\sigma(p_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, então denotaremos $\widehat{\sigma}(\varphi)$ por $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Considere o exemplo abaixo, que ilustra como ocorre a substituição da Notação 4.3.21.

Exemplo 4.3.22. Seja $\varphi = (p_1 \wedge p_2)$. Note que as variáveis que ocorrem em φ estão entre $p_1, \ldots, p_n$, isto é, $(p_1 \wedge p_2)(p_1, \ldots, p_n)$, e disso temos:

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\sigma}(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) & \overset{\text{Sub}}{=} & \widehat{\sigma}((p_1 \wedge p_2)(p_1, \ldots, p_n)) \\
& \overset{\text{def}}{=} & (p_1 \wedge p_2)([(p_1/\widehat{\sigma}(p_1)], \ldots, [p_n/\widehat{\sigma}(p_n)]) \\
& \overset{4.3.19}{=} & (p_1 \wedge p_2)([(p_1/\sigma(p_1)], \ldots, [p_n/\sigma(p_n)]) \\
& \overset{\text{hip}}{=} & (p_1 \wedge p_2)([(p_1/\alpha_1], \ldots, [p_n/\alpha_n]) \\
& \overset{\text{Sub}}{=} & (\alpha_1 \wedge \alpha_2)
\end{array}$$

Definição 4.3.23. Sejam Σ e Σ' assinaturas. Um *morfismo de assinatura* f de Σ para Σ', denotada por $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$, é uma função $f : |\Sigma| \longrightarrow L(\Sigma')$ tal que, se $c \in \Sigma_n$, então $f(c) \in L(\Sigma')[n]$.

Dado um morfismo de assinatura $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$, uma função $\widehat{f} : L(\Sigma) \longrightarrow L(\Sigma')$ pode ser estendida de modo natural, como mostra a seguinte definição:

(a) $\widehat{f}(p) = p$, se $p \in \mathcal{V}$;

(b) $\widehat{f}(c) = f(c)$, se $c \in \Sigma_0$;

(c) $\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n))$, se $c \in \Sigma_n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L(\Sigma)$, para $n \geq 1$.

Lema 4.3.24. *A extensão $\widehat{f}$ de f é única, isto é, se $\widehat{g} : L(\Sigma) \longrightarrow L(\Sigma')$ satisfaz às cláusulas (a), (b) e (c) acima, então $\widehat{g} = \hat{f}$.*

Demonstração. Mostramos que $\widehat{f} = \widehat{g}$ por indução na complexidade de φ.

- Se φ é uma variável proposicional p, isto é, $p \in \mathcal{V}$:

  $\widehat{f}(\varphi) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(p) \overset{\text{def}}{=} p \overset{\text{def}}{=} \widehat{g}(p) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{g}(\varphi)$.

- Se φ é uma constante c, isto é, $c \in \Sigma_0$:

  $\widehat{f}(\varphi) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(c) \overset{\text{def}}{=} f(c) \overset{\text{def}}{=} \widehat{g}(c) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{g}(\varphi)$.

- Se φ é uma fórmula do tipo $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, para, $c \in \Sigma_n$:
  Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado seja válido para toda fórmula α, tal que $l(\alpha) < l(\varphi)$, daí:

  $\widehat{f}(\varphi) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \overset{\text{def}}{=} f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_n)) \overset{\text{H.I}}{=}$
  $f(c)(\widehat{g}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g}(\alpha_n)) \overset{\text{def}}{=} \widehat{g}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{g}(\varphi)$.

$\square$

Mais ainda, $\widehat{f}(\varphi) = \widehat{f}(\varphi)(p_1, \ldots, p_n)$, sempre que $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$.

Definição 4.3.25. Sejam $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$ e $\Sigma' \xrightarrow{g} \Sigma''$ morfismos de assinaturas. A *composição* $g \centerdot f$ de f e g é o morfismo de assinatura $\Sigma \xrightarrow{g \centerdot f} \Sigma''$ dada pela função $\widehat{g} \circ f : |\Sigma| \longrightarrow L(\Sigma'')$.

Seguindo [Con04], apresentamos os seguintes resultados técnicos que são necessários para dar suporte às demonstrações.

Lema 4.3.26. *$\widehat{\sigma'\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}$.*

Demonstração. Indução na complexidade de φ.

- Se φ é uma variável p, isto é, $p \in \mathcal{V}$:

  $\widehat{\sigma'\sigma}(p) \overset{4.3.19(a)}{=} \sigma'\sigma(p) \overset{4.3.20}{=} \widehat{\sigma'} \circ \sigma(p) \overset{\text{Not}}{=} \widehat{\sigma'}(\sigma(p)) \overset{4.3.19(a)}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(p)) \overset{4.3.20}{=}$
  $\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}$.

- Se φ é uma constante c, isto é, $c \in \Sigma_0$:

  $\widehat{\sigma'\sigma}(c) \overset{4.3.19(b)}{=} c \overset{4.3.19(b)}{=} \widehat{\sigma'}(c) \overset{4.3.19(b)}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(c)) \overset{\text{Not}}{=} \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}(c)$.

- Se φ é uma fórmula do tipo $c(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, para $c \in \Sigma_n$:
$\widehat{\sigma'\sigma}(c(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) \overset{4.3.19(c)}{=} c(\widehat{\sigma'\sigma}(\alpha_1),\ldots,\widehat{\sigma'\sigma}(\alpha_n)) \overset{\text{hip.ind}}{=}$
$c(\widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\alpha_1)),\ldots,\widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\alpha_n))) \overset{4.3.19(c)}{=} \widehat{\sigma'}(c(\widehat{\sigma}(\alpha_1),\ldots,\widehat{\sigma}(\alpha_n))) \overset{4.3.19(c)}{=}$
$\widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(c(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))) \overset{\text{Not}}{=} \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}(c(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)).$

□

Lema 4.3.27. *Seja $\varphi(p_1,\ldots,p_n)$ uma fórmula, e sejam $\sigma,\sigma' : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma)$ substituições tais que $\sigma(p_i) = \alpha_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, então*

$$\widehat{\sigma'}(\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = \varphi(\widehat{\sigma'}(\alpha_1),\ldots,\widehat{\sigma'}(\alpha_n)).$$

Demonstração. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma'}(\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) &\overset{4.3.21}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{\sigma}(\varphi(p_1,\ldots,p_n)))\\
&\overset{\text{Not}}{=} \widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}(\varphi(p_1,\ldots,p_n))\\
&\overset{4.3.26}{=} \widehat{\sigma'\sigma}(\varphi(p_1,\ldots,p_n))\\
&\overset{4.3.19(c)}{=} \varphi(\widehat{\sigma'\sigma}(p_1),\ldots,\widehat{\sigma'\sigma}(p_n))\\
&\overset{4.3.26}{=} \varphi(\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}(p_1),\ldots,\widehat{\sigma'} \circ \widehat{\sigma}(p_n))\\
&\overset{4.3.19(a)}{=} \varphi(\widehat{\sigma'} \circ \sigma(p_1),\ldots,\widehat{\sigma'} \circ \sigma(p_n))\\
&\overset{\text{Not}}{=} \varphi(\widehat{\sigma'}(\sigma(p_1)),\ldots,\widehat{\sigma'}(\sigma(p_n)))\\
&\overset{4.3.27}{=} \varphi(\widehat{\sigma'}(\alpha_1),\ldots,\widehat{\sigma'}(\alpha_n)).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.3.28. *Seja $\varphi = \varphi(p_1,\ldots,p_n)$ em $L(\Sigma)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in L(\Sigma)$ e $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$ um morfismo de assinaturas, então*

$$\widehat{f}(\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n)).$$

Demonstração. Por indução sobre complexidade $l(\varphi)$ de φ.

- Se φ é uma variável proposicional $p_i \in \mathcal{V}$;

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) &\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(p_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))\\
&\overset{4.3.22}{=} \widehat{f}(\alpha_i)\\
&\overset{4.3.22}{=} p_i(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{def}}{=} \widehat{f}(p_i)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))
\end{aligned}$$

- Se φ é uma constante $c \in \Sigma_0$, então $\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n) = c$, e disso temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) &\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(c)\\
&\overset{\text{def}}{=} f(c)\\
&\overset{4.3.22}{=} f(c)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{def}}{=} \widehat{f}(c)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1),\ldots,\widehat{f}(\alpha_n))
\end{aligned}$$

- Se $\varphi = c(\beta_1,\cdots,\beta_k)$, com $\beta_i = \beta_i(p_1,\cdots,p_n)$ $(i = 1,\cdots,k)$, então $\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = c(\beta_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\cdots,\beta_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$. Logo:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)) &\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(c(\beta_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\cdots,\beta_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)))\\
&\overset{\text{def}}{=} f(c)(\widehat{f}(\beta_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)),\cdots,\widehat{f}(\beta_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)))\\
&\overset{\text{H.I}}{=} f(c)(\widehat{f}(\beta_1)(\widehat{f}(\alpha_1),...,\widehat{f}(\alpha_n)),...,\widehat{f}(\beta_k)(\widehat{f}(\alpha_1),...,\widehat{f}(\alpha_n)))\\
&\overset{\text{Sub}}{=} f(c)(\widehat{f}(\beta_1),\cdots,\widehat{f}(\beta_k))(\widehat{f}(\alpha_1),\cdots,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{def}}{=} \widehat{f}(c(\beta_1,...,\beta_k))(\widehat{f}(\alpha_1),...,\widehat{f}(\alpha_n))\\
&\overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(\varphi)(\widehat{f}(\alpha_1),...,\widehat{f}(\alpha_n)).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.3.29. *Sejam* $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$ *e* $\Sigma' \xrightarrow{g} \Sigma''$ *dois morfismos de assinaturas. Então* $\widehat{g \centerdot f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Demonstração. Por indução na complexidade de $l(\varphi)$, para $\varphi \in L(\Sigma)$, provamos que $\widehat{g \centerdot f}(\varphi) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(\varphi)$.

- Se $\varphi = p$, $p \in \mathcal{V}$, então:
  $\widehat{g \centerdot f}(p) \overset{\text{def (a)}}{=} p \overset{\text{def (a)}}{=} \widehat{g}(p) \overset{\text{def (a)}}{=} \widehat{g}(\widehat{f}(p)) \overset{\text{Not}}{=} \widehat{g} \circ \widehat{f}(p)$.

- Se $\varphi = c$, para $c \in \Sigma_0$, então:
  $\widehat{g \centerdot f}(c) \overset{\text{def (b)}}{=} g \centerdot f(c) \overset{4.3.25}{=} \widehat{g} \circ f(c) \overset{\text{Not}}{=} \widehat{g}(f(c)) \overset{\text{def (b)}}{=} \widehat{g}(\widehat{f}(c)) \overset{\text{def (b)}}{=} \widehat{g} \circ \widehat{f}(c)$.

- Se $\varphi = c(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ $c \in \Sigma_n$, então:

$$
\begin{aligned}
\widehat{g \centerdot f}(\varphi) &\overset{\text{Not}}{=} \widehat{g \centerdot f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&\overset{\text{def (c)}}{=} g \centerdot f(c)(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \cdots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&\overset{4.3.25}{=} \widehat{g} \circ f(c)(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&\overset{\text{Not}}{=} \widehat{g}(f(c))(\widehat{g \centerdot f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{g \centerdot f}(\alpha_n)) \\
&\overset{\text{H.I}}{=} \widehat{g}(f(c))(\widehat{g} \circ \widehat{f}(\alpha_1), \cdots, \widehat{g} \circ \widehat{f}(\alpha_n)) \\
&\overset{\text{Not}}{=} \widehat{g}(f(c))(\widehat{g}(\widehat{f}(\alpha_1)), \cdots, \widehat{g}(\widehat{f}(\alpha_n))) \\
&\overset{4.3.28}{=} \widehat{g}(f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \cdots, \widehat{f}(\alpha_n))) \\
&\overset{\text{def (c)}}{=} \widehat{g}(\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \\
&\overset{\text{Not}}{=} \widehat{g}(\widehat{f}(\varphi)) \\
&\overset{\text{Not}}{=} \widehat{g} \circ \widehat{f}(\varphi).
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.3.30. *Sejam* $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$ *um morfismo de assinaturas e* $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma)$ *uma substituição sobre* Σ. *Então, existe uma substituição* $\sigma' : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma')$ *sobre* Σ' *tal que* $\widehat{f} \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma'} \circ \widehat{f}$.

Demonstração. Defina $\sigma'(p) = \widehat{f}(\sigma(p))$ para todo $p \in \mathcal{V}$. Por indução na complexidade $l(\alpha)$, provaremos que $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha))$ para todo α.

- Se $\alpha = p \in \mathcal{V}$ então:
  $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha)) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{f}(\widehat{\sigma}(p)) \overset{4.3.19\ (a)}{=} \widehat{f}(\sigma(p)) \overset{\text{hip}}{=} \sigma'(p) \overset{4.3.19\ (a)}{=} \widehat{\sigma'}(p) \overset{\text{def}}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(p)) \overset{\text{Sub}}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha))$

- Se $\alpha = c \in \Sigma_0$ então:
  $\widehat{f}(\widehat{\sigma}(c)) = \widehat{f}(c) = \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(c))$, porque $\widehat{f}(c) = f(c) \in L(\Sigma')[0]$.

- Se $\alpha = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ para $c \in \Sigma_k$, então:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\widehat{\sigma}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))) &\overset{4.3.19\ (c)}{=} \widehat{f}(c(\widehat{\sigma}(\alpha_1), \ldots, \widehat{\sigma}(\alpha_k))) \\
&\overset{\text{def (c)}}{=} f(c)(\widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{f}(\widehat{\sigma}(\alpha_k))) \\
&\overset{\text{H.I}}{=} f(c)(\widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha_1)), \ldots, \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(\alpha_k))) \\
&\overset{4.3.19\ (c)}{=} \widehat{\sigma'}(f(c)(\widehat{f}(\alpha_1), \ldots, \widehat{f}(\alpha_k))) \\
&\overset{4.3.23\ (c)}{=} \widehat{\sigma'}(\widehat{f}(c(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)))
\end{aligned}
$$

□

Definição 4.3.31. A *categoria das linguagens proposicionais* **AP** é definida como:

- **Objetos:** Assinaturas proposicionais (cf. Definição 4.3.17);
- **Morfismos**: morfismos de assinaturas (cf. Definição 4.3.23);
- **Composição:** Como na Definição 4.3.25;
- **Morfismo identidade:** para toda assinatura Σ o morfismo identidade $\Sigma \xrightarrow{id_\Sigma} \Sigma$ é definido por:
  $id_\Sigma(c) = c$, para $c \in \Sigma_0$;
  $id_\Sigma(c) = c(p_1, \ldots, p_n)$, para $c \in \Sigma_n$, $n \geq 1$.

Proposição 4.3.32. ***AP*** *é uma categoria.*

Demonstração. Sejam $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma' \xrightarrow{g} \Sigma'' \xrightarrow{h} \Sigma'''$ morfismos de assinaturas. Vejamos que a composição $\centerdot$ é associativa

$$h \centerdot (g \centerdot f) \overset{4.3.25}{=} h \centerdot (\widehat{g} \circ f) \overset{4.3.25}{=} \widehat{h} \circ (\widehat{g} \circ f) \overset{\text{Ass}}{=} (\widehat{h} \circ \widehat{g}) \circ f \overset{4.3.29}{=} \widehat{h \centerdot g} \circ f \overset{4.3.25}{=} (h \centerdot g) \centerdot f$$

Para finalizar a demonstração, basta verificar que, dados morfismos de assinaturas $\Sigma' \xrightarrow{f} \Sigma \xrightarrow{g} \Sigma''$, as seguintes identidades são satisfeitas: $id_\Sigma \centerdot f = f$ e $g \centerdot id_\Sigma = g$. É imediato a partir do Lema 4.3.24, e Definições 4.3.23 e 4.3.25 que o diagrama comuta, e disso segue facilmente o resultado. $\square$

Proposição 4.3.33. *A categoria* ***AP*** *tem produtos de famílias arbitrárias não vazias.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{\Sigma^i\}_{i \in I}$ uma família árbitrária (não vazia) de assinaturas. Considere a assinatura $\Sigma^{\mathcal{F}}$ tal que, para todo $n \in \omega$,

$$\Sigma^{\mathcal{F}}_n = \{(\varphi_i)_{i \in I} \ : \ \varphi_i \in L(\Sigma^i)[n] \text{ para todo } i \in I\}.$$

Para cada $i \in I$, considere a função $\pi_i : |\Sigma^{\mathcal{F}}| \longrightarrow L(\Sigma^i)$ tal que $\pi_i((\varphi_i)_{i \in I}) = \varphi_i$ se $(\varphi_i)_{i \in I} \in \Sigma^{\mathcal{F}}_n$, para $n \in \omega$. Então π_i determina um **AP**-morfismo $\Sigma^{\mathcal{F}} \xrightarrow{\pi_i} \Sigma^i$. Considere uma assinatura Σ' junto com **AP**-morfismos $\Sigma' \xrightarrow{f_i} \Sigma^i$, para $i \in I$. Seja $f : |\Sigma'| \longrightarrow L(\Sigma^{\mathcal{F}})$ tal que $f(c) = (f_i(c))_{i \in I}(p_1, \ldots, p_n)$ se $c \in \Sigma'_n$, para $n \in \omega$. Então f define um **AP**-morfismo $\Sigma' \xrightarrow{f} \Sigma^{\mathcal{F}}$ tal que $f_i = \pi_i \centerdot f$ para todo $i \in I$. Se $\Sigma' \xrightarrow{g} \Sigma^{\mathcal{F}}$ é um morfismo tal que $f_i = \pi_i \centerdot g$ para todo $i \in I$ então claramente $g = f$. Isto prova que $\langle \Sigma^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ é o produto da família $\mathcal{F}$ na categoria **AP**. $\square$

Note que a categoria **AP** não tem objeto terminal, portanto o escopo da proposição anterior é o correto. Se existisse um objeto terminal $\Sigma^{\mathbb{1}}$, então $L(\Sigma^{\mathbb{1}})[n]$ deveria ter exatamente um elemento para cada $n \geq 0$, o que é um absurdo.

O exemplo a seguir, tem como objetivo principal, mostrar a intuição de como são construídos os *conectivos produto*, do produto categorial de uma família de assinaturas proposicionais.

Exemplo 4.3.34. Considere os seguintes conjuntos de conectivos:
$\Sigma_0 = \{\top, \bot\}$ $\quad$ $\Sigma_1 = \{\neg\}$ $\quad$ $\Sigma_2 = \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.
A partir desses conjuntos, considere as seguintes de assinaturas:
$\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\Sigma_0,\, \Sigma_1\}$ $\quad$ $\Sigma_{\mathcal{B}} = \{\Sigma_1\}$ $\quad$ $\Sigma_{\mathcal{C}} = \{\Sigma_0,\, \Sigma_1, \Sigma_2\}$ $\quad$ $\Sigma_{\mathcal{D}} = \{\Sigma_1,\, \Sigma_2\}$
Considere as seguintes linguagens formadas sobre o conjunto enumerável, $\mathcal{V}$, das variáveis proposicionais p_n, para $n \in \omega$.[8]

- $L(\Sigma_{\mathcal{A}}) = \{\top^{\mathcal{A}}, \bot^{\mathcal{A}}, p_1, \neg^{\mathcal{A}} p_1, \neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}} p_1, \ldots\}$
- $L(\Sigma_{\mathcal{B}}) = \{p_1, \neg^{\mathcal{B}} p_1, \neg^{\mathcal{B}}\neg^{\mathcal{B}} p_1, \ldots\}$
- $L(\Sigma_{\mathcal{C}}) = \{\top^{\mathcal{C}}, \bot^{\mathcal{C}}, p_1, \neg^{\mathcal{C}} p_1, p_1 \rightarrow^{\mathcal{C}} p_2, p_1 \wedge^{\mathcal{C}} p_2, p_1 \vee^{\mathcal{C}} p_2, (p_1 \rightarrow^{\mathcal{C}} p_2) \vee^{\mathcal{C}} p_3, \ldots\}$
- $L(\Sigma_{\mathcal{D}}) = \{p_1, \neg^{\mathcal{D}} p_1, p_1 \rightarrow^{\mathcal{D}} p_2, p_1 \wedge^{\mathcal{D}} p_2, p_1 \vee^{\mathcal{D}} p_2, (p_1 \rightarrow^{\mathcal{D}} p_2) \vee^{\mathcal{D}} p_3, \ldots\}$

Pela definição, os conectivos do produto das assinaturas são seqüências de fórmulas de mesma complexidade e com as mesmas variáveis. Mostramos, como ilustração, apenas o conjunto de conectivos do produto $(\Sigma_{\mathcal{A}} \times \Sigma_{\mathcal{B}})_1$, que consiste apenas de conectivos unários.
$\Sigma_{\mathcal{A}} \times \Sigma_{\mathcal{B}} = \{\langle p_1, p_1\rangle, \langle \neg^{\mathcal{A}} p_1, \neg^{\mathcal{B}} p_1\rangle, \langle \neg^{\mathcal{A}} p_1, p_1\rangle, \langle p_1, \neg^{\mathcal{B}} p_1\rangle, \cdots\}$

Observações:

1. Para que haja conectivos 0-ários no produto da família das assinaturas, é necessário que cada membro Σ_i da família seja tal que $\Sigma_0^i \neq \varnothing$, para todo $i \in I$.

2. Para que haja somente conectivos unários no produto da família das assinaturas, é necessário e suficiente que pelo menos um membro i da família seja tal que $\Sigma_i^n = \varnothing$ para todo $n \neq 1$.

3. Para os demais casos, o produto da família das assinaturas terá conectivos de todas as aridades (exceto possivelmente os conectivos 0-ários).

[8] Sabemos que a construção das fórmulas, a partir de conectivos n-ários, consiste em aplicar o conectivo às primeiras n variáveis proposicionais, uma vez que a substituição é permitida.

Continuando o exemplo, vejamos agora como funcionam as projeções. Seja $c \in (\Sigma_{\mathcal{C}} \times \Sigma_{\mathcal{D}})_2$, um conectivo produto tal que $c = \langle (p_1 \to^{\mathcal{C}} p_2), (p_1 \vee^{\mathcal{D}} (p_2) \rangle$. O conectivo é binário, pois as fórmulas da seqüência têm exatamente as variáveis p_1 e p_2, ou seja, apenas duas variáveis.

- $\pi_{\mathcal{C}} : |\Sigma_{\mathcal{C}} \times \Sigma_{\mathcal{D}}| \longrightarrow L(\Sigma_{\mathcal{C}})$, tal que
  $\pi_{\mathcal{C}}(c) = (p_1 \to^{\mathcal{C}} p_2)$
- $\pi_{\mathcal{D}} : |\Sigma_{\mathcal{C}} \times \Sigma_{\mathcal{D}}| \longrightarrow L(\Sigma_{\mathcal{D}})$, tal que
  $\pi_{\mathcal{D}}(c) = (p_1 \vee^{\mathcal{D}} p_2)$

Tomando o caso concreto em que o conectivo produto binário é aplicado as fórmulas φ e ψ, temos:

1. $\widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(c(\varphi,\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\mathcal{C}}(c)(\widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\varphi), \widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 \to^{\mathcal{C}} p_2)(\widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\varphi), \widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\varphi) \to^{\mathcal{C}} \widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(\psi))$
2. $\widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(c(\varphi,\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\mathcal{D}}(c)(\widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(\varphi), \widehat{\pi_{\mathcal{D}}}\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 \vee^{\mathcal{D}} p_2)(\widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(\varphi), \widehat{\pi_{\mathcal{D}}}\psi)) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(\varphi) \vee^{\mathcal{D}} \widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(\psi))$

No caso em que φ e ψ são, respectivamente, as variáveis proposicionais p_3 e p_4, temos o seguinte:

- $\widehat{\pi_{\mathcal{C}}}(c(p_3, p_4)) \stackrel{\text{def}}{=} (p_3 \to^{\mathcal{C}} p_4)$
- $\widehat{\pi_{\mathcal{D}}}(c(p_3, p_4)) \stackrel{\text{def}}{=} (p_3 \vee^{\mathcal{D}} p_4)$

Com isso, não é difícil de perceber que as projeções são de fato um **AP**-morfismo.

Passamos, agora, à *categoria das lógicas proposicionais* definidas através da relação de conseqüência. Denotamos esta por **RC**.

Devemos lembrar que uma fórmula na categoria **RC** não é um produto de fórmulas, mas será uma fórmula construída a partir dos conectivos produtos, do mesmo modo que tratamos no exemplo 4.3.34 acima.

Definição 4.3.35. Sejam $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e $\mathcal{L}' = \langle \Sigma', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ duas lógicas. Um morfismo de lógicas $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ para $\mathcal{L}'$ é um **AP**-morfismo $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma'$ que é uma tradução, isto é, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\Sigma)$ satisfaz o seguinte:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ implica } \widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}'} \widehat{f}(\varphi).$$

A composição de morfismos e o morfismo identidade das categoria **RC** são definidos como na categoria **AP**. Uma propriedade fundamental da categoria **RC** é a seguinte:

Proposição 4.3.36. *A categoria **RC** tem produtos de famílias arbitrárias não vazias.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ uma família arbitrária (não vazia) de lógicas, em que cada lógica $\mathcal{L}_i$ é da forma $\langle \Sigma^i, \vdash_{\mathcal{L}_i}\rangle$. Vejamos que $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ é o produto na categoria **RC**.

Considere o produto $\langle \Sigma^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ de $\{\Sigma^i\}_{i\in I}$ na categoria **AP** (cf. Proposição 4.3.33). A relação de conseqüência $\vdash_{\mathcal{F}} \subseteq \wp(L(\Sigma^{\mathcal{F}})) \times L(\Sigma^{\mathcal{F}})$, do produto da família $\mathcal{F}$, é definida da seguinte maneira:
$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$ sse existe um conjunto $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$ para todo $i \in I$. [9]

Primeiramente vamos mostrar que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = \langle \Sigma^{\mathcal{F}}, \vdash_{\mathcal{F}}\rangle$ é uma lógica, e para tanto devemos mostrar que a relação $\vdash_{\mathcal{F}}$ é um operador de conseqüência, ou seja, mostrar que as condições (Con1)-(Con5), definidas no Capítulo 1, são verificadas.

(i) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é reflexivo.
Considere $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq L(\Sigma^{\mathcal{F}})$. Seja $\alpha \in \Gamma$ e $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\alpha \in \Delta_{fin}$. Desde que π_i é um **AP**-morfismo, para todo $i \in I$, então, a extensão $\widehat{\pi}_i : L(\Sigma^{\mathcal{F}}) \longrightarrow L(\Sigma^i)$ tal que $\widehat{\pi}_i((\varphi_i)_{i\in I}) = \varphi_i$ sempre que $(\varphi_i)_{i\in I} \in \Sigma^{\mathcal{F}}_n$, $n \in \omega$, existe e é única. Agora, $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) = \{\widehat{\pi}_i(\delta) : \delta \in \Delta_{fin}\}$ para todo $i \in I$. Dado que $\alpha \in \Delta_{fin}$, então $\widehat{\pi}_i(\alpha) \in \widehat{\pi}_i(\Delta_{fin})$, para todo $i \in I$. Dado que $\langle \Sigma^i, \vdash_{\mathcal{L}_i}\rangle$ é um sistema dedutivo, então temos que $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ é um operador de conseqüência, para todo $i \in I$, daí $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ é reflexivo, e portanto $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\alpha)$, para todo $i \in I$, logo pela definição $\vdash_{\mathcal{F}}$, segue que $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$.

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é monotônico.
Suponhamos que $\Delta \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, daí pela definição de $\vdash_{\mathcal{F}}$ temos que existe um $\Delta_{fin} \subseteq \Delta$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\alpha)$ para todo $i \in I$. Agora, como $\Delta \subseteq \Gamma$, então claramente $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$, portanto, segue da definição de $\vdash_{\mathcal{F}}$ que, $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$.

(iii) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é transitivo.
Suponhamos que $\Delta \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{F}} \beta$. Do fato que $\Delta \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$ temos que existe

[9] Escrevemos "Δ_{fin}" para denotar um conjunto finito.

$\Delta_{fin} \subseteq \Delta$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\alpha)$, para todo $i \in I$. Pela definição de $\vdash_{\mathcal{F}}$ sabemos que existe $\Gamma_{fin} \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Gamma_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\beta)$ e dado que $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ é monotônico, então $\widehat{\pi}_i(\Gamma_{fin}), \widehat{\pi}_i(\alpha) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\beta)$, e da transitividade de $\vdash_{\mathcal{L}_i}$ temos que $\widehat{\pi}_i(\Gamma_{fin}), \widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\beta)$ e, portanto, $\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{F}} \alpha$.

(iv) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é finitário pela própria definição.

(v) $\vdash_{\mathcal{F}}$ é estrutural.
Considere um conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\Sigma^{\mathcal{F}})$ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \varphi$. Então, existe $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi)$ para todo $i \in I$. Seja $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma^{\mathcal{F}})$ um substituição. Desde que todo π_i é um **AP**-morfismo então, para todo $i \in I$, existe uma única substituição $\sigma_i : \mathcal{V} \longrightarrow L(\Sigma^i)$ tal que $\widehat{\pi}_i \circ \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_i \circ \widehat{\pi}_i$, pelo Lema 4.3.30. Desde que cada $\mathcal{L}_i$ satisfaz a estruturalidade, então $\widehat{\sigma}_i(\widehat{\pi}_i(\Delta_{fin})) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\sigma}_i(\widehat{\pi}_i(\varphi))$, isto é, $\widehat{\pi}_i(\widehat{\sigma}(\Delta_{fin})) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{\sigma}(\varphi))$ para todo $i \in I$, onde $\widehat{\sigma}(\Delta_{fin}) \subseteq \widehat{\sigma}(\Gamma)$ é finito. Portanto, $\widehat{\sigma}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{\sigma}(\varphi)$ e $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ é uma lógica.

Claramente, cada π_i é um **RC**-morfismo $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{L}_i$. Suponha que $\mathcal{L}' = \langle \Sigma', \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ é uma lógica e $\mathcal{L}' \xrightarrow{f_i} \mathcal{L}_i$ é um **RC**-morfismo, para todo $i \in I$. Então existe um único **AP**-morfismo $\Sigma' \xrightarrow{f} \Sigma^{\mathcal{F}}$ tal que, em **AP**, $\pi_i \centerdot f = f_i$, para todo $i \in I$ (cf. Teorema 4.3.33). Suponha que $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\Sigma')$ é tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Desde que $\mathcal{L}'$ é finitária, então existe um conjunto $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta_{fin} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Desde que cada f_i é um **RC**-morfismo, então $\widehat{f_i}(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{f_i}(\varphi)$, para todo $i \in I$, daí $\widehat{\pi_i \centerdot f}(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi_i \centerdot f}(\varphi)$, usando o Lema 4.3.29 temos $\widehat{\pi}_i \circ \widehat{f}(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i \circ \widehat{f}(\varphi)$, isto é, $\widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\Delta_{fin})) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\varphi))$, para todo $i \in I$, onde $\widehat{f}(\Delta_{fin}) \subseteq \widehat{f}(\Gamma)$ é finito, portanto pela definição de $\vdash_{\mathcal{F}}$ temos que $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{f}(\varphi)$ e assim f é um **RC**-morfismo $\mathcal{L}' \xrightarrow{f} \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ tal que, em **RC**, $\pi_i \centerdot f = f_i$, para todo $i \in I$. A unicidade de f é uma conseqüência da propriedade universal na categoria **AP** do produto $\langle \Sigma^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$. Isto mostra que $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle$ é o produto da família $\mathcal{F}$ na categoria **RC**. $\square$

A próxima proposição, uma das mais relevantes desta seção, mostra que dada uma família $\mathcal{F}$ de lógicas finitamente algebrizáveis, na acepção de Blok e Pigozzi, cf. [BP89], satisfazendo a condição de que o conjunto de algebrizadores seja limitado, então mostramos que o produto de $\mathcal{F}$ na categoria **RC** é uma lógica finitamente algebrizável. Este resultado é relevante, pois é por meio deste que podemos garantir a algebrização a distância para lógicas que tenham uma semântica de traduções possíveis neste produto.

Definição 4.3.37. A categoria das lógicas algebrizáveis, denotada por **RCA**, é uma subcategoria da categoria **RC**, e é definida da seguinte maneira:

- **Objetos:** são lógicas $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, que são finitamente algebrizáveis (cf. Teorema 2.1.23);

- **Morfismos:** um morfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{L}'$ é um **RC**-morfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{L}'$ tal que, se $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle \rangle$ e $\langle \Delta', \langle \varepsilon', \delta' \rangle \rangle$ são conjuntos de algebrizadores para $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, respectivamente, então $p_1 \widehat{f}(\Delta) p_2 \vdash_{\mathcal{L}'} p_1 \Delta' p_2$ e $p_1 \Delta' p_2 \vdash_{\mathcal{L}'} p_1 \widehat{f}(\Delta) p_2$, onde $p_1 \widehat{f}(\Delta) p_2$ denota o conjunto das fórmulas em duas variáveis $\{\widehat{f}(\Delta^i)(p_1, p_2) : 1 \leq i \leq n\}$;

- **Composição e morfismo identidade:** são herdados da categoria **RC**.

Observação 4.3.38. A partir de [BP89] obtemos o seguinte:
Sejam $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle \rangle$ e $\langle \Delta', \langle \varepsilon', \delta' \rangle \rangle$ dois conjuntos de algebrizadores para uma lógica $\mathcal{L}$. Então $p_1 \Delta' p_2 \vdash_{\mathcal{L}} p_1 \Delta p_2$ e $p_1 \Delta p_2 \vdash_{\mathcal{L}} p_1 \Delta' p_2$. Portanto, um **RC**-morfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{L}'$ é um **RCA**-morfismo sse existem algebrizadores $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle \rangle$ e $\langle \Delta', \langle \varepsilon', \delta' \rangle \rangle$ para $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, respectivamente, tal que $p_1 \widehat{f}(\Delta) p_2 \vdash_{\mathcal{L}'} p_1 \Delta' p_2$ e $p_1 \Delta' p_2 \vdash_{\mathcal{L}'} p_1 \widehat{f}(\Delta) p_2$. Logo, a noção não depende da escolha dos algebrizadores. Por outro lado, seguindo [FC04], temos o seguinte resultado: um **RC**-morfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{L}'$ é um **RCA**-morfismo sse para todo conjunto de algebrizadores para $\mathcal{L}$, o par $\langle \widehat{f}(\Delta), \langle \widehat{f}(\epsilon), \widehat{f}(\delta) \rangle \rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}'$.

Provamos agora que o produto de uma família de lógicas algebrizáveis, satisfazendo a condição que os conjuntos de algebrizadores são limitados, é algebrizável.

Teorema 4.3.39. *(Preservação da Finitariedade) Seja $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ uma família de lógicas algebrizáveis, em que $\mathcal{L}_i = \langle \Sigma^i, \vdash_{\mathcal{L}_i} \rangle$ para todo $i \in I$. Assuma que $\mathcal{F}$ tem a seguinte propriedade: existem números naturais n e m tais que, para todo $i \in I$, existe um algebrizador $\langle \Delta_i, \langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle \rangle$ para $\mathcal{L}_i$ tal que Δ_i tem no máximo n elementos, e $\langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle$ tem no máximo m elementos. Então, existe o produto da família $\mathcal{F}$ na categoria **RCA**.*

Demonstração. Pela hipótese podemos tomar, para qualquer $i \in I$, as sequências finitas

$$\Delta_i^1(p_1, p_2) \cdots \Delta_i^n(p_1, p_2)$$

$$\langle \varepsilon_i^1(p_1), \delta_i^1(p_1) \rangle \cdots \langle \varepsilon_i^m(p_1), \delta_i^m(p_1) \rangle$$

tal que $\langle \Delta_i, \langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle \rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}_i$, em que

$$\Delta_i = \{\Delta_i^1(p_1, p_2), \ldots, \Delta_i^n(p_1, p_2)\}$$

e $\langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle = \{\langle \varepsilon_i^1(p_1), \delta_i^1(p_1)\rangle, \ldots, \langle \varepsilon_i^m(p_1), \delta_i^m(p_1)\rangle\}$, para todo $i \in I$. De fato, é suficiente tomar, para todo $i \in I$, um algebrizador com no máximo n elementos em Δ_i e no máximo m elementos em $\langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle$ e listar seus elementos, repetindo alguns elementos, quando necessário, de tal forma a definir seqüências de comprimento n e m, respectivamente. Agora, considere o produto $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i \in I}\rangle$ na categoria **RC** da família $\mathcal{F}$, e defina as seguintes fórmulas em $L(\Sigma^{\mathcal{F}})$:

- $\Delta_{\mathcal{F}}^j(p_1, p_2) = (\Delta_i^j)_{i \in I}(p_1, p_2)$ para $1 \leq j \leq n$;
- $\varepsilon_{\mathcal{F}}^j(p_1) = (\varepsilon_i^j)_{i \in I}(p_1)$ para $1 \leq j \leq m$;
- $\delta_{\mathcal{F}}^j(p_1) = (\delta_i^j)_{i \in I}(p_1)$ para $1 \leq j \leq m$.

Finalmente, sejam:

- $\Delta_{\mathcal{F}} = \{\Delta_{\mathcal{F}}^i(p_1, p_2) \ : \ 1 \leq i \leq n\}$
- $\langle \varepsilon_{\mathcal{F}}, \delta_{\mathcal{F}} \rangle = \{\langle \varepsilon_{\mathcal{F}}^i(p_1), \delta_{\mathcal{F}}^i(p_1)\rangle \ : \ 1 \leq i \leq m\}$.

Vejamos que $\langle \Delta_{\mathcal{F}}, \langle \varepsilon_{\mathcal{F}}, \delta_{\mathcal{F}} \rangle \rangle$ é um conjunto de algebrizadores para $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ e, para isso, mostramos que este satisfaz as cláusulas da Definição 2.1.23.

(i) $\vdash_{\mathcal{F}} \varphi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi$
Dado que $\langle \Delta_i, \langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle \rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}_i$, então $\vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi) \Delta_i \widehat{\pi}_i(\varphi)$ para todo $i \in I$. Pela definição de $\Delta_{\mathcal{F}}$ temos que $\vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varphi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi)$ para todo $i \in I$ e portanto $\vdash_{\mathcal{F}} \varphi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi$.

(ii) $\varphi \Delta_{\mathcal{F}} \psi \vdash_{\mathcal{F}} \psi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi$;
Dado que, para todo $i \in I$, $\langle \Delta_i, \langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle \rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}_i$, então sabemos que, $\widehat{\pi}_i(\varphi) \Delta_i \widehat{\pi}_i(\psi) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\psi) \Delta_i \widehat{\pi}_i(\varphi)$. Pela definição de $\Delta_{\mathcal{F}}$ temos que $\widehat{\pi}_i(\varphi \Delta_{\mathcal{F}} \psi) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\psi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi)$, para todo $i \in I$, e portanto $\varphi \Delta_{\mathcal{F}} \psi \vdash_{\mathcal{F}} \psi \Delta_{\mathcal{F}} \varphi$.

(iii) $\varphi \Delta_{\mathcal{F}} \psi, \psi \Delta_{\mathcal{F}} \lambda \vdash_{\mathcal{F}} \varphi \Delta_{\mathcal{F}} \lambda$.
Análoga ao caso (ii);

(iv) Desde que $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ é estrutural, é suficiente mostrar o seguinte:
$p_1 \Delta p_{k+1}, \ldots, p_k \Delta p_{2k} \vdash_{\mathcal{F}} c(p_1, \ldots, p_k) \Delta c(p_{k+1}, \ldots, p_{2k})$ para todo $c \in \Sigma^{\mathcal{F}_k}$.

Seja $c = (\varphi_i)_{i\in I} \in \Sigma^{\mathcal{F}_k}$.
Se $k = 0$ o resultado segue a partir da cláusula (i) da Definição 2.1.23.
Suponha que $k > 0$. Por indução no comprimento de $\varphi = \varphi(p_1, ..., p_k)$ é fácil mostrar que, se $\langle \Delta', \langle \varepsilon', \delta' \rangle\rangle$ é um algebrizador para uma lógica $\mathcal{L}'$, então $\varphi_1\Delta'\psi_1, \ldots, \varphi_k\Delta'\psi_k \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\Delta'\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ para toda $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\psi_1, \ldots, \psi_k$ em $L(\Sigma')$. Então, para todo $i \in I$, $p_1\Delta_i p_{k+1}, \ldots, p_k\Delta_i p_{2k} \vdash_{\mathcal{L}_i} \varphi_i(p_1, \ldots, p_k)\Delta_i\varphi_i(p_{k+1}, \ldots, p_{2k})$, isto é,
$\widehat{\pi}_i(p_1\Delta p_{k+1}), ..., \widehat{\pi}_i(p_k\Delta p_{2k}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i((\varphi_i)_{i\in I}(p_1, ..., p_k)\Delta(\varphi_i)_{i\in I}(p_{k+1}, ..., p_{2k}))$.
Então $p_1\Delta p_{k+1}, \cdots, p_k\Delta p_{2k} \vdash_{\mathcal{F}} (\varphi_i)_{i\in I}(p_1, \cdots, p_k)\Delta(\varphi_i)_{i\in I}(p_{k+1}, \cdots, p_{2k})$.

(v) $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{F}} \varepsilon_{\mathcal{F}}(\varphi)\Delta_{\mathcal{F}}\delta_{\mathcal{F}}(\varphi)$.
Dado que, para todo $i \in I$, $\langle \Delta_i, \langle \varepsilon_i, \delta_i \rangle\rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}_i$, então $\widehat{\pi}_i(\varphi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}_i} \varepsilon_i(\widehat{\pi}_i(\varphi))\Delta_i\delta_i(\widehat{\pi}_i(\varphi))$. Por definição de $\langle \Delta_{\mathcal{F}}, \langle \varepsilon_{\mathcal{F}}, \delta_{\mathcal{F}} \rangle\rangle$ temos que $\widehat{\pi}_i(\varphi) \dashv\vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\varepsilon_{\mathcal{F}}(\varphi)\Delta_{\mathcal{F}}\delta_{\mathcal{F}}(\varphi))$, para todo $i \in I$. Daqui, inferimos que $\varphi \dashv\vdash_{\mathcal{F}} \varepsilon_{\mathcal{F}}(\varphi)\Delta_{\mathcal{F}}\delta_{\mathcal{F}}(\varphi)$.

Isto mostra que $\langle \Delta, \langle \varepsilon, \delta \rangle\rangle$ é um algebrizador para $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$. Finalmente, devemos mostrar que $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ é o produto da categoria **RCA** da família $\mathcal{F}$. Usando a Observação 4.3.38, é evidente que toda projeção π_i é um **RCA**-morfismo. Suponha que $\mathcal{L}'$ é uma lógica algebrizável tendo um **RCA**-morfismo $\mathcal{L}' \xrightarrow{f_i} \mathcal{L}_i$, para todo $i \in I$, e seja $\langle \Delta', \langle \varepsilon', \delta' \rangle\rangle$ um algebrizador para $\mathcal{L}'$. Usando a propriedade universal do produto $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ na categoria **RC**, obtemos um **RC**-morfismo $\mathcal{L}' \xrightarrow{f} \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ tal que, em **RC**, $f_i = \pi_i \centerdot f$ para todo $i \in I$. Desde que $p_1\widehat{f_i}(\Delta')p_2 \vdash_{\mathcal{L}_i} p_1\Delta_i p_2$, para todo $i \in I$, então $\widehat{\pi}_i(p_1\widehat{f}(\Delta')p_2) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{\pi}_i(p_1\Delta p_2)$ para todo $i \in I$, pelo Lema 4.3.29, assim $p_1\widehat{f}(\Delta')p_2 \vdash_{\mathcal{F}} p_1\Delta p_2$. Analogamente, provamos que $p_1\Delta p_2 \vdash_{\mathcal{F}} p_1\widehat{f}(\Delta')p_2$. Usando a Observação 4.3.38, isto mostra que f é um **RCA**-morfismo tal que, na categoria **RCA**, $f_i = \pi_i \centerdot f$ para todo $i \in I$. A unicidade de f é conseqüência da propriedade universal do produto $\langle \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ na categoria **RC**.

$\square$

Usando os resultados acima podemos caracterizar as semânticas de traduções possíveis **STP**'s em termos categoriais. Com isso mostramos que as **STP**'s para uma lógica induz uma tradução conservativa sobre o produto das famílias de lógicas, na categoria **RC**, e vice-versa. Tal tradução conservativa induzida é apta para estender o método da algebrização finitária, e como vimos com aplicações interessantes, como por exemplo que as lógicas paraconsistentes podem ser algebrizáveis na mesma quase-variedade algébrica de

Łukasiewicz.

Teorema 4.3.40. *Dada uma semântica de traduções possíveis para uma lógica $\mathcal{L}$ existe uma tradução conservativa $\mathcal{L}\xrightarrow{f}\mathcal{L}'$ que a codifica (onde $\mathcal{L}'$ é o produto na categoria **RC** de alguma família de lógicas), e vice-versa.*

Demonstração. Seja $P = \langle\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ uma estrutura de traduções possíveis para $\mathcal{L}$, e considere o produto $\langle\mathcal{L}^{\mathcal{F}}, \{\pi_i\}_{i\in I}\rangle$ de uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ na categoria **RC** (cf. Proposição 4.3.36). Pela propriedade universal do produto, existe um único **RC**-morfismo $\mathcal{L}\xrightarrow{\mathbf{t}(P)}\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ tal que $f_i = \pi_i \centerdot \mathbf{t}(P)$ para todo $i \in I$. Afirmamos que $\mathbf{t}(P)$ é uma tradução conservativa que codifica P. Desde que esta é uma tradução conservativa (porque é um **RC**-morfismo), é suficiente mostrar que, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\Sigma)$,

$$\widehat{\mathbf{t}(P)}(\Gamma_{fin}) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{\mathbf{t}(P)}(\varphi) \text{ implica que } \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Assuma que $\widehat{\mathbf{t}(P)}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{\mathbf{t}(P)}(\varphi)$. Então, pela Definição de $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$, existe um conjunto $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\widehat{\pi}_i(\widehat{\mathbf{t}(P)}(\Delta_{fin})) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{\mathbf{t}(P)}(\varphi))$$

para todo $i \in I$ e, então, usando o Lema 4.3.29 e o fato de que $f_i = \pi_i \centerdot \mathbf{t}(P)$, para todo $i \in I$, temos que $\widehat{f_i}(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{f_i}(\varphi)$ para todo $i \in I$. Desde que P é uma semântica de traduções possíveis para $\mathcal{L}$, obtemos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ e assim $\mathbf{t}(P)$ é uma tradução conservativa. Claramente, $\mathbf{t}(P)$ junto com seu codomínio $\mathbf{L}(P) = \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ codifica P: toda lógica $\mathcal{L}_i$ é obtida como o codomínio de π_i, e toda tradução f_i é obtida como $f_i = \pi_i \centerdot \mathbf{t}(P)$.

Por outro lado, seja $\mathcal{L}\xrightarrow{f}\mathcal{L}'$ uma tradução conservativa, em que $\mathcal{L}'$ é um produto de uma família $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ de lógicas com projeções π_i para todo $i \in I$. Seja $f_i = \pi_i \circ f$ para todo $i \in I$, e defina $\mathbf{TP}(f) = \langle\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$. Devemos mostrar que $\mathbf{TP}(f)$ é uma **TP** para $\mathcal{L}$ que se converte em f. Assim, seja $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq L(\Sigma)$. Desde que toda f_i é uma tradução, é suficiente mostrar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ se existe $\Delta_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\widehat{f_i}(\Delta_{fin}) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{f_i}(\varphi)$ para todo $i \in I$. Assim, considere um conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\widehat{f_i}(\Delta) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{f_i}(\varphi)$ para todo $i \in I$. Pelo Lema 4.3.29,

$$\widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\Delta)) \vdash_{\mathcal{L}_i} \widehat{\pi}_i(\widehat{f}(\varphi))$$

para todo $i \in I$, em que $\widehat{f}(\Delta) \subseteq \widehat{f}(\Gamma)$ é finito. Assim $\widehat{f}(\Gamma) \vdash_{\mathcal{F}} \widehat{f}(\varphi)$ e então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, pelo fato de f ser conservativa. Isto mostra que $\mathbf{TP}(f)$

é uma **TP** para $\mathcal{L}$. Claramente, recordamos a informação sobre f e $\mathcal{L}'$ a partir de $\mathbf{TP}(f)$: de fato, $f = \mathbf{t}(\mathbf{TP}(f))$ e $\mathcal{L}'$ é o produto da família de lógicas de $\mathbf{TP}(f)$. Finalmente, é claro que, se P é uma **TP** para $\mathcal{L}$, então $\mathbf{TP}(\mathbf{t}(P)) = P$. Isto conclui a demontração. $\square$

Este resultado mostra, entre outras coisas, que a Definição 4.2.1 pode sempre ser reduzida a Definição 4.2.2 e tendo um ganho no que se diz respeito as traduções, pois estas são substituídas por uma única que é conservativa. Note que não estamos nos referindo, em momento algum, ao caso da Definição 4.2.3. A abordagem categorial considera apenas o caso mais geral, uma vez que os demais podem ser vistos como caso particular.

Vejamos de que forma conectamos estes dois resultados. Por um lado, o Teoremas 4.3.39 mostra que a categoria das lógicas algebrizáveis, respeitando as restrições de que o conjunto de algebrizadores é limitado, tem produto. Ou seja, mostramos que o produto preserva a algebrizabilidade. Por outro lado, o Teorema 4.3.40 mostra que a estrutura das semânticas de traduções possíveis pode ser vista como uma única tradução conservativa no produto. Com isso não é difícil notar que as semânticas algébricas de traduções possiveis relacionam a lógica a ser algebrizada com a quasevariedade do produto dos traductos via uma única tradução conservativa.

Uma possível generalização das SAPT's pode ser pensada, intuitivamente, como "aumentando a distância" que separa a lógica a ser algebrizada dos seus correspondentes algébricos. Por exemplo, suponha que $\mathcal{L}$ seja uma lógica que não seja finitamente algebrizável, mas que seja caracterizada via SATP's por uma classe de traductos T_i tais que eles próprios não sejam finitamente algebrizáveis, mas que por sua vez cada T_j seja caracterizado via STP's por uma classe de traductos que agora sejam sejam finitamente algebrizáveis. Suponhamos ainda que os conjuntos de algebrizadores envolvidos são limitados.

Será que seria conveniente definir algum tipo de SATP's mais rarefeita, de forma que $\mathcal{L}$ possa ser vista como tendo uma "SATP de segundo nível", mais fraca? Vamos mostrar que, graças a uma interessante propriedade das SATP's, uma definição desse tipo não tem lugar quando o conjunto de algebrizadores é limitado: nesses casos, ainda que pensássemos em dar níveis às SATP's, os níveis colapsariam, e bastaria o nível inicial!

Por meio do resultado a seguir, no exemplo hipotético que imaginamos acima, a lógica $\mathcal{L}$ vai ter, nesse caso, a ela associada uma SATP de pleno direito. Em outras palavras, os casos mais complexos se reduzem-se ao caso mais simples. Vamos primeiro dar uma definição dos níveis de SATP's, para depois mostrar de que forma os níveis colapsam.

Definição 4.3.41. Seja $\mathcal{S} = \langle \Sigma, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ um sistema dedutivo e $\mathbf{PA} = \langle \{(Trad_{\mathcal{S}})_t\}_{t \in T}, \{\mathcal{K}_t\}_{t \in T}, T \rangle$ uma SATP para $\mathcal{S}$. Definimos o *nível* das SATP's recursivamente:
(i) Uma SATP é de nível 0 se os traductos $Trad_{\mathcal{S}}$ são finitamente algebrizáveis;
(ii) Uma SATP é de nível $n + 1$ se $Trad_{\mathcal{S}}$ é de nível n.

Teorema 4.3.42. *(Colapso) Seja* $\mathbf{PA} = \langle \{(Trad_{\mathcal{S}})_t\}_{t \in T}, \{\mathcal{K}_t\}_{t \in T}, T \rangle$ *uma SATP de nível* n *para um sistema dedutivo* $\mathcal{S}$ *com algebrizadores globalmente limitados. Então existe uma SATP* $\boldsymbol{PA'}$ *de nível* 0 *para* $\mathcal{S}$ *com algebrizadores limitados.*

Demonstração. Fazemos a demonstração apenas esquemática; suponha que o esquema abaixo denote uma SATP de nível 2:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{S} \arrow[dll, "f_1"'] \arrow[drr, "f_n"] & & & \\
 & Trad_{\mathcal{S}_1} \arrow[dl, "t_1^1"'] \arrow[dr, "t_k^1"] & & \cdots & & Trad_{\mathcal{S}_n} \arrow[dl, "t_1^n"'] \arrow[dr, "t_m^n"] & \\
\mathcal{L}_1^1 \arrow[d, dotted, no head] & \cdots & \mathcal{L}_k^1 \arrow[d, dotted, no head] & \cdots & \mathcal{L}_1^n \arrow[d, dotted, no head] & \cdots & \mathcal{L}_m^n \arrow[d, dotted, no head] \\
\mathcal{K}_1^1 & \cdots & \mathcal{K}_k^1 & \cdots & \mathcal{K}_1^n & \cdots & \mathcal{K}_m^n
\end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 4.3.40 sabemos que, partindo das estruturas:
$\mathbf{PA^1} = \langle \{\mathcal{L}_i^s\}_{1 \leq i \leq k}, \{\mathcal{K}_i^s\}_{1 \leq i \leq k}, \{t_i^s\}_{1 \leq i \leq k} \rangle \ \ldots$
$\mathbf{PA^n} = \langle \{\mathcal{L}_j^r\}_{1 \leq j \leq m}, \{\mathcal{K}_j^r\}_{1 \leq j \leq m}, \{t_i^s\}_{1 \leq j \leq m} \rangle$
existem traduções conservativas tais que a situação se reduz a:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\
Trad_{\mathcal{S}_1} \arrow[d, "\bar{t}_1^1"'] & \cdots & Trad_{\mathcal{S}_n} \arrow[d, "\bar{t}_1^n"'] \\
Prod\{\mathcal{L}_i^1\}_{1\leq i\leq k} \arrow[d, dotted, no head] & \cdots & Prod\{\mathcal{L}_j^n\}_{1\leq j\leq m} \arrow[d, dotted, no head] \\
\mathcal{K}_*^1 & \cdots & \mathcal{K}_*^n
\end{tikzcd}$$

Considerando que cada $\bar{t}_i^k$ é uma tradução (conservativa) e cada f_k é também uma tradução, então a composição $t_i^k \circ f_k$ é uma tradução, que leva $\mathcal{S}$ em $Prod\{\mathcal{L}_j^k\}_{1\leq j\leq m}$.

Pelo Teorema 4.3.39 temos que $Prod\{\mathcal{L}_j^k\}_{1\leq j\leq m}$ é finitamente algebrizável e tem algebrizadores limitados, então por definição $\mathcal{S}$ tem uma SATP, que obviamente tem nível 0.

□

O próximo resultado é uma aplicação do Teorema 4.3.42 que vai mostrar que a lógica C_{Lim}, proposta por Carnielli e Marcos em [CM99] tem uma semântica algébrica de traduções possíveis.

No artigo, os autores mostram que C_{Lim} é caracterizado por uma semântica de traduções possíveis cujos traductos são as próprias lógicas paraconsistentes C_n. Como estas lógicas, por sua vez, são caracterizadas por semânticas de traduções possíveis cujos traductos são as mesmas LFI1, conforme explicado na Seção 3.3, o resultado será obtido basicamente compondo-se estes dois cenários.

Teorema 4.3.43. *A lógica paraconsistente C_{Lim} tem uma SATP.*

Demonstração. Aplicação direta do Teorema 4.3.42, levando em conta as razões dadas acima.

□

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Começando das álgebras de Boole chegamos até alguns resultados da álgebra universal, mostrando no caminho o que significa um sistema dedutivo ser algebrizável e algebrizando o cálculo proposicional clássico em detalhes. Por meio de exemplos, argumentamos sobre as limitações do conceito de algebrização clássica.

Discutimos minuciosamente os problemas de algebrização da lógica paraconsistente, explicando didáticamente como a hierarquia de lógicas paraconsistentes C_n falham em ser algebrizáveis.

Comparamos os resultados negativos sobre a algebrização com a proposta de algebrização finitária (ou algebrização de Blok-Pigozzi) que pretende estender a noção clássica creditada a Lindenbaum e Tarski. Mostramos que nessa nova acepção que a lógica P^1 é algebrizável, mas a hierarquia C_n continua a falhar.

Motivamos e discutimos com grande riqueza de detalhes a nova proposta de algebrizabilidade, as semânticas algébricas de traduções possíveis, frutos da concepção das semânticas de traduções possíveis.

Detemo-nos sobre questões instigantes a respeito do alcance da algebrizabilidade, como por exemplo o fato de lógicas com intenções radicalmente distintas como a paraconsistente J_3 e a lógica de Łukasiewicz $Ł_3$ serem algebrizáveis pela mesma quase-variedade algébrica (a variedade das MV-álgebras trivalentes de Moisil).

Mostramos que as semânticas algébricas de traduções possíveis de fato oferecem, finalmente, uma personalidade algébrica para a hierarquia C_n. Mas, mais que isso, esta personalidade algébrica estabelece impensadas conexões entre as lógicas paraconsistentes C_n e a lógica trivalente $Ł_3$ de Łukasiewicz.

Finalmente, reestruturamos todas as definições e construções das semânticas algébricas de traduções possíveis em termos da teoria das categorias, mostrando que definitivamente todos os conceitos por trás dessa proposta fazem parte do mais rigoroso e tradicional arcabouço matemático. Caracterizamos a importante (sub)categoria das lógicas Blok-Pigozzi algebrizáveis; provamos que o produto de certas famílias limitadas superiormente nesta categoria preserva a algebrizabilidade. As semânticas de traduções possíveis podem então ser revistas em termos categoriais como traduções conservativas num produto categorial de lógicas. Isso leva então a uma caracterização categorial das semânticas algébricas de traduções possíveis.

Todo o estudo feito para partir da algebrização mais elementar e chegar a tal caracterização categorial das semânticas algébricas de traduções possíveis abriu questões e esclareceu perspectivas. Os problemas mais interessantes são os seguintes:

Problema 1: Um problema que deixamos em aberto é decidir se um argumento análogo ao do Teorema 2.4.4 pode ser dado para as extensões conservativas $C_n^{\neg\neg}$ de C_n (cf. [Car00]). Essas extensões são obtidas a partir das lógicas C_n acrescentando-se a lei da introdução da dupla negação $\alpha \to \neg\neg\alpha$, consideradas no intuito de aproximar mais a dedução paraconsistente da dedução clássica. Conjecturamos que $C_n^{\neg\neg}$ também não são Blok-Pigozzi algebrizáveis, mas que podem ser algebrizáveis com respeito às semânticas algébricas de traduções possíveis.

Problema 2: Com base no resultado que anunciamos de que os cálculos da hierarquia I^n e P^n definidas em [FC03] são todos Blok-Pigozzi algebrizáveis, e ainda que para cada m, I^m e P^m são algebrizáveis na mesma quase-variedade, (cf. [Bue]), conjecturamos que cada par de lógicas duais pode ser algebrizável na mesma quase-variedade. Isso inclui investigar também se as definições de dualidade (como a apresentada em [BC03] são ou não adequadas para a questão da algebrizabilidade.

Problema 3: Um fato bastante curioso ocorre com a lógica modal $S5$. Existem três apresentações diferentes para esta lógica: a de Gödel, a de Carnap e a de Wajsberg, denotadas respectivamente por $S5^G$, $S5^C$ e $S5^W$. Esses sistemas têm todos os mesmos teoremas, porém não têm as mesmas regras de inferência derivadas, pois em $S5^G$ vale a regra de necessitação e em $S5^C$ não, com a conseqüência de que o meta-teorema da dedução é inválido na forma padrão, a não ser em $S5^C$. Como mostram Blok e Pigozzi em ([BP89] p. 47) , $S5^G$ é finitamente algebrizável, mas as formulações $S5^C$ e $S5^W$ não o são. A questão é mais profundamente abordada em ([BP] p. 14-19).

Este problema comporta duas linhas de ataque diferentes. Uma, mais ambiciosa, seria redefinir a noção de algebrizabilidade finitária de forma a levar em conta as sutilezas das diferenças entre o raciocínio local e global (referidos em [CS04] como *raciocínio cauteloso*).

Outra abordagem seria por meio das semânticas algébricas de traduções possíveis. Não parece difícil obter uma semântica de traduções possíveis de $S5^W$ em $S5^G$, e aplicar nossa definição. É possível que $S5^C$ possa ser tratado de maneira similar.

Problema 4: Uma das perspectivas mais promissoras é estender nossas definições categoriais de forma a considerar produtos de famílias com propriedades distintas das lógicas com algebrizadores limitados. Resultados de preservação da algebrizabilidade nesses casos serão aplicados a outras noções mais abstratas que a de Blok e Pigozzi, com conseqüências muito interessantes.

APÊNDICE

Capítulo 1

Demostração das observações a respeito da condição (Con3) da relação de conseqüência:

Fato 1 $(Con3) \Longrightarrow (Con3')$

Demonstração. Devemos mostrar que se $\Delta \vdash \alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$ e $\Gamma \vdash \beta$, então $\Delta \vdash \beta$.

Primeiramente, se $\Gamma \vdash \beta$, então, por (Con4), existe $\Gamma_{fin} \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_{fin} \vdash \beta$. Aplicando (Con2), temos que $\Delta, \Gamma_{fin} \vdash \beta$.
Do fato que $\Delta \vdash \alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$, então $\Delta \vdash \alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma_{fin}$, pois $\Gamma_{fin} \subseteq \Gamma$. Representamos Γ_{fin} pela seqüência $\gamma_0 \cdots \gamma_n$, daí, temos: $\Delta, \gamma_0 \cdots, \gamma_{n-1}, \gamma_n \vdash \beta$ e $\Delta \vdash \gamma_i$, para cada $\gamma_i \in \Gamma_{fin}$. Assumindo $\gamma_i = \gamma_n$ e aplicando (Con3), temos que $\Delta, \gamma_0 \cdots, \gamma_{n-1} \vdash \beta$.
Repetindo o mesmo raciocínio $(n-1)$–vezes temos que $\Delta \vdash \beta$

□

Fato 2 $(Con3) \Longrightarrow (Con3'')$

Demonstração. Devemos mostrar que se $\overline{\Delta} \vdash \beta$ então $\Delta \vdash \beta$, em que $\overline{\Delta} = \{\delta \in For : \Delta \vdash \delta\}$.
Suponha que $\overline{\Delta} \vdash \beta$. Por (Con4) sabemos que existem $\delta_1 \cdots \delta_n \in \overline{\Delta}$ tal que $\delta_1 \cdots \delta_n \vdash \beta$. Por outro lado, pela propriedade de $\overline{\Delta}$, sabemos que $\Delta \vdash \delta_i$, para cada δ_i, com $1 \leq i \leq n$. Chamemos, agora, a seqüência $\delta_1 \cdots \delta_n$ de Δ^n, daí temos que $\Delta^n \vdash \beta$ e que $\Delta \vdash \delta_i$ para cada δ_i, mas isso é o mesmo que $\Delta^{n-1}, \delta_1 \vdash \beta$ e $\Delta \vdash \delta_i$.

Para $i = 1$, temos que $\Delta^{n-1}, \delta_1 \vdash \beta$ e $\Delta \vdash \delta_1$, daí, por (Con3), temos que $\Delta^{n-1}, \Delta \vdash \beta$.

Repetindo esse mesmo raciocínio $(n-1)$–vezes, temos que $\Delta^{(n-n)}, \Delta \vdash \beta$. Note que $\Delta^0 = \emptyset$, daí, temos que, $\Delta \vdash \beta$. □

Fato 3 $(Con3') \Longrightarrow (Con3)$

Demonstração. Sabemos, por (Con1), que $\Gamma \vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e aplicando (Con2) temos que $\Delta, \Gamma \vdash \gamma$. Da hipótese de (Con3) sabemos que $\Delta \vdash \alpha$ e portanto, por (Con1), $\Delta, \Gamma \vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Temos também da hipótese de (Con3) que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Portanto, aplicando (Con3') em $\Delta, \Gamma \vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ temos que $\Delta, \Gamma \vdash \beta$ □

Fato 4 $(Con3'') \Longrightarrow (Con3)$

Demonstração. Suponhamos que $\Delta \vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Como $\Delta \vdash \alpha$, então, por (Con2), $\Delta, \Gamma \vdash \alpha$. Por (Con1) e (Con2) temos que $\Delta, \Gamma \vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \{\gamma : \Delta, \Gamma \vdash \gamma\}$. Dado que $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, então por (Con2) temos que$\{\gamma : \Delta, \Gamma \vdash \gamma\} \vdash \beta$ e então, por (Con3"), $\Delta, \Gamma \vdash \beta$. □

Lema 1.2.2

(b) $\vdash_{PC} (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Dem:

1. $\vdash_{PC} ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ [Ax3]
2. $\vdash_{PC} (\neg\varphi \to \neg\varphi)$ [Lm 1.2.2 (a)]
3. $\vdash_{PC} ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ [MP em 1 e 2]

(c) Se $\vdash_{PC} (\varphi \to \psi)$ e $\vdash_{PC} (\psi \to \lambda)$ então $\vdash_{PC} (\varphi \to \lambda)$.

Dem:

1. $\vdash_{PC} (\varphi \to \psi)$ [Hip]
2. $\vdash_{PC} (\psi \to \lambda)$ [Hip]
3. $\vdash_{PC} (\psi \to \lambda) \to (\varphi \to (\psi \to \lambda)$ [Ax1]
4. $\vdash_{PC} (\varphi \to (\psi \to \lambda)$ [MP em 2 e 3]
5. $\vdash_{PC} (\varphi \to (\psi \to \lambda)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda))$ [Ax2]
6. $\vdash_{PC} ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda))$ [MP em 4 e 5]
7. $\vdash_{PC} (\varphi \to \lambda)$ [MP em 1 e 6]

(d) Se $\vdash_{PC} (\varphi \to (\psi \to \lambda))$ então $\vdash_{PC} (\psi \to (\varphi \to \lambda))$.

Dem:

1. $\vdash_{PC} (\varphi \to (\psi \to \lambda))$ [Hip]
2. $\vdash_{PC} (\varphi \to (\psi \to \lambda)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda))$ [Ax2]
3. $\vdash_{PC} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda)$ [MP em 1 e 2]
4. $\vdash_{PC} \psi \to (\varphi \to \psi)$ [Ax1]
5. $\vdash_{PC} \psi \to (\varphi \to \lambda)$ [Lm 1.2.2 (c) em 4 e 3]

(k) $\vdash_{CP} \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Dem:

$(\Longrightarrow)$

1.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \wedge \beta)$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \neg\neg(\alpha \to \neg\beta)$	[$Def_\wedge$ em 1]
3.	$\vdash_{PC} \neg\neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (e)]
4.	$\vdash_{PC} \alpha \to \beta$	[MP em 2 e 3]
5.	$\vdash_{PC} \neg\neg\alpha \to \alpha$	[Lm 1.2.2 (e)]
6.	$\vdash_{PC} \neg\neg\alpha \to \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (c) em 5 e 4]
7.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \vee \neg\beta$	[$Def_\vee$ em 6]

$(\Longleftarrow)$

1.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \vee \neg\beta$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \neg\neg\alpha \to \neg\beta$	[$Def_\vee$ em 1]
3.	$\vdash_{PC} \alpha \to \neg\neg\alpha$	[Lm 1.2.2 (f)]
4.	$\vdash_{PC} \alpha \to \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (c) em 3 e 2]
5.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (f)]
5.	$\vdash_{PC} \neg\neg(\alpha \to \neg\beta)$	[MP em 4 e 5]
5.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \wedge \beta)$	[$Def_\wedge$ em 6]

(l) $\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \to \beta$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} (\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta))$	[Ax1]
2.	$\vdash_{PC} ((\neg\beta) \to (\alpha \to \neg\beta)) \to (\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\neg\beta))$	[Lm 1.2.2 (i)]
3.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\neg\beta)$	[MP em 1 e 2]
4.	$\vdash_{PC} \neg\neg\beta \to \beta$	[Lm 1.2.2 (e)]
5.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$	[Lm 1.2.2 (c) em 3 e 4]
6.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \to \beta$	[$Def_\wedge$ em 5]

(m) $\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \to \alpha$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\beta \to \alpha)$	[Ax1]
2.	$\vdash_{PC} (\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (i)]
3.	$\vdash_{PC} (\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta))$	[Lm 1.2.2 (c) em 1 e 2]
4.	$\vdash_{PC} (\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta))$	[Lm 1.2.2 (d)]
5.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\beta \to \neg\alpha))$	[Lm 1.2.2 (i)]
6.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \to (\neg\neg\beta \to \neg\alpha))$	[Lm 1.2.2 (c) em 4 e 5]
7.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \to \alpha$	[análogo *Dem* Lm 1.2.2 (l)]

(n) $\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	[Lm 1.2.2 (g)]
2.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$	[Lm 1.2.2 (d) em 1]
3.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$	[$Def_{\vee}$ em 2]

(o) $\vdash_{PC} \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$.

Dem: Imediato a partir do axioma 1 e definição do $\vee$.

(p) Se $\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (a)]
2.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (d) em 1]
3.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta))$	[Lm 1.2.2 (i) e (e) em 2]
4.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	[$Def_{\wedge}$ em 4]

(q) Se $\vdash_{PC} (\alpha \rightarrow \gamma)$ e $\vdash_{PC} (\beta \rightarrow \gamma)$, então $\vdash_{PC} (\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$.

Dem: Prova por redução ao aburdo.

1.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \gamma$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \beta \rightarrow \gamma$	[Hip]
3.	$\vdash_{PC} \neg((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$	[Hip. prov.]
4.	$\vdash_{PC} (\alpha \vee \beta) \wedge \neg\gamma$	[$Def_{\wedge}$ em 3]
5.	$\vdash_{PC} \alpha \vee \beta$	[Lm 1.2.2 (m) em 4]
6.	$\vdash_{PC} \neg\gamma$	[Lm 1.2.2 (l) em 4]
7.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \rightarrow \beta$	[$Def_{\vee}$ em 5]
8.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \rightarrow \gamma$	[Lm 1.2.2 (c) em 7 e 2]
9.	$\vdash_{PC} \neg\gamma \rightarrow \alpha$	[Lm 1.2.2 (i) e (e) em 8]
10.	$\vdash_{PC} \neg\gamma \rightarrow \neg\alpha$	[Lm 1.2.2 (i) e (e) em 1]
11.	$\vdash_{PC} \neg\alpha$	[MP em 6 e 10]
12.	$\vdash_{PC} \alpha$	[MP em 6 e 9]
13.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \neg\alpha$	[Lm 1.2.2 (p) em 12 e 13]

(s) Se $\vdash_{PC} (\alpha \to \beta)$ e $\vdash_{PC} (\alpha \to \gamma)$, então $\vdash_{PC} \alpha \to (\beta \vee \gamma)$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} \alpha \to \beta$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \alpha \to \gamma$	[Hip]
3.	$\vdash_{PC} \beta \to (\beta \vee \gamma)$	[Lm 1.2.2 (n)]
4.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\beta \vee \gamma)$	[Lm 1.2.2 (c) em 1 e 3]
5.	$\vdash_{PC} (\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma)))$	[Ax1]
6.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$	[MP em 4 e 5]
7.	$\vdash_{PC} ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))) \to ((\alpha \to \beta) \to$ $((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma)))$	[Ax1]
8.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma)))$	[MP em 6 e 7]
9.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$	[MP em 1 e 8]
10.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\beta \vee \gamma)$	[MP em 2 e 9]

(t) Se $\vdash_{PC} (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$.

Dem:

1.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	[Ax1]
2.	$\vdash_{PC} \neg\beta \to (\alpha \to \alpha)$	[Lm 1.2.2 (d) em 1]
3.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \to \alpha) \to \beta$	[Lm 1.2.2 (i) e (e) em 2]
4.	$\vdash_{PC} (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$	[$Def_{\wedge}$ em 4]

(v) $\vdash_{CP} \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Dem:

$(\Longrightarrow)$

1.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \vee \beta)$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\alpha \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (n)]
3.	$\vdash_{PC} \beta \to (\alpha \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (o)]
4.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha$	[Lm 1.2.2 (i) em 2]
5.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (i) em 3]
6.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha \wedge \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (r) em 4 e 5]
7.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \wedge \neg\beta$	[MP em 1 e 6]

($\Longleftarrow$)

1.	$\vdash_{PC} (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \neg(\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$	[$Def_\wedge$ em 1]
3.	$\vdash_{PC} (\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$	[Lm 1.2.2 (i)]
4.	$\vdash_{PC} \neg(\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg(\neg\beta \to \alpha)$	[Lm 1.2.2 (i) em 3]
5.	$\vdash_{PC} \neg(\neg\beta \to \alpha)$	[MP em 2 e 4]
6.	$\vdash_{PC} \neg(\beta \vee \alpha)$	[$Def_\vee$ em 5]
7.	$\vdash_{PC} \alpha \to (\alpha \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (o)]
8.	$\vdash_{PC} \beta \to (\alpha \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (n)]
9.	$\vdash_{PC} (\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	[Lm 1.2.2 (q) em 7 e 8]
10.	$\vdash_{PC} \neg(\beta \vee \alpha) \to \neg(\alpha \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (i) em 9]
11.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \vee \beta)$	[MP em 6 e 10]

(y) $\vdash_{PC} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Dem: Por redução ao absurdo.

($\Longrightarrow$)

1.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	[Hip.prov.]
3.	$\vdash_{PC} (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \gamma))$	[Lm 1.2.2 (v) em 2]
4.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \wedge \beta)$	[Lm 1.2.2 (m) em 3]
5.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \wedge \gamma))$	[Lm 1.2.2 (l) em 3]
6.	$\vdash_{PC} \alpha \to \neg\beta)$	[$Def_\wedge$ em 4]
7.	$\vdash_{PC} \alpha \to \neg\gamma$	[$Def_\wedge$ em 5]
8.	$\vdash_{PC} (\alpha \to (\neg\gamma \wedge \neg\beta))$	[Lm 1.2.2 (r) em 6 e 7]
9.	$\vdash_{PC} \alpha \to \neg(\gamma \vee \beta)$	[Lm 1.2.2 (v) em 8]
10.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \to \neg(\gamma \vee \beta))$	[$Def_\wedge$ em 1]
11.	$\vdash_{PC} (\alpha \to \neg(\gamma \vee \beta)) \wedge \neg(\alpha \to \neg(\gamma \vee \beta))$	[Lm 1.2.2 (p) em 9 e 10]

($\Longleftarrow$)

1.	$\vdash_{PC} (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	[Hip.prov.]
3.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \neg(\beta \vee \gamma)$	[$Def_{\wedge}$ em 2]
4.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$	[Lm 1.2.2 (v) em 3]
5.	$\vdash_{PC} (\neg\beta \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (l)]
6.	$\vdash_{PC} (\neg\beta \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\gamma$	[Lm 1.2.2 (m)]
7.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \neg\beta$	[Lm 1.2.2 (c) em 4 e 5]
8.	$\vdash_{PC} \alpha \rightarrow \neg\gamma$	[Lm 1.2.2 (c) em 4 e 6]
9.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \vee \neg\beta$	[$Def_{\wedge}$ em 7]
10.	$\vdash_{PC} \neg\alpha \vee \neg\gamma$	[$Def_{\wedge}$ em 8]
11.	$\vdash_{PC} (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\gamma)$	[Lm 1.2.2 (p) em 9 e 10]
12.	$\vdash_{PC} \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \gamma)$	[Lm 1.2.2 (k) em 11]
13.	$\vdash_{PC} \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	[Lm 1.2.2 (v) em 12]
14.	$\vdash_{PC} (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \wedge \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	[Lm 1.2.2 (p) em 13 e 1]

(z) Se $\vdash_{CP} \alpha_0 \leftrightarrow \beta_0$ e $\vdash_{CP} \alpha_1 \leftrightarrow \beta_1$ então $\vdash_{CP} (\alpha_0 \rightarrow \alpha_1) \leftrightarrow (\beta_0 \rightarrow \beta_1)$.

Dem:

($\Longrightarrow$)

1.	$\vdash_{PC} \alpha_0 \leftrightarrow \beta_0$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \alpha_1 \leftrightarrow \beta_1$	[Hip]
3.	$\vdash_{PC} \alpha_0 \rightarrow \alpha_1$	[Hip. prov]
4.	$\vdash_{PC} \beta_0$	[Hip. prov]
5.	$\vdash_{PC} \beta_0 \rightarrow \alpha_0$	[$Def_{\leftrightarrow}$ em 1]
6.	$\vdash_{PC} \alpha_0$	[MP em 4 e 5]
7.	$\vdash_{PC} \alpha_1$	[MP em 6 e 3]
8.	$\vdash_{PC} \alpha_1 \rightarrow \beta_1$	[$Def_{\leftrightarrow}$ em 1]
9.	$\vdash_{PC} \beta_1$	[MP em 7 e 8]

($\Longleftarrow$) Análogo ao anterior.

(w) $\vdash_{PC} (\alpha \wedge \beta)$ sse $\vdash_{PC} \alpha$ e $\vdash_{PC} \beta$.

Dem:

($\Longrightarrow$)

1.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta$	[Hip]
2.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$	[Lm 1.2.2 (l)]
3.	$\vdash_{PC} \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$	[Lm 1.2.2 (m)]
4.	$\vdash_{PC} \alpha$	[MP em 1 e 2]
5.	$\vdash_{PC} \beta$	[MP em 1 e 3]

($\Longleftarrow$)

1. $\vdash_{PC} \alpha$	[Hip]
2. $\vdash_{PC} \beta$	[Hip]
3. $\vdash_{PC} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	[Lm 1.2.2 (p)]
4. $\vdash_{PC} (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	[MP em 1 e 3]
5. $\vdash_{PC} (\alpha \wedge \beta)$	[MP em 2 e 4]

Lema 4.3.44. *Todo reticulado satisfaz as seguintes desigualdades:*
(1) $x \sqcap (y \sqcup z) \leq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$;
(2) $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

Dem: (1)
Como $inf\{x, y\} \leq y$ e $y \leq sup\{y, z\}$, então pela transitividade, temos que $inf\{x, y\} \leq sup\{y, z\}$, isto é:
(a) $(x \sqcap y) \leq y \sqcup z$.
Por raciocínio análogo temos também que:
(b) $(x \sqcap z) \leq (y \sqcup z)$:
Sabe-se também que $inf\{x, y\} \leq x$, isto é:
(c) $x \sqcap y \leq x$.

1. $(x \sqcap y) = (x \sqcap y) \sqcap (y \sqcup z)$	[Cond. (A) em (a)]
2. $(x \sqcap y) = (x \sqcap y) \sqcap x$	[Cond. (A) em (c)]
3. $(x \sqcap y) = [(x \sqcap y) \sqcap x] \sqcap (y \sqcup z)$	[Subst. 2 em 1]
4. $(x \sqcap y) = (x \sqcap y) \sqcap [x \sqcap (y \sqcup z)]$	[Assoc. em 3]
5. $(x \sqcap y) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$	[Cond. (A) em 4]
6. $(x \sqcap z) = (x \sqcap z) \sqcap (y \sqcup z)$	[Cond. (A) em (b)]
7. $(x \sqcap z) = [(x \sqcap z) \sqcap x] \sqcap (y \sqcup z)$	[Idemp. em 6]
8. $(x \sqcap z) = (x \sqcap z) \sqcap [x \sqcap (y \sqcup z)]$	[Assoc. em 7]
9. $(x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$	[Cond. (A) em 8]

De 5 e 9 concluímos que $x \sqcap (y \sqcup z)$ é um limite superior do conjunto $\{(x \sqcap y); (x \sqcap z)\}$. Pela Definição 1.3.8 o supremo de um conjunto é o menor limite superior, concluímos portanto que $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$.

A demonstração de (2) é análoga.

O Metateorema da Dedução em C_{min} e suas extensões axiomáticas

Provaremos aqui o Teorema da Dedução para C_{min} que será válido para qualquer extensão axiomática de C_{min}, em particular para Cil.

Lema 4.3.45. $\Gamma \vdash_L A \to A$.

Dem: Como $A \to (B \to A) \to ((A \to ((B \to A) \to A)) \to (A \to A))$ é uma instância do axioma C_{min} 2 e $A \to (C \to A)$ é o axioma C_{min} 1, então por Modus Ponens duas vezes temos que $A \to A$.

Teorema 4.3.46. *(Teorema da Dedução) Para qualquer extensão axiomática L de C_{min} temos:*

$$\Gamma, A \vdash_L B \textit{ sse } \Gamma \vdash_L A \to B$$

Dem:
($\Leftarrow$) Óbvio, em vista do fato que em L temos a regra de Modus Ponens.

($\Rightarrow$) Provaremos por indução no comprimento das derivações em L, adaptando argumento conhecido na literatura.

Suponhamos que $\Gamma, A \vdash_L B$ e seja $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ a sequência que deduz B a partir de Γ, A. Então cada A_i, com $1 \leq i \leq n$, é um elemento de Γ, ou A_i é A, ou A_i é obtido de A_j e $A_j \to A_i$ pela única regra de Modus Ponens.
Vamos provar, por indução em n, que $\Gamma \vdash_L A \to A_i$ para todo i.

(a) Para $n = 1$, a sequência tem um único elemento, a saber, $A_1 = B$. Logo A_1 é A ou $A_1 \in \Gamma$.

1. Se $A_1 = A$, então pelo Lema 4.3.45 $\Gamma \vdash_L A \to A = A_1$.
2. Se $A_1 = B \in \Gamma$, então do axioma C_{min} 1 temos que $B \to (A \to B)$. Como $B \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_L A \to B = A_1$.

(b) Para $n > 1$, suponhamos por hipótese de indução que $\Gamma \vdash_L A \to A_i$, para $i < n$, e vamos provar que $\Gamma \vdash_L A \to A_{i+1}$.
De fato, só interessa o caso onde A_{i+1} é obtido de A_j e $A_k = A_j \to A_{i+1}$, para $j, k < i$, por Modus Ponens, pois nos demais casos raciocinamos como no passo **(a)**.
Por hipótese de indução temos:

$$\Gamma \vdash_L A \to A_j \text{ e } \Gamma \vdash_L A \to A_k, \text{ isto é,}$$

$$\Gamma \vdash_L A \to A_j \text{ e } \Gamma \vdash_L A \to (A_j \to A_{i+1}).$$

Porém, pelo axioma C_{min} 2 ,

$$(A \to A_j) \to ((A \to (A_j \to A_{i+1})) \to (A \to A_{i+1}))$$

e por Modus Ponens duas vezes, obtemos que $\Gamma \vdash_L A \to A_{i+1}$.

Com o Teorema da Dedução podemos derivar o axioma 2 de PC (ver Capítulo 1), que é o que mostra o próximo Lema. Com isso todos os Lemas de PC que fazem uso somente dos axiomas 1 e 2 e a regra de Modus Ponens são válidos em C_{min}, logo em todas as sua extensões axiomáticas, inclusive Cil que estudaremos na próxima seção.

Lema 4.3.47. $\vdash_L A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Dem:

1. $\vdash_L A \to (B \to C)$ [Hip]
2. $\vdash_L A \to B$ [Hip]
3. $\vdash_L A$ [Hip]
4. $\vdash_L B$ [MP em 3 e 2]
5. $\vdash_L B \to C$ [MP em 3 e 1]
6. $\vdash_L C$ [MP em 4 e 5]

Portanto, aplicando o Teorema da Dedução 4.3.46 três vezes, temos que $\vdash_L A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Alv76] E. H. Alves. Lógica e inconsistência: um estudo dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1976.

[Bat89] D. Batens. Dynamic dialectical logics. In G. Priest, R. Routley e J. Norman, editores, *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, p. 187–217, Munique, 1989. Philosophia Verlag.

[BC03] A. B. M. Brunner e W. A. Carnielli. Anti-intuitionism and paraconsistency. *CLE e-Prints*, 3(1), 2003. URL=http://www.cle.unicamp.br/e–prints/vol_3,n_1,2003.html.

[BCC04] J. Bueno, M. E. Coniglio e W. A. Carnielli. Finite algebraizability via possible-translation semantics. In F. Miguel Dionísio W. A. Carnielli e Paulo Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04–Workshop on Combination of Logics Theory and Applications*, p. 79–85, Lisboa, 2004. Center for Logic and Computation–IST.

[Boo47] G. Boole. *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge, 1847. Reimpresso em Oxford em 1948.

[Boo58] G. Boole. *An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Dover, Nova York, 1958. Originalmente publicado em Londres por Macmillan em 1854.

[BP] W. J. Blok e D. Pigozzi. Abstract algebraic logic and the deduction theorem. Manuscrito.

[BP86] W. J. Blok e D. Pigozzi. Protoalgebraic logics. *Studia Logica*, 45:337–369, 1986.

[BP89] W. J. Blok e D. Pigozzi. *Algebraizable Logics*, volume 396 of *Memoirs of the American Mathematical Society.* American Mathematical Society, 1989.

[BP91] W. Blok e D. Pigozzi. Foreword. *Studia Logica, special issue*, 50(3/4):365–374, 1991.

[BR03] W. J. Blok e J. Rebagliato. Algebraic semantics for deductive systems. *Studia Logica*, 74:153–180, 2003.

[BS81] S. Burris e H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra.* Springer-Verlag Nova York Inc, Nova York, 1981.

[Bue] J. Bueno. Finite algebraizability and a simple proof-theory for the logics P^n and I^n. A aparecer.

[Bur98] S. N. Burris. *Logic for Mathematics and Computer Science.* Prentice Hall-Upper Saddle, Nova Jersey, 1998.

[Car90] W. A. Carnielli. Many-valued logic and plausible reasoning. In *Proceedings of the 20th International Congress on Many-Valued Logics*, p. 328–335, Universidade de Charlotte, Carolina do Norte, EUA, 1990. IEEE Computer Society.

[Car00] W. A. Carnielli. Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics. In D. Batens, C. Mortensen, G. Priest e J. P. Van Bendegem, editores, *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Logic and Computation Series, p. 149–163. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[CC02] M. E. Coniglio e W. A. Carnielli. Transfers between logics and their applications. *Studia Logica*, 72(3):367–400, 2002.

[CCCM03] C. Caleiro, W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e J. Marcos. Dyadic semantics for many-valued logics. A aparecer, 2003.

[CCM04] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e J. Marcos. *Logics of Formal Inconsistency*, volume Handbook of Philosophical Logic. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 2004. No prelo.

[CdA84] W. A. Carnielli e L. P. de Alcantara. Paraconsistent algebras. *Studia Logica*, 43(1/2):79–88, 1984.

[CDM95] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano e D. Mundici. *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*, volume 12. CLE-UNICAMP, 1995.

[CDM99] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano e D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many Valued Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Cha58] C. C. Chang. Algebraic analyses of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.

[Cha59] C. C. Chang. A new proof of completeness of the Łukasiewicz axioms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:74–90, 1959.

[CM99] W. A. Carnielli e J. Marcos. Limits for paraconsistent calculi. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40(3):375–390, 1999.

[CM02] W. A. Carnielli e J. Marcos. A taxonomy of **C**-systems. In W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e I. M. L. D'Ottaviano, editores, *Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent*, volume 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, p. 1–94, Nova York, 2002. Marcel Dekker.

[CMdA00] W. A. Carnielli, J. Marcos e S. de Amo. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, 8:115–152, 2000.

[Cân92] S. L. Cândido. Sobre a lógica não-alética. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 1992.

[Con04] M. E. Coniglio. Combinações de sistemas de conseqüência. Atas do XI Encontro Nacional de Filosofia (ANPOF). A aparecer, 2004.

[CP01] W. A. Carnielli e C. Pizzi. *Modalità e Multimodalità*. Franco Angeli, Milão, 2001.

[CS04] W. A. Carnielli e C. Sernadas. Preservation of Interpolation by Fibring. In F. Miguel Dionísio W. A. Carnielli e Paulo Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04–Workshop on Combination of Logics Theory and Applications*, p. 151–158, Lisboa, 2004. Center for Logic and Computation–IST.

[Cur63] H. B. Curry. *Foundations of Mathematical Logic.* McGraw-Hill Book company, Inc, 1963.

[Cze80] J. Czelakowski. *Model-Theoretic Methods in Methodology of Propositional calculi.* Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1980.

[dACM02] S. de Amo, W. A. Carnielli e J. Marcos. A logical framework for integrating inconsistent information in multiple databases. In T. Eiter e K.-D. Schewe, editores, *Proceedings of the 2nd Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems (FOIKS 2002)*, volume 2284 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 67–84, Berlim, 2002. Springer-Verlag.

[dC63] N. C. A. da Costa. *Sistemas Formais Inconsistentes.* Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 1963. Editado pela Editora UFPR, Curitiba, 1993.

[dC66] N. C. A. da Costa. Álgebras de Curry. Universidade de São Paulo, 1966. Tese de Cátedra.

[dC02] N. C. A. da Costa. *Science and partial truth.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[dCA77] N. C. A. da Costa e E. Alves. A semantical analysis of the calculi C_n. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 18(4):621–630, 1977.

[dCBB95] N. C. A. da Costa, J.-Y. Béziau e O. A. S. Bueno. Aspects of paraconsistent logic. *Bulletin of the IGPL*, 3(4):597–614, 1995.

[DdC70] I. M. L. D'Ottaviano e N. C. A. da Costa. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris (A-B)*, 270:1349–1353, 1970.

[dSDS99] J. J. da Silva, I. M. L. D'Ottaviano e A. M. Sette. Translations between logics. In X. Caicedo and C. H. Montenegro, editores, *Models, Algebras and Proofs*, p. 435–448, Nova York, 1999. Marcel Dekker.

[EC00] R. L. Epistein e W. A. Carnielli. *Computability: Computable Functions, Logic and the Foundations of Mathematics, with the timeline Computability and Undecidability.* Wadsworth/Thomson Learning, Belmont, CA, 2000. Segunda edição.

[EL42] S. Eilenberg e S. Mac Lane. Group extension and homology. *Annals of Mathematics*, 43:757–831, 1942.

[EL45] S. Eilenberg e S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.

[Eps00] R. L. Epstein. *Propositional Logics: The semantic foundations of logic,* with the assistance and collaboration of W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano, S. Krajewski e R. D. Maddux. Wadsworth-Thomson Learning. Segunda edição, 2000.

[FC03] V. L. Fernández e M. E. Coniglio. Combining valuations with society semantics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 13(1):21–46, 2003.

[FC04] V. L. Fernández e M. E. Coniglio. Fibring algebraizable consequence systems. In F. Miguel Dionísio W. A. Carnielli e Paulo Mateus, editores, *Proceedings of CombLog'04–Workshop on Combination of Logics Theory and Applications*, p. 93–98, Lisboa, 2004. Center for Logic and Computation–IST.

[Fei97] H. A. Feitosa. *Traduções Conservativas.* Tese de doutorado, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brasil, 1997.

[Fid77] M. M. Fidel. The decidability of the calculi C_n. *Reports Mathematical Logic*, 8:31–40, 1977.

[FJ96] J. M. Font e R. Jansana. *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*, volume 7 of *Lecture Notes in Logic.* Springer-Verlag, Berlim, 1996.

[FJP03] J. M. Font, R. Jansana e D. Pigozzi. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, 74:13–97, 2003.

[Fre79] G. Frege. *Begriffsschrift, eine der Arithmetischen Nachgebildete Formelsprache des Reinen Denkens.* Halle, 1879. Reimpresso em 1964.

[Fre93] G. Frege. *Grundgesetze der Mathematik, begriffsscriftlich abgeleitet*, volume 1. Jena, 1893. Reimpresso em 1962.

[Fre03] G. Frege. *Grundgesetze der Mathematik, begriffsscriftlich abgeleitet*, volume 2. Jena, 1903. Reimpresso em 1962.

[FS90] P. J. Freyd e A. Scedrov. *Categories, Allegories.* Amsterdam, Holanda, North-Holland, 1990.

[Gol84] R. Goldblatt. *Topoi: the Categorial Analysis of Logic.* North Holland, Nova York, 1984. Edição revisada.

[Hif03] C. Hifume. Uma Teoria da Verdade Pragmática: A Quase–Verdade de Newton da Costa. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2003.

[How02] E. Howard. *Introdução a história da matemática.* Coleção Repertórios. UNICAMP. Terceira edição, 2002. tradução: Hygino H. Domingues.

[LA80] A. Loparić e E. H. Alves. The semantics of the systems C_n of da Costa. In A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e A. M. Sette, editores, *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, p. 161–172, São Paulo, 1980. Sociedade Brasileira de Lógica.

[LMS90] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg e M. G. Schwarze. Algebraization of paraconsistent logic $\mathbf{P}^1$. *The Journal of Non-Classical Logic*, 7(1/2):79–88, 1990.

[LMS91] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg e M. G. Schwarze. C_1 is not algebraizable. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32(4):609–611, 1991.

[Mar] J. Marcos. Possible-translations semantics for some weak classicaly-based paraconsisent logics. Manuscrito.

[Mar95] J. P. Marquis. Category theory and the foundations of mathematics: Pholosophical excavations. *Synthese*, 103:421–447, 1995.

[Mar99] J. Marcos. Semânticas de Traduções Possíveis. Dissertação de mestrado, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brasil, 1999.
URL = http://www.cle.unicamp.br/pub/thesis/J.Marcos/.

[Mar04] J. P. Marquis. Category theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Spring 2004.

[Men64] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* D.Van Nostrand company, Inc, Londres, 1964.

[Mir87] F. Miraglia. *Cálculo Proposicional: Uma Interação da Álgebra e da Lógica*, *Coleção CLE*, volume 1. CLE-UNICAMP, Campinas, S.P, 1987.

[Mor80] C. Mortensen. Every quotient algebra for C_1 is trivial. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 21(4):694–700, 1980.

[Mor89] C. Mortensen. Paraconsistency and C_1. In G. Priest, R. Routley e J. Norman, editores, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, p. 289–305, Munique, 1989. Philosophia Verlag.

[Pac94] L. Pacioli. *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*. Veneza, 1494.

[Pop59] K. R. Popper. *The Logic of Scientific Discovery*. Hutchinson & Co., Ltd., Londres, 1959. (English translation of *Logik der Forschung*, Julius Springer Verlag, Vienna, 1936).

[Ras74] H. Rasiowa. *An algebraic aproach to non-classical logics*, volume 78. North-Holland., Amsterdam, 1974.

[Rec69] R. Record. *The Whetstone of witte*. Da Capo Press, Nova York, 1969. Originalmente publicado em Londres em 1557.

[RS53] H. Rasiowa e R. Sikorski. *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*, volume 40. Fundamenta Mathematicae, 1953.

[RS68] H. Rasiowa e R. Sikorski. *The mathematics of metamathematics*. Polish scientific publisher, Warszawa, 1968. Segunda edição.

[RW13] B. Russell e A. Whitehead. *Principia Mathematica*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1910-1913. 3 Vols.

[SC95] A. M. Sette e W. A. Carnielli. Maximal Weakly-Intuitionistic Logics. *Studia Logica*, 55:181–203, 1995.

[Sch05] E. Schröder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Karl Eugen Müller e B. G. Teubner, Leipzig, 1890-1905. 3 Vols.

[Sch60] K. Schütte. *Beweistheorie*. Springer-Verlag, 1960.

[Sch97] M. Schroeder. A brief history of the notation of Boole's algebra. *Nordic Journal of Philosofical Logic*, 2(1):41–62, 1997.

[Set71] A. M. Sette. Sobre as álgebras e hiper-reticulados C_ω. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1971.

[Set73] A. M. Sette. On the Propositional Calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, 18(13):173–180, 1973.

[Tar35] A. Tarski. Grundzüge der systemenkalküls. *Fundamenta Mathematica*, 25:503–526, 1935.

[Tar83] A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics. Artigos de 1923 a 1938*. J. Corcoran, Hackett Pub. Co., Indianapolis, Indiana. Segunda edição, 1983.

[Viè91] F. Viète. *In Artem Analyticem Isagoge*. Tours, 1591.

Índice Remissivo de Autores

Índice Remissivo de Conceitos

Índice Remissivo de Simbolos