

Carlos Gustavo [González] 588

# Ordens Densas, Partições e o Axioma da Escolha

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Paulo de [Alcantara] #

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 25/03/74.

[Handwritten signature]



UNICAMP

março de 1994

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

# Agradecimentos

Ao Prof. Luiz Paulo de Alcantara pelas diversas sugestões e críticas, que muito me auxiliaram na elaboração deste trabalho.

Aos Profs. Carlos A. Lungarzo e Walter A. Carnielli pelos comentários e pelo estímulo constante. Também ao Prof. Max Dickmann, que realizou uma detalhada leitura, e me beneficiou com inúmeras sugestões.

Eu gostaria ainda de agradecer muito especialmente ao Prof. Carlos A. Di Prisco, que me guiou na primeira parte das pesquisas desta tese.

# Introdução

Para melhor situar o nosso trabalho pensamos que é conveniente começar oferecendo um breve comentário histórico acerca do surgimento e evolução da noção de ordem densa, já que ocupa um lugar de destaque neste estudo.

Embora desde a Antiguidade tem-se usado noções tais como “divisível ao infinito”, o primeiro conceito de densidade que conhecemos aparece com Cantor, num contexto que o coloca consideravelmente perto da noção topológica atual. Com efeito, Cantor diz:

Seja  $P$  total ou parcialmente contido num intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Então pode acontecer o notável caso de que *todo* intervalo  $[\gamma, \delta]$  contido em  $[\alpha, \beta]$ , *por menor que ele seja*, contenha pontos de  $P$ . Em tal caso, diremos que  $P$  é *denso* (*überall-dicht*) *no intervalo*  $[\alpha, \beta]$ . (CANTOR [1879], p. 2).

Antes de fazer qualquer comentário desta citação devemos prevenir o leitor de que a nossa tradução usa tanto uma notação como uma terminologia modernas, as quais são anacrônicas em um artigo de 1879. Também devemos explicitar que Cantor está analisando nesse artigo somente os subconjuntos de pontos da reta real.

O estudioso atual pode estranhar nesse artigo a menção da ordem, tomando em conta que ele tem por tema conjuntos de pontos lineares (hoje diríamos: linearmente ordenados). Acontece que nessa época não existia um conceito de ordem considerada como algo independente, ou seja, como uma relação existente entre elementos de um determinado conjunto. Aliás, bem podemos dizer que o caminho que conduz à noção atual de ordem, que considera a ordem como uma entidade independente do conjunto de base, tem, com o artigo citado, um importante avanço.

O termo denso (*überalldicht*) volta a aparecer nos trabalhos posteriores de Cantor. Em particular, em um artigo de 1895 aparece o conceito de densidade tal como ele é entendido em nosso trabalho. Com efeito, estudando as propriedades do conjunto  $R$  dos números racionais, diz:

Em terceiro lugar,  $R$  tem a propriedade que entre dois dos seus elementos do domínio sempre tem outro; nós expressamos esta característica com as palavras:  $R$  é “denso” (*überalldicht*).

(CANTOR [1895])

Aqui o conceito de densidade aparece mais ligado ao de ordem, por causa do uso da noção de “estar entre”. A utilização do mesmo termo (ou seja, *überalldicht*), está justificada pelo fato de que um conjunto ordenado  $\langle x, < \rangle$  é denso no sentido desta última citação se e somente se  $x$  é denso em  $\langle x, < \rangle$

considerado como intervalo. Esta última noção de densidade resulta suficientemente interessante como para vindicar a importância de uma pesquisa detalhada, mas surpreendentemente as investigações relativas a essa noção têm acontecido somente de maneira muito parcial. Por isso, vejamos rapidamente as pesquisas mais relevantes enquanto continuamos com a nossa síntese histórica.

No último artigo citado, Cantor assinala que a ordem dos racionais é linear, densa e sem extremos, e denomina  $\eta$  ao tipo de ordem dessas características sobre um conjunto enumerável. Nesta base, demonstrou um teorema notável: se  $x$  e  $y$  são dois conjuntos enumeráveis e  $\langle x, <_x \rangle$  e  $\langle y, <_y \rangle$  são duas ordens lineares, densas e sem extremos, então  $\langle x, <_x \rangle$  e  $\langle y, <_y \rangle$  são isomorfos segundo a ordem. Ademais da significação própria deste resultado, a técnica usada por Cantor resultou aplicável em outros casos, e generalizável na teoria de modelos. Neste sentido, Fraïssé criou o método do “va-et-vient”, obtendo interessantes resultados sobre isomorfismos parciais. Apesar deste bom começo no estudo das ordens densas, a preocupação de Cantor, e de seus colaboradores e discípulos, centrou-se em três tipos de problemas fundamentais: cardinalidade, boa-ordem e contínuo.

No final do trabalho de Cantor tem paulatinamente mais e mais importância o problema da boa-ordem do contínuo, que pode ser formulado da seguinte maneira: o contínuo pode ser bem-ordenado? Em 1900, o problema

do contínuo merece o número um quando Hilbert enuncia os seus “Mathematische Probleme”, as questões abertas mais significativas do momento. Nessa época, os estudos sobre ordens eram quase todos referidos à boa-ordem. Esta situação alcança perfis dramáticos com a demonstração de Zermelo de 1904: “Todo conjunto pode ser bem-ordenado”, aparecendo na cena o Axioma da Escolha (AE) e uma dura polêmica em torno dele.

Assim, as ordens densas estavam quase totalmente esquecidas quando Hausdorff apresenta as suas definições dos tipos de ordem  $\eta_\alpha$ , uma generalização da ordem  $\eta$  baseada em cardinalidade. Entre 1908 e 1914, os trabalhos de Russell, Hausdorff, Löwenheim e outros começam a construir a ponte entre o enfoque da lógica das relações, tal como aparecia em, por exemplo, Schröder, e o conjuntista. Nessa época é publicada, também, a axiomatização de Zermelo da teoria de conjuntos. Com isto, fica tudo pronto para o desenvolvimento de uma teoria geral das ordens, mas as ordens densas ficam quase esquecidas, sendo ainda as boas-ordens e o contínuo as que geram o monopólio do interesse.

Por outra parte, com a prova de independência do AE que ofereceu Fraenkel em 1920, começa um outro grande campo de pesquisa: o das provas de independência e consistência relativa. Mas este caminho nasceu e ficou estreitamente ligado às boas ordens, em detrimento dos outros gêneros de ordens e, em particular, as densas. Esta deve ser, segundo acreditamos, a razão pela

qual foram objeto de um detalhado estudo enunciados como: “para todo conjunto  $x$ , existe um ordinal  $\alpha$  tal que existe uma função injetora de  $x$  em  $\mathcal{P}(\alpha)$ ”, enquanto ninguém propôs investigar o que acontecia com o enunciado “todo conjunto infinito pode ser linear e densamente ordenado”.

O fato recém descrito foi a motivação inicial do estudo aqui apresentado. No começo, colocamos as definições de tipo de ordem que figuram no Cap. 1 (e outras que logo abandonamos por considerar-las pouco interessantes), e os enunciados a elas vinculados, colocando a questão das relações dedutivas entre esses enunciados e, ademais, as que tinham com AE e as formas fracas deste último.

Mas, quando fomos desenvolvendo os primeiros passos do nosso trabalho, percebermos a estreita relação desses enunciados com a existência de partições. Voltamos a vista a enunciados sobre partições, alguns dos quais tinham sido propostos em datas tão longínquas como 1924. Esse fato explica a estrutura deste estudo.

Com efeito, poderíamos resumir o conteúdo desta tese da maneira seguinte. No Cap. 1 apresentamos as definições de ordens e alguns fatos básicos sobre eles. Os resultados enunciados tanto neste capítulo como nos seguintes se referem a ZF, ou seja, sem o uso do AE. Para seguir o roteiro da nossa pesquisa precisamos da técnica dos modelos de permutação, e por esse motivo preferimos esclarecer notação e contexto oferecendo uma exposição do

método e de alguns modelos conhecidos no Cap. 2. Logo, para poder expor os nossos resultados sobre ordens densas, devemos apresentar antes aqueles relativos a partições, o que acontece no Cap. 3. Contudo, achamos que os enunciados que figuram neste capítulo possuem um interesse independente da sua relação com as ordens. Finalmente, o Cap. 4 apresenta os resultados finais sobre ordens densas, respondendo à quase totalidade das questões que colocamos ao início da nossa pesquisa.

Para finalizar com esta introdução, acreditamos conveniente oferecer um breve comentário sobre a originalidade deste trabalho. Primeiro, devemos dizer que o Cap. 2 é uma mera exposição, e tem resultados bem conhecidos que podem ser encontrados na literatura. Com os outros capítulos tomamos o cuidado de explicitar toda vez que temos conhecimento de que um resultado pertence a outro autor e quando é apenas uma generalização de resultados conhecidos. Os demais exemplos, contra-exemplos, proposições, lemas, teoremas e corolários são, com dependência do nosso conhecimento do tema, originais. No início de cada capítulo oferecemos comentários adicionais sobre a autoria e dificuldade das provas.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Ordens densas</b>	<b>1</b>
1.1	Definições e fatos básicos . . . . .	2
1.2	Ordens densas e ordens lineares . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modelos de permutação</b>	<b>12</b>
2.1	Considerações gerais . . . . .	14
2.2	O modelo básico de Fraenkel . . . . .	20
2.3	O segundo modelo de Fraenkel . . . . .	21
2.4	O modelo de Mostowski . . . . .	22
2.5	Os métodos de Jech e Sochor . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Partições de conjuntos infinitos</b>	<b>32</b>
3.1	Implicações entre propriedades . . . . .	33
3.2	Resultados de independência entre propriedades . . . . .	43
3.3	Implicações e independência entre os enunciados correspondentes . . . . .	58

4	Relações entre ordens densas e partições	75
4.1	Implicações entre ordens densas e partições de conjuntos infinitos . . . . .	75
4.2	Ordens lineares densas e o princípio de ordem linear	80
	Apêndice A Axiomas da teoria de conjuntos	85
A.1	Axiomas de ZF . . . . .	85
A.2	O axioma da escolha (AE) . . . . .	87
A.3	Axiomas de ZFA . . . . .	88
	Bibliografia	89
	Índice de figuras	93
	Índice de nomes	94
	Índice de conceitos	95

# Capítulo 1

## Ordens densas

Este capítulo está dividido em duas secções. A primeira constitui uma abordagem inicial ao nosso estudo das ordens, e por isso as definições ocupam a maior parte dela. Esta secção termina com duas proposições de demonstração bastante simples, mais interessantes.

A segunda secção consta fundamentalmente de dois teoremas. O método introduzido no primeiro, o colapso finito de uma ordem, foi criado por nós com independência do método de condensação (ver ROSENSTEIN [1982], Cap. 4), mas a medida que foi sendo desenvolvido, foi ficando clara a analogia existente entre eles.

A importância do teorema 1.2 não é evidente num primeiro momento, mas aparece como um fato curioso que uma propriedade da soma de cardinais infinitos tenha algo a ver com as ordens lineares densas. O que acontece é o seguinte: para provar a independência do enunciado “todo conjunto infinito

pode ser linear e densamente ordenado” com relação ao Axioma de Escolha (AE), utilizamos um método indireto, que consistiu em encontrar enunciados conhecidos mais fracos que AE, mas que implicaram o enunciado referido. Desta maneira, o teorema 1.2 é usado no Cap. 4 para essa prova de independência.

## 1.1 Definições e fatos básicos

Começaremos com algumas definições necessárias para desenvolver o nosso estudo.

DEFINIÇÃO 1.1 Uma *ordem* é uma relação irreflexiva e transitiva. Nós vamos usar sempre o símbolo  $<$  nesse sentido (possivelmente com subíndices ou superíndices). A fórmula  $x < y \vee x = y$  é abreviada por  $x \leq y$ .

DEFINIÇÃO 1.2 Dado  $\langle A, < \rangle$ , diremos que  $<$  é uma *ordem densa sobre A* se vale

$$x < y \rightarrow \exists z \in A(x < z \wedge z < y)$$

Se o conjunto  $A$  fica claro por contexto, diremos simplesmente que  $<$  é densa.

Este conceito de ordem densa não é suficiente para representar a idéia intuitiva de ordem densa, pois  $\emptyset$  é uma ordem densa trivial sobre qualquer conjunto. Por este motivo oferecemos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.3 Dado  $\langle A, < \rangle$ , dizemos que  $<$  é uma *ordem densa não-trivial sobre A* se  $<$  é uma ordem densa sobre  $A$  que satisfaz ademais a seguinte condição:

$$\exists x \in A \exists y \in A x < y$$

Temos outros dois conceitos estreitamente relacionados com os recém vistos:

DEFINIÇÃO 1.4 Dado  $\langle A, < \rangle$ , dizemos que  $<$  é uma *ordem densa em todas partes sobre A* se  $<$  é uma ordem densa e satisfaz a condição adicional:

$$\forall x \in A \exists y \in A (x < y \vee y < x)$$

DEFINIÇÃO 1.5 Dado  $\langle A, < \rangle$ , dizemos que  $<$  é uma *ordem densa em alguma parte sobre A* se  $<$  satisfaz a seguinte condição:

$$\exists a \in A \exists b \in A \left( a < b \wedge \forall c \in A \forall d \in A \left( a \leq c < d \leq b \rightarrow \exists h \in A (c < h < d) \right) \right)$$

DEFINIÇÃO 1.6  $\langle A, < \rangle$  é uma *ordem linear* sobre  $A$  se  $<$  é uma ordem que satisfaz:

$$\forall x \in A \forall y \in A (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

Uma *ordem linear densa* tem a definição óbvia.

As definições de boa-ordem, elementos primeiro, último, maximal e minimal são as comuns na literatura. Também, como é usual, usamos o termo “anti boa-ordem” para nos referir à ordem inversa de uma boa-ordem.

A existência de uma ordem densa não trivial sobre um conjunto implica que esse conjunto é infinito. Assim, nossos enunciados têm a seguinte forma:

DEFINIÇÃO 1.7 ODNT (OL, OLD) são os enunciados “todo conjunto infinito pode ser não trivialmente densamente ordenado” (“todo conjunto pode ser linearmente ordenado”, “todo conjunto infinito pode ser linear e densamente ordenado”). (Note-se que OLD implica OL).

DEFINIÇÃO 1.8 Dado  $\langle A, < \rangle$ , um *intervalo* é um conjunto  $I \subseteq A$  tal que  $x \in I \wedge y \in I \wedge x < z < y \rightarrow z \in I$ . Um intervalo é *não-trivial* se  $|I| > 1$ . (Usamos a notação  $|x|$  para indicar o cardinal de um conjunto  $x$ .) Dado  $\langle A, < \rangle$ , um intervalo  $I$  é dito *inicial* se  $x \in I$  e  $y < x$  implica

$y \in I$ . Análogamente, é dito *final* se  $x \in I$  e  $x < y$  implica  $y \in I$ . (Na literatura, os termos “segmento” e “subconjunto convexo” são as vezes utilizados em lugar de intervalo. Por outra parte, o termo intervalo é usado por alguns autores num sentido mais restrito: quando é definível em função dos extremos, permitindo a notação habitual (p. ex.  $(a, b]$ ). A nossa definição coincide com as de ROSENSTEIN [1982], p. 10, e FRAÏSSÉ [1986], p. 34.)

No que segue, vamos analisar algumas equivalências entre enunciados que implicam a existência de ordens densas.

PROPOSIÇÃO 1.1 *Seja  $\langle A, < \rangle$  uma ordem densa não-trivial. Então  $<$  pode ser estendida a uma ordem densa em todas partes sobre  $A$ .*

*Prova.* Seja  $\langle A, < \rangle$  uma ordem densa não trivial. Então, existem  $a$  e  $b$  em  $A$  tais que  $a < b$ . Seja  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ . Seja, ademais,  $B$  o conjunto de todos aqueles elementos de  $A$  que não são comparáveis com nenhum outro:  $B = \{x \in A : \neg \exists y (x < y \vee y < x)\}$ . Agora definimos  $<' = (< \cup ((a, b) \times B))$ . Obviamente  $\langle A, <' \rangle$  é uma ordem densa em todas partes.  $\square$

PROPOSIÇÃO 1.2 *Seja  $A$  um conjunto tal que exista uma ordem densa em alguma parte sobre  $A$ . Então, existe uma ordem densa em todas partes sobre  $A$ .*

*Prova.* Seja  $\langle A, < \rangle$  uma ordem densa em alguma parte sobre  $A$ . Então, existem  $a$  e  $b$  em  $A$  tais que  $a < b$  e  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  é um intervalo denso (ou seja, um intervalo não trivial que é denso em todas partes). Agora definimos  $<'$ , a restrição de  $<$  a  $[a, b]$ , como:  $<' = < \upharpoonright_{[a,b]} = < \cap \{(x, y) : a \leq x, y \leq b\}$ . Ademais, seja  $B = A \setminus [a, b] = \{x : a \not\leq x \vee x \not\leq b\}$ . Então, definimos:  $<'' = <' \cup ((a, b) \times B)$ . É fácil ver que  $<''$  é uma ordem densa em todas partes sobre  $A$ .  $\square$

## 1.2 Ordens densas e ordens lineares

A existência de uma ordem linear sobre um conjunto infinito  $A$  implica a existência de uma ordem densa não trivial sobre  $A$ . A construção utilizada aqui (isto é, o colapso finito de uma ordem), está estreitamente vinculada com o método de condensação (ver ROSENSTEIN [1982], Cap. 4).

**TEOREMA 1.1** *Seja  $A$  um conjunto infinito e  $\langle A, < \rangle$  uma ordem linear. Então existe uma ordem densa não trivial sobre  $A$ .*

*Prova.* Se  $A$  contém um intervalo infinito bem-ordenado, ou anti bem-ordenado, então usamos um segmento enumerável desse intervalo e uma bijeção com os racionais para definir um subconjunto de  $A$  com uma ordem linear densa. Logo, temos uma ordem densa em alguma parte sobre  $A$  e



podemos proceder como no lema 1.2 para obter uma ordem densa não trivial sobre  $A$ .

Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\langle A, < \rangle$  não tem intervalos dessas formas. Então, usando  $<$  definiremos outra ordem  $<'$  a qual colapsa os intervalos finitos. Procedendo assim, sejam  $x, y \in A$  e seja  $<_{\mathbb{N}}$  a ordem natural dos inteiros positivos. Então, definimos:

$$x <' y \leftrightarrow \\ \leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists n \in \omega \left( \forall m <_{\mathbb{N}} n \left( a_m \in A \wedge a_0 = x \wedge a_n = y \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \wedge a_m < a_{m+1} \wedge \neg \exists z \in A (a_m < z < a_{m+1}) \right) \right)$$

É fácil ver que  $<'$  é uma ordem. Para mostrar que é densa, sejam  $a, a' \in A$ ,  $a <' a'$ . Note que colapsam somente uma quantidade finita de elementos, no sentido que, dados  $x$  e  $y$ , o conjunto  $Z = \{z \in A : x < z < y \rightarrow x \not<' z\}$  é finito. Para ver isto, suponha que  $Z$  é infinito. Então, para todo  $n \in \omega$  existem  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que  $x = a_0 < a_1 < \dots < a_n = z$  com  $a_{i+1}$  sucessor de  $a_i$  com respeito a  $<$ . Logo, todos os intervalos iniciais de  $Z$  são finitos, e portanto  $Z$  tem um intervalo inicial de tipo de ordem  $\omega$ , o que é contraditório com nossos pressupostos. Um argumento análogo pode ser realizado para  $Z' = \{z \in A : x < z < y \rightarrow z \not<' y\}$ , com respeito a um intervalo final de tipo de ordem  $\omega^*$ . Por outra parte, temos que  $H = \{z \in A : x < z < y\}$  é

infinito, pois  $x <' y$ . Portanto, existe um  $z \in A$  tal que  $z \notin Z, Z'$ , e assim temos  $x <' z <' y$ .

Finalmente, como  $A$  é infinito,  $\langle A, < \rangle$  deve incluir mais que um intervalo finito, ou seja, há elementos de  $A$  que não colapsarão com a definição de  $<'$ . Portanto,  $<'$  é não trivial.  $\square$

COROLÁRIO 1.1  $ZF \vdash OL \rightarrow ODNT \square$

Da prova do último teorema, obtemos imediatamente o seguinte:

COROLÁRIO 1.2 *Seja  $\langle A, < \rangle$  uma ordem linear. Então, ou  $A$  tem um subconjunto enumerável, ou existe uma subordem densa de  $\langle A, < \rangle$ .*  $\square$

AE implica OLD em ZF. Mas, em lugar de dar uma prova disto, vamos derivar OLD de uma conjunção de enunciados que é mais fraca que AE. Deste modo, facilitaremos a nossa tarefa porterior, quando deveremos provar a independência de AE com respeito a OLD. Em primeiro lugar, precisamos de algumas definições. A seguinte é devida a ELLENTUCK [1965].

DEFINIÇÃO 1.9 Um cardinal  $\mathfrak{m}$  chama-se *idemmúltiplo* se  $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ .

DEFINIÇÃO 1.10 A *Hipótese de Idemmúltiplos*, HI, é o enunciado “todo cardinal infinito é idemmúltiplo”. Equivalentemente, podemos dizer: “para todo conjunto infinito  $x$ , existe uma bijeção  $f$ , tal que  $f: x \times 2 \longrightarrow x$ ”.

Halpern e Howard demonstraram que a Hipótese de Idemmúltiplos, HI, é equivalente ao seguinte enunciado: “para todo cardinal infinito  $\mathfrak{m}$  vale  $\mathfrak{m} \times \aleph_0 = \mathfrak{m}$ ” (ver HALPERN HOWARD [1970] p. 489).

TEOREMA 1.2  $ZF + OL + HI \vdash OLD$ .

*Prova.* Seja  $x$  um conjunto infinito. Pela HI existe uma bijeção entre  $2 \times x$  e  $x$  e, pelo resultado de Halpern e Howard também existe uma bijeção entre  $\aleph_0 \times x$  e  $x$ . Agora partimos  $x$  em conjuntos enumeráveis da maneira seguinte: se  $y \in x$ , então definimos  $x_y = \{z \in x : \exists n \in \omega f(n, y) = z\}$ . Ademais, seja  $X = \{x_y : y \in x\}$ . Como estamos supondo OL, existe uma ordem linear sobre  $X$ . Chamemos  $<_L$  a uma de tais ordens, e, além disso, seja  $<_{\mathbb{Q}}$  a ordem natural dos racionais e seja  $g$  uma bijeção entre  $\omega$  e os racionais. Então, para  $z, z' \in x$ , podemos definir:

$$z < z' \text{ see } \begin{cases} z \in x_y, z' \in x'_y \text{ e } x_y <_L x'_y \\ \text{ou} \\ z, z' \in x_y, f(n, y) = z, f(m, y) = z' \text{ e } g(n) <_{\mathbb{Q}} g(m) \end{cases}$$

Uma outra maneira de entender o que estamos fazendo é conceber a ordem definida como a soma generalizada dos conjuntos linear e densamente ordenados nos quais temos partido  $x$ , (“soma generalizada” deve ser entendida no sentido da “generalized sum”, tal como está definida, por exemplo, em ROSENSTEIN [1982], p. 19). Devemos provar que é uma ordem, que é linear e que é denso. Para provar que é uma ordem, devemos ver que é irreflexiva e transitiva. Para um raciocínio por absurdo, suponhamos que  $\exists z z < z$ . Mas então não pode corresponder à primeira parte da definição, pois este fato implicaria  $\exists x_y x_y <_L x_y$ , em contradição com  $<_L$  ser uma ordem. Entretanto, também não pode obedecer à segunda parte da definição, pois implicaria que  $\exists q \in \mathbb{Q} q <_{\mathbb{Q}} q$ , o que é absurdo por ser  $<_{\mathbb{Q}}$  uma ordem. Para ver que é transitiva, sejam  $z < z'$  e  $z' < z''$ . Então deveríamos analisar nove casos. Mas os únicos casos que não são imediatos na base de ser  $<_L$  e  $<_{\mathbb{Q}}$  ordens, acontecem quando um dos pares entrou na relação pela primeira parte de definição e o outro pela segunda. Ou seja, temos somente dois casos não triviais. Para o primeiro destes casos, sejam  $x_y \neq x_{y'}$ ,  $z \in y$ ,  $z' \in y'$  e  $z'' \in y'$ . Suponhamos, sem perda de generalidade,  $x_y <_L x_{y'}$ , pois, se isto não acontecer, faremos o raciocínio análogo. Mas então, pela primeira parte da definição, temos que  $z < z''$ . No outro caso, i.e.  $x_y \neq x_{y'}$ ,  $z \in y$ ,  $z' \in y$

e  $z'' \in y'$ , procedemos de maneira similar. Para provar que  $<$  é linear, sejam  $z, z' \in x$ ,  $z \neq z'$ . Analisamos dois casos. Se  $\exists x_y z, z' \in x_y$ , temos que  $z$  está relacionado com  $z'$ , pois corresponde ao segundo caso da definição e  $<_{\mathbb{Q}}$  é ordem linear. Por outra parte, se  $z \in x_y$ ,  $z' \in x_{y'}$  e  $y \neq y'$ , então por ser  $<_L$  uma ordem linear temos que  $x_y$  está relacionado por  $<_L$  com  $x_{y'}$ . Suponhamos  $x_y < x_{y'}$ . Mas então, pela primeira parte da definição, temos  $z < z'$ . Por último veremos que é densa. Para isso, sejam  $z, z' \in x$ ,  $z < z'$ . Se corresponder à primeira parte da definição, suponhamos (sem perda de generalidade)  $z \in x_y$ ,  $z' \in x_{y'}$  e  $x_y <_L x_{y'}$ . Em tal caso, vemos que, por causa da segunda parte da definição, a ordem  $<$  restringida a  $x_y$  é isomorfa a  $<_{\mathbb{Q}}$  e portanto não tem último elemento. Ou seja,  $\exists z'' \in x_y z < z''$ . Além disso, como  $z'' \in x_y$ ,  $z' \in x_{y'}$  e  $x_y <_L x_{y'}$ , temos também que  $z'' < z'$ , pela primeira parte da definição. Por outra parte, se corresponder à segunda parte da definição, a existência do  $z''$  tal que  $z < z'' < z'$  é imediata pela densidade de  $<_{\mathbb{Q}}$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Modelos de permutação

No desenvolvimento da teoria dos modelos de permutação aqui apresentado não pretendemos ter qualquer originalidade, pois a nossa intenção é somente fornecer os alicerces teóricos dos resultados que apresentaremos posteriormente. Neste sentido, seguimos as linhas habituais tal como estas podem ser encontradas, por exemplo, em JECH [1973].

O método dos modelos de permutação surgiu com um artigo de Fraenkel intitulado *Der Begriff "definit" und die Unhabhängigkeit des Auswahlaxioms*, mas somente com as pesquisas realizadas mais tarde por Fraenkel, Mostowski e outros é que adquiriu o rigor formal necessário e produz provas finitárias de consistência relativa. A idéia intuitiva que gerou os modelos de permutação e que serve, ainda hoje, de argumentação heurística, consiste em tornar os átomos (ou *Urelemente*, em alemão) suficientemente indistinguíveis como para evitar qualquer escolha, forçando desta maneira que AE não valha no

modelo. Essa idéia começou com Russell, que ofereceu uma imagem didática desse argumento intuitivo. Russell diz: suponha que temos uma quantidade infinita de pares de meias e também uma quantidade infinita de pares de sapatos. Enquanto os fabricantes de meias continuem sem fazer diferenças entre meias esquerdas e direitas, nós careceremos de uma regra de seleção que nos evite a escolha arbitrária infinita. Porém, isso não acontece com os infinitos pares de sapatos, pois, por ser diferente o sapato esquerdo do direito, temos uma regra que nos evita a escolha arbitrária infinita, como por exemplo: “tome o sapato esquerdo de cada par”. (RUSSELL [1905], pp. 47-48). Neste sentido, a idéia de Fraenkel era fornecer os meios teóricos necessários para que falhem as escolhas infinitas arbitrárias provando a impossibilidade de distinguir uma quantidade infinita de átomos. E, para alcançar este objetivo, construiu um modelo utilizando permutações dos átomos, de modo que um conjunto pertencia ao modelo se e somente se fixava apenas uma quantidade finita de átomos. Em outras palavras, se o fecho transitivo de um conjunto do modelo continha infinitos átomos, então devia permitir que uma quantidade infinita deles (mais exatamente: uma quantidade cofinita) pudesse ser permutada pelos seus indistinguíveis. Dado um conjunto do modelo, o conjunto dos átomos que devem ser fixados como condição para sua pertinência ao modelo chama-se, em geral, o *suporte* desse conjunto.

## 2.1 Considerações gerais

Os modelos de permutação não são modelos de ZF, pois, tal como vimos, precisa-se de átomos para sua definição. A teoria que utilizaremos figura no apêndice como ZFA. Esta teoria supõe dado previamente um conjunto de átomos que designaremos  $A$ . A hierarquia cumulativa de von Neumann é então modificada da seguinte maneira:

$$\mathcal{V}_0(A) = A$$

$$\mathcal{V}_{\alpha+1}(A) = \mathcal{V}_\alpha(A) \cup \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha(A))$$

$$\mathcal{V}_\alpha(A) = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta(A)$$

$$\mathcal{V}(A) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathcal{V}_\alpha(A)$$

Notemos que para cada  $A$  diferente obtemos um  $\mathcal{V}(A)$  também diferente, ou seja, a definição acima deve ser entendida como usando um determinado  $A$  como parâmetro. Desta maneira, a hierarquia cumulativa resulta num caso especial da definição acima: quando o conjunto  $A$  de átomos é vazio. Compararemos o diagrama habitual da hierarquia cumulativa de von Neumann com o desenho análogo para as teorias com átomos, segundo mostra a figura 2.1.



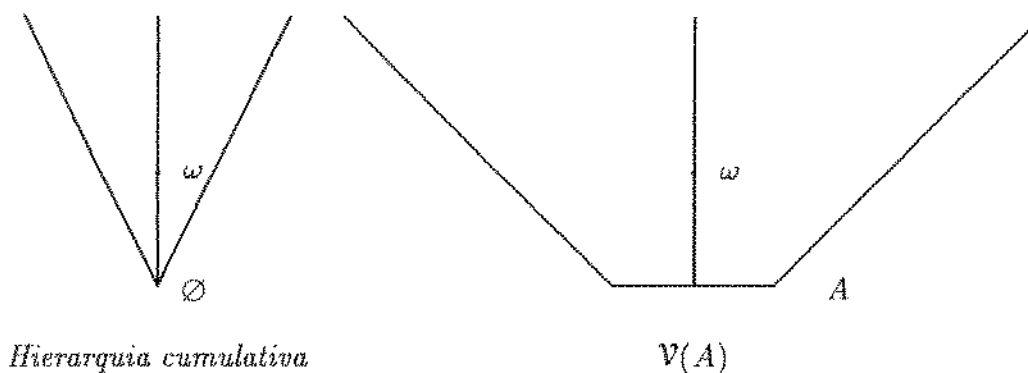


Figura 2.1: Modelos com e sem átomos

O modelo de permutação é um submodelo de  $V(A)$ . Nós reservamos as letras  $\pi$  e  $\sigma$  para permutações de  $A$ . Dada uma permutação  $\pi$  de  $A$ , ela pode ser estendida a uma permutação de  $V(A)$  da seguinte maneira:

$$\pi(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi(x) = \pi[x] = \{\pi(y) : y \in x\}$$

Esta é uma definição correta por recursão transfinita, baseada na definição de  $V(A)$  e deste modo  $\pi$  se transforma num  $\in$ -automorfismo do universo. O submodelo  $V(\emptyset)$  de  $V(A)$  é chamado o *núcleo* de  $V(A)$  (em inglês: *kernel*). Para  $x$  no núcleo e um automorfismo qualquer  $\pi$  temos  $\pi(x) = x$ .

Agora vamos ver uma definição geral dos modelos de permutação, devida fundamentalmente a SPECKER [1957]. Começamos com algumas definições preliminares.

DEFINIÇÃO 2.1 Seja  $\mathcal{G}$  um grupo de permutações sobre  $A$ . Um conjunto  $\mathbb{F}$  de subgrupos de  $\mathcal{G}$  é um *filtro normal* sobre  $\mathcal{G}$  se e para subgrupos quaisquer  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  de  $\mathcal{G}$ :

- (i)  $\mathcal{G} \in \mathbb{F}$ ;
- (ii) se  $\mathcal{H} \in \mathbb{F}$  e  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$  então  $\mathcal{K} \in \mathbb{F}$ ;
- (iii) se  $\mathcal{H} \in \mathbb{F}$  e  $\mathcal{K} \in \mathbb{F}$  então  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} \in \mathbb{F}$ ;
- (iv) se  $\pi \in \mathcal{G}$  e  $\mathcal{H} \in \mathbb{F}$  então  $\pi\mathcal{H}\pi^{-1} \in \mathbb{F}$ ;
- (v) para cada  $a \in A$ ,  $\{\pi \in \mathcal{G} : \pi(a) = a\} \in \mathbb{F}$ .

DEFINIÇÃO 2.2 Para cada  $x$ , seja

$$\text{sym}_{\mathcal{G}}(x) = \{\pi \in \mathcal{G} : \pi(x) = x\}.$$

Note-se que  $\text{sym}(x)$  é um subgrupo de  $\mathcal{G}$ .

DEFINIÇÃO 2.3 Uma vez fixados  $\mathcal{G}$  e  $\mathbb{F}$ , diz-se que  $x$  é *simétrico* se e  $\text{sym}(x) \in \mathbb{F}$ .

Agora já temos à nossa disposição tudo o que é preciso para a principal definição.

DEFINIÇÃO 2.4 Dados  $\mathcal{G}$  e  $\mathbb{F}$ , a classe

$$\mathfrak{V} = \{x : x \text{ é simétrico e } x \subseteq \mathfrak{V}\}$$

chama-se um *modelo de permutação*.

A definição acima deve ser vista como uma definição por recursão transitiva. A figura 2.2 ilustra essas idéias.

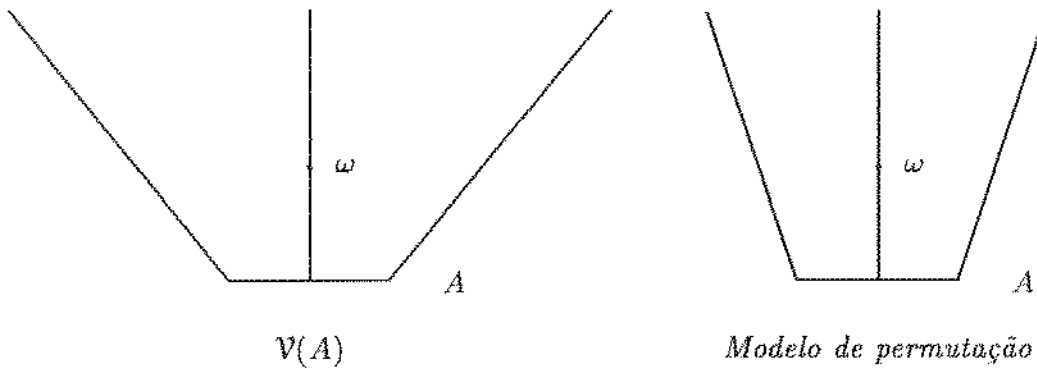


Figura 2.2: Modelo de permutação

Com estas definições se pode provar que  $\mathfrak{V}(A)$  é um modelo de ZFA, que contém todos os elementos do núcleo e que  $A \in \mathfrak{V}(A)$  (ver JECH [1973], p. 46-47).

A maioria dos modelos que utilizaremos são dos chamados “de suporte finito”, e eles podem ser caracterizados de uma maneira muito simples. Primeiro precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 2.5

$$\text{fix}(x) = \{\pi \in \mathfrak{G} : \pi(y) = y \text{ para todo } y \in x\}$$

Assim, temos a seguinte condição para que um elemento pertença ao modelo de permutação:

$$x \in \mathfrak{M} \leftrightarrow \exists S \subseteq A \text{ finito } \text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(x).$$

DEFINIÇÃO 2.6 Para  $x \in \mathfrak{V}$  e  $S \subseteq A$ , diz-se que  $S$  é um *suporte* de  $x$  se  $\text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(x)$ .

Um outro fato bem conhecido é o seguinte:

$$\mathfrak{V} \models \text{“}x \text{ pode ser bem-ordenado”} \quad \text{se e} \quad \text{fix}(x) \in \mathbb{F}.$$

Esse fato foi observado por A. R. D. Mathias (ver PINCUS [1972], p. 740). Para justificar esse enunciado, consideremos que um conjunto  $x$  pode ser bem-ordenado se existe uma bijeção  $f$  entre  $x$  e um ordinal  $\alpha$ . Portanto  $x$  pode ser bem-ordenado no modelo  $\mathfrak{M}$ , se uma tal  $f$  é simétrica, ou seja,  $\mathcal{H} = \{\pi \in \mathfrak{G} : \pi(f) = f\} \in \mathbb{F}$ . Sejam  $\pi \in \mathcal{H}$  e  $y \in x$ . Então, existe  $\beta \in \alpha$  tal que  $\langle y, \beta \rangle \in f$ . Como  $\pi \in \mathcal{H}$ , temos que  $\pi(\langle y, \beta \rangle) \in f$ . Além disso  $\pi(\beta) = \beta$

pois todos os ordinais estão no núcleo e, por  $f$  bijeção, obtemos  $\pi(y) = y$ . Portanto  $\mathcal{H} \subseteq \text{fix}(x)$ . Como a outra inclusão é óbvia temos  $\mathcal{H} = \text{fix}(x) \in \mathbb{F}$ . Na base deste último argumento, é imediata a recíproca.

Este último fato tem como consequência uma limitação do método dos modelos de permutação: em qualquer modelo de permutação vale o enunciado “se  $x$  é bem-ordenável, então  $\mathcal{P}(x)$  também”. Isto resulta surpreendente se considerarmos que este último enunciado é equivalente a AE em ZF. Portanto, temos um enunciado que é independente em ZFA, mas que a sua independência não se pode provar usando modelos de permutação. Para ver que o enunciado mencionado vale em qualquer modelo de permutação, seja  $\mathfrak{V}$  um modelo de permutação, e  $\mathfrak{G}$  e  $\mathbb{F}$  os correspondentes grupo de permutações e filtro normal. Seja, ademais,  $x \in \mathfrak{V}$  bem-ordenável. Logo temos  $\text{fix}(x) \in \mathbb{F}$ . Para mostrar que  $\mathcal{P}(x)$  está bem-ordenado, veremos que  $\text{fix}(\mathcal{P}(x)) = \text{fix}(x)$ , e portanto,  $\text{fix}(\mathcal{P}(x)) \in \mathbb{F}$ . Ou seja, devemos provar  $\forall \pi \in \text{fix}(x) \quad \forall y \in \mathcal{P}(x) \quad \pi(y) = y$ . Fixemos, então,  $\pi \in \text{fix}(x)$  e  $y \subseteq x$ . Se  $z \in y$ , então  $z \in x$  e logo  $\pi(z) = z$ , pois  $\pi \in \text{fix}(x)$ . Portanto  $\pi(y) = y$ , como queríamos provar. Generalizações deste fato foram estudadas por Pincus (ver JECH [1973], p. 138, problema 1, e PINCUS [1971] e [1972]).

## 2.2 O modelo básico de Fraenkel

Começamos com um modelo muito simples no qual AE falha de uma maneira muito forte. O modelo se define a partir de um conjunto enumerável de átomos  $A$  e considerando o grupo  $\mathcal{G}$  de todas as permutações de  $A$ . Então  $\mathfrak{A}$  é o modelo de todos os objetos que têm suporte finito, ou seja,  $x \in \mathfrak{A} \leftrightarrow \exists S \subseteq A$  finito  $\text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(X)$ . Neste modelo,  $A$  não tem subconjunto enumerável. Para proceder por absurdo, suponhamos que  $\exists B \subseteq A$ ,  $B \in \mathfrak{A}$  enumerável. Como vimos,  $B$  está bem-ordenado see  $\text{fix}(B) \in \mathbb{F}$ . Mas isto último implica que  $\exists S \subseteq A$  finito, tal que  $\text{fix}(S) \subseteq \text{fix}(B)$ . Fixemos um tal  $S$  e seja  $\pi \in \text{fix}(S)$ . como  $B$  é infinito, sejam  $x, y \in (B \setminus S)$ ,  $x \neq y$ . Então existe  $\pi \in \mathcal{G}$ , tal que  $\pi$  permuta  $x$  e  $y$ , e  $\pi(z) = z$  para  $z \neq x, y$ . Portanto,  $\pi \notin \text{fix}(B)$ , e assim chegamos a uma contradição.

O fato recém observado já implica que falham formas fracas do AE, pois a existência de subconjunto enumerável é consequência do axioma da escolha restringido a famílias enumeráveis. Em realidade, acontece com este modelo um fato curioso. Por uma parte o AE falha de maneira mais forte em relação a  $A$ , pois, por exemplo,  $\mathcal{P}(A)$  contém apenas os subconjuntos finitos e cofinitos de  $A$ , o mínimo que pode conter para o modelo satisfazer os restantes axiomas de ZFA. Mas, por outra parte, quando se pretende provar que não valem no modelo algumas formas fracas de AE, como, por exemplo, que existe uma

família enumerável de pares sem função seletora, se tropeça com a dificuldade de achar aquela família enumerável. Com efeito, nem  $A$ , nem  $\mathcal{P}(A)$  têm subconjunto enumerável. Obviamente  $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$  tem subconjunto enumerável, mas não tem um subconjunto que seja uma família enumerável de pares. Estes fatos serão estudados em detalhe no capítulo de partições.

## 2.3 O segundo modelo de Fraenkel

Nesta secção estudamos um modelo que permite provar de maneira simples que o AE para famílias enumeráveis de pares é independente em ZFA. Esse modelo surge imediatamente a partir da argumentação intuitiva que figura na introdução deste capítulo, baseada nas idéias de Russell. O conjunto de átomos  $A$  é enumerável e está dividido em conjuntos de pares:

$$P_n = \{a_n, b_n\}$$

$$B = \{P_n : n \in \omega\}$$

$$A = \bigcup B$$

Ademais, seja  $\mathcal{G}$  o grupo de todas aquelas permutações  $\pi$  que preservam pares:  $\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}$ , para  $n \in \omega$ . O modelo de permutação  $\mathfrak{B}$  se construi novamente a partir dos subconjuntos finitos de  $A$ . Se pode provar facilmente que  $B \in \mathfrak{B}$ , e que é enumerável no modelo (ver JECH [1973], pp. 48 e 49).  $\mathfrak{B}$

tem a propriedade de não conter nenhum subconjunto infinito de  $A$ , o qual, por sua vez, contenha no máximo um elemento de cada par  $\{a_n, b_n\}$ . Com efeito, suponhamos pelo contrário que existe um tal  $C$ , para assim chegar a uma contradição. Como  $C \in \mathfrak{B}$ , existe  $S$  tal que  $\text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(C)$ . Como  $C$  é infinito e  $S$  finito,  $\exists x \in C$ , com  $P_n = \{x, y\}$  para algum  $n$ , tal que  $x, y \notin S$ . Então, seja  $\pi \in \mathfrak{G}$  tal que  $\pi(x) = y, \pi(y) = x$  e  $\pi(z) = z$  para  $z \in A, z \neq x, y$ . Obviamente,  $\pi \in \text{fix}(S)$ , mas  $\pi \notin \text{sym}(S)$ . Absurdo.

Como conseqüência imediata do argumento que figura acima, temos que a forma mais fraca do AE obtida restringindo cardinalidade, i.e. o AE para famílias enumeráveis de pares, é independente em ZFA.

## 2.4 O modelo de Mostowski

O modelo de permutação mais estudado na literatura foi construído por Mostowski em 1939. Neste modelo o conjunto de átomos  $A$  é enumerável e tem uma ordem  $<$  isomorfa a dos racionais, ou seja, linear, densa e sem extremos. O grupo  $\mathfrak{G}$  de permutações considerado consiste em todas aquelas permutações que preservam a ordem  $<$ . O filtro está gerado novamente pelos subgrupos  $\text{fix}(S)$  com  $S \subseteq A$  finito. Isto é, todo conjunto do modelo tem



suporte finito. A ordem  $<$  pertence ao modelo, pois dizer que  $\pi$  preserva  $<$  é o mesmo que dizer que  $\pi(<) = <$ .

Um fato conhecido do modelo de Mostowski é que todo conjunto do modelo tem um menor suporte, ou seja, um suporte que está incluído em qualquer outro suporte do modelo. Tem modelos (como o segundo de Fraenkel) onde isto não acontece. O teorema que afirma que todo conjunto de  $\mathfrak{M}$  tem menor suporte, pode ser provado facilmente a partir do seguinte lema, cuja prova detalhada encontra-se em MOSTOWSKI [1939], pp. 236-241 (o lema tem o número 88). Mas primeiro precisamos a seguinte

DEFINIÇÃO 2.7 Seja  $P \subseteq \mathfrak{G}$ . Então denotamos com  $\llbracket P \rrbracket$  o menor subgrupo de  $\mathfrak{G}$  que contém a  $P$ .

LEMA 2.1 (MOSTOWSKI) *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  suportes. Então temos  $\text{fix}(S_1 \cap S_2) = \llbracket \text{fix}(S_1) \cup \text{fix}(S_2) \rrbracket$ .*  $\square$

Assim, se  $\pi \in \text{fix}(S_1 \cap S_2)$ , existem  $\pi_0, \sigma_0, \pi_1, \sigma_1, \dots, \pi_n, \sigma_n$  com  $\pi_i \in S_1$  e  $\sigma_i \in S_2$ , tais que  $\pi = \pi_0 \circ \sigma_0 \circ \pi_1 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \pi_n \circ \sigma_n$ . Logo, se  $S_1$  e  $S_2$  são suportes de  $x$ , temos  $\pi(x) = \pi_0 \circ \sigma_0 \circ \pi_1 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \pi_n \circ \sigma_n(x) = x$ , e portanto  $\pi \in \text{sym}(x)$ , e  $S_1 \cap S_2$  é um suporte de  $x$  (cfr. JECH [1973], p. 50 ). Como os suportes do modelo de Mostowski são finitos, temos que todo  $x \in \mathfrak{M}$  tem um menor suporte. Agora definimos:

DEFINIÇÃO 2.8 Seja  $C \subseteq \mathfrak{M}$  uma classe.

$$\text{sym}(C) = \{\pi \in \mathfrak{G} : \pi[C] = C\}$$

Para a nossa prova não basta que possamos fazer corresponder o menor suporte a cada elemento do modelo, pois precisamos que esta correspondência possa ser feita *dentro* do modelo. Em outras palavras, precisamos que a classe  $C = \{(x, S) : S \text{ é o menor suporte de } x\}$  esteja incluída em  $\mathfrak{M}$ . Isto é, que seja simétrica. Primeiro veremos que a classe  $D = \{(x, S) : S \text{ é um suporte de } x\}$  é simétrica. Observamos que é suficiente provar que se  $S$  é um suporte de  $x$  e  $\pi \in \mathfrak{G}$ , então  $\pi(S)$  é um suporte de  $\pi(x)$ . Ou seja, que  $\text{fix}(\pi(S)) \subseteq \text{sym}(\pi(x))$ . Para isto, fixemos uma  $\sigma \in \text{fix}(\pi(S))$  e  $y \in x$ . Por  $\sigma \in \text{fix}(\pi(S))$ , temos  $\sigma \circ \pi(y) = \pi(y)$  e, operando a esquerda por  $\pi^{-1}$  obtemos  $\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi(y) = y$ . Então  $\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$  pertence a  $\text{fix}(S)$ , e logo a  $\text{sym}(x)$ , por ser  $S$  suporte de  $x$ . Ou seja, temos que  $\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi(x) = x$ . Agora operamos a esquerda por  $\pi$  e obtemos  $\sigma \circ \pi(x) = \pi(x)$ , e portanto  $\sigma \in \text{sym}(\pi(x))$  (cfr. JECH [1973], p. 49). Para ver que a classe  $C$  é simétrica, basta mostrar que se  $S$  é o menor suporte de  $x$  e  $\pi \in \mathfrak{G}$ , então  $\pi(S)$  é o menor suporte de  $\pi(x)$ . Seja, então,  $\pi(S')$  suporte de  $\pi(x)$ . Logo  $\pi^{-1} \circ \pi(S')$  é suporte de  $\pi^{-1} \circ \pi(x)$ . Portanto  $S \subseteq \pi^{-1} \circ \pi(S')$  e  $\pi(S) \subseteq \pi(S')$ . Seja  $I$  o conjunto de todos os suportes finitos e  $\mathbf{On}$  a classe dos ordinais. Além disso, precisamos a seguinte:

DEFINIÇÃO 2.9 Para cada  $x \in \mathfrak{M}$ , seja  $\text{orb}(x)$ , a órbita de  $x$ :

$$\text{orb}(x) = \{\pi(x) : \pi \in \mathfrak{G}\}$$

O seguinte lema mostra quais são exatamente os elementos de  $\mathfrak{M}$ : aqueles caracterizáveis por sua órbita e seu menor suporte. Observe também que, para  $R$  infinito, se  $\text{fix}(R) \subseteq \text{sym}(x)$  e  $x \in \mathfrak{M}$ , não temos necessariamente que  $\pi(R) = R$  implique  $\pi(x) = x$ , com o qual falha o argumento da prova (o que não quer dizer que não valha o lema num modelo construído usando suportes infinitos). Seja  $I$  o conjunto de todos os suportes finitos e  $\mathbf{On}$  a classe dos ordinais. Então pode vale o seguinte:

LEMA 2.2 (MOSTOWSKI) *Existe uma classe simétrica  $F$  que é uma bijeção entre  $\mathfrak{M}$  e  $\mathbf{On} \times I$ .*

*Prova.* Primeiro observamos que, se  $S$  é um suporte de  $x$  e  $\pi(S) = S$ , então  $\pi(x) = x$ . Com efeito, por ser  $S$  finito e  $\pi$  preservar a ordem, temos que  $\pi \in \text{fix}(S)$ . Agora observemos que  $\forall x \in \mathfrak{M} \text{sym}(\text{orb}(x)) = \mathfrak{G}$ , de modo que, se fixamos uma enumeração  $F_1$  das órbitas com ordinais, então essa enumeração é uma classe simétrica, pois para cada  $\langle \text{orb}(x), \alpha \rangle$  e para cada  $\pi \in \mathfrak{G}$ , temos  $\pi(\text{orb}(x)) = \text{orb}(x)$ ,  $\pi(\alpha) = \alpha$  e portanto  $\pi(\langle \text{orb}(x), \alpha \rangle) = \langle \text{orb}(x), \alpha \rangle$ . Então definimos  $F(x) = \langle F_1(x), F_2(x) \rangle$ , onde  $F_2(x)$  é a função

que faz corresponder a cada  $x \in \mathcal{G}$  seu menor suporte. Essa classe é simétrica. Para ver que é injetiva, sejam  $x$  e  $y$  na mesma órbita e com o mesmo menor suporte  $S$ . Como estão na mesma órbita, temos que existe  $\pi$  tal que  $\pi(x) = y$ . Segundo vimos, se  $S$  é o menor suporte de  $x$ , então  $\pi(S)$  é o menor suporte de  $\pi(x)$ . Isto é,  $\pi(S)$  é o menor suporte de  $\pi(x) = y$ , e portanto,  $\pi(S) = S$  e  $x = \pi(x) = y$ .  $\square$

Agora podemos enunciar o principal resultado do modelo de Mostowski.

**TEOREMA 2.1 (MOSTOWSKI)** *O universo de  $\mathfrak{M}$  pode ser linearmente ordenado em  $\mathfrak{M}$ .*

*Prova.* Usando a ordem de  $A$  isomorfa aos racionais, definimos lexicograficamente uma ordem linear sobre  $I$ . Logo definimos lexicograficamente uma ordem sobre os pares  $\langle \alpha, S \rangle$  com  $S \in I$ . Então a classe  $F$  do lema anterior gera uma ordem linear sobre  $\mathfrak{M}$ .  $\square$

No próximo capítulo veremos vários resultados sobre o modelo de Mostowski. Em particular, que o conjunto  $A$  não pode ser bem-ordenado no modelo. Assim temos o seguinte:

**TEOREMA 2.2 (MOSTOWSKI)**  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{OL} \rightarrow \text{AE}$ .  $\square$

## 2.5 Os métodos de Jech e Sochor

Nesta secção faremos alguns comentários sobre como transformar provas de independência obtidas com modelos de permutação e, portanto, válidas apenas em relação a ZFA, em provas de independência para ZF, ou seja, quando incluimos também o axioma de regularidade.

Quando Cohen apresenta sua prova de independência do AE, fica clara a inspiração nas provas conhecidas que usaram modelos de permutação. O método de *forcing* inventado por Cohen consistia em agregar novos objetos, geralmente números reais, a um modelo da teoria de conjuntos. Por isso, os modelos definidos usando *forcing* são chamados de “extensões genéricas”, pois, além dos elementos do modelo antigo, contêm também os elementos agregados e os novos conjuntos que se produzem a partir dos elementos agregados e da combinação desses com os que existiam no modelo original. Para demonstrar a independência de AE, Cohen utilizou permutações na parte da extensão genérica que não pertencia ao modelo primitivo, de maneira análoga a como Fraenkel havia utilizado permutações dos conjuntos que não pertenciam ao núcleo. É assim como no método dos modelos de permutação, se define um submodelo do modelo original, as permutações são usadas por

Cohen para definir um modelo simétrico, que é um submodelo da extensão genérica. Esse fato é mostrado pela figura 2.3.

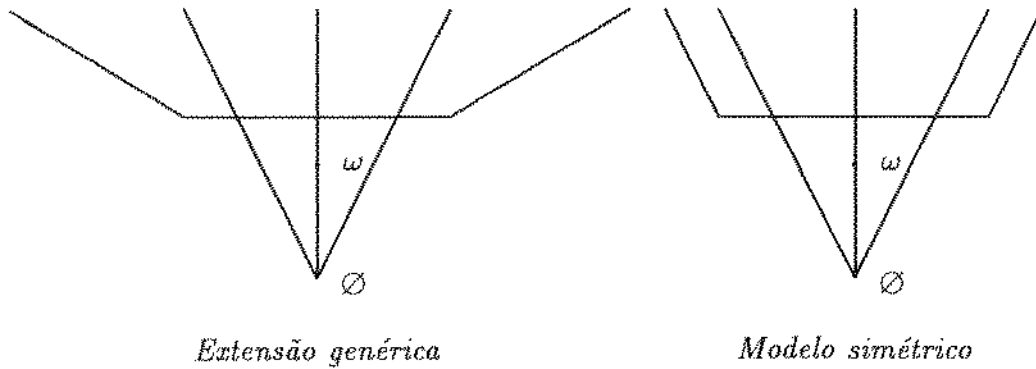


Figura 2.3: Modelos construídos usando *forcing*

A pergunta que surge de imediato é se essa analogia não pode ser levada mais longe, ou seja, passar do argumento com valor heurístico a um método geral que permita transformar um resultado obtido com modelos de permutação (válido só para ZFA) num outro que use um modelo simétrico e, portanto, válido para ZF. Em teoria de modelos este tipo de métodos são denominados em inglês *transfers*, pelo qual acreditamos que a palavra “transferência” resulta um termo apropriado para essa classe de técnicas. Então, nossa pergunta pode ser expressa brevemente: existe algum método geral de transferência entre modelos de permutação e modelos simétricos?

Em primeiro lugar devemos lembrar que existem enunciados que são independentes em ZF, mas que valem em todo modelos de permutação, como acontece com o (fecho universal) da expressão: “se  $x$  é bem-ordenável, então  $\mathcal{P}(x)$  é bem-ordenável” (ver p. 18 e JECH [1973], cap. 9). Em consequência, esse enunciado não pode ser transferido, e não pode existir um método geral de transferência de tal tipo. Assim, todo método de transferência deve ter algum tipo de limitação que exclua os enunciados não-transferíveis.

Uma técnica destas características surgiu com os trabalhos de Jech e Sochor (JECH SOCHOR [1966a, b]). Eles idearam um método no qual uma parte do modelo de permutação é imersa num modelo simétrico, de tal modo que os enunciados que dependem somente de propriedades locais podem ser transferidos. Lembremos que o modelo de permutação é definido usando recursão transfinita, e por isso, a todo elemento seu pode ser atribuído um nível (*rank*). No método de Jech e Sochor, se determina no início um destes níveis e logo se prova a existência de uma imersão de todos os elementos do modelo de permutação com nível menor ou igual ao estipulado. A figura 2.4 esclarecerá essa idéia.

O enunciado colocado acima fica excluído imediatamente. Mas outros enunciados aludem a uma propriedade que pode ser limitada segundo esses níveis. Por exemplo, seja  $x$  um conjunto qualquer. Um par ordenado de elementos de  $x$  pertence a  $\mathcal{P}\mathcal{P}(x)$ , e uma ordem linear sobre  $x$  a  $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(x)$ .

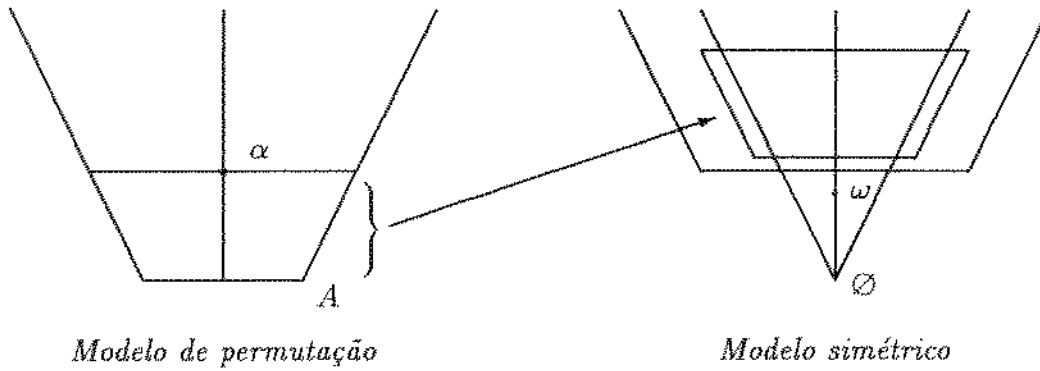


Figura 2.4: Imersão de Jech e Sochor

O enunciado “todo conjunto pode ser linearmente ordenado” não pode ser limitado a qualquer nível, mas sua negação sim. Com efeito, suponha que temos um modelo de permutação no qual provamos que existe um conjunto  $x$  que não pode ser linearmente ordenado. Esse conjunto pertence a um nível, digamos  $\alpha$ , e portanto o enunciado “ $x$  não pode ser linearmente ordenado” tem que ver somente com níveis  $\leq \alpha + 3$ . Desta maneira, usamos a técnica de Jech e Sochor para definir uma imersão hasta o nível  $\alpha + 3$ , e assim obtemos que existe um conjunto no modelo simétrico que não pode ser linearmente ordenado.

Essas técnicas foram estendidas várias vezes, primeiro pelos mesmos Jech e Sochor nos seus artigos iniciais JECH SOCHOR [1966a, b], no que eles cha-



maram de segundo teorema da imersão, e posteriormente por D. Pincus, principalmente em PINCUS [1971] e [1972].

Uma exposição destes métodos pode ser encontrada no Capítulo 6 de JECH [1973].

## Capítulo 3

# Partições de conjuntos infinitos

Neste capítulo nos ocuparemos com a existência de partições de conjuntos infinitos na ausência do AE, e de outros assuntos fortemente relacionados com esse.

Preferimos dividir esse estudo em três secções. Na primeira damos uma série de definições de propriedades que envolvem os conceitos estudados. Por propriedades entendemos fórmulas com uma variável livre, por exemplo  $x$ , que deve ser interpretada como afirmando alguma característica do conjunto que interpreta  $x$ . Logo na mesma secção oferecemos uma exposição das deduções entre essas propriedades.

A segunda secção é, em algum sentido, a complementar da primeira, pois nela aparecem os resultados de independência entre as propriedades definidas. Ou seja, os resultados dessa secção são da forma “se ZF é consistente, então em ZF não pode ser deduzido que a propriedade  $P(x)$  implica

a propriedade  $Q(x)$ ”, o que muitas vezes é resumido na literatura dizendo simplesmente que  $P(x)$  não implica  $Q(x)$ . Os resultados apresentados esgotam o tema, pois dadas duas das definições apresentadas  $P(x)$  e  $Q(x)$ , temos que, ou tem-se provado na primeira secção que  $P(x)$  implica  $Q(x)$ , ou tem-se provado na segunda que  $P(x)$  não implica  $Q(x)$ .

A maioria das propriedades definidas na primeira secção dam origem a um enunciado. Com efeito, sendo  $P(x)$  uma dessas propriedades, podemos gerar um enunciado da forma “para todo conjunto  $x$ , se  $x$  é infinito, então  $P(x)$ ”. Esse é o assunto da terceira secção, ou seja, analisar as relações de implicação e independência entre os enunciados gerados a partir das propriedades da primeira secção.

### 3.1 Implicações entre propriedades

É um fato bem conhecido que Dedekind opôs à definição habitual de finitude uma outra que estabelece que um conjunto é finito se e somente se não existe uma bijeção com um subconjunto próprio. Também é bem sabido que ambas definições são equivalentes apenas em presença do AE.

Neste caminho, TARSKI [1924] propôs várias definições de finitude, e esclareceu algumas relações dedutivas entre elas. Como toda definição de fini-

tude gera por negação uma de infinitude, quando olhamos, por assim dizer, o reverso das definições de Tarski achamos propriedades naturais que têm os conjuntos infinitos mais comuns. Assim, o trabalho de Tarski pode ser interpretado como fornecendo algumas características básicas de conjuntos infinitos, e relações dedutivas entre elas.

Posteriormente, LÉVY [1958] mostrou que as provas de equivalências entre algumas daquelas definições e o conceito habitual de finitude usa essencialmente o AE. Portanto, viu-se que aquilo que nós chamamos de características básicas de conjuntos infinitos poderiam ser provadas apenas com ajuda do AE.

Começamos vendo as definições principais, algumas delas bem conhecidas:

DEFINIÇÃO 3.1 Um conjunto  $x$  diz-se *infinito* se não existe nenhuma bijeção de  $x$  com um número natural.

DEFINIÇÃO 3.2 Um conjunto diz-se *D-infinito* se está em bijeção com um subconjunto próprio.

DEFINIÇÃO 3.3 Um conjunto  $x$  diz-se *T-infinito* se existe uma família de subconjuntos de  $x$  totalmente ordenada por inclusão e que não tem nenhum elemento  $\subseteq$ -maximal.

DEFINIÇÃO 3.4 Um conjunto  $x$  diz-se *P-infinito* se  $\mathcal{P}(x)$  é D-infinito.

DEFINIÇÃO 3.5 Para  $n \in \omega, n > 0$ , um conjunto  $x$  diz-se *n-partível* se  $x$  é a união de  $n$  conjuntos infinitos dois a dois disjuntos. Além disso, *partível* significa 2-partível.

DEFINIÇÃO 3.6 Um conjunto  $x$  diz-se  *$\infty$ -partível* (que lemos *infinito-partível*), se  $x$  é a união de uma quantidade infinita de conjuntos infinitos dois a dois disjuntos.

DEFINIÇÃO 3.7 Um conjunto  $x$  diz-se  *$\aleph_0$ -partível*, se  $x$  é a união de uma quantidade enumerável de conjuntos dois a dois disjuntos.

Os seguintes resultados são facilmente demonstráveis

- 1) D-infinito implica P-infinito.
- 2)  $\aleph_0$ -partível implica P-infinito.
- 3)  $\aleph_0$ -partível implica T-infinito.
- 4)  $\aleph_0$ -partível implica  $\infty$ -partível.
- 5)  $\infty$ -partível implica  $n$ -partível para todo  $n \in \omega, n > 0$ .
- 6) Se  $n, m \in \omega, n > m > 0$ , então  $n$ -partível implica  $m$ -partível.

Para ver que o item 4) vale, precisamos da seguinte observação. Todos os demais são imediatos.

OBSERVAÇÃO 3.1 *Se  $x$  é um conjunto  $\aleph_0$ -partível, então  $x$  tem uma partição enumerável cujos membros são todos infinitos.*

Com efeito, seja  $x$   $\aleph_0$ -partível, e fixemos uma partição  $\{x_n : n \in \omega\}$ . Para  $p$  número primo, denominemos  $x'_p = \{y \in x : \exists n, m \in \omega (n = p^m \wedge y \in x_n)\}$ , e  $x'_0 = \{y \in x : \exists n \text{ } n \text{ tem no mínimo dois fatores primos diferentes e } y \in x_n\}$ . Então, temos uma partição enumerável de  $x$ , cujos elementos são infinitos.

Citemos agora o mais antigo resultado não trivial que envolve as propriedades definidas:

TEOREMA 3.1 (KURATOWSKI) *Se  $x$  é  $P$ -infinito, então  $x$  é  $\aleph_0$ -partível.*

A primeira prova do teorema 3.1 se encontra em TARSKI [1924], p. 46-47. Na realidade, o interesse de Kuratowski, a quem Tarski atribui a prova, era demonstrar que  $P$ -infinito implica  $T$ -infinito. Porém, a parte chave da dedução consiste em mostrar que  $P$ -infinito implica  $\aleph_0$ -partível. Resulta surpreendente, então, que o conceito de  $\aleph_0$ -partível, não tenha sido objeto de algum estudo por seu próprio interesse. Com efeito, é um conceito simples, que surge naturalmente quando se colocan questões relativas a existência de partições e que resulta a ponte natural na argumentação de certas provas. Além disso, mostraremos no capítulo seguinte suas vinculações com as ordens densas.

A argumentação apresentada aqui segue um caminho totalmente diferente do de Kuratowski.

*Prova do teorema 3.1.* Seja  $x$  um conjunto infinito, tal que  $\mathcal{P}(x)$  seja D-infinito. Por um teorema bem conhecido,  $\mathcal{P}(x)$  tem subconjunto enumerável. Fixemos, pois, um subconjunto enumerável  $Y$  de  $\mathcal{P}(x)$ :  $Y = \{y_n : n \in \omega\}$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\forall n \in \omega \ y_n \neq \emptyset, y_n \neq x$ . Agora, vamos definir uma seqüência  $\{z_n : n \in \omega\}$ , a qual pretendemos incluir uma partição enumerável de um subconjunto de  $x$ .

Para poder introduzir esta seqüência, precisamos de algumas definições. Suponhamos para tanto que já temos definido até  $z_n$ . Então, estabelecemos que  $y_r$  é  $n$ -equivalente a  $y_m$ , em símbolos:  $y_r \sim_n y_m$ , see  $y_r \setminus \bigcup_{s < n} z_s = y_m \setminus \bigcup_{s < n} z_s$ . Ademais, seja  $S_n = \bigcup_{r < n} z_r \cup y_n$ . Agora introduzimos outra relação de equivalência  $\approx_n$ : Dado  $n \in \omega$ , definimos  $y_m \approx_n y_r$  see  $y_m \setminus S_n = y_r \setminus S_n$ . Sejam  $[y_m]_{\sim_n}$  e  $[y_m]_{\approx_n}$  as classes de equivalência correspondentes a aquelas relações. Além disso, precisamos definir:

$$H_n = \{[y_m]_{\sim_n} : m \in \omega\} \quad \text{e} \quad K_n = \{[y_m]_{\approx_n} : m \in \omega\}.$$

Por último,  $C_n$  é a condição " $K_n$  é infinito". Agora, temos todo o necessário para definir a seqüência dos  $z_n$ .

$$z_n = \begin{cases} y_n \setminus \bigcup_{m < n} z_m & \text{se } C_n \\ x \setminus \left( \bigcup_{m < n} z_m \cup y_n \right) & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Queremos mostrar que há uma quantidade infinita de  $n \in \omega$  tais que  $z_n \neq \emptyset$ . Em primeiro lugar, note que  $z_0 \neq \emptyset$ . Agora, para chegar a uma contradição, suponha que existe apenas uma quantidade finita de  $i \in \omega$  tais que  $z_i \neq \emptyset$ , e seja  $n$  o último de tais  $i$ . De acordo com o lema 3.1,  $H_n$  é infinito, e portanto existe uma quantidade infinita de  $y_m$  tais que  $y_m \setminus \bigcup_{r \leq n} z_r \neq \emptyset$ . Então, podemos fixar um  $y_m$  com esta condição, e tal que  $n < m$ . Como  $\forall r > m \ z_r = \emptyset$ , temos  $\bigcup_{r \leq n} z_r = \bigcup_{r < m} z_r$ , e assim  $y_m \setminus \bigcup_{r < m} z_r \neq \emptyset$ . A partir disto e de  $z_m = \emptyset$  obtemos  $\neg C_m$ , e logo  $z_m = x \setminus \left( \bigcup_{r < m} z_r \cup y_m \right)$ . Mas por outra parte  $z_m = \emptyset$  também implica  $\bigcup_{r < m} z_r \cup y_m = x$ . Como consequência obtemos  $x \setminus \bigcup_{r < m} z_r \subseteq y_m$ , e logo (pela igualdade acima), isto é o mesmo que  $x \setminus \bigcup_{r \leq n} z_r \subseteq y_m$ . Se repetimos este mesmo argumento para  $[y_{m'}]_{\sim_n} \neq [y_m]_{\sim_n}$  com  $m' > n$ , obtemos  $x \setminus \bigcup_{r \leq n} z_r \subseteq y_{m'}$ . Agora veremos que  $y_m \sim_n y_{m'}$ . Para tanto, seja  $h \in y_{m'} \setminus \bigcup_{r \leq n} z_r$ . Então, pela inclusão que aparece acima, temos  $h \in y_m$  e  $h \in \left( y_m \setminus \bigcup_{r \leq n} z_r \right)$ . Trocando  $m'$  por  $m$ , obtemos finalmente  $y_m \sim_n y_{m'}$ . Uma contradição.  $\square$

LEMA 3.1 *Para todo  $n \in \omega$ ,  $H_n$  é infinito.*



*Prova.* Procederemos por indução em  $n$ . O enunciado é verdadeiro para  $n = 0$ , pois  $Y$  é infinito e, se  $x \in H_0$ , então  $x = \{y_r\}$  para algum  $r$ . Suponhamos agora que é verdadeiro para  $n \in \omega$  e para provar que vale para  $n + 1$ , devemos analisar dois casos.

$C_n$ : Isto significa que  $K_n$  é infinito, e como  $S_n = \bigcup_{r < n+1} z_r$ , temos  $[y_r]_{\omega_n} = [y_r]_{\sim_{n+1}}$  e  $K_n = H_{n+1}$ .

$\neg C_n$ : Por hipótese indutiva, temos que  $H_n$  é infinito. Mostraremos que existe uma quantidade infinita de  $[y_m]_{\sim_{n+1}}$ . Em primeiro lugar, notamos que  $[y_j]_{\sim_n} \subseteq [y_j]_{\omega_n}$ . Como  $K_n$  é finito e  $H_n$  é infinito, existe um  $m$  tal que  $\{[y_j]_{\sim_n} : [y_j]_{\sim_n} \subseteq [y_m]_{\omega_n}\}$  é infinito. Fixemos um dos tais  $m$  até o final da prova, e fixemos também  $m, m'$ , tais que  $[y_{m'}]_{\sim_n} \neq [y_{m''}]_{\sim_n}$ , os dois incluídos em  $[y_m]_{\omega_n}$ . É suficiente mostrar que  $[y_{m'}]_{\sim_{n+1}} \neq [y_{m''}]_{\sim_{n+1}}$ . Para obter uma contradição, suponhamos que  $[y_{m'}]_{\sim_{n+1}} = [y_{m''}]_{\sim_{n+1}}$ . Então, temos:

$$(1) \quad y_{m'} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \cup z_n \right) = y_{m''} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \cup z_n \right),$$

$$(2) \quad y_{m'} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \cup y_n \right) = y_{m''} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \cup y_n \right),$$

$$(3) \quad y_{m'} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \right) \neq y_{m''} \setminus \left( \bigcup_{s < n} z_s \right).$$

Na base de (3), suponhamos que existe um  $h$  tal que pertence ao lado es-

querdo da inequação e não ao direito, pois em caso contrário procedemos análogamente. Portanto,  $h \in y_{m'}$ ,  $h \notin y_{m''}$  e  $h \notin (\bigcup_{s < n} z_s \cup y_n)$ . Logo, usando (1), temos que  $h \in z_n$ . Mas como não vale  $C_n$ , temos que  $h \notin y_n$ , em contradição com (2).  $\square$

LÉVY [1958], p. 3-4, apresenta uma prova do enunciado “se  $x$  é T-infinito então  $x$  é partível”. Mas este resultado pode ser melhorado, pois “ $x$  é T-infinito” implica “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ”. Porém, o argumento de Lévy não é diretamente generalizável, pois começa utilizando o fato de que se um conjunto  $x$  não é partível, então todo intervalo inicial de um subconjunto de  $\mathcal{P}(x)$  totalmente ordenado por  $\subseteq$  deve ser finito, coisa que não acontece no caso que  $x$  seja, por exemplo, 3-partível. Para nossa prova, primeiro precisamos alguns resultados sobre partições que respeitam a ordem.

DEFINIÇÃO 3.8 Um conjunto ordenado  $\langle A, < \rangle$  chama-se *ordem-partível* se existe um  $a \in A$  tal que o conjunto dos elementos de  $A$  menores que  $a$  e o conjunto dos elementos de  $A$  maiores que  $a$  são ambos infinitos.

LEMA 3.2 *Seja  $\langle A, < \rangle$  uma ordem linear com  $A$  infinito. Então  $\langle A, < \rangle$  é ordem-partível ou  $A$  é enumerável.*

*Prova.* Para uma prova por absurdo, suponha que  $(A, <)$  não é ordenável e que  $A$  não é enumerável. Então, definimos por indução a seqüência  $\langle a_n \rangle_{n \in \omega}$ . Primeiro observamos que  $(A, <)$  tem primeiro elemento ou tem último elemento. Seja, então,  $a_0$  o primeiro elemento de  $(A, <)$ , se tal existe, e, se esse não existe, seja  $a_0$  o último. Agora suponhamos que já temos definido a seqüência até  $a_n$ . Então,  $A_n = A \setminus \{a_i \in A : i \leq n\}$  tem primeiro elemento ou tem último elemento (com a ordem  $< \upharpoonright_{A_n}$ ). Assim, seja  $a_{n+1}$  o primeiro elemento de  $A_n$  se ele existe, e, se não existe, seja o último. Mostraremos que a seqüência é sucessiva, no sentido de que não existem  $a$  e  $n$  tais que  $a_n < a < a_{n+1}$  ou  $a_{n+1} < a < a_n$ . Suponhamos que a seqüência não é sucessiva, para chegar a uma contradição. Existem, então,  $a$  e  $n$  tais que  $a_n < a < a_{n+1}$  (se não existem, procedemos analogamente com  $a_{n+1} < a < a_n$ ). Seja agora  $k$  o menor  $n$  tal que existe um  $a$  que satisfaz  $a_n < a < a_{n+1}$ . Por construção da seqüência, isto pode ocorrer apenas quando  $A_k = A \setminus \{a_i \in A : i \leq k\}$  não tem primeiro elemento, e portanto,  $a_{k+1}$  deve ser o último elemento de  $A_k$ .

Em geral, para  $n > k$ ,  $A_n$  não tem primeiro elemento e  $a_{n+1}$  é o último elemento de  $A_n$ . Assim, temos que  $\{a_i : i > k\}$  é um intervalo de tipo de ordem  $\omega^*$ . Como  $A$  é infinito não enumerável, temos que  $B = A \setminus \{a_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$  e podemos fixar um  $b \in B$ , para continuar com a nossa argumentação. Assim,  $A$  foi partido por  $b$  em dois conjuntos infinitos, em

contradição com a hipótese de que  $\langle A, < \rangle$  não é ordem-partível. Com efeito, o conjunto  $\{a \in A : a < b\}$  é infinito porque  $B$  não tem primeiro elemento e o conjunto  $\{a \in A : a > b\}$  é infinito porque  $\forall n > k \quad b < a_n$ . Assim, a seqüência  $\langle a_n \rangle_{n \in \omega}$  é sucessiva e é um intervalo inicial de tipo de ordem  $\omega$  ou um intervalo final de tipo de ordem  $\omega^*$ .

Agora definimos da mesma maneira a seqüência  $\langle b_n \rangle_{n \in \omega}$  em  $B = A \setminus \{a_n : n \in \omega\}$ , pois  $A$  não é enumerável. Como  $B$  satisfaz as hipóteses do lema, temos que a seqüência  $\langle b_n \rangle_{n \in \omega}$  é um intervalo de tipo de ordem  $\omega$  ou um intervalo de tipo de ordem  $\omega^*$  em  $B$ . Mas então, é fácil ver que  $\langle A, < \rangle$  é ordem-partível, em contradição com a hipótese.  $\square$

Usando este lema podemos provar facilmente o seguinte

**TEOREMA 3.2** *Se  $x$  é T-infinito, então  $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ .*

*Prova.* Seja  $x$  T-infinito e seja  $n \in \omega$ . Para simplificar a notação, dado um conjunto qualquer  $A$ , seja  $<_A = \subseteq \upharpoonright_A$ . Por ser  $x$  T-infinito, existe  $y \subset \mathcal{P}(x)$ , tal que  $\langle y, <_y \rangle$  é ordem linear sem elemento maximal, e portanto,  $y$  é infinito. Se  $y$  é enumerável, o teorema é imediato, porque em tal caso  $x$  é  $\aleph_0$ -partível. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $y$  é infinito não enumerável. Então aplicamos o lema 3.2 a  $\langle y, <_y \rangle$ , para obter dois intervalos infinitos  $\langle I, <_I \rangle$  e  $\langle J, <_J \rangle$ . Novamente, podemos supor que  $I$

é infinito não enumerável. Repetimos este argumento  $n$  vezes para obter a  $n$  partição de  $x$ .  $\square$

Para maior clareza, na figura 3.2 em página 57 oferecemos um gráfico das implicações entre as propriedades estudadas.

Terminamos esta secção citando um resultado que pode ser achado em LÉVY [1958], p. 4.

TEOREMA 3.3 (LÉVY)  $OL \rightarrow$  “todo conjunto infinito é T-infinito”.  $\square$

### 3.2 Resultados de independência entre propriedades

Começamos esta secção mostrando que “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ” não implica “ $x$  é  $\infty$ -partível”. Para tanto, seja  $\mathfrak{M}$  o modelo de Mostowski e  $A$  o seu conjunto de átomos. Então, temos o seguinte:

LEMA 3.3 *Existe um conjunto em  $\mathfrak{M}$  que não é  $\infty$ -partível em  $\mathfrak{M}$ .*

*Prova.* Provaremos que o conjunto de átomos  $A$  não é  $\infty$ -partível em  $\mathfrak{M}$ . Seja  $B$  uma partição infinita de  $A$  em conjuntos infinitos:  $B = \{A_i : i \in I\}$  e  $\forall i A_i$  é infinito. Suponhamos, para uma prova por absurdo, que

$B \in \mathfrak{M}$  e que  $S$  é um suporte dele. Então, usamos  $S$  e a ordem  $<$  de  $A$  para partir  $A$  em intervalos abertos:  $(-\infty, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_n, +\infty)$ , com  $s_i < s_{i+1}$ . no mínimo um destes intervalos deve ter uma quantidade infinita de, pelo menos, dois elementos da partição, digamos  $(s_n, s_{n+1})$  contendo uma quantidade infinita de elementos de  $A_j$  e de  $A_k$ . Então, fixamos  $a, b \in A_j$  e  $c \in A_k$  com  $a < b < c$  e  $\{a, b, c\} \subseteq (s_n, s_{n+1})$  (se não existem tais  $a, b, c$ , trocamos  $A_j$  por  $A_k$ ). Para chegar a uma contradição, mostraremos que existe uma permutação  $\pi \in \mathcal{G}$  tal que  $\pi \in \text{fix}(S)$  e  $\pi(B) \neq B$ . Em primeiro lugar, observamos que tanto  $(a, b)$  e  $(a, c)$ , como  $(b, s_{n+1})$  e  $(c, s_{n+1})$ , são, respectivamente, isomorfos segundo a ordem, pois são intervalos enumeráveis, linear e densamente ordenados sem extremos. Agora definimos uma  $\pi$  tal que:
 

- 1)  $\pi$  é um isomorfismo da ordem  $<$  entre  $(a, b)$  e  $(a, c)$ , e entre  $(b, s_{n+1})$  e  $(c, s_{n+1})$ ,
- 2)  $\pi(a) = a$  e  $\pi(b) = c$ , e, por último,
- 3)  $\pi(x) = x$  para os restantes elementos de  $A$ . Obviamente  $\pi \in \text{fix}(S)$ .

 Ademais temos  $\pi(A_j) \not\subseteq B$ , o que implica  $\pi[B] \neq B$  e, portanto  $\pi(B) \neq B$ .  $\square$

Como resultado imediato desse lema obtemos o seguinte:

**COROLÁRIO 3.1**  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash$  “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ”  
 $\rightarrow$  “ $x$  é  $\infty$ -partível”  $\square$

Como vimos, no modelo de Mostowski todo conjunto pode ser linearmente ordenado. Assim, temos:

COROLÁRIO 3.2  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{OL} \rightarrow$  “se  $x$  é infinito então  $x$  é  $\infty$ -partível”  $\square$

Usando os teoremas de Jech e Sochor o análogo do lema 3.3 para ZF pode ser provado facilmente (ver JECH [1973], p. 85). Além disso, é um fato bem conhecido que no modelo simétrico construído por esses métodos, valem OL e o Teorema do Ideal Primo (TIP) para álgebras de Boole (ver JECH [1973], p. 113, e a bibliografia citada em p. 117). Assim, temos:

COROLÁRIO 3.3  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash$  “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ”  $\rightarrow$  “ $x$  é  $\infty$ -partível”  $\square$

COROLÁRIO 3.4  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{OL} \rightarrow$  “se  $x$  é infinito então  $x$  é  $\infty$ -partível”  $\square$

COROLÁRIO 3.5  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{TIP} \rightarrow$  “se  $x$  é infinito então  $x$  é  $\infty$ -partível”  $\square$

Agora analisaremos a relação entre as propriedades “ $x$  é  $\infty$ -partível” e “ $x$  é T-infinito”. Vimos na secção anterior que ambas são implicadas por “ $x$  é  $\aleph_0$ -partível”, e que cada uma delas tem como consequência “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ”. Nenhuma delas, porém, implica a outra, ou seja, são mutuamente independentes em ZF. O primeiro resultado surge imediatamente a partir do lema 3.3 e do resultado de Lévy, o teorema 3.3. Com efeito, no modelo de Mostowski todo conjunto pode ser linearmente ordenado, e assim, todo conjunto infinito é T-infinito. Em particular, o conjunto de átomos  $A$ . Mas, segundo vimos,  $A$  não é  $\infty$ -partível no modelo. Portanto, temos:

**COROLÁRIO 3.6**  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{“}x \text{ é T-infinito”} \rightarrow \text{“}x \text{ é } \infty\text{-partível”}$   $\square$

O análogo desse corolário para ZF, também pode ser obtido facilmente usando a técnica de Jech e Sochor:

**COROLÁRIO 3.7**  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{“}x \text{ é T-infinito”} \rightarrow \text{“}x \text{ é } \infty\text{-partível”}$   $\square$

Agora veremos um resultado que mostra a independência de formas muito fracas de AE. Seja  $\mathfrak{A}$  o modelo básico de Fraenkel, com a notação da secção 2.2 em página 20.



LEMA 3.4 (LÉVY) *O conjunto de átomos  $A$  não é partível em  $\mathfrak{A}$ .*

*Prova.* Suponhamos que  $A$  é partível, e seja  $P = \{A_0, A_1\}$  uma partição de  $A$  em dois conjuntos infinitos. Além disso, seja  $S$  um suporte de  $P$ . Para chegar a uma contradição, vamos achar uma  $\pi \in \mathfrak{S}$  tal que  $\pi \in \text{fix}(S)$ , porém  $\pi \notin \text{sym}(P)$ . Vemos que existem  $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$  tais que  $a_0, a_1 \notin S$ , pois  $S$  é finito, enquanto  $A_0$  e  $A_1$  são infinitos. Então, seja  $\pi$  a permutação de  $A$  tal que  $\pi(a_0) = a_1, \pi(a_1) = a_0$  e  $\pi(x) = x$  para  $x \neq a_0, a_1$ . Obviamente,  $\pi \in \text{fix}(S)$ . Observamos que  $\pi[A_0] \neq A_0$ , pois  $\pi(a_0) = a_1 \notin A_0$ . Entretanto,  $\pi[A_0] \neq A_1$ , pois  $\pi(a_1) = a_0 \notin A_1$ . Portanto,  $\pi(A_0) \neq A_0, A_1$ , logo  $\pi(A_0) \notin P$ , e logo  $\pi(P) \neq P$ .  $\square$

Para provar a independência da implicação recíproca à do corolário 3.7, usaremos o modelo básico de Fraenkel (ver secção 2.2 em página 20). Como sempre, chamaremos  $\mathfrak{A}$  ao modelo e  $A$  ao conjunto de átomos. Além disso, vamos dizer que um subconjunto  $x$  de  $A$  é cofinito quando  $A \setminus x$  é finito, e análogamente para subconjuntos de  $A \times A$ . Com  $\text{Dom}(s)$  e  $\text{Cod}(s)$  abreviaremos o domínio e o codomínio, respetivamente, de uma relação  $s$ . Então temos que  $A \times A$  é  $\infty$ -partível em  $\mathfrak{A}$ , mas não é T-infinito em  $\mathfrak{A}$ . Para mostrar esse resultado precisamos primeiro de dois lemas.

DEFINIÇÃO 3.9 Para  $n \in \omega$ , seja  $B^{(n)} = \{x \subseteq B: |x| = n\}$ .

LEMA 3.5 Não existe  $\langle B, < \rangle$  ordem linear tal que  $B$  seja infinito e  $B \subseteq \mathcal{P}^{<\omega}(A)$ .

*Prova.* Fixemos  $\langle B, < \rangle$  ordem linear com  $B$  infinito e  $B \subseteq \mathcal{P}^{<\omega}(A)$  e procederemos analisando dois casos.

Primeiro, consideremos o caso  $\forall n \in \omega$ ,  $B^{(n)}$  é finito. Sob essa hipótese, existem infinitos  $n$  tais que  $B^{(n)} \neq \emptyset$ . Além disso, o cardinal de  $\bigcup (B^{(n)})$  não está limitado, no sentido que  $\forall i \in \omega \exists n \in \omega \left| \bigcup (B^{(n)}) \right| > i$ . Com efeito, se  $n > i$  com  $B^{(n)} \neq \emptyset$  temos que  $\left| \bigcup (B^{(n)}) \right| > i$ . Então definimos:

$$C_0 = \bigcup B^{(1)};$$

$$C_{n+1} = \left( \bigcup B^{(n+1)} \right) \setminus C_n.$$

Obviamente, os  $C_n$  são dois a dois disjuntos, e pode ser mostrado facilmente que existe uma quantidade infinita de  $C_n$  diferentes do vazio, em contradição com o fato de que  $A$  não é  $\aleph_0$ -partível.

Por outra parte, suponhamos que existe um  $n$  tal que  $B^{(n)}$  é infinito e, então, fixamos tal  $n$ . Agora consideramos  $\langle B^{(n)}, < \upharpoonright_{B^{(n)}} \rangle$ , e seja  $S$  um suporte seu. Além disso, sejam  $x, y \in B^{(n)}$  tais que  $x \not\subseteq S$  e  $x \cap S = y \cap S$ . Suponhamos  $x < y$ . Então, definimos:

$$y' = y \setminus S = \{a_0, \dots, a_m\};$$

$$x' = x \setminus S = \{b_0, \dots, b_m\}.$$

Para  $0 \leq i \leq m$ , seja  $\pi$  tal que:  $\pi(a_i) = b_i$ ,  $\pi(b_i) = a_i$ , e  $\pi(z) = z$ , se  $z \neq a_i \wedge z \neq b_i$ . Mas então  $\pi(S) = S$  e  $\pi$  não preserva  $<$ . Absurdo.  $\square$

LEMA 3.6 *Não existe  $\langle B, < \rangle$  ordem linear tal que  $B$  seja infinito e  $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ .*  $\square$

TEOREMA 3.4  *$A \times A$  não é  $T$ -infinito.*

*Prova.* Para um argumento por absurdo, seja  $C$  uma cadeia infinita em  $\mathcal{P}(A \times A)$ . Nomearemos com  $D$  a relação diagonal sobre  $A$ :  $D = \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$ . Para  $s \in C$ , seja  $s' = s \setminus D$ , e  $C' = \{s' : s \in C\}$ .

Veremos que  $C'$  é infinita. Caso contrário, deve existir um  $x \subseteq C$  infinito, tal que  $r, s \in x \rightarrow r' = s'$ . Fixemos um tal  $x$  e para  $s \in C$ , sejam  $s_D = s \cap D$  e  $x_D = \{s_D : s \in x\}$ . Vemos que  $x_D$  é infinito, pois para  $r, s \in x$ , temos que  $r \neq s \rightarrow r_D \neq s_D$ . Mas então, como para  $r, s \in C$  temos  $r_D \neq s_D \rightarrow \bigcup\bigcup r_D \neq \bigcup\bigcup s_D$  e  $\bigcup\bigcup r_D \subseteq A$ ,  $x$  induz um conjunto infinito de subconjuntos de  $A$  linearmente ordenados, em contradição com o lema 3.6. Observemos, ademais, que  $C'$  está linearmente ordenada por  $\subseteq$ .

Para  $s \in C'$ , seja  $s_- = \{\langle a, b \rangle \in s : \text{Cod}(s \upharpoonright_{\{a\}}) \neq A \setminus \{a\}\}$  e  $\tilde{s} = \{r \in C' : r_- = s_-\}$ . Vemos que cada  $\tilde{s}$  é finito. Caso contrário, fixemos um  $\tilde{s}$  infinito. Seja  $f(r) = \{a \in A : \text{Cod}(r \upharpoonright_{\{a\}}) = A \setminus \{a\}\}$ . Vamos ver que, para  $r, t \in \tilde{s}$ , temos  $r \neq t \rightarrow f(r) \neq f(t)$ . Seja, pois,  $r \neq t$  e suponhamos que  $\exists \langle a, b \rangle \in r, \notin t$ . Como  $\langle a, b \rangle \notin t$ ,  $b \notin \text{Cod}(t \upharpoonright_{\{a\}})$ , e  $a \notin f(t)$ . Além disso, temos que  $\langle a, b \rangle \notin t_-$ , e logo  $\langle a, b \rangle \notin r_-$ . Logo,  $\text{Cod}(r \upharpoonright_{\{a\}}) = A \setminus \{a\}$ , e  $a \in f(r)$ , e  $f(r) \neq f(t)$ . Mas então, temos um conjunto infinito de subconjuntos de  $A$  linearmente ordenado, em contradição com o lema 3.6. Portanto, cada  $\tilde{s}$  é finito, e existe uma quantidade infinita de  $\tilde{s}$  com  $s \in C'$ . Como, ademais,

cada  $\tilde{s}$  está linearmente ordenado por  $\subseteq$ , tem primeiro elemento, ao qual vamos chamar  $s^{\bar{i}}$ . Notemos que  $s^{\bar{i}}_- = s_-$ , para  $s \in C'$ . Agora definimos  $C'' = \{s_- : s \in C'\}$ , e, para  $r, s \in C'$ , seja  $r_- < s_- \leftrightarrow r^{\bar{i}} \subset s^{\bar{i}}$ . Como  $r^{\bar{i}} \neq s^{\bar{i}} \rightarrow r^{\bar{i}}_- \neq s^{\bar{i}}_-$ , vemos facilmente que  $C''$  é infinito, que  $<$  está bem definido e que é uma ordem linear.

Para  $r \in C''$ , definimos:

$$\langle a, b \rangle \in r_f \leftrightarrow \begin{cases} \langle a, b \rangle \in r & \text{e } a \text{ está relacionado segundo } r \text{ com uma} \\ & \text{quantidade finita de elementos,} \\ \text{ou} \\ \langle a, b \rangle \notin r, & a \text{ está relacionado segundo } r \text{ com uma} \\ & \text{quantidade cofinita de elementos e } a \neq b. \end{cases}$$

Seja  $S = \{r_f : r \in C''\}$ , e definimos para  $r, s \in C''$ :  $r_f <' s_f \leftrightarrow r < s$ . Para provar que  $<'$  está bem definida, que é uma ordem linear e que  $S$  é infinito, é suficiente mostrar que para  $r, s \in C''$  temos  $r \neq s \rightarrow r_f \neq s_f$ . Para isto, sejam  $r, s \in C'$ , suponhamos  $r_- \neq s_-$ , e seja  $\langle a, b \rangle \in s_- \wedge \langle a, b \rangle \notin r_-$  (caso contrário, substituímos  $r$  por  $s$  e  $s$  por  $r$  no argumento). Notemos que  $a \neq b$ . Analizaremos dois casos.

Caso 1:  $r \subseteq s$ . Analizaremos dois sub-casos.

Sub-caso 1.a:  $a$  está relacionado segundo  $s_-$  com uma quantidade finita de elementos e portanto  $\langle a, b \rangle \in s_{-f}$ . Além disso, como  $\langle a, b \rangle \in s_-$ ,  $a$  está relacionado segundo  $s$  com uma quantidade finita de elementos, e o mesmo acontece com  $r$ . Logo,  $a$  está relacionado segundo  $r_-$  com uma quantidade finita de elementos, e  $\langle a, b \rangle \notin r_{-f}$ , ou seja,  $r_{-f} \neq s_{-f}$ .

Sub-caso 1.b:  $a$  está relacionado segundo  $s_-$  com uma quantidade cofinita de elementos e portanto  $\langle a, b \rangle \notin s_{-f}$ . Primeiro, notemos que  $\exists c \neq a \langle a, c \rangle \notin s_-$ ,

e logo  $\langle a, c \rangle \in s_{-f}$ . Ademais, como  $\langle a, b \rangle \in s_-$ , temos que  $Dom(s \upharpoonright_{\{a\}}) \neq A \setminus \{a\}$ , e logo  $\langle a, c \rangle \notin s$ . Como consequência disso, temos que  $\langle a, c \rangle \notin r$  e  $\langle a, c \rangle \notin r_-$ . Por uma parte, se  $a$  está relacionado segundo  $r_-$  com uma quantidade finita de elementos, temos que  $\langle a, c \rangle \notin r_{-f}$ . Por outra parte, se  $a$  está relacionado segundo  $r_-$  com uma quantidade cofinita de elementos, temos que  $\langle a, b \rangle \in r_{-f}$ , e portanto  $r_{-f} \neq s_{-f}$ .

Caso 2:  $s \subseteq r$ . Primeiro, observemos que  $\langle a, b \rangle \in s_-$  implica  $\langle a, b \rangle \in s$ , o que, a sua vez, implica  $\langle a, b \rangle \in r$ . Como, além disso,  $\langle a, b \rangle \notin r_-$ , temos que  $Dom(r \upharpoonright_{\{a\}}) = A \setminus \{a\}$ . Ou seja,  $Dom(r_- \upharpoonright_{\{a\}}) = \emptyset$ , e  $a \notin Dom(r_{-f})$ . Por uma parte, se  $a$  está relacionado segundo  $s_-$  com uma quantidade finita de elementos, temos que  $\langle a, b \rangle \in s_{-f}$ . Por outra parte, se  $a$  está relacionado segundo  $s^{\bar{1}}$  com uma quantidade cofinita de elementos, então  $\exists c \in A \langle a, c \rangle \notin s_-$ , e  $\langle a, c \rangle \in s_{-f}$ . Mas, como  $a \notin Dom(r_{-f})$ , temos que nem  $\langle a, b \rangle$ , nem  $\langle a, c \rangle$  pertencem a  $r_{-f}$ . Com isto, temos  $r_{-f} \neq s_{-f}$ .

Vamos ver que existe  $T \subseteq S$  infinita, tal que  $\forall r, s \in T \text{ Cod}(r) = \text{Cod}(s)$ . Primeiro, para  $s \in S$ , definimos  $\bar{s} = \{r : \text{Cod}(r) = \text{Cod}(s)\}$ . Suponhamos, para chegar a uma contradição, que para cada  $s \in S$ ,  $\bar{s}$  é finito. Então, temos que  $\{\bar{s} : s \in S\}$  é infinito. Ademais, como para cada  $s \in S$ ,  $\bar{s}$  é um conjunto finito linearmente ordenado por  $<'$ , tem primeiro elemento, ao qual vamos chamar  $s^{\bar{1}}$ . Agora, para  $r, s \in S$ , definimos  $\text{Cod}(r) <'' \text{Cod}(s) \leftrightarrow r^{\bar{1}} <' s^{\bar{1}}$ . Vemos que  $<''$  está bem definida e que é uma ordem linear, em contradição com o lema 3.6. Portanto,  $\exists s \in S$  tal que  $\bar{s}$  é infinita, que é a  $T$  que procurávamos.

Seja  $s \in T$ . Vamos ver que  $\text{Cod}(s)$  é infinito. Caso contrário, fixemos  $\text{Cod}(s) = \{a_0, \dots, a_m\}$ . Para cada  $a_j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , e  $r \in T$  definimos:

$r_{a_j} = \{a \in A : \langle a, a_j \rangle \in r\}$ . Notemos que para cada  $r, t \in T$ , temos que  $r \neq t \rightarrow \exists j \leq m \ t_{a_j} \neq r_{a_j}$ . Com efeito, se  $r \neq t$ , então existe  $\langle a, a_j \rangle$  tal que  $\langle a, a_j \rangle \in r$  e  $\langle a, a_j \rangle \notin t$  (caso contrário, efetuamos o raciocínio análogo trocando  $r$  por  $t$ ). Então,  $a \in r_{a_j}$ , mas  $a \notin t_{a_j}$ . Como consequência disso, temos que  $\{r_{a_j} : r \in T \wedge 0 \leq j \leq m\}$  é infinito, e logo existe  $p \leq m$  tal que  $\{r_{a_p} : r \in T\}$  é infinito, em contradição com o lema 3.6.

Seja  $s \in T$ . Notemos que cada  $a \in \text{Dom}(T)$  está relacionado com uma quantidade finita de elementos segundo  $s$ , por construção de  $S$ . Seja  $Y$  um suporte de  $s$ . Como  $\text{Cod}(s)$  é infinito,  $\exists b \in \text{Cod}(s)$  tal que  $b \notin Y$ , e logo  $\exists a \in A$  tal que  $\langle a, b \rangle \in s$ . Como  $a$  está relacionado segundo  $s$  com uma quantidade finita de elementos e  $Y$  é finito,  $\exists c \in A$  tal que  $\langle a, c \rangle \notin s$  e  $c \notin Y$ . Então definimos uma permutação  $\pi$ :  $\pi(b) = c$ ,  $\pi(c) = b$  e  $\pi(z) = z$  se  $z \neq b, c$ . Logo  $\pi(Y) = Y$ . Além disso, temos que  $\pi(a) = a$ , por ser  $a \neq b, c$ . Logo,  $\pi(\langle a, b \rangle) = \langle a, c \rangle$ , e  $\pi(s) \neq s$ . Portanto, temos  $T = \emptyset$ . Absurdo.  $\square$

Em base ao teorema 3.4, obtemos imediatamente o seguinte:

**COROLÁRIO 3.8**  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{“}x \text{ é } \infty\text{-partível”} \rightarrow \text{“}x \text{ é T-infinito”}$   $\square$

Novamente, usando os métodos de Jech e Sochor, se prova imediatamente o seguinte:

**COROLÁRIO 3.9**  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{“}x \text{ é } \infty\text{-partível”} \rightarrow \text{“}x \text{ é T-infinito”}$   $\square$

Agora vamos ver que a conjunção das propriedades “ $x$  é T-infinito” e “ $x$  é  $\infty$ -partível” não implicam “ $x$  é  $\aleph_0$ -partível”. Seja  $\mathfrak{M}$  o Modelo de Mostowski e  $A$  o conjunto de átomos do mesmo. Então vale o seguinte:

**TEOREMA 3.5**  $A \times A$  não é  $\aleph_0$ -partível em  $\mathfrak{M}$ .

*Prova.* Para uma prova por absurdo, suponhamos que  $A \times A$  é  $\aleph_0$ -partível, e seja  $\{B_n : n \in \omega\}$  uma partição enumerável desse conjunto. Observemos que, para cada  $a$ , existe apenas uma quantidade finita de  $n \in \omega$  tais que  $a \in \text{Dom}(B_n)$ , pois, caso contrário, para cada  $B_n$  tal que  $a \in B_n$ , definimos  $C_n = \{b \in A : \langle a, b \rangle \in B_n\}$ . Mas então,  $\{C_n : n \in \omega \wedge C_n \neq \emptyset\}$  é uma partição enumerável de  $A$ , em contradição com o visto na prova do lema 3.3.

Agora definimos  $f : A \rightarrow \mathcal{P}^{<\omega}(\omega)$ , da seguinte maneira: para  $a \in A$ ,  $n \in f(a) \leftrightarrow a \in B_n$ . Ademais, seja  $g : \mathcal{P}^{<\omega}(\omega) \rightarrow \omega$  uma bijeção, e  $h = g \circ f$ . Vemos que  $h : A \rightarrow \omega$ . Observemos que  $h[A]$  é infinito, pois caso contrário teríamos que existe somente uma quantidade finita de  $n$  tais que  $B_n \neq \emptyset$ . Mas então  $h[A]$  é enumerável, e  $h$  induz uma partição enumerável de  $A$ , em contradição com o resultado mencionado.  $\square$

Como no modelo de Mostowski todo conjunto infinito é T-infinito e, além disso, sempre vale que, se um conjunto  $x$  é infinito, então  $x \times x$  é  $\infty$ -partível, temos imediatamente o seguinte:

**COROLÁRIO 3.10**  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{“}x \text{ é } \infty\text{-partível”} \wedge \text{“}x \text{ é T-infinito”} \rightarrow \text{“}x \text{ é } \aleph_0\text{-partível”} \square$

Para mostrar a independência da propriedade “ $x$  é D-infinito” em relação à propriedade “ $x$  é P-infinito”, veremos que na ausência do AE, pode existir um conjunto de reais sem subconjunto enumerável que seja  $\aleph_0$ -partível (em realidade, todo conjunto infinito de reais é  $\aleph_0$ -partível). Fixemos, primeiro, algum dos modelos da literatura no qual exista um subconjunto infinito de reais sem subconjunto enumerável. Então, temos o seguinte:

**LEMA 3.7** *Seja  $x$  um conjunto infinito de reais sem subconjunto enumerável. Então  $x$  é  $\aleph_0$ -partível.*

*Prova.* Procederemos por casos:

Caso 1: Se  $x$  não tem limite superior ou se não tem limite inferior, usamos os inteiros para definir uma partição enumerável da maneira óbvia.

Caso 2: Se  $x$  tem limite inferior  $l_i$ , e limite superior  $l_s$ , então existe um  $p$  em  $x$  tal que  $p \neq l_s \wedge \forall p' \in x (p < p' \rightarrow \exists h \in x p < h < p')$  ou  $p \neq l_i \wedge \forall p' \in x (p' < p \rightarrow \exists h \in x p' < h < p)$ . Com efeito, se isto não acontecer, teríamos que, para todo  $y \in x$ , se  $y \neq l_s$ , então  $y$  teria um único sucessor imediato, e, se  $y \neq l_i$ , então  $y$  tem um único predecessor imediato. Entretanto, isto é impossível, pois  $x$  é infinito. Portanto, podemos supor que  $\exists p \in x (p \neq l_s \wedge \forall p' (p < p' \rightarrow \exists h \in x p < h < p'))$ , pois se isso não acontecer, procederemos analogamente com o outro membro da disjunção. Seja, então,  $r$  o ínfimo de  $\{y : y > p\}$ , e seja  $\{q_n : n \in \omega\}$  uma seqüência de racio-



nais estritamente decrescente que converge a  $r$ . Então,  $\{[q_{n+1}, q_n) : n \in \omega\}$  é uma partição enumerável de um subconjunto de  $x$ .  $\square$

**COROLÁRIO 3.11**  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{“}x \text{ é } \aleph_0\text{-partível”} \rightarrow \text{“}x \text{ é D-infinito”}$   $\square$

Para terminar esta secção, veremos uma generalização do resultado de Lévy. Primeiro, precisamos de uma definição.

**DEFINIÇÃO 3.10**

$$\mathcal{P}_0^1(x) = x,$$

$$\mathcal{P}_{n+1}^1(x) = \{ \{y\} : y \in \mathcal{P}_n^1(x) \}.$$

Seja, agora,  $\mathfrak{A}$  o primeiro modelo de Fraenkel, e seja  $A$  o conjunto de átomos do  $\mathfrak{A}$ . Então, vale o seguinte:

**PROPOSIÇÃO 3.1** *Para  $n, m \in \omega$ ,  $0 < n < m$ , temos que existe em  $\mathfrak{A}$  um conjunto que é  $n$ -partível, mas não é  $m$ -partível.*

*Prova.* Fixemos tais  $n$  e  $m$ .  $B = \bigcup_{s \leq n} \mathcal{P}_s^1(A)$  é obviamente  $n$ -partível. Suponhamos que é  $m$ -partível, para chegar a uma contradição. Em tal caso, por ser  $n < m$ , algum dos  $\mathcal{P}_s^1(A)$  com  $s \leq n$ , deve ser partível. Mas isto implica que  $A$  é partível.  $\square$

O resultado correspondente a ZF também pode ser facilmente provado.

Portanto, temos:

COROLÁRIO 3.12 *Sejam  $n, m \in \omega$ ,  $n < m$ . Então temos:*

$\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{“}x \text{ é } n\text{-partível”} \rightarrow \text{“}x \text{ é } m\text{-partível”} \quad \square$

A figura 3.2 em página 57, esquematiza os resultados das últimas duas secções.

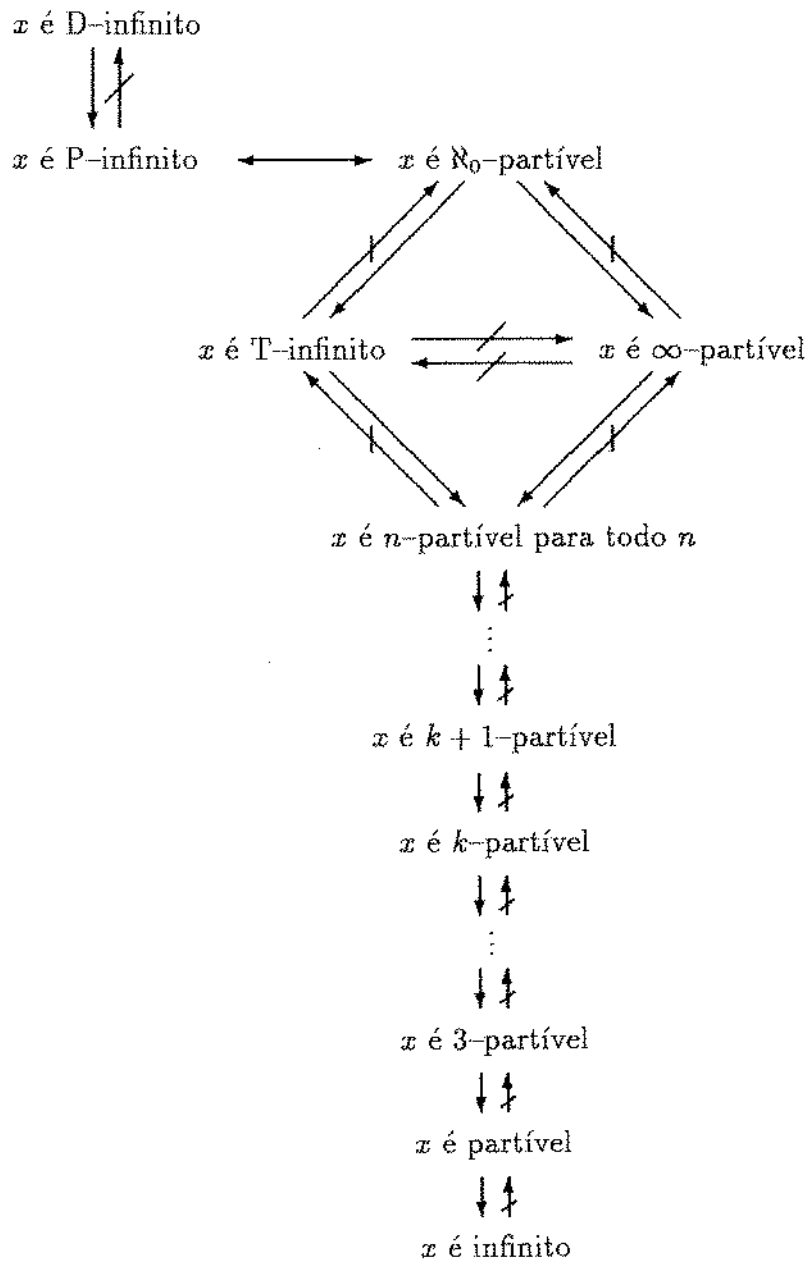


Figura 3.1: Propriedades de partição e infinitude

### 3.3 Implicações e independência entre os enunciados correspondentes

Começamos com as definições dos enunciados que nos ocuparão nesta seção.

DEFINIÇÃO 3.11

PP é o enunciado “todo conjunto infinito é partível”.

$P-\infty$  é “todo conjunto infinito é  $\infty$ -partível”.

$P-\aleph_0$  é “todo conjunto infinito é  $\aleph_0$ -partível”.

PT é “todo conjunto infinito é T-infinito”.

PD é “todo conjunto infinito é D-infinito”.

Obviamente, PP implica que para todo  $x$  infinito vale “ $x$  é  $n$ -partível para todo  $n \in \omega$ ”. Também é imediato que  $P-\aleph_0$  implica  $P-\infty$  (ver Observação 3.1 da p. 36), e que este último implica PP. Facilmente pode ser mostrado que  $P-\aleph_0$  implica também PT. Baseados no teorema 3.1, temos que  $P-\aleph_0$  é equivalente a “todo conjunto infinito é P-infinito”, e por causa disso, temos que PD implica  $P-\aleph_0$ . Do lema 3.4, utilizando os resultados de Jech e Sochor já citados, obtemos imediatamente os seguintes.

PROPOSIÇÃO 3.2 (LÉVY)  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{PP} \square$

PROPOSIÇÃO 3.3 (JECH E SOCHOR)  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{PP} \square$

Para poder continuar, devemos citar um teorema, cuja prova pode ser encontrada em LÉVY [1958], p. 4.

TEOREMA 3.6 (LÉVY)  $\text{ZF} \vdash \text{OL} \rightarrow \text{PT} \square$

Como no modelo de Mostowski (e no modelo simétrico construído a partir dele usando os métodos de Jech e Sochor), vale OL, temos que também vale PT. Por outra parte, segundo o lema 3.3, temos que no modelo de Mostowski existe um conjunto que não é  $\infty$ -partível nesse modelo. Além disso, os métodos citados permitem estabelecer imediatamente que o enunciado que expressa este fato vale no modelo simétrico. Desta maneira, temos o seguinte:

COROLÁRIO 3.13  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{PT} \rightarrow \text{P-}\infty \square$

Veremos agora uma nova prova de um resultado que é imediato a partir de outros conhecidos: que  $\text{P-}\aleph_0$  não implica PD. Seja  $\mathfrak{M}$  o modelo de Cohen cuja descrição pode ser encontrada em JECH [1973], p. 77. Esse modelo tem um conjunto infinito de reais  $A$  sem subconjunto enumerável. Portanto, PD não vale no modelo. Também possui uma função (classe própria) injetora

$\mathcal{F}: \mathfrak{N} \longrightarrow I \times \mathbf{On}$ , onde  $I$  é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de  $A$  (em realidade, os suportes). Vamos ver que nesse modelo vale  $\mathbb{P}\text{-}\aleph_0$ .

**TEOREMA 3.7 (PINCUS)** *Seja  $x \in \mathfrak{N}$ . Então, existe uma partição enumerável de  $x$  em  $\mathfrak{N}$ .*

*Prova.* Seja  $x \in \mathfrak{N}$  tal que  $x$  (é infinito) <sup>$\aleph$</sup> . Se  $\mathcal{F}[x]$  tem apenas uma quantidade finita de  $y \subseteq A$  tais que  $\exists \alpha \langle y, \alpha \rangle \in \mathcal{F}[x]$ , então temos que  $R = \{\alpha : \exists y \subseteq A \wedge \langle y, \alpha \rangle \in \mathcal{F}[x]\}$  é infinito. Nesse caso, usamos a boa ordem dos ordinais para separar uma quantidade enumerável de elementos de  $R$  e, como  $F$  é injetora, podemos, por sua vez, separar um subconjunto enumerável de  $x$ .

Por outra parte, se  $\mathcal{F}[x]$  tem uma quantidade infinita de  $y \subseteq A$  tais que  $\exists \alpha \langle y, \alpha \rangle \in \mathcal{F}[x]$ , então chamemos  $S$  ao conjunto dos tais  $y$ . Agora distinguiamos dois casos:

- 1) Se a cardinalidade dos elementos de  $S$  não tem limite, no sentido de que  $\forall n \in \omega \exists y \in S \ |y| > n$ , então partimos  $S$  em classes, cada uma das quais contem os elementos de  $S$  que têm a mesma cardinalidade.
- 2) Em caso contrário, observamos que existe  $n \in \omega$  tal que  $\forall y \in S \ |x| \leq n$ . Mas então, como temos visto no lema 3.7, um conjunto de reais sem subconjunto enumerável é  $\aleph_0$ -partível. Logo, podemos usar o teorema 3.8 para gerar uma partição enumerável de  $S$ .  $\square$

O próximo teorema pode ser obtido facilmente a partir do teorema 3.1. Preferimos, porém, dar uma prova direta, já que fica mais claro o argumento combinatório que deu origem à nossa prova da página 37.

TEOREMA 3.8 *Seja  $T$  uma família de conjuntos tal que, para um  $n \in \omega$  fixo, temos que  $t \in T \rightarrow |t| \leq n$ . Seja  $\{A_i : i \in \omega\}$  uma partição enumerável de  $\cup T$ . Então existe uma partição enumerável de  $T$ .*

*Prova.* Seja  $B_i = \{t \in T : t \cap A_i \neq \emptyset\}$ . Então, vamos definir indutivamente a seqüência dos  $\{D_i : i \in \omega\}$ , a que pretendemos que seja uma partição enumerável de um subconjunto de  $T$ . Suponha que já temos definido  $D_r$  para  $r < i$ . Chamaremos  $C_i$  à condição “existe uma quantidade infinita de  $A_j$  tais que  $A_j \cap \cup (T \setminus (\cup_{r < i} D_r \cup B_i)) \neq \emptyset$ ”. Analogamente,  $F_i$  é a condição  $B_i \setminus (\cup_{r < i} D_r) \neq \emptyset$ . Agora podemos definir:

$$D_i = \begin{cases} B_i - (\cup_{r < i} D_r) & \text{se } C_i \text{ e } F_i \\ \emptyset & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Achamos conveniente fazer alguns comentários sobre as idéias intuitivas aqui presentes. Para definir uma partição de  $T$  devemos utilizar, obviamente, a partição  $\{A_i : i \in \omega\}$ . A maneira habitual de fazer isto é definir cada novo membro da partição como  $B_i \setminus (\cup_{r < i} D_r)$ . Mas, se não tomarmos os

cuidados necessários, pode acontecer que faça parte na partição um membro grande demais. Para aclarar isto, suponhamos, por exemplo, que  $A_0$  tem intersecção não vazia com todos os elementos de  $T$ , fato que poderia muito bem acontecer. Nesse caso, teríamos que  $D_0 = T$ , e todos os demais membros da partição definida seriam vazios. Obviamente, a condição  $C_i$  evita esse caso. Ao contrário do que acontece com  $C_i$ , a condição  $F_i$  não é necessária para que a partição definida seja correta. Porém, a sua inclusão na definição permite simplificar bastante o argumento da prova. Prossigamos agora com a prova propriamente dita.

Vamos mostrar que existe uma quantidade infinita de  $D_i$ , tais que  $D_i \neq \emptyset$ , com o qual teremos provado o teorema 3.8.

Vamos ver sucessivamente:

(1)  $C_i$  vale para no mínimo um índice  $i$ .

Caso contrário, vamos mostrar que  $\bigcup T$  é coberta por uma quantidade finita de  $A_j$ , em contradição com nossa hipótese. Primeiro, observamos que o fato de que os elementos de  $T$  tenham cardinalidade  $\leq n$  implica que o conjunto  $\bigcup \left( \bigcap_{i < n} B_i \right)$  é coberto pelos  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ . Mas o complemento desse conjunto é:

$$(*) \quad \bigcup \left( T - \bigcap_{i < n} B_i \right) = \bigcup \left( \bigcup_{i < n} (T - B_i) \right) = \bigcup_{i < n} \left( \bigcup (T - B_i) \right).$$



Então, é suficiente mostrar que  $\cup(T - B_i)$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Por causa da definição enunciada, o fato de que  $C_i$  falhe, tem como consequência que :  $D_i = \emptyset$  para todo  $i \in \omega$ . Portanto,  $\neg C_i$  é equivalente a:

$$"A_j \cap \cup(T - B_i) \neq \emptyset \text{ para uma quantidade finita de } j"$$

Vamos ver sucessivamente:

(1)  $C_i$  vale para no mínimo um índice  $i$ .

Caso contrário, vamos mostrar que  $\cup T$  é coberta por uma quantidade finita de  $A_j$ , em contradição com nossa hipótese. Primeiro, observamos que o fato de que os elementos de  $T$  tenham cardinalidade  $\leq n$  implica que o conjunto  $\cup(\bigcap_{i < n} B_i)$  é coberto pelos  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ . Mas o complemento desse conjunto é:

$$(*) \quad \cup\left(T - \bigcap_{i < n} B_i\right) = \cup\left(\bigcup_{i < n} (T - B_i)\right) = \cup_{i < n} \left(\cup(T - B_i)\right).$$

Então, é suficiente mostrar que  $\cup(T - B_i)$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Por causa da definição enunciada, o fato de que  $C_i$  falhe, tem como consequência que :  $D_i = \emptyset$  para todo  $i \in \omega$ . Portanto,  $\neg C_i$  é equivalente a:

“ $A_j \cap \bigcup(T \setminus B_i) \neq \emptyset$  para uma quantidade finita de  $j$ ”

Note que, para  $X \subseteq \bigcup T$ ,  $X$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$  se e somente se  $X \cap A_j \neq \emptyset$  para uma quantidade finita de  $A_j$ . Das últimas duas afirmações, segue-se que  $\bigcup(T \setminus B_i)$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ , como queríamos mostrar.

(2)  $C_i \wedge F_i$  vale para uma quantidade infinita de índices  $i$ .

Observamos primeiro que  $C_i \wedge F_i$  vale para, no mínimo, um índice  $i$ , p. ex., para o primeiro  $i$  tal que  $C_i$  vale, pois  $\bigcup_{r < i} D_r = \emptyset$  para tal  $i$ .

Suponhamos, então, que (2) falha, e seja  $k$  o maior índice  $i$  para o qual  $C_i \wedge F_i$  valem. Vemos que, sob essa suposição,  $D_i = \emptyset$  para  $i > k$ . Logo, para  $i > k$ ,

$$(**) \quad \bigcup_{r < i} D_r = \bigcup_{r \leq k} D_r = \bigcup_{r < k} D_r \cup B_k$$

(pois vale  $C_k \wedge F_k$ ). Sejam

$$(***) \quad T_k = T \setminus \left( \bigcup_{r < k} D_r \cup B_k \right) = T \setminus \left( \bigcup_{r \leq k} D_r \right),$$

e

$$J = \{A_j: j > k \text{ and } A_j \cap \bigcup T_k \neq \emptyset\}.$$

Como  $C_k$  vale,  $\bigcup T_k$  não pode ser coberto por uma quantidade infinita de  $A_j$ , e logo  $J$  é infinito. Agora vamos provar:

(2.a)  $A_j \in J \rightarrow \neg C_j$ .

De  $A_j \in J$  obtemos  $A_j \cap \bigcup T_k \neq \emptyset$ , e logo  $B_j \cap T_k \neq \emptyset$ . Por (\*\*\*) , existe  $t \in (B_j \setminus \bigcup_{r \leq k} D_r)$ , e usando (\*\*), temos  $B_j \setminus \bigcup_{r < j} D_r \neq \emptyset$ . Mas isso mostra que  $F_j$  vale. Como  $j > k$ ,  $C_j$  deve falhar.

(2.b)  $\bigcup T_k$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ .

com efeito, sejam  $A_{j_0}, \dots, A_{j_{n-1}}$   $n$  elementos diferentes de  $J$ . Pelo argumento usado em (1), temos que  $\bigcup (\bigcap_{i < n} B_{j_i})$  é coberto por  $A_{j_0}, \dots, A_{j_{n-1}}$ . Como  $C_{j_i}$  falha (ver (2.a)), temos que  $\bigcup (T \setminus (\bigcup_{r < j_i} D_r \cup B_{j_i})) = \bigcup (T_k \setminus B_{j_i})$  (ver (\*\*)) é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ , para  $0 \leq i \leq n - 1$ . Como em (1.(\*)), podemos concluir que  $\bigcup (T_k \setminus \bigcap_{i < n} B_{j_i})$  é coberto por uma quantidade finita de  $A_j$ , e logo  $\bigcup T_k$  também .

Mas esta contradição prova (2), e portanto o teorema 3.8  $\square$

Fica ainda a questão das relações dedutivas de  $P\text{-}\aleph_0$  com as formas usuais do AE enquanto se restringe a cardinalidade. É bem conhecido que o AE para famílias enumeráveis implica PD (e portanto,  $P\text{-}\aleph_0$ ), e que PD implica o AE restrito a famílias enumeráveis de conjuntos finitos. Para prosseguir com nossa discussão, precisamos de algumas definições.

DEFINIÇÃO 3.12 Sejam  $\kappa$  e  $\lambda$  dois cardinais (bem-ordenados) quaisquer. Então, denotamos com  $AE_\lambda^\kappa$  o enunciado “para toda família  $x$  de cardina-

lidade  $\leq \kappa$ , e cujos elementos têm cardinalidade  $\leq \lambda$ , existe uma função seletora sobre  $x$ ". Ademais, seja  $AE_{\leq \omega}^{\kappa}$ , a definição análoga para famílias de conjuntos finitos.

Continuando com nosso comentário, podemos agora colocar a questão das formas do AE implicadas por  $P\text{-}\aleph_0$ . Neste sentido, temos que  $P\text{-}\aleph_0$  não implica nem sequer  $AE_2^{\omega}$ . Primeiro, vamos provar esse resultado para ZFA, e logo faremos a transferência correspondente. Para mostrar isto, veremos que no segundo modelo de Fraenkel (ver p. 21) todo conjunto infinito é  $\aleph_0$ -partível.

Seja  $\mathfrak{B}$  o segundo modelo de Fraenkel. Usaremos a notação da secção 2.3. Uma técnica usual na literatura consiste, como temos visto, em atribuir a cada conjunto do modelo o seu menor suporte, pois varios modelos conhecidos (p. ex., o modelo de Mostowski) têm essa propriedade. Mas o seguinte contraexemplo mostra que isso não acontece em  $\mathfrak{B}$ .

**CONTRAEXEMPLO 3.1** *Existem em  $\mathfrak{B}$  conjuntos sem menor suporte.*

Com efeito, consideremos o conjunto  $a_0$ , com  $a_0 \in A$ . Se  $\pi \in \mathfrak{G}$  temos que  $\pi(a_0) = a_0$  sse  $\pi(b_0) = b_0$ , pois  $\pi \in \mathfrak{G}$  implica que  $\pi$  preserva pares, e então  $\pi(\{a_0, b_0\}) = \{a_0, b_0\}$ . Portanto, vemos que tanto  $\{a_0\}$  como  $\{b_0\}$  são suportes de  $\{a_0, b_0\}$ , mas  $\emptyset = \{a_0\} \cap \{b_0\}$  não.

Por este motivo, precisamos da seguinte

DEFINIÇÃO 3.13 Seja  $S \subseteq A$ . Então  $S$  é dito *normal* se é da forma  $\{a_{i_0}, b_{i_0}, a_{i_1}, b_{i_1}, \dots, a_{i_n}, b_{i_n}\}$ .

OBSERVAÇÃO 3.2 Se  $S$  é um suporte normal e  $\pi \in \mathcal{G}$ , então  $\pi[S] = S$  e  $\pi[A \setminus S] = A \setminus S$ . Se  $\pi \in \mathcal{G}$ , então  $\exists a \in A$ ,  $\pi(\pi(a)) = a$ .

Apesar de  $\mathfrak{B}$  ter conjuntos sem menor suporte, todo conjunto em  $\mathfrak{B}$  tem um menor suporte normal. Desta maneira, podemos proceder com uma certa analogia com as demonstrações que usam o menor suporte dos conjuntos pertencentes aos respectivos modelos. Neste sentido, vale o seguinte:

LEMA 3.8 Seja  $x \in \mathfrak{B}$ . Então a interseção de dois suportes normais de  $x$  é também um suporte normal de  $x$ .

*Prova.* Sejam  $S_1$  e  $S_2$  dois suporte normais de  $x$ . Mostraremos que  $S = S_1 \cap S_2$  é um suporte normal de  $x$ . A normalidade é óbvia. Para ver que é um suporte, seja  $\pi \in \text{fix}(x)$  e provaremos que  $\pi \in \text{sym}(x)$ .

Agora, vamos definir duas permutações  $\pi_1, \pi_2$  tais que  $\pi_1 \in \text{fix}(S_1)$ ,  $\pi_2 \in \text{fix}(S_2)$ : para  $a \in A$

$$\pi_1(a) = \begin{cases} \pi(a) & \text{se } a \notin S_1 \\ a & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\pi_2(a) = \begin{cases} \pi(a) & \text{se } a \in (S_1 - S_2) \\ a & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como  $S_1$ ,  $A - S_1$ , etc., são suportes normais e complementos de suportes normais, pela observação anterior temos que  $\pi_1, \pi_2$  são permutações de  $A$ . Além disso, elas preservam pares, e portanto pertencem a  $\mathfrak{S}$ .

Uma verificação direta, usando que  $\pi(a) = a$ , para  $a \in S$ , mostra que  $\pi(a) = \pi_1(\pi_2(a))$ , para todo  $a \in A$ .

Como uma permutação induz um automorfismo do universo, temos que  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ . Observemos que  $\pi_2(x) = x$  pois  $\pi_2 \in \text{fix}(S_2)$  and  $S_2$  é um suporte de  $x$ ; similarmente,  $\pi_1(x) = x$ . Assim, temos que  $\pi(x) = \pi_1(\pi_2(x)) = x$ , e  $\pi \in \text{sym}(x)$ , mostrando que  $S$  é um suporte de  $x$ .  $\square$

**COROLÁRIO 3.14** *Seja  $x \in \mathfrak{B}$ . Se  $K$  é o conjunto de todos os suportes normais de  $x$ , então existe um único  $S_0 \in K$ , tal que  $\forall S \in K \quad |S_0| \leq |S|$ .  $S_0$  é o menor suporte normal de  $x$ .*

*Prova.* Usamos lema 3.8 para tomar como  $S_0$  um elemento de  $K$  de cardinalidade mínima.  $\square$

Vamos considerar agora a função (classe própria)  $\mathcal{H} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{P}^{<\omega}(A)$  ( $\mathcal{P}^{<\omega}(A)$  é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de  $A$ ). Para  $x \in \mathfrak{B}$ , seja  $\mathcal{H}$  o menor suporte normal de  $x$ . Observamos que  $\mathcal{H}$  é simétrica no sentido de JECH [1973], p. 49.

LEMA 3.9 *Seja  $x \in \mathfrak{B}$ , e seja  $S$  um suporte tal que  $\forall y \in x, \mathcal{H}(y) = S$ . Então  $x$  pode ser bem ordenado.*

*Prova.* Seja  $\mathbb{F}$  o filtro usado para definir o modelo  $\mathfrak{B}$ . Lembremos que  $\text{fix}(x) \in \mathbb{F}$  implica que  $x$  pode ser bem ordenado (ver p. 18). Mostraremos que  $\text{fix}(x) \in \mathbb{F}$ . Observemos que basta provar que  $\text{fix}(S) \subseteq \text{fix}(x)$ . Para isso, sejam  $\pi \in \text{fix}(S)$  e  $y \in x$ . Como  $S$  é um suporte de  $y$ , temos que  $\text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(y)$ , i.e.,  $\pi(y) = y$ . Portanto,  $\pi \in \text{fix}(x)$ .  $\square$

LEMA 3.10 *Existe em  $\mathfrak{B}$  uma quantidade enumerável de suportes normais.*

*Prova.* Seja  $R$  o conjunto de todos os suportes normais. Então, definimos  $f: R \longrightarrow \mathcal{P}^{<\omega}(\omega)$  da seguinte maneira: para  $S \in R$ ,  $S = \{a_{i_0}, b_{i_0}, a_{i_1}, b_{i_1}, \dots, a_{i_k}, b_{i_k}\}$ , seja  $f(S) = \{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ . Note que  $f \in \mathfrak{B}$ , pois a enumeração de  $B$  está em  $\mathfrak{B}$ . É fácil mostrar que  $f$  é uma bijeção entre  $R$  e  $\mathcal{P}^{<\omega}(\omega)$ , e, portanto,  $R$  é enumerável.  $\square$

TEOREMA 3.9 *Se  $x$  é infinito e  $x \in \mathfrak{B}$ , então  $x$  é  $\aleph_0$ -partível em  $\mathfrak{B}$ .*

*Prova.* Seja  $\mathcal{H}$  como foi definida acima. Se  $\mathcal{H}[x]$  é infinito, então é enumerável, como se viu no lema 3.10. Então, a enumeração de  $\mathcal{H}[x]$  induz uma partição de  $x$ . Por outra parte, se  $\mathcal{H}[x]$  é finito, então existe um subconjunto infinito de  $x$  tal que  $\mathcal{H}[x]$  atribui o mesmo suporte normal a todos eles. Mas então, esse subconjunto pode ser bem ordenado, como mostramos no lema 3.9, de modo que podemos usar esse subconjunto para definir uma partição enumerável de  $x$ .  $\square$

COROLÁRIO 3.15  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{P-}\aleph_0 \rightarrow \text{AE}_2^\omega$ .

Para transferir esse resultado, precisamos de algumas definições.

DEFINIÇÃO 3.14 Seja  $x$  um conjunto qualquer. O cardinal sobrejetivo de  $x$  é definido por:

$$|x|^\sim = \text{Sup} \{ \alpha \in \mathbf{On} : \text{existe uma função sobrejetiva de } x \text{ a } \alpha \}.$$

(Cfr. PINCUS [1972], p. 721.)

DEFINIÇÃO 3.15 Como é habitual, anotamos com  $\phi^A$  e  $\sigma^A$ , à relativização da fórmula  $\phi$  e o termo  $\sigma$ , respectivamente, à classe  $A$ . Uma fórmula  $\phi$  é limitável se existe um ordinal  $\alpha$  tal que

$$\vdash_{\text{FM}} \phi(x) \leftrightarrow \phi^{\text{V}_\alpha(x)}(x).$$



Analogamente, um termo  $\sigma(x)$ , diz-se limitável se

$$\vdash_{\text{FM}} \sigma(x) = \sigma(x)^{\mathcal{V}_\alpha(x)}.$$

(para a definição de  $\mathcal{V}_\alpha(x)$  ver p. 14).

PINCUS [1972] estendeu a técnica de transferência desenvolvida por Jech e Sochor a uma classe maior de enunciados. Com efeito, a técnica de Jech e Sochor permite transferir toda fórmula  $\phi$  limitável, enquanto a de PinCUS aplica-se também às fórmulas *sobrejetivamente limitadas*, no sentido da seguinte:

DEFINIÇÃO 3.16 Seja  $\text{CLT}(x)$  a *clausura transitiva* de  $x$ . Uma fórmula  $\Phi(y)$  é *sobrejetivamente limitável*, se  $\Phi(y)$  é uma conjunção  $\Phi_i(y)$ :

$$\Phi_i(y) = \forall x \left( (|x|^- \leq \sigma_i(y) \wedge x \cap \text{CLT}(y) = \emptyset) \rightarrow \psi_i(x, y) \right),$$

com  $\sigma_i(y)$  e  $\psi_i(x, y)$  limitáveis. Um enunciado  $\phi$  é *sobrejetivamente limitável*, se  $\Phi(y)$  é a clausura existencial de uma fórmula sobrejetivamente limitável.

Usando a terminologia destas definições, podemos enunciar um importante resultado de PINCUS [1972]:

TEOREMA 3.10 (PINCUS) *Se existe um modelo de permutação onde vale um enunciado  $\phi$ , e, ademais, o enunciado  $\phi$  é sobrejetivamente limitado, então existe um modelo simétrico no qual vale o enunciado  $\phi$ .*

Desta maneira, para a transferência do resultado anterior é suficiente mostrar que o enunciado “todo conjunto infinito é  $\aleph_0$ -partível, mas existe uma família enumerável de pares sem função de escolha”, é sobrejetivamente limitável. Para tanto, vamos definir  $\Phi_0$  e  $\Phi_1$  para que expressem, respectivamente, “existe uma família enumerável de pares sem função de escolha” e “todo conjunto infinito é  $\aleph_0$ -partível”, com  $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$ . Observamos que “existe uma família enumerável de pares sem função de escolha” é limitável, e, *a fortiori*, sobrejetivamente limitável, de modo que pode ser escrita sem problema a fórmula  $\Phi_0$  que o expressa. Para ver que o outro enunciado pode ser colocado sob a forma da definição de sobrejetivamente acotado, seja  $\theta(x)$  a fórmula que expressa, da maneira habitual, esse enunciado: “para todo conjunto infinito  $x$ , existe  $P$  tal que  $P$  é uma partição enumerável de  $x$ ”. Pode ser facilmente constatado que todos os quantificadores de  $\theta(x)$  fazem referência a conjuntos de rango  $\leq \mathcal{V}_{\omega+2}(x)$ , e assim temos:

$$\vdash_{\text{FM}} \theta(x) \leftrightarrow \theta^{\mathcal{V}_{\omega+2}(x)}(x).$$

Por outra parte, como  $|x|^- > \omega$  implica que  $x$  é  $\aleph_0$ -partível, obtemos:

$$\vdash_{\text{FM}} \forall x (|x|^- \leq \omega \rightarrow \theta(x)) \leftrightarrow \forall x \theta(x).$$

Desta maneira, a fórmula:

$$\Phi_1(\emptyset) = \forall x \left( (|x|^- \leq \omega \wedge x \cap \text{CLT}(\emptyset) = \emptyset) \rightarrow \theta(x) \right),$$

e equivalente em FM a  $\forall x \theta(x)$ . Como  $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$  vale no modelo visto anteriormente, obtemos o seguinte:

TEOREMA 3.11  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{P-}\aleph_0 \rightarrow \text{AE}_2^\omega. \square$

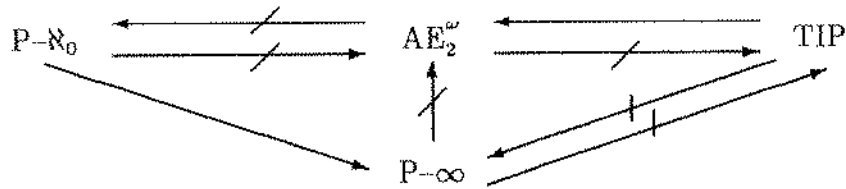


Figura 3.2: Partições e o axioma da escolha

Além do cardinal sobrejetivo, Pincus define de maneira análoga o cardinal injetivo.

DEFINIÇÃO 3.17

$$|x|_- = \text{Sup} \{ \alpha \in \mathbf{On} : \text{existe uma função injetiva de } \alpha \text{ a } x \}.$$

Como é bem conhecido, o cardinal injetivo de um conjunto está relacionado com a função definida por Hartogs, (também chamada “número de Hartogs” desse conjunto). Com efeito, o sucessor de  $|x|_-$  é o número de Hartogs de  $x$ . Hartogs usou esse conceito para provar a equivalência entre o AE e o princípio de tricotomia para cardinais. Também é um resultado conhecido que “ $x$  é D-infinito” é equivalente a “ $|x|_- \geq \omega$ ”. Neste contexto, queremos salientar que, apesar de ter sido tão pouco estudado, o conceito de  $\aleph_0$ -partível aparece de maneira natural uma e outra vez, pois o análogo do enunciado recém citado: “ $|x|^- \geq \omega$ ” é equivalente a “ $x$  é  $\aleph_0$ -partível”.

## Capítulo 4

# Relações entre ordens densas e partições

### 4.1 Implicações entre ordens densas e partições de conjuntos infinitos

Lembremos que PP é “todo conjunto infinito é partível”, enunciado que, segundo vimos, é independente dos axiomas de ZF. Quando num modelo não vale PP, é porque para algum conjunto infinito  $x$ ,  $\mathcal{P}(x)$  tem somente os subconjuntos finitos e cofinitos de  $x$ . Assim sendo, PP determina que, para todo conjunto infinito  $x$ ,  $\mathcal{P}(x)$  deve conter alguns outros conjuntos, e isto já basta para construir alguns tipos de ordens densas em  $\mathcal{P}(x)$ . Para estes primeiros resultados, precisamos da seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 4.1**  $\text{Inf}(x)$  é a propriedade “ $x$  é infinito”.

LEMA 4.1 *Seja  $x$  tal que  $\text{Inf}(x)$ . Seja, ademais,  $h \subseteq \mathcal{P}(x)$  tal que  $\text{Inf}(h)$ , e  $\forall z \in h \neg \text{Inf}(z) \rightarrow \exists t \in h (\text{Inf}(t) \wedge z \subseteq t)$ . Então a condições:*

(i)  $\forall y \in h, \text{Inf}(y)$ , *existe uma partição de  $y$  em dois conjuntos infinitos  $h_1, h_2$ , com  $h_1, h_2 \in h$ ; e*

(ii)  $\forall h_1 \forall h_2 (h_1, h_2 \in h \rightarrow (h_1 \cup h_2 \in h) \wedge (h_1 \setminus h_2 \in h))$

*implicam que existe uma ordem densa em todas partes sobre  $h$ .*

*Prova.* Definimos em  $h$ :  $a < b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge \text{Inf}(b \setminus a))$ . Vemos imediatamente que é uma ordem. Para mostrar que é densa, sejam  $a, b \in h$ , tal que  $a < b$ . Primeiro, dividimos  $b \setminus a$ :  $(b \setminus a) = c \cup d$ , com  $c$  e  $d$  infinitos e disjuntos, e logo tomamos  $r = c \cup a$ . Então temos que  $a < r < b$  e  $r \in h$ . Por último, vamos ver que é densa em todas partes. Para tanto, seja  $a \in h$ . Se  $a$  é finito, existe um  $b$  infinito tal que  $a \subseteq b$ , e assim  $a < b$ . Se  $a$  é infinito, lo dividimos em  $c$  e  $d$ , ambos infinitos e disjuntos, e obtemos  $c < a$ .  $\square$

COROLÁRIO 4.1 *Seja  $x$  um conjunto qualquer e seja  $h$  tal que  $h \subseteq \mathcal{P}(x)$  e  $\forall z \in h \text{Inf}(z)$ . Então, as condições (i) e (ii) do lema 4.1 implicam que existe uma ordem densa em todas partes sobre  $h$ .  $\square$*

COROLÁRIO 4.2 *Seja  $x$  tal que  $\text{Inf}(x)$ . Então PP implica que existe uma ordem densa em todas partes sobre  $\mathcal{P}(x)$ .  $\square$*

O último corolário e, especialmente, o próximo lema, mostram a estreita relação que existe entre PP e as ordens densas.

LEMA 4.2  $ZF \vdash ODNT \rightarrow PP$ .

*Prova.* Seja  $x$  um conjunto infinito. Por PP existe uma ordem densa não trivial  $<$  sobre  $x$ , e existem  $a$  e  $b$  em  $x$  tais que  $x < y$ . Seja  $c$  tal que  $a < c < b$ , e sejam  $s = \{z \in x : z < c \vee z = c\}$  e  $t = \{z \in x : z \not< c \wedge z \neq c\}$ . Então,  $s$  e  $t$  satisfazem a condição requerida por PP.  $\square$

Devido a que PP é independente em ZF (ver Proposição 3.3, na p. 59), obtemos imediatamente o seguinte:

COROLÁRIO 4.3  $Con(ZF) \Rightarrow ZF \not\vdash ODNT$ .  $\square$

O seguinte resultado mostra a relação entre  $P-\aleph_0$  e a existência de ordens densas não triviais.

LEMA 4.3  $ZF \vdash P-\aleph_0 \rightarrow ODNT$

*Prova.* Seja  $x$  um conjunto infinito e seja  $B = \{A_n : n \in \omega\}$  uma partição enumerável de  $x$ . Além disso, seja  $f : \omega \rightarrow \mathbb{Q}$  uma bijeção, e seja  $<_{\mathbb{Q}}$  a ordem natural dos racionais. Então, para  $a, a' \in A$ , definimos:

$a < a' \leftrightarrow f(n) <_{\mathbb{Q}} f(m) \wedge a \in A_n \wedge a' \in A_m$ . Pode ser mostrado facilmente que  $<$  é uma ordem densa não trivial, usando os fatos:

- 1) Os elementos de  $B$  são dois a dois disjuntos,
- 2)  $f$  é uma bijeção, e
- 3)  $<_{\mathbb{Q}}$  é uma ordem densa.  $\square$

Do lema 4.3 e o teorema 3.11, obtemos:

**COROLÁRIO 4.4**  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{ODNT} \rightarrow \text{AE}_2^{\omega}$ .  $\square$

Se um conjunto tem subconjunto enumerável, então ele é  $\aleph_0$ -partível e, conseqüentemente, existe uma ordem densa não trivial sobre ele. Alternativamente, podemos usar a existência do subconjunto enumerável para definir uma ordem densa em alguma parte sobre ele, e logo proceder como no Lema 1.2. Portanto, temos que o enunciado “todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável” implica ODNT em ZF.

Segundo vimos no teorema 3.9 da p. 70, no segundo modelo de Fraenkel todo conjunto infinito é  $\aleph_0$ -partível. Entretanto, é um fato conhecido que o conjunto de átomos desse modelo não pode ser linearmente ordenado. Com efeito, se  $A$  pudesse ser linearmente ordenado, então seria fácil provar a existência de um subconjunto de escolha para a família de pares de



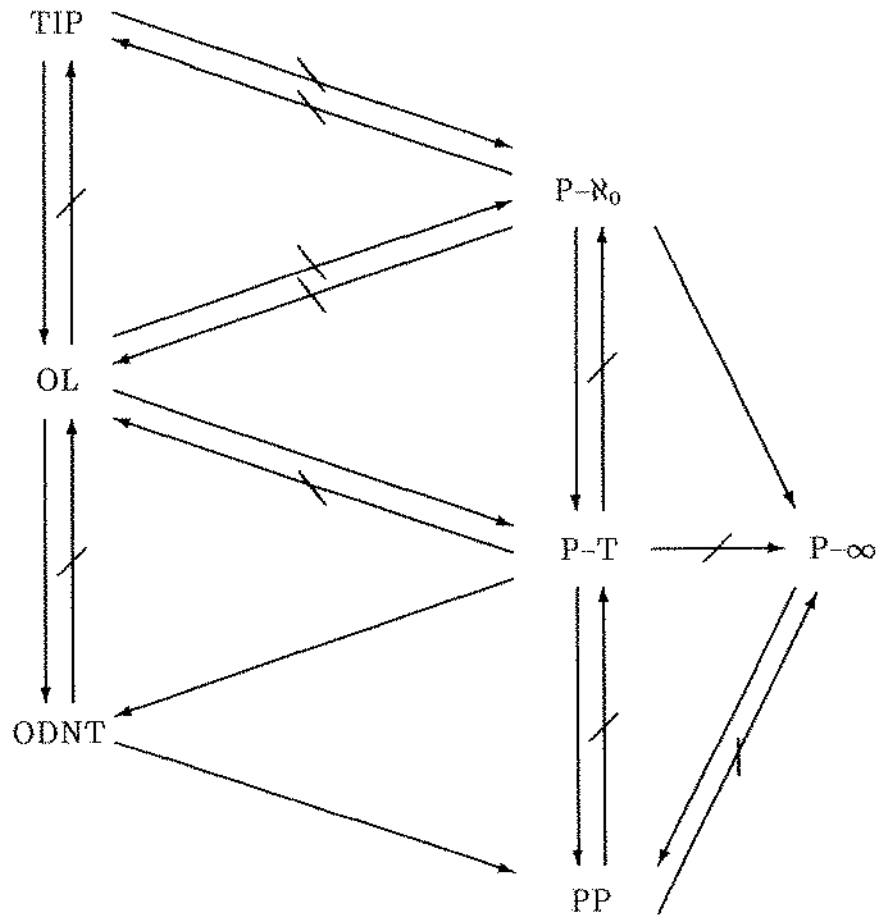


Figura 4.1: Enunciados sobre partições e ordens

átomos que chamamos  $B$  na página 21. Então, o lema 4.3 nos permite obter imediatamente o seguinte:

**COROLÁRIO 4.5**  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{ODNT} \rightarrow \text{OL}$ .

Vamos terminar esta secção com um resultado mais forte que o lema 4.3.

LEMA 4.4  $\text{ZF} \vdash$  “ $x$  é T-infinito”  $\rightarrow$  “existe uma ordem densa não trivial sobre  $x$ ”.

*Prova.* Seja  $\langle C, \subseteq \rangle$  uma cadeia infinita em  $\mathcal{P}(x)$ . Se  $C$  tem subconjunto enumerável, então  $x$  é  $\aleph_0$ -partível. Caso contrário, definimos a condensação de  $\langle C, \subseteq \rangle$ . Com efeito, para  $c \in C$ , seja

$$I_c = \{d \in C : \{r \in C : c \subseteq r \subseteq d \vee d \subseteq r \subseteq c\} \text{ é finito}\}.$$

Observamos que para cada  $c \in C$ , o intervalo  $I_c$  é finito, pois  $C$  não tem subconjunto enumerável, e portanto,  $\{I_c : c \in C\}$  é infinito. Seja  $I = \{\cup I_c : c \in C\}$ . Temos então que  $\langle I, \subseteq \rangle$  é uma ordem linear densa. Então, para  $z, z' \in \cup C$ , definimos  $z \leq z' \leftrightarrow \cup I_z \subseteq \cup I_{z'}$ . É fácil ver que  $\leq$  é uma ordem densa não trivial sobre  $x$ .  $\square$

## 4.2 Ordens lineares densas e o princípio de ordem linear

Começaremos por mostrar que OL não implica OLD em ZF. Para tanto, trabalharemos primeiramente no modelo de Mostowski e logo estabeleceremos

mos o resultado análogo para ZF. Mostraremos que nesse modelo existe um conjunto que não pode ser linear e densamente ordenado. Seja  $\mathfrak{M}$  o modelo de Mostowski,  $A$  o seu conjunto de átomos,  $<$  a ordem de  $A$  isomorfa a  $\mathbb{Q}$  e  $a, b, e c$  elementos de  $A$ . Então, seja  $B = [a, b] \cup \{c\}$ . Obsevemos que  $B \in \mathfrak{M}$  com suporte  $\{a, b, c\}$ . Usando esta notação, podemos mostrar o seguinte:

LEMA 4.5 *Não existe em  $\mathfrak{M}$  uma ordem linear densa sobre  $B$ .*

*Prova.* Para obter uma contradição, suponhamos que existe  $\langle B, <_D \rangle$  com  $<_D$  ordem linear denso e que  $S$  é o seu suporte, i.e.  $\text{fix}(S) \subseteq \text{sym}(<_D)$  e seja  $S' = (B \cap S) \setminus \{a, b, c\}$ . Ademais, se  $S = \emptyset$ , definimos  $C_0 = (a, b)$  (os intervalos desta prova são sempre em relação a  $<$ , a ordem de  $A$  isomorfa à ordem natural de  $\mathbb{Q}$ ). Em caso contrário, escrevemos  $S'$  na forma  $\{s_0, \dots, s_{n-1}\}$  com  $s_i < s_{i+1}$ . Então, seja  $C_0 = (a, s_0)$ ,  $C_i = (s_i, s_{i+1})$  para  $i < n$ , e  $C_n = (s_{n-1}, b)$ . Assim, temos por construção que no existe  $s \in S$  entre dos elementos sucessivos de  $S'$  (v. gr., entre  $s_i$  e  $s_{i+1}$ ). Então temos que no existe  $r \in B$  tal que  $r \notin C_i$  para  $i \leq n$  e  $x <_D r <_D y$  com  $x, y \in C_i$ . Se isto não ocorre, fixemos tais  $i, x, y$ , e  $r$  para chegar a uma contradição. Então, veremos que existe uma  $\pi \in \text{fix}(S)$  tal que  $\forall c \notin C_i, \pi(c) = c$  e  $\pi(x) = y$ . Com efeito,  $(s_i, x), (s_i, y), (x, s_{i+1})$  e  $(y, s_{i+1})$  conjuntos enumeráveis com uma ordem linear densa, e portanto, pelo conhecido Teorema de Cantor, são

isomorfos. Fixemos então um isomorfismo  $f$  com relação à ordem  $<$  entre  $(s_i, x)$  e  $(s_i, y)$ , e outro  $g$  entre  $(x, s_{i+1})$  e  $(y, s_{i+1})$ . Então, para  $z \in A$ , seja

$$\pi(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in (s_i, x) \\ g(z) & \text{se } z \in (x, s_{i+1}) \\ y & \text{se } z = x \\ z & \text{se } z \notin C_i \end{cases}$$

É imediato que  $\pi$  preserva  $<$  e que  $\forall s \in S \pi(s) = s$ , e portanto temos que  $\pi \in \text{fix}(S)$ . Então, como  $\pi \in \text{fix}(S)$ , temos que  $\pi$  preserva  $<_D$ . Com efeito, sejam  $z, z' \in B, z <_D z'$ , o que é o mesmo que dizer  $\langle z, z' \rangle \in <_D$ . Como temos que  $\pi \in \text{sym}(<_D)$ , pois  $\pi \in \text{fix}(S)$ , também vale  $\pi(\langle z, z' \rangle) \in <_D$ . Mas  $\pi(\langle z, z' \rangle) = \langle \pi(z), \pi(z') \rangle$  obtemos  $\pi(z) <_D \pi(z')$ . Agora, como  $x <_D r$  e  $\pi$  preserva  $<_D$ , temos que  $\pi(x) <_D \pi(r)$  e, por definição de  $\pi$  obtemos  $y <_D r$ , em contradicção com  $r <_D y$ . Portanto temos que não existe  $r \in B$  tal que  $r \notin C_i$  para  $i \leq n$  e  $x <_D r <_D y$  com  $x, y \in C_i$ . Em consequência, temos que  $B \setminus (S \cup \{a, b, c\})$  está partido em conjuntos  $C_{i_0}, \dots, C_{i_n}$  tais que  $\forall x \forall y (x \in C_{i_j} \wedge y \in C_{i_{j+1}} \rightarrow x <_D y)$ . Seja  $D = S \cup \{a, b, c\}$ . Então observamos que cada elemento de  $D$  deve ser extremo de  $<_D$ , ou deve estar separando dois intervalos  $C_{i_j}, C_{i_{j+1}}$ , pois  $S$  é finito e  $<_D$  é uma ordem linear densa. Mas então temos no máximo  $n + 2$  elementos de  $D$  nestas

condições (pois existem  $n + 1$  intervalos). Entretanto  $D$  contém no mínimo  $n + 3$  elementos. Absurdo.  $\square$

COROLÁRIO 4.6  $\text{Con}(\text{ZFA}) \Rightarrow \text{ZFA} \not\vdash \text{OL} \rightarrow \text{OLD} \square$

Com este último corolário temos o resultado para a teoria de conjuntos que admite a existência de átomos. Mas o resultado correspondente para ZF pode ser obtido usando os métodos de Jech e Sochor (ver JECH [1973], pp. 85 e 90, e também o Problema 1 em p. 94). Com a utilização destes métodos, a partir do modelo Mostowski pode ser construído um modelo simétrico no qual vale não somente OL, mas também o Teorema do Ideal Primo (TIP) para as álgebras de Boole (ver op. cit. p. 113). Desta maneira, obtemos imediatamente os seguintes:

TEOREMA 4.1  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{OL} \rightarrow \text{OLD} \square$

TEOREMA 4.2  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{TIP} \rightarrow \text{OLD} \square$

Por último, veremos que OLD é independente em ZF. Para isso, lembremos que o teorema 1.2 da página 9 dizia que a conjunção de HI (ver Definição 1.10 na p. 9) e OL implicava OLD. Tendo em conta que Sageev

construiu um modelo onde valem esses dois enunciados, mas não AE (ver SAGEEV [1975]), temos imediatamente:

TEOREMA 4.3  $\text{Con}(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \not\vdash \text{OLD} \rightarrow \text{AE}. \square$

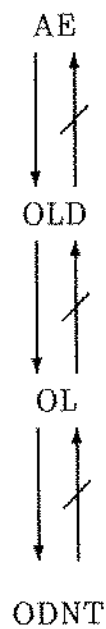


Figura 4.2: Enunciados sobre ordens

# Apêndice A

## Axiomas da teoria de conjuntos

### A.1 Axiomas de ZF

- Extensionalidade:

$$\forall X \forall Y \left( \forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y \right).$$

- Pares:

$$\forall u \forall v \exists X \forall z (z \in X \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

- Separação:

$$\forall p_1 \dots \forall p_n \forall X \exists Y \forall z \left( z \in Y \leftrightarrow z \in X \wedge \phi(z, p_1, \dots, p_n) \right),$$

para cada formula  $\phi$ .

- União:

$$\forall X \exists Y \forall z \left( z \in Y \leftrightarrow \exists h (z \in h \wedge h \in X) \right).$$

- Conjunto das partes:

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow z \subseteq X).$$

- Substituição:

$$\begin{aligned} \forall p_1 \dots \forall p_n \forall X \left( \forall x \left( x \in X \rightarrow \exists! y \phi(x, y, p_1, \dots, p_n) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \exists Y \forall y \left( y \in Y \leftrightarrow \exists x x \in X \wedge \phi(x, y, p_1, \dots, p_n) \right) \right), \end{aligned}$$

para cada formula  $\phi$ .

- Infinitude:

$$\exists Y \left( \emptyset \in Y \wedge \forall z (z \in Y \rightarrow (z \cup \{z\}) \in Y) \right).$$

- Regularidade:

$$\forall X \left( \exists z z \in X \rightarrow \exists z (z \in X \wedge z \cap X = \emptyset) \right).$$



## A.2 O axioma da escolha (AE)

- Axioma da escolha para famílias disjuntas:

$$\forall X \left( \left( \forall x (x \in X \rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \wedge \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \exists Y \forall x \in X \exists ! z (z \in Y \leftrightarrow z \in x) \right)$$

- O axioma da escolha restrito a cardinais.

Sejam  $\kappa$  e  $\lambda$  dois cardinais (bem-ordenados). Então  $AE_\lambda^\kappa$  é a fórmula:

$$\forall X \left( \left( |X| \leq \kappa \wedge \forall x \in X |x| \leq \lambda \right) \rightarrow \left( \left( \forall x (x \in X \rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \right. \right. \right. \\ \left. \left. \wedge \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \exists Y \forall x \in X \exists ! z (z \in Y \leftrightarrow z \in x) \right) \right)$$

### A.3 Axiomas de ZFA

A linguagem de ZFA é a de ZF, acrescida com uma constante de indivíduo  $A$  para representar o conjunto de átomos. Os axiomas de ZFA são Pares, Separação, União, do Conjunto das Partes, Substituição, Infinitude e os dois que seguem:

- Extensionalidade\*:

$$\forall X \forall Y \left( (X \notin A \wedge Y \notin A) \rightarrow (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y) \right).$$

- Regularidade\*:

$$\forall X \exists \alpha \ x \in \mathcal{V}_\alpha(A)$$

(Para a definição de  $\mathcal{V}_\alpha(A)$ , ver p. 14.)

# Bibliografia

CANTOR, G.

[1879] "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen*, **15**, 1-7.

[1895] "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1.", *Mathematische Annalen*, **46**, 481-52.

ELLENTUCK, E.

[1965] "The universal properties of Dedekind finite cardinals", *Annals of Mathematics*, **82**, 225-248.

FRAENKEL, A.,

[1922] "Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms", *Sitzungsber. Preussischen Akad. Wiss., Math. Kl.*, 253-257.

FRAÏSSÉ, R.

[1986] *Theory of relations*, North Holland (Amsterdam).

HALPERN, J. D., HOWARD, P. E.,

[1970] "Cardinals  $m$  such that  $2m = m$ ", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **26**, 487-490.

JECH, T.,

[1973] *The axiom of choice*, North Holland (Amsterdam).

JECH, T., SOCHOR, A.,

[1966a] "On  $\Theta$ -Model of the Set Theory", *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences math., astr. et phys.*, **14** No. 6, 297-303.

[1966b] "Applications of the  $\Theta$ -Model", *Ibid.*, **14** No. 7, 351-355.

LÉVY, A.,

[1958] "The independence of various definitions of finiteness", *Fundamenta Mathematicae*, **46**, 1-13.

MOSTOWSKI, A.,

[1939] "Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip", *Fundamentae Mathematicae*, **32**, 201-252.

PINCUS, D.

[1971] "Support structures for the axiom of choice", *Journal of Symbolic Logic*, **36**, 28-39.

[1972] "Zermelo–Fraenkel consistency results by Fraenkel–Mostowski methods", *ibid*, **37**, 721-743.

ROSENSTEIN, J. G.,

[1982] *Linear orderings*, Academic Press (New York).

RUSSELL, B.

[1905] "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd. series, **4**, 29-53.

SAGEEV, G.,

[1975] "An Independence Result Concerning the Axiom of Choice", *Annals of Mathematical Logic*, **8**, 1-184.

SPECKER, E.

[1957] "Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom)", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **3**, 173-210.

TARSKI, A.,

[1924] "Sur les ensembles finis", *Fundamenta Mathematicae*, **6**, 45-95.

# Índice de Figuras

2.1	Modelos com e sem átomos . . . . .	15
2.2	Modelo de permutação . . . . .	17
2.3	Modelos construídos usando <i>forcing</i> . . . . .	28
2.4	Imersão de Jech e Sochor . . . . .	30
3.1	Propriedades de partição e infinitude . . . . .	57
3.2	Partições e o axioma da escolha . . . . .	73
4.1	Enunciados sobre partições e ordens . . . . .	79
4.2	Enunciados sobre ordens . . . . .	84

# Índice de Nomes

- Cantor, G., I-III, 81  
Cohen, P. J., 27, 28, 59
- Dedekind, R., 33
- Ellentuck, E., 8
- Fraïssé, R., III, 5  
Fraenkel, A., IV, 12, 13, 20, 21, 23,  
27, 46, 47, 55, 66, 78
- Halpern, J. D., 8, 9  
Hartogs, F., 73  
Hausdorff, F., IV  
Hilbert, D., IV  
Howard, P. E., 8, 9
- Jech, T., 12, 17, 19, 21, 23, 24, 27,  
29-31, 45, 46, 52, 58, 59, 68,  
71, 83
- Kuratowski, C., 36
- Löwenheim, L., IV  
Lévy, A., 34, 40, 43, 46, 55, 58, 59
- Mathias, A. R. D., 18  
Mostowski, A., 12, 22, 23, 25, 26, 43,  
44, 46, 52, 53, 59, 66, 80, 81,  
83
- Pincus, D., 18, 19, 31, 60, 70, 71, 73
- Rosenstein, J. G., 1, 5, 6, 9  
Russell, B., IV, 13, 21
- Sageev, G., 83  
Schröder, E., IV  
Sochor, A., 27, 29, 30, 45, 46, 52, 58,  
59, 71, 83  
Specker, E., 15
- Tarski, A., 33, 34, 36
- von Neumann, J., 14  
Zermelo, E., IV



# Índice de Conceitos

- $\aleph_0$ -partível, 35
- $\infty$ -partível, 35
- $AE_\lambda^n$ , 65
- cardinal
  - idemmúltiplo, 8
  - injetivo, 73
  - sobrejetivo, 70
- D-infinito, 34
- fórmula
  - limitável, 70
  - sobrejetivamente limitável, 71
- filtro normal, 16
- $\text{fix}(x)$ , 17
- HI, 8
- idemmúltiplo, *ver* cardinal idemmúltiplo
- infinito, 34
  - D-infinito, 34
  - P-infinito, 35
  - T-infinito, 34
- intervalo, 4
- modelo de permutação, 16
- $n$ -partível, 35
- ODNT, 4
- OL, 4
- OLD, 4
- órbita, 24
- ordem, 2
  - densa, 2
  - densa em alguma parte, 3
  - densa em todas partes, 3
  - densa não trivial, 3
  - linear, 3
- ordem-partível, 40
- P- $\aleph_0$ , 58
- P- $\infty$ , 58
- P-infinito, 35
- partível, 35
  - $\aleph_0$ -partível, 35
  - $\infty$ -partível, 35
  - $n$ -partível, 35
- PD, 58
- PP, 58
- PT, 58
- simétrico, 16
- suporte, 18
  - normal, 67
- $\text{sym}(x)$ , 16
- T-infinito, 34
- TIP, 83
- transferência, 28
  - teoremas de, 29-31