LUÍS AUGUSTO SBARDELLINI

SEMÂNTICA CATEGORIAL GENERALIZADA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 08/05/2001

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio Marcelo E Coniglio

Profª. Drª. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Odilon Otávio Luciano Odilon Otavio Luciano

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Sb14s

Sbardellini, Luís Augusto
Semântica categorial generalizada / Luís Augusto Sbardellini. - - Campinas, SP : [s.n.], 2001.

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica. 2. Teoria de modelos. 3. Categorias (Matemática). 4. Teoria de feixes. I. Coniglio, Marcelo Esteban. II.Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

Em memória de meus tios Ina e Sebastião

iamque opus exegi, quod nec Iouis ira, nec ignis,
nec poterit ferrum, nec edax abolere uetustas.
cum uolet illa dies, quae nil nisi corporis huius
ius habet, incerti spatium mihi finiat aeui;
parte tamen meliore mei super alta perennis
astra ferar, nomenque erit indelebile nostrum.
quaque patet domitis Romana potentia terris,
ore legar populi; perque omnia saecula fama,
si quid habent ueri uatum praesagia, uiuam.

(Publius Ouidius Naso, *Metamorphoses* 15, 871-879)

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Marcelo Esteban Coniglio a permanente e invulgar dedicação ao desenvolvimento deste trabalho. Seu empenho e interesse constantes constituem um exemplo de integridade intelectual.

Agradeço aos professores Itala M. L. D'Ottaviano, que tão gentilmente me acolheu no CLE, Walter A. Carnielli, Silvio S. Chibeni e Michael Wrigley a decisiva colaboração para a minha formação discente e humana.

Agradeço a todos os colegas do CLE a proveitosa e agradável convivência nestes anos que aqui passei, em especial a Víctor Fernández, João Marcos, Mauro Scheer e Ricardo Tassinari.

Agradeço aos professores Francisco Miraglia, Odilon Otávio Luciano, ao colega Hugo Mariano e a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste projeto.

Agradeço à FAPESP o amparo financeiro concedido.

Agradeço aos meus pais Alomar e Isio e à minha irmã Gina o apoio a mim depositado em cada dia de minha vida.

Enfim, agradeço especialmente à minha futura esposa Priscila o carinho e o incentivo que durante estes dois anos foram a minha principal motivação.

Resumo

O presente trabalho trata de semântica categorial, isto é, da interpretação de linguagens de primeira ordem em categorias.

Propomos aqui uma generalização da semântica categorial usual (no sentido de [9]) através da modificação adequada da interpretação de símbolos de constantes. Na nossa nova abordagem, qualquer objeto de categoria pode interpretar a sorte de uma constante, mesmo que ele não tenha elementos globais. Exemplificamos os resultados conseguidos através do estudo de feixes e pré-feixes e realizamos uma comparação com as abordagens tradicional e estendida (em [3]).

Generalizamos a noção de partes de conjuntos para partes de objetos de categorias, demonstrando que o funtor gerado por essa aplicação é um feixe sobre Ω, o conjunto dos subobjetos do objeto final na categoria considerada. Mostramos também que o funtor induzido pela operação que atribui aos objetos de uma categoria o conjunto dos elementos generalizados é um pré-feixe sobre Ω. No final, reproduzimos as demonstrações de completude das semânticas tradicional [9] e estendida [3] e traçamos um esboço para a semântica generalizada.

Abstract

The present work treats of categorial semantics, that is, the interpretation of first order languages in categories.

We propose here a generalization of the usual categorial semantics (in the sense of [9]) through the suitable modification of the interpretation of symbols of constants. In our approach, any categorial object may interpret the sort of a constant, even of it does not have global elements. We exemplified the results obtained through the study of sheaves and presheaves and established a comparison with the traditional and extended approaches (in [3]).

We generalized the notion of powerset to powerobject of categories, proving that the functor generated by this application is a sheaf over Ω, the set of the subobjects of the terminal object in the category considered. We showed besides that the functor induced by the operation attributing to the objects of a category the set of the generalized elements is a presheaf over Ω. In the end, we reproduced the demonstrations of completeness for the traditional [9] and extended [3] semantics and outlined a sketch for generalized semantics.

Sumário

Introdução

F. W. Lawvere foi quem primeiramente concebeu a idéia de se fazer lógica algébrica por meio de categorias. Em 1963, ele introduziu uma formulação categorial de teorias algébricas na qual a regra de substituição é representada pela composição de morfismos. O segundo passo foi dado em 1965, quando Lawvere considerou os quantificadores como adjuntos da imagem inversa. Seja um morfismo $f : A \to B$ numa categoria finitamente completa: através do *pullback* podemos obter um funtor $f^* : \mathbf{Sub}(B) \to \mathbf{Sub}(A)$ que atribui a cada subobjeto de B a sua imagem inversa em A por f; as operações categoriais $\exists_f$ e $\forall_f$, correspondentes aos quantificadores lógicos, são definidas como adjuntos à esquerda e à direita, respectivamente, do funtor f^*. Categorias passam então a desempenhar o papel de teorias lógico-algébricas.

Desde então, diversos trabalhos vêm sendo realizados sobre o assunto, como os de Mitchell, Benabou, Coste, Reyes, Joyal, Kock e Makkai. Em 1977 é publicado o livro de Makkai e Reyes [9], no qual o estudo da semântica categorial de primeira ordem é finalmente sistematizado. Esses autores lidam com uma lógica de primeira ordem infinitária polissortida, que denotam por $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, a qual permite conjunções e disjunções infinitárias, desde que seja utilizado um número finito de variáveis livres. Ao mesmo tempo, teorias são substituídas, no processo interpretativo, por categorias lógicas (ou seja, dotadas de uma estrutura lógico-algébrica) e modelos de teorias são representados por funtores lógicos (isto é, funtores que têm como domínio as categorias lógicas).

Uma assinatura, na semântica usual [9][7], consiste em conjuntos de sortes, símbolos de funções e símbolos de predicados. Estruturas categoriais atribuem um objeto da categoria a cada sorte, um morfismo a cada símbolo de função e um subobjeto a cada símbolo de predicado. Como constantes podem ser vistas conceitualmente como funções de aridade zero e o produto do diagrama vazio é o objeto final $\mathbb{1}$, a interpretação de uma constante c de sorte A é dada por um elemento $\mathbb{1} \to \mathcal{M}A$, sendo $\mathcal{M}$ uma estrutura categorial.

M. Coniglio, em [3], introduz a noção de suporte (chamado de *extent* em [3]) de objetos de uma categoria na interpretação de constantes. Nesse trabalho, símbolos de constantes c passam a ocupar seu espaço na assinatura da linguagem e são interpretados como elementos da forma $\mathcal{E}\mathcal{M}A \to \mathcal{M}A$, sendo $\mathcal{E}\mathcal{M}A$ o suporte da interpretação da sorte A. Na categoria $\mathbf{Sh}(\Omega)$ dos feixes sobre Ω, uma álgebra de Heyting completa (cHa, daqui em diante), o suporte de um feixe P identifica-se com a extensão EP desse objeto, ou seja, o supremo em Ω dos elementos nos quais P tem seções. Como nem todo feixe tem extensão máxima, há um ganho considerável na quantidade de modelos.

Entretanto, a categoria $\mathbf{Sh}(\Omega)$ fornece exemplos de feixes que não possuem sequer seções globais [1]. Além disso, numa categoria arbitrária, as noções de suporte e elemento global não são idênticas. Consideremos inicialmente um elemento de um objeto A no sentido mais geral, ou seja, como um morfismo de um subobjeto qualquer de $\mathbb{1}$ em A. Se formarmos a coleção de todos os elementos de A e tomarmos o supremo desse conjunto com relação a $\mathbb{1}$, o resultado pode perfeitamente ser um subobjeto próprio de $\mathcal{E}A$. Em outras palavras, um elemento global de A não tem necessariamente o mesmo suporte que A.

A abordagem que propomos para a semântica categorial pretende dar conta de todos os objetos de uma categoria finitamente completa e bem-potenciada (*well-powered*), mesmo os que não possuam elementos globais. Isso será feito através da modificação adequada da interpretação das constantes, termos em geral e fórmulas atômicas. Tal como fez [3], acrescentamos as constantes aos contextos adequados aos termos e fórmulas, mas eliminamos a restrição que impõe às mesmas o caráter de finitude: o fato de ser Ω uma cHa nos garante que a interpretação do contexto é sempre realizável.

No primeiro capítulo deste trabalho, apresentamos a linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ estudada em [9]. Nossa meta é o estudo da semântica dessa linguagem e, em particular, dos seus fragmentos, que serão também discutidos. No final, definimos a noção de seqüente, fundamental no estudo dos modelos categoriais.

No segundo capítulo, expomos algumas noções gerais de teoria das categorias que serão aplicadas posteriormente ao estudo da semântica, como supremo, imagem, imagem inversa, estabilidade e outras. Além disso, classificamos algumas categorias especiais que se relacionam com fragmentos particulares da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ e introduzimos o conceito de suporte de objetos.

No terceiro capítulo, estudamos as categorias dos feixes e pré-feixes sobre uma cHa. Por se tratarem de exemplos fundamentais de categorias lógicas, cumprem um papel decisivo no desenvolvimento da semântica categorial. Dividimos o capítulo em duas seções: na primeira, consideramos feixes e pré-feixes sobre um espaço topológico; na segunda, generalizamos a estrutura algébrica subjacente aos abertos e definimos feixes e pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting completa.

O quarto capítulo foi reservado para o estudo de dois funtores com características especiais. O primeiro deles, $\mathcal{P}$, é uma generalização de partes de conjuntos para partes de objetos de uma categoria. Basicamente, $\mathcal{P}$ atribui a cada objeto de uma dada categoria Heyting bem-potenciada $\mathcal{C}$ o seu conjunto de subobjetos; mas, além disso, os distribui continuamente pela estrutura de reticulados de $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$. Demonstraremos que, de fato, $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ é uma subcategoria de $\mathbf{Sh}(\Omega)$ desde que $\mathcal{C}$ seja geométrica. O outro funtor estudado, $\overline{(\cdot)}$, coleciona todos os elementos generalizados de um dado objeto A de uma categoria bem-potenciada $\mathcal{C}$ e, novamente, os distribui continuamente em Ω. Mostraremos, enfim, que $\overline{A}$ é um pré-feixe sobre Ω. Esse funtor desempenhará um papel decisivo na semântica generalizada proposta neste trabalho.

No quinto capítulo, expomos as três abordagens de semântica categorial aqui discutidas: a usual, devida a Lawvere e sistematizada em [9]; a estendida, introduzida em [3]; e a generalizada, estudada neste trabalho. No final, examinamos outras versões de semântica generalizada e analisamos suas limitações.

No sexto capítulo, apresentamos uma extensão da categoria de pré-feixes de estruturas utilizando assinaturas polissortidas e semântica generalizada. Funções características são introduzidas para permitir uma interpretação alternativa de fórmulas em contexto. Este capítulo pode servir como exemplo de aplicação da semântica categorial generalizada.

Enfim, no sétimo e último capítulo, seguindo [9] e [3], reproduzimos as demonstrações de completude das semânticas tradicional e estendida. Traçamos também um esboço geral para a completude da semântica generalizada.

Capítulo 1

Linguagens de Primeira Ordem

Neste primeiro capítulo, apresentamos uma linguagem de primeira ordem polissortida que pretende ser a mais geral possível para os propósitos deste trabalho. Nosso objetivo consiste em estudar a semântica categorial dessa linguagem, ou seja, a interpretação de fórmulas da mesma em categorias. E para que uma determinada categoria desempenhe esse papel, é necessário que possua uma estrutura interna adequada; em particular, para interpretar nossa linguagem total $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, exige-se que ela seja no mínimo geométrica [7], conforme teremos a oportunidade de constatar. No intuito de admitir outras estruturas categoriais menos expressivas na nossa semântica, discutiremos também alguns fragmentos da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. A exposição das considerações semânticas será feita no quinto capítulo deste trabalho.

Na primeira seção, ocupar-nos-emos da descrição da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ propriamente. Definiremos uma assinatura polissortida e um alfabeto, e, a partir destes, os termos e fórmulas. Os símbolos lógicos com os quais são construídas as fórmulas dessa linguagem são a igualdade, conectivos (negação, implicação, conjunção infinitária e disjunção infinitária) e quantificadores (existencial e universal). Permitimos fórmulas infinitárias mas proibimos, entretanto, fórmulas com uma quantidade infinita de variáveis livres. Com isso, estamos evitando trabalhar com categorias completas – e não apenas finitamente completas – no estudo da semântica.

Na segunda seção, comentaremos os principais fragmentos (subclasses de fórmulas) da linguagem total $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ e definiremos a noção de seqüente, que será de suma importância para o conceito de satisfatibilidade de estruturas categoriais.

1.1 A Linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$

Na exposição dos conceitos desta e da próxima seção, utilizamos, com pequenas modificações, a terminologia adotada em [9] e [7].

Definição 1.1.1. Um *assinatura* Σ é uma coleção de símbolos consistindo nas seguintes classes disjuntas:

(i) um conjunto não-vazio Σ-Sor de *sortes*;

(ii) um conjunto Σ-Fun de *símbolos de funções*, cada qual associado a um *tipo*, que consiste numa seqüência finita não-vazia de sortes, a última das quais chamada de sorte de f; escrevemos

$$f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$$

e dizemos que f tem aridade n (funções 0-árias são chamadas de *constantes* de sorte A);

(iii) e um conjunto Σ-Rel de *símbolos de predicados*, cada qual associado a um *tipo*, que consiste numa seqüência finita de sortes; escrevemos

$$R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$$

e dizemos que R tem aridade n (predicados 0-ários são chamados de proposições atômicas).

Definição 1.1.2. Uma *sub-assinatura* Σ' de uma assinatura Σ é uma assinatura que satisfaz:

(i) Σ'-Sor$\subseteq$ Σ-Sor;

(ii) Σ'-Fun$\subseteq$ Σ-Fun;

(iii) Σ'-Rel$\subseteq$ Σ-Rel.

Notação: $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

O *alfabeto* (básico) é construído a partir de Σ com o acréscimo de:

(iv) um conjunto infinito enumerável Σ-Var$_A$ de *variáveis* para cada sorte A;

(v) símbolos lógicos: $=$ (*igualdade*), $\bigvee$ (*disjunção infinitária*), $\bigwedge$ (*conjunção infinitária*), $\exists$ (*quantificador existencial*) e $\forall(\cdot)(\cdot \to \cdot)$ (*quantificador universal composto*).

O símbolo de igualdade pode, com igual proveito, constar na própria assinatura como relação binária. Veremos posteriormente que os símbolos $\neg$ (*negação*), $\to$ (*implicação*) e $\forall$ (*quantificador universal*), usuais na lógica intuicionista, figuram como casos particulares do quantificador universal composto. De agora em diante, omitiremos a indicação Σ quando não houver possibilidade de confusão, escrevendo, por exemplo, Sor ao invés de Σ-Sor.

De posse desses símbolos, definimos termos e fórmulas da maneira usual.

Definição 1.1.3. O conjunto Σ-Ter dos *termos* sobre Σ é definido recursivamente como a menor classe satisfazendo as seguintes condições ($\mathrm{FV}(\tau)$, definido simultaneamente, denota o conjunto das *variáveis livres* que ocorrem no termo τ):

(i) toda variável $x \in \mathrm{Var}_A$, $A \in \mathrm{Sor}$, é um termo de sorte A (escrevemos $x : A$) e $\mathrm{FV}(x) := \{x\}$;

(ii) se $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ é uma função n-ária e $\tau_1 : A_1, ..., \tau_n : A_n$ são termos, então $f(\tau_1, ..., \tau_n)$ é um termo de sorte A (escrevemos $f(\tau_1, ..., \tau_n) : A$) e $\mathrm{FV}(f(\tau_1, ..., \tau_n)) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{FV}(\tau_i)$.

Definição 1.1.4. A coleção Σ-For das *fórmulas* sobre Σ é definida recursivamente como a menor classe satisfazendo as seguintes condições ($\mathrm{FV}(\varphi)$, definido simultaneamente, denota o conjunto das *variáveis livres* que ocorrem na fórmula φ):

(i) se τ_1 e τ_2 são termos de mesma sorte, $(\tau_1 = \tau_2)$ é uma fórmula (*atômica*) e $\mathrm{FV}(\tau_1 = \tau_2) := \mathrm{FV}(\tau_1) \cup \mathrm{FV}(\tau_2)$;

(ii) se $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ é um símbolo de predicado n-ário e $\tau_1 : A_1, ..., \tau_n : A_n$ são termos, $R(\tau_1, ..., \tau_n)$ é uma fórmula (*atômica*) e $\mathrm{FV}(R(\tau_1, ..., \tau_n)) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{FV}(\tau_i)$;

(iii) se Φ é um conjunto de fórmulas tal que $V = \bigcup\{\mathrm{FV}(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$ é finito, então $\bigvee \Phi$ e $\bigwedge \Phi$ também são fórmulas e $\mathrm{FV}(\bigvee \Phi)$ e $\mathrm{FV}(\bigwedge \Phi)$ são iguais a V;

(iv) se φ é uma fórmula, $\exists x \varphi$ é uma fórmula e $\mathrm{FV}(\exists x \varphi) := \mathrm{FV}(\varphi) - \{x\}$;

(v) e se φ e ψ são fórmulas e $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ é uma seqüência finita de variáveis, então $\forall\vec{x}(\varphi \to \psi)$ é uma fórmula e $\mathrm{FV}(\forall\vec{x}(\varphi \to \psi)) := (\mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)) - \{x_1, ...x_n\}$.

As conjunções e disjunções binárias serão simuladas por $\bigwedge\{\varphi, \psi\}$ e $\bigvee\{\varphi, \psi\}$, respectivamente. Usaremos também a notação: $\top := \bigwedge\emptyset$ e $\bot := \bigvee\emptyset$.

Poderíamos considerar como casos particulares de (v) as fórmulas $\neg\varphi$ (quando $\vec{x} = \emptyset$ e $\psi = \bot$), $(\varphi \to \psi)$ (quando $\vec{x} = \emptyset$) e $\forall x\psi$ (quando $\vec{x} = x$ e $\varphi = \top$). No entanto, por uma questão de concisão e em vista do que faremos no nível semântico das categorias (veja Definição 2.1.14), preferimos manter a integridade do quantificador universal composto. Dessa forma, $\varphi \to \psi$ não constitui, de fato, uma subfórmula de $\forall\vec{x}(\varphi \to \psi)$, para tomarmos um exemplo.

A *linguagem* $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ é a união do alfabeto com os conjuntos dos termos e fórmulas. A classe de todas as fórmulas de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ é denotada por $\mathrm{For}(\mathcal{L}_{\infty\omega})$.

Um *contexto* é uma seqüência finita $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, possivelmente nula, de variáveis distintas. O *tipo* de um contexto $\vec{x}$ é a seqüência de sortes das respectivas variáveis de $\vec{x}$. Similarmente, definimos o tipo de uma seqüência finita $\vec{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_n)$ de termos como a seqüência das sortes dos respectivos termos de $\vec{\tau}$.

Dizemos que um contexto $\vec{x}$ é *adequado* a um termo τ (ou a uma fórmula φ) se todas as variáveis livres de τ (de φ, respectivamente) encontram-se em $\vec{x}$. Nesse caso, afirmamos que o termo τ (ou a fórmula φ, respectivamente) está no contexto $\vec{x}$ ou que $\vec{x}.\tau$ ($\vec{x}.\varphi$, respectivamente) é um termo (fórmula, respectivamente) em contexto.

Se $\vec{x}.\tau$ é um termo em contexto e $\vec{\kappa} = (\kappa_1, ..., \kappa_n)$ é uma seqüência finita de termos do mesmo tipo de $\vec{x}$, definimos a *substituição simultânea* $\tau[\vec{\kappa}/\vec{x}]$ de $\vec{x}$ por $\vec{\kappa}$ em τ como o termo resultante da substituição, de forma concomitante, de cada x_i por κ_i $(i = 1, ..., n)$.

Se uma variável numa dada fórmula não é livre, dizemos que é *ligada*. Se duas fórmulas só diferem pelo nome das variáveis ligadas, afirmamos que são *α-equivalentes*. Podemos sempre evitar que a mesma variável apareça de maneira ao mesmo tempo livre e ligada em partes diferentes de uma fórmula composta, pois para cada fórmula φ existe uma α-equivalente φ' em que isso não ocorre.

Em vista dessas considerações, podemos definir, de maneira similar ao que fizemos para os termos, $\varphi[\vec{\tau}/\vec{x}]$ como a substituição simultânea de $\vec{x}$ por $\vec{\tau}$ na fórmula em contexto $\vec{x}.\varphi$.

1.2 Fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$

Para que possamos nos referir a fragmentos da nossa linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, precisamos definir outra noção, a de subfórmula.

Definição 1.2.1. A classe $\mathrm{SF}(\varphi)$ das *subfórmulas* de uma fórmula φ é definida da seguinte maneira:
(i) se φ é uma fórmula atômica, $\mathrm{SF}(\varphi) := \{\varphi\}$;
(ii) se φ é $\bigwedge \Psi$, $\mathrm{SF}(\varphi) := (\bigcup_{\psi\in\Psi} \mathrm{SF}(\psi)) \cup \{\varphi\}$;
(iii) se φ é $\bigvee \Psi$, $\mathrm{SF}(\varphi) := (\bigcup_{\psi\in\Psi} \mathrm{SF}(\psi)) \cup \{\varphi\}$;
(iv) se φ é $\forall\vec{x}(\psi \to \theta)$, $\mathrm{SF}(\varphi) := \mathrm{SF}(\psi) \cup \mathrm{SF}(\theta) \cup \{\varphi\}$;
(v) se φ é $\exists x\psi$, $\mathrm{SF}(\varphi) := \mathrm{SF}(\psi) \cup \{\varphi\}$.

Quando nos referimos a fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, estamos interessados principalmente em subclasses de $\mathrm{For}(\mathcal{L}_{\infty\omega})$.

Definição 1.2.2. Um conjunto $F \subseteq \mathrm{For}(\mathcal{L}_{\infty\omega})$ é um *fragmento* de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ se satisfaz os seguintes quesitos:
(i) se $\varphi \in F$, então $\mathrm{SF}(\varphi) \subseteq \mathrm{F}$;
(ii) se $\varphi(x) \in F$ e τ é um termo de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ da mesma sorte de x, então $\varphi[\tau/x] \in F$.

Como exemplo, podemos citar o fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ identificado com o conjunto de fórmulas finitárias da lógica de primeira ordem, que pode ser representado por $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. Nesse fragmento, $\bigwedge\Phi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}$ e $\bigvee\Phi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}$ equivalem à afirmação de que Φ é finito. Outro exemplo é a linguagem $\mathcal{L}^{g}_{\infty\omega}$, mais um fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, que permite disjunções infinitárias mas proíbe conjunções infinitárias e quantificações universais. Finalmente, uma versão finitária desse fragmento define-se pela expressão $\mathcal{L}^g_{\omega\omega} = \mathcal{L}_{\omega\omega} \cap \mathcal{L}^g_{\infty\omega}$.

Três fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ merecem um destaque especial por causa de sua correspondência semântica com categorias estruturalmente singulares. São eles:

(i) o conjunto das *Horn*-fórmulas, que só permite, além das fórmulas atômicas, conjunções finitárias;

(ii) o conjunto das fórmulas *regulares*, que acrescenta ao fragmento anterior as quantificações existenciais;

(iii) o conjuntos das fórmulas *coerentes*, que acrescenta ao fragmento anterior as disjunções finitárias.

Esses fragmentos correspondem semanticamente às categorias finitamente completas, regulares e coerentes, respectivamente. Estas serão devidamente definidas no próximo capítulo.

Definição 1.2.3. Um *seqüente* (de Gentzen) $\mathcal{S}$ de um fragmento F de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ é uma expressão da forma $\Phi \Rightarrow \Psi$, em que Φ e Ψ são conjuntos finitos, possivelmente vazios, de fórmulas de F. Uma *teoria* em F é um conjunto de seqüentes de F.

Denotamos por $\mathrm{Seq}(F)$ a classe de todos os seqüentes construídos a partir do fragmento F.

Capítulo 2

Algumas Noções Categoriais

Algumas noções básicas de Teoria de Categorias terão papel importante na definição de interpretação categorial. Exibiremos uma seleção delas nesta seção. Em benefício da leitura, preparamos o Apêndice 1, em que selecionamos alguns conceitos básicos da área. Para uma introdução geral a esse assunto, sugerimos [5].

Na segunda seção, introduzimos o conceito de suporte de objetos, estudado, no enfoque que adotamos aqui, por Coniglio [3].

2.1 Noções Gerais

Salvo menção contrária, todas as categorias aqui consideradas são finitamente completas (ou cartesianas, de acordo com [3]). Isso equivale a dizer que todo diagrama finito tem um limite, que será portanto único a menos de isomorfismo. Exemplos elementares de limites são o objeto final ($\mathbb{1}$), o produto finito de n objetos ($n \geq 1$), o equalizador de dois morfismos paralelos e o *pullback* de dois morfismos de mesmo contradomínio.

Denotaremos por $(f_1, ..., f_n)_{\pi_1,...,\pi_n}$ – ou simplesmente $(f_1, ..., f_n)$ – o único morfismo $f : A \to \prod_{i=1}^n A_i$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^n A_i \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

comutar para todo $i \leq n$, ou seja, tal que $\pi_i \circ f = f_i$ $(i = 1, ..., n)$, sendo π_i a projeção canônica sobre A_i.

Se X é um objeto de uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que $A, B \in \mathbf{Sub}(X)$ ($\mathbf{Sub}(X)$ é a classe dos subobjetos de X) são *"iguais"* se existirem morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to A$ tais que ambos os diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & X \\ B \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] & X \\ B \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

comutem. Nesse caso, f e g devem ser, evidentemente, monomorfismos.

Na realidade, essa identificação entre os subobjetos determina uma classe de equivalência $[A \hookrightarrow X]$ mas, por abuso de linguagem, trataremos pelo mesmo nome tanto a classe de equivalência quanto um representante dessa classe.

Dizemos também que o subobjeto $A \overset{m}{\hookrightarrow} X$ é *menor* que $B \overset{n}{\hookrightarrow} X$, $A \leq_X B$ (ou simplesmente $A \leq B$), se existir um morfismo $f : A \to B$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "f"'] & X \\ B \arrow[ur, hook, "n"'] & \end{tikzcd}$$

comutar. Novamente, f deve ser um (necessariamente único) monomorfismo.

A relação $\leq$ resultante é uma ordem e, como conseqüência da existência de limites, sempre haverá o ínfimo $A \wedge_X B$ entre dois subobjetos de X, a saber, o *pullback* abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Para um conjunto arbitrário de subobjetos de X, a definição deve ser mais geral.

Definição 2.1.1. Seja Θ um conjunto de subobjetos de X. Definimos o *ínfimo* de Θ em X como sendo:

$$\bigwedge^{X} \Theta := max\{B \in \mathbf{Sub}(X) : B \leq A \text{ para todo } A \in \Theta\}.$$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente $\bigwedge \Theta$.

É importante observar que, se Θ não for finito, $\bigwedge \Theta$ não precisa necessariamente existir.

O ínfimo da classe vazia de subobjetos de X é $\bigwedge \emptyset = X \overset{id_X}{\hookrightarrow} X$.

O *supremo* $\bigvee^X \Theta$ – ou simplesmente $\bigvee \Theta$ – do conjunto Θ de subobjetos de X é definido de maneira dual, ou seja,

$$\bigvee \Theta := min\{B \in \mathbf{Sub}(X) : A \leq B \text{ para todo } A \in \Theta\}.$$

Novamente, o $\bigvee \Theta$ não precisa necessariamente existir para um dado Θ. A existência de quaisquer supremos e ínfimos é conseguida mediante a imposição de que $\mathbf{Sub}(X)$ forme uma álgebra de Heyting completa (cHa).

O supremo da classe vazia é $\bigvee \emptyset = \mathbf{0}$, o objeto inicial da categoria, se este existir. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ *tem supremos finitos* se toda família finita (incluindo a família vazia) de subobjetos de um dado objeto de $\mathcal{C}$ tem supremo. A existência de ínfimos finitos é garantida pelo fato de estarmos trabalhando com categorias finitamente completas.

Definição 2.1.2. Considere um diagrama da forma a seguir.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Definimos a *imagem inversa* de $A \hookrightarrow X$ por f como o subobjeto $f^*(A) \hookrightarrow Y$ obtido pelo *pullback* abaixo indicado.

$$\begin{tikzcd} f^*(A) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Todo morfismo $f : X \to Y$ numa categoria finitamente completa $\mathcal{C}$ tem associado a ele um funtor $f^* : \mathbf{Sub}(Y) \to \mathbf{Sub}(X)$ que leva subobjetos de Y a subobjetos de X.

Definição 2.1.3. Seja Θ um conjunto de subobjetos de X para o qual o supremo $\bigvee \Theta$ existe; esse supremo é *estável* se, para todo morfismo $f : Y \to X$, o supremo

$$\bigvee\{f^*(A) \in \mathbf{Sub}(Y) : A \in \Theta\}$$

existe e é igual a $f^*(\bigvee^X \Theta)$.

Definição 2.1.4. Suponhamos que o ínfimo $\bigwedge_{i\in I} A_i \hookrightarrow X$ exista. Dizemos então que ele é *distributivo* se, para todo $B \hookrightarrow X$,

$$B \vee (\bigwedge_{i\in I} A_i) = \bigwedge_{i\in I}(B \vee A_i)$$

e é *distributivo estável* se $\bigwedge_{i\in I} f^*(A_i)$ é distributivo para cada $f : Y \to X$.

Definição 2.1.5. Um morfismo $g : A \to X$ é *sobrejetor* se não fatora através de nenhum subobjeto próprio de X, ou seja, para toda fatoração $A \to B \hookrightarrow X$ de g, B é isomorfo a X ($B \simeq X$).

Um morfismo sobrejetor é também chamado de *epimorfismo forte*. A proposição seguinte justifica essa nomenclatura.

Proposição 2.1.6. *Todo morfismo sobrejetor é um epimorfismo.*

Demonstração. Seja $f : A \to X$ sobrejetor e considere $g, h : X \to Y$ dois morfismos paralelos tais que $g \circ f = h \circ f$. Se $e : E \hookrightarrow X$ é o equalizador de g, h, então $g \circ e = h \circ e$ e existe um único $\lambda : A \to E$ que comuta o diagrama seguinte.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \\ E \arrow[ur, hook, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

Como f é sobrejetor, temos que e é isomorfismo e, portanto, epimorfismo. Logo, de $g \circ e = h \circ e$ inferimos $g = h$.

□

Proposição 2.1.7. *Todo monomorfismo sobrejetor é um isomorfismo e vice-versa.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se $f : A \hookrightarrow X$ é um monomorfismo sobrejetor, a fatoração $A \xrightarrow{id_A} A \overset{f}{\hookrightarrow} X$ de f nos leva a concluir que f é um isomorfismo.

($\Longleftarrow$) Considere um isomorfismo $f : A \to X$ e uma fatoração $A \xrightarrow{g} B \overset{h}{\hookrightarrow} X$ de f. A composição $g \circ f^{-1}\colon X \to B$ é tal que

$$h \circ (g \circ f^{-1}) = (h \circ g) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = id_X,$$

do que

$$[h \circ (g \circ f^{-1})] \circ h = id_X \circ h = h = h \circ id_B$$

e, portanto,

$$h \circ [(g \circ f^{-1}) \circ h] = h \circ id_B;$$

logo, $(g \circ f^{-1}) \circ h = id_B$, pois h é monomorfismo. Isso significa que h é um isomorfismo cujo inverso é $g \circ f^{-1}$.

□

Definição 2.1.8. Um morfismo sobrejetor $f : A \to X$ é *estável* se para todo morfismo $g : Y \to X$, o morfismo h do *pullback*

$$\begin{tikzcd} A \times_X Y \arrow[r, "h"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

é sobrejetor.

Definição 2.1.9. Considere o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Definimos a *imagem* de $A \hookrightarrow X$ com relação a f como o subobjeto $\exists_f(A) \hookrightarrow Y$ tal que existe uma sobrejeção g que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \exists_f(A) \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

comutar.

Proposição 2.1.10. *Um subobjeto $\exists_f(A) \overset{h}{\hookrightarrow} Y$ é a imagem de $A \overset{m}{\hookrightarrow} X$ por $f : X \to Y$ se e somente se $\exists_f(A)$ é o menor subobjeto de Y através do qual $A \overset{m}{\hookrightarrow} X \overset{f}{\to} Y$ fatora.*

Demonstração. Primeiro demonstraremos que a imagem satisfaz a condição de menor subobjeto e, em seguida, a recíproca.

($\Longrightarrow$) Seja $A \overset{g'}{\to} B \overset{h'}{\hookrightarrow} Y$ uma fatoração de $A \overset{m}{\hookrightarrow} X \overset{f}{\to} Y$. Queremos mostrar que $\exists_f(A) \leq_Y B$, ou seja, que existe um morfismo $\lambda : \exists_f(A) \to B$ tal que $h' \circ \lambda = h$. O morfismo λ, se existir, é mono e único, como já mencionado anteriormente. Por outro lado, $h' \circ \lambda = h$ implica que

$$h' \circ (\lambda \circ g) = (h' \circ \lambda) \circ g = h \circ g = f \circ m = h' \circ g'$$

e, portanto, $\lambda \circ g = g'$, pois h' é um monomorfismo. Isso significa que o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook, "m"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g'"'] & & X \arrow[d, "f"] \\ & \exists_f(A) \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, hook, "\lambda"] & Y \\ & B \arrow[ur, hook, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

Construiremos agora o morfismo λ. Observemos que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & \exists_f(A) \arrow[d, hook, "h"] \\ B \arrow[r, hook, "h'"'] & Y \end{tikzcd}$$

Tomemos então o *pullback* $B \wedge \exists_f(A)$ de $B \overset{h'}{\hookrightarrow} Y \overset{h}{\hookleftarrow} \exists_f(A)$. Por definição, existe um único k que faz o diagrama seguinte comutar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, bend right=60, "g'"'] & \\ B \wedge \exists_f(A) \arrow[r, hook, "p_1"] \arrow[d, hook, "p_2"] & \exists_f(A) \arrow[d, hook, "h"] \\ B \arrow[r, hook, "h'"'] & Y \end{tikzcd}$$

Como g é uma sobrejeção, p_1 é um isomorfismo. Testemos a composta $\lambda = p_2 \circ p_1^{-1} : \exists_f(A) \hookrightarrow B$:

$$\begin{aligned} h' \circ \lambda &= h' \circ (p_2 \circ p_1^{-1}) = (h' \circ p_2) \circ p_1^{-1} \\ &= (h \circ p_1) \circ p_1^{-1} = h \circ (p_1 \circ p_1^{-1}) = h. \end{aligned}$$

Isso completa a primeira parte da demonstração.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $\exists_f(A)$ é um subobjeto de Y para o qual existe um diagrama comutativo da forma a seguir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \exists_f(A) \arrow[r, hook, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Suponhamos também que, para toda fatoração $A \xrightarrow{g'} B \overset{h'}{\hookrightarrow} Y$ de $A \overset{m}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$, existe um morfismo λ tal que $h' \circ \lambda = h$. Só precisamos demonstrar que g é uma sobrejeção. Considere $A \xrightarrow{k} C \overset{n}{\hookrightarrow} \exists_f(A)$ uma fatoração de g. Claramente o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, hook, "h \circ n"'] & Y \end{tikzcd}$$

Logo, existe um único λ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} \exists_f(A) \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "\lambda"'] & Y \\ C \arrow[ur, hook, "h \circ n"'] & \end{tikzcd}$$

e satisfaz a relação:

$$h \circ (n \circ \lambda) = (h \circ n) \circ \lambda = h = h \circ id_{\exists_f(A)}.$$

Disso inferimos que $n \circ \lambda = id_{\exists_f(A)}$, pois h é um monomorfismo. Por outro lado:

$$n \circ (\lambda \circ n) = (n \circ \lambda) \circ n = id_{\exists_f(A)} \circ n = n = n \circ id_C,$$

donde $\lambda \circ n = id_C$, pois n é monomorfismo. Com isso, mostramos que n é um isomorfismo e que, portanto, g é uma sobrejeção.

□

Corolário 2.1.11. *A imagem de $A \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ é única a menos de isomorfismo.*

Definição 2.1.12. A imagem $\exists_f(A) \hookrightarrow Y$ de $A \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ é *estável* se a sobrejeção $g : A \twoheadrightarrow \exists_f(A)$ é estável.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ *tem imagens* se todo diagrama da forma $A \hookrightarrow X \to Y$ tem uma imagem $\exists_f(A) \hookrightarrow Y$. Isso equivale a dizer que o funtor $f^* : \mathbf{Sub}(Y) \to \mathbf{Sub}(X)$ tem um adjunto à esquerda $\exists_f : \mathbf{Sub}(X) \to \mathbf{Sub}(Y)$ para cada $f : X \to Y$ [5][7].

Definição 2.1.13. (i) Uma categoria $\mathcal{C}$ é *regular* se tem imagens e estas são estáveis.

(ii) Uma categoria $\mathcal{C}$ é *lógica* (ou *coerente*) se é regular e tem supremos finitos estáveis.

Conforme sugere a terminologia acima, os conceitos expostos até aqui já nos fornecem ferramentas suficientes para interpretarmos alguns fragmentos da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ vista no capítulo anterior, como o das fórmulas regulares e das fórmulas coerentes (para a interpretação do fragmento das Horn-fórmulas, categorias cartesianas já são suficientes). Mas, para darmos conta de toda a simbologia da linguagem, precisamos ainda do conceito categorial de imagem dual.

Podemos definir a imagem dual do subobjeto $A \hookrightarrow X$ com relação a $f : X \to Y$, que denotaremos por $\forall_f(A)$, como o maior subobjeto $B \hookrightarrow Y$ tal que a imagem inversa $f^*(B) \hookrightarrow X$ fatora através de $A \hookrightarrow X$. De maneira equivalente, podemos considerar o adjunto à direita $\forall_f : \mathbf{Sub}(X) \to \mathbf{Sub}(Y)$ do funtor $f^* : \mathbf{Sub}(Y) \to \mathbf{Sub}(X)$ [5][7]. Mas, por motivos de concisão, daremos preferência à seguinte definição mais geral.

Definição 2.1.14. Consideremos o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, hook] & \\
A_2 \arrow[r, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

Definimos a *imagem dual generalizada* $\forall_f(A_1 \to A_2)$ como o maior subobjeto $B \hookrightarrow Y$ tal que $(f^*(B) \wedge A_1) \hookrightarrow X$ fatora através de $A_2 \hookrightarrow X$.

Observemos as vantagens que obtemos da definição mais geral: se fizermos $f = id_X$, teremos a implicação de Heyting; para $A_1 = X$, teremos a imagem dual $\forall_f(A_2)$; e, para $f = id_X$ e $A_2 = \mathbf{0}$ (sendo $\mathbf{0}$ o objeto inicial), $\forall_f(A_1 \to A_2)$ será o pseudocomplemento $\neg A_1$.

Na categoria **Set** dos conjuntos, a imagem dual $\forall_f(A) \subseteq Y$ de $A \subseteq X$ com relação a $f : X \to Y$ é determinada pela expressão

$$y \in \forall_f(A) \quad \text{sse} \quad \forall x \in X(f(x) = y \Longrightarrow x \in A).$$

Definição 2.1.15. A imagem dual generalizada $\forall_f(A_1 \to A_2) \hookrightarrow Y$ com relação a $f : X \to Y$ é *estável* se, para todo morfismo $g : Y' \to Y$, tomando-se o *pullback* no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} Y' \times_Y X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\forall_{f'}(h^*(A_1) \to h^*(A_2))$ existe e é igual a $g^*(\forall_f(A_1 \to A_2))$.

O conceito de estabilidade expressa o bom comportamento das noções categoriais, que são preservadas quando da aplicação da imagem inversa.

Definição 2.1.16. Se A_1 e A_2 são subobjetos de X e $f : X \to Y$, dizemos que $\forall_f(A_1 \to A_2)$ é *distributiva* se, dado $C \hookrightarrow Y$, $\forall_f(A_1 \to (A_2 \vee f^*(C)))$ existe e é igual a $\forall_f(A_1 \to A_2) \vee C$. Ademais, $\forall_f(A_1 \to A_2)$ é *distributiva estável* se, além disso, dado $D \xrightarrow{g} Y$, o *pullback* do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_Y D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & X \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

é tal que $\forall_k(h^*(A_1) \to h^*(A_2))$ é distributiva.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é *bem-potenciada* (em inglês, *well-powered*) se, para todo objeto A de $\mathcal{C}$, $\mathbf{Sub}(A)$ é um conjunto.

Definição 2.1.17. (i) Uma categoria $\mathcal{C}$ é *Heyting* se é regular e tem supremos finitos, imagens e imagens duais.

(ii) Uma categoria $\mathcal{C}$ é *geométrica* se é bem-potenciada, regular e tem supremos estáveis.

(iii) Uma categoria $\mathcal{C}$ é *κ-lógica* se é lógica (coerente) e tem supremos estáveis de famílias de subobjetos de cardinalidade menor do que κ, sendo κ um cardinal regular. Finalmente, $\mathcal{C}$ é *∞-lógica* se é κ-lógica para todo cardinal regular κ.

Demonstra-se que toda categoria Heyting é coerente e que, se A é um objeto de uma tal categoria, $\mathbf{Sub}(A)$ forma uma álgebra de Heyting. Uma categoria Heyting, portanto, interpreta a linguagem da lógica intuicionista de primeira ordem finitária. Demonstra-se também que toda categoria geométrica é Heyting.

Uma categoria geométrica pode interpretar a linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, mas um funtor geométrico (ou seja, um funtor regular que preserva supremos) não preserva, em geral, ínfimos arbitrários. Todas essa considerações encontram-se em [7].

2.2 Suporte de Objetos

Nesta seção, expomos o conceito de suporte de objetos, que desempenha papel central na definição de elementos parciais [3]. Intuitivamente, o suporte mede o "tamanho" ou o "nível de existência" de um objeto em relação ao objeto final $\mathbb{1}$. Assim, a noção de suporte transporta para o terreno categorial as idéias de Scott a respeito da existência em lógica [12].

Definição 2.2.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e A um objeto de $\mathcal{C}$. Se $f_A : A \to \mathbb{1}$ é o único morfismo de A em $\mathbb{1}$, definimos o *suporte* (*extent*, segundo [3]) de A como sendo $\mathcal{E}A := \exists_{f_A}(A) \hookrightarrow \mathbb{1}$, ou seja, a imagem no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "id_A"] \arrow[d, "g_A"'] & A \arrow[d, "f_A"] \\ \exists_{f_A}(A) \arrow[r, hook, "h_A"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

Poderíamos também caracterizar o suporte de A como o menor subobjeto $R \hookrightarrow \mathbb{1}$ através do qual f_A fatora, conforme expressa a Proposição 2.1.10.

Na categoria **Set** dos conjuntos, $\mathbb{1} = \{*\}$ e, para todo $x \in A$, $f_A(x) = *$, se $A \neq \emptyset$, e $f_A = \emptyset$, se $A = \emptyset$. Temos, portanto, duas possibilidades para o suporte de um conjunto A:

$$\mathcal{E}A = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{se } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Estudaremos o suporte de feixes e pré-feixes sobre uma cHa no próximo capítulo.

Proposição 2.2.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria regular. Temos então:*

(a) *se $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \emptyset$, ou seja, se existe algum morfismo de A em B, então $\mathcal{E}A \leq \mathcal{E}B$;*

(b) $\exists_{\pi_A}(A \times B) = (A \times \mathcal{E}B) \hookrightarrow A$;

(c) $\mathcal{E}(A \times B) = \mathcal{E}A \times \mathcal{E}B = \mathcal{E}A \wedge \mathcal{E}B$;

(d) $A \times \mathcal{E}A = A$;

(e) $A \hookrightarrow \mathbb{1}$ *implica* $\mathcal{E}A = A$;

(f) $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, A) \neq \emptyset$ *implica* $\mathcal{E}A = \mathbb{1}$;

(g) $B \hookrightarrow A$ *implica* $B \hookrightarrow A \times \mathcal{E}B$.

Demonstração. Apenas os itens (a), (e) e (f) serão aqui demonstrados.

(a) Seja λ um morfismo de A em B. Como só há um morfismo $f_A : A \to \mathbb{1}$, inferimos que $f_B \circ \lambda = f_A$. Mas $f_B = h_B \circ g_B$; portanto,

$$h_B \circ (g_B \circ \lambda) = (h_B \circ g_B) \circ \lambda = f_B \circ \lambda = f_A = f_A \circ id_A.$$

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "id_A"] \arrow[d, "g_B \circ \lambda"'] & A \arrow[d, "f_A"] \\ \mathcal{E}B \arrow[r, hook, "h_B"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

comuta, o que, pela Proposição 2.1.10, nos garante que $\mathcal{E}A \leq \mathcal{E}B$.

(e) Se $A \leq \mathbb{1}$, então $A \leq \mathcal{E}A$, pois, nesse caso, f_A é um monomorfismo tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f_A"] \arrow[d, "g_A"'] & \mathbb{1} \\ \mathcal{E}A \arrow[ur, hook, "h_A"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Por outro lado, como

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "id_A"] \arrow[d, "id_A"'] & A \arrow[d, "f_A"] \\ A \arrow[r, hook, "f_A"'] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

comuta, ainda pela Proposição 2.1.10, $\mathcal{E}A \leq A$. Portanto, $\mathcal{E}A = A$.

(f) Pelo item (a), $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, A) \neq \emptyset$ implica $\mathcal{E}\mathbb{1} \leq \mathcal{E}A$. Pelo item (e), de $\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ deduz-se que $\mathbb{1} = \mathcal{E}\mathbb{1}$. Portanto, $\mathbb{1} \leq \mathcal{E}A$, ou seja, $\mathcal{E}A = \mathbb{1}$.

$\square$

Capítulo 3

Feixes e Pré-Feixes sobre uma cHa

Neste capítulo, as categorias de feixes e pré-feixes sobre uma cHa são estudadas em detalhe, como exemplos fundamentais de categorias lógicas, a partir dos quais podemos analisar as diferenças e semelhanças entre as semânticas categoriais usual [9], estendida [3] e generalizada.

A categoria $\mathbf{Sh}(X)$ dos feixes sobre um espaço topológico X é o exemplo básico de um topos (de Grothendieck) e pode ser vista como uma categoria de "conjuntos generalizados" na qual a lógica intuicionista de ordem superior é suscetível de interpretação. Um exemplo fundamental da utilização da categoria $\mathbf{Sh}(X)$ como modelo da lógica intuicionista é devido a C. Mulvey [11], que fornece uma demonstração alternativa de um teorema de Swan caracterizando a categoria dos módulos projetivos finitamente gerados sobre o anel $C(X)$ das funções reais contínuas sobre X.

Os objetos de $\mathbf{Sh}(X)$ identificam-se, intuitivamente, com "conjuntos que variam continuamente", indexados pelos abertos do espaço X. A definição de extensão de um pré-feixe – e, em particular, de um feixe –, que nos permite chegar à noção de suporte nessa categoria específica, constitui um exemplo significativo de construção de elementos de seções globais.

Dado que pré-feixes e feixes sobre espaços topológicos utilizam unicamente a estrutura de reticulado dos abertos, é imediata a generalização dessas categorias para as categorias de pré-feixes e feixes sobre álgebras de Heyting completas.

Na primeira seção, apresentamos as categorias de feixes e pré-feixes sobre espaços topológicos, introduzimos os conceitos de extensão e suporte dos objetos e analisamos brevemente a estrutura geral dessas categorias. Na segunda seção, exibimos as categorias dos feixes e pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting completa e estudamos algumas de suas propriedades. A bibliografia consultada para este capítulo foi [10]. No Apêndice 2, agrupamos os principais conceitos de Topologia e Álgebra de Reticulados, que poderão auxiliar o leitor.

3.1 Feixes e Pré-Feixes sobre Espaços Topológicos

Comecemos observando que um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ pode ser visto como uma categoria $\mathcal{C}$ cujos objetos são os próprios elementos de L e cujos morfismos são:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) := \begin{cases} \{(a,b)\} & \text{se } a \leq b \\ \emptyset & \text{c. c.} \end{cases} .$$

Em particular, uma topologia $\Omega(X)$ sobre um conjunto X pode ser parcialmente ordenada pela relação $\subseteq$ e, conseqüentemente, vista como uma categoria.

Definição 3.1.1. Seja $\langle X, \Omega(X) \rangle$ um espaço topológico. Um *pré-feixe (de conjuntos)* sobre X é um funtor contravariante $P : \Omega(X) \to \mathbf{Set}$ tal que $P(\emptyset) \neq \emptyset$. Portanto, para qualquer par de abertos $u, v \in \Omega(X)$ que satisfaça $v \subseteq u$, existe uma função, que chamamos de *restrição* e denotamos por P_{uv}, dada por $P_{uv} = P(v,u)$, de acordo com a figura abaixo.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[d, "{(v,u)}"'] & \longmapsto & P(v) \\ u & & P(u) \arrow[u, "P_{uv}"'] \end{tikzcd}$$

Os elementos $s \in P(u)$ são chamados de *seções* de P sobre u e o *domínio* de P é o conjunto $|P|$ dado pela união disjunta $\coprod_{u \in \Omega(X)} P(u)$.

Definição 3.1.2. Seja $P : \Omega(X) \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe sobre X. Definimos a *função de igualdade em P* como:

$$[s = t]_P := \bigcup \{w \in \Omega(u \cap v) : P_{uw}(s) = P_{vw}(t)\} \ ,$$

para todo $s, t \in |P|$, sendo que $s \in P(u)$, $t \in P(v)$ e $\Omega(u \cap v)$ é o subespaço de X gerado por $u \cap v$.

Definimos também a *extensão* da seção s como $E_P s := [s = s]_P$. Omitimos o subscrito P quando não há possibilidade de confusão. A partir das definições anteriores fica claro que, para todo $u \in \Omega(X)$ e $s \in |P|$,

$$s \in P(u) \quad \text{see} \quad Es = u.$$

Lema 3.1.3. *Considere $s, t, z \in |P|$. Então:*
(a) $[s = t] \subseteq Es \cap Et$;
(b) $[s = t] = [t = s]$; *(simetria)*
(c) $[s = t] \cap [t = z] \subseteq [s = z]$. *(transitividade)*

Demonstração. Imediata pela Definição 3.1.2.

□

Convém observar que a lei de reflexividade sai do próprio conceito de extensão: $Es = [s = s]$.

Definição 3.1.4. O pré-feixe P é *extensional* ou *separado* se satisfaz a propriedade seguinte.
[ext] Para todo $s, t \in |P|$, $Es = Et = [s = t]$ implica $s = t$.

É importante notar que, se P é um pré-feixe extensional, $P(\emptyset)$ é um conjunto unitário. Com efeito, se $s, t \in P(\emptyset)$, então $Es = Et = [s = t] = \emptyset$ e, por [ext], $s = t$.

Dentro do enfoque que estamos adotando, somente os pré-feixes extensionais interessar-nos-ão. Por isso, de agora em diante, ao nos referirmos a um pré-feixe, já estamos supondo que seja extensional.

Para um dado pré-feixe P, definimos a função *restrição*, $\cdot|. : |P| \times \Omega(X) \to |P|$, que atribui ao par (s, u) o valor $s|_u = P_{Es,u\cap Es}(s)$.

Lema 3.1.5. *Sejam P um pré-feixe sobre X, u e v abertos de $\Omega(X)$ e $s, t \in |P|$. Então:*

(a) $s|_{Es} = s$;

(b) $(s|_u)|_v = s|_{u\cap v}$;

(c) $[s|_u = t|_v] = [s = t] \cap u \cap v$;

(d) $s|_{[s=t]} = t|_{[s=t]}$;

(e) há um único $* \in |P|$ *tal que* $E* = \emptyset$ *e* $s|_\emptyset = *$;

(f) $E(t|_u) = Et \cap u$;

(g) $t|_u = s \quad sse \quad Es = Et \cap u = [s = t]$.

Demonstração. A demonstração de (f) é imediata, pois $t|_u \in P(Et \cap u)$. Usando (f) demonstraremos (c):

$$\begin{aligned}
[s|_u = t|_v] &= \bigcup\{w \in \Omega(Es \cap u \cap Et \cap v) \ : \ P_{Es\cap u,w}(s|_u) = P_{Et\cap v,w}(t|_v)\} \\
&= \bigcup\{w \in \Omega(Es \cap Et \cap u \cap v) \ : \ P_{Es\cap u,w} \circ P_{Es,Es\cap u}(s) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = P_{Et\cap v,w} \circ P_{Et,Et\cap v}(t)\} \\
&= \bigcup\{w \in \Omega(Es \cap Et \cap u \cap v) \ : \ P_{Es,w}(s) = P_{Et,w}(t)\} \\
&= \bigcup\{w \in \Omega(Es \cap Et) \ : \ P_{Es,w}(s) = P_{Et,w}(t)\} \cap u \cap v \\
&= [s = t] \cap u \cap v \ .
\end{aligned}$$

Os demais itens também se demonstram facilmente.

□

Em [10] é demonstrado que um pré-feixe P sobre X pode ser caracterizado como um conjunto não vazio $|P|$ junto com funções

$$[\cdot = \cdot] : |P| \times |P| \to \Omega(X) \quad \text{e} \quad \cdot|. : |P| \times \Omega(X) \to |P|$$

satisfazendo [ext] e as condições (b)-(c) do Lema 3.1.3 e (a)-(e) do Lema 3.1.5, em que $Es := [s = s]$.

Introduziremos agora a importante noção de feixe sobre espaços topológicos. Para isso, precisamos definir o conceito de conjunto compatível de seções.

Definição 3.1.6. Um subconjunto $S \subseteq |P|$ é *compatível* se, para todo $s, t \in S$, $s|_{Et} = t|_{Es}$.

Equivalentemente, S é compatível se, para todo $s, t \in S$, $[s = t] = Es \cap Et$.

Definição 3.1.7. Um pré-feixe P é um *feixe (de conjuntos)* se satisfaz a seguinte propriedade:

[comp] se $S \subseteq |P|$ é compatível, existe uma seção $t \in |P|$, chamada de *colagem*, tal que $Et = \bigcup_{s \in S} Es$ e, para todo $s \in S$, $t|_{Es} = s$.

Observe que t é uma colagem de S se e somente se $Et = \bigcup_{s \in S} Es$ e, para todo $s \in S$, $[s = t] = Es$ (ver [10]). Além disso, uma colagem t de S é única. De fato, se t' satisfaz as mesmas condições, $[s = t] = Es = [s = t']$ para todo $s \in S$ e, portanto,

$$[s = t] = [t = s] \cap Es = [t = s] \cap [s = t'] \subseteq [t = t']$$

para todo $s \in S$. Daqui,

$$Et = \bigcup_{s \in S} Es = \bigcup_{s \in S} [s = t] \leq [t = t']$$

e então $Et = [t = t'] = Et'$; por [ext], $t = t'$.

Se P e Q são pré-feixes sobre X, um morfismo $\eta : P \to Q$ é uma transformação natural cujas componentes são as funções $\eta_u : P(u) \to Q(u)$ para as quais, se $u, v \in \Omega(X)$ são tais que $u \subseteq v$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} P(v) \arrow[r, "\eta_v"] \arrow[d, "P_{vu}"'] & Q(v) \arrow[d, "Q_{vu}"] \\ P(u) \arrow[r, "\eta_u"] & Q(u) \end{tikzcd}$$

comuta. Obtemos, dessa forma, as categorias $\mathbf{pSh}(X)$ e $\mathbf{Sh}(X)$, respectivamente, dos pré-feixes e dos feixes sobre um espaço topológico X.

Uma transformação natural $\eta : P \to Q$ induz uma função $f_\eta : |P| \to |Q|$ dada por $f_\eta(s) = \eta_{Es}(s)$.

Lema 3.1.8. *Sejam P e Q pré-feixes sobre X e $\eta : P \to Q$ uma transformação natural. Então, para todo $s \in |P|$ e $u \in \Omega(X)$:*

(a) $E_Q f_\eta(s) = E_P s$;

(b) $f_\eta(s|_u) = f_\eta(s)|_u$;

(c) $[s = t]_P \subseteq [f_\eta(s) = f_\eta(t)]_Q$.

Demonstração. (a) $Ef_\eta(s) = E\eta_{Es}(s) = Es$, já que $\eta_{Es}(s) \in Q(Es)$.

(b) Considere o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} P(Es) \arrow[r, "\eta_{Es}"] \arrow[d, "P_{Es,u\cap Es}"'] & Q(Es) \arrow[d, "Q_{Es,u\cap Es}"] \\ P(Es\cap u) \arrow[r, "\eta_{Es\cap u}"] & Q(Es\cap u) \end{tikzcd}$$

Dado que $s \in P(Es)$, $\eta_{Es\cap u}(P_{Es,u\cap Es}(s)) = Q_{Es,u\cap Es}(\eta_{Es}(s))$, o que equivale a dizer que $\eta_{Es|_u}(s|_u) = \eta_{Es}(s)|_u$, ou seja, $f_\eta(s|_u) = f_\eta(s)|_u$.

(c)

$$\begin{aligned} [f_\eta(s) = f_\eta(t)]_Q &= \bigcup\{w \in \Omega(Ef_\eta(s) \cap Ef_\eta(t)) \,:\, f_\eta(s)|_w = f_\eta(t)|_w\} \\ &= \bigcup\{w \in \Omega(Es \cap Et) \,:\, f_\eta(s|_w) = f_\eta(t|_w)\} \ . \end{aligned}$$

Portanto, se $w \in \Omega(Es \cap Et)$ satisfaz $s|_w = t|_w$, então $f_\eta(s|_w) = f_\eta(t|_w)$, do que $w \subseteq [f_\eta(s) = f_\eta(t)]_Q$. Daqui inferimos o resultado desejado.

□

Além disso, demonstra-se facilmente a partir das propriedades anteriores que, se $S \subseteq |P|$ é uma família compatível de seções em P e $\eta : P \to Q$ é um morfismo, $f_\eta(S) = \{f_\eta(s) : s \in S\}$ é uma família compatível em Q. E se P e Q são feixes, com $t \in |P|$ satisfazendo $[t = s] = Es$ para todo $s \in S$, $f_\eta(t)$ tem a mesma propriedade em relação a $f_\eta(S)$: $[f_\eta(t) = f_\eta(s)] = Ef_\eta(s) = Es$ para todo $s \in S$. Em particular, f_η preserva colagens.

Se P é um pré-feixe sobre X e $s, t \in |P|$, a relação $\leq$ definida por

$$s \leq t \quad \text{see} \quad Es \subseteq Et \text{ e } t|_{Es} = s$$

é uma ordem parcial. A operação binária definida por $s \wedge t := s|_{[s=t]}$ $(= t|_{[s=t]})$ para todo $s, t \in |P|$ induz uma estrutura de semi-reticulado inferior em $|P|$. Com efeito, $s \leq t$ sse $s|_{[s=t]} = s$ sse $s \wedge t = s$. Mas a existência de supremos restringe-se, no caso de feixes, a famílias compatíveis de seções. Para esses casos, a colagem corresponde ao supremo.

Algumas construções típicas nas categorias de feixes e pré-feixes sobre um espaço topológico são os produtos, equalizadores e objetos inicial e final.

Produtos: seja $(P_i)_{i \in I}$ uma família de pré-feixes sobre X. Define-se, para $u, v \in \Omega(X)$ com $v \subseteq u$:

$$(\prod_{i \in I} P_i)(u) := \prod_{i \in I} P_i(u);$$

$$(\prod_{i \in I} P_i)_{uv}((s_i)_{i \in I}) := ((P_i)_{uv}(s_i))_{i \in I}.$$

Logo, $((s_i)_{i \in I})|_u = ((s_i)|_u)_{i \in I}$ e $[(s_i)_{i \in I} = (t_i)_{i \in I}] = \bigwedge_{i \in I}[s_i = t_i]$.

Equalizadores: sejam η e λ morfismos de P em Q. Define-se, para $u, v \in \Omega(X)$ com $v \subseteq u$:

$$\mathbf{Eq}(\eta, \lambda)(u) := \{s \in P(u) : \eta_u(s) = \lambda_u(s)\};$$

$$\mathbf{Eq}(\eta, \lambda)_{uv}(s) := P_{uv}(s).$$

Objeto inicial: define-se, para $u \in \Omega(X)$:

$$\mathbf{0}(u) := \begin{cases} \{*_u\} & \text{se } u = \emptyset \\ \emptyset & \text{c. c.} \end{cases}.$$

Objeto final: define-se, para $u \in \Omega(X)$:

$$\mathbb{1}(u) := \{*_u\}.$$

Costuma-se utilizar, por comodidade, $*_u = u$, para cada $u \in \Omega(X)$.

Tal como fizemos para seções, podemos definir a *extensão* de um pré-feixe P como segue:

$$EP := \bigcup\{u \in \Omega(X) : P(u) \neq \emptyset\}.$$

O *suporte* de P da Definição 2.2.1 é calculado, para cada $u \in \Omega(X)$, por:

$$\mathcal{E}P(u) := \begin{cases} \{*_u\} & \text{se } u \subseteq EP \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Observe que, para todo pré-feixe P, $E(\mathcal{E}P) = EP$ e $(EP)^{\leftarrow}$, o ideal gerado por EP em $\Omega(X)$, identifica-se com $\mathcal{E}P$. Vemos assim que, nas categorias $\mathbf{pSh}(X)$ e $\mathbf{Sh}(X)$, as noções de suporte e extensão colapsam.

Concluímos esta seção com uma breve análise de aspectos estruturais referentes às categorias estudadas neste capítulo.

Definição 3.1.9. A *restrição* de um pré-feixe P a um aberto $u \in \Omega(X)$ é obtida através da aplicação $\cdot|. : \mathbf{Obj}(\mathbf{Sh}(X)) \times \Omega(X) \to \mathbf{Obj}(\mathbf{Sh}(X))$ definida, para cada $v \in \Omega(X)$, por:

$$P|_u(v) := \begin{cases} P(v) & \text{se } v \subseteq u \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases}.$$

O lema seguinte assemelha-se em muitos pontos ao seu equivalente para seções.

Lema 3.1.10. *Sejam P e Q pré-feixes e $u, v \in \Omega(X)$:*

(a) $P|_u = P \quad$ *sse* $\quad EP \subseteq u \quad$ *(em particular,* $P|_{EP} = P$*);*

(b) $(P|_u)|_v = P|_{u \cap v}$*;*

(c) $E(P|_u) = EP \cap u$*;*

(d) $\mathbb{1}|_{EP} = \mathcal{E}P$*;*

(e) $P \times Q = (P \times Q)|_{EP \cap EQ} = P|_{EQ} \times Q|_{EP}$*;*

(f) $Q \times \mathcal{E}P \simeq Q|_{EP} \quad$ *(em particular,* $P \times \mathcal{E}P \simeq P$*).*

Demonstração. Imediata pelas definições. O item (f) pode ser visualizado calculando-se ambos os membros da relação isomórfica:

$$(Q \times \mathcal{E}P)(u) = \begin{cases} Q(u) \times \{u\} & \text{se } u \subseteq EP \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} ;$$

$$Q|_{EP}(u) = \begin{cases} Q(u) & \text{se } u \subseteq EP \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} .$$

□

Conforme sugere nosso enfoque, a categoria $\mathbf{pSh}(X)$ pode ser vista como um "pré-feixe" cuja classe de objetos possui uma estrutura semelhante a um domínio de seções, sendo estas representadas pelos pré-feixes da categoria. Isso, transposto para o terreno categorial, motiva a definição de uma categoria de pré-feixes associada a cada categoria finitamente completa $\mathcal{C}$ satisfazendo certas propriedades adicionais. É o que faremos no próximo capítulo.

3.2 Feixes e Pré-Feixes sobre uma Álgebra de Heyting Completa

Nesta seção, generalizamos as noções de feixe e pré-feixe sobre um espaço topológico através do estudo dos H-conjuntos. Uma álgebra de Heyting será indicada pelo símbolo H e uma álgebra de Heyting completa (cHa) por Ω. As categorias resultantes da generalização são Heyting, de acordo com a nomenclatura estabelecida no capítulo anterior, e isso nos fornece um exemplo fundamental para a análise das semânticas categoriais que iremos estudar no Capítulo 5. Definições de conceitos básicos em álgebra de reticulados podem ser encontradas no Apêndice 2.

Definição 3.2.1. Seja H uma álgebra de Heyting. Um H*-conjunto* A consiste num conjunto $|A| \neq \emptyset$ (o *domínio* de A) junto com uma operação binária $[\cdot = \cdot] : |A|^2 \to H$ (a *função de igualdade*) satisfazendo, para todo $x, y, z \in |A|$:

(i) $[x = y] = [y = x]$; (simetria)

(ii) $[x = y] \wedge [y = z] \leq [x = z]$. (transitividade)

Para um dado $x \in A$, a *extensão* de x, dada por $Ex := [x = x]$, expressa sua reflexividade. Claramente, $[x = y] \leq Ex \wedge Ey$. O conjunto das *seções* de um H-conjunto A sobre p, $p \in H$, é a coleção $A(p) = \{x \in |A| : Ex = p\}$. Os elementos de $A(1)$, $1 = max\, H$, são chamados de *seções globais* de A.

Um H-conjunto é *extensional* se satisfaz a seguinte propriedade:

[ext] para todo $x, y \in |A|$, $Ex = Ey = [x = y]$ implica $x = y$.

Salvo menção em contrário, todos os H-conjuntos a partir de agora serão extensionais.

Definição 3.2.2. Sejam A um H-conjunto, $S \subseteq |A|$ e $p \in H$:

(i) S é *compatível* sobre p se, para todo $x, y \in S$, $p \wedge [x = y] = p \wedge Ex \wedge Ey$;

(ii) S é *compatível* se é compatível sobre 1;

(iii) A é *finitamente completo* se, para todo $p \in H$ e todo $S \subseteq |A|$ finito, quando S é compatível sobre p, existe um $z \in |A|$, chamado de *colagem* de S sobre p, tal que:

(a) $Ez = p \wedge \bigvee\{Ex : x \in S\}$;

(b) para todo $x \in S$, $p \wedge Ex = p \wedge [z = x]$;

(iv) se H é completa, A é um *feixe (de conjuntos)* sobre H se, para todo $S \subseteq |A|$, quando S é compatível sobre p, existe uma colagem de S sobre p.

Por [ext], toda colagem z nos itens (iii) e (iv) acima deve ser única.

Definição 3.2.3. Um H-conjunto A é um *pré-feixe (de conjuntos)* sobre H se existe uma função $\cdot|. : |A| \times H \to |A|$, chamada de *restrição*, satisfazendo, para todo $x, y \in |A|$ e para todo $p, q \in H$:

(i) $x|_{Ex} = x$;
(ii) $(x|_p)|_q = x|_{p \wedge q}$;
(iii) $[x|_p = y|_q] = p \wedge q \wedge [x = y]$.

Observemos que todo H-conjunto A finitamente completo é um pré-feixe. Com efeito, dados $x \in |A|$ e $p \in H$, o conjunto $\{x\}$ é compatível sobre p; portanto, existe a colagem de $\{x\}$ sobre p, que denotaremos por $x|_p$. É fácil demonstrar que $(x, p) \mapsto x|_p$ satisfaz as condições da Definição 3.2.3. Em particular, todo feixe é um pré-feixe.

Demonstra-se também, tal como fizemos na primeira seção, que, se A é um pré-feixe sobre H, $x, y \in |A|$ e $p, q \in H$:
(i) $x|_{[x=y]} = y|_{[x=y]}$;
(ii) existe um único $* \in |A|$ tal que $E* = 0$ e, para todo $x \in |A|$, $x|_0 = *$, sendo $0 = min\, H$.

Se A e B são H-conjuntos, um *morfismo* de H-conjuntos $f : A \to B$ consiste numa função $f : |A| \to |B|$ tal que, para todo $x, y \in |A|$:
(i) $E_B f(x) = E_A x$;
(ii) $[x = y]_A \leq [f(x) = f(y)]_B$.

Das nossas considerações anteriores, obtemos outras duas categorias: $\mathbf{pSh}(H)$, dos pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting, e $\mathbf{Sh}(\Omega)$, dos feixes sobre uma cHa.

A *extensão* de um pré-feixe A sobre H é calculada de forma idêntica ao que fizemos na seção anterior:

$$EA = \bigvee \{p \in H : A(p) \neq \emptyset\} .$$

O cálculo do *suporte* segue de imediato:

$$\mathcal{E}A(p) = \begin{cases} \{*_p\} & \text{se } p \leq EA \\ \emptyset & \text{c. c.} \end{cases} .$$

Servem aqui também as observações colocadas na seção anterior com relação à identificação entre extensão e suporte de feixes e pré-feixes.

Capítulo 4

Feixes e Pré-Feixes sobre $\mathbf{Sub}(\mathbb{1})$

Neste capítulo apresentaremos dois funtores cuja característica principal é a de levar objetos de uma categoria $\mathcal{C}$, esta dotada de algumas propriedades, a pré-feixes sobre a cHa $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$, sendo $\mathbb{1}$ o objeto final de $\mathcal{C}$. O primeiro desses funtores é uma generalização do conceito de partes de um conjunto e o segundo desempenhará uma importante função na interpretação generalizada que propomos no quinto capítulo.

4.1 O Funtor $\mathcal{P}$

Na Seção 1 do Capítulo 3, anunciamos a existência de uma categoria de pré-feixes associada a cada categoria finitamente completa $\mathcal{C}$ satisfazendo certas propriedades adicionais. Aquela categoria possui uma estrutura semelhante a um domínio de seções. Analisaremos neste capítulo as suas principais propriedades e mostraremos que se trata, no caso em que $\mathcal{C}$ é geométrica, de uma categoria de feixes.

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria Heyting bem-potenciada (*well-powered*). Definimos, para cada $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e $Q \leq \mathbb{1}$:

$$\mathcal{P}_A(Q) := \begin{cases} \mathbf{Sub}(A \times Q) & \text{se } Q \leq \mathcal{E}A \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Da Definição 4.1.1 segue imediatamente que $\mathcal{P}_A(\mathcal{E}A) = \mathbf{Sub}(A)$ e, se $Q \leq A \leq \mathbb{1}$, $\mathcal{P}_A(Q) = \mathbf{Sub}(Q)$, sendo este último conjunto uma álgebra de Heyting.

A seguir, induziremos na família $\{\mathcal{P}_A(Q)\}_{Q \leq 1}$ uma estrutura de pré-feixe, que denominamos $\mathcal{P}_A$. O domínio de $\mathcal{P}_A$ é dado por:

$$|\mathcal{P}_A| := \coprod_{Q \leq \mathcal{E}A} \mathcal{P}_A(Q) = \{(B, Q) : B \in \mathbf{Sub}(A \times Q) \quad \text{e} \quad Q \leq \mathcal{E}A\}$$

e a restrição de uma seção $(B, Q) \in |\mathcal{P}_A|$ a $R \leq \mathbb{1}$ por:

$$(B, Q)|_R := (B \times R, Q \wedge R)\ .$$

Se $(B, Q), (C, R) \in |\mathcal{P}_A|$, a função de igualdade é definida por:

$$[(B, Q) = (C, R)]_A := \bigvee\{S \leq Q \wedge R : B \times S = C \times S\}$$

e a extensão de $(B, Q) \in |\mathcal{P}_A|$ é:

$$E(B, Q) := [(B, Q) = (B, Q)] = Q\ .$$

Proposição 4.1.2. *$\mathcal{P}_A$ é um pré-feixe sobre $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$.*

Demonstração. Sejam $(B, Q), (C, R) \in |\mathcal{P}_A|$ e $S, T \leq \mathbb{1}$:

(i)
$$(B, Q)|_{E(B,Q)} = (B, Q)|_Q = (B \times Q, Q \wedge Q) = (B, Q);$$

(ii)

$$\begin{aligned} ((B, Q)|_S)|_T &= (B \times S, Q \wedge S)|_T \\ &= ((B \times S) \times T, (Q \wedge S) \wedge T) \\ &= (B \times (S \wedge T), Q \wedge (S \wedge T)) \\ &= (B, Q)|_{S \wedge T}; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
[(B,Q)|_S = (C,R)|_T] &= \bigvee\{U \leq Q \wedge S \wedge R \wedge T : \\
&\qquad (B \times S) \times U = (C \times T) \times U\} \\
&= \bigvee\{(S \wedge T) \wedge U : U \leq Q \wedge R,\ B \times U = C \times U\} \\
&= S \wedge T \wedge \bigvee\{U \leq Q \wedge R : B \times U = C \times U\} \\
&= S \wedge T \wedge [(B,Q) = (C,R)].
\end{aligned}$$

Sejam agora $(B,Q),(C,Q) \in |\mathcal{P}_A|$ e suponha que $[(B,Q) = (C,Q)] = Q$:

$$\begin{aligned}
B &= B \times Q \\
&= B \times \bigvee\{U \leq Q : B \times U = C \times U\} \\
&= \bigvee\{B \times U : U \leq Q \text{ e } B \times U = C \times U\} \\
&= \bigvee\{C \times U : U \leq Q \text{ e } B \times U = C \times U\} \\
&= C \times Q \\
&= C.
\end{aligned}$$

Isso significa que $\mathcal{P}_A$ é extensional. Além disso, $\mathcal{P}_A(\mathbf{0}) = \mathbf{Sub}(A \times \mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$.

□

Observemos que, por definição, $E\mathcal{P}_A = \bigvee\{Q \leq \mathbb{1} : \mathcal{P}_A(Q) \neq \emptyset\} = \mathcal{E}A$.

Proposição 4.1.3. *Se os conjuntos* $\mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ *e* $\mathbf{Sub}(A)$ *são* cHa*'s, então* $\mathcal{P}_A$ *é um feixe sobre* Ω.

Demonstração. Seja $\{(B_i,Q_i)\}_{i\in I}$, $(B_i,Q_i) \in |\mathcal{P}_A|$, uma família compatível de seções. Então, dados $i,j \in I$, temos que $(B_i,Q_i)|_{Q_j} = (B_j,Q_j)|_{Q_i}$. Daqui, $(B_i \times Q_j, Q_i \wedge Q_j) = (B_j \times Q_i, Q_j \wedge Q_i)$ e, portanto, $B_i \times Q_j = B_j \times Q_i$.

Considere então $B = \bigvee_{i\in I}^{A} B_i$ e $Q = \bigvee_{i\in I}^{1} Q_i$:

$$\mathcal{E}B = \mathcal{E}(\bigvee_{i\in I}^{A} B_i) = \bigvee_{i\in I}^{1} \mathcal{E}B_i \leq \bigvee_{i\in I}^{1} Q_i = Q\ ;$$

logo, $B \in \mathbf{Sub}(A \times Q)$. Além disso,

$$E(B,Q) = \bigvee_{i \in I} Q_i = \bigvee_{i \in I} E(B_i, Q_i)$$

e

$$\begin{aligned}
(B,Q)|_{Q_j} &= (B \times Q_j, Q \wedge Q_j) = ((\bigvee_{i \in I} B_i) \times Q_j, Q_j) \\
&= (\bigvee_{i \in I}(B_i \times Q_j), Q_j) = (\bigvee_{i \in I}(B_j \times Q_i), Q_j) = (B_j \times \bigvee_{i \in I} Q_i, Q_j) \\
&= (B_j \times Q, Q_j) = (B_j, Q_j).
\end{aligned}$$

Concluímos com isso que (B,Q) é a colagem de $\{(B_i, Q_i)\}_{i \in I}$ em $\mathcal{P}_A$.

$\square$

Para cada objeto $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, o pré-feixe $\mathcal{P}_A$ pode ser visto como uma categoria cujos objetos são $\mathbf{Obj}(\mathcal{P}_A) := |\mathcal{P}_A|$ e cujos morfismos são todos os morfismos das categorias $\mathbf{Sub}(A \times Q)_{Q \leq 1}$, ou seja, dado um par de seções (B,Q) e (C,R), $\mathbf{Hom}_{\mathcal{P}_A}((B,Q),(C,R)) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ sempre que $Q \leq R$. Se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, o funtor $(f \times id_{\_})^*$ atribui a todo objeto (C,Q) da categoria $\mathcal{P}_B$ o seu *pullback* $(f \times id_Q)^*$ de acordo com o diagrama seguinte.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_A \\ \mathcal{P}_B \arrow[u, "(f \times id_{\_})^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (f \times id_Q)^*(C) \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \times Q \arrow[d, "f \times id_Q"] \\ C \arrow[r, hook] & B \times Q \end{tikzcd}$$

Sabemos que, se $\mathcal{C}$ tem imagens, o funtor $(f \times id_Q)^* : \mathbf{Sub}(A \times Q) \to \mathbf{Sub}(B \times Q)$ tem um adjunto à esquerda $\exists_{f \times id_Q} : \mathbf{Sub}(A \times Q) \to \mathbf{Sub}(B \times Q)$ e, se $\mathcal{C}$ é Heyting, o mesmo funtor tem um adjunto à direita $\forall_{f \times id_Q}$. Os funtores $\exists_{f \times id_{\_}}, \forall_{f \times id_{\_}} : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B$ são assim definidos diretamente como generalizações dos conceitos anteriores.

Proposição 4.1.4. *Considere uma categoria Heyting bem-potenciada $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbf{pSh}(\Omega)$ uma atribuição definida por:*

(i) para cada $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathcal{P}(A) := \mathcal{P}_A$;

(ii) para cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}_f : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B$ tal que $\mathcal{P}_f(C,Q) := \exists_{f \times id_Q}(C)$, para todo $(C,Q) \in |\mathcal{P}_A|$.

Então, $\mathcal{P}$ é um funtor.

Demonstração. (i) $\mathcal{P}$ preserva identidade.

Por definição, $\mathcal{P}_{id_A} = \exists_{id_A \times id_-} = \exists_{id_{(A\times -)}}$. Basta demonstrar que $\exists_{id_{(A\times -)}} \simeq id_{\mathcal{P}_A} = id_{Sub(A\times -)}$, ou seja, que $\exists_{id_{(A\times Q)}}(C) \simeq C$ para todo $C \in \mathbf{Sub}(A \times Q)$. O diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & A \times Q \arrow[d, "id_{(A\times Q)}"] \\ \exists_{id_{(A\times Q)}}(C) \arrow[r, hook] & A \times Q \end{tikzcd}$$

nos diz que g é uma sobrejeção (por definição de imagem) e um monomorfismo (por se tratar de um morfismo entre subobjetos de $A \times Q$). Portanto, é um isomorfismo, conforme dita a Proposição 2.1.7.

(ii) $\mathcal{P}$ preserva composição.

Devemos demonstrar que, se $dom(g) = cod(f)$, $f, g \in \mathbf{Hom}(\mathcal{C})$, $\mathcal{P}_{g\circ f} = \mathcal{P}_g \circ \mathcal{P}_f$. Mas isso é imediato, já que $\exists_{(g\circ f)\times id_-} = \exists_{(g\times id_-)\circ(f\times id_-)} \simeq \exists_{g\times id_-} \circ \exists_{f\times id_-}$.

□

A categoria resultante, cujos objetos são os pré-feixes $\mathcal{P}_A$ e cujos morfismos são os morfismos de pré-feixes $\mathcal{P}_f$, pode ser denotada por $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ e é uma subcategoria de $\mathbf{pSh}(\Omega)$, sendo $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria geométrica, o que implica que $\mathbf{Sub}(A)$ é uma cHa para todo $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, então $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\mathbf{Sh}(\Omega)$.

É claro que $\mathcal{P}_f$ pode ser visto como uma função de domínio $|\mathcal{P}_A|$ e contradomínio $|\mathcal{P}_B|$, tal como demonstramos no Capítulo 2. De fato, essa concepção transporta a componente $\mathcal{P}_f$ do funtor $\mathcal{P}$ do macrouniverso categorial $\mathbf{Sh}(\Omega)$ para o microuniverso $\mathcal{P}_B$.

4.2 O Funtor $\overline{(\cdot)}$

Consideremos uma categoria finitamente completa $\mathcal{C}$ e $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$. Um elemento é tradicionalmente definido em Teoria das Categorias como um morfismo $r : \mathbb{1} \to A$ [5]. Em [3], essa noção é modificada para permitir a inclusão de objetos com suportes não necessariamente máximos. Com isso, um elemento passaria a ser um morfismo da forma $r : \mathcal{E}A \to A$. Ainda assim, julgamos essa abordagem demasiadamente restritiva, pois nem todos os objetos possuem tais morfismos e, conforme veremos a seguir e no próximo capítulo, uma ampliação desse conceito trará novas luzes sobre a questão da interpretação de constantes em categorias. Utilizaremos então, para os nossos propósitos, a definição a seguir.

Definição 4.2.1. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto final $\mathbb{1}$ e $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$. Um *elemento* de A é qualquer morfismo da forma $r : R \to A$, sendo $R \hookrightarrow \mathbb{1}$.

Se $R, S \in \Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ são tais que $R \leq S$, usaremos a notação $\leq_{RS}$ para indicar o único monomorfismo entre eles. No caso em que $S = \mathbb{1}$, escreveremos simplesmente $\leq_R$.

Todo morfismo da forma $f : B \to R$, em que $R \hookrightarrow \mathbb{1}$, é único pois, se houvesse um $g : B \to R$, dada a unicidade de $A \to \mathbb{1}$, teríamos que $\leq_R \circ f = \leq_R \circ g$, o que, pelo fato de $\leq_R$ ser mono, resultaria em $f = g$. Além disso, todo elemento $R \xrightarrow{r} A$ é um monomorfismo porque, dados $i, j : B \rightrightarrows R$ tais que $r \circ i = r \circ j$, pela unicidade anterior temos que $i = j$.

Observe que, por comodidade, estamos utilizando as letras $r, s, ...$ para representar elementos de um determinado objeto e as respectivas maiúsculas $R, S, ...$ para representar os domínios dos mesmos.

Desejamos agora coletar organizadamente todos os elementos de um dado objeto de uma categoria bem-potenciada.

Definição 4.2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa e bem-potenciada com objeto final $\mathbb{1}$ e para a qual $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ é uma cHa. Definimos, para cada objeto A de $\mathcal{C}$ e $R \in \Omega$, o conjunto:

$$\overline{A}(R) := \mathbf{Hom}(R, A).$$

A aplicação $\overline{A} : \Omega \to \mathbf{Set}$ é o conhecido funtor $\mathbf{Hom}(\ \cdot\ , A)$ (confira em [5]) restrito a $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$.

Notemos que, se $S \leq R$ e existe um elemento $r : R \hookrightarrow A$, a composição $r\circ \leq_{SR}$ nos garante a existência de pelo menos um elemento $s : S \hookrightarrow A$. Além disso, $\overline{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{Hom}(\mathbf{0}, A) \neq \emptyset$.

A seguir, induziremos na família $\{\overline{A}(R)\}_{R\leq 1}$ uma estrutura de pré-feixe sobre Ω, que denotaremos por $\overline{A}$. O domínio de $\overline{A}$ é dado por:

$$|\overline{A}| := \bigcup_{R\leq 1} \overline{A}(R) .$$

Observe que a união indicada acima já é disjunta pela própria construção de $\overline{A}$. Esse domínio representa nada menos do que o conjunto dos elementos de A. A restrição de um elemento $r \in |\overline{A}|$ a um objeto $S \in \Omega$ define-se por:

$$r|_S := r\circ \leq_{R\wedge S,R} .$$

Se $r, s \in |\overline{A}|$, a função de igualdade entre seções é, portanto, dada por:

$$[r = s]_A := \bigvee\{T \leq R \wedge S : r|_T = s|_T\}$$

e a extensão de uma seção é então dada por $Er := [r = r] = R$, que nada mais é do que o domínio de r.

Na categoria **Set** dos conjuntos, por exemplo, o objeto final $\mathbb{1} = \{*\}$ e, portanto:

$$|\overline{A}| = \overline{A}(\emptyset) \cup \overline{A}(\{*\}) = A^{\emptyset} \cup A^{\{*\}} \simeq \{\emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in A\} .$$

Proposição 4.2.3. *Para cada $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, $\overline{A}$ é um pré-feixe sobre Ω.*

Demonstração. Já verificamos que $\overline{A}(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. Sejam $r, s \in |\overline{A}|$ e $T, U \in \Omega$:
(i) $r|_{Er} = r|_R = r\circ \leq_{R\wedge R,R} = r \circ id_R = r$;
(ii)

$$\begin{aligned}(r|_T)|_U &= (r\circ \leq_{R\wedge T,R})|_U = (r\circ \leq_{R\wedge T,R})\circ \leq_{(R\wedge T)\wedge U,R\wedge T} \\ &= r \circ (\leq_{R\wedge T,R} \circ \leq_{(R\wedge T)\wedge U,R\wedge T}) = r\circ \leq_{R\wedge T\wedge U,R} = r|_{T\wedge U};\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
[r|_T = s|_U] &= \bigvee\{W \leq (R \wedge T) \wedge (S \wedge U) \,:\, (r|_T)|_W = (s|_U)|_W\} \\
&= \bigvee\{W \leq (R \wedge S) \wedge (T \wedge U) \,:\, r|_{T\wedge W} = s|_{U\wedge W}\} \\
&= \bigvee\{(T \wedge U) \wedge W \,:\, W \leq R \wedge S,\, r|_W = s|_W\} \\
&= T \wedge U \wedge \bigvee\{W \leq R \wedge S \,:\, r|_W = s|_W\} \\
&= T \wedge U \wedge [r = s].
\end{aligned}$$

Sejam agora $r, s \in |\overline{A}|$ tais que $[r = s] = R = S$. Então:

$$R = \bigvee\{W \leq R : r|_W = s|_W\} = \bigvee\{W \leq R : r\circ \leq_{WR} = s\circ \leq_{WR}\} = E\ ,$$

sendo E o domínio do equalizador de r e s. Esse equalizador existe porque $\mathcal{C}$ é finitamente completa. Portanto, $r = r|_R = s|_R = s|_S = s$, isto é, $\overline{A}$ é extensional.

□

Consideremos agora uma aplicação $\overline{(\cdot)} : \mathcal{C} \to \mathbf{pSh}(\Omega)$ que atribui a cada $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ o pré-feixe $\overline{A}$ e a cada $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ o morfismo entre pré-feixes $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{B}$ definido por $\overline{f}(r) := f \circ r$, para cada $r \in |\overline{A}|$. Observe que $f \circ r$ é um elemento de B com o mesmo domínio de r.

Proposição 4.2.4. *A atribuição* $\overline{(\cdot)} : \mathcal{C} \to \mathbf{pSh}(\Omega)$ *é um funtor.*

Demonstração. (i) $\overline{(\cdot)}$ preserva identidade:
$\overline{id_A}(r) = id_A \circ r = r = id_{\overline{A}}(r)$.
(ii) $\overline{(\cdot)}$ preserva composição:
$\overline{g} \circ \overline{f}(r) = \overline{g}(\overline{f}(r)) = \overline{g}(f \circ r) = g \circ (f \circ r) = (g \circ f) \circ r = \overline{g \circ f}(r)$.

□

O funtor $\overline{(\cdot)}$ é uma espécie de pré-feixificação dos objetos de uma categoria $\mathcal{C}$. Se $R \in \Omega$, $E\overline{R} = R$ coincide, evidentemente, com $\mathcal{E}R$. No caso em que $\mathcal{C} = \mathbf{pSh}(\Omega)$, sendo Ω uma álgebra de Heyting completa, sempre teremos $E\overline{A} = \mathcal{E}A$, qualquer que seja o pré-feixe A. Isso se deve ao fato de que todas as seções de um pré-feixe realmente se comportam como elementos no sentido conjuntista. Com efeito, os pré-feixes A e $\overline{A}$ são indiferenciáveis categorialmente, como veremos no lema e corolário seguintes.

Lema 4.2.5. *Se A e R são pré-feixes sobre Ω e $R \leq \mathbb{1}$, sendo $\mathbb{1}$ o objeto final de $\mathbf{pSh}(\Omega)$, existe uma bijeção natural entre $A(ER)$ e $\overline{A}(R) = \mathbf{Hom}(R, A)$.*

Demonstração. Para toda seção $s \in A(ER)$ há uma morfismo $r_s : R \to A$ definido, para cada $x \leq ER$, por $r_s(x) = s|_x$.

Reciprocamente, para todo morfismo $r : R \to A$, há uma seção definida por $s_r = r(ER)$.

Claramente, a aplicação $s \mapsto r_s$ é a inversa de $r \mapsto s_r$.

□

Corolário 4.2.6. *Se A é um pré-feixe sobre uma cHa Ω:*
(a) $E\overline{A} = \mathcal{E}A$;
(b) $A \simeq \overline{A}$.

Demonstração. (a)

$$E\overline{A} = \bigvee\{R \leq \mathbb{1} : \mathbf{Hom}(R, A) \neq \emptyset\} = \bigvee\{R \leq \mathbb{1} : A(ER) \neq \emptyset\} = \mathcal{E}A;$$

(b) pelo lema anterior e pelo fato de $R \mapsto ER$ ser uma bijeção entre $\mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ e Ω.

□

Numa categoria qualquer, a noção de "elemento" não é primitiva, ou seja, não faz parte da axiomática categorial. É exatamente esse aspecto que diferencia um objeto de categoria A de um objeto matemático derivado da teoria de conjuntos, como um pré-feixe. Nem toda estrutura interna de A pode ser "decomposta" em elementos, o que significa, em termos formais, que $E\overline{A}$ não precisa coincidir com $\mathcal{E}A$ e, mesmo que coincidam, pode haver um subobjeto próprio de A que tenha o mesmo conjunto de elementos, ou seja, $\overline{A} = \overline{B}$ não implica necessariamente $A = B$.

Aproveitando a nomenclatura empregada na Teoria dos Feixes, podemos estabelecer a seguinte convenção.

Definição 4.2.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa e bem-potenciada tal que $\mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ forma uma cHa. Dado um objeto A de $\mathcal{C}$, dizemos que:

- A tem *elementos globais* quando $\mathbf{Hom}(E\overline{A}, A) \neq \emptyset$;

- A tem *elementos globais totais* quando tem elementos globais e $E\overline{A} \simeq \mathcal{E}A$;

- A tem *elementos globais totais máximos* quando tem elementos globais totais e suporte máximo ($\mathcal{E}A \simeq \mathbb{1}$).

Na categoria $\mathbf{pSh}(H)$ dos pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting, por exemplo, toda seção global é também total; mais ainda, $E(\overline{A}) \simeq \mathcal{E}A$ para todo pré-feixe A.

Conforme veremos no capítulo seguinte, essa nomenclatura auxiliar-nos-á na comparação entre as diferentes abordagens da semântica categorial, em especial a que apresentaremos, generalizando as demais.

Capítulo 5

Semântica Categorial

Pretendemos expor neste capítulo os principais conceitos de semântica categorial. Uma generalização da noção de estrutura ordinária, esta devida a Tarski, nos permite interpretar categorialmente expressões de uma linguagem de primeira ordem e, em particular, da nossa linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ descrita no primeiro capítulo.

Na primeira seção, denominada simplesmente "Interpretação Categorial", fornecemos a abordagem tradicional, estabelecida por F. Lawvere e depois sistematizada no livro de Makkai e Reyes [9]. Neste trabalho, constantes são vistas conceitualmente como funções de aridade zero. Como em categorias o produto do diagrama vazio é igual ao objeto final $\mathbb{1}$, a interpretação de uma constante resulta em um morfismo de domínio $\mathbb{1}$. Portanto, somente os objetos de elementos globais totais máximos podem interpretar sortes de constantes.

Na segunda seção, apresentamos uma solução parcial para essa limitação teórica. Coniglio, em [3], propõe uma extensão da semântica usual a partir do conceito de suporte (*extent* em [3]). Nesse estudo, símbolos de constantes são considerados explicitamente, inclusive no uso do contexto, e passam a ser interpretados como morfismos de domínio igual ao suporte do objeto associado à sorte do mesmo. Ainda neste caso, esses objetos precisam ter elementos globais totais.

Na terceira seção, propomos uma alternativa original para a solução do problema. Através do uso do funtor $\overline{(\cdot)}$ e de uma modificação adequada da interpretação dos termos e fórmulas atômicas, passamos a aceitar qualquer objeto na interpretação das sortes das constantes, mesmo que não possua elementos globais.

Outras versões de semântica generalizada podem ser consideradas. Discutimos na quarta seção as limitações de cada uma delas e as vantagens resultantes da nossa versão. Isso nos ajuda a compreeder o grau de complexidade proveniente da consideração de elementos parciais.

5.1 Interpretação Categorial

A exposição que ora apresentamos tem como referência, além de [9], o trabalho de Johnstone [7].

Definição 5.1.1. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa e Σ uma assinatura polissortida de primeira ordem. Uma *Σ-estrutura* $\mathcal{M}$ em $\mathcal{C}$ é uma função com domínio Σ que atribui:

(i) a cada sorte A em Σ-Sor um objeto $\mathcal{M}A$ de $\mathcal{C}$;

(ii) a cada símbolo de função $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ em Σ-Fun um morfismo $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(A_1) \times \ldots \times \mathcal{M}(A_n) \to \mathcal{M}(A)$ de $\mathcal{C}$;

(iii) a cada símbolo de predicado $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel um subobjeto $R^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}A_1 \times \ldots \times \mathcal{M}A_n$ de $\mathcal{C}$.

Dado que o produto do diagrama vazio é o objeto final $\mathbb{1}$, se f for 0-ária, a interpretação dessa constante será um morfismo $f^{\mathcal{M}} : \mathbb{1} \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$. Conforme veremos nas próximas seções, essa é a principal motivação para a utilização do conceito de suporte de objetos em [3] e para a modificação do conceito de elemento na nossa teoria.

Em todas as nossas definições, estamos pressupondo, evidentemente, que um certo produto particular seja especificado para cada seqüência de objetos (incluindo uma computação específica de $\mathbb{1}$). Isso evita que sejamos ambíguos ao nos referirmos a um dado subobjeto ou a um dado morfismo, conforme definimos acima.

As Σ-estruturas em $\mathcal{C}$ são os objetos de uma categoria Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$ cujos morfismos são os homomorfismos entre as Σ-estruturas $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Especificamos estes como uma coleção em $\mathcal{C}$ de morfismos $\{\mathcal{M}A \xrightarrow{h_A} \mathcal{N}A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) para cada símbolo de função $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ em Fun, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^n \mathcal{M}A_i \arrow[r, "f^{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\ldots\times h_{A_n}"'] & \mathcal{M}A \arrow[d, "h_A"] \\ \prod_{i=1}^n \mathcal{N}A_i \arrow[r, "f^{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}A \end{tikzcd}$$

comuta.

(ii) para cada símbolo de predicado $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel, existe um diagrama comutativo da forma seguinte.

$$\begin{tikzcd} R^{\mathcal{M}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_{i=1}^n \mathcal{M}A_i \arrow[d, "h_{A_1}\times\ldots\times h_{A_n}"] \\ R^{\mathcal{N}} \arrow[r, hook] & \prod_{i=1}^n \mathcal{N}A_i \end{tikzcd}$$

A identidade $id_{\mathcal{M}}$ de uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ é a coleção $\{\mathcal{M}A \xrightarrow{id_{\mathcal{M}A}} \mathcal{M}A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$ e a composição $h \circ k$ dos homomorfismos h e k é o conjunto $\{h_A \circ k_A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$.

Um contexto $\vec{x}$, sendo $x_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$, é interpretado em $\mathcal{M}$ como $\mathcal{M}\vec{x} := \mathcal{M}A_1 \times \ldots \times \mathcal{M}A_n$.

A interpretação dos termos é uma extensão natural da interpretação dos símbolos de função.

Definição 5.1.2. Considere $\mathcal{M}$ uma estrutura numa categoria $\mathcal{C}$; se $\vec{x}.\tau$ é um termo em contexto de sorte A e $x_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$, definimos $\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$, a *interpretação* de $\vec{x}.\tau$ na estrutura $\mathcal{M}$, como sendo um morfismo $\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}\vec{x} \to \mathcal{M}A$ tal que:

(i) se τ é uma variável x_i, $i \leq n$, $\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é a projeção canônica $\mathcal{M}\vec{x} \to \mathcal{M}A_i$;

(ii) se τ é $f(\tau_1, ..., \tau_m)$, sendo $\tau_j : C_j$ $(j = i, ..., m)$, $\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é a composição indicada no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} \prod_{j=1}^m \mathcal{M}C_j \arrow[r, "f^{\mathcal{M}}"] & \mathcal{M}A \\ \mathcal{M}\vec{x} \arrow[u, "(\|\tau_1\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}, ..., \|\tau_m\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}})"] \arrow[ur, "\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}"'] & \end{tikzcd}$$

Em particular, se $f : A$ é uma função 0-ária (isto é, uma constante) e $! : \mathcal{M}\vec{x} \to \mathbb{1}$, então $\|f\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}} \circ !$.

A propriedade (i) da definição de homomorfismo entre estruturas pode ser estendida naturalmente, através do lema seguinte, de símbolos de funções para termos em contexto.

Lema 5.1.3. *Sejam $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ um homomorfismo de estruturas numa categoria $\mathcal{C}$ e $\vec{x}.\tau$ um termo em contexto de sorte A. Então o diagrama seguinte é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \arrow[r, "\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "h_{A_1} \times \ldots \times h_{A_n}"'] & \mathcal{M}A \arrow[d, "h_A"] \\ \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}A_i \arrow[r, "\|\tau\|_{\vec{x}}^{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}A \end{tikzcd}$$

Demonstração. Por indução na complexidade de τ.

□

Definição 5.1.4. Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura numa categoria $\mathcal{C}$; se $\vec{x}.\varphi$ é uma fórmula em contexto, definimos $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$, a *interpretação* de $\vec{x}.\varphi$ na estrutura $\mathcal{M}$, como sendo um subobjeto $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}\vec{x}$ tal que:

(i) se φ é $\tau_1 = \tau_2$, sendo $\tau_i : A$ $(i = 1, 2)$, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é o equalizador abaixo;

$$\begin{tikzcd} \|(\tau_1 = \tau_2)\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \arrow[r, hook] & \mathcal{M}\vec{x} \arrow[r, shift left, "\|\tau_1\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}"] \arrow[r, shift right, "\|\tau_2\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M}A \end{tikzcd}$$

(ii) se φ é uma fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_m)$, sendo $\tau_j : B_j$ $(j = 1, ..., m)$, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é o *pullback* a seguir;

$$\begin{tikzcd} \|R(\tau_1, ..., \tau_m)\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & R^{\mathcal{M}} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{M}\vec{x} \arrow[r, "(\|\tau_1\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}, ..., \|\tau_m\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}})"] & \prod_{j=1}^{m} \mathcal{M}B_j \end{tikzcd}$$

(iii) se φ é $\bigwedge \Psi$, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é dada por $\bigwedge\{\|\psi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}\vec{x} : \psi \in \Psi\}$, se este existir;

(iv) se φ é $\bigvee \Psi$, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é dada por $\bigvee\{\|\psi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}\vec{x} : \psi \in \Psi\}$, se este existir;

(v) se φ é $\exists y\psi$ e $\pi : \mathcal{M}(\vec{x}, y) \to \mathcal{M}\vec{x}$ é a projeção canônica dos primeiros n fatores, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é a imagem no diagrama

$$\begin{tikzcd}
\|\psi\|_{\vec{x},y}^{\mathcal{M}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{M}(\vec{x}, y) \arrow[d, "\pi"] \\
\exists_\pi(\|\psi\|_{\vec{x},y}^{\mathcal{M}}) \arrow[r, hook] & \mathcal{M}\vec{x}
\end{tikzcd}$$

(se y ocorre em $\vec{x}$, podemos tomar uma fórmula α-equivalente a $\exists y\psi$);

(vi) se φ é $\forall \vec{y}(\psi \to \phi)$ e $\pi : \mathcal{M}(\vec{x}, \vec{y}) \to \mathcal{M}\vec{x}$ é a projeção canônica, $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ é a imagem dual generalizada $\forall_\pi(\|\psi\|_{\vec{x},\vec{y}}^{\mathcal{M}} \to \|\phi\|_{\vec{x},\vec{y}}^{\mathcal{M}})$

(novamente, podemos tomar fórmulas α-equivalentes para evitar colapso de variáveis $\vec{x}$ e $\vec{y}$).

Como casos particulares do item (vi) na definição acima interpretamos as seguintes fórmulas:

$$\|\forall y\phi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} = \forall_\pi(\mathbb{1} \to \|\phi\|_{\vec{x},y}^{\mathcal{M}}) \ ;$$

$$\|\psi \to \phi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} = \forall_{id_{\mathcal{M}\vec{x}}}(\|\psi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \to \|\phi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}) \ ;$$

$$\|\neg\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} = \forall_{id_{M\vec{x}}}(\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \to \mathbf{0}) \ .$$

Novamente, podemos estender de maneira natural a propriedade (ii) da definição de homomorfismo entre estruturas, desta vez de símbolos de relações para fórmulas em contexto. É o que expressa o lema seguinte.

Lema 5.1.5. *Sejam $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ um homomorfismo entre estruturas numa categoria $\mathcal{C}$ e $\vec{x}.\varphi$ uma fórmula em contexto interpretável em $\mathcal{C}$. Então existe um diagrama comutativo da forma a seguir.*

$$\begin{tikzcd}
\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{M}\vec{x} \arrow[d, "h_{A_1}\times\ldots\times h_{A_n}"] \\
\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{N}} \arrow[r, hook] & \mathcal{N}\vec{x}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. De novo uma simples indução na complexidade de φ. $\square$

Sejam $\mathcal{M}$ uma estrutura na categoria $\mathcal{C}$, F um fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ e $\vec{x}.\varphi$ uma fórmula em contexto pertencente a F. Afirmamos que $\vec{x}.\varphi$ é *estável* com relação a $\mathcal{M}$ se $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ existe e toda imagem, supremo e imagem dual usados na computação de $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}}$ são estáveis. O fragmento F é *estável* com relação a $\mathcal{M}$ se toda $\vec{x}.\varphi$ em F é estável. De forma similar definimos as noções de fórmulas e fragmentos estavelmente distributivos. Essas noções de bom comportamento na interpretação das fórmulas de um fragmento apontam a adequação de uma certa categoria para a tarefa interpretativa.

Podemos, enfim, estabelecer a relação de satisfatibilidade para seqüentes.

Definição 5.1.6. Seja $\Phi \Rightarrow \Psi$ um seqüente (ver Definição 1.2.3); dizemos que uma estrutura $\mathcal{M}$ o satisfaz, $\mathcal{M} \models (\Phi \Rightarrow \Psi)$, se $\bigwedge\{\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}\vec{x} : \varphi \in \Phi\} \leq \bigvee\{\|\psi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}\vec{x} : \psi \in \Psi\}$, sendo $\vec{x}$ um contexto para todas as fórmulas do seqüente.

É evidente que só nos é permitido falar que $\mathcal{M} \models \Phi \Rightarrow \Psi$ se existirem $\mathcal{M}(\bigwedge \Phi)$ e $\mathcal{M}(\bigvee \Psi)$ num certo contexto canônico $\vec{x}$.

Terminamos esta seção com a observação de que, na categoria **Set** dos conjuntos, todas as definições apresentadas coincidem com as da Teoria de Modelos conjuntista tradicional (confira [2]). As Σ-estruturas, por exemplo, são, em **Set**, as estruturas de primeira ordem usuais. A semântica categorial nada mais é do que uma Teoria de Modelos generalizada.

5.2 Interpretação Categorial Estendida

Expomos nesta seção a semântica estendida introduzida por Coniglio [3]. Estruturas de primeira ordem são agora definidas através da modificação apropriada da interpretação dos símbolos de constantes. Para isso, é inserido na teoria o conceito de suporte de objetos. Ademais, os símbolos de constantes passam a figurar explicitamente na assinatura da linguagem e a constar no contexto em que se interpretam termos e fórmulas.

Coniglio [3] define elementos (parciais) de um dado objeto $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ como morfismos da forma $\mathcal{E}A \to A$, sendo $\mathcal{E}A$ o suporte de A. Entretanto, em vista da nossa nova nomenclatura estabelecida na Seção 4.2, esses morfismos serão mais apropriadamente chamados de elementos globais totais.

Definição 5.2.1. Uma *assinatura estendida* Σ (mantivemos a notação por comodidade) é uma assinatura (no sentido da Definição 1.1.1) com as seguintes modificações:

(i) os símbolos de função têm aridade $n > 0$;

(ii) Σ conta agora com um novo conjunto, a saber, o dos símbolos de constante Σ-Con, sendo que a cada $c \in \Sigma$-Con é associada uma sorte B (escrevemos $c : B$).

Observação 5.2.2. A noção de sub-assinatura estendida é idêntica à de sub-assinatura, contanto que acrescentemos à Definição 1.1.2 a seguinte cláusula:

(iv) Σ'-Con$\subseteq$ Σ-Con.

Ampliada a assinatura, uma Σ-estrutura estendida $\mathcal{M}$ tem a tarefa adicional de interpretar cada $c : B$ em Σ-Con. E isso é feito através do suporte de $\mathcal{M}B$.

Definição 5.2.3. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa e Σ uma assinatura estendida. Uma *Σ-estrutura estendida* em $\mathcal{C}$ é uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ em $\mathcal{C}$ (de acordo com a Definição 5.1.1) satisfazendo, adicionalmente, a seguinte condição:

(iv) $\mathcal{M}$ atribui a cada constante $c : B$ em Σ-Con um elemento global total

$$c^{\mathcal{M}} : \mathcal{E}\mathcal{M}B \hookrightarrow \mathcal{M}B \, .$$

Um contexto C para termos (ou fórmulas) é agora definido como um par $(\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$, sendo que $\vec{x}$ contém todas as variáveis livres do termo (ou da fórmula) e $\{c_j\}_{j\in J}$ contém todos os símbolos de constantes do mesmo (ou da mesma).

Coniglio, em [3], adverte que somente seqüências finitas de constantes são aceitáveis no contexto. Preferimos não adotar essa restrição pelo fato de estarmos trabalhando, no nível semântico, com categorias que permitem ínfimos arbitrários de elementos, ou seja, $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ forma uma cHa. Isso ficará mais claro ao definirmos a interpretação de um contexto numa estrutura.

Definição 5.2.4. Seja $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j \in J})$ um contexto, sendo $x_i : A_i$ ($i = 1, ..., n$) e $c_j : B_j$ ($j \in J$). A interpretação de C na estrutura $\mathcal{M}$ é definida por:

$$\mathcal{M}C := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \times \bigwedge_{j \in J} \mathcal{E}\mathcal{M}B_j \ ,$$

sendo o ínfimo da expressão acima calculado em $\mathbb{1}$.

Observe que $\mathcal{M}(\vec{x}; \emptyset) = \mathcal{M}\vec{x}$, a interpretação usual do contexto.

A interpretação de termos e fórmulas em contexto é uma extensão direta da usual, bastando atentar para o caso dos símbolos de constantes nos termos.

Definição 5.2.5. Considere $\mathcal{M}$ uma estrutura estendida e $C.\tau$ um termo em contexto de sorte A. Definimos $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$, a interpretação desse termo em $\mathcal{M}$, como sendo um morfismo $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}C \to \mathcal{M}A$ tal que:

(i) se τ é uma variável x_i ($i \leq n$), $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a projeção canônica $\mathcal{M}C \to \mathcal{M}A_i$;

(ii) se τ é uma constante c_j ($j \in J$) e $\pi : \mathcal{M}C \to \mathcal{E}\mathcal{M}A$ é a projeção canônica, $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição indicada no diagrama abaixo;

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\mathcal{M}A \arrow[r, "c_j^{\mathcal{M}}"] & \mathcal{M}A \\
\mathcal{M}C \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) se τ é $f(\tau_1, ..., \tau_p)$, sendo $\tau_k : C_k$ ($k = 1, ..., p$), $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição indicada no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}C_k \arrow[r, "f^{\mathcal{M}}"] & \mathcal{M}A \\ \mathcal{M}C \arrow[u, "(\|\tau_1\|_C^{\mathcal{M}},\ldots,\|\tau_p\|_C^{\mathcal{M}})"] \arrow[ur, "\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}"'] & \end{tikzcd}$$

Para a interpretação das fórmulas, basta substituir $\mathcal{M}\vec{x}$ por $\mathcal{M}(\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})$ na Definição 5.1.4.

Procurando obter um limitante superior mais fino para o suporte da interpretação de cada fórmula em contexto, Coniglio [3] classifica essas fórmulas de acordo com sua sintaxe, calculando um melhor limitante superior para o suporte de cada $\|\varphi\|_C^{\mathcal{M}}$. É o que ele chama de maior extensão (suporte) da fórmula.

Definição 5.2.6. Sejam $C.\varphi$ uma fórmula no contexto $C = (\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})$ e $\mathcal{M}$ uma estrutura estendida. Definimos recursivamente $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] \leq \mathbb{1}$, o *maior suporte* de $C.\varphi$ com respeito a $\mathcal{M}$, como segue:
(i) se φ é atômica, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \mathcal{E}\mathcal{M}C$;
(ii) se φ é $\forall\vec{y}(\psi \to \theta)$, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \mathcal{E}\mathcal{M}C$;
(iii) se φ é $\exists y\psi$, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[(\vec{x},y;\{c_j\}_{j\in J}).\psi]$;
(iv) se φ é $\bigwedge_{i\in I}\psi_i$, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \bigwedge_{i\in I} G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\psi_i]$;
(v) se φ é $\bigvee_{i\in I}\psi_i$, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \bigvee_{i\in I} G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\psi_i]$.

Definição 5.2.7. O *maior valor* da fórmula em contexto $C.\varphi$ com respeito à estrutura $\mathcal{M}$, $GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi]$, é definido a partir do conceito de maior suporte (Definição 5.2.6) como

$$GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \mathcal{M}C \times G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] \hookrightarrow \mathcal{M}C.$$

Em **Set**, $GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi] = \{*\}$ sse $\mathcal{E}\mathcal{M}C = \{*\}$. Assim, se $\mathcal{M}(\emptyset;\{c_j\}_{j\in J}) \simeq \{*\}$, $\mathcal{M}C \simeq \mathcal{M}\vec{x} \times \{*\} \simeq \mathcal{M}\vec{x}$; logo, $GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi] \simeq \mathcal{M}C \times \{*\} \simeq \mathcal{M}C \simeq \mathcal{M}\vec{x}$.

Em [3] é demonstrado que $\|\varphi\|_C^{\mathcal{M}} \leq GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi] \hookrightarrow \mathcal{M}C$, o que justifica a nomenclatura empregada.

A relação de satisfatibilidade é agora apresentada levando-se em conta o conceito de maior valor.

Definição 5.2.8. Dizemos que uma estrutura $\mathcal{M}$ *satisfaz* um seqüente $\mathcal{S} = (\Phi \Rightarrow \Psi)$, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$, sendo C um contexto para todas as fórmulas do seqüente, se uma das seguintes condições se verifica:
(i) $\mathcal{M} \models (\Rightarrow \Psi)$ se $\|\bigvee \Psi\|_C^{\mathcal{M}} = GV_{\mathcal{M}}[C.\bigvee \Psi]$;
(ii) $\mathcal{M} \models (\Phi \Rightarrow \Psi)$ se $\|\bigwedge \Phi\|_C^{\mathcal{M}} \leq \|\bigvee \Psi\|_C^{\mathcal{M}}$ e $\Phi \neq \emptyset$.

Convém observar que, na nova apresentação de [3], os seqüentes $\Rightarrow \varphi$ e $\top \Rightarrow \varphi$ têm significados diferentes. O seqüente $\Rightarrow \exists x(x = x)$, por exemplo, é válido em toda estrutura $\mathcal{M}$, obedecendo o item (i) da Definição 5.2.8; de fato, a interpretação da fórmula em contexto $(\emptyset;\emptyset).\exists x(x = x)$, de acordo com as Definições 5.2.5 e 5.1.4, é dada por

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}x \arrow[r, hook, "\|x=x\|^{\mathcal{M}}_{(x;\emptyset)}"] \arrow[d] & \mathcal{M}x \arrow[r, shift left, "\|x\|^{\mathcal{M}}_{(x;\emptyset)}"] \arrow[r, shift right, "\|x\|^{\mathcal{M}}_{(x;\emptyset)}"'] \arrow[d] & \mathcal{M}x \\
\mathcal{E}\mathcal{M}x \arrow[r, hook, "\|\exists x(x=x)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;\emptyset)}"] & \mathbb{1} &
\end{tikzcd}
$$

e, pelas Definições 5.2.6 e 5.2.7, $GV_{\mathcal{M}}[(\emptyset;\emptyset).\exists x(x = x)] = \mathcal{M}(\emptyset;\emptyset) \times GE_{\mathcal{M}}[(\emptyset;\emptyset).\exists x(x = x)] = \mathbb{1} \times G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[(x;\emptyset).(x = x)] = \mathcal{E}\mathcal{M}x \hookrightarrow \mathbb{1}$; logo, $\|\exists x(x = x)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;\emptyset)} = GV_{\mathcal{M}}[(\emptyset;\emptyset).\exists x(x = x)]$. O seqüente $\top \Rightarrow \exists x(x = x)$, por sua vez, somente é válido em estruturas $\mathcal{M}$ para as quais $\mathcal{E}\mathcal{M}x = \mathbb{1}$, em concordância com o item (ii) da Definição 5.2.8. Temos portanto duas noções de verdade: uma fórmula φ é *debilmente válida* se o seqüente $\Rightarrow \varphi$ é válido e é *fortemente válida* se o seqüente $\top \Rightarrow \varphi$ é válido. Intuitivamente, no exemplo acima, a fórmula considerada é debilmente verdadeira em $\mathcal{M}$ porque atinge nessa estrutura o seu valor máximo sem assumir restrições adicionais. Para que fosse fortemente válida, deveríamos assumir a condição adicional de que $\mathcal{E}\mathcal{M}x = \mathbb{1}$. Isso mostra que a extensão da semântica aumentou o poder expressivo da interpretação. Por outro lado, prova-se também em [3] que as duas noções de teoremicidade (a forte e a débil) são necessárias para poder expressar, por meio da semântica estendida, propriedades das categorias através de seqüentes (os chamados *"Main Facts"* de [9]).

Conforme foi feito em [3], pode-se definir uma categoria $\overline{\Sigma\text{-}\mathbf{Str}}(\mathcal{C})$ de estruturas estendidas em $\mathcal{C}$ de tal forma que $\Sigma\text{-}\mathbf{Str}(\mathcal{C})$, a categoria de estruturas usuais, seja uma subcategoria plena da categoria estendida. De novo, a única diferença desta para a usual recai na condição requerida para as constantes. Para uma completa compreensão dos leitores, repetimos os demais itens.

Definição 5.2.9. A categoria $\overline{\Sigma\text{-}\mathbf{Str}}(\mathcal{C})$ tem como objetos as Σ-estruturas estendidas sobre $\mathcal{C}$. Um morfismo $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre duas estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ em $\overline{\Sigma\text{-}\mathbf{Str}}(\mathcal{C})$ é uma família $h = \{\mathcal{M}A \xrightarrow{h_A} \mathcal{N}A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$ de morfismos em $\mathcal{C}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) para toda $c : B$ em Σ-Con, $\mathcal{EM}B \simeq \mathcal{EN}B$ e o diagrama abaixo comuta;

$$\begin{tikzcd} \mathcal{EM}B \arrow[r, hook, "c^{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{M}B \arrow[d, "h_B"] \\ \mathcal{EN}B \arrow[r, hook, "c^{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}B \end{tikzcd}$$

(ii) para toda $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ em Σ-Fun, o diagrama abaixo é comutativo;

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \arrow[r, "f^{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\prod_{i=1}^{n} h_{A_i}"'] & \mathcal{M}A \arrow[d, "h_A"] \\ \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}A_i \arrow[r, "f^{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}A \end{tikzcd}$$

(iii) para todo $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel, existe um diagrama comutativo da forma seguinte.

$$\begin{tikzcd} R^{\mathcal{M}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \arrow[d, "\prod_{i=1}^{n} h_{A_i}"] \\ R^{\mathcal{N}} \arrow[r, hook] & \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}A_i \end{tikzcd}$$

Observemos que a necessidade de se considerar, no item (i) acima, $\mathcal{EM}B \simeq \mathcal{EN}B$ para cada $c : B$ em Σ-Con advém do fato de que a componente h_B deve necessariamente preservar as constantes de $\mathcal{M}B$. Na categoria $\mathbf{Sh}(\Omega)$ dos feixes sobre uma cHa, as constantes são, segundo a abordagem estendida, as seções globais. Assim, h_B deve enviar seções globais de $\mathcal{M}B$ a seções globais de $\mathcal{N}B$, ou seja, $h_B(c^{\mathcal{M}}(E\mathcal{M}B)) = c^{\mathcal{N}}(E\mathcal{M}B)$.

5.3 Interpretação Categorial Generalizada

Nesta seção, apresentamos nossa proposta de generalização da semântica categorial. Na semântica categorial tradicional [9][7], somente os objetos que possuem elementos globais totais máximos, de acordo com a nomenclatura estabelecida na Definição 4.2.7, podem interpretar símbolos de constantes. Na extensão oferecida por Coniglio [3] a essa semântica, objetos não precisam mais ter suporte máximo para cumprir esse papel, mas ainda são obrigados a possuir elementos globais totais.

A primeira proposta que oferecemos para generalizar a semântica categorial leva em conta os objetos que possuem elementos globais, não necessariamente totais. Neste caso, uma estrutura $\mathcal{M}$ atribui a cada símbolo de constante $c : B$ um elemento global $\overline{E\mathcal{M}B} \hookrightarrow \mathcal{M}B$. Todas as demais construções são modificações diretas da semântica estendida. A interpretação do contexto, por exemplo, é dada por:

$$\mathcal{M}C := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \times \bigwedge_{j\in J} \overline{E\mathcal{M}B_j}\ .$$

No entanto, se analisarmos a Teoria de Feixes, encontraremos muitos exemplos matematicamente interessantes de objetos que não possuem sequer seções globais [1]. Isso nos motiva uma nova formulação da semântica categorial de forma a permitir que todo objeto seja um candidato a interpretar constantes. Em [1], há uma abordagem similar para a interpretação de constantes no caso particular de semântica de feixes e teoremas interessantes da Teoria de Modelos são generalizados.

O procedimento que estamos propondo consiste em modificar convenientemente a interpretação dos símbolos de constantes, dos termos e das fórmulas atômicas. Isso será feito com o auxílio do funtor $\overline{(\cdot)}$ descrito no capítulo anterior.

Definição 5.3.1. Sejam Σ uma assinatura estendida e $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa na qual $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ é uma cHa. Uma *Σ-estrutura generalizada* em $\mathcal{C}$ é uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ em $\mathcal{C}$ (confira Definição 5.1.1) satisfazendo, adicionalmente, a cláusula seguinte:

(iv) $\mathcal{M}$ atribui a cada constante $c : B$ em Σ-Con um elemento $c^{\mathcal{M}} \in |\overline{\mathcal{M}B}|$.

Para a interpretação dos termos, precisamos da definição que segue.

Definição 5.3.2. Seja τ um termo de uma linguagem polissortida de primeira ordem $\mathcal{L}$. O *suporte* de τ na estrutura $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau$, é definido recursivamente por:

(i) se τ é uma variável $x : A$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau := \mathcal{E}\mathcal{M}A$;
(ii) se τ é uma constante $c : B$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau := E_{\overline{\mathcal{M}B}}(c^{\mathcal{M}}) = dom(c^{\mathcal{M}})$;
(iii) e se τ é da forma $f(\tau_1, ..., \tau_p)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau := \bigwedge_{k=1}^{p} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_k$.

Similarmente definimos o suporte de fórmulas atômicas, ou seja, se φ é uma fórmula atômica de $\mathcal{L}$ da forma, digamos, $R(\tau_1, ...\tau_p)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi := \bigwedge_{k=1}^{p} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_k$; e se φ é da forma $(\tau_1 = \tau_2)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi := \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_1 \wedge \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_2$.

O suporte de uma fórmula qualquer é dado por:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi \;:=\; \bigwedge\{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau : \tau \text{ é uma constante ou variável livre ocorrendo em } \varphi\}.$$

Um contexto $C = \overline{(\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})}$ é agora interpretado em $\mathcal{M}$ como $\mathcal{M}C := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \times \bigwedge_{j=1}^{m} E\overline{\mathcal{M}B_j}$, sendo $x_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$ e $c_j : B_j$ $(j \in J)$. Convém observar que o conjunto de constantes J pode perfeitamente ser infinito, já que Ω forma um cHa.

Segue a definição de interpretação de termos e fórmulas atômicas em contexto.

Definição 5.3.3. Considere $\mathcal{M}$ uma estrutura generalizada e $C.\tau$ um termo em contexto de sorte A. Definimos $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$, a interpretação desse termo em $\mathcal{M}$, como sendo um morfismo $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau \to \mathcal{M}A$ tal que:

(i) se τ é uma variável x_i $(i \leq n)$, $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a projeção canônica $\mathcal{M}C \to \mathcal{M}A_i$;

(ii) se τ é uma constante c_j $(j \in J)$ e $\pi : \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_j \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_j$ é a projeção canônica, $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição indicada no diagrama abaixo;

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_j \arrow[r, hook, "c_j^{\mathcal{M}}"] & \mathcal{M}B_j \\ \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_j \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) se τ é $f(\tau_1, ..., \tau_p)$, sendo $\tau_k : C_k$ $(k = 1, ..., p)$, $\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição indicada no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}C_k \arrow[r, "f^{\mathcal{M}}"] & \mathcal{M}A \\ \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}f(\tau_1, ..., \tau_p) \arrow[u, "(\|\tau_1\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_1, ..., \|\tau_p\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_p)"] \arrow[ur, "\|\tau\|_C^{\mathcal{M}}"'] & \end{tikzcd}$$

em que $\pi_k : \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}f(\tau_1, ..., \tau_p) \to \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_k$ $(k = 1, ..., p)$ são as projeções canônicas.

Definição 5.3.4. Interpretamos uma fórmula em contexto $C.\varphi$ na estrutura generalizada $\mathcal{M}$ como um subobjeto $\|\varphi\| \hookrightarrow \mathcal{M}C$ da seguinte maneira:

(i) se φ é da forma $R(\tau_1, ..., \tau_p)$, sendo $R \hookrightarrow \prod_{k=1}^{p} C_k$, $\|\varphi\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição $\lambda \circ \mu$ no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook, "\mu"] \arrow[d] & \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}R(\tau_1, ..., \tau_p) \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[d, "(\|\tau_1\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_1, ..., \|\tau_p\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_p)"] & \mathcal{M}C \\
R^{\mathcal{M}C} \arrow[r, hook] & \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}C_k &
\end{tikzcd}$$

em que P compõe o *pullback* do retângulo e $\pi_k : \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}R(\tau_1, ..., \tau_p) \to \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_k$ $(k = 1, ..., p)$ são as projeções canônicas;

(ii) e se φ é da forma $(\tau_1 = \tau_2)$, $\|\varphi\|_C^{\mathcal{M}}$ é a composição $\lambda \circ \nu$ no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_1 \arrow[dr, "\|\tau_1\|_C^{\mathcal{M}}"] & \\
E \arrow[r, hook, "\nu"] & \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\tau_1 = \tau_2) \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] \arrow[d, hook, "\lambda"] & & \mathcal{M}C \\
 & \mathcal{M}C & \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau_2 \arrow[ur, "\|\tau_2\|_C^{\mathcal{M}}"'] &
\end{tikzcd}$$

em que E compõe o equalizador de $\|\tau_1\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_1$ e $\|\tau_2\|_C^{\mathcal{M}} \circ \pi_2$.

As fórmulas compostas são interpretadas de maneira idêntica ao que foi feito na Definição 5.1.4.

Para estabelecer a relação de satisfatibilidade, precisamos adaptar a Definição 5.2.6 para a semântica que ora apresentamos. Por causa da liberdade, na nossa semântica generalizada, de reduzir deliberadamente o suporte da interpretação das constantes, podemos refinar ainda mais o limitante superior do suporte da interpretação das fórmulas. Isso é o que expressa a definição a seguir.

Definição 5.3.5. Sejam $C.\varphi$ uma fórmula no contexto $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j \in J})$ e $\mathcal{M}$ uma estrutura generalizada. O maior suporte de $C.\varphi$ com respeito a $\mathcal{M}$, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi]$, é definido exatamente como na Definição 5.2.6, exceção feita à cláusula (i), que é reescrita como segue:

(i) se φ é atômica, $G\mathcal{E}_{\mathcal{M}}[C.\varphi] := \mathcal{E}\mathcal{M}C \wedge \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi$.

A definição do maior valor $GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi]$ de uma fórmula em contexto $C.\varphi$ para a semântica generalizada é igual à Definição 5.2.7.

Proposição 5.3.6. *Se $C.\varphi$ é uma fórmula em contexto e $\mathcal{M}$ uma estrutura generalizada, $\|\varphi\|_C^{\mathcal{M}} \leq GV_{\mathcal{M}}[C.\varphi] \hookrightarrow \mathcal{M}C$.*

Demonstração. Por indução na complexidade da fórmula. Só precisamos verificar o caso (i) da Definição 5.3.5; mas, pelo item (i) da Definição 5.3.4, isso é imediato.

□

Também a definição da relação de satisfatibilidade é uma reprodução da Definição 5.2.8.

Quanto à definição de homomorfismos de Σ-estruturas generalizadas em $\mathcal{C}$, as únicas modificações com relação à Definição 5.2.9 dizem respeito à cláusula das constantes: ao invés de exigir que $\mathcal{E}\mathcal{M}B \simeq \mathcal{E}\mathcal{N}B$, para cada $B \in \Sigma$-Sor e $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbf{Obj}(\overline{\Sigma\text{-}\mathbf{Str}}(\mathcal{C}))$, tal que existe um homomorfismo $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, passamos a impor, para cada símbolo de constante $c : B$, que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}c \leq \mathcal{E}_{\mathcal{N}}c$ e que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathcal{M}}c \arrow[r, hook, "c^{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\leq"] & \mathcal{M}B \arrow[d, "h_B"] \\
\mathcal{E}_{\mathcal{N}}c \arrow[r, hook, "c^{\mathcal{N}}"] & \mathcal{N}B
\end{tikzcd}$$

A categoria de Σ-estruturas generalizadas sobre $\mathcal{C}$ será indicada por $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathcal{C})$.

A semântica categorial generalizada apresentada nesta seção permite que qualquer objeto de uma categoria $\mathcal{C}$ interprete a sorte de uma contante. Dado que $\Omega = \mathbf{Sub}(\mathbb{1})$ forma uma cHa, $\mathcal{C}$ deverá ter, necessariamente, um objeto inicial $\mathbf{0} = \bigwedge \Omega$. Como, por definição, sempre existe um morfismo $\mathbf{0} \to A$, para todo $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, o conjunto de elementos $|\overline{A}|$ não pode ser vazio.

Na categoria $\mathbf{pSh}(\Omega)$ dos pré-feixes sobre uma cHa, por exemplo, sabemos que, para todo pré-feixe A, $A(0) = \{*_0\}$, o que garante a existência de pelo menos um elemento associado a cada pré-feixe. Na categoria $\mathbf{Set}$ dos conjuntos, por outro lado, o objeto inicial $\emptyset$ não nos fornece, em princípio, nenhum elemento, pelo menos na acepção conjuntista, isto é, não existe x tal que $x \in \emptyset$. Mas, do ponto de vista categorial, o morfismo $\emptyset \hookrightarrow \emptyset$ pode e deve ser visto como um elemento, como atesta o cálculo de $\overline{A}(\emptyset)$ para um dado conjunto A. É claro que a interpretação de uma constante como um elemento de domínio vazio simplificaria em demasia a nossa semântica, já que a interpretação do próprio contexto seria vazia. Mas não há nenhuma contradição em seguir esse procedimento. Em resumo, a noção categorial de elemento aqui proposta não coincide exatamente com a conjuntista.

5.4 Outras Versões de Semântica Generalizada e suas Limitações

Além da semântica generalizada exposta na seção anterior, podemos propor outras versões de semântica categorial que oferecem interpretações generalizadas aos símbolos de constantes, ou seja, que associam às mesmas elementos não necessariamente globais.

A versão mais simples é conseguida mediante a simples restrição do contexto ao suporte das constantes. Assim, a interpretação do contexto $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j \in J})$ fica:

$$\mathcal{M}C := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \times \bigwedge_{j \in J} \mathcal{E}_{\mathcal{M}} c_j \ .$$

À guisa de exemplo, interpretemos a fórmula $(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)$, sendo c_1 e c_2 símbolos de constantes de sorte, digamos, A, numa estrutura $\mathcal{M}$ na categoria $\mathbf{Sh}(\mathbb{R})$ dos feixes sobre a topologia usual dos números reais $\mathbb{R}$. Atribuímos à sorte A o objeto P definido por:

$$P(u) := \{f : f \text{ é uma função contínua } f : u \to \mathbb{R}\} \ ,$$

sendo $u \subseteq \mathbb{R}$. As constantes c_1 e c_2 são interpretadas pelas funções contínuas:

$$c_1^{\mathcal{M}} : u \to \mathbb{R};$$

$$c_2^{\mathcal{M}} : v \to \mathbb{R}$$

mais as respectivas restrições, de tal maneira que $u \cap v = \emptyset$ mas $u \neq \emptyset \neq v$.

Calculemos, então, a interpretação do contexto canônico da fórmula:

$$\mathcal{M}(\emptyset; c_1, c_2) = \mathbb{1}|_{u \cap v} = \mathbb{1}|_{\emptyset} = \mathbf{0} \ .$$

A intepretação da fórmula deve, evidentemente, ser um subobjeto da interpretação do contexto, nos restando dizer que:

$$\|(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset; c_1, c_2)} = \mathbf{0} \ .$$

É um problema conceitual aceitar ou não semelhante resultado, mas o fato é que ele é dificilmente assimilável pela intuição.

Uma outra versão de semântica generalizada, estudada em [1] para o caso específico de feixes e pré-feixes, reza que a interpretação do contexto não precisa ser restrita ao suporte das constantes, ou seja,

$$\mathcal{M}C := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i \times \bigwedge_{j \in J} E\overline{\mathcal{M}B_J}$$

como na nossa apresentação (veja seção anterior), mas a interpretação de termos e fómulas deve ser restringida "localmente" a todas as constantes e variáveis que efetivamente ocorrem neles, em concordância com [4]. Formalmente, se $C.\tau$ é um termo em contexto de sorte A,

$$\mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\tau \xrightarrow{\|\tau\|^{\mathcal{M}}_{C}} \mathcal{M}A$$

e, se $C.\varphi$ é uma fórmula em contexto,

$$\|\varphi\|^{\mathcal{M}}_{C} \hookrightarrow \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi \ .$$

Voltemos ao exemplo anterior, considerando a mesma fórmula e dando às constantes c_1 e c_2 a mesma interpretação em $\mathbf{Sh}(X)$. Calculemos a interpretação do contexto para esta versão:

$$\mathcal{M}(\emptyset; c_1, c_2) = \mathbb{1}|_{\mathbb{R}} = \mathbb{1} \ .$$

O suporte da fórmula $(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)$ é dado por:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}((c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)) = \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_1 \wedge \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_2 = \mathbf{0}$$

e a interpretação da fórmula, por fim:

$$\|(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;c_1,c_2)} \hookrightarrow \mathbb{1} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \ ,$$

ou seja, $\|(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;c_1,c_2)} = \mathbf{0}$.

Caímos novamente na mesma questão conceitual.

Outros resultados desconcertantes provenientes desta semântica são:

$$\|\bigvee_{i\in I}(x = c_i)\|^{\mathcal{M}}_{(x;\{c_i\}_{i\in I})} = \mathbf{0} \ ;$$

$$\|(\exists x)\bigvee_{i\in I}(x = c_i)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;\{c_i\}_{i\in I})} = \mathbf{0} \ ,$$

sendo $\{c_i^{\mathcal{M}}\}_{i\in I} = |P|$.

Na nossa abordagem, discutida na seção anterior, somente as fórmulas atômicas são restringidas localmente, após o que são compostas para que se tornem todas subobjetos da interpretação do contexto. Formalmente:

$$\|\varphi\|^{\mathcal{M}}_{C} \hookrightarrow \mathcal{M}C \times \mathcal{E}_{\mathcal{M}}\varphi \hookrightarrow \mathcal{M}C \ .$$

As fórmulas mais complexas, por seu turno, não mais são restringidas, para que não incorramos nos resultados anteriores. Se calcularmos, portanto, as interpretações das fómulas consideradas, encontraremos para a extensões das interpretações:

$$E\|(c_1 = c_1) \vee (c_2 = c_2)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;c_1,c_2)} = u \cup v \neq \emptyset \ ;$$

$$E\|\bigvee_{i\in I}(x = c_i)\|^{\mathcal{M}}_{(x;\{c_i\}_{i\in I})} = \bigcup_{i\in I} dom(c_i^{\mathcal{M}}) = \mathbb{R};$$

$$E\|(\exists x)\bigvee_{i\in I}(x = c_i)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;\{c_i\}_{i\in I})} = \mathbb{R} \ .$$

Por outro lado, mesmo na nossa semântica, a interpretação da fórmula $(c_1 = c_1) \wedge (c_2 = c_2)$, com c_1 e c_2 interpretados de forma indêntica, nos dá resultado **0**! Com efeito,

$$E\|(c_1 = c_1) \wedge (c_2 = c_2)\|^{\mathcal{M}}_{(\emptyset;c_1,c_2)} = u \cap v = \emptyset \ .$$

Essa aparente contradição deve-se ao fato de os domínios de interpretação das constantes serem disjuntos. Uma maneira simples de compreender o problema é considerar a interpretação das fórmulas atômicas como processos separados "espacialmente". Cada uma delas é computada em "sítios" semânticos diferentes e, ao se unirem para compor fórmulas mais complexas, confrontam os seus respectivos "sítios" de acordo com a exigência dos conectivos. Quando compomos $\|c_1 = c_1\|$ com $\|c_2 = c_2\|$, previamente restritas aos suportes de suas constantes, para formar $\|c_1 = c_1\| \vee \|c_2 = c_2\|$, unimos os "sítios" disjuntos u e v para formar o novo "sítio" $u \cup v$. Entretando, a disjunção que caracteriza a fórmula $\|c_1 = c_1\| \wedge \|c_2 = c_2\|$ exige uma "área" em comum entre os "sítios" de interpretação de $\|c_1 = c_1\|$ e de $\|c_2 = c_2\|$; a inexistência de tal "área de contato" redunda numa interpretação vazia.

A opção por uma versão de semântica generalizada não é meramente uma questão de gosto pessoal. Se escolhêssemos, por exemplo, uma solução que eliminasse as interpretações duvidosas, perderíamos muitos resultados interessantes em Teoria de Modelos, tais como os que foram obtidos em [1]. Se fizéssemos, por exemplo, a restrição de que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_1 \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{M}}c_2$ sempre que c_1 e c_2 ocorrerem no contexto C, evitaríamos os problemas anteriores de interpretação – pois os "sítios" não podem mais ser disjuntos – mas afastar-nos-íamos em demasia das questões matemáticas levantadas pela Teoria de Modelos.

Capítulo 6

Semântica de Feixes e Pré-Feixes de Estruturas de Primeira Ordem

Como uma aplicação dos conceitos introduzidos no capítulo anterior, apresentamos aqui uma extensão da categoria de pré-feixes de estruturas, esta introduzida em [10], utilizando assinaturas polissortidas e semântica generalizada. Para simplificar a exposição, concentrar-nos-emos em feixes e pré-feixes sobre espaços topológicos; entretanto, todas as definições e resultados continuam válidos se substituirmos a topologia por uma cHa arbitrária.

Um pré-feixe de conjuntos sobre um espaço topológico (veja a Definição 3.1.1) pode ser visto como um pré-feixe de estruturas sobre uma assinatura monossortida com a igualdade como único símbolo. Se conferimos a esses conjuntos de seções uma estrutura algébrico-relacional, obtemos os pré-feixes e os feixes de estruturas. Na primera seção deste capítulo, definimos um pré-feixe de estruturas sobre um espaço topológico utilizando uma assinatura polissortida. Categorias de feixes e de pré-feixes de estruturas são então formadas. Na segunda seção, funções características são generalizadas, segundo [10], para fornecer uma semântica de feixes alternativa. Isso é feito com o uso da interpretação generalizada de constantes.

6.1 Feixes e Pré-Feixes de Estruturas de Primeira Ordem

Um pré-feixe extensional sobre X é, por definição, um funtor contravariante P de $\Omega(X)$ em **Set** satisfazendo $P(\emptyset) \neq \emptyset$ e [ext]. Observe que a categoria **Set** pode ser pensada como a categoria das Σ_A-estruturas sobre **Set**, em que Σ_A é a assinatura que contém uma única sorte, digamos A, e um único símbolo de predicado, a igualdade sobre A. Basta estabeler uma correspondência biunívoca entre a classe de Σ_A-estruturas – isto é, das estruturas conjuntistas de primeira ordem – e a classe dos objetos de **Set**, ou seja, a cada estrutura $\mathcal{M}$ dessa classe corresponde um conjunto $M = \mathcal{M}A$. Disso resulta uma equivalência categorial Σ_A-$\mathbf{Str}(\mathbf{Set}) \simeq \mathbf{Set}$. Por essa razão, um pré-feixe de conjuntos pode ser concebido como um funtor contravariante $P : \Omega(X) \to \Sigma_A\text{-}\mathbf{Str}(\mathbf{Set})$ tal que $P(\emptyset)A \neq \emptyset$.

Olhando por esse ângulo, é possível generalizar a definição de pré-feixes sobre X substituindo a assinatura Σ_A por outra mais complexa. Passamos então a considerar funtores contravariantes $P : \Omega(X) \to \Sigma\text{-}\mathbf{Str}(\mathbf{Set})$, para assinaturas Σ arbitrárias, satisfazendo uma generalização apropriada da condição [ext]. O caso estudado em [10] aplica-se quando Σ tem uma única sorte. Obtêm-se dessa maneira os feixes e pré-feixes de estruturas, que nada mais são do que "conjuntos, com estrutura algébrico-relacional, variando continuamente".

Nesta seção, introduzimos o estudo original de feixes e pré-feixes associados a estruturas de primeira ordem, em que a assinatura Σ tem mais de uma sorte. As estruturas em **Set** são generalizadas, isto é, admitimos interpretações de domínio vazio para constantes, em benefício dos conceitos estabelecidos no capítulo anterior.

Homomorfismos entre Σ-estruturas generalizadas em **Set** são definidos de acordo com a terceira seção do Capítulo 5, vale dizer, se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são Σ-estruturas conjuntistas, então um morfismo $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma família $h = \{\mathcal{M}A \xrightarrow{h_A} \mathcal{N}A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$ de funções satisfazendo:

(i) para toda $c : B$ em Σ-Con, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(c) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(c)$ e $h_B \circ c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}} \circ \leq$;

(ii) para toda $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ em Σ-Fun e $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i$, $h_A(f^{\mathcal{M}}(\vec{a})) = f^{\mathcal{N}}(h_{A_1}(a_1), ..., h_{A_n}(a_n))$;

(iii) para todo $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel e $\vec{a} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i$, $\vec{a} \in R^{\mathcal{M}}$ implica $(h_{A_1}(a_1), ..., h_{A_n}(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$.

Lembremos da Definição 5.3.2 que, em **Set**, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(c)$ pode ser o conjunto unitário $\{*\}$ ou o conjunto vazio $\emptyset$, para toda estrutura conjuntista $\mathcal{M}$. No item (i) acima, portanto, ficam implícitas as restrições:
(a) se $\mathcal{N}B = \emptyset$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(c) = \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(c) = \emptyset$;
(b) se $\mathcal{M}B = \emptyset$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(c) = \emptyset$;
(c) se $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(c) = \emptyset$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(c) = \emptyset$.

A categoria resultante, cujos objetos são as estruturas conjuntistas generalizadas e cujos morfismos são os homomorfismos de estruturas descritos acima, é denotada por $[\Sigma\textbf{-Str}](\textbf{Set})$.

Seja Σ' uma sub-assinatura de Σ, de acordo com a Observação 5.2.2. O funtor *esquecimento*

$$\textbf{esq}(\Sigma, \Sigma') : [\Sigma\textbf{-Str}](\textbf{Set}) \to [\Sigma'\textbf{-Str}](\textbf{Set})$$

atribui a cada estrutura em $[\Sigma\textbf{-Str}](\textbf{Set})$ o seu reduto em Σ'. Se $P : \Omega(X) \to [\Sigma\textbf{-Str}](\textbf{Set})$ é um funtor contravariante tal que $P(\emptyset)A \neq \emptyset$ para todo $A \in \Sigma$-Sor, então, para cada $A \in \Sigma$-Sor, o funtor composto

$$P_A := \textbf{esq}(\Sigma, \Sigma_A) \circ P : \Omega(X) \to [\Sigma_A\textbf{-Str}](\textbf{Set})$$

é também contravariante e, dado que $[\Sigma_A\textbf{-Str}](\textbf{Set}) \simeq \textbf{Set}$, P_A é um pré-feixe (não necessariamente extensional) para cada sorte A, definido por:

$$P_A(u) := P(u)A \quad \text{para todo } u \in \Omega(X);$$

$$(P_A)_{uv} := (P_{uv})_A : P(u)A \to P(v)A \quad \text{para todo } v \subseteq u.$$

Temos então a definição seguinte.

Definição 6.1.1. Um *pré-feixe de estruturas generalizadas* sobre um espaço topológico X é um funtor contravariante $P : \Omega(X) \to [\Sigma\textbf{-Str}](\textbf{Set})$ tal que $P(\emptyset)A \neq \emptyset$ para todo $A \in \Sigma$-Sor e, para cada $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel, a seguinte condição é satisfeita:

[g-ext] sejam $u \in \Omega(X)$ e $\vec{t} \in \prod_{i=1}^{n} P(u)A_i$; se $\{u_j\}_{j\in J}$ é uma cobertura aberta de u tal que, para todo $j \in J$, $\vec{t}|_{u_j} = (t_1|_{u_j}, ..., t_n|_{u_j}) \in R^{P(u_j)}$, então $\vec{t} \in R^{P(u)}$.

Observemos que as restrições $t_i|_{u_j}$ mencionadas na condição [g-ext] são calculadas em cada pré-feixe de conjuntos P_{A_i} associado à sorte A_i. Assim, por exemplo, $t_i|_{u_j} \in P_{A_i}(u_j) = P(u_j)A_i$. Também é importante notar que [g-ext] vale, em particular, para a relação de igualdade $(\cdot = \cdot)$ sobre cada sorte A. Com isso, demonstramos que, para cada $A \in \Sigma$-Sor, o pré-feixe P_A é extensional.

De fato, se $s, t \in |P_A|$ são tais que $E_{P_A}s = E_{P_A}t = [s = t]_{P_A} = u$, a família $\mathcal{O} = \{w \in \Omega(u) : s|_w = t|_w\}$ é uma cobertura aberta de u tal que, para todo $w \in \mathcal{O}$, $(s,t)|_w \in (\cdot = \cdot)^{P(w)}$. Por [g-ext], inferimos que $(s,t) \in (\cdot = \cdot)^{P(u)}$, ou seja, $s = t$.

Recordemos que estamos trabalhando com estruturas conjuntistas, nas quais a interpretação do símbolo de igualdade $=_A$ é a diagonal, isto é, $(=)^{\mathcal{M}} := \{(x,x) : x \in \mathcal{M}A\}$ (confira [2]).

Dizemos que um pré-feixe de estruturas generalizadas P é um *feixe de estruturas generalizadas* se cada pré-feixe P_A é um feixe.

Os pré-feixes sobre X de estruturas conjuntistas generalizadas formam uma categoria, $\mathbf{pSh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X)$, cujos morfismos são transformações naturais $\eta : P \to Q$. Estas são famílias $\eta = \{P(u) \xrightarrow{\eta_u} Q(u) : u \in \Omega(X)\}$ tais que, para todo $u \in \Omega(X)$, $\eta_u : P(u) \to Q(u)$ é um homomorfismo de Σ-estruturas generalizadas sobre $\mathbf{Set}$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $u, v \in \Omega(X)$ tais que $v \subseteq u$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P(u) & \xrightarrow{\eta_u} & Q(u) \\ {\scriptstyle P_{uv}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q_{uv}} \\ P(v) & \xrightarrow{\eta_v} & Q(v) \end{array}$$

comuta. Observe que P_{uv} é uma família de funções $\{P(u)A \xrightarrow{(P_{uv})_A} P(v)A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$.

Podemos construir analogamente a categoria $\mathbf{Sh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X)$ dos feixes sobre X de estruturas conjuntistas generalizadas, que é uma subcategoria plena de $\mathbf{pSh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X)$.

6.2 Semântica de Funções Características

Dado que feixes e pré-feixes são espécies de "conjuntos generalizados", veremos a seguir que eles têm associadas certas funções características generalizadas. Nestas, a noção de pertinência toma valores em $\Omega(X)$, ou seja, é difusa num certo sentido.

As funções características servem para fornecer uma semântica de feixes alternativa, pois as fórmulas passam agora a ser interpretadas como funções características no lugar de objetos (feixes). As variáveis livres das fórmulas identificam-se, então, com os argumentos dessas funções.

Por comodidade, usaremos a seguinte notação: para $\vec{s}, \vec{t} \in \prod_{i=1}^{n} |P_{A_i}|$, $[\vec{s} = \vec{t}] := \bigcap_{i=1}^{n} [s_i = t_i]$ e $E\vec{s} := [\vec{s} = \vec{s}]$.

Definição 6.2.1. Seja R em Σ-Rel. Definimos a *função característica* de R com respeito ao pré-feixe de estruturas P, $[R(\cdot)]_P : \prod_{i=1}^{n} |P_{A_i}| \to \Omega(X)$, como sendo:

$$[R(\vec{s})]_P := \bigcup \{w \in \Omega(E\vec{s}) \ : \ \vec{s}|_w \in R^{P(w)}\}$$

para todo $\vec{s} \in \prod_{i=1}^{n} |P_{A_i}|$.

A definição anterior nada mais é do que uma generalização da função de igualdade para todos os símbolos de predicado.

Em [10] é demonstrado que existe um isomorfismo entre a cHa das funções características $[R(\cdot)] : \prod_{i=1}^{n} |P_{A_i}| \to \Omega(X)$ e a cHa dos subobjetos de $\prod_{i=1}^{n} P_{A_i}$.

Reinterpretamos agora a assinatura Σ com o novo ferramental introduzido.

Definição 6.2.2. Sejam P um pré-feixe de estruturas sobre X e Σ uma assinatura estendida; atribuímos:

(i) a cada sorte A em Σ-Sor o pré-feixe P_A;

(ii) a cada $c : B$ em Σ-Con uma seção $c^P \in |P_B|$, desde que $c^{P(Ec^P)} \neq \emptyset$ e tal que, para todo $u \subseteq Ec^P$, $c^P|_u := c^{P(u)} = c^{P(Ec^P)}|_u$;

(iii) a cada $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ em Σ-Fun o homomorfismo de pré-feixes $f^P : \prod_{i=1}^n P_{A_i} \to P_A$ dado por $f_u^P := f^{P(u)}$;

(iv) e a cada $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel a função característica $R^P := [R(\cdot)]_P : \prod_{i=1}^n |P_{A_i}| \to \Omega(X)$.

Observe que, de acordo com o Lema 4.2.5, as constantes são agora interpretadas como seções arbitrárias, isto é, permitimos seções de qualquer natureza, sejam elas globais ou não, o que aumenta significativamente nossa classe de modelos. Lembremos que $|P_B| \simeq |\overline{P_B}|$, sendo esta última a coleção de todos os elementos do pré-feixe P_B. Uma vez escolhida uma seção c^P de tal maneira que $c^{P(Ec^P)} \neq \emptyset$ e $c^P|_u = c^{P(u)} \neq \emptyset$ para todo $u \subseteq Ec^P$, garantimos a regra da restrição.

Recordemos da Definição 5.3.2 o conceito de suporte de um termo τ com relação a uma estrutura. Neste caso, em particular, temos:

(i) se τ é uma variável $x : A$, $\mathcal{E}_P\tau := \mathcal{E}P_A$;

(ii) se τ é uma constante $c : B$, $\mathcal{E}_P\tau := E_{P_B}(c^P)$;

(iii) e se τ é da forma $f(\tau_1, ..., \tau_p)$, $\mathcal{E}_P\tau := \bigwedge_{k=1}^p \mathcal{E}_P\tau_k$.

Para a interpretação de fórmulas, por fim, devemos lembrar que, em $\Omega(X)$:

(i) $\bigwedge_{i\in I} u_i := (\bigcap_{i\in I} u_i)^\circ$;

(ii) $u \to v := ((X - u) \cup v)^\circ$,

em que Y° denota o *interior* do conjunto $Y \subseteq X$ em $\Omega(X)$, isto é:

$$Y^\circ = \bigcup \{u \in \Omega(X) : u \subseteq Y\}.$$

Se $C.\tau$ é um termo no contexto $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$ e de sorte A, sendo $x_i : A_i$ ($i = 1, ..., n$) e $c_j : B_j$ ($j \in J$), a interpretação de τ no pré-feixe de estruturas P com respeito a $(\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$ é o morfismo de pré-feixes

$$\|\tau\|_C^P : (\prod_{i=1}^{n} P_{A_i}) \times (\bigwedge_{j\in J} \mathcal{E}P_{B_j}) \times \mathcal{E}_P\tau \to P_A$$

ou, equivalentemente, se $u := (\bigwedge_{j\in J} EP_{B_j}) \cap (E\mathcal{E}_P\tau)$,

$$\|\tau\|_C^P : (\prod_{i=1}^{n} P_{A_i})|_u \to P_A$$

tal que, se $\vec{s} \in |(\prod_{i=1}^{n} P_{A_i})|_u|$, $\|\tau\|_C^P(\vec{s}) = \|\tau\|_C^{P(E\vec{s})}(\vec{s})$.

Lembremos que, num pré-feixe P_A, $E\overline{P_A} \simeq \mathcal{E}P_A$.

Definimos agora $\|\varphi\|_C^P$, a interpretação em P de uma fórmula φ no contexto C. O suporte de uma fórmula atômica $\varphi = R(\tau_1, ..., \tau_p)$ com respeito a P, $\mathcal{E}_P\varphi$, é calculado por $\bigwedge_{k=1}^{p} \mathcal{E}_P\tau_k$, de acordo com a terceira seção do Capítulo 5.

Usaremos a seguinte notação:
(i) $v := \bigwedge_{j\in J} EP_{B_j}$;
(ii)$u_i := v \cap EP_{A_i}$ $(i = 1, ..., n)$;
(iii) $u := \bigcap_{i=1}^{n} u_i \cap E\mathcal{E}_P\varphi$.

Definição 6.2.3. A interpretação de uma fórmula em contexto $C.\varphi$ é uma função característica

$$\|\varphi\|_C^P : \prod_{i=1}^{n} |(P_{A_i})|_{u_i}| \to \Omega(X)$$

dada, para todo $\vec{s} \in \prod_{i=1}^{n} |(P_{A_i})|_{u_i}|$, por:
(i) se φ é a fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_k)$,

$$\|\varphi\|_C^P(\vec{s}) := [R(\|\tau_1\|_C^P(\vec{s}|_u), ..., \|\tau_k\|_C^P(\vec{s}|_u))]_P \ ;$$

(ii) se φ é $\bigwedge \Theta$, $\|\varphi\|_C^P(\vec{s}) := (\bigwedge\{\|\theta\|_C^P : \theta \in \Theta\})(\vec{s})$;
(iii) se φ é $\bigvee \Theta$, $\|\varphi\|_C^P(\vec{s}) := (\bigvee\{\|\theta\|_C^P : \theta \in \Theta\})(\vec{s})$;
(iv) se φ é $\exists x\psi$, $\|\varphi\|_C^P(\vec{s}) := \bigcup_{t\in|P_A|} \|\psi(x)\|_{(x,\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}^P(t|_v, \vec{s})$;

(v) se φ é $\forall\vec{y}(\psi \to \theta)$, $\|\varphi\|^P_C(\vec{s}) :=$

$$E\vec{s} \cap \bigwedge_{\vec{t} \in \prod_{i=1}^m |P_{C_i}|} (E\vec{t} \to (\|\psi\|^P_{(\vec{y};\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}(\vec{t}|_{v'}, \vec{s}) \to \|\theta\|^P_{(\vec{y},\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}(\vec{t}|_{v'}, \vec{s}))),$$

em que $v' = v \cap \bigcap_{i=1}^m EP_{C_i}$.

Em (iv) e (v), A e C_i ($i = 1, ..., m$) são as sortes das variáveis de quantificação. Note que, ao aplicarmos a noção de α-equivalência, as variáveis de quantificação excluem-se das variáveis do contexto.

No capítulo anterior, generalizamos o conceito de homomorfismo de estruturas e apresentamos a categoria $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathcal{C})$ das estruturas generalizadas sobre uma categoria $\mathcal{C}$. Considere agora $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{pSh}(X))_{[g-ext]}$, que é uma subcategoria plena de $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{pSh}(X))$, cujos objetos $\mathcal{M}$ satisfazem, para todo $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ-Rel:

[g-ext] sejam $u \in \Omega(X)$ e $\vec{t} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{M}A_i(u)$; se $\{u_j\}_{j\in J}$ é uma cobertura aberta de u tal que, para todo $j \in J$, $\vec{t}|_{u_j} \in R^{\mathcal{M}}(u_j)$, então $\vec{t} \in R^{\mathcal{M}}(u)$.

A categoria $\mathbf{pSh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X)$ dos pré-feixes de estruturas conjuntistas generalizadas é equivalente à categoria $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{pSh}(X))_{[g-ext]}$ acima referida, de acordo com a proposição a seguir.

Proposição 6.2.4. $\mathbf{pSh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X) \simeq [\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{pSh}(X))_{[g-ext]}$.

Demonstração. Para simplificar, chamemos $\mathbf{pSh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X)$ de $\mathcal{C}$ e $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{pSh}(X))_{[g-ext]}$ de $\mathcal{D}$.

Devemos mostrar que há dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$.

(i) Definição de F.

Se $P : \Omega(X) \to [\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set})$ é um pré-feixe de estruturas em $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}_P = F(P)$ é a estrutura em $\mathcal{D}$ definida por (veja Definição 6.2.2):

(i.i) se $A \in \Sigma$-Sor, $\mathcal{M}_P A := P_A$;

(i.ii) se $c : B$ é um símbolo de constante, $c^{\mathcal{M}_P} := c^P \in |P_B|$;

(i.iii) se $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ é um símbolo de função, $f^{\mathcal{M}_P} := f^P$;

(i.iv) se $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ é um símbolo de predicado, então $R^{\mathcal{M}_P} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n P_{A_i}$ tal que $R^{\mathcal{M}_P}(u) := R^{P(u)}$ para todo $u \in \Omega(X)$.

Se P e Q são pré-feixes de estruturas e $\eta : P \to Q$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, definimos $h_\eta = F(\eta) : F(P) \to F(Q)$ - ou seja, $h_\eta : \mathcal{M}_P \to \mathcal{M}_Q$ - de tal maneira que, para cada $A \in \Sigma$-Sor e $u \in \Omega(X)$, $((h_\eta)_A)_u := (\eta_u)_A : P(u)A \to Q(u)A$. É fácil verificar que h_η satisfaz as condições de homomorfismo de estruturas generalizadas.

(ii) Definição de G.

Se $\mathcal{M}$ é uma estrutura em $\mathcal{D}$, definimos, para toda sorte A, $P_A := \mathcal{M}A$ e, para todo $u \in \Omega(X)$, a estrutura conjuntista generalizada $P(u)$ da seguinte maneira:

(ii.i) se $A \in \Sigma$-Sor, $P(u)A := P_A(u) = \mathcal{M}A(u)$;

(ii.ii) se c é um símbolo de constante, $c^{P(u)} := c^{\mathcal{M}}(u)$;

(ii.iii) se $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$ é um símbolo de função, $f^{P(u)} := f_u^{\mathcal{M}}$;

(ii.iv) se $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ é um símbolo de predicado, $R^{P(u)} := R^M(u) \subseteq \prod_{i=1}^n P_{A_i}(u)$.

Verifica-se facilmente que, se $v \subseteq u$ em $\Omega(X)$, a família de funções $P_{uv} := \{P(u)A \xrightarrow{(P_{uv})_A} P(v)A : A \in \Sigma\text{-Sor}\}$ induz em $\{P(u)\}_{u \in \Omega(X)}$ uma estrutura de pré-feixe, ou seja, $P : \Omega(X) \to [\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set})$, cujas atribuições são $u \mapsto P(u)$ e $(v \subseteq u) \mapsto P_{uv}$, é um funtor contravariante que satisfaz [g-ext], já que $\mathcal{M}$ cumpre essa condição. Utilizamos então a notação $P_\mathcal{M} = G(\mathcal{M})$.

Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são estruturas generalizadas em $\mathcal{D}$ e $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo de estruturas, definimos $\eta_h = G(h) : G(\mathcal{M}) \to G(\mathcal{N})$ - ou seja, $\eta_h : P_\mathcal{M} \to P_\mathcal{N}$ - como uma família $\eta_h := \{(\eta_h)_u : P_\mathcal{M}(u) \to P_\mathcal{N}(u)\}_{u \in \Omega(X)}$ de tal maneira que, para cada $A \in \Sigma$-Sor e $u \in \Omega(X)$, $((\eta_h)_u)_A := (h_A)_u : P_\mathcal{M}(u)A \to P_\mathcal{N}(u)A$. Para $u \subseteq v$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}A(u) \arrow[r, "(h_A)_u"] \arrow[d, "(\mathcal{M}A)_{uv}"'] & \mathcal{N}A(u) \arrow[d, "(\mathcal{N}A)_{uv}"] \\ \mathcal{M}A(v) \arrow[r, "(h_A)_v"] & \mathcal{N}A(v) \end{tikzcd}$$

comuta em $\mathbf{Set}$ porque $h_A : \mathcal{M}A \to \mathcal{N}A$ é um morfismo em $\mathbf{pSh}(X)$ e, portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd} P_\mathcal{M}(u) \arrow[r, "(\eta_h)_u"] \arrow[d, "(P_\mathcal{M})_{uv}"'] & P_\mathcal{N}(u) \arrow[d, "(P_\mathcal{N})_{uv}"] \\ P_\mathcal{M}(v) \arrow[r, "(\eta_h)_v"] & P_\mathcal{N}(v) \end{tikzcd}$$

comuta em $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set})$. Logo, η_h é um morfismo em $\mathcal{C}$.

Claramente, o funtor G é o inverso de F.

$\square$

Corolário 6.2.5. $\mathbf{Sh}([\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Set}))(X) \simeq [\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Sh}(X))$.

Demonstração. Mostraremos que $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Sh}(X)) = [\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Sh}(X))_{[g-ext]}$, isto é, que toda estrutura de $[\Sigma\text{-}\mathbf{Str}](\mathbf{Sh}(X))$ satisfaz [g-ext]. Para isso, sejam $u \in \Omega(X)$, $\{u_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de u e $\vec{t} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i$. Se $\vec{t}|_{u_j} \in R^{\mathcal{M}}(u_j)$ para todo $j \in J$, o conjunto $\{\vec{t}|_{u_j}\}_{j\in J} \in |R^{\mathcal{M}}|$ é compatível, pois, dados $j, k \in J$, $(\vec{t}|_{u_j})|_{u_k} = \vec{t}|_{u_j \cap u_k} = (\vec{t}|_{u_k})|_{u_j}$. Sendo $R^{\mathcal{M}}$ um subfeixe de $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}A_i$, existe a colagem de $\{\vec{t}|_{u_j}\}_{j\in J}$, a saber, a seção $\vec{s} \in R^{\mathcal{M}}(u)$ para a qual $\vec{s}|_{u_j} = \vec{t}|_{u_j}$ $(j \in J)$. Entretanto, $\vec{t}$ também satisfaz as condições de colagem, já que $E\vec{t} = u$ e $\vec{t}|_{u_j} = \vec{t}|_{u_j}$ $(j \in J)$. Portanto, por unicidade, $\vec{t} = \vec{s} \in R^{\mathcal{M}}(u)$. O resto é conseqüência imediata da proposição anterior.

$\square$

Como resultado da Proposição 6.2.4, se P é um pré-feixe de estruturas e $\mathcal{M}_P$ a estrutura em $\mathbf{pSh}(X)$ associada, P e $\mathcal{M}_P$ satisfazem as mesmas fórmulas. O mesmo fenômeno acontece, evidentemente, com os feixes de estruturas, em virtude do Corolário 6.2.5. Raciocinando dessa maneira, podemos dizer que os pré-feixes e feixes de estruturas constituem outra maneira de pensar as estruturas de pré-feixes e feixes, respectivamente. A Proposição 6.2.4 é, de fato, um metateorema de representação para estruturas generalizadas em $\mathbf{pSh}(X)$. O mesmo vale para o Corolário 6.2.5 em relação $\mathbf{Sh}(X)$.

Capítulo 7

Teoremas de Completude

Por meio da semântica categorial, conseguimos construir objetos e morfismos numa dada categoria $\mathcal{C}$ com determinadas características descritas pela linguagem que estamos interpretando. Partindo de uma assinatura polissortida Σ, que cumpre o papel de dar nomes aos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$, podemos, através de termos e fórmulas, nomear objetos e morfismos mais complicados e reconstruir semanticamente a linguagem formal.

Mas o uso da linguagem formal não se restringe a esse serviço subsidiário; podemos, além disso, trabalhar independentemente com ela, sem recorrer à contraparte semântica, na demonstração de seqüentes a partir de um *sistema formal de dedução*. Este consiste numa linguagem $\mathcal{L}$ associada a um conjunto de *axiomas* (que são seqüentes construídos a partir da linguagem) e *regras de dedução* (que serão vistas posteriormente). Neste capítulo, expomos o sistema formal desenvolvido em [9] no intuito de demonstrar a correção e a completude de acordo com a semântica tradicional. Em seguida, descrevemos as modificações realizadas em [3] que permitiram a demonstração da completude da semântica estendida. O conteúdo das quatro primeiras seções é apenas expositivo, reproduzindo os resultados de [9] e [3]. Por fim, na última seção, esboçamos a completude da semântica generalizada desenvolvida neste trabalho.

O primeiro passo é a introdução do conceito de Ω-estruturas. Para isso, seguimos [9].

7.1 Ω-Estruturas

A noção de Ω-estrutura, que estudaremos a seguir, desempenha papel fundamental na demonstração da completude que apresentamos neste capítulo. Uma Ω-estrutura nada mais é do que uma estrutura com valores numa álgebra de Heyting completa Ω. Como caso particular, obtemos uma B-estrutura, que é uma Ω-estrutura com valores booleanos (neste caso, $\Omega = B$, uma álgebra de Boole completa).

Inicialmente, estabelecemos os *axiomas de igualdade*, que indicamos por [Ax=].

$$\begin{array}{lll}
[\text{Ax=1}] & & \Rightarrow\ x =_A x; \\
[\text{Ax=2}] & x =_A y & \Rightarrow\ y =_A x; \\
[\text{Ax=3}] & x =_A y, \varphi & \Rightarrow\ \varphi[y/x] \quad (\varphi \text{ atômica}).
\end{array}$$

O símbolo $=_A$ representa a igualdade entre termos de sorte A; omitiremos o subscrito sempre que não houver possibilidade de confusão. Observemos que a lei da transitividade é obtida através dos axiomas [Ax=2] e [Ax=3], bastando considerar φ como $x =_A z$ em [Ax=3].

Seja Ω uma cHa; definimos a seguir uma Ω-estrutura usual seguindo os passos de [9].

Definição 7.1.1. Uma *Ω-estrutura* $\mathcal{M}$ para uma assinatura polissortida Σ, esta contando com símbolos de igualdade para cada sorte, consiste em:

(i) *domínios parciais* $|\mathcal{M}|_A$, que são conjuntos não-vazios e disjuntos, para cada sorte A em Σ;

(ii) uma função $f^{\mathcal{M}} : \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i} \to |\mathcal{M}|_A$ para cada símbolo de função $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to A$ em Σ (em particular, um elemento $c^{\mathcal{M}}$ do conjunto $|\mathcal{M}|_A$ para cada símbolo de constante $c : A$);

(iii) uma função $R^{\mathcal{M}} : \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i} \to \Omega$ para cada símbolo de predicado $R \hookrightarrow A_1 \times \ldots \times A_n$ em Σ;

(iv) uma *função de pertinência* $\|(\cdot)\|_A : |\mathcal{M}|_A \to \Omega$ para cada sorte A em Σ, sendo que, para cada símbolo de constante $c : A$, $\|c^{\mathcal{M}}\|_A = 1_\Omega$.

Exigimos também que $\mathcal{M}$ satisfaça os axiomas de igualdade [Ax=] por meio da condição de satisfatibilidade, definida logo mais.

A interpretação de símbolos de igualdade $=_A^{\mathcal{M}}$ em Ω-estruturas é bastante semelhante à função de igualdade definida para Ω-conjuntos (confira no Capítulo 6 ou logo mais). De fato, a interpretação de um símbolo de predicado em geral, numa Ω-estrutura, funciona como uma função característica. A função de pertinência pode ser imaginada, intuitivamente, como uma operação que atribui o grau de pertinência – ou nível de existência – a um elemento de um dado domínio parcial, sempre com relação ao conjunto Ω. No caso de Ω ser o conjunto binário $\{0, 1\}$, caímos na noção clássica de pertinência. Escreveremos simplesmente $\|\vec{a}\|$ para $\bigwedge_{i=1}^{n} \|a_i\|$, em que $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$. Denotaremos a seqüência $(a_1^{\mathcal{M}}, ..., a_n^{\mathcal{M}})$ por $\vec{a}^{\mathcal{M}}$. Se $\tau : A$ é um termo, escreveremos também $|\mathcal{M}|_\tau$ no lugar de $|\mathcal{M}|_A$.

A interpretação de um termo τ na Ω-estrutura $\mathcal{M}$ é definida da maneira usual, como para modelos ordinários (veja [2]). Se $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ é o contexto canônico para τ e $\vec{a} \in \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{x_i}$, indicaremos por $\tau^{\mathcal{M}}[\vec{a}]$ o elemento $\tau^{\mathcal{M}}[a_1/x_1, ..., a_n/x_n]$ do conjunto $|\mathcal{M}|_\tau$.

Definição 7.1.2. A interpretação de um termo em contexto $\vec{x}.\tau$ na Ω-estrutura $\mathcal{M}$, $\tau^{\mathcal{M}} : \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{x_i} \to |\mathcal{M}|_\tau$, é a função definida recursivamente por:

(i) se τ é uma variável x_i do contexto, $\tau^{\mathcal{M}}[\vec{a}] := a_i$;
(ii) se τ é da forma $f(\tau_1, ..., \tau_p)$, $\tau^{\mathcal{M}}[\vec{a}] := f^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}}[\vec{a}], ..., \tau_p^{\mathcal{M}}[\vec{a}])$.

A seguir, descrevemos a interpretação de fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ numa Ω-estrutura $\mathcal{M}$. Por abuso de notação, estamos utilizando os mesmos símbolos para as operações lógicas ($\neg$, $\to$, $\bigwedge$, $\exists$ etc. no lado esquerdo das igualdades na Definição 7.1.3) e para as operações algébricas em Ω (no lado direito das igualdades).

Definição 7.1.3. Seja $\vec{x}.\varphi$ uma fórmula em contexto e $a_i \in |\mathcal{M}|_{x_i}$ ($i = 1, ..., n$). Definimos recursivamente a *interpretação* – ou o *valor* – de φ em $\mathcal{M}$ com respeito a $\vec{a}$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} = \|\varphi[a_1/x_1, ..., a_n/x_n]\|^{\mathcal{M}}$, da seguinte maneira:

(i) se φ é uma fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_m)$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge R^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}}[\vec{a}], ..., \tau_m^{\mathcal{M}}[\vec{a}])$;
(ii) se φ é $\neg\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \neg\|\psi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}}$;
(iii) se φ é $\psi \to \theta$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge (\|\psi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} \to \|\theta[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}})$;

(iv) se φ é $\bigwedge\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigwedge\{\|\psi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;
(v) se φ é $\bigvee\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigvee\{\|\psi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;
(vi) se φ é $\forall y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigwedge\{\|b\| \to \|\psi[b/y, \vec{a}]\|^{\mathcal{M}} : b \in |\mathcal{M}|_y\}$;
(vii) se φ é $\exists y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigvee\{\|b\| \wedge \|\psi[b/y, \vec{a}]\|^{\mathcal{M}} : b \in |\mathcal{M}|_y\}$.
A interpretação das fórmulas $\forall\vec{y}(\psi \to \theta)$ é obtida a partir da combinação dos símbolos primitivos $\forall$ (item vi) e $\to$ (item iii).

Um detalhe importante da definição é o fato de que o valor de cada fórmula é forçado a não superar os valores das interpretações das variáveis, isto é, $\|\varphi\| \leq \|\vec{a}\|$. Isso significa, intuitivamente, que o nível de existência das fórmulas é sempre menor que o nível de existência de suas variáveis interpretadas, em consonância com a abordagem de [4].

Nos itens (v) e (vii) da definição acima, poderíamos ter omitido o fator $\|\vec{a}\|$ sem mudança nos valores. No caso de φ ser uma sentença no contexto canônico $\emptyset$, o valor da seqüência $\vec{a}$ é dado por $\|\vec{a}\| = \bigwedge\emptyset = 1_\Omega$.

Usaremos a notação $\|a = b\|$ para $\|(x =_A y)[a/x, b/y]\|^{\mathcal{M}} = \|a\| \wedge \|b\| \wedge =_A^{\mathcal{M}} (a, b)$, sendo $x, y : A$.

A definição seguinte estabelece a condição de satisfatibilidade para seqüentes (de Gentzen).

Definição 7.1.4. Uma Ω-estrutura *satisfaz* o seqüente $\mathcal{S} = (\Phi \Rightarrow \Psi)$, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$, se $\|(\bigwedge\Phi)[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}} \leq \|(\bigvee\Psi)[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}}$ para toda seqüência $\vec{a} \in \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{x_i}$, sendo $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ o contexto canônico do seqüente $\mathcal{S}$.

De maneira equivalente, podemos dizer que $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ sse $\|\forall\vec{x}(\bigwedge\Phi \to \bigvee\Psi)\|^{\mathcal{M}} = 1_\Omega$.

De acordo com a Definição 7.1.1, uma Ω-estrutura deve satisfazer os axiomas de igualdade [Ax=]. Aplicando, então, a condição de satisfatibilidade a esses axiomas, obtemos:
(a) $\|a = a\| = \|a\|$ para todo $a \in |\mathcal{M}|_A$ ($A \in \Sigma$-Sor);
(b) $\|a = b\| = \|b = a\|$ para todo $a, b \in |\mathcal{M}|_A$;
(c) $\|a = b\| \wedge \|b = c\| \leq \|a = c\|$ para todo $a, b, c \in |\mathcal{M}|_A$;
(d) $\|a = b\| \leq \|a\| \wedge \|b\|$ para todo $a, b \in |\mathcal{M}|_A$;

(e) $\|a = b\| \leq \|f^{\mathcal{M}}(a) = f^{\mathcal{M}}(b)\|$ para todo $a, b \in |\mathcal{M}|_A$, $B \in \Sigma$-Sor e $f : A \to B$ em Σ-Fun;

(f) $\|\vec{a}\| \leq \|f^{\mathcal{M}}(\vec{a})\|$ para todo $\vec{a} \in \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i}$ e $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to A$ em Σ-Fun;

(g) $\|c = c\|^{\mathcal{M}} = \|c^{\mathcal{M}}\| = \|c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}\|$ para toda constante c em Σ-Fun.

Recordemos do Capítulo 3 que um Ω-conjunto – que é um caso particular de H-conjunto – é um conjunto $X \neq \emptyset$ junto com uma função $[\cdot = \cdot]_X : X \times X \to \Omega$ satisfazendo, para todo $x, y, z \in X$:

(i) $[x = y] = [y = x]$;

(ii) $[x = y] \wedge [y = z] \leq [x = z]$.

Para os propósitos deste capítulo, mudaremos de enfoque na definição de morfismos de Ω-conjuntos. A Definição 7.1.5 diverge, desse modo, da apresentada no Capítulo 3. Isso acarreta na formação de outra categoria, que comentaremos a seguir.

Definição 7.1.5. Um *morfismo de Ω-conjuntos* $f : \langle X, [\cdot = \cdot]_X \rangle \to \langle Y, [\cdot = \cdot]_Y \rangle$ é uma função $f : X \times Y \to \Omega$ satisfazendo, para todo $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$:

(i) $f(x, y) \wedge [y = y'] \leq f(x, y')$;

(ii) $f(x, y) \wedge [x = x'] \leq f(x', y)$;

(iii) $f(x, y) \wedge f(x, y') \leq [y = y']$;

(iv) $[x = x] = \bigvee_{y \in Y} f(x, y)$.

De maneira intuitiva, desejamos com a definição acima estabecer uma espécie de função de igualdade entre os elementos de Y e as imagens de X. Em outras palavras, $f(x, y)$ pode ser vista como uma operação $[y = F(x)]_Y$.

Deduzimos do item (iv) da Definição 7.1.5 que $f(x, y) \leq [x = x] \wedge [y = y]$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

A composição $g \circ f : \langle X, [\cdot = \cdot] \rangle \to \langle Z, [\cdot = \cdot] \rangle$ entre $f : \langle X, [\cdot = \cdot] \rangle \to \langle Y, [\cdot = \cdot] \rangle$ e $g : \langle Y, [\cdot = \cdot] \rangle \to \langle Z, [\cdot = \cdot] \rangle$ é dada por $(g \circ f)(x, z) := \bigvee_{y \in Y} (f(x, y) \wedge g(y, z))$ e a identidade $id_{\langle X, [\cdot = \cdot] \rangle}$ por $id_X(x, x') = [x = x']_X$. A categoria resultante, cujos objetos são os Ω-conjuntos e cujos morfismos acabamos de definir, é denotada por SET_Ω.

Algumas construções ordinárias em SET_Ω são:

produto $\langle X, [\cdot = \cdot]\rangle$ de uma família $\{\langle X_i, [\cdot = \cdot]_i\rangle\}_{i\in I}$ de objetos:

$X := \prod_{i\in I} X_i$ (em **Set**);

$[(x_i)_{i\in I} := (y_i)_{i\in I}] := \bigwedge_{i\in I}[x_i = y_i]_i$ para todo $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in X$;

projeção $\pi_j : \langle X, [\cdot = \cdot]\rangle \to \langle X_j, [\cdot = \cdot]_j\rangle$: $\pi_j((x_i)_{i\in I}, x) := [x_j = x]_j$ para todo $(x_i)_{i\in I} \in X$ e $x \in X_j$;

objeto final: há duas construções úteis:

$\mathbb{1}_1 := \langle\{*\}, [\cdot = \cdot]\rangle$, sendo $[* = *] = 1_\Omega$ e $f_X(x, *) = [x = x]_X$ para todo objeto $\langle X, [\cdot = \cdot]\rangle$ e $x \in X$;

$\mathbb{1}_2 := \langle\Omega, [\cdot = \cdot]\rangle$, sendo $[p = q]_\Omega = p \wedge q$ e $g_X(x, p) = [x = x]_X \wedge p$ para todo $p, q \in \Omega$, X e $x \in X$.

Tais objetos são isoformos através de $\varphi(*, p) = p = \psi(p, *)$ $(p \in \Omega)$;

monomorfismos e epimorfismos:

$f : X \to Y$ é um monomorfismo sse $f(x, y) \wedge f(x', y) \leq [x = x']$ para todo $x, x' \in X$ e $y \in Y$;

$f : X \to Y$ é um epimorfismo sse $[y = y] = \bigvee_{x\in X} f(x, y)$ para todo $y \in Y$.

Proposição 7.1.6. **(HIGGS)** *As categorias SET_Ω e $\mathbf{Sh}(\Omega)$ dos feixes sobre Ω são equivalentes.*

Nosso próximo objetivo consiste em mostrar que toda Ω-estrutura $\mathcal{M}$ determina uma estrutura $\mathcal{M}^*$ em SET_Ω de tal maneira que $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ sse $\mathcal{M}^* \models \mathcal{S}$ para todo seqüente $\mathcal{S}$. Definamos então, para cada $A \in \Sigma$-Sor e $a, b \in |\mathcal{M}|_A$:

$$\mathcal{M}^*A := \langle|\mathcal{M}|_A, [\cdot = \cdot]_A\rangle, \text{ em que } [a = b]_A := \|a = b\| \ .$$

Como $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas de igualdade [Ax$=_A$] para cada $A \in \Sigma$-Sor, $[\cdot = \cdot]_A$ obedecerá as condições da definição de Ω-conjunto e, portanto, $\mathcal{M}^*A$ é um Ω-conjunto.

A interpretação de um símbolo de função $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to A$ em $\mathcal{M}^*$ é dada por:

$$f^{\mathcal{M}^*}(\vec{a}, a) := \|\vec{a}\| \wedge \|a = f^{\mathcal{M}}(\vec{a})\|$$

para todo $\vec{a} \in \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i}$ e $a \in |\mathcal{M}|_A$. Em particular, interpretamos uma constante $c : A$ como um morfismo $c^{\mathcal{M}^*} : \mathbb{1}_2 \to \mathcal{M}^*A$ tal que $c^{\mathcal{M}^*}(p, a) = p \wedge \|c^{\mathcal{M}} = a\|$ para todo $p \in \Omega$ e $a \in |\mathcal{M}|_A$.

Para um símbolo de predicado $P \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i$ temos que:

$$P^{\mathcal{M}^*} : \langle X, [\cdot = \cdot]_X \rangle \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}^* A_i;$$

$$X := \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i};$$

$$[\vec{a} = \vec{b}]_X := \|\vec{a} = \vec{b}\| \wedge P^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \text{ para todo } \vec{a}, \vec{b} \in X;$$

$$P^{\mathcal{M}^*}(\vec{a}, \vec{b}) := [\vec{a} = \vec{b}]_X \text{ para todo } \vec{a}, \vec{b} \in X.$$

Concluímos portanto que $\mathcal{M}^*$ é uma Σ-estrutura em SET_Ω.

Consideremos agora uma operação $\mathcal{M}'$ definida em For($\mathcal{L}_{\infty\omega}$) por $\mathcal{M}'(\vec{x}.\varphi) := \langle X, [\cdot = \cdot]_\varphi \rangle$ ($\vec{x}.\varphi$ uma fórmula em contexto), em que $X := \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i}$ e $[\vec{a} = \vec{b}]_\varphi := \|\vec{a} = \vec{b}\| \wedge \|\varphi[\vec{a}]\|^{\mathcal{M}}$ para todo $\vec{a}, \vec{b} \in X$. Novamente, por ser $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura e, por conseguinte, satisfazer os axiomas de igualdade [Ax=], concluímos que, para cada $\vec{x}.\varphi$, $\mathcal{M}'(\vec{x}.\varphi)$ é um Ω-conjunto e, além disso, um subobjeto, em SET_Ω, de $\mathcal{M}^*(\vec{x}) := \langle X, [\cdot = \cdot]_X \rangle$.

Lema 7.1.7. *Se $\mathcal{M}$ é uma Ω-estrutura, $\mathcal{M}'(\vec{x}.\varphi) \simeq \|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}^*}$ para toda fórmula em contexto $\vec{x}.\varphi$.*

Demonstração. Por indução na complexidade de φ.

$\square$

Convém notar que $\|\varphi\|_{\vec{x}}^{\mathcal{M}^*}$ é a interpretação da fórmula em contexto $\vec{x}.\varphi$ na Σ-estrutura $\mathcal{M}^*$, de acordo com a Definição 5.1.4.

Corolário 7.1.8. *Para todo seqüente $\mathcal{S}$, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ sse $\mathcal{M}^* \models \mathcal{S}$.*

7.2 Sistema Formal

Expomos nesta seção um sistema formal de dedução do tipo Gentzen, ou seja, que deriva seqüentes de Gentzen. Seguimos para esse fim a formulação de [9], que parte da perspectiva de que o sistema permita, no sentido de ser correto, modelos com universos parciais vazios.

Definição 7.2.1. Uma teoria T de um fragmento F de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ *deduz* (ou *deriva*) um seqüente $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$ num sistema formal $\mathcal{G}$ (baseado em F), $T \vdash_{\mathcal{G}} \mathcal{S}$, se uma das três condições seguintes é satisfeita:

(i) $\mathcal{S} \in T$;

(ii) $\mathcal{S}$ é um axioma de $\mathcal{G}$;

(iii) $\mathcal{S}$ é obtido, por meio de uma das regras de dedução de $\mathcal{G}$, do conjunto de seqüentes $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Seq}(F)$ (em outras palavras, $\mathcal{S}$ é a *conclusão* e $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}$ é o conjunto das *premissas* de um regra de dedução de $\mathcal{G}$), sendo que, para cada $i \in I$, T deduz $\mathcal{S}_i$ em $\mathcal{G}$.

Afirmamos também que o seqüente $\mathcal{S}$ é *conseqüência sintática* ou um *teorema* de T.

Para uma dada teoria T e um seqüente $\mathcal{S}_0$, escrevemos $T \models \mathcal{S}_0$ para indicar que todo modelo de T é um modelo de $\mathcal{S}_0$ ou, em termos formais, $T \models \mathcal{S}_0$ se, para toda Σ-estrutura $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ para todo seqüente $\mathcal{S} \in T$, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}_0$.

Definição 7.2.2. Um sistema formal $\mathcal{G}$ baseado num fragmento F de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ é *correto* se, para toda teoria T de F e todo seqüente $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$, $T \vdash_{\mathcal{G}} \mathcal{S}$

implica $T \models \mathcal{S}$. E $\mathcal{G}$ é *completo* se, para todo $T \subseteq \mathrm{Seq}(F)$ e $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$, $T \models \mathcal{S}$ implica $T \vdash_{\mathcal{G}} \mathcal{S}$.

O sistema formal construído a partir de fragmentos arbitrários de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ será denotado por $\mathcal{G}^1$. Quando quisermos nos referir a uma teoria particular T de um fragmento F escreveremos simplesmente $\mathcal{G}^1_T$. A possibilidade de admitir modelos com domínios parciais vazios (no sentido conjuntista de interpretação ordinária) está refletida nas próprias regras de inferência adotadas em [9]. Com exceção de duas fundamentais ($[\exists \Rightarrow]$ e $[\Rightarrow \forall]$), todas as regras têm como princípio o fato de que o contexto da conclusão deve subsumir o contexto das premissas, este último definido de maneira óbvia. Essa condição evita qualquer hipótese existencial no nível semântico com respeito aos domínios parciais (confira [12]). Por isso algumas das regras do sistema ordinário de Gentzen foram restringidas.

Fixemos uma teoria T de um fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. Denotaremos por $T^{=}$ a teoria resultante da união de T com todos os axiomas de igualdade. Comecemos por estabelecer os axiomas de $\mathcal{G}^1_T$:

[Ax1]

$$\Phi, \varphi \Rightarrow \Psi, \varphi$$

para toda fórmula atômica φ. Utilizamos, por comodidade, a abreviação Φ, φ no lugar de $\Phi \cup \{\varphi\}$.

O axioma [Ax1] nada mais é do que uma adaptação, para o cálculo de seqüentes, do conhecido axioma lógico $\varphi \rightarrow \varphi$. Ao considerar um determinado seqüente, devemos imaginar, por intuição, que, ao lado esquerdo de $\Rightarrow$, as fórmulas estejam todas conectadas por uma cadeia de conjunções, enquanto que, ao lado direito, por uma cadeia de disjunções.

$[\mathrm{Ax2}]_{T^{=}}$

$$\Phi, \Theta[\vec{\tau}/\vec{x}] \Rightarrow \Psi, \Gamma[\vec{\tau}/\vec{x}]$$

para todo seqüente $\Theta \Rightarrow \Gamma$, no contexto $\vec{x}$, pertencente a $T^{=}$ e para toda seqüência de termos $\vec{\tau}$ do mesmo tipo de $\vec{x}$. Indicamos por $\Theta[\vec{\tau}/\vec{x}]$ o conjunto de fórmulas $\{\theta[\vec{\tau}/\vec{x}] : \theta \in \Theta\}$.

Queremos garantir com $[\mathrm{Ax2}]_{T^{=}}$ que, toda vez que um seqüente pertença a T ou a [Ax=], os seqüentes resultantes da substituição simultânea de termos da linguagem sejam também deduzidos de $\mathcal{G}^1_T$.

As regras de inferência são as seguintes:

$[\bigwedge \Rightarrow]$

$$\frac{\Phi, \bigwedge\Theta, \theta \Rightarrow \Psi}{\Phi, \bigwedge\Theta \Rightarrow \Psi}$$

sempre que $\theta \in \Theta$.

Valendo-nos de nossa intuição algébrica, se $\theta \in \Theta$, então o ínfimo $\bigwedge\Theta$ já está sendo limitado por θ, que pode, por isso, ser eliminado do seqüente.

$[\Rightarrow \bigwedge]$

$$\frac{\{(\Phi \Rightarrow \Psi, \bigwedge\Theta, \theta) : \theta \in \Theta\}}{\Phi \Rightarrow \Psi, \bigwedge\Theta}$$

Esta regra faz referência à lei da absorção em lógica, vale dizer, se $\theta \in \Theta$, então $\bigwedge\Theta \vee \theta = \theta$. $[\Rightarrow \bigwedge]$ pode ser traduzida em: se, para todo $\theta \in \Theta$, $\alpha \leq \theta$, então $\alpha \leq \bigwedge\Theta$.

$[\bigvee \Rightarrow]$

$$\frac{\{(\Phi, \bigvee\Theta, \theta \Rightarrow \Psi) : \theta \in \Theta\}}{\Phi, \bigvee\Theta \Rightarrow \Psi}$$

Esta é uma regra dual à anterior.

$[\Rightarrow \bigvee]$

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \bigvee\Theta, \theta}{\Phi \Rightarrow \Psi, \bigvee\Theta}$$

sempre que $\theta \in \Theta$.

Esta regra é dual a $[\bigwedge \Rightarrow]$.

$[\forall \Rightarrow]$

$$\frac{\Phi, \forall\vec{x}(\varphi \to \psi), \psi[\vec{\tau}/\vec{x}] \Rightarrow \Psi \qquad \Phi, \forall\vec{x}(\varphi \to \psi) \Rightarrow \Psi, \varphi[\vec{\tau}/\vec{x}]}{\Phi, \forall\vec{x}(\varphi \to \psi) \Rightarrow \Psi}$$

sempre que o contexto da conclusão subsumir o contexto das premissas, isto é, sempre que todas as variáveis livres nas premissas ocorrerem também livres na conclusão.

Para justificar esta regra, recorremos a algumas noções de álgebra (de Heyting). Suponhamos que $\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \wedge \psi(t) \leq \beta$ e $\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \leq \beta \vee \varphi(t)$. Logo:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi) &= \alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi(t) \to \psi(t)) \\
&\leq (\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge (\varphi(t) \to \psi(t)) \wedge (\beta \vee \varphi(t)) \\
&= (\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge (((\varphi(t) \to \psi(t)) \wedge \beta) \\
&\quad \vee((\varphi(t) \to \psi(t)))) \\
&\leq (\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge (((\varphi(t) \to \psi(t)) \wedge \beta) \vee \psi(t)) \\
&= ((\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge ((\varphi(t) \to \psi(t)) \wedge \beta)) \\
&\quad \vee((\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge \psi(t)) \\
&\leq ((\alpha \wedge \forall x(\varphi \to \psi)) \wedge ((\varphi(t) \to \psi(t)) \wedge \beta)) \vee \beta \\
&= \beta
\end{aligned}$$

$[\Rightarrow \forall]$

$$\frac{\Phi, \varphi[\vec{y}/\vec{x}] \Rightarrow \Psi, \forall\vec{x}(\varphi \to \psi), \psi[\vec{y}/\vec{x}]}{\Phi \Rightarrow \Psi, \forall\vec{x}(\varphi \to \psi)}$$

sempre que as variáveis da seqüência $\vec{y}$ não ocorrerem livres na conclusão.

De maneira intuitiva, suponhamos que $\alpha \wedge \varphi \leq (\varphi \to \psi) \vee \psi$. Como $\psi \leq \varphi \to \psi$, a expressão acima fica $\alpha \wedge \varphi \leq \varphi \to \psi$, que é equivalente a $(\alpha \wedge \varphi) \wedge \varphi \leq \psi$. Disso, $\alpha \wedge \varphi \leq \psi$ e, portanto, $\alpha \leq \varphi \to \psi$. Quanto à quantificação, devemos pensar na lei lógica $\forall x\varphi \to \varphi[y/x]$.

$[\exists \Rightarrow]$

$$\frac{\Phi, \exists x\varphi, \varphi[y/x] \Rightarrow \Psi}{\Phi, \exists x\varphi \Rightarrow \Psi}$$

sempre que a variável y não ocorrer livre na conclusão.

Voltemos à intuição algébrica e suponhamos que $\alpha \wedge \bigvee_x \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq \beta$. Então, $\alpha \wedge \varphi(y) \leq \beta$ para todo y e, portanto, $\bigvee_y(\alpha \wedge \varphi(y)) = \alpha \wedge \bigvee_y \varphi(y) \leq \beta$.

$[\Rightarrow \exists]$

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \exists x\varphi, \varphi[\tau/x]}{\Phi \Rightarrow \Psi, \exists x\varphi}$$

sempre que o contexto da conclusão subsumir o contexto da premissa.

Para compreendermos esta regra, basta pensarmos na lei da lógica $\varphi[\tau/x] \to \exists x\varphi$.

$[\mathrm{Cut}]_{T^=}$

$$\frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Psi \qquad \Phi \Rightarrow \Psi, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Psi}$$

sempre que cada variável livre de φ ocorrer também livre na conclusão e φ for o resultado de uma substituição $\varphi'[\vec{\tau}/\vec{x}]$, sendo φ' uma fórmula, no contexto $\vec{x}$, pertencente a $\Phi' \cup \Psi'$ para algum seqüente $\Phi' \Rightarrow \Psi'$ de $T^=$.

A regra do corte $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$ é uma variação, para seqüentes, da lei da transitividade lógica: se $\alpha \to \varphi$ e $\varphi \to \beta$, então $\alpha \to \beta$.

Denotaremos por $\mathcal{G}^1(T)$ o menor conjunto de seqüentes fechado sob a operação de conseqüência sintática $\vdash_{\mathcal{G}^1_T}$ em $\mathcal{G}^1_T$. Em outras palavras, $\mathcal{G}^1(T)$ é o menor conjunto de seqüentes do fragmento F tal que:

(i) $T \subseteq \mathcal{G}^1(T)$;

(ii) todos os axiomas de [Ax1] e $[\mathrm{Ax2}]_{T^=}$ pertencem a $\mathcal{G}^1(T)$;

(iii) em qualquer instância de uma das regras de inferência, se as premissas pertencem a $\mathcal{G}^1(T)$, a conclusão também pertence.

7.3 Completude da Semântica Usual

Iniciamos nesta seção a demonstração da completude do sistema formal $\mathcal{G}^1_T$ baseado em fragmentos da linguagem $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, introduzida originalmente em [9]. Antes, porém, exibiremos algumas noções auxiliares.

Definição 7.3.1. Sejam $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto ordenado, $U \subseteq P$ e $p, q, r \in P$:

(i) U é *aberto* se, sempre que $q \in U$ e $p \leq q$, $p \in U$;

(ii) a *regularização* de um conjunto U é definida por $U^* := \{p \in P :$ para todo $q \leq p$, existe $r \in U$ tal que $r \leq q\}$;

(iii) U é *regular* se $U = U^*$.

Observemos que $U \subseteq U^*$ e, se U é aberto, U^* também o é. Além disso, se U e V são abertos em P, $U \subseteq V$ implica $U^* \subseteq V^*$.

Lema 7.3.2. *Se* $P^* := \{U \subseteq P : U$ *é aberto e regular*$\}$, $\langle P^*, \subseteq\rangle$ *é uma cBa de tal maneira que:*

(a) $0_{P^*} := \emptyset$;

(b) $\mathbb{1}_{P^*} := P$;

(c) $\bigvee_{i \in I} U_i^* := (\bigcup_{i \in I} U_i)^*$;

(d) se U *e* V *são abertos,* $U^* \wedge V^* := (U \cap V)^* = U^* \cap V^*$.

Proposição 7.3.3. (CORREÇÃO) *Sejam* F *um fragmento de* $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, T *uma teoria em* F *e* $\mathcal{S}$ *um seqüente de* F. *Se* $\mathcal{S} \in \mathcal{G}^1(T)$ *(ou seja, se* $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$*), então, para toda categoria* $\mathcal{C}$ *com supremos estáveis e para toda estrutura* $\mathcal{M}$ *em* $\mathcal{C}$, *se* F *é estavelmente distributivo com relação a* $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models T$ *implica* $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura nas condições do enunciado. Verifiquemos inicialmente que:

(a) $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas de [Ax1] e $[\text{Ax2}]_{T^=}$;

(b) se $\mathcal{M}$ satisfaz todas as premissas de uma das regras, também satisfaz a conclusão.

Dito isso, e supondo que T deduza $\mathcal{S}$ em $\mathcal{G}^1_T$, demonstramos por indução no comprimento da prova que $\mathcal{M} \models T$ implica $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$. De fato:

(i) se $\mathcal{S} \in T$ e $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ por definição;

(ii) se $\mathcal{S}$ é um axioma, por (a), $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ sempre;

(iii) sejam $\mathcal{S}$ a conclusão e $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{G}^1(T)$ o conjunto das premissas de uma das regras de dedução; suponha, por hipótese de indução, que $\mathcal{M} \models T$ implique $\mathcal{M} \models \mathcal{S}_i$ $(i \in I)$; se $\mathcal{M} \models T$, então $\mathcal{M} \models \mathcal{S}_i$ $(i \in I)$, o que, por (b), implica $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$.

□

Demonstraremos a seguir a completude do sistema $\mathcal{G}^1_T$.

Proposição 7.3.4. (COMPLETUDE) *Sejam* F *um fragmento de* $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, $T \subseteq \mathrm{Seq}(F)$ *e* $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$. *Suponha que, para toda categoria* $\mathcal{C}$ *com supremos estáveis e para toda estrutura* $\mathcal{N}$ *em* $\mathcal{C}$, *se* F *é estavelmente distributivo com relação a* $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models T$ *implica* $\mathcal{N} \models \mathcal{S}$. *Então,* $\mathcal{S}$ *é um teorema de* T, *ou seja,* $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$.

Demonstração. Definiremos uma B-estrutura – ou seja, uma estrutura booleana – $\mathcal{M}$ cujo domínio é constituído pelos próprios termos do fragmento F. Assim, para cada sorte A da assinatura:

$$|\mathcal{M}|_A := \{\tau : \tau \text{ é um termo de sorte } A\} \ .$$

A cada símbolo de função $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to A$ em Σ-Fun associamos uma função $f^{\mathcal{M}} : \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i} \to |\mathcal{M}|_A$ definida por:

$$f^{\mathcal{M}}(\tau_1, ..., \tau_n) := f(\tau_1, ..., \tau_n)$$

para $\tau_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Em particular, para cada símbolo de constante $c : A$, $c^{\mathcal{M}} := c \in |\mathcal{M}|_A$.

Consideremos agora o conjunto $P := \{\mathcal{S} : \mathcal{S}$ é um seqüente de F e $T \nvdash \mathcal{S}\} = \mathrm{Seq}(F) - \mathcal{G}^1(T)$. Se $\mathcal{S}_1 = \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1$ e $\mathcal{S}_2 = \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2$ pertencem a P, estabelecemos que $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ ($\mathcal{S}_1$ *estende* $\mathcal{S}_2$) se $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ e $\Psi_2 \subseteq \Psi_1$. Obtemos dessa forma uma ordem parcial $\langle P, \leq \rangle$.

Seja agora $B := P^*$, de acordo com o Lema 7.3.2. Verificamos que B é uma cBa de subconjuntos abertos e regulares de P. Se $\mathcal{S} = \Phi \Rightarrow \Psi$, denotamos $L_{\mathcal{S}} = \Phi$ e $R_{\mathcal{S}} = \Psi$. E, para cada fórmula $\varphi \in F$, definimos:

$$U_\varphi := \{\mathcal{S} \in P : \varphi \in L_{\mathcal{S}}\}$$

e

$$V_\varphi := \{\mathcal{S} \in P : \varphi \in R_{\mathcal{S}}\} \ .$$

Claramente, U_φ e V_φ são abertos.

A cada símbolo de predicado $R \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i$ associamos a função $R^{\mathcal{M}} : \prod_{i=1}^{n} |\mathcal{M}|_{A_i} \to B$ definida por:

$$R^{\mathcal{M}}(\tau_1, ..., \tau_n) := U^*_{R(\tau_1, ..., \tau_n)}$$

para $\tau_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Se $\vec{\tau}$ é uma seqüência de termos, definimos:

$$U_{\vec{\tau}} := \{\mathcal{S} \in P : \text{toda variável de } \vec{\tau} \text{ ocorre livre em } \mathcal{S}\} \ ,$$

que é, evidentemente, aberto.

A função de pertinência $\| \cdot \|_A : |\mathcal{M}|_A \to B$, para cada sorte A, é definida por:

$$\|\tau\|_A := U_\tau^*$$

para cada termo $\tau : A$. Observemos que, se $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ é o contexto canônico de τ, $\|\tau\|_A = \|\vec{x}\| = \bigwedge_{i=1}^n \|x_i\|$.

Lembremos da Definição 7.1.3 a atribuição de valores (booleanos) às fórmulas. Neste caso, o domínio da estrutura $\mathcal{M}$ é constituído de termos. Portanto, indicaremos por $\|\varphi[\vec{\tau}]\|^{\mathcal{M}} = \|\varphi[\vec{\tau}/\vec{x}]\|^{\mathcal{M}}$ o valor da fórmula em contexto $\vec{x}.\varphi$ com respeito a $\vec{\tau} \in \prod_{i=1}^n |\mathcal{M}|_{x_i}$. Se $\tau_i = x_i$ $(i = 1, ..., n)$, denotaremos $\|\varphi[\vec{x}]\|^{\mathcal{M}}$ simplesmente por $\|\varphi\|$.

Se $\vec{y}.\varphi(\vec{\tau})$ é a fórmula em contexto resultante da substituição simultânea de $\vec{x}$ por $\vec{\tau}$ em $\vec{x}.\varphi$, demonstra-se, por indução na complexidade de φ, que $\|\varphi[\vec{\tau}]\|^{\mathcal{M}} = \|\vec{\tau}\| \wedge \|\varphi(\vec{\tau})\|$.

Desejamos mostrar que $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas de igualdade [Ax=]. Feito isso, estaremos aptos a afirmar que $\mathcal{M}$ é, de fato, uma B-estrutura. Para tanto, levaremos a cabo a tarefa conjunta de demonstrar que $\mathcal{M}$ é um modelo de $T^=$. Antes, porém, precisamos de alguns resultados prévios:

(a) $U_\varphi^* \wedge V_\varphi^* = 0$ para toda fórmula φ.

É suficiente mostrar que $U_\varphi \cap V_\varphi = \emptyset$, pois $U_\varphi^* \wedge V_\varphi^* = (U_\varphi \cap V_\varphi)^*$. Mas, se existisse um $\mathcal{S} \in U_\varphi \cap V_\varphi$, ele seria uma instância do axioma [Ax1], contradizendo o fato de que T não deduz nenhum seqüente $\mathcal{S} \in P$.

(b$_1$) $U_\varphi^* \leq \|\varphi\|$;
(b$_2$) $V_\varphi^* \wedge \|\varphi\| = 0$ para toda fórmula φ.

Demonstra-se por indução na complexidade de φ. Detalhes podem ser vistos em [9].

(c) $U_\varphi^* \vee V_\varphi^* = \|\vec{x}\|$ para toda fórmula em contexto $\vec{x}.\varphi$ satisfazendo as condições da regra do corte $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$, isto é, sendo uma instância de substituição de uma fórmula de um axioma de $T^=$.

Está claro que $U_\varphi^* \vee V_\varphi^* \leq \|\vec{x}\|$. Sejam $\mathcal{S} \in U_{\vec{x}}$ e $\mathcal{S}' = \Phi \Rightarrow \Psi \leq \mathcal{S}$; sendo $U_{\vec{x}}$ aberto, $\vec{x}$ ocorre livre em $\mathcal{S}'$, e então podemos aplicar a regra do corte $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$:

$$\frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Psi \qquad \Phi \Rightarrow \Psi, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Psi} \; .$$

Pela definição de P e pelo fato de $\mathcal{S}' \in P$, uma das duas premissas deve também pertencer a P (caso contrário, $\mathcal{S}'$ seria conseqüência sintática de $T^=$). Dados, então, $\mathcal{S}$ em $U_{\vec{x}}$ e $\mathcal{S}' \leq \mathcal{S}$, existe $\mathcal{S}''$, a saber, $(\Phi, \varphi \Rightarrow \Psi) \in U_\varphi$ ou $(\Phi \Rightarrow \Psi, \varphi) \in V_\varphi$, tal que $\mathcal{S}'' \in U_\varphi \cup V_\varphi$, o que significa que $\mathcal{S} \in (U_\varphi \cup V_\varphi)^* = U_\varphi^* \vee V_\varphi^*$. Portanto, $U_{\vec{x}} \subseteq U_\varphi^* \vee V_\varphi^*$ e $\|\vec{x}\| = U_{\vec{x}}^* \leq U_\varphi^* \vee V_\varphi^*$.

(d) $\|\varphi\| = U_\varphi^* = \|\vec{x}\| \wedge \neg V_\varphi^*$ para toda fórmula φ nas mesmas condições de (c).

De (b$_1$), $U_\varphi^* \leq \|\varphi\|$; de (b$_2$) e (c), $\|\varphi\| \leq U_\varphi^*$, pois $\|\varphi\| \leq \|\vec{x}\|$; isso demonstra que $\|\varphi\| = U_\varphi^*$. O resto é imediato a partir de (c).

Mostraremos agora que $\mathcal{M}$ é um modelo de $T^=$. Sejam $\mathcal{S} = \Phi \Rightarrow \Psi$ um seqüente de $T^=$, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ o contexto canônico de $\mathcal{S}$ e $\vec{\tau} \in \prod_{i=1}^n |\mathcal{M}|_{x_i}$. Calculemos o valor de $\beta = \|\bigwedge \Phi[\vec{\tau}]\|^{\mathcal{M}} \wedge \neg\|\bigvee \Psi[\vec{\tau}]\|^{\mathcal{M}}$. Desmembrando as fórmulas, obtemos:

$$\beta = \|\vec{\tau}\| \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \|\varphi(\vec{\tau})\| \wedge \bigwedge_{\psi \in \Psi} \neg\|\psi(\vec{\tau})\| \; .$$

Se $\vec{x}_\psi$ é o contexto canônico de cada $\psi(\vec{\tau})$, os itens (c) e (d) acima nos informam que $\|\vec{x}_\psi\| \wedge \neg\|\psi(\vec{\tau})\| = V_{\psi(\vec{\tau})}^*$ e, como $\|\vec{\tau}\| \leq \|\vec{x}_\psi\|$, $\|\vec{\tau}\| \wedge \neg\|\psi(\vec{\tau})\| = \|\vec{\tau}\| \wedge V_{\psi(\vec{\tau})}^*$. Assim, deste resultado e novamente de (d):

$$\beta = \|\vec{\tau}\| \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi} U_{\varphi(\vec{\tau})}^* \wedge \bigwedge_{\psi \in \Psi} V_{\psi(\vec{\tau})}^* \; .$$

O fator $\|\vec{\tau}\|$ acima pode ser omitido, pois todo τ_i da seqüência ocorre em alguma $\varphi(\vec{\tau})$ ou $\psi(\vec{\tau})$. Reescrevendo β:

$$\beta = (\bigcap_{\varphi \in \Phi} U_{\varphi(\vec{\tau})} \cap \bigcap_{\psi \in \Psi} V_{\psi(\vec{\tau})})^* \; .$$

Entretanto, se algum $\mathcal{S}' \in P$ pertencesse à intersecção $\bigcap_{\varphi \in \Phi} U_{\varphi(\vec{\tau})} \cap \bigcap_{\psi \in \Psi} V_{\psi(\vec{\tau})}$, ele seria um axioma de $[\mathrm{Ax2}]_{T^=}$, contradizendo a definição de

P. Logo, a intersecção acima é vazia e $\beta = \emptyset^* = 0$. Podemos escrever então, para todo $\mathcal{S} \in T^=$ e $\vec{\tau}$ nas condições descritas, que:

$$\| \bigwedge \Phi[\vec{\tau}] \|^{\mathcal{M}} \leq \| \bigvee \Psi[\vec{\tau}] \|^{\mathcal{M}} ,$$

isto é, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$. Concluímos que $\mathcal{M}$ é um modelo de $T^=$ e, como tal, satisfaz também os axiomas de igualdade [Ax=], sendo por isso uma B-estrutura.

O próximo passo é a demonstração de que $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ sse $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$, para todo seqüente $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$. Seguindo os passos da Proposição 7.3.3, averiguamos que $\mathcal{M}$ satisfaz todos os itens exigidos, e então $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$ implica $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$. Resta mostrar que $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ implica $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$. Suponhamos, por contraposição, que $T \nvdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$ (equivalentemente, $\mathcal{S} \in P$), para um dado $\mathcal{S} = \Phi \Rightarrow \Psi$ cujo contexto canônico é $\vec{x}$, e definamos o aberto $U_{\mathcal{S}} := \{\mathcal{S}' \in P : \mathcal{S}' \leq \mathcal{S}\}$. Por ($\mathrm{b}_1$), $U^*_{\mathcal{S}} \leq \|\varphi\|$ para cada $\varphi \in \Phi$; então, $U^*_{\mathcal{S}} \leq \| \bigwedge \Phi\|$. Usando agora ($\mathrm{b}_2$) e seguindo o mesmo raciocínio, $U^*_{\mathcal{S}} \wedge \| \bigvee \Psi\| = 0$. Portanto:

$$\| \bigwedge \Phi \| \not\leq \| \bigvee \Psi \| ,$$

isto é, $\mathcal{M} \not\models \mathcal{S}$.

Levantemos novamente a hipótese da nossa proposição: seja $T \subseteq \mathrm{Seq}(F)$ uma teoria e $\mathcal{S} \in \mathrm{Seq}(F)$ um seqüente; suponha que, para toda categoria $\mathcal{C}$ com supremos estáveis e para toda estrutura $\mathcal{N}$, se F é estavelmente distributivo, $\mathcal{N} \models T$ implica $\mathcal{N} \models \mathcal{S}$. Seja $\mathcal{M}^*$ a estrutura em SET_B associada à nossa B-estrutura sintática $\mathcal{M}$. Como SET_B é um topos, F é estavelmente distributivo com relação a $\mathcal{M}^*$. Conforme observamos nas linhas anteriores, $\mathcal{M} \models T$, o que, pelo Corolário 7.1.8, equivale a $\mathcal{M}^* \models T$. Portanto, por hipótese, $\mathcal{M}^* \models \mathcal{S}$; isso implica, novamente pelo Corolário 7.1.8, que $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$. Logo, $T \vdash_{\mathcal{G}^1_T} \mathcal{S}$ e a demonstração está concluída.

□

7.4 Completude da Semântica Estendida

Para demonstrar a completude da semântica estendida, Coniglio [3] modificou o cálculo de seqüentes e realizou algumas alterações na definição de Ω-estruturas. Apresentaremos nesta seção apenas as modificações, já que o roteiro para a demonstração é idêntico ao da semântica tradicional.

Comecemos pela definição de Ω-estrutura. No item (iv) da Definição 7.1.1, exigíamos que as constantes recebessem valor 1 em Ω. Passamos, a partir de agora, a admitir constantes com valores parciais (ou seja, menores do que 1_Ω) e atribuímos a cada $c : A$ interpretada em $\mathcal{M}$ o valor:

$$\|c^{\mathcal{M}}\|_A := \bigvee\{\|a\|_A : a \in |\mathcal{M}|_A\} \ .$$

A Definição 7.1.2, da interpretação dos termos, deve ser acrescida do seguinte item:

(iii) se τ é uma constante c do contexto, $\tau^{\mathcal{M}}[\vec{a}] := c^{\mathcal{M}}$.

Devemos modificar a Definição 7.1.3 para que as constantes tomem seus devidos lugares no contexto das fórmulas. Utilizaremos a notação $\|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| = \bigwedge_{j\in J} \|c_j^{\mathcal{M}}\|$.

Definição 7.4.1. Sejam $C.\varphi$ uma fórmula em contexto, sendo $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$, e $a_i \in |\mathcal{M}|_{x_i}$ $(i = 1, ..., n)$. Definimos recursivamente a *interpretação* – ou o *valor* – de $C.\varphi$ em $\mathcal{M}$ com respeito a $\vec{a}$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} = \|\varphi[a_1/x_1, ..., a_n/x_n]\|_C^{\mathcal{M}}$, da seguinte maneira:

(i) se φ é uma fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_m)$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge R^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}}[\vec{a}], ..., \tau_m^{\mathcal{M}}[\vec{a}])$;

(ii) se φ é $\neg\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge \neg\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}}$;

(iii) se φ é $\psi \to \theta$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge (\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} \to \|\theta[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}})$;

(iv) se φ é $\bigwedge\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge \bigwedge\{\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;

(v) se φ é $\bigvee\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge \bigvee\{\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;

(vi) se φ é $\forall y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge \bigwedge\{\|b\| \to \|\psi[b/y, \vec{a}]\|_{(y,\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}^{\mathcal{M}} : b \in |\mathcal{M}|_y\}$;

(vii) se φ é $\exists y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge \bigvee\{\|b\| \wedge \|\psi[b/y, \vec{a}]\|_{(y,\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}^{\mathcal{M}} : b \in |\mathcal{M}|_y\}$.

A interpretação das fórmulas $\forall\vec{y}(\psi \to \theta)$ é obtida a partir da combinação dos símbolos primitivos $\forall$ (item vi) e $\to$ (item iii).

Relembrando a definição de satisfatibilidade para Ω-estruturas (Definição 7.1.4), uma maneira equivalente de caracterizá-la seria ($C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$ é o contexto do seqüente $\mathcal{S}$):

$$\mathcal{M} \models \mathcal{S} \text{ sse } \|\forall \vec{x}(\bigwedge \Phi \to \bigvee \Psi)\|_{\vec{c}}^{\mathcal{M}} = \|\vec{c}^{\mathcal{M}}\| \, .$$

Na categoria SET_Ω dos Ω-conjuntos, faz-se necessário explicitar a noção de subobjeto do objeto final $\mathbb{1}_2 = \Omega$. Conforme vimos, se $p, q \in \Omega$, $[p = q]_\Omega := p \wedge q$. Um Ω-conjunto $\langle X, [\cdot = \cdot]\rangle$ é subobjeto de $\mathbb{1}_2$ sse $X \simeq p^{\leftarrow}$ ($p^{\leftarrow}$ é o ideal gerado por p em Ω) para algum $p \in \Omega$ e, para todo $x, y \in X$, $[x = y] = [x = x] \wedge [y = y]$.

Recordemos do Capítulo 3 as definições de extensão e suporte de um Ω-conjunto $\langle X, [\cdot = \cdot]\rangle$:

$$EX := \bigvee_{x \in X} [x = x] \; ;$$

$$\mathcal{E}X := EX^{\leftarrow} \; ;$$

$$[p = q]_{\mathcal{E}X} := p \wedge q \text{ para todo } p, q \in \mathcal{E}X \; .$$

Se $\mathcal{M}^*$ é a estrutura em SET_Ω associada à Ω-estrutura $\mathcal{M}$, a interpretação de uma constante $c : A$ é um morfismo $c^{\mathcal{M}^*} : \mathcal{E}\mathcal{M}^*A \to \mathcal{M}^*A$ dado, para $p \leq E\mathcal{M}^*A$ e $a \in |\mathcal{M}|_A$, por $c^{\mathcal{M}^*}(p, a) := p \wedge \|a = c^{\mathcal{M}}\|$.

Retomemos as definições referentes ao Lema 7.1.7. Os mesmos comentários e resultados continuam válidos, mas com ligeiras modificações nas definições. Se $C.\varphi$ é uma fórmula em contexto e $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j \in J})$, em que $x_i : A_i$ $(i = 1, ..., n)$ e $c_j : B_j$ $(j \in J)$, definimos $\mathcal{M}^*C := \langle X, [\cdot = \cdot]\rangle$, sendo $X := \{\vec{a} \in \prod_{i=1}^n |\mathcal{M}|_{A_i} : [\vec{a} = \vec{a}] \leq \bigwedge_{j=1}^m E\mathcal{M}^*B_j\}$, e $\mathcal{M}'(C.\varphi) := \langle X, [\cdot = \cdot]_\varphi\rangle$, sendo $[\vec{a} = \vec{b}]_\varphi := \|\vec{a} = \vec{b}\| \wedge \|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}}$. Com essas limitações à interpretação do contexto, estamos refinando a semântica de Ω-conjuntos. O enunciado do Lema 7.1.7 permanece o mesmo, bastando que acrescentemos as constantes aos contextos e às interpretações.

Antes de exibirmos as alterações realizadas no cálculo de seqüentes, precisamos da definição seguinte.

Definição 7.4.2. Seja F um termo, uma fórmula, um seqüente ou um conjunto de seqüentes. Definimos

$$\mathrm{Sor}(F) := \{A : A \text{ é a sorte de alguma variável livre ou constante ocorrendo em } F\}.$$

As modificações nas regras de $\mathcal{G}^1_T$ são as seguintes:

(i) a restrição "o contexto da conclusão deve subsumir o contexto da premissa" não se aplica à regra $[\Rightarrow \exists]$ se $\Phi = \emptyset$.

Isso deve-se ao fato de $\|\tau\|^{\mathcal{M}}_{C;C'} : \mathcal{M}C \times \mathcal{M}C' \to \mathcal{M}A$, pois $\mathcal{E}\mathcal{M}C \wedge \mathcal{E}\mathcal{M}C' \leq \mathcal{E}\mathcal{M}A$, sendo C o contexto da conclusão, C' o contexto canônico de τ e A a sorte de x. Com efeito, se $\|\psi\|^{\mathcal{M}}_{C;C'} \vee \|\exists x\varphi\|^{\mathcal{M}}_{C;C'} \vee \|\varphi(\tau)\|^{\mathcal{M}}_{C;C'} = GV_{\mathcal{M}}[C;C'.\psi] \vee GV_{\mathcal{M}}[C;C'.\exists x\varphi] \vee GV_{\mathcal{M}}[C;C'.\varphi]$, então $(\|\psi\|^{\mathcal{M}}_{C} \vee \|\exists x\varphi\|^{\mathcal{M}}_{C}) \wedge \mathcal{E}\mathcal{M}C \wedge \mathcal{E}\mathcal{M}C' = (GV_{\mathcal{M}}[C.\psi] \vee GV_{\mathcal{M}}[C;x.\varphi]) \wedge \mathcal{E}\mathcal{M}C \wedge \mathcal{E}\mathcal{M}C'$. Logo, $\|\psi\|^{\mathcal{M}}_{C} \vee \|\exists x\varphi\|^{\mathcal{M}}_{C} = GV_{\mathcal{M}}[C.\psi] \vee GV_{\mathcal{M}}[C;x.\varphi]$.

(ii) Na regra $[\forall \Rightarrow]$, a condição "o contexto da conclusão deve subsumir o contexto das premissas" é substituída por: "o conjunto de sortes das premissas deve estar contido no conjunto de sortes da conclusão".

Estamos com isso requerendo que a sorte de cada variável livre ou constante que ocorre nas premissas seja também a sorte de uma variável livre ou constante ocorrendo na conclusão.

(iii) Na regra $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$, a condição "cada variável livre de φ deve ocorrer também livre na conclusão" é substituída por: "o conjunto das sortes de φ deve estar contido no conjunto das sortes da conclusão".

Vale para este item o mesmo comentário de (ii).

O sistema formal resultante é denotado em [3] por $\overline{\mathcal{G}}^1_T$.

Para a demonstração da correção, temos que reexaminar apenas o caso (b_1) descrito na Proposição 7.3.3. As novidades aqui são as regras modificadas $[\Rightarrow \exists]$, $[\forall \Rightarrow]$ e $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$. Além dessas, deve-se verificar todas as regras em que os seqüentes $\Phi \Rightarrow \Psi$ envolvidos podem ter a forma $\Rightarrow \Psi$ ($\Phi = \emptyset$), isto é, que caem na noção de validade débil, discutida na Definição 5.2.8. Estas regras são $[\Rightarrow \bigwedge]$, $[\Rightarrow \bigvee]$, $[\Rightarrow \forall]$, $[\Rightarrow \exists]$ e $[\mathrm{Cut}]_{T^=}$. Detalhes podem ser vistos em [3].

A demonstração da completude é semelhante à descrita na Proposição 7.3.4. As alterações menos evidentes são as seguintes:

(a) os abertos em $\langle P, \leq \rangle$ associados aos termos τ são definidos por:

$$U_\tau := \{\mathcal{S} \in P : \mathrm{Sor}(\tau) \subseteq \mathrm{Sor}(\mathcal{S})\} \ ;$$

(b) a função de pertinência para a B-estrutura sintática $\mathcal{M}$ é uma função $\| \cdot \|_A : |\mathcal{M}|_A \to P^*$ dada, para cada sorte A, por:

$$\|\tau\|_A = \begin{cases} (\bigcup\{U_\kappa : \kappa \in |\mathcal{M}|_A\})^* & \text{se } \tau \text{ é um símbolo de constante} \\ U_\tau^* & \text{c.c.} \end{cases} \ ;$$

(c) os resultados expressados pelos itens (c) e (d) da Proposição 7.3.4 devem incorporar os símbolos de constantes:

$$U_\varphi^* \vee V_\varphi^* = \|\vec{x}\| \wedge \|\vec{c}\| \ ;$$

$$\|\varphi\| = U_\varphi^* = \|\vec{x}\| \wedge \|\vec{c}\| \wedge \neg V_\varphi^* \ .$$

7.5 Esboço para a Completude da Semântica Generalizada

Nesta seção, traçamos um pequeno esboço de como poderia ser feita a demonstração da completude da semântica generalizada. Encontrar o cálculo de seqüentes adequado para essa semântica é um problema a ser resolvido, mas, seja ele qual for – caso exista algum –, pode se adaptar aos procedimentos traçados nas linhas seguintes. Partimos, para o nosso fim, da demonstração de [3], esquematizada na seção anterior, por causa de sua maior aproximação da nossa abordagem.

Seguindo o roteiro da seção anterior, modificamos inicialmente o valor atribuído às constantes $c : A$ interpretadas em $\mathcal{M}$ (Definição 7.1.1). Agora, ao invés de imputarmos ao valor de $c^{\mathcal{M}}$, $\|c^{\mathcal{M}}\|_A$, o supremo dos valores dos membros de $|\mathcal{M}|_A$, temos a liberdade de escolher um $\|c^{\mathcal{M}}\|_A \leq E|\mathcal{M}|_A = \bigvee\{\|a\|_A : a \in |\mathcal{M}|_A\}$.

A Definição 7.4.1, que altera a Definição 7.1.3, precisa ser reescrita e adaptada.

Definição 7.5.1. Sejam $C.\varphi$ uma fórmula em contexto, sendo $C = (\vec{x}; \{c_j\}_{j\in J})$, e $a_i \in |\mathcal{M}|_{x_i}$ $(i = 1, ..., n)$. Definimos recursivamente a *interpretação* – ou o *valor* – de $C.\varphi$ em $\mathcal{M}$ com respeito a $\vec{a}$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} = \|\varphi[a_1/x_1, ..., a_n/x_n]\|_C^{\mathcal{M}}$, da seguinte maneira:

(i) se φ é uma fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_m)$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \|\{c_j^{\mathcal{M}}\}_{j\in J}\| \wedge R^{\mathcal{M}}(\tau_1^{\mathcal{M}}[\vec{a}], ..., \tau_m^{\mathcal{M}}[\vec{a}])$;

(ii) se φ é $\neg\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \neg\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}}$;

(iii) se φ é $\psi \to \theta$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge (\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} \to \|\theta[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}})$;

(iv) se φ é $\bigwedge\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigwedge\{\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;

(v) se φ é $\bigvee\Psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigvee\{\|\psi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} : \psi \in \Psi\}$;

(vi) se φ é $\forall y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigwedge\{\|a\| \to \|\psi[a/y, \vec{a}]\|_{(y,\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}^{\mathcal{M}} : a \in |\mathcal{M}|_y\}$;

(vii) se φ é $\exists y\psi$, $\|\varphi[\vec{a}]\|_C^{\mathcal{M}} := \|\vec{a}\| \wedge \bigvee\{\|a\| \wedge \|\psi[a/y, \vec{a}]\|_{(y,\vec{x};\{c_j\}_{j\in J})}^{\mathcal{M}} : a \in |\mathcal{M}|_y\}$.

A interpretação das fórmulas $\forall\vec{y}(\psi \to \theta)$ é obtida a partir da combinação dos símbolos primitivos $\forall$ (item vi) e $\to$ (item iii).

A única alteração efetuada com relação à Definição 7.4.1 é a eliminação, nas fórmulas compostas, da restrição dos valores das constantes, pois é isso que diferencia a nossa semântica generalizada das demais.

Se $\mathcal{M}^*$ é a estrutura em SET_Ω associada à Ω-estrutura $\mathcal{M}$, a interpretação de uma constante $c : A$ é um morfismo $c^{\mathcal{M}^*} : \langle(\|c^{\mathcal{M}}\|_A)^{\leftarrow}, [\cdot = \cdot]\rangle \to \mathcal{M}^*A$ dado, para $p \leq \|c^{\mathcal{M}}\|_A$ e $a \in |\mathcal{M}|_A$, por $c^{\mathcal{M}^*}(p, a) := p \wedge \|a = c^{\mathcal{M}}\|$.

Na demonstração da completude, a função de pertinência para a B-estrutura sintática $\mathcal{M}$, quando aplicada a uma constante $c : A$, origina um elemento $\|c\|_A \in P^*$ que satisfaz $\|c\|_A \leq (\bigcup\{U_\kappa : \kappa \in |\mathcal{M}|_A\})^*$.

O caminho traçado parece ser o mais seguro para a demonstração da completude da semântica generalizada e está em concordância com os procedimentos anteriores. Em caso de sucesso, o resto do trabalho é puramente mecânico, o que não o faz isento.

Considerações Finais

O propósito da Teoria de Modelos é prover de significado matemático os símbolos formais da lógica. Esses símbolos constituem expressões sintáticas rigorosamente construídas dentro de uma linguagem e fazem uso de um alfabeto que encerra, além dos sinais lógicos e auxiliares, símbolos primitivos que compõem a assinatura dessa linguagem. A tarefa de interpretar uma linguagem formal começa, portanto, com a assinatura. Esta é constituída de sortes, símbolos de funções, símbolos de constantes e símbolos de predicados. O significado dado a esses símbolos depende da escolha do universo matemático e da maneira como os interpretamos. Ao eleger a Teoria de Categorias como discurso matemático, estamos permitindo que os objetos empregados para a interpretação da assinatura da linguagem tenham extensões variáveis.

O significado de um determinado símbolo lógico vai depender fortemente da limitação imposta à extensão do objeto categorial que o interpreta. Na semântica conjuntista usual, um símbolo de constante é interpretado como um elemento do domínio da estrutura considerada. Entretanto, transportar essa noção para o universo categorial requer uma definição de elemento em termos de objetos e morfismos. Uma primeira tentativa de definição, para a qual um elemento de um objeto A é um morfismo da forma $\mathbb{1} \rightarrow A$, encontra uma justificativa elegante: a interpretação de um símbolo de função com domínio vazio é também um morfismo dessa forma. O que mais incomoda nessa definição é o fato de que nem todos os objetos de categoria podem ter elementos; muito pelo contrário: somente os que possuem suporte máximo. Coniglio [3] redefiniu um elemento de A como um morfismo da forma $\mathcal{E}A \rightarrow A$ e introduziu a noção de elementos parciais. Mas não há qualquer motivo relevante para a exclusão de elementos com domínio menor (no sentido algébrico-categorial) do que $\mathcal{E}A$. Além disso, pelas razões expostas no Capítulo 4, $\mathcal{E}A$ não precisa coincidir, necessariamente, com $E\overline{A}$, a extensão do pré-feixe dos elementos de A. É um campo aberto de estudo que merece uma investigação mais detalhada no futuro.

Este trabalho representa um esforço no sentido de oferecer uma contribuição filosófica ao significado das constantes matemáticas. Na nossa concepção, um elemento de A é um membro qualquer do conjunto $\overline{A}$, ou seja, qualquer morfismo da forma $R \hookrightarrow A$, sendo $R \leq E\overline{A}$. Em [1], essa generalização é realizada para o caso específico de pré-feixes e com fértil aplicação a Teoria de Modelos. No entanto, as abordagens são divergentes no que diz respeito à interpretação das fórmulas da linguagem. Em [1], o valor das fórmulas é restrito ao valor de todas as constantes e variáveis livres que compõem os respectivos contextos. No nosso caso, essa restrição se aplica apenas às fórmulas atômicas. As conseqüências dessa discrepância podem ser apreciadas na Seção 5.4. As pesquisas em torno da nova semântica aqui proposta encontram-se no estado inicial. Trabalhos futuros incluem estudá-la mais detalhadamente, descobrir possíveis limitações, procurar outras vantagens e discutir exemplos em categorias particulares, sempre visando a aplicá-la à literatura de Teoria de Modelos. Da mesma forma, a completude foi simplesmente esboçada, faltando uma demonstração pormenorizada e integral.

Um dos maiores interesses deste autor é uma tentativa de ampliação desta semântica generalizada para abarcar as lógicas de ordem superior. O escopo do empreendimento que resultou neste trabalho tem sido, a todo momento, a perquisição da Matemática e esta compreende, em última instância, as lógicas de ordem superior.

Apêndice 1
Definições Básicas em Teoria de Categorias

Reunimos neste apêndice algumas definições elementares de teoria de categorias com o intuito de auxiliar o leitor que compulsa este trabalho. Aos que desejam se aventurar pela área, um bom manual de referência é [5] e um texto mais avançado sobre os tópicos do tema é [6].

Definição A1.1. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste em:

(i) uma coleção de *objetos* $\mathbf{Obj}(\mathcal{C})$;

(ii) uma coleção de *morfismos* $\mathbf{Hom}(\mathcal{C})$;

(iii) duas operações *dom* : $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ (domínio) e *cod* : $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ (contradomínio). Para um dado $f \in \mathbf{Hom}(\mathcal{C})$, se $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$, escrevemos $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ e dizemos que f é um morfismo de A em B;

(iv) uma operação, chamada de *composição*, que atribui a cada par de morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ um morfismo $g \circ f : A \to C$ tal que, para todo morfismo $h : C \to D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

(v) uma operação $id : \mathbf{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Hom}(\mathcal{C})$ tal que, para toda $f : A \to B$ e para toda $g : B \to C$, $id_B \circ f = f$ e $g \circ id_B = g$ (id_B é chamada de *identidade* de B).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
$$

Exemplos de categorias:

(i) a categoria **Set** dos conjuntos tem como objetos todos os conjuntos e como morfismos todas as funções entre os conjuntos;

(ii) a categoria **Top** dos espaços topológicos tem como objetos todos os espaços topológicos e como morfismos todos as funções contínuas entre os espaços topológicos;

(iii) a categoria **Vec** dos espaços vetoriais tem como objetos todos os espaços vetoriais e como morfismos todas as transformações lineares;

(iv) a categoria **Grp** dos grupos tem como objetos todos os grupos e como morfismos todos os homomorfismos entre grupos;

(v) as categorias $\mathbf{pSh}(\Omega)$ dos feixes sobre uma cHa, vista no Capítulo 3, e Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$ das Σ-estruturas sobre uma categoria $\mathcal{C}$, vista no Capítulo 5, são exemplos mais sofisticados.

As categorias são universos matemáticos onde habitam objetos de uma determinada classe. Os morfismos estabelem relações entres esses objetos que preservam sua estrutura.

Se $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$, denotaremos $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{f \in \mathbf{Hom}(\mathcal{C}) : dom(f) = A \text{ e } cod(f) = B\}$.

Definição A1.2. $\mathcal{D}$ é uma *subcategoria* da categoria $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, se $\mathbf{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e, se $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{D})$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Definição A1.3. $\mathcal{D}$ é uma subcategoria *plena* de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ e, para todo $A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{D})$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Definição A1.4. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *monomorfismo* ou um *subobjeto* de B se, para todo par de morfismos paralelos $g, h : C \rightrightarrows A$, $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$. Notação: $f : A \hookrightarrow B$.

A noção de monomorfismo expressa a idéia de função injetora na linguagem das categorias.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos:
(a) se f e g são monomorfismos, $g \circ f$ também o é;
(b) se $g \circ f$ é um monomorfismo, f também o é.

Definição A1.5. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *epimorfismo* se, para todo par de morfismos paralelos $g, h : B \rightrightarrows C$, $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$. Notação: $f : A \twoheadrightarrow B$.

O conceito de epimorfismo é dual ao de monomorfismo e generaliza a idéia de função sobrejetora.

Definição A1.6. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *isomorfismo* se existe um morfismo $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$. Notação: $f : A \simeq B$.

Numa categoria qualquer $\mathcal{C}$, se f é um isomorfismo, então é mono e epi. Mas, ser mono e epi não implica necessariamente ser iso.

Dados objetos A e B; se existe um isomorfismo $f : A \simeq B$, dizemos que A é isomorfo a B e indicamos isso por $A \simeq B$. Algumas propriedades ($A, B, C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ e $f, g \in \mathbf{Hom}(\mathcal{C})$):
(a) id_A é sempre iso;
(b) $A \simeq A$;
(c) $(f^{-1})^{-1} = f$;
(d) $A \simeq B$ implica $B \simeq A$;
(e) se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são isomorfismos, $f \circ g$ também o é e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
(f) $A \simeq B$ e $B \simeq C$ implica $A \simeq C$.

Definição A1.7. Um objeto A é *inicial* numa categoria $\mathcal{C}$ se, para todo objeto B dessa categoria, existe um único morfismo f tal que $f : A \to B$. Notação: $\mathbf{0}$.

O símbolo ! é comumente utilizado para indicar que existe um único morfismo satisfazendo determinada condição.

Em **Set**, o objeto inicial é o conjunto vazio $\emptyset$ porque o conjunto vazio de pares ordenados é a única função com domínio vazio. Numa categoria qualquer, um objeto inicial $\mathbf{0}$ é único a menos de isomorfismo, ou seja, se existe outro objeto $\mathbf{0}'$ de $\mathcal{C}$ que satisfaz a condição da definição anterior, $\mathbf{0}' \simeq \mathbf{0}$. Uma propriedade da forma "único a menos de isomorfismo" é freqüentemente chamada de *categorial* (ou categórica).

Definição A1.8. Um objeto A é *final* numa categoria $\mathcal{C}$ se, para todo objeto B dessa categoria, existe um único morfismo f tal que $f : B \to A$. Notação: $\mathbb{1}$.

O conceito de objeto final é dual ao de objeto inicial. Um objeto final $\mathbb{1}$ é único a menos de isomorfismo. Em **Set**, o objeto final é um conjunto unitário $\{*\}$ qualquer.

Definição A1.9. Um *produto* numa categoria $\mathcal{C}$ de uma família finita *de objetos* $\{A_1, ..., A_n\}$, se existir, é um objeto $\prod_{i=1}^n A_i$ associado a um n-upla de morfismos $\pi_j : \prod_{i=1}^n A_i \to A_j$ $(j = 1, ..., n)$, cada qual chamado de *projeção* j-ésima, de tal maneira que, para todo objeto B junto a uma n-upla de morfismos da forma $f_i : B \to A_i$ $(i = 1, ..., n)$, haverá um único morfismo $(f_1, ..., f_n) : B \to \prod_{i=1}^n A_i$ para o qual $\pi_i \circ (f_1, ..., f_n) = f_i$ $(i = 1, ..., n)$.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^n A_i \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \\
 & B \arrow[ul, "{(f_1,...,f_n)}"] \arrow[u, "f_j"']
\end{tikzcd}$$

Em **Set**, o produto nada mais é do que o produto cartesiano.

Definição A1.10. O *produto* numa categoria $\mathcal{C}$ de uma família finita *de morfismos* $\{f_1 : A_1 \to B_1, ..., f_n : A_n \to B_n\}$, se existir, é um morfismo $\prod_{i=1}^n f_i : \prod_{i=1}^n A_i \to \prod_{i=1}^n B_i$ dado por $(f_1 \circ \pi_{A_1}, ..., f_n \circ \pi_{A_n})$, conforme notação estabelecida na Definição A1.9.

O produto (de objetos ou de morfismos) é uma propriedade categorial. Mas, para sermos precisos, estamos escolhendo uma realização específica que chamaremos de produto *canônico*. Por exemplo, os produtos $A \times B$ e $B \times A$ entre os objetos A e B são isomorfos, mas devemos selecionar apenas um deles para representar o produto (canônico) entre A e B.

Definição A1.11. Um *equalizador* em $\mathcal{C}$ de um par de morfismos paralelos $f, g : A \rightrightarrows B$ é um morfismo $e : E \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ e, para todo morfismo $h : C \to A$ que satisfaz $f \circ h = g \circ h$, existe um único $k : C \to E$ para o qual $e \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & C \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Novamente, o equalizador é uma propriedade categorial. Ademais, todo equalizador é um monomorfismo.

Entendemos por *diagrama* em $\mathcal{C}$ um par $\langle \mathcal{O}, \mathcal{M} \rangle$, sendo $\mathcal{O}$ uma coleção de objetos e $\mathcal{M}$ uma coleção de morfismos entre os objetos de $\mathcal{O}$. Intuitivamente, um diagrama é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ imaginada de maneira gráfica. Um *cone* em um diagrama é um objeto A junto com um morfismo $f_B : A \to B$ para cada objeto B do diagrama, de tal maneira que, para todo morfismo em $\mathcal{M}$ da forma $g : B_1 \to B_2$, $g \circ f_{B_1} = f_{B_2}$.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \\ & A \arrow[ul, "f_{B_1}"] \arrow[u, "f_{B_2}"'] \end{tikzcd}$$

Definição A1.12. Um *limite* do diagrama $\langle \mathcal{O}, \mathcal{M} \rangle$ é um cone $\{f_B : A \to B\}_{B \in \mathcal{O}}$ com a seguinte propriedade: para todo cone da forma $\{f'_B : A' \to B\}_{B \in \mathcal{O}}$, existe um único morfismo $f : A' \to A$ tal que $f_B \circ f = f'_B$ para todo objeto B do diagrama.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'_B"'] & A \arrow[d, "f_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Dizemos que um limite, quando existe, possui a *propriedade universal* em um diagrama. Todo limite é, também, uma propriedade categorial. Exemplos de limite são o objeto final (limite do diagrama vazio), o produto (limite e de um diagrama sem morfismos) e o equalizador (limite de um par de morfismos paralelos).

Definição A1.13. Um *pullback* é um limite do diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, isto é, um par de morfismos $A \xleftarrow{g'} D \xrightarrow{f'} B$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $g \circ f' = f \circ g'$;

(ii) para todo par de morfismos $A \xleftarrow{h} E \xrightarrow{k} B$ que cumpre $g \circ k = f \circ h$, existe um único morfismo $! : E \to D$ tal que $k = f' \circ !$ e $h = g' \circ !$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "!"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Em **Set**, o *pullback* de $f : A \to C$ e $g : B \to C$ é o conjunto $D = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = g(y)\}$ junto com as projeções $f'(x, y) = y$ e $g'(x, y) = x$.

O *pullback* de $A \to C \leftarrow B$ é muitas vezes denotado por $A \times_C B$ e chamado de produto de A e B sobre C.

Definição A1.14. Uma categoria $\mathcal{C}$ é *completa* se todo diagrama em $\mathcal{C}$ tem um limite em $\mathcal{C}$.

Um diagrama finito é aquele que tem um número finito de objetos e um número finito de morfismos entre esses objetos.

Definição A1.15. Um categoria $\mathcal{C}$ é *finitamente completa* ou *cartesiana* se todo diagrama finito em $\mathcal{C}$ tem um limite em $\mathcal{C}$.

É possível demonstrar que, se $\mathcal{C}$ tem objeto final e *pullback* para cada par de morfismo de comum contradomínio, então $\mathcal{C}$ é finitamente completa.

Definição A1.16. Uma categoria $\mathcal{C}$ tem *exponenciação* se:

(i) tem produto entre quaisquer dois objetos;

(ii) para todo par de objetos A e B, há um objeto B^A e um morfismo $ev : B^A \times A \to B$, chamado de *avaliação*, tais que, para todo objeto C e morfismo $g : C \times A \to B$, existe um único $\hat{g} : C \to B^A$ para o qual $ev \circ (\hat{g} \times id_A) = g$.

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "ev"] & B \\ C \times A \arrow[u, "\hat{g}\times id_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Em **Set**, $B^A = \{f : f \text{ é uma função de } A \text{ em } B\}$ e $ev : B^A \times A \to B$ é dada por $ev(f, x) = f(x)$.

Definição A1.17. Uma categoria *cartesiana fechada* é uma categoria cartesiana com exponenciação.

Propriedades de uma categoria cartesiana fechada:

(a) $\mathbf{0} \simeq \mathbf{0} \times A$ para todo objeto A;

(b) se existe um morfismo $A \to \mathbf{0}$, $A \simeq \mathbf{0}$;

(c) se $\mathbf{0} \simeq \mathbb{1}$, a categoria é *degenerada*, isto é, todos os seus objetos são isomorfos;

(d) $\mathbf{0} \to A$ é sempre um monomorfismo;

(e) $A^1 \simeq A$;

(f) $A^0 \simeq \mathbb{1}$;

(g) $\mathbb{1}^A \simeq \mathbb{1}$.

Definição A1.18. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto final $\mathbb{1}$. Um *classificador de subobjetos* para $\mathcal{C}$ é um objeto Ω junto com morfismo $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ que satisfaz o seguinte:

[Ω-Ax] para todo monomorfismo $f : A \hookrightarrow D$, existe um único morfismo $\chi_f : D \to \Omega$ tal que $\mathbb{1} \leftarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} D$ é um *pullback* de $\mathbb{1} \xrightarrow{\top} \Omega \xleftarrow{\chi_f} D$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Em **Set**, o classificador de subjetos usual associa a cada $A \subseteq D$ a função característica $\chi_A : D \to \{0,1\}$.

Um classificador de subobjetos, quando existe numa categoria, é único a menos de isomorfismo.

Definição A1.19. Um *topos elementar* – ou simplesmente *topos* – é uma categoria cartesiana fechada com classificador de subobjetos.

Um topos elementar é uma categoria de conjuntos generalizados. Exemplos de topos são **Set** (conjuntos) e $\mathbf{pSh}(\Omega)$ (pré-feixes sobre uma álgebra de Heyting completa Ω).

Definição A1.20. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, um *funtor covariante* – ou simplesmente *funtor* – de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ é uma função $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que atribui:

(i) a cada objeto A de $\mathcal{C}$ um objeto $F(A)$ em $\mathcal{D}$;

(ii) a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ em $\mathcal{D}$ de tal maneira que:

(ii.i) $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$;

(ii.ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para toda composição $f \circ g$ definida em $\mathcal{C}$.

Um funtor é uma transformação de uma categoria em outra que preserva domínios, contradomínios, identidades e composições. O funtor identidade $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, por exemplo, transforma a categoria $\mathcal{C}$ nela mesma.

Definição A1.21. Um *funtor contravariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função que satisfaz o item (i) da Definição A1.20 e ainda:

(ii') atribui a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(B) \to F(A)$ de tal maneira que:

(ii.i') $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$, como antes;
(ii.ii') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ para toda composição $g \circ f$ definida em $\mathcal{C}$.

Definição A1.22. Se $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ são dois funtores paralelos, uma *transformação natural* $\eta : F \to G$ é uma família de morfismos $\{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in Obj(\mathcal{C})}$ em $\mathcal{D}$, chamados de componentes de η, tal que, para cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Definição A1.23. O funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um *adjunto à esquerda* para o funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (ou, equivalentemente, G é um *adjunto à direita* para F) se há transformações naturais $\eta : id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{D}}$ cujas componentes satisfazem:

(i) para todo morfismo da forma $g : A \to G(B)$ em $\mathcal{C}$ (B um objeto qualquer de $\mathcal{D}$), existe um único morfismo $f : F(A) \to B$ em $\mathcal{D}$ tal que $G(f) \circ \eta_A = g$;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(f)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

(ii) para todo morfismo da forma $f : F(A) \to B$ em $\mathcal{D}$ (A um objeto qualquer de $\mathcal{C}$), existe um único morfismo $g : A \to G(B)$ em $\mathcal{D}$ tal que $\varepsilon_B \circ F(g) = f$.

$$\begin{tikzcd} F(G(B)) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B \\ F(A) \arrow[u, "F(g)"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Notação: $F \dashv G$ ou $G \vdash F$.

Apêndice 2
Definições Básicas em Topologia e Álgebra de Reticulados

Listamos neste apêndice algumas definições básicas de topologia e álgebra de reticulados que podem servir de consulta durante a leitura do texto. Leitores que queiram se aprofundar podem consultar [8] e [10].

A2.1 Espaços Topológicos

Definição A2.1.1. Um *espaço topológico* é um par $\langle X, \Omega(X)\rangle$, em que X é um conjunto e $\Omega(X)$, denominado conjunto dos *abertos* ou *topologia* de X, é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz, para todo $u, v \subseteq X$ e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$:
(i) $\emptyset, X \in \Omega(X)$;
(ii) se $u, v \in \Omega(X)$, então $u \cap v \in \Omega(X)$;
(iii) se $S \subseteq \Omega(X)$, então $\bigcup S \in \Omega(X)$.

Definição A2.1.2. Um conjunto é *fechado* numa topologia se é complementar de um aberto.

A família dos fechados $\Gamma(X)$ de um espaço topológico X satisfaz condições duais às da Definição A2.1.1:
(i') $\emptyset, X \in \Gamma(X)$;
(ii') se $u, v \in \Gamma(X)$, então $u \cup v \in \Gamma(X)$;

(iii') se $S \subseteq \Gamma(X)$, então $\bigcap S \in \Gamma(X)$.

Definição A2.1.3. O *interior* de $Y \in \mathcal{P}(X)$ é a união de todos os abertos contidos em Y, isto é, $Y^\circ := \bigcup\{u \in \Omega(X) : u \subseteq Y\}$.

Y° é o maior aberto contido em Y, ou seja, $Y^\circ \subseteq Y$ e, se u é um aberto contido em Y, $u \subseteq Y^\circ$. Outras propriedades do interior são $(Y, Z \in \mathcal{P}(X))$:
(a) $Y^\circ := \{x \in X : \text{existe } u \in \Omega(X) \text{ tal que } x \in u \subseteq Y\}$;
(b) $Y \in \Omega(X)$ sse $Y^\circ = Y$;
(c) $(Y \cap Z)^\circ = Y^\circ \cap Z^\circ$.

Definição A2.1.4. O *fecho* de $Y \in \mathcal{P}(X)$ é a união de todos os abertos de intersecção não-vazia com Y, isto é, $\overline{Y} := \{x \in X : \text{para todo } u \in \Omega(X), \text{ se } x \in u, \text{ então } u \cap Y \neq \emptyset\}$.

O conceito de fecho é dual ao de interior, isto é, $\overline{Y}$ é o menor fechado que contém Y.

Definição A2.1.5. Y é uma *vizinhança* de $x \in X$ se $x \in Y^\circ$.

Y é um aberto sse, para todo $y \in Y$, existe uma vizinhança aberta u_y de y tal que $u_y \subseteq Y$.

Definição A2.1.6. Uma *cobertura aberta* de $u \in \Omega(X)$ é qualquer conjunto $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega(X)$ para o qual $u = \bigcup_{i \in I} u_i$.

Definição A2.1.7. Seja $Y \in \mathcal{P}(X)$. O *subespaço topológico* gerado por Y em X é o par $\langle Y, \Omega(Y) \rangle$, em que $\Omega(Y) := \{u \cap Y : u \in \Omega(X)\}$.

Todo subespaço topológico é também um espaço topológico.

A2.2 Álgebra de Reticulados

Definição A2.2.1. Uma relação binária $R \subseteq X^2$ é uma *ordem* (*parcial*) em X se, para todo $x, y, z \in X$:

(i) xRx (reflexiva);

(ii) se xRy e yRx, então $x = y$ (anti-simétrica);

(iii) se xRy e yRz, então xRz (transitiva).

Dizemos que o conjunto X é parcialmente ordenado por R.

O conjunto $\mathcal{P}(X)$ é parcialmente ordenado por $\subseteq$ e uma topologia $\Omega(X)$ é parcialmente ordenada também por $\subseteq$.

Definição A2.2.2. Uma ordem R em X é *total* ou *linear* se, para quaisquer $x, y \in X$, xRy ou yRx.

Daqui em diante, representaremos uma ordem R em X por $\leq_X$ (ou simplesmente $\leq$).

Definição A2.2.3. Um elemento x de X é um *limitante superior* (*inferior*) de $Y \subseteq X$ se, para todo $y \in Y$, $y \leq x$ ($x \leq y$, respectivamente).

Definição A2.2.4. x_0 é *supremo* de Y, indicado por $\bigvee Y$, se é limitante superior de Y e, para todo limitante superior x de Y, $x_0 \leq x$.

Definição A2.2.5. x_0 é *ínfimo* de Y, indicado por $\bigwedge Y$, se é limitante inferior de Y e, para todo limitante inferior x de Y, $x \leq x_0$.

Demonstra-se que o supremo de um conjunto, se existir, é único. O mesmo vale para o ínfimo.

O supremo de um conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ é a união $\bigcup S$, enquanto que o ínfimo é a intersecção $\bigcap S$. Numa topologia $\Omega(X)$, o supremo de um conjunto $S \subseteq \Omega(X)$ é $\bigvee S = \bigcup S$ e o ínfimo é $\bigwedge S = (\bigcap S)^\circ$. E numa família de fechados $\Gamma(X)$, o supremo de $S \subseteq \Gamma(X)$ é $\overline{\bigcup S}$ e o ínfimo é $\bigcap S$.

Definição A2.2.6. y_0 é o *máximo* (*mínimo*) de Y, denotado por $max\ Y$ ($min\ Y$), se é limitante superior (inferior) de Y e $y_0 \in Y$.

Todo máximo (mínimo) é, evidentemente, supremo (ínfimo).

Dados $x, y \in X$. Usaremos a seguinte notação:
(i) $x \vee y := \bigvee\{x, y\}$ (se este existir);
(ii) $x \wedge y := \bigwedge\{x, y\}$ (se este existir).

Por definição, as operações $\vee$ e $\wedge$ são comutativas e associativas.

Definição A2.2.7. Um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq\rangle$ é um *reticulado* se, para todo $x, y \in L$, $x \vee y$ e $x \wedge y$ existem e pertencem a L.

De maneira mais geral, $\langle L, \leq\rangle$ é um *semi-reticulado superior* (*inferior*) se $x \vee y$ ($x \wedge y$) existir e pertencer a L.

Definição A2.2.8. Um reticulado L é *completo* se, para todo $S \subseteq L$, o supremo $\bigvee S$ existe.

Como $\bigwedge S = \bigvee\{x \in L : x$ é limitante inferior de $S\}$, o ínfimo também existirá, para todo S, num reticulado completo.

Definição A2.2.9. Um reticulado L é *distributivo* se, para todo $x, y, z \in L$:
(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definição A2.2.10. Um reticulado L tem *zero* (*um*) se existe o $min\ L$ ($max\ L$). Nesse caso, ele será denotado por 0 (1, respectivamente).

Num reticulado L com zero, se $x \in L$, $x \wedge 0 = 0$ e $x \vee 0 = x$. E num reticulado com um, $x \wedge 1 = x$ e $x \vee 1 = 1$.

Se L for completo, sempre haverá o $0 = \bigvee L$ e o $1 = \bigwedge L$.

Os conjuntos ordenados $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ e $\langle \Omega(X), \subseteq \rangle$ são reticulados completos e distributivos com 0 e 1.

Definição A2.2.11. Seja L um reticulado com 0 e $x \in L$. O *pseudocomplemento* de x é definido por $\neg x := max\{y \in L : x \wedge y = 0\}$, se este existir. Um reticulado é *pseudocomplementado* se todo $x \in L$ tem pseudocomplemento.

Se L tiver 1, $\neg 1 = 0$ e $\neg 0 = 1$. Outras propriedades do pseudocomplemento são $(x, y \in L)$:
(a) $x \leq \neg\neg x$;
(b) $\neg x = 1$ implica $x = 0$;
(c) $x \leq y$ implica $\neg y \leq \neg x$;
(d) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$;
(e) $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$;
(f) $\neg\neg\neg x = \neg x$.

Em $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, $\neg A = X - A$ e, em $\langle \Omega(X), \subseteq \rangle$, $\neg u = (X - u)^{\circ}$.

Definição A2.2.12. Sejam L um reticulado com 0 e 1 e $x \in L$. Um elemento $y \in L$ é *complemento* de x em L se $x \wedge y = 0$ e $x \vee y = 1$. L é complementado se todo $x \in L$ tem um complemento.

Demonstra-se que o complemento de um elemento x é único. Além disso, todo complemento é um pseudocomplemento.

O reticulado $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é complementado pois, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, $(X - A) \in \mathcal{P}(X)$.

Definição A2.2.13. Uma *álgebra de Boole* é um reticulado distributivo e complementado.

Algumas propriedades de uma álgebra de Boole B $(x, y \in B)$:
(a) $x = \neg\neg x$;
(b) $x \leq y$ sse $\neg y \leq \neg x$;
(c) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$;
(d) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

O reticulado $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é uma álgebra de Boole completa (cBa).

Definição A2.2.14. Sejam L um reticulado e $x, y \in L$. A *implicação* $x \to y$, se existir, é o elemento $x \to y := max\{z \in L : z \wedge x \leq y\}$. L tem *implicação* quando, para todo $x, y \in L$, existe $x \to y$.

Definição A2.2.15. Uma *álgebra de Heyting* é um reticulado distributivo com 0 e implicação.

Uma álgebra de Heyting H é sempre pseudocomplementada, pois $\neg x = x \to 0$ para todo $x \in H$. Portanto, H tem 1, que é o pseudocomplemento de 0. Outras propriedades de H são ($x, y, z \in H$):
(a) $x \leq y$ sse $x \to y = 1$;
(b) $x \wedge (x \to y) \leq y$;
(c) $y \leq z$ implica $x \to y \leq x \to z$ e $z \to x \leq y \to x$;
(d) $\neg x \vee y \leq x \to y$;
(e) $1 \to x = x$;
(f) $x \to y \leq \neg y \to \neg x$.

O reticulado $\langle \Omega(X), \subseteq \rangle$ é uma álgebra de Heyting completa (cHa) pois, para todo $u, v \in \Omega(X)$, $u \to v = \bigvee \{w \in \Omega(X) : u \cap w \subseteq v\} = ((X - u) \cup v)^{\circ}$.

Observemos também que toda álgebra de Boole é uma álgebra de Heyting, já que em B podemos definir $x \to y := \neg x \vee y$.

Definição A2.2.16. Seja L um reticulado distributivo com 0 e 1. Um conjunto não-vazio $I \subseteq L$ é um *ideal* se, para todo $x, y \in L$:
(i) $x, y \in I$ implica $x \vee y \in I$;
(ii) se $x \in I$ e $y \leq x$, $y \in I$.

Se $x \in L$, chamamos o conjunto $x^{\leftarrow} = \{y \in L : y \leq x\}$ de ideal gerado por x em L.

Referências Bibliográficas

[1] A. B. Brunner: *O Método das Constantes na Teoria dos Modelos em Feixes sobre uma Álgebra de Heyting.* Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 2000.

[2] C. C. Chang, H. J. Keisler: *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[3] M. E. Coniglio: *Categorical Logic with Partial Elements.* In W. A. Carnielli e I. M. L. D'Ottaviano (editores), *Advances in Contemporary Logic and Computer Science: Proceedings of the 11th Brazilian Conference in Mathematical Logic*, pp. 63-82. *Contemporary Mathematics* 235, American Mathematical Society, 1999.

[4] M. P. Fourman, D. S. Scott: *Sheaves and Logic.* In M. P. Fourman, C. J. Mulvey e D. S. Scott (editores), *Applications of Sheaves*, pp. 302-401. Lecture Notes in Mathematics 753, Springer-Verlag, 1979.

[5] R. Goldblatt: *Topoi*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[6] B. Jacobs: *Categorical Logic and Type Theory*, Elsevier Science, 1998.

[7] P. Johnstone: *Notes on Categorical Logic*, Tutorials of WoLLIC '97, Fortaleza, 1997.

[8] J. L. Kelley: *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics 27, Springer-Verlag, 1991.

[9] M. Makkai, G. E. Reyes: *First Order Categorical Logic*, Lecture Notes in Mathematics 611, Springer-Verlag, 1977.

[10] F. Miraglia: *Sheaves and Logic*, 398 pp., submetido a publicação.

[11] C. J. Mulvey: *Intuitionistic Algebra and Representations of Rings*, Memoirs of the American Mathematical Society 148, 1974, pp. 3-57.

[12] D. S. Scott: *Identity and Existence in Intuitionistic Logic*. In M. P. Fourman, C. J. Mulvey e D. S. Scott (editores), *Applications of Sheaves*, pp. 660-696. Lecture Notes in Mathematics 753, Springer-Verlag, 1979.