

LUÍS AUGUSTO SBARDELLINI

O CONTINUUM, OS REAIS E O CONCEITO
DE HOMOGENEIDADE

Tese de Doutorado apresentada ao
Departamento de Filosofia do Ins-
tituto de Filosofia e Ciências Hu-
manas da Universidade Estadual de
Campinas sob a orientação do Prof.
Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à
redação final da Tese defendida e
aprovada pela Comissão Julgadora
em 25/02/2005.

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (orientador)

Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler

Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. Odilon Otávio Luciano (suplente)

Prof^a Dr^a Itala Maria Loffredo D'Ottaviano (suplente)

Fevereiro de 2005

À memória de meus tios

Ina e Sebastião

dedico este trabalho.

Agradecimentos

Ao meu orientador Marcelo Coniglio:

Io li credetti; e ciò che 'n sua fede era,
vegg'io or chiaro sí, come tu vedi
ogni contradizione e falsa e vera. (VI, 19)

Aos professores Itala D'Ottaviano, Walter Carnielli e Michael Wrigley¹:

Tal vero a l'intelletto mio sterne
colui che mi dimostra il primo amore
di tutte le sustanze sempiterno. (XXVI, 37)

Aos professores Hugo Mariano, Odilon Luciano, Ricardo Bianconi, Hermann Haeusler, aos colegas do CLE e a todos que contribuíram para a realização deste projeto:

cosí l'intelligenza sua bontate
moltiplicata per le stelle spiega,
girando sé sovra sua unitate. (II, 136)

Aos meus pais Alomar e Isio, minha irmã Gina, familiares e amigos:

Per tanti rivi s'empie d'allegrezza
la mente mia, che di sé fa letizia
perché può sostener che non si spezza. (XVI, 19)

À minha noiva Priscilla:

l'amor che move il sole e l'altre stelle. (XXXIII, 145) [20]

¹*in memoriam*

Resumo

O presente trabalho é uma investigação filosófica, com desdobramento matemático, acerca da concepção do continuum e dos números reais.

Resguardando a idéia de magnitudes variando continuamente como o atributo essencial de maior relevância histórica para o desenvolvimento conceitual do continuum, propomos sua formalização por intermédio da noção matemática de homogeneidade. Discorremos sobre o emprego da linguagem das categorias como abrigo teórico da investigação, aderindo à sua causa, e examinamos a relação entre a linguagem interna de um topos e o construtivismo matemático.

Com auxílio da teoria local de conjuntos, introduzimos, entre outras definições elementares, a noção de persistência uniforme e estabelecemos uma sucessão de resultados que assistiram a demonstração da homogeneidade das estruturas ordenadas dos racionais, dos reais de Dedekind e dos reais de Cauchy. Ilustramos matematicamente a elaboração abstrata da teoria através do topos dos feixes sobre um espaço topológico.

Abstract

The present thesis is a philosophical investigation, with mathematical development, concerning the conception of the continuum and the real numbers.

Upholding the idea of continuously varying magnitudes as the essential attribute of greatest historical relevance to the conceptual development of the continuum, we propound its formalization by means of the mathematical notion of homogeneity. We discuss the use of the language of categories as theoretic environment of the investigation, defending its cause, and we examine the relation between the internal language of a topos and the mathematical constructivism.

With support of the local set theory, we introduce, among other elementary definitions, the notion of uniform persistence and we establish a series of results which attended the proof of the homogeneity of the ordered structures of the rational numbers, Dedekind reals and Cauchy reals. We illustrate mathematically the abstract elaboration of the theory by means of the topos of sheaves over a topological space.

Lo que vieron mis ojos fue simultáneo:
lo que transcribiré, sucesivo, porque el lenguaje lo es.
Algo, sin embargo, recogeré.
J. L. Borges [8]

Sumário

Introdução geral	3
Notas sobre a linguagem das categorias	5
1 Bosquejo histórico do desenvolvimento conceitual dos números reais	9
1.1 Evolução da idéia de magnitudes variando continuamente . . .	10
1.2 Evolução da idéia de infinitésimo	17
2 Rotunda filosófica	27
2.1 Unidade em multiplicidade	27
2.2 Linguagem interna e construtivismo	29
2.3 Homogeneidade	31
3 Teoria local de conjuntos	35
3.1 Linguagem local	36
3.2 Teoria local	37
3.3 Conjuntos locais	39
3.4 Interpretação de linguagens locais em topoi	41
3.5 Teorema da equivalência	44
3.6 Algumas definições	45
4 Estruturas ordenadas num topos	49
4.1 Noções elementares	50
4.2 Persistência uniforme	52
4.3 Cortes de Dedekind	53
4.4 Objetos estendidos	60

5	Objeto dos números naturais num topos	63
5.1	Objeto dos números naturais	63
5.2	Princípio do mínimo	66
5.3	Enumerabilidade e finitude	70
5.4	Seqüências finitas	71
5.5	Estruturas ordenadas revisitadas	74
5.6	Teorema do vaivém de Cantor	75
6	Sistemas numéricos num topos	79
6.1	Dispersões de Cauchy	79
6.2	Números inteiros e racionais	82
6.3	Números reais	84
6.4	Completamento	86
7	Homogeneidade num topos	89
7.1	Estruturas homogêneas	89
7.2	Estruturas efetivamente homogêneas	93
8	Reais no topos dos feixes sobre um espaço topológico	97
8.1	Feixes de conjuntos sobre um espaço topológico	98
8.2	Feixes constantes	100
8.3	Números naturais em $\mathbf{Fei}(X)$	101
8.4	Números reais em $\mathbf{Fei}(X)$	102
8.5	Homogeneidade em $\mathbf{Fei}(X)$	104
	Epílogo	105
	Referências Bibliográficas	107
	Índice Remissivo	113

Introdução geral

Veramente quant'io del regno santo
ne la mia mente potei far tesoro,
sarà ora materia del mio canto.
Dante: Paradiso I, 10 [20]

Segundo o formalismo matemático, à medida que definições e premissas são independentes da intuição, somos desobrigados de qualquer apreciação gnosiológica dos objetos e relações envolvidos. O intuicionismo, por seu turno, advoga que as expressões empregadas na linguagem matemática exprimem simbolicamente pensamentos ou construções mentais (cf. [32] ou [51]). Independentemente da natureza dos conceitos contemplados pela matemática, muitos são sugeridos, ainda que não controlados, pela intuição. Alguns são, inclusive, inspirados pela percepção direta do mundo exterior, como é o caso do continuum matemático, objeto de estudo deste trabalho.

A história das pesquisas matemáticas em torno do continuum coincide, em grande parte, com a própria história do cálculo diferencial e integral (cf. [9]). O primeiro capítulo deste trabalho oferece um resumo histórico do desenvolvimento conceitual da concepção de continuum matemático, a qual se traduz, em larga medida, na noção de números reais. Nosso propósito é justificar a asserção de que as idéias de magnitudes variando continuamente, por um lado, e de infinitésimo, por outro, são as mais proeminentes, desde um ponto de vista histórico, dentre aquelas que predicam a concepção de continuum matemático. Sustentamos o juízo de que a primeira dessas idéias, a de magnitudes que variam continuamente, sobressai-se entre todas as que participam essencialmente do conceito de continuum, ao passo que a segunda, a de infinitésimo, é a mais relevante entre aquelas cuja participação desse conceito é acidental.

Com base em argumentos que remontam a Kant, contestamos, no Capítulo 2, a caracterização do continuum matemático como uma coleção de pontos.

Propomos, como alternativa, uma abordagem respaldada na linguagem da teoria das categorias, a qual, além de eximir o objeto dos números reais dos elementos (ou pontos), confere maior universalidade a essa construção. Com efeito, os resultados alcançados a partir desse posicionamento formal são mais gerais, e portanto mais confiáveis em termos de consistência interna, do que aqueles logrados pelas mais respeitadas escolas de matemática construtiva (cf. [55]). Com o propósito de driblar as dificuldades práticas que acompanham as construções categoriais dos sistemas numéricos, sobretudo o dos números reais, lançamos mão da linguagem interna de um topos para o desenvolvimento formal da teoria. Sabendo que todo topos pode ser simulado por uma teoria local de conjuntos – assunto que será exposto no Capítulo 3 –, é possível desenrolar o aparato técnico em um cálculo de seqüentes definido numa teoria de conjuntos tipificada e regida pela lógica intuicionista de ordem superior (cf. [4]).

Ainda no Capítulo 2 provocamos uma contenda acerca da vinculação da linguagem interna de um topos ao construtivismo matemático, concluindo pela disparidade de motivações e objetivos entre o matemático que se serve de um ferramental teórico e outro que assume uma postura filosófica.

Na tentativa de caracterizar matematicamente a idéia de magnitudes variando continuamente, que sustentamos ser o principal atributo essencial do continuum, tomamos emprestado da teoria de modelos o conceito de homogeneidade (cf. [6] ou [38]). Dentro de uma visão intuitiva, o continuum subsume magnitudes que variam continuamente se todas as suas partes têm natureza idêntica. Matematicamente, uma estrutura (parcialmente) ordenada só merece a qualificação ‘de números reais’ se ela é de fato homogênea.

Devido ao estado embrionário em que se encontram as investigações no campo de estudo da teoria intuicionista de modelos (exceção honrosa feita a [56], que orientou boa parte das nossas elucidações teóricas), o manejo de técnicas relativamente novas reclamou algum esforço no sentido de preparar o terreno para a demonstração dos resultados centrais. No Capítulo 4 apresentamos algumas definições ordinárias envolvendo estruturas ordenadas num topos, com destaque para a noção original de persistência uniforme, que foi introduzida com o objetivo de estabelecer uma comparação, mais fraca que a relação de isomorfismo porém suficientemente forte, entre as estruturas ordenadas dos números reais. Partindo então de uma definição mais geral de cortes de Dedekind, demonstramos alguns resultados técnicos comportando isomorfismo e persistência uniforme.

Objeto dos números naturais num topos é o tema do Capítulo 5. Uma

sucinta exposição dos axiomas básicos e das noções elementares servem de preâmbulo à demonstração do princípio do mínimo para propriedades decidíveis. Em seguida, resultados abarcando enumerabilidade, finitude e seqüências finitas conduzem a investigação ao ponto culminante do capítulo, o teorema do vaivém de Cantor.

A introdução do objeto dos números naturais num topos viabiliza a definição de sistemas numéricos tais como os inteiros, os racionais e, conforme o método aplicado, diferentes (isto é, não-isomorfas) estruturas de reais. No Capítulo 6, após a definição geral de dispersões de Cauchy por meio de seqüências infinitas e a demonstração de resultados técnicos envolvendo isomorfismo e persistência uniforme, as estruturas (parcialmente) ordenadas dos reais de Dedekind, dos reais de Cauchy e dos reais estendidos aparecem como casos particulares, moldados a partir dos racionais, das construções gerais anteriormente configuradas. Questões atinentes a completamento encorajam o exame de outras modalidades de estruturas de reais, assunto da última seção desse capítulo.

Preparado o terreno teórico, os resultados principais deste trabalho foram deslindados ao longo do Capítulo 7: a demonstração da homogeneidade das estruturas ordenadas dos racionais, dos reais de Dedekind e dos reais de Cauchy. Na última seção exibimos a definição original de estruturas efetivamente homogêneas e mostramos que a estrutura dos racionais é, num certo sentido, a menor dessas estruturas.

As categorias de feixes de conjuntos sobre espaços topológicos são exemplares fundamentais de topoi e constituem rica fonte de modelos para a teoria categorial abstrata. O oitavo e derradeiro capítulo tem dupla incumbência: ratificar o êxito da importação de problemas geométricos para o ambiente lógico e oferecer um exemplo matemático concreto do desenvolvimento abstrato empreendido nos capítulos anteriores.

Notas sobre a linguagem das categorias

Os símbolos metalingüísticos $:=$ e $:\Leftrightarrow$ indicam definição da expressão à esquerda por aquela à direita, sendo o último reservado a expressões de natureza lógica. Em algum momento foi utilizada a abreviatura ‘sse’ significando ‘se, e somente se,’.

No quadro da teoria (clássica ou construtiva) de conjuntos, convençionalmente representamos, na maioria das vezes, elementos com a mesma letra do

conjunto ao qual pertencem, usando porém minúscula, possivelmente indexada. Dessa forma: $a, a', a_0 \in A$; $b', b'', b_1 \in B$; $x, x_1, x_2 \in X$ etc. Também nos servimos desse protocolo em teoria local de conjuntos.

A notação categorial empregada ao longo do texto obedece, em linhas gerais, ao padrão estabelecido pelos clássicos do gênero. A literatura sobre categorias e topoi vem se caracterizando por ostentar trabalhos notáveis, entre os quais destacamos [3], [4], [27], [30], [34] e [36]. Em vernáculo, mencionamos [40].

Categorias arbitrárias são denotadas por $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ etc. Em particular, um topos arbitrário é escrito como $\mathbf{E}$. Algumas categorias particulares são $\mathbf{Cnj}$ (conjuntos e funções), $\mathbf{Fcj}$ (conjuntos finitos e funções), $\mathbf{Top}$ (espaços topológicos e funções contínuas) e $\mathbf{Fei}(X)$ (feixes de conjuntos sobre um espaço topológico X e morfismos)¹; outras são escritas de maneira similar. Objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ são denotados por A, B, C, X, Y, Z etc., enquanto que $f : X \rightarrow Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ representa o morfismo f cujo domínio é X e cujo contradomínio é Y . A classe de todos os morfismos dessa natureza (de X em Y) é denotada por $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ (ou simplesmente $\text{Hom}(X, Y)$, quando o contexto o permitir). Flechas especiais são empregadas para representar monomorfismos ($\hookrightarrow$), epimorfismos ($\twoheadrightarrow$) e isomorfismos ($\simeq$). Em álgebra de subobjetos, o símbolo $\hookrightarrow$ é também usado para subobjetos. Nesse contexto, os símbolos $\wedge, \bigwedge$ (para ínfimos) e $\vee, \bigvee$ (para supremos) assumem seu papel tradicional em reticulados.

Para uma categoria pequena $\mathbf{C}$, a categoria dos pré-feixes (isto é, funtores contravariantes de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{Cnj}$) sobre $\mathbf{C}$ é escrita como $\mathbf{Cnj}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ (ou simplesmente $\widehat{\mathbf{C}}$), em que $\mathbf{C}^{\text{op}}$ é a categoria dual de $\mathbf{C}$. Um objeto de $\mathbf{Cnj}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ é *representável* se é naturalmente isomorfo a um funtor do tipo $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\cdot, A)$. O funtor $\mathbf{y} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cnj}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$, definido por $\mathbf{y}(A) := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\cdot, A)$, é chamado de *imersão de Yoneda*. O lema de Yoneda expressa que há uma correspondência biunívoca entre $\text{Hom}_{\widehat{\mathbf{C}}}(\mathbf{y}(A), P)$ e $P(A)$, em que P é um objeto qualquer de $\mathbf{Cnj}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$.

No intuito de evitar ambigüidade, estamos pressupondo que uma certa realização particular de limite ou co-limite seja especificada para cada diagrama apresentado. Por conseguinte, estamos admitindo, em cada categoria convenientemente equipada, uma computação específica do objeto inicial 0, do objeto final 1, do produto $A \times B$ de A e B , do produto $\prod_{i < n} A_i$ de

¹Na literatura matemática em língua inglesa essas categorias soem ser denotadas por $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Fin}$, $\mathbf{Top}$ e $\mathbf{Sh}(X)$, respectivamente.

$A_0, \dots, A_{n-1}$, do co-produto $A + B$ de A e B , do puxador (em inglês *pull-back*), do empurrador (em inglês *pushout*), do equalizador etc. Da mesma forma, fixamos um determinado classificador Ω de objetos, uma determinada exponencial B^A etc.

A j -ésima projeção $\prod_{i < n} A_i \rightarrow A_j$ do produto $\prod_{i < n} A_i$ é denotada por π_j ; para $n = 1$, escrevemos simplesmente π' e π'' para a primeira e a segunda projeções, respectivamente. Similarmente, ι' e ι'' denotam, respectivamente, a primeira e a segunda inclusões do co-produto de dois objetos. Na falta de um vocábulo mais apropriado, traduzimos o inglês *evaluation* por ‘avaliação’ e representamos esse morfismo por av .

Na esfera dos ofícios mundanos, *categorista* é o profissional que se ocupa da teoria das categorias e *topósofo* da teoria de topos.

Capítulo 1

Bosquejo histórico do desenvolvimento conceitual dos números reais

Oferecemos neste capítulo um resumo histórico do desenvolvimento conceitual dos números reais. Destacamos dois aspectos do continuum que julgamos de importância capital: a idéia de magnitudes que variam continuamente e o uso dos infinitésimos.

Entendemos por *continuum* a concepção física ou filosófica tradicionalmente associada à linha do espaço, do tempo ou de formas similares. O *continuum matemático* é a representação matemática do continuum¹, enquanto que os *números reais* são simplesmente conceitos matemáticos independentes, ainda que inspirados pela concepção do continuum.

De todos os atributos conferidos ao continuum, uns participam *essencialmente* desse conceito, outros *acidentalmente*. Dos primeiros, apontamos como basilar a idéia de *magnitudes variando continuamente*, objeto da primeira seção deste capítulo. Dos atributos que predicam acidentalmente o continuum, ocupa posição central aquele que envolve a noção de *infinitésimo*, assunto da segunda seção. Com o esboço histórico delineado a seguir, para cuja elaboração foram consultadas as fontes [9] e [24], pretendemos corroborar estas afirmações.

¹O termo ‘continuum’ também aparece esporadicamente na literatura matemática significando ‘espaço topológico compacto e conexo’ (cf. [28]).

1.1 Evolução da idéia de magnitudes variando continuamente

Os trabalhos de astronomia dos babilônios revelam o estudo de variações contínuas envolvendo o brilho dos astros e o tempo de repetição de fenômenos. Esses trabalhos reduziam-se, todavia, à construção de tabelas de valores. Para os babilônios, apenas os casos práticos e os números concretos atraíam interesse.

Os gregos, mormente a partir da escola pitagórica, convergiram sua investigação matemática para a noção de congruência em detrimento da noção de número. A matemática grega, por não possuir um conceito de número enquanto medida de entes geométricos, lançava seu olhar para a *razão de magnitudes* (comprimentos, áreas e volumes). A descoberta, pelos próprios pitagóricos, de que a diagonal de um quadrado não pode ser comparada com seus lados em termos da mesma unidade – o problema da incomensurabilidade (cf. [46]) – provocou uma crise no projeto de Pitágoras (c.585-c.500 a.C.) de identificar o reino dos números, assim como eram compreendidos, com o das magnitudes contínuas da geometria. O fator que mais contribuiu para a ruína do pensamento matemático pitagórico foi, contudo, o surgimento da escola filosófica eleata que, embora não essencialmente matemática, ofereceu, através de seu membro Zenão (c.450 a.C.), os famosos argumentos (cf. [48]) contra os quais o presente estado da matemática grega não tinha defesa (cf. [9]).

O próprio Platão (427-347 a.C.) manifestou oposição à concepção pitagórica (cf. [9]), propendendo, em consonância com suas posições, para a consideração da substância imaterial que constitui o *apeiron*² do filósofo jônio Anaximandro (c.610-c.547 a.C.). Nesse sentido, em linguagem contemporânea, o continuum seria interpretado como o fluir do *apeiron*. Do ponto de vista matemático, a idéia de continuum não ganhou verdadeiro desenvolvimento na Grécia por falta de um conceito geral de número; do ângulo filosófico, o obstáculo foi promovido pela oposição – direcionada, como um todo, contra a metafísica especulativa de Platão – de Aristóteles (384-322 a.C.) e da escola peripatética, cujos ensinamentos priorizavam uma visão indutiva da ciência, ainda que Aristóteles repudiasse a indivisibilidade de

²“Em Platão designa o elemento indeterminado. Este elemento é de-terminado e delimitado pelo ‘limite’ (*péras*, princípio limitante). A ‘mistura’ desses dois princípios constitui o ser de todas as coisas.” [48]

segmentos.

Aristóteles, ao explicar o continuum como “o que é divisível em divisíveis que são infinitamente divisíveis” (cf. [9]), nega que o mesmo seja produzido por números na medida em que não pode haver contato entre eles (cf. [1]). É devida ainda a Aristóteles a distinção entre *infinito atual*, cuja existência recusara, e *potencial*, o qual asseverava existir somente nos casos de divisão de magnitudes contínuas “infinitamente” pequenas e de números “infinitamente” grandes (cf. [9]).

Euclides (séc. III a.C.), por sua vez, preteriu em seus *Elementos* as noções de continuidade, variabilidade e mesmo a de infinito, uma vez que as mesmas não encontravam alicerce seguro na matemática grega, caracterizada pela preocupação com a forma e não com a variação.

O aspecto aritmético da matemática encontrou finalmente seu desenvolvimento na civilização hindu, para a qual o problema da incomensurabilidade era irrelevante, uma vez que as raízes irracionais não eram rejeitadas por eles. Devemos também aos hindus a introdução dos números negativos.

Sobre uma espécie de sincretismo entre a matemática grega e a hindu estabeleceu-se a matemática árabe, cuja maior contribuição foi a preservação e a transmissão do legado grego.

Somente a partir dos séculos XII e XIII a Europa cristã passou a ter acesso a traduções latinas dos manuscritos árabes, hindus e gregos, as quais, entretanto, não tiveram uma recepção entusiasmada pelos doutos em razão do interesse então em voga por teologia e metafísica. O período entre 1202 – em que veio a lume o *Liber abaci* de Leonardo de Pisa – e 1494 – em que apareceu a *Summa de arithmetica* de Luca Pacioli – registra, para a matemática, poucos avanços significativos em termos de idéias. A difusão da obra de Aristóteles, todavia, manteve acesa uma profícua discussão sobre o continuum e o infinitésimo. Petrus Hispanus (c.1205-1277), que viria a ser o papa João XXI, designou o infinito atual como categoremático e o infinito potencial como sincategoremático, enquanto que Thomas Bradwardine (1290-1349), abraçando o partido aristotélico, levantou importantes questões sobre a natureza das magnitudes contínuas. Guilherme de Occam (c.1270-c.1349), por outro lado, embora negando a indivisibilidade do continuum, opôs-se a Aristóteles sustentando que a linha reta compunha-se de pontos.

Grande foi a contribuição do século XIV para o campo da filosofia natural, em especial no que diz respeito ao estudo do movimento. Surgiu durante esse período grande número de trabalhos, todos de cunho filosófico, sobre o tema da velocidade instantânea. A introdução da idéia de *ímpeto*, atribuída a João

Buridano (c.1300-1358), provocou uma inversão de abordagem a respeito do conceito de movimento: a doutrina aristotélica, segundo a qual um corpo se mantém em movimento em função da aplicação de uma força externa, deu lugar à noção de que o corpo, uma vez em movimento, conserva esse estado devido a uma tendência interna.

O estudo quantitativo – conquanto em termos filosóficos – da noção de taxa de variação (*latitudo formarum*) ocupou a mente de inúmeros filósofos escolásticos. Essa noção englobava diversos fenômenos de variação, tais como velocidade, aceleração, densidade, intensidade luminosa e temperatura; e a classificação das variações atingia tal nível de detalhamento a ponto de diferenciar *latitudo uniformiter difformiter difformis* (variação não-uniforme com taxa uniformemente não-uniforme) de *latitudo difformiter difformiter difformis* (variação não-uniforme com taxa não-uniformemente não-uniforme). O modelo dos tratados sobre o assunto foi o *Liber calculationum* (posterior a 1328), de Ricardo de Swineshead, o Calculador, no qual encontramos, não obstante o estilo filosófico-escolástico, uma significativa consideração sobre uma série infinita, além do uso de termos, tais como *fluxus* e *fluens*, que antecipam a nomenclatura empregada por Newton trezentos anos depois.

Entre os sábios que promoveram a transição entre o discurso dialético dos escolásticos e a intuição geométrica que levaria à concisão do simbolismo algébrico, destaca-se a figura de Nicolau de Oresme (c.1323-1382), autor do *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum*. Oresme lançou mão de figuras geométricas e sistemas de coordenadas (referindo-se aos eixos perpendiculares como *latitudo* e *longitudo*) para ilustrar o estudo da variação, representou a taxa instantânea de variação por uma linha reta e associou distância percorrida à área sob uma curva representando velocidade-tempo, antecipando-se assim a Galileu.

A adoção generalizada, no século XVI, do sistema numérico e da álgebra hindo-arábicos favoreceu a introdução dos números irracionais, ao passo que as quantidades negativas alcançaram reconhecimento como números somente no século seguinte. Dentro desse panorama, o poder da notação ganhou novo impulso, principalmente na representação numérica por François Viète (cf. [14]).

As considerações do Calculador, Oresme e outros filósofos medievais foram aprofundadas pelo físico Galileu Galilei (1564-1642), que estendeu os argumentos sobre variação de velocidade e os revestiu de roupagem científica. Em seu trabalho *Due nuove scienze* (1638), além de trazer à tona uma profícua discussão sobre a natureza do continuum, enuncia sua famosa asserção de

que os naturais podem ser colocados em correspondência biunívoca com uma parte própria sua, como os quadrados perfeitos. Seu discípulo Evangelista Torricelli (1608-1647), a exemplo de Roberval e Descartes, aplicou o estudo de representações cinemáticas à geometria, especialmente à determinação de tangentes a parábolas e outras curvas.

O desenvolvimento da *geometria analítica* por Fermat e Descartes a partir dos métodos de Viète permitiu a representação de grandezas geométricas (segmentos) por quantidades numéricas, provocando uma revolução na abordagem de problemas que anteriormente eram vistos apenas sob o prisma geométrico. As técnicas de Fermat e Descartes ainda eram dominadas pelas chamadas *constantes indeterminadas* e o uso de variáveis contínuas teve de esperar até a época de Euler.

A aritmetização de problemas geométricos, que teve em Wallis o principal representante na Inglaterra, foi combatida nesse país pelo filósofo Thomas Hobbes (1588-1679) e pelo matemático e teólogo Isaac Barrow (1630-1677). Hobbes, tendo abraçado a concepção pitagórica de número como uma coleção de unidades e desaprovado a compreensão dos objetos matemáticos como entes ideais, recusou veementemente toda forma de aritmetização da geometria, assim como o uso de quantidades irracionais no âmbito da matemática. Barrow, por sua vez, também rejeitando os números irracionais, propugnou um retorno ao modelo euclidiano, não obstante admitisse a inclusão da aritmética, esta entendida em sua concepção clássica, na geometria. Por outro lado, introduziu uma profícua discussão sobre a natureza do tempo enquanto magnitude contínua, podendo ser medida matematicamente por meio do movimento.

Aluno de Barrow em Cambridge, Isaac Newton (1642-1727) soube apreciar, entretanto, os métodos analíticos de Descartes e Fermat e a aritmetização de Wallis, com cuja obra *Arithmetica infinitorum* (1655) tomara contato nos primórdios de sua educação matemática. Newton reconheceu, a exemplo de Wallis, as quantidades irracionais como números de fato, e foi ainda além no que admitiu em seu sistema também as quantidades negativas.

O fundamento do livro *Methodus fluxionum et serierum finitarum*, publicado em 1736 mas escrito em torno de 1671, é a noção de velocidade instantânea ou, de maneira mais geral, a de taxa instantânea de variação, conceito que remete a Galileu. Newton interpretou as quantidades variáveis como resultantes do movimento contínuo de pontos, retas e planos, valendo-se nesse sentido das idéias sobre a natureza do tempo de seu professor Barrow. O termo *fluente*, emprestado do Calculador, foi usado para designar a quan-

tidade gerada pelo *fluxão*, que expressa a taxa de variação. Newton utilizou um ponto, $\dot{x}$, para representar o fluxão da quantidade x , ao passo que o fluxão do fluxão é escrito como $\ddot{x}$; reciprocamente, o fluente do qual x é o fluxão recebeu um traço, $\overset{|}{x}$, e o fluente do fluente dois traços, $\overset{||}{x}$ (cf. [14]).

Através de Leonhard Euler (1707-1783) a teoria formal das *funções* ganha seu espaço na matemática. Libertando o cálculo diferencial de Leibniz de restrições geométricas e diagramáticas, Euler realiza um estudo sistemático de todas as funções elementares, classificando-as e organizando-as junto com suas derivadas e integrais. Foi o primeiro passo de uma marcha, conhecida como *arimetização da análise*, que encontraria seus maiores expoentes nas figuras de Cauchy e Weierstraß.

A primeira definição satisfatória de *função contínua* foi apresentada no século XIX pelo filósofo e matemático austríaco Bernhard Bolzano (1781-1848). Segundo ele, a função f é contínua num intervalo se, para todo x nesse intervalo, a diferença $f(x + \Delta x) - f(x)$ torna-se menor que uma quantidade qualquer para Δx , positivo ou negativo, suficientemente pequeno. Compreendendo que a noção de limite, introduzida por D'Alembert, poderia servir de fundamento para o cálculo, define a derivada f' de uma função f como sendo o valor da razão $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando Δx , positivo ou negativo, se aproxima de zero. Partindo dessas definições, Bolzano exhibe, em 1834, um exemplo de função contínua mas não diferenciável. Realizou também um estudo pioneiro sobre *convergência* de seqüências infinitas, asseverando que, se a diferença entre termos sucessivos da seqüência torna-se menor que uma quantidade qualquer para índices arbitrariamente grandes, então existe um único valor do qual a seqüência se aproxima tanto quanto se queira. Tais considerações tiveram papel significativo na definição clássica dos números reais e sua identificação com o continuum.

No livro *Paradoxien des Unendlichen*, editado postumamente em 1950, Bolzano mostra-se autêntico precursor da teoria de Cantor. Admitindo que o continuum pode ser concebido como um agregado de pontos, retoma a antinomia apontada por Galileu, de que uma parte de uma quantidade infinita pode ser colocada em correspondência biunívoca com o todo, e afirma que os números entre 0 e 5, por exemplo, podem ser emparelhados com aqueles entre 0 e 12.

Lamentavelmente os escritos de Bolzano permaneceram praticamente desconhecidos por mais de meio século, o que impediu uma influência direta. Coube a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que esquadrinhou independen-

temente idéias semelhantes sobre os fundamentos da análise, o papel de estabelecer e difundir, através de seus numerosos escritos, as bases do cálculo diferencial e integral. Na definição de limite delineada em seu *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), invoca as noções de número, variável e função, afastando-se de intuições geométricas; significativamente, assevera que um número irracional é o limite de racionais que dele se aproximam. Partindo então do conceito de limite, confere precisão formal às idéias de derivada, diferencial e continuidade.

Desde os tempos de Newton e Leibniz perdurava uma tendência de se definir a integral como a inversa da derivada, centrando-se nesta última o alicerce formal do cálculo. Revertendo essa prática, Cauchy recuperou o caráter original e independente da *integral definida* como o limite de uma soma, tal como a apreendia a matemática grega: definiu a integral definida S da função contínua $y = f(x)$ no intervalo de x_0 a x como limite de

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1}) \quad (1.1)$$

quando a diferença $x_{i+1} - x_i$ decresce indefinidamente e demonstrou que a derivada da função

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \quad (1.2)$$

é a própria $f(x)$.

Cauchy foi o principal responsável pelo desenvolvimento do estudo das *séries numéricas*, estabelecendo definitivamente a noção de convergência e apresentando uma condição necessária e suficiente para esse fim, o que levava à denominação de *seqüência de Cauchy*. A demonstração desse fato, entretanto, pressupunha a postulação de um sistema numérico condicionalmente completo, isto é, dotado de um axioma que garantisse a existência de um supremo para todo subconjunto limitado superiormente; essa lacuna seria preenchida somente com a construção efetiva do sistema clássico dos reais em 1872.

Uma definição puramente aritmética e logicamente rigorosa de limite foi dada por Karl Weierstraß (1815-1897), que para isso realizou importantes investigações na teoria dos números. Sua compreensão dos números reais como *agregados de unidades de várias espécies* revela uma semelhança curiosa com as seqüências de Cauchy de números racionais; Weierstraß, todavia, identificava os reais com os próprios agregados, evitando assim a circularidade do argumento de Cauchy. A célebre definição de limite enunciada por

Weierstraß é a tradicionalmente ensinada nos cursos de cálculo: um número L é limite de uma função $f(x)$ para $x = x_0$ se, dado um número ϵ arbitrariamente pequeno, é possível encontrar um número δ tal que, para todo x diferindo em menos de δ de x_0 , o valor de $f(x)$ diferirá em menos de ϵ de L .

Quatro décadas depois de Bolzano, Weierstraß exhibe seu famoso exemplo de função contínua mas não diferenciável em qualquer ponto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (1.3)$$

em que a é ímpar, $0 < b < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Esse exemplo alertou a comunidade matemática quanto ao embuste da intuição e à necessidade de uma fundamentação mais rigorosa da análise.

A revisão lógica da análise trouxe à tona graves questões concernentes à própria natureza dos números reais. As incursões de Weierstraß nesse terreno, no que foi sucedido por seu aluno Charles Méray (1835-1911), originaram resultados proveitosos porém expressos de maneira pouco conveniente. O passo decisivo foi dado em 1872 por Georg Cantor (1845-1918) e Eduard Heine (1821-1881), que definiram os números reais como as próprias seqüências de Cauchy de racionais. No mesmo ano, Richard Dedekind (1831-1916) publica seu *Stetigkeit und die Irrationalzahlen*, em que apresenta os números reais como cortes, posteriormente chamados de *cortes de Dedekind*, que dividem os racionais em classes A e B tais que todo elemento de A é menor que todo elemento de B . No bojo desse arcabouço conceitual, no qual as quantidades geométricas dão lugar a grandezas numéricas, o papel outrora básico da magnitude cede espaço à noção de ordem. Com o advento da álgebra moderna e da noção de corpo, essas entidades que definem os números reais mostraram-se enfeixadas pela teoria dos *corpos ordenados completos*; de fato, dois modelos quaisquer dessa teoria redundam ser isomorfos.

Foi em 1874 que Cantor iniciou sua pesquisa na teoria dos conjuntos (*Mengenlehre*). Imbuído de espírito religioso e de profundo respeito à filosofia escolástica, tomou o partido do infinito categoremático (cf. [9]); escolheu o símbolo ω para representar o agregado dos inteiros positivos, que podem ser colocados em correspondência biunívoca com os racionais, e demonstrou o resultado surpreendente de que não existe uma tal correspondência entre os inteiros positivos e os reais. Posteriormente, em razão da crise dos fundamentos desencadeada pelos paradoxos revelados por matemáticos como B. Russell, o trabalho de E. Zermelo e A. Fraenkel, entre outros, levou ao de-

envolvimento da chamada teoria axiomática de conjuntos, sustentáculo de quase toda a matemática contemporânea (cf. [54]).

Para finalizar esta seção, convém mencionar que o *intuicionismo* de L. E. J. Brouwer (cf. [51]) angariou vários adeptos para a causa do *construtivismo* em matemática. Entre as tentativas de acomodar a análise clássica a esses novos preceitos filosóficos, vale destacar os esforços de Errett Bishop (1928-1983) na edificação de uma rigorosa análise construtiva (cf. [7]).

1.2 Evolução da idéia de infinitésimo

Existe uma controvérsia sobre o fato de que os egípcios fizeram uso de considerações envolvendo infinitésimos na descoberta da regra para a determinação do volume de uma pirâmide de base quadrada (cf. [9]). Assim como os babilônios, os egípcios lidaram apenas com casos concretos, sem atingir o nível de abstração que evidencia o uso de variáveis.

Na esteira dos primeiros filósofos jônios, que buscavam um elemento fundamental (uma causa material, segundo Aristóteles [1]), a escola de Abdera formulou a doutrina do *atomismo* físico. Demócrito (c.460-370 a.C.), o maior representante da escola e também um grande matemático, levou essa doutrina para o campo da geometria. Consta que foi o primeiro a determinar a fórmula para o volume da pirâmide para qualquer base poligonal – sempre levando em conta que os gregos não pensavam em termos de magnitudes propriamente, mas de razão entre magnitudes – e presume-se que tenha encontrado o volume do cone por inferência a partir do aumento progressivo do número de lados do polígono de base. Menciona-se ainda o fato de ter ele indagado se as infinitas seções circulares paralelas de um cone seriam iguais; uma resposta positiva transformaria o cone num cilindro e uma negativa – dentro de sua concepção atomista – num sólido com degraus. Outros problemas matemáticos de natureza infinitesimal são imputados a Demócrito, o que o credencia, historicamente, como o primeiro a perseguir essa noção.

O advento da escola eleata, cujos danos causados aos pitagóricos descrevemos na seção 1.1, provocou semelhante prejuízo ao atomismo de Demócrito.

Atribui-se a Eudoxo (408-c.355 a.C.) o desenvolvimento do chamado *método de exaustão* (termo cunhado no século XVII), através do qual se demonstravam fórmulas para áreas e volumes envolvendo curvas e superfícies diversas, tais como círculos, cônicas, espirais, esferas e sólidos de revolução. Entretanto, tal método não consistia em encontrar aproximações progressi-

vas da área ou do volume dessas figuras por meio de polígonos regulares; o procedimento envolvia um raciocínio por redução ao absurdo: quando se supunha um valor diferente daquele conjecturado para a área ou volume em consideração, bastava apresentar um polígono com número suficientemente grande de lados para gerar uma contradição.

O método de exaustão encontrou seu maior cultor na figura de Arquimedes (c.287-212 a.C.), responsável pela demonstração de inúmeras fórmulas, entre as quais a do círculo – em notação moderna $A = \frac{1}{2}rC$, sendo r o raio e C a circunferência. Para a descoberta dessas expressões, Arquimedes, aproveitando-se de seu gênio prático, empregava livremente métodos empíricos e auxiliares, os quais eram considerados por ele, contudo, como expedientes auxiliares sem valor de demonstração; estas eram providas por meio do método de exaustão de Eudoxo. Entre esses métodos heurísticos, muitos faziam uso de argumentos envolvendo infinitésimos, conforme descreve em seu *Método*, redescoberto em 1906. Nesse sentido, Arquimedes pode ser considerado o precursor do cálculo infinitesimal.

A técnica empregada por Eudoxo e Arquimedes, de demonstração de expressões de magnitudes para curvas e superfícies a partir da consideração de polígonos regulares, foi reinterpretada, pelos matemáticos do século XVII, como um procedimento que levou diretamente à invenção do cálculo infinitesimal: uma curva pode ser imaginada como parte de um polígono de infinitos lados, cada qual de comprimento infinitamente pequeno; uma superfície como parte de um poliedro de infinitas faces, cada qual de área infinitamente pequena; e um sólido como um agrupamento de infinitas lâminas, cada qual de espessura infinitamente pequena. Convém enfatizar, contudo, que semelhantes considerações não eram admitidas pelos gregos para efeito de uma demonstração rigorosa. Arquimedes, conquanto antecipasse os procedimentos do cálculo em suas investigações preliminares, compreendia que tais métodos não haviam sido, até então, assentados em alicerce rigoroso, o que só viria a ser conquistado no século XIX.

O declínio do escolasticismo permitiu um revigoramento da filosofia de Platão e de Pitágoras, provocando conseqüentemente uma mudança de caráter no pensamento matemático. A visão da matemática como independente da experiência estimulou livres especulações sobre a natureza do infinito e do infinitésimo. O principal representante dessa vertente de pensamento foi Nicolau de Cusa (1401-1464), para quem a matemática era a forma necessária para a compreensão do universo. Suas reflexões sobre o infinitésimo, enquanto ente atual e não apenas potencial, conduziram à asserção de que o

círculo era o polígono com o maior número de lados. Kepler, sobre quem a influência de Nicolau foi decisiva, recorreu, em seu trabalho *Nova stereometria* (1615), a essa compreensão do círculo para determinação de sua área.

No século XVI, a investigação de centros de gravidade levou Simon Stevin (1548-1620) e Luca Valerio (c.1552-1618), entre outros, a uma generalização do método de inscrição de áreas desenvolvido por Arquimedes. Diferente foi a inspiração de Johannes Kepler (1571-1630), cujo sentimento religioso, ao lado de um elemento especulativo de origem platônica, insuflou conteúdo divino à sua cosmologia e, por conseguinte, sua compreensão matemática, o que resultou na modificação dos procedimentos de Arquimedes. Aplicando considerações envolvendo infinitésimos, calculou áreas e volumes de diversos sólidos e superfícies, ora atacando problemas antigos de maneira original, ora estendendo seu trabalho a figuras que não foram freqüentadas pelos gregos. Concebendo a esfera como constituída de infinitos cones infinitesimais, determinou seu volume como sendo – em notação moderna – $V = \frac{1}{3}rA$, em que r é o raio e A a área da superfície; aplicou o mesmo raciocínio baseado em infinitésimos para calcular o volume do cone, do cilindro e do toro; e ampliou a gama de problemas tratados a partir da consideração de sólidos gerados pela rotação de um círculo em torno de uma corda, encontrando seus volumes.

Em sua *Doliometria* (ou *Stereometria doliorum*, 1615), Kepler contribui decisivamente para o advento do cálculo diferencial. Mas influência maior exerceu o livro *Geometria indivisibilibus* (1635), de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), aluno de Galileu. No volume supracitado *Due nuove scienze*, Galileu fizera importantes incursões na discussão sobre o infinito e o infinitésimo, alertando para a ilegitimidade da comparação entre quantidades finitas e infinitas e defendendo a causa dos infinitésimos enquanto constituintes das magnitudes contínuas. Cavalieri, entretanto, adotou uma postura agnóstica com relação ao infinito, valendo-se dos *indivisíveis* – termo que usa para elementos infinitesimais – unicamente como uma noção auxiliar e para efeito de demonstração, porquanto os mesmos não apareciam na conclusão dos resultados. Com efeito, a atitude de Cavalieri, evitando as especulações de Galileu e rejeitando as incursões metafísicas de Kepler, personifica o espírito independente da matemática moderna. Na obra *Exercitationes geometricae sex* (1647), sempre servido dos indivisíveis, Cavalieri resolve o desafio proposto por Kepler de encontrar o volume do sólido obtido pela rotação de um segmento de parábola em torno de sua corda. A generalização do método empregado na solução desse problema – vale dizer, a

razão entre as somas de potências dos lados de um palarelogramo e as somas de potências dos lados de um dos triângulos constituintes – levou a considerações que transcendem o âmbito geométrico originalmente perscrutado por Cavalieri. O processo, se apreciado com um olhar algébrico, pressupõe casos particulares do binômio de Newton e redundante, em última instância, na regra modernamente denotada por $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$; ainda fiel ao espírito geométrico, Torricelli, em seu tratado *De infinitis hyperbolis* (1646), generalizou as considerações de Cavalieri para todos os racionais (exceto, evidentemente, -1).

A arte da demonstração beneficiou-se muito da argúcia de Torricelli, em particular no que tange ao uso dos infinitésimos. Oferecendo diversas demonstrações para um mesmo problema – em *De dimensione parabolae*, apresenta nada menos do que vinte e uma para a quadratura da parábola –, revela a clareza e a simplicidade na abordagem por infinitésimos, embora tivesse consciência da ausência de rigor acarretada por tal procedimento.

No decurso do século XVII, a divulgação generalizada dos métodos infinitesimais resultou na pesquisa simultânea, e muitas vezes independente, de numerosos matemáticos sobre o tema. A prioridade cronológica de uma ou outra técnica ou descoberta é objeto de ininterrupto debate, de tal forma que a exposição mais profícua dos fatos, dentro de uma perspectiva que salienta a relevância histórica dos infinitésimos, é, do nosso ponto de vista, um levantamento sucinto dos autores mais importantes ou influentes.

O conceito de *limite* começou a tomar vulto no livro *Opus geometricum*, de Gregório de Saint-Vincent (1584-1667), no qual enuncia, pela primeira vez, que uma série infinita pode ser considerada como tendo estritamente uma soma, e explica por esse estratagema o paradoxo de Aquiles e da tartaruga. Seu discípulo Andreas Tacquet (1612-1660), a despeito de manter uma postura conservadora diante dos infinitésimos, aperfeiçoou seus pensamentos sobre a idéia de limite.

Ao lado de Fermat e Pascal, a figura de Giles Persone de Roberval (1602-1675) representa um marco na história da matemática na medida em que combina, de maneira engenhosa, as considerações essencialmente geométricas de Cavalieri, Torricelli e outros com um forte interesse pela teoria dos números, o que representa um retorno ao projeto pitagórico. Em virtude da publicação tardia (1693), a circulação de seu *Traité des indivisibles* foi restrita, embora tenha influenciado Pascal.

O método de Roberval consistia em associar um número crescente de pontos a um segmento de reta; considerando esse segmento como constituído

de um número infinito de pequenos segmentos (infinitésimos), ele encontrou, por aproximação de um limite pelo aumento do número de pontos, a área determinada por várias curvas – inclusive $y = x^n$ –, além de volumes e centros de gravidade. A aplicação de seu método aritmético de infinitésimos levou a resultados que são equivalentes a regras para integrais definidas de funções algébricas e trigonométricas. Roberval também ampliou o quadro de elementos infinitesimais utilizados, empregando, em seus cálculos e demonstrações, triângulos, paralelogramos, paralelepípedos, cilindros e cascas cilíndricas concêntricas.

Nova técnica aritmética de infinitésimos foi desenvolvida por Blaise Pascal (1623-1662), desta vez por intermédio do triângulo aritmético que leva o seu nome. No trabalho *Potestatum numericarum summa* (1654), aplica sua técnica à determinação da integral definida de x^n , lançando mão de um artifício, também aplicado por Roberval, que viria a exercer decisiva e reconhecida influência sobre Leibniz: o desprezo de infinitésimos (ou diferenças) de ordem superior. O elemento místico-religioso pervade o pensamento de Pascal, e se faz sentir em *De l'esprit géométrique*, na qual tece elucidativas exposições sobre a natureza do infinito e dos infinitésimos, relacionando as duas noções.

O desenvolvimento da geometria analítica possibilitou a Pierre de Fermat (c.1601-1665) associar grandezas geométricas infinitesimais a números ou constantes infinitesimais. As vantagens dessa abordagem são ilustradas pelo seu brilhante método de determinação de valores máximos e mínimos. Embora ainda vigorasse o uso das constantes indeterminadas, o argumento de Fermat, quase idêntico àquele usado no cálculo diferencial, consistia em acrescentar um infinitésimo numérico à incógnita e, efetuados os cancelamentos e simplificações, anular as diferenças (infinitesimais). Procurando justificar logicamente seu procedimento, Fermat lança mão de uma estratégia que quatro séculos depois seria adotada em análise não-standard: propõe uma pseudo-igualdade (*adaequalitas*) relacionando as expressões numéricas antes da anulação das diferenças. Técnicas semelhantes – adição de um infinitésimo numérico e posterior anulação de diferenças – foram aplicadas à determinação de tangentes a curvas, tal como no trabalho de Leibniz, e de centros de gravidade.

Sempre com muita originalidade, Fermat apresentou sua própria demonstração da regra para a integral definida denotada em simbologia moderna por $\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$, sendo $p \neq -1$ um racional qualquer, tendo provavelmente

antecipado os resultados Cavalieri, Torricelli, Roberval e Pascal (cf. [9]). O método de Fermat consistia em dividir a área sob a curva em pequenos retângulos e, fazendo crescer indefinidamente seu número, aproximar o valor numérico da soma das áreas que se tornam infinitamente pequenas. Ampliou esse procedimento de quadratura para o caso de hipérboles e também o aplicou a problemas de retificação de curvas. Conquanto não entresse a dualidade que cristalizar-se-ia no teorema fundamental do cálculo e percebesse a universalidade dos seus métodos, Fermat antecipou grande parte das realizações do cálculo diferencial e integral.

Até a época de Fermat, este gozou, na França, de exclusividade no emprego de métodos analíticos, uma vez que René Descartes (1596-1650) evitou, e mesmo combateu, o uso de quantidades infinitamente pequenas, preferindo instrumentos algébricos e cinemáticos, ao passo que Roberval e Pascal limitaram-se a procedimentos aritméticos. O inglês John Wallis (1616-1703), contudo, cultivou alhures as vantagens da geometria analítica. Com efeito, ele foi além de seus contemporâneos no que propôs uma aritmética livre de representações geométricas. No trato dos infinitésimos, adotou a notação $\frac{1}{\infty}$ para exprimir uma quantidade infinitamente pequena, tendo sido o responsável pela introdução do conceito escolástico de infinito categoremático na aritmética através do símbolo ∞ (cf. [9]); aplicou sua aritmética infinitesimal, com enorme liberdade e ousadia, a problemas envolvendo quadratura e cubatura, muitos dos quais registrou no volume *De sectionibus conicis*. Atitude mais moderada assumiu seu conterrâneo James Gregory (1638-1675), que sugeriu a descoberta de novos irracionais através do limite de séries numéricas infinitas.

A recusa de Barrow em acolher a geometria analítica o impediu, provavelmente, de antecipar a descoberta do cálculo (cf. [9]), tarefa legada ao seu aluno Newton. Tendo demonstrado diversos teoremas sobre quadratura e tangência, Barrow percebeu, com clareza sem precedência, a dualidade envolvendo essas duas classes de problemas. Retomando os indivisíveis de Cavalieri, indica, em seu trabalho *Lectiones geometricae* (1670), um novo caminho para a determinação de áreas e tangentes, muito embora se restrinja sempre a uma forma sintética de apresentação.

Na Holanda, muitas dessas regras envolvendo infinitésimos foram aperfeiçoadas por René Sluze (1622-1685), Johann Hudde (1633-1704) e Christiaan Huygens (1629-1695). O terreno estava portanto preparado para o surgimento do cálculo.

O estudo dos trabalhos de Wallis e Gregory permitiu a Newton o contato

com as séries infinitas que, em concurso com o seu teorema binomial, forneceu as bases para o método dos fluxões. Contudo, numa monografia anterior a esse método, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, publicada em 1711 mas circulando já a partir de 1669, Newton apresenta um algoritmo, lançando mão dos infinitésimos à maneira de Barrow e Fermat, porém estendendo seu uso através do teorema binomial, para a quadratura de curvas em geral. O procedimento envolvia a determinação da taxa instantânea de variação para o problema inverso, isto é, a técnica que hoje chamaríamos de antiderivada. Newton voltaria a empregar os infinitésimos em sua obra mais madura *Methodus fluxionum*, mas seguindo o modelo da forma dinâmica de Galileu. Finalmente, em *De quadratura curvarum* (escrito em 1676 e publicado em 1704), substitui a anulação de diferenças pelo conceito de *razão última de mudança*, que poderíamos interpretar como o limite da razão de mudança. No célebre *Principia mathematica philosophia naturalis* (1687), primeira versão publicada de seus métodos, Newton expõe suas demonstrações por meio de geometria sintética.

Um dos primeiros resultados sobre quadratura de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) foi a determinação do valor, em forma de série infinita, para a área do círculo de raio unitário:

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots \quad (1.4)$$

Por sugestão de Huygens, Leibniz empreendeu um laborioso estudo de análise infinitesimal, assunto então em voga. Travando conhecimento com praticamente toda a literatura sobre a matéria, deteve-se particularmente no trabalho de Pascal, a quem reconheceu a inspiração para divisar a correspondência entre os problemas de tangência e quadratura. Embasado em estudos de análise combinatória, percebeu analogamente a íntima relação existente entre o triângulo aritmético de Pascal e o triângulo harmônico, observando a necessidade de estender essa relação para somas e diferenças infinitesimais.

Por volta de 1676 introduz Leibniz sua conhecida notação, que tornaria-se definitiva, para a representação da *soma* – o termo *integral* foi posteriormente sugerido pelos irmãos Bernoulli –, $\int$, e da *diferença* (ou *diferencial*) na variável x , dx (cf. [14]); estabelece o diferencial do produto, $d(xy) = xdy + ydx$, e do quociente, $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, além de potências e raízes; e aplica os resultados a problemas de tangência, máximos e mínimos e pontos de inflexão. O resultado desse estudo foi publicado em 1684, num lacônico artigo de seis páginas, na revista *Acta eruditorum*. Problemas de

quadratura são tratados em outro artigo (1686) da mesma revista, enquanto que em publicações ulteriores determina o diferencial de logaritmos, exponenciais e outras curvas.

Assim como Newton procurou evitar o uso dos infinitésimos nas sucessivas elaborações de seu método, recorrendo à noção de razão última, Leibniz também mostrou-se incomodado com as bases lógicas do seu cálculo, buscando justificar filosoficamente seu procedimento por meio de uma posição que hoje apontaríamos como formalista. Asseverando que as magnitudes infinitesimais, em si, eram ficções úteis para abreviar as operações (cf. [9]), explicou que apenas as razões entre os diferenciais eram significativas e evocou a lei da continuidade para justificar a transição entre as quantidades finitas e aquelas que seriam canceladas num último momento. Leibniz ressaltou o caráter algorítmico do cálculo infinitesimal em detrimento de seu aspecto empírico ou metafísico, no que foi amparado pelo filósofo Christian von Wolff (1679-1754).

A insegurança de Newton e Leibniz com relação às bases lógicas do novo cálculo profetizou um movimento de crítica à fragilidade estrutural da nova análise, inaugurado pelo ataque promovido pelo físico holandês Bernard Nieuwentijdt (1654-1718) à falta de clareza na obra de Newton e ao uso de infinitésimos de ordem superior no trabalho de Leibniz. Já no século XVIII, o filósofo George Berkeley (1685-1753) dirige, no tratado *The Analyst* (1734), uma crítica feroz ao método dos fluxões de Newton, alertando para a contradição decorrente do uso de incrementos que, para se atingir o resultado, deixam de ser incrementos para se igualarem a zero.

Não obstante as restrições impostas, o cálculo infinitesimal conquistou crescente receptividade na comunidade matemática da Europa continental, em parte devido à eficiente divulgação de Leibniz, que se correspondia assiduamente com numerosos matemáticos. Entre eles, destacam-se as figuras de Johann Bernoulli (1667-1748), que defendeu audaciosamente a existência atual do infinito e dos infinitésimos, Jakob Bernoulli (1654-1705), que adotou postura mais cautelosa diante do que, segundo ele, poderia ocasionar paralogismos, e o Marquês de L'Hospital (1661-1704), autor de um livro que propiciou uma maior popularização do assunto.

Abracando uma posição formalista, Euler entendia as quantidades infinitamente pequenas simplesmente como aquelas que viriam a ser o próprio zero (cf. [9]). No entanto, apelou largamente aos infinitésimos como recurso formal definitivo diante de sua postura pouco rigorosa, obtendo resultados fundamentais como a determinação de séries infinitas para funções logarítmicas

– estabelecendo assim o valor de e , que introduz como base dos logaritmos naturais –, exponenciais e trigonométricas. A livre manipulação dos infinitésimos, no estilo Wallis, foi praticada por Guido Grandi (1672-1742), Bernard de Fontenelle (1657-1757) e, já no século XIX, pelo matemático polonês Josef Hoëné-Wronski (1778-1853).

A despeito dos resultados alcançados, o progressivo descontentamento com o uso polêmico do infinitésimo em análise continuava provocando reações na comunidade matemática. Surgiram assim algumas tentativas de fundamentação por técnicas mais rigorosas que substituíssem o problemático conceito de infinitésimo. A idéia de limite, freqüentada no século XVII por Gregório de Saint-Vincent e Tacquet, foi retomada por Jean-le-Rond D’Alembert (1717-1783), que se esforçou para apresentar uma definição satisfatória, no que foi seguido por Simon L’Huillier (1750-1840); o objetivo, entretanto, só seria alcançado um século depois por Weierstraß. Joseph Louis Lagrange (1736-1813), autor do trabalho *Théorie des fonctions analytiques* (1797), apoiando-se na nova concepção de função oferecida por Euler, introduziu a notação $f', f'', \dots$ para as *derivadas* (terminologia que aparece inicialmente em seu trabalho) da função f e defendeu o procedimento de basear o cálculo diferencial na determinação das funções derivadas nas séries de Taylor. Lazare Carnot (1753-1823) procurou, no famoso volume *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (também de 1797), os princípios da análise infinitesimal na chamada *compensação dos erros*³.

No conhecido *Traité de mécanique* (primeiro volume publicado em 1811 e o segundo em 1833), Siméon Poisson (1781-1840) usou exclusivamente o método dos infinitésimos, acreditando na existência real de tais entidades. Por outro lado, Antoine Augustin Cournot (1801-1877), autor do *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (1841), insistia na não subordinação da clareza de idéias simples, como as de velocidade e infinitésimo, a intrincadas definições lógicas, manifestando uma tendência oposta àquela iniciada na primeira metade do século XIX, a qual culminara na chamada aritmetização da análise.

O avanço da lógica matemática no século XX possibilitou a Abraham Robinson (1918-1974) ressuscitar os infinitésimos como ferramentas formais legítimas para o desenvolvimento do cálculo. O autor do livro *Non-standard analysis* (1966) propôs uma extensão do corpo clássico dos reais – os *hiper-*

³A afirmação de que a análise de L. Carnot é fundada em preceitos pragmáticos de engenheiro e não na busca de consistência lógica tem sido, no entanto, reavaliada.

reais (cf. [26]) – através de um modelo, garantido fundamentalmente pelo teorema da compacidade, de uma teoria adequada ao corpo dos reais acrescida de fórmulas para os infinitésimos:

$$0 < \epsilon, \epsilon < 1, \epsilon < \frac{1}{2}, \epsilon < \frac{1}{3}, \dots \quad (1.5)$$

O surgimento da teoria das categorias e a posterior criação dos topoi inspirou a F. William Lawvere a idealização de uma análise intuicionista baseada na noção de “suavidade” (em inglês *smoothness*), em que os infinitésimos, identificados com os elementos nilpotentes ($\epsilon^2 = 0$), satisfazem o princípio da microafinidade, ou seja, as curvas são retilíneas em intervalos infinitesimais (cf. [5]). Em 1979, E. Dubuc ofereceu o primeiro modelo toposófico para a análise infinitesimal suave servindo-se de um topos de Grothendieck sobre uma categoria de variedades diferenciáveis (cf. [43]). Por fim, a análise suave propiciou o desenvolvimento, por A. Kock, da chamada geometria diferencial sintética.

Capítulo 2

Rotunda filosófica

Pretendemos com este capítulo desenrolar o pano de fundo filosófico que norteia este trabalho. Começamos por debater a necessidade da adoção de topos para abrigar o desenvolvimento teórico do edifício conceitual engendrado. A seguir, lançamos uma discussão sobre a relação entre a linguagem interna de um topos e o construtivismo matemático. A última seção é destinada a justificar a escolha da noção de homogeneidade como instrumento teórico apropriado para a formalização da idéia de magnitudes que variam continuamente.

2.1 Unidade em multiplicidade

O movimento de aritmetização da análise consumado por Weierstraß teve por fim a formalização de uma intuição originalmente *geométrica*, de natureza dinâmica, por concepções *aritméticas*. Essa tendência foi intensificada com o advento da teoria dos conjuntos de Cantor e as pesquisas de Dedekind em teoria dos números: função, continuidade e as diversas noções do cálculo foram compreendidas em termos dos conceitos essencialmente estáticos da nova formalização. Dentro dessa perspectiva, o próprio *continuum* foi reduzido a um conjunto infinito de pontos, sendo a idéia de magnitude substituída pela de ordem.

Historicamente essa compreensão do continuum – como um conjunto infinito de pontos – sempre encontrou adversários. Kant entendia por continuidade a grandeza para a qual “nenhuma de suas partes é a mínima possível”. O tempo e o espaço seriam grandezas contínuas (*quanta continua*) porquanto

“nenhuma de suas partes pode ser dada sem ser encerrada entre limites”. Dessa forma, sendo os pontos concebidos como limites ou “lugares de limitação do tempo e do espaço”, eles “pressupõem sempre as intuições que devem limitar ou determinar” e “não poderiam mesmo ser dados anteriormente ao espaço e ao tempo” [31].

Para Poincaré, a construção clássica dos reais “não é a concepção ordinária em que se supõe que entre os elementos do continuum existe uma conexão íntima tornando-o uma totalidade, em que o ponto não tem existência prévia à da linha, mas a linha existe previamente ao ponto”. Fiando-se à fórmula segundo a qual “o continuum é unidade em multiplicidade”, Poincaré aponta que a construção clássica destrói a unidade, restando apenas a multiplicidade, ao passo que “o analista tem menor razão ainda ao definir o seu continuum como o faz na medida em que é sempre nesses termos que ele raciocina quando particularmente se orgulha do seu rigor” [47].

Hermann Weyl admite a disparidade entre o continuum aritmético e o continuum concebido intuitivamente, asseverando que “um ponto individual, em si, é não-independente, isto é, é simplesmente nada quando tomado em si mesmo”. Weyl, assim como Kant, apóia-se na intuição do espaço e do tempo para erigir suas reflexões sobre o continuum: “pontos estritos no tempo ou no espaço não são os elementos derradeiros, subjacentes, atômicos da duração ou extensão que nos são dados pela experiência” [57].

Portanto, enquanto objeto da intuição, o continuum é dado previamente aos pontos que demarcam ou limitam suas partes. Procuramos assim uma formalização matemática fiel à noção intuitiva do continuum como uma “unidade em multiplicidade”; e, para que a multiplicidade dos pontos não desmantele a unidade apreendida como um todo, o objeto que representa matematicamente o continuum deve preceder logicamente os “lugares de limitação” que constituem os elementos.

Uma linguagem matemática mais apropriada à formulação desse problema é a da *teoria das categorias*. Numa categoria com suficiente poder expressivo (qualquer *topos com objeto dos números naturais*), o continuum pode ser construído categorialmente, ou seja, através de ferramentas categoriais envolvendo limites, co-limites, exponenciais e classificador de subobjetos. Embora estruturalmente complexa, a construção prescinde dos elementos (ou pontos), proporcionando ao objeto resultante o caráter de unidade pretendido.

Além disso, a adoção da linguagem categorial confere maior generalidade às construções dos objetos dos números reais (cf. Capítulo 6). Nesse sen-

tido, métodos de construção que resultam em estruturas isomorfas dentro da teoria clássica dos conjuntos podem produzir, num topos qualquer, resultados diferentes. Em especial, os procedimentos tradicionais por cortes de Dedekind e seqüências de Cauchy, com que nos ocuparemos particularmente neste trabalho, originam objetos que não são, em muitos topoi, isomorfos (cf. Capítulo 8).

É notória a dificuldade prática de se lidar com as construções categoriais dos sistemas numéricos; no caso dos reais, em que se exigem ferramentas mais sofisticadas, essas construções tornam-se quase impraticáveis. Para contornar esse obstáculo, tais objetos são definidos com auxílio da *linguagem interna* do topos; o objeto propriamente categorial seria então aquele que serve de modelo para a teoria formulada naquela linguagem. Sabe-se que, em geral, a lógica subjacente a um topos – isto é, a lógica definida na linguagem interna e que se mostra correta e completa quando interpretada nesse topos – é *intuicionista*. Mais precisamente, todo topos pode ser simulado por uma *teoria de conjuntos local*, vale dizer, uma teoria de conjuntos tipificada e governada pela lógica intuicionista de ordem superior (cf. Capítulo 3).

Temos ciência de que a linguagem das categorias não oferece uma resposta definitiva ao problema de formalização matemática do continuum: a complexidade da construção dos objetos e a dificuldade de sua visualização num panorama genuinamente categorial (em oposição à sua contraparte lógica) são empecilhos à sua identificação com o continuum apreendido intuitivamente. Muitos dos seus aspectos, contudo, mostram-se filosoficamente melhor realizados e o grau de generalização atingido, que abarca a construção conjuntista, revela com mais detalhe as dificuldades sutis decorrentes da formalização.

2.2 Linguagem interna e construtivismo

O termo ‘construtivismo’ costuma ser tomado, em matemática, em diferentes acepções. É comum encontrar em textos expositivos a expressão ‘demonstração construtiva’ com o significado de ‘demonstração sem o uso do axioma da escolha’ (cf. [28]). Filosoficamente, porém, *construtivismo* tem dois sentidos mais rigorosos que, de certa maneira, se confundem: por um lado, a posição filosófica segundo a qual a existência de um objeto matemático só pode ser afirmada após a *construção explícita* do mesmo; por outro, as escolas matemáticas representativas desse pensamento. Assim, um partidário da matemática construtiva não aceita certos princípios lógicos

perfeitamente legítimos na matemática tradicional, como o *terceiro excluído* ($\phi \vee \neg\phi$) e a *redução ao absurdo* ($\neg\neg\phi \rightarrow \phi$). Na verdade, esses princípios não-construtivos foram usados muito economicamente nas demonstrações matemáticas anteriores a 1880. Prova disso é a célebre reação que a demonstração não-construtiva de Hilbert do teorema da base finita para ideais polinomiais provocou no matemático Paul Gordan, que teria afirmado: “Isso não é matemática, é teologia.”

Dissemos na seção anterior que todo topos pode ser simulado por uma teoria local de conjuntos, isto é, uma teoria de conjuntos tipificada regida pela lógica intuicionista de ordem superior (cf. Capítulo 3). Lógica intuicionista, neste caso, é um *sistema formal*, ou seja, um cálculo de seqüentes (ou sistema axiomático [17]) definido sobre uma linguagem formal, não envolvendo uma escolha consciente e filosoficamente engajada de axiomas e regras: estes são pré-determinados pelas propriedades do topos em consideração.

Convém ressaltar que o construtivismo é uma postura filosófica, uma atitude de rejeição de certos axiomas. Assim sendo, deve-se fazer uma distinção entre *matemática construtiva*, no sentido filosófico estabelecido, e *lógica formal intuicionista*. Nenhum categorista de formação clássica sentir-se-ia constrangido a empregar um princípio não-construtivo no uso de suas atribuições. Entretanto, no plano categorial, determinados problemas técnicos (da teoria de topos) apresentam obstáculos muitas vezes intransponíveis, alguns dos quais seriam abrandados se esses problemas fossem transferidos para o ambiente lógico-formal da teoria local dos conjuntos. O categorista (de formação clássica ou não) abandona assim sua linguagem de objetos e morfismos e passa a trabalhar, provisoriamente, com um cálculo de seqüentes definido sobre uma linguagem formal. Os frutos dessa investida podem então ser reinterpretados convenientemente no ambiente categorial original.

Uma ilustração teórica desta posição epistemológica *pragmática* da lógica matemática provém da teoria de feixes (cf. Capítulo 8). A solução de problemas geométricos com ferramentas lógicas não é inédita [44]. O trato de questões no ambiente lógico estrito da teoria local dos conjuntos, contudo, amplia consideravelmente o grau de aplicabilidade dos resultados atingidos, isto é, o número de categorias contempladas pelos mesmos. Em especial, a demonstração da homogeneidade dos feixes de reais e da relação de persistência uniforme entre essas estruturas são casos particulares das proposições gerais estabelecidas numa teoria local naturalizada (cf. Capítulo 5).

Parece claro, portanto, que o matemático construtivista, por um lado, e o topósofo que aplica a teoria local de conjuntos, por outro, partem de

motivações diferentes: este se apropriando de uma ferramenta lógica para a consecução de um objetivo técnico e aquele abraçando uma causa filosófica. Nada impede, entretanto, que, observadas as *limitações formais*, profissionais de ambos os lados compartilhem resultados comuns, assim como um agnóstico não precisa repelir o conselho de um vigário. As limitações formais de maior relevância são os *princípios particulares* adotados pelas diferentes escolas de matemática construtiva. O principal deles é o chamado *axioma da escolha enumerável*, que pode ser enunciado desta forma: se X é um conjunto e $P(n, x)$ uma propriedade tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ (o conjunto dos naturais), existe um $x \in X$ para o qual $P(n, x)$, então sempre haverá uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaz $P(n, x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. As mais influentes escolas de matemática construtiva assumem esse princípio, acarretando profundas conseqüências, uma das quais é a equipotência entre os reais de Dedekind e os reais de Cauchy [55]. Como veremos no Capítulo 8, no topos $\mathbf{Fei}(X)$ dos feixes sobre um espaço topológico X há uma diferença marcante entre esses objetos: o feixe dos reais de Dedekind compreende as funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ (o espaço euclidiano), enquanto que o feixe dos reais de Cauchy as funções localmente constantes de X em $\mathbb{R}$. Em vista dessas considerações, a imposição do axioma da escolha enumerável a um topos (ou melhor, à sua teoria local correspondente) ocasionaria sérias restrições ao seu grau de aplicabilidade, deixando de fora exemplos da maior importância, como $\mathbf{Fei}(X)$ (a não ser que se prescrevam severas limitações ao espaço topológico X).

2.3 Homogeneidade

Ressaltamos no primeiro capítulo que, dentro da nossa concepção, a idéia de *magnitudes que variam continuamente* participa de maneira essencial do conceito de continuum. Mais do que isso, essa idéia é a mais importante dentre aquelas cuja participação desse conceito é essencial. Gostaríamos de caracterizar matematicamente esse atributo com auxílio das ferramentas categoriais de que dispomos.

De acordo com Leibniz, um determinado agregado de pontos forma um continuum se entre dois desses pontos existe sempre um terceiro. Contemporaneamente essa propriedade corresponde à noção de *densidade*, que sabemos ser um atributo dos racionais (classicamente definidos ou não). Essa concepção do continuum foi, na realidade, herdada de Galileu, que afirmava

que a continuidade – esta entendida como uma qualidade essencial do continuum e não o conceito matemático homônimo – era consequência de uma *subdivisão infinita* [9].

Mesmo no contexto restrito da teoria de conjuntos, a densidade é um conceito manifestamente insuficiente. Consideremos, à guisa de exemplo, a união $\mathbb{Q}^- \cup [0, \infty)$, em que $\mathbb{Q}^-$ é a intersecção $(-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$. Trata-se de um conjunto denso mas que pouco se ajusta a uma concepção rigorosa do continuum matemático (Figura 1).

Figura 1

Desperta interesse o fato de não existir nenhum automorfismo – ou seja, uma bijeção que preserve a ordem estrita – desse conjunto que contenha, digamos, a atribuição $0 \mapsto 1$. Intervalos fechados constituem também exemplos anormais de conjuntos densos que se afastam da compreensão intuitiva do continuum. Uma maneira de contornar esse último obstáculo é ampliar a definição: um conjunto denso e sem pontos extremos é dito ser *persistente*.

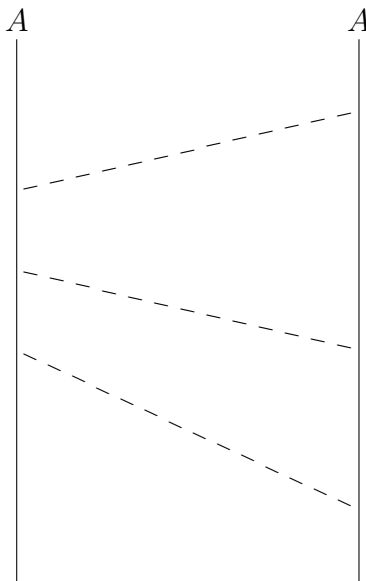


Figura 2

A idéia de magnitudes variando continuamente subentende que todas as partes do continuum sejam da mesma natureza, isto é, que o continuum seja

homogêneo. Matematicamente, dizemos que uma estrutura (parcialmente) ordenada $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é *homogênea* se todo isomorfismo parcial finito de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}$ pode ser estendido a um automorfismo de $\mathfrak{A}$ (Figura 2). Escolhemos, assim, a noção matemática de homogeneidade como uma alternativa de formalização da idéia de magnitudes variando continuamente, que é o tema central deste trabalho. Ainda que não seja o único, acreditamos que a homogeneidade seja um critério indispensável na identificação de um objeto dos números reais, uma vez que a idéia filosófica subjacente a essa noção é, como vimos, um atributo essencial do continuum.

Importa dizer que, se $\langle A, <, a, b \rangle$ é uma estrutura (parcialmente) ordenada e homogênea tal que $a < b$, então ela é persistente. Com efeito, o isomorfismo parcial $a \mapsto b$ pode ser estendido a um automorfismo f e assim $a < b < f(b)$. Agora, se $x, y \in A$ e $x < y$, então o automorfismo g que estende $\{a \mapsto x, f(b) \mapsto y\}$ produz um elemento $z = g(b)$ que satisfaz $x < z < y$ (portanto a estrutura é densa); e, se $x \in A$, o automorfismo h que estende $b \mapsto x$ produz os elementos $y = h(a)$ e $z = h(f(b))$ que satisfazem $y < x < z$ (portanto a estrutura não tem pontos extremos).

Capítulo 3

Teoria local de conjuntos

Teoria local de conjuntos é uma teoria de conjuntos tipificada cuja lógica subjacente é a lógica intuicionista de ordem superior. Nesse sentido, ela é uma generalização da teoria clássica dos conjuntos, sendo a noção primitiva de conjunto substituída pela de tipo. A categoria construída a partir de uma teoria local – cujos objetos são os conjuntos locais e cujos morfismos são as funções locais – revela-se um topos, chamado de topos lingüístico. É possível demonstrar então que todo topos é equivalente a um topos lingüístico.

A interpretação de linguagens formais em categorias surgiu em 1963 com F. W. Lawvere. Foi W. Mitchell, contudo, que, em 1972, forneceu a primeira descrição de uma linguagem formal adequada a um topos; J. Bénabou e A. Joyal produziram independentemente resultados equivalentes. A denominação *local set theory* (teoria local de conjuntos) apareceu originalmente no trabalho de J. Zangwill em 1977 e o teorema da equivalência, o qual expressa que todo topos é equivalente a um topos lingüístico, foi demonstrado primariamente por H. Volger, em 1975.

Pretendemos neste capítulo preparar uma exposição sumária da teoria local dos conjuntos. Um desenvolvimento mais detalhado do tópico pode ser examinado em [4], a referência básica sobre o assunto; [33] apresenta uma abordagem similar, estruturada em λ -cálculo. Em [17], os autores adotam um sistema axiomático (ao invés de cálculo de seqüentes) e demonstram correção e completude. Começamos por exibir a linguagem local, substrato da teoria, após o que introduzimos os axiomas e regras de inferência que compõem a teoria local e definimos os conjuntos locais. A seguir, inserimos a interpretação da linguagem local num topos e enunciamos o resultado principal deste capítulo, o teorema da equivalência. No final, apresentamos algumas

definições elementares que ganharão aplicações futuras.

3.1 Linguagem local

Estabelecemos inicialmente uma coleção **SOR** de *sortes*, ou *tipos básicos*, com elementos distinguidos 1 e Ω . Definimos então, recursivamente, uma coleção **TIP** de *tipos* como a menor classe satisfazendo as condições (i) a (iii) abaixo:

- (i) **SOR** é uma subcoleção de **TIP**, isto é, toda sorte é um tipo;
- (ii) se A e B são tipos, então $(A \times B)$ é um tipo;
- (iii) se A é um tipo, então (PA) é um tipo.

Para cada tipo A , estabelecemos uma coleção VAR_A de *variáveis de tipo* A , que serão denotadas por x_A, y_A, z_A etc. Definimos recursivamente, para cada tipo A , uma coleção TER_A de *termos de tipo* A ; a coleção **TER** de todos os termos é a menor classe satisfazendo as condições (i) a (vii) abaixo:

- (i) para cada tipo A , VAR_A é uma subcoleção de TER_A ;
- (ii) $\langle \rangle$ é um termo de tipo 1 ;
- (iii) se σ e τ são termos de tipos A e B , respectivamente, então $\langle \sigma, \tau \rangle$ é um termo de tipo $(A \times B)$;
- (iv) se τ é um termo de tipo $(A \times B)$, então $(\tau)'$ e $(\tau)''$ são termos de tipos A e B , respectivamente;
- (v) se τ é um termo de tipo Ω e x é uma variável de tipo A , então $\{x : \tau\}$ é um termo de tipo (PA) ;
- (vi) se σ e τ são termos de mesmo tipo, então $(\sigma = \tau)$ é um termo de tipo Ω ;
- (vii) se σ e τ são termos de tipos A e (PA) , respectivamente, então $(\sigma \in \tau)$ é um termo de tipo Ω .

As coleções **TIP** e **TER** constituem a *linguagem local* $\mathcal{L}$.

Um termo de tipo (PA) é dito ser um *termo de tipo partes*. Variáveis de tipo Ω são denotadas por ω, ω' etc. e termos de tipo Ω são chamados de *fórmulas* e denotados por α, β etc.

Uma variável x é dita *estar ligada* quando ocorre num termo da forma $\{x : \alpha\}$ para alguma fórmula α ; do contrário, é dita *estar livre*. Um termo no qual todas as variáveis estão ligadas é chamado de *fechado*; e uma fórmula fechada é chamada de *sentença*. Se dois termos só diferem pelo nome das variáveis ligadas, afirmamos que são *λ -equivalentes*. Podemos sempre evitar

que a mesma variável apareça de maneira ao mesmo tempo livre e ligada em partes diferentes de um termo, pois para cada termo τ existe um λ -equivalente τ' em que isso não acontece.

Um *contexto* $\vec{x}$ é uma lista $x_0, \dots, x_{n-1}$ de variáveis distintas. Dizemos que um contexto $\vec{x}$ é *adequado* a um termo τ se todas as variáveis livres de τ encontram-se em $\vec{x}$. Nesse caso, afirmamos que $\vec{x}.\tau$ é um *termo em contexto*. Quando $\vec{x}$ lista todas as variáveis livres de τ , dizemos que $\vec{x}$ é o *contexto canônico* de τ . Se $\vec{x}.\tau$ é um termo em contexto e $\vec{\sigma}$ é uma lista $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ de termos tais que σ_i é do mesmo tipo de x_i ($i = 0, \dots, n-1$), definimos a *substituição simultânea* $\tau(\vec{\sigma}/\vec{x})$ de $\vec{x}$ por $\vec{\sigma}$ em τ como o termo resultante da substituição, de forma concomitante, de cada x_i por σ_i ($i = 0, \dots, n-1$). Observemos que a definição de substituição simultânea, que pode ser formalizada por recursão, é inequívoca devido à noção de λ -equivalência, uma vez que as variáveis ligadas podem ser rebatizadas sempre que necessário.

Podemos estender as definições de variável livre, contexto e substituição simultânea para coleções Γ de fórmulas.

3.2 Teoria local

Na linguagem local $\mathcal{L}$, os *símbolos lógicos* podem ser definidos por:

$$\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta & :\Leftrightarrow \alpha = \beta; \\
\top & :\Leftrightarrow \langle \rangle = \langle \rangle; \\
\alpha \wedge \beta & :\Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \top, \top \rangle; \\
\alpha \rightarrow \beta & :\Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha; \\
\forall x.\alpha & :\Leftrightarrow \{x : \alpha\} = \{x : \top\}; \\
\perp & :\Leftrightarrow \forall \omega.\omega; \\
\neg \alpha & :\Leftrightarrow \alpha \rightarrow \perp; \\
\alpha \vee \beta & :\Leftrightarrow \forall \omega[(\alpha \rightarrow \omega \wedge \beta \rightarrow \omega) \rightarrow \omega]; \\
\exists x.\alpha & :\Leftrightarrow \forall \omega[\forall x(\alpha \rightarrow \omega) \rightarrow \omega].
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Nas expressões que definem a disjunção $\vee$ e o existencial $\exists$, assumimos que ω não ocorre em α ou β .

Um *seqüente* em $\mathcal{L}$ é uma expressão da forma $\Gamma \Rightarrow \alpha$, em que α é uma fórmula e Γ é uma coleção finita (possivelmente vazia) de fórmulas. Utiliza-

mos as seguintes convenções:

$$\begin{aligned}
& \Gamma, \Delta \Rightarrow \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \Rightarrow \alpha; \\
& \beta, \Gamma \Rightarrow \alpha \quad \text{ou} \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\beta\} \Rightarrow \alpha; \\
& \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \Rightarrow \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \Rightarrow \alpha; \\
& \Rightarrow \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \emptyset \Rightarrow \alpha.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideramos os *axiomas básicos* listados a seguir.

$$\begin{aligned}
\text{tautologia} & \quad \alpha \Rightarrow \alpha; \\
\text{unidade} & \quad \Rightarrow x_1 = \langle \rangle \\
\text{congruência} & \quad x = y, \alpha(x/z) \Rightarrow \alpha(y/z) \\
\text{projeções} & \quad \Rightarrow (\langle x, y \rangle)' = x \\
& \quad \Rightarrow (\langle x, y \rangle)'' = y \\
\text{emparelhamento} & \quad \Rightarrow x = \langle (x)', (x)'' \rangle \\
\text{compreensão} & \quad \Rightarrow x \in \{x : \alpha\} \leftrightarrow \alpha
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Consideramos também as *regras de inferência* arroladas abaixo.

$$\begin{aligned}
\text{enfraquecimento} & \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\beta, \Gamma \Rightarrow \alpha} \\
\text{corte} & \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta} \\
\text{substituição} & \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma(\tau/x) \Rightarrow \alpha(\tau/x)} \\
\text{extensionalidade} & \quad \frac{\Gamma \Rightarrow x \in \sigma \leftrightarrow x \in \tau}{\Gamma \Rightarrow \sigma = \tau} \\
\text{equivalência} & \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \leftrightarrow \beta}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Na regra do corte, assumimos que todo contexto adequado a α é adequado a $\Gamma \cup \{\beta\}$; na extensionalidade, x não está livre em $\Gamma \cup \{\sigma = \tau\}$.

Se S é uma coleção de seqüentes, a coleção $\bar{S}$ de *seqüentes deriváveis de* S é definida recursivamente como a menor classe satisfazendo:

- (i) todo seqüente de S é derivável de S ;
- (ii) todo axioma básico é derivável de S ;
- (iii) todo seqüente que é resultado da aplicação de uma regra de inferência a um ou dois (dependendo da regra) seqüentes deriváveis de S é também derivável de S .

Quando o seqüente $\Gamma \Rightarrow \alpha$ é derivável de S , escrevemos $\Gamma \vdash_S \alpha$; se S é $\emptyset$, escrevemos simplesmente $\Gamma \vdash \alpha$ e afirmamos que $\Gamma \Rightarrow \alpha$ é um seqüente *válido*. Uma *teoria (local de conjuntos)* é uma coleção S de seqüentes fechada sob derivabilidade, ou seja, tal que S é $\bar{S}$; de maneira equivalente, $\Gamma \vdash_S \alpha$ se, e somente se, $\Gamma \Rightarrow \alpha$ está em S . A teoria $\bar{\emptyset}$ é chamada de *teoria (local) pura (de conjuntos)*. Um *coleção de axiomas* para uma teoria S é uma coleção T de seqüentes para a qual $\bar{T}$ é S . Por fim, dizemos que uma teoria S é *inconsistente* se $\vdash_S \perp$; do contrário ela é *consistente*.

Os símbolos lógicos definidos numa teoria local satisfazem todas as regras da lógica intuicionista de ordem superior. As demonstrações que envolvem esse fato podem ser conferidas em [4].

Uma teoria local também cumpre *eliminabilidade de descrições* para fórmulas ou termos de tipo partes. Introduzimos a notação

$$\exists!x.\alpha :\Leftrightarrow \exists x[\alpha \wedge \forall y[\alpha(y/x) \rightarrow x = y]], \quad (3.5)$$

em que y é diferente de x e não ocorre em α ; agora, se x uma variável de tipo Ω ou de tipo partes, é possível exibir um termo τ tal que

$$\exists!x.\alpha \vdash \alpha(\tau/x). \quad (3.6)$$

A demonstração desse fato encontra-se também em [4].

3.3 Conjuntos locais

Um *S-conjunto* (ou *conjunto local*) numa teoria local S é um termo fechado de tipo partes. *S*-conjuntos serão denotados por X, Y, Z etc. Estabelecemos as notações:

$$\begin{aligned} \forall x \in X.\alpha & :\Leftrightarrow \forall x[x \in X \rightarrow \alpha]; \\ \exists x \in X.\alpha & :\Leftrightarrow \exists x[x \in X \wedge \alpha]; \\ \{x \in X : \alpha\} & := \{x : x \in X \wedge \alpha\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podemos definir numa teoria local as operações e predicados usuais da teoria clássica de conjuntos:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y & :\Leftrightarrow \forall x \in X.x \in Y \quad (X \text{ e } Y \text{ do mesmo tipo}); \\ X \cap Y & := \{x : x \in X \wedge x \in Y\} \quad (X \text{ e } Y \text{ do mesmo tipo}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \cup Y &:= \{x : x \in X \vee x \in Y\} \quad (X \text{ e } Y \text{ do mesmo tipo}); \\
U_A &:= \{x_A : \top\}; \\
\emptyset_A &:= \{x_A : \perp\}; \\
-X &:= \{x : \neg(x \in X)\}; \\
PX &:= \{u : u \subseteq X\}; \\
\bigcap U &:= \{x : \forall u \in U. x \in u\} \quad (U \text{ de tipo PPA}); \\
\bigcup U &:= \{x : \exists u \in U. x \in u\} \quad (U \text{ de tipo PPA}); \\
\{\tau\} &:= \{x : x = \tau\} \quad (x \text{ não livre em } \tau); \\
\{\sigma, \tau\} &:= \{x : x = \sigma \vee x = \tau\} \quad (x \text{ não livre em } \sigma \text{ ou } \tau); \\
\{\tau : \alpha\} &:= \{z : \exists x_0, \dots, x_{n-1} [z = \tau \wedge \alpha]\} \quad (x_0, \dots, x_{n-1}. \tau); \\
X \times Y &:= \{\langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y\}; \\
X + Y &:= \{\langle \{x\}, \emptyset \rangle : x \in X\} \cup \{\langle \emptyset, \{y\} \rangle : y \in Y\}; \\
Y^X &:= \{u : u \subseteq X \times Y \wedge \forall x \in X \exists! y \in Y. \langle x, y \rangle \in u\}; \\
\prod_{i \in I} X_i &:= \{u \in U_A^I : \forall i \in I. \{x : \langle i, x \rangle \in u\} \subseteq X_i\}; \\
\coprod_{i \in I} X_i &:= \{\langle i, x \rangle : i \in I \wedge x \in X_i\}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A proposição seguinte estabelece os resultados elementares que acompanham a teoria clássica dos conjuntos. Sua demonstração segue diretamente das definições.

Proposição 3.3.1. *Em qualquer teoria local valem as propriedades listadas abaixo.*

$$\begin{array}{ll}
\text{extensionalidade} & \vdash X = Y \leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y) \\
\text{ordem} & \vdash X \subseteq X \\
& \vdash (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \rightarrow X = Y \\
& \vdash (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z \\
\text{intersecção} & \vdash Z \subseteq X \cap Y \leftrightarrow (Z \subseteq X \wedge Z \subseteq Y) \\
& \vdash X \subseteq \bigcap U \leftrightarrow \forall u \in U. X \subseteq u \\
\text{união} & \vdash X \cup Y \subseteq Z \leftrightarrow (X \subseteq Z \wedge Y \subseteq Z) \\
& \vdash \bigcup U \subseteq X \leftrightarrow \forall u \in U. u \subseteq X \\
\text{universo} & \vdash x_A \in U_A \\
\text{vazio} & \vdash \neg(x_A \in \emptyset_A) \\
\text{partes} & \vdash X \in PY \leftrightarrow X \subseteq Y \\
\text{unitário} & \vdash x \in \{y\} \leftrightarrow x = y \\
\text{compreensão} & \vdash \alpha \rightarrow \tau \in \{\tau : \alpha\} \\
\text{substituição} & \forall x \exists! y. \alpha(x, y) \vdash \forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v. \alpha(x, y)
\end{array} \tag{3.9}$$

3.4 Interpretação de linguagens locais em to- poi

Uma linguagem local $\mathcal{L}$ pode ser interpretada num topos $\mathbf{E}$ qualquer e, uma vez estabelecida a noção de validade, obtêm-se correção e completude.

Uma *interpretação* I da linguagem local $\mathcal{L}$ num topos $\mathbf{E}$ é uma aplicação que atribui a cada tipo A um objeto $I(A)$ (denotado por A) de $\mathbf{E}$ de tal maneira que¹:

$$\begin{aligned} I(1) &= 1; \\ I(\Omega) &= \Omega; \\ I(A \times B) &= A \times B; \\ I(\text{PA}) &= \Omega^A. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Estendemos agora a interpretação I para a coleção TER dos termos de $\mathcal{L}$. Se $\vec{x}$ é um contexto $x_0, \dots, x_{n-1}$ de tipos $A_0, \dots, A_{n-1}$, respectivamente, definimos recursivamente uma aplicação

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\vec{x}}^I : \text{TER}_{\mathbf{B}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{E}} \left(\prod_{i < n} A_i, B \right) \tag{3.11}$$

por:

- (i) $\llbracket x_j \rrbracket_{\vec{x}}^I = \pi_j$ (neste caso, $B = A_j$);

$$\prod_{i < n} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j$$

- (ii) $\llbracket \langle \rangle \rrbracket_{\vec{x}}^I$ é o (único) morfismo do diagrama abaixo (neste caso, $B = 1$);

$$\prod_{i < n} A_i \xrightarrow{\llbracket \langle \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} 1$$

- (iii) $\llbracket \langle \sigma, \tau \rangle \rrbracket_{\vec{x}}^I$ é o morfismo que faz o diagrama abaixo comutar, em que σ e τ são de tipos C e D , respectivamente, e $B = C \times D$;

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow \llbracket \sigma \rrbracket_{\vec{x}} & & \nwarrow \pi' & \\ \prod_{i < n} A_i & \xrightarrow{\llbracket \langle \sigma, \tau \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} & & & B \\ & \searrow \llbracket \tau \rrbracket_{\vec{x}} & & \swarrow \pi'' & \\ & & D & & \end{array}$$

¹Tal aplicação é inequívoca em virtude das considerações tecidas nas Notas sobre a linguagem das categorias, na Introdução geral.

(iv) $\llbracket (\tau)' \rrbracket_{\vec{x}}^I$ e $\llbracket (\tau)'' \rrbracket_{\vec{x}}^I$ são as composições indicadas no diagrama abaixo, em que $B = C \times D$;

$$\begin{array}{ccc}
 & & C \\
 & \nearrow \llbracket (\tau)' \rrbracket_{\vec{x}} & \uparrow \pi' \\
 \prod_{i < n} A_i & \xrightarrow{\llbracket \tau \rrbracket_{\vec{x}}} & B \\
 & \searrow \llbracket (\tau)'' \rrbracket_{\vec{x}} & \downarrow \pi'' \\
 & & D
 \end{array}$$

(v) $\llbracket \{y : \alpha\} \rrbracket_{\vec{x}}^I$ é a transposta da composição abaixo, em que $\sim$ é o isomorfismo canônico indicado abaixo e $\vec{x}$ não é um contexto para z , que é de tipo C (neste caso, $B = \Omega^C \simeq PC$);

$$\begin{array}{ccc}
 C \times A_0 \times \cdots \times A_{n-1} & \xrightarrow{\llbracket \alpha(z/y) \rrbracket_{z\vec{x}}} & \Omega \\
 \uparrow \wr & \nearrow & \\
 C \times \prod_{i < n} A_i & &
 \end{array}$$

(vi) $\llbracket \sigma = \tau \rrbracket_{\vec{x}}^I$ é a composição indicada no diagrama abaixo, em que $\chi(\delta)$ é o morfismo característico da diagonal $\delta : C \hookrightarrow C \times C$ (neste caso, $B = \Omega$);

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{i < n} A_i & \xrightarrow{\llbracket \langle \sigma, \tau \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} & C \times C \\
 & \searrow \llbracket \sigma = \tau \rrbracket_{\vec{x}} & \downarrow \chi(\delta) \\
 & & \Omega
 \end{array}$$

(vii) $\llbracket \sigma \in \tau \rrbracket_{\vec{x}}^I$ é a composição indicada abaixo (neste caso, $B = \Omega$).

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{i < n} A_i & \xrightarrow{\llbracket \langle \sigma, \tau \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} & C \times PC \\
 & \searrow \llbracket \sigma \in \tau \rrbracket_{\vec{x}} & \downarrow \text{av} \\
 & & \Omega
 \end{array}$$

Por conseguinte, se $\vec{x}.\alpha$ é uma fórmula em contexto, então

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{\vec{x}}^I : \prod_{i < n} A_i \rightarrow \Omega \quad (3.12)$$

é um morfismo característico, ao qual está associado um único subobjeto de $\prod_{i < n} A_i$. Recordemos que, num topos $\mathbf{E}$, a coleção de todos os subobjetos de um dado objeto constitui uma álgebra de Heyting (cf. [36]).

Antes de introduzirmos a noção de validade de uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}$ no topos $\mathbf{E}$, consideremos a seguinte convenção. Se Γ é uma coleção de fórmulas $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, então escrevemos $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}^I$ ao invés de

$$\bigwedge_{i < n} \llbracket \alpha_i \rrbracket_{\vec{x}}^I, \quad (3.13)$$

em que $\bigwedge$ denota o ínfimo na álgebra de Heyting de subobjetos de $\prod_{i < n} A_i$ (cf. Notas sobre a linguagem das categorias na Introdução geral).

Se $\vec{x}$ é o contexto canônico de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, dizemos que o seqüente $\Gamma \Rightarrow \alpha$ é *válido por I* , e escrevemos $\Gamma \approx_I \alpha$ se $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}^I \leq \llbracket \alpha \rrbracket_{\vec{x}}^I$, em que $\leq$ é a relação de ordem na álgebra de Heyting de $\prod_{i < n} A_i$. Se o seqüente é válido por qualquer I , escrevemos simplesmente $\Gamma \approx \alpha$; se $\Gamma_0 \approx_I \alpha_0, \dots, \Gamma_{n-1} \approx_I \alpha_{n-1}$ implica $\Gamma \approx_I \alpha$, escrevemos como segue abaixo.

$$\frac{\Gamma_0 \approx_I \alpha_0, \dots, \Gamma_{n-1} \approx_I \alpha_{n-1}}{\Gamma \approx_I \alpha} \quad (3.14)$$

E, se a expressão (3.14) vale para toda interpretação I , escrevemos como segue.

$$\frac{\Gamma_0 \approx \alpha_0, \dots, \Gamma_{n-1} \approx \alpha_{n-1}}{\Gamma \approx \alpha} \quad (3.15)$$

Uma interpretação I é um *modelo* duma teoria S se todo seqüente (equivalentemente, todo axioma) de S é válido por I . Escrevemos $\Gamma \approx_S \alpha$ se vale $\Gamma \approx_I \alpha$ para cada modelo I de S .

Exibimos, na proposição a seguir, as três versões de correção e completude que são demonstradas em [4], resultado também conhecido como *adequação da teoria local de conjuntos*.

Proposição 3.4.1. *Temos as três versões abaixo de correção e completude.*

$$(a) \quad \Gamma \vdash \alpha \quad sse \quad \Gamma \approx \alpha$$

$$(b) \quad \frac{\Gamma_0 \Rightarrow \alpha_0, \dots, \Gamma_{n-1} \Rightarrow \alpha_{n-1}}{\Gamma \Rightarrow \alpha} \quad sse \quad \frac{\Gamma_0 \approx \alpha_0, \dots, \Gamma_{n-1} \approx \alpha_{n-1}}{\Gamma \approx \alpha}$$

$$(c) \quad \Gamma \vdash_S \alpha \quad sse \quad \Gamma \approx_S \alpha$$

Como consequência da completude e correção, demonstra-se que uma teoria local pura é sempre consistente, isto é, não vale $\vdash \perp$. Para isso, interpreta-se a linguagem local $\mathcal{L}$ no topos $\mathbf{Fbj}$ dos conjuntos finitos e mostra-se que, se todo seqüente é válido nesse topos, chega-se a uma contradição.

3.5 Teorema da equivalência

Toda teoria local S determina uma categoria $\mathbf{C}(S)$ cujos objetos são os S -conjuntos; a igualdade em $\mathbf{C}(S)$ é estabelecida por:

$$X = Y :\Leftrightarrow \quad \vdash_S X = Y. \quad (3.16)$$

Morfismos em $\mathbf{C}(S)$ são as S -funções, que são definidas como sendo as triplas $\langle f, X, Y \rangle$ de S -conjuntos tais que²

$$\vdash_S f \in Y^X. \quad (3.17)$$

Como $X = X', Y = Y' \vdash_S Y^X = Y'^{X'}$, S -funções são bem definidas. Nesse caso, afirmamos simplesmente que f é uma S -função e escrevemos $f : X \rightarrow Y$. Verificamos então a propriedade

$$f \in Y^X, \langle x, y' \rangle \in f, \langle x, y'' \rangle \in f \vdash_S y' = y'' \quad (3.18)$$

e introduzimos por conta disso a notação

$$f(x) = y :\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f. \quad (3.19)$$

²É importante destacar neste momento que estamos adotando a convenção segundo a qual, quando algum S -conjunto é particularizado metalingüisticamente, ele passa a se comportar como uma constante na expressão formal correspondente. Nesta situação, por exemplo, os S -conjuntos f , X e Y aparecem na expressão formal seguinte como constantes individualizadas e não como variáveis livres.

Em muitos casos, representamos f por

$$x \mapsto f(x). \quad (3.20)$$

O *domínio* X de f é denotado por $\text{dom}(f)$ e o *contradomínio* Y por $\text{cod}(f)$. Demonstra-se facilmente (cf. [4]) que a composição de S -funções, denotada por $\circ$, existe e é associativa, e que a S -função identidade de um dado S -conjunto X , denotada por id_X , existe e funciona como elemento neutro da composição. Logo, $\mathbf{C}(S)$ é de fato uma categoria. Mais do que isso, é possível mostrar que $\mathbf{C}(S)$ tem limites finitos, co-limites finitos, exponencial e classificador de subobjetos; é portanto um topos, chamado de *topos lingüístico*.

Por outro lado, todo topos $\mathbf{E}$ determina uma linguagem local $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, chamada de *linguagem interna* ou de *Mitchell-Bénabou de $\mathbf{E}$* , cujas sortes são todos os objetos de $\mathbf{E}$, de tal maneira que 1 e Ω são as sortes distinguidas. A *teoria local* de $\mathbf{E}$, denotada por $\mathbf{T}(\mathbf{E})$, é a teoria em $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ cujos axiomas são todos os seqüentes válidos pela interpretação canônica de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ em $\mathbf{E}$.

Enunciamos a seguir o chamado teorema da equivalência, o qual estabelece que todo topos é equivalente a um topos lingüístico. A demonstração encontra-se em [4].

Proposição 3.5.1. *Para qualquer topos $\mathbf{E}$:*

$$\mathbf{E} \simeq \mathbf{C}(\mathbf{T}(\mathbf{E})). \quad (3.21)$$

3.6 Algumas definições

Nesta seção apresentamos as definições de algumas noções que serão de uso corrente nos demais capítulos deste trabalho.

Uma S -função $f : X \rightarrow Y$ é dita ser:

(i) *injetora* se $\vdash_S \text{Inj}(f)$, em que

$$\text{Inj}(f) :\Leftrightarrow \forall x', x'' [f(x') = f(x'') \rightarrow x' = x'']; \quad (3.22)$$

(ii) *sobrejetora* se $\vdash_S \text{Sbj}(f)$, em que

$$\text{Sbj}(f) :\Leftrightarrow \forall y \exists x. f(x) = y; \quad (3.23)$$

(iii) *bijetora* se $\vdash_S \text{Bij}(f)$, em que

$$\text{Bij}(f) :\Leftrightarrow \forall y \exists! x. f(x) = y. \quad (3.24)$$

S -funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras correspondem, no topos $\mathbf{C}(S)$, a monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos, respectivamente. Recordemos que, num topos, todo morfismo simultaneamente mono e epi é iso. A S -função *imagem direta* de f , $f : PX \rightarrow PY$ (reservamos para ela o mesmo símbolo f), é definida por:

$$u \in PX \mapsto \{y : \exists x \in u. f(x) = y\}; \quad (3.25)$$

e a S -função *imagem inversa* de f , $f^{-1} : PY \rightarrow PX$, por:

$$v \in PY \mapsto \{x : f(x) \in v\}. \quad (3.26)$$

A *imagem* de f , denotada por $\text{img}(f)$, é o S -conjunto $f(X)$. Essas definições correspondem, naturalmente, às definições categoriais usuais.

Um S -conjunto X é dito ser *habitado* se $\vdash_S \text{Hab}(X)$, em que

$$\text{Hab}(X) :\Leftrightarrow \exists x. x \in X. \quad (3.27)$$

Intuitivamente, X é habitado se ele contém algum elemento. É certo que $\vdash_S \text{Hab}(X) \rightarrow X \neq \emptyset$, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Seja $\vec{z}$ um contexto $z_0, \dots, z_{n-1}$ de tipos $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_{n-1}$, respectivamente. Dizemos que uma fórmula em contexto $\vec{z}.\alpha$ é *decidível* no S -conjunto $\prod_{i < n} X_i$, $X_i \subseteq U_{\mathbf{A}_i}$ ($i = 0, \dots, n-1$), se

$$\vdash_S \forall x_0 \in X_0, \dots, x_{n-1} \in X_{n-1} [\alpha \vee \neg \alpha]. \quad (3.28)$$

De maneira equivalente, $\vec{z}.\alpha$ é decidível em $\prod_{i < n} X_i$ se o S -conjunto

$$\left\{ \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \in \prod_{i < n} X_i : \alpha \right\} \quad (3.29)$$

é um elemento complementado na álgebra de Heyting dos subconjuntos (locais) de $\prod_{i < n} U_{\mathbf{A}_i}$.

Em particular, $z.\alpha$ é decidível em $X \subseteq U_{\mathbf{A}}$ se

$$\vdash_S \forall x \in X [\alpha \vee \neg \alpha]. \quad (3.30)$$

A partir disso, dizemos que $\vec{z}.\alpha$ é *decidível* se é decidível em $\prod_{i < n} U_{\mathbf{A}_i}$.

Lema 3.6.1. *Se $\vec{z}.\alpha$ e $\vec{z}.\beta$ são decidíveis em $\prod_{i < n} X_i$, então $\vec{z}.\alpha \wedge \beta$, $\vec{z}.\alpha \vee \beta$ e $\vec{z}.\alpha \rightarrow \beta$ também o são.*

Demonstração. Se x e y são elementos complementados numa álgebra de Heyting (cf. [41]), com complementos, digamos, $\sim x$ e $\sim y$, respectivamente, então $\sim x \vee \sim y$, $\sim x \wedge \sim y$ e $x \wedge \sim y$ são os respectivos complementos de $x \wedge y$, $x \vee y$ e $x \rightarrow y$ (no caso de elementos complementados, dispomos da identidade $x \rightarrow y = \sim x \vee y$). Com efeito:

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge (\sim x \vee \sim y) &= (x \wedge y \wedge \sim x) \vee (x \wedge y \wedge \sim y) = 0 \vee 0 = 0; \\ (x \wedge y) \vee (\sim x \vee \sim y) &= (x \vee \sim x \vee \sim y) \wedge (y \vee \sim x \vee \sim y) = 1 \wedge 1 = 1; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (\sim x \wedge \sim y) &= (x \wedge \sim x \wedge \sim y) \vee (y \wedge \sim x \wedge \sim y) = 0 \vee 0 = 0; \\ (x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y) &= (x \vee y \vee \sim x) \wedge (x \vee y \vee \sim y) = 1 \wedge 1 = 1; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} (x \rightarrow y) \wedge (x \wedge \sim y) &= ((x \rightarrow y) \wedge x) \wedge \sim y = x \wedge y \wedge \sim y = 0; \\ (x \rightarrow y) \vee (x \wedge \sim y) &\geq (\sim x \vee y) \vee (x \wedge \sim y) = \\ &= (\sim x \vee y \vee x) \wedge (\sim x \vee y \vee \sim y) = 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

□

Capítulo 4

Estruturas ordenadas num topos

Estruturas categoriais podem ser definidas de maneira geral, tal como as estruturas conjuntistas ordinárias. A flexibilidade matemática que governa o estudo dessas estruturas depende do poder expressivo da categoria, que por sua vez está associado à linguagem formal que aquelas estruturas interpretam, isto é, ao referencial lingüístico da categoria. Usualmente escolhe-se uma linguagem suficientemente rica, freqüentemente infinitária, que será interpretada por categorias adequadamente equipadas; fragmentos (subclasses de fórmulas) dessa linguagem são então selecionados e confrontados com categorias estruturalmente mais modestas. O relacionamento entre linguagens formais e estruturas categoriais é o objeto de estudo da semântica categorial. (cf. [29] e [37]).

Dentro de nossas pretensões de tratar dos objetos dos números reais, um grau bastante satisfatório de generalização que podemos obter, na linguagem das categorias, é representado pelos topoi (devidamente guarnecidos do objeto dos números naturais, estudado no Capítulo 5), que possuem um poder expressivo relativamente alto. Topoi podem interpretar a linguagem de uma lógica intuicionista de qualquer ordem, além de possuírem um aparato matemático de caráter conjuntista, fato evidenciado pela teoria local dos conjuntos, tratada no Capítulo 3.

Serão contempladas neste capítulo apenas as estruturas (parcialmente) ordenadas, instrumentos de que faremos uso no desenvolvimento da teoria. Após a exposição de algumas noções elementares que servirão essencialmente para estabelecer a notação, introduzimos o conceito central e inédito de per-

sistência uniforme. Seguimos com a definição de cortes de Dedekind para estruturas linearmente ordenadas e uns resultados preliminares, alguns deles relacionando persistência uniforme. Fechamos o capítulo com a noção de extensão de S -conjuntos, que servirá para definir o objeto dos reais estendidos no Capítulo 6.

4.1 Noções elementares

Exibiremos nesta seção algumas definições de noções e conceitos de que faremos uso no decorrer do capítulo. Quase todas são de emprego ordinário, como ordem, linearidade e densidade, ganhando apenas uma roupagem categorial.

Uma $\mathbf{C}(S)$ -*estrutura (parcialmente) ordenada*, ou simplesmente “uma ordem”, é um par

$$\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle, \quad (4.1)$$

em que A é um S -conjunto e $<$ uma relação sobre A (isto é, um S -subconjunto de $A \times A$) que satisfaz as condições de irreflexividade e transitividade¹:

$$\vdash_S \neg(a < a); \quad (4.2)$$

$$a' < a'', a'' < a''' \vdash_S a' < a'''. \quad (4.3)$$

Para permitir maior legibilidade, afrouxamos a notação eliminando os índices que indicam a proveniência da ordem, escrevendo, por exemplo, $<$ ao invés de $<_A$, mesmo que duas ou mais estruturas participem do enunciado. Em casos ambíguos, contudo, manteremos o rigor necessário.

A relação de *apartação* $\#$, usual em matemática construtiva [55], é definida por:

$$a' \# a'' :\Leftrightarrow a' < a'' \vee a'' < a'. \quad (4.4)$$

Dizemos então que a' e a'' estão *apartados*. Essa relação ganha propriedades especiais quando aplicada a contextos mais específicos, em especial aos números reais, assim como sua negação, a relação de *indiferenciabilidade*:

$$a' \equiv a'' :\Leftrightarrow \neg a' \# a''. \quad (4.5)$$

¹Pelos motivos ponderados nas Notas sobre a linguagem das categorias, na Introdução geral, estaremos omitindo deliberadamente expressões como $a \in A$, $b \in B$, $x' \in X$ etc. Rigorosamente, as expressões seguintes seriam escritas como $a \in A \vdash_S \neg(a < a)$ e $a', a'', a''' \in A, a' < a'', a'' < a''' \vdash_S a' < a'''$.

Neste caso, dizemos que a' e a'' são *indiferenciáveis* ou, se o contexto o permitir, que são simplesmente “iguais”. Decorre imediatamente que:

$$\vdash_S a' \# a'' \rightarrow a' \neq a''; \quad (4.6)$$

$$\vdash_S a' = a'' \rightarrow a' \equiv a''. \quad (4.7)$$

Um homomorfismo f de $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ em $\mathfrak{B} = \langle B, < \rangle$ é um morfismo $f : A \rightarrow B$ que preserva a ordem, isto é,

$$a' < a'' \vdash_S f(a') < f(a''). \quad (4.8)$$

As $\mathbf{C}(S)$ -estruturas ordenadas formam uma categoria $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]$ cujos morfismos são os homomorfismos de preservação de ordem.

Uma ordem $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é *linear* se obedece a condição:

$$\vdash_S a' < a'' \vee a' = a'' \vee a'' < a'. \quad (4.9)$$

A $\mathbf{C}(S)$ -estrutura $\mathfrak{A}$ é *densa em* $\mathfrak{B}$ se existe um monomorfismo $i : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ em $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]$ tal que:

$$b' < b'' \vdash_S \exists a. b' < i(a) < b''. \quad (4.10)$$

Em geral, consideramos um monomorfismo canônico i , via de regra claro pelo contexto. Em $\mathbf{Cnj}$, por exemplo, o monomorfismo canônico é, na maioria das vezes, a inclusão $A \subseteq B$. De agora em diante, sempre que dissermos que $\mathfrak{A}$ é densa em $\mathfrak{B}$, estaremos exprimindo o fato de que o monomorfismo canônico satisfaz a expressão (4.10). $\mathfrak{A}$ é *densa* se é densa nela mesma por meio de id_A .

A $\mathbf{C}(S)$ -estrutura $\mathfrak{A}$ é *persistente em* $\mathfrak{B}$ se é densa em $\mathfrak{B}$ e cumpre:

$$\vdash_S \forall b \exists a', a''. i(a') < b < i(a''). \quad (4.11)$$

Vale aqui a mesma observação que fizemos para a definição de densidade; mais do que isso, o monomorfismo i da expressão (4.11) deve ser o mesmo monomorfismo canônico. $\mathfrak{A}$ é *persistente* se é persistente nela mesma, ou seja, se é densa e não tem pontos extremos.

4.2 Persistência uniforme

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ $\mathbf{C}(S)$ -estruturas ordenadas. $\mathfrak{A}$ é *uniformemente persistente em* $\mathfrak{B}$, fato que será denotado por $\mathfrak{A} \looparrowright \mathfrak{B}$, se é persistente em $\mathfrak{B}$ e, além disso, todo automorfismo de $\mathfrak{A}$ pode ser estendido (por meio do monomorfismo canônico i) a um automorfismo de $\mathfrak{B}$, isto é, para todo automorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, há um automorfismo $\tilde{h} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ tal que o diagrama abaixo comuta em $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{B} \\ \downarrow h & & \downarrow \tilde{h} \\ \mathfrak{A} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{B} \end{array}$$

Observemos que a persistência uniforme é reflexiva e transitiva, por conseguinte uma pré-ordem. Na categoria $\mathbf{Cnj}$, a qual se serve do teorema de Schröder-Bernstein² [54], se $\mathfrak{A} \looparrowright \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \looparrowright \mathfrak{A}$, então o conjunto A é equipotente ao conjunto B . Num topos qualquer, entretanto, monomorfismos $A \hookrightarrow B$ e $B \hookrightarrow A$ não garantem o isomorfismo em questão. Poderíamos então perguntar se as condições adicionais oferecidas aos monomorfismos – quais sejam, a persistência uniforme de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e vice-versa – resultariam no isomorfismo ambicionado. Até o momento, permanece em aberto a questão da existência de um contra-exemplo, num determinado topos, para o isomorfismo $A \simeq B$ no caso de $\mathfrak{A} \looparrowright \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \looparrowright \mathfrak{A}$.

Como veremos no Capítulo 6, a persistência uniforme desempenha papel importante no estabelecimento de uma ordenação de algumas estruturas tradicionalmente reconhecidas como objetos dos números reais, entre as quais as que abrigam os chamados reais de Dedekind e de Cauchy. Demonstramos nesse capítulo que a estrutura dos reais de Cauchy, $\mathfrak{R}_c$, é uniformemente persistente na estrutura dos reais de Dedekind, $\mathfrak{R}_d$, além de considerar outras estruturas ordenadas dos reais (como os reais estendidos $\mathfrak{R}_e$). Por outro lado, no Capítulo 6, demonstraremos que as estruturas (parcialmente) ordenadas dos reais de Cauchy e de Dedekind (definida na seção 6.3), são homogêneas. Em virtude das considerações tecidas no Capítulo 1 – no qual defendemos, com base em considerações históricas, que um critério fundamental para a identificação de um objeto dos números reais é a homogeneidade –, a homogeneidade nos serve como teste de reconhecimento de um tal objeto.

²Na verdade o teorema de Schröder-Bernstein pode ser demonstrado, por meio do teorema do ponto fixo de Tarski, em qualquer topos booleano (cf. [30]).

Quando duas estruturas ordenadas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são tais que $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$, escrevemos simplesmente $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$, que é uma relação de equivalência em $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]$. Dizemos então que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são estruturas *análogas*. Em determinados contextos, a relação de isomorfismo é excessivamente forte para identificar duas estruturas. Em teoria das categorias, por exemplo, a relação de equivalência entre duas categorias (ou melhor, a existência de funtores que indicam equivalência) serve, em geral, para expressar o fato de que essas categorias são indiferenciáveis dentro da teoria [34]. O mesmo acontece, em situações especiais, com as hierarquias de equivalência em n -categorias e com a relação de equivalência elementar em teoria de modelos [15]. Dentro do nosso contexto toposófico de estudo dos objetos dos números reais, a relação $\approx$ de analogia será de suficiente valia para a identificação de duas estruturas ordenadas. Tomaremos então a liberdade de considerar um quociente *externo* $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]/\approx$ cujas classes de equivalência (externas) são as estruturas análogas por $\approx$. Com isso, passaremos a nos referir à persistência uniforme como uma ordem (externamente estabelecida).

Sendo um topos modelo para a lógica intuicionista de primeira ordem, seria interessante levantar um problema de ordem lingüística: a relação de analogia é mais forte do que a relação de equivalência elementar? No caso de uma resposta negativa, em qual fragmento da linguagem poder-se-ia manejar essa noção com segurança? Avançando um pouco mais: caso considerássemos a lógica intuicionista de segunda ordem, para a qual um topos também serve de modelo, um tal fragmento forneceria elementos suficientes para uma investigação da natureza dos números reais? Elegendo a persistência uniforme como bandeira da nossa reflexão, estamos nos envolvendo com questões dessa natureza.

4.3 Cortes de Dedekind

Na teoria clássica dos conjuntos, cortes de Dedekind costumam ser apresentados como construções efetuadas exclusivamente sobre o conjunto dos números racionais. O teorema do vaivém de Cantor, que será exposto no Capítulo 5, contribui decisivamente para essa abordagem: o conjunto ordenado dos racionais é, a menos de isomorfismo, o único conjunto linear, persistente e enumerável (ou, de maneira equivalente, a teoria das ordens lineares e persistentes é $\aleph_0$ -categórica [6]). Veremos mais adiante que essa afirmação tem alcance toposófico. Por seu turno, os matemáticos construti-

vistas transportaram a definição para os seus respectivos universos (cf. [55]), mas a preocupação original de alcançar o completamento dos números racionais só poderia ser mantida com o uso de princípios demasiadamente fortes. Adiaremos o restante da discussão para o Capítulo 6, quando teremos ferramentas suficientes para aprofundar o debate. Por ora, antecipamos que a definição mais geral de cortes de Dedekind, além de natural e adequada a um topos puro, segue critérios técnicos exigidos para o desenvolvimento da teoria.

Um *corte de Dedekind sobre* uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura linearmente ordenada $\mathfrak{A}$ é um par $\langle X, Y \rangle \in PA \times PA$ que satisfaz

$$\vdash_S \text{Ded}_{\mathfrak{A}}(\langle X, Y \rangle), \quad (4.12)$$

em que

$$\begin{aligned} \text{Ded}_{\mathfrak{A}}(\langle X, Y \rangle) : \Leftrightarrow & \text{Hab}(X) \wedge \text{Hab}(Y) \wedge X \cap Y = \emptyset \\ & \wedge \forall a'(a' \in X \leftrightarrow \exists a'' \in X. a' < a'') \\ & \wedge \forall a'(a' \in Y \leftrightarrow \exists a'' \in Y. a'' < a') \\ & \wedge \forall a', a''(a' < a'' \rightarrow a' \in X \vee a'' \in Y). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Intuitivamente, um corte de Dedekind biparte o domínio da estrutura em S -conjuntos habitados, disjuntos (primeira linha da definição), abertos e limitados (segunda e terceira linhas) e (maximal-)consecutivos (quarta linha).

Representaremos, sempre que conveniente, o S -conjunto de todos os cortes de Dedekind de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{d}A$. Assim:

$$\mathfrak{d}A := \{u \in PA \times PA : \text{Ded}(u)\}. \quad (4.14)$$

Definindo a ordem estrita sobre $\mathfrak{d}A$ por³

$$u < v : \Leftrightarrow u, v \in \mathfrak{d}A \wedge \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u), \quad (4.15)$$

determinamos uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura $\langle \mathfrak{d}A, < \rangle$, que será denotada por $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$.

O lema seguinte assegura que a construção por cortes de Dedekind preserva isomorfismos entre $\mathbf{C}(S)$ -estruturas.

Lema 4.3.1. *Se $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle B, < \rangle$ são $\mathbf{C}(S)$ -estruturas linearmente ordenadas e isomorfas, então $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{d}\mathfrak{B}$.*

³Optamos por representar as projeções pelas formas mais explícitas $\pi'(u)$ (em vez de u'), $\pi''(v)$ (em vez de v'') etc.

Demonstração. Seja $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ um tal isomorfismo. Notemos inicialmente que

$$\vdash_S \forall u \in \mathfrak{d}A. \text{Ded}_{\mathfrak{B}}(\langle h \circ \pi'(u), h \circ \pi''(u) \rangle) \quad (4.16)$$

(basta conferir a definição (4.13)). Definimos então $\tilde{h} : \mathfrak{d}A \rightarrow \mathfrak{d}B$ por

$$u \mapsto \langle h \circ \pi'(u), h \circ \pi''(u) \rangle. \quad (4.17)$$

Pelo fato de h ser bijetora, verificamos que

$$\vdash_S \forall V \in PB \exists! U \in PA. h(U) = V \quad (4.18)$$

e, por conseguinte,

$$\vdash_S \forall v \in \mathfrak{d}B \exists! u \in \mathfrak{d}A [h \circ \pi'(u) = \pi'(v) \wedge h \circ \pi''(u) = \pi''(v)], \quad (4.19)$$

o que nos revela ser $\tilde{h}$ uma bijeção.

$\tilde{h}$ preserva (nos dois sentidos) a relação $<$ porque

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S u < v &\leftrightarrow \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\leftrightarrow \exists a. h(a) \in h \circ \pi'(v) \cap h \circ \pi''(u) \\ &\leftrightarrow \exists b. b \in h \circ \pi'(v) \cap h \circ \pi''(u) \\ &\leftrightarrow \tilde{h}(u) < \tilde{h}(v). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Na expressão acima, a primeira e a última linhas seguem da definição (4.15). $\square$

O lema seguinte garante que, se a $\mathbf{C}(S)$ -estrutura $\mathfrak{A}$ for persistente, sempre haverá um monomorfismo $i_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}$.

Lema 4.3.2. *Seja $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura habitada, linearmente ordenada e persistente. Então*

$$\vdash_S \forall a. \text{Ded}(\langle \{a' : a' < a\}, \{a' : a < a'\} \rangle) \quad (4.21)$$

e, além disso, o morfismo $i_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}$, definido por

$$a \mapsto \langle \{a' : a' < a\}, \{a' : a < a'\} \rangle, \quad (4.22)$$

é um monomorfismo.

Demonstração. A primeira parte sai diretamente da definição (4.13): ambos os S -conjuntos do par são habitados (pois $\mathfrak{A}$ não tem pontos extremos), disjuntos, abertos (pois $\mathfrak{A}$ é densa) e consecutivos (pois $\mathfrak{A}$ é linear). A segunda parte resulta da expressão abaixo:

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{A}}(a_0) = i_{\mathfrak{A}}(a_1) \mid_S & \langle \{a' : a' < a_0\}, \{a' : a_0 < a'\} \rangle \\ & = \langle \{a' : a' < a_1\}, \{a' : a_1 < a'\} \rangle \\ & [a' < a_0 \leftrightarrow a' < a_1] \wedge [a_0 < a' \leftrightarrow a_1 < a'] \\ & a_0 = a_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

(a última linha segue da linearidade de $\mathfrak{A}$). $\square$

Chamamos $i_{\mathfrak{A}}$ de *monomorfismo canônico*. Essa notação será mantida daqui em diante, com possível omissão do índice que indica a estrutura.

Lema 4.3.3. *Sejam $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle B, < \rangle$ $\mathbf{C}(S)$ -estruturas linearmente ordenadas e persistentes. Então, para cada isomorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, existe um isomorfismo $\tilde{h} : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}$ que estende h , isto é, para o qual $\tilde{h} \circ i_{\mathfrak{A}} = i_{\mathfrak{B}} \circ h$.*

Demonstração. Repetindo os passos da demonstração do Lema 4.3.1, obtemos, a partir de qualquer isomorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, um isomorfismo $\tilde{h} : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}$ definido por:

$$u \mapsto \langle h \circ \pi'(u), h \circ \pi''(u) \rangle. \quad (4.24)$$

Resta então mostrar que $\tilde{h}$ estende h :

$$\begin{aligned} \mid_S \tilde{h} \circ i_{\mathfrak{A}}(a) & = \langle h(\{a' : a' < a\}), h(\{a' : a < a'\}) \rangle \\ & = \langle \{h(a') : a' < a\}, \{h(a') : a < a'\} \rangle \\ & = \langle \{h(a') : h(a') < h(a)\}, \{h(a') : h(a) < h(a')\} \rangle \\ & = \langle \{b : b < h(a)\}, \{b : h(a) < b\} \rangle \\ & = i_{\mathfrak{B}} \circ h(a). \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\square$

A próxima proposição estabelece o primeiro resultado de persistência uniforme.

Proposição 4.3.4. *Se a $\mathbf{C}(S)$ -estrutura linearmente ordenada $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é persistente, então ela é uniformemente persistente em $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Temos que mostrar, inicialmente, que $\mathfrak{A}$ é persistente em $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$. Que aquela é densa nesta, revela-o a expressão seguinte (recordando que i é o monomorfismo canônico do Lema 4.3.2):

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \mid_S u < v &\rightarrow \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\rightarrow \exists a, a', a'' [a' < a < a'' \wedge a', a'' \in \pi'(v) \cap \pi''(u)] \\ &\rightarrow \exists a. u < i(a) < v, \end{aligned} \tag{4.26}$$

em que a primeira linha segue da definição (4.15), a segunda do fato de “o corte ser aberto” e a terceira novamente da definição (4.15) (Figura 3).

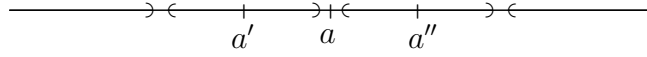


Figura 3

A persistência de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ é imediatamente averiguada em:

$$\begin{aligned} u \in \mathfrak{d}A \mid_S &\exists a', a'' [a' \in \pi'(u) \wedge a'' \in \pi''(u)] \\ &\mid_S \exists a', a''. i(a') < u < i(a''), \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que usamos a propriedade de “cortes serem habitados” (primeira linha) e a definição (4.15) (segunda linha). Finalmente, sendo $\mathfrak{A}$ persistente, temos, como um caso particular do Lema 4.3.3 (usando $\mathfrak{A}$ em lugar de $\mathfrak{B}$), que todo automorfismo de $\mathfrak{A}$ pode ser estendido a um automorfismo de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$. Concluimos portanto que $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{d}\mathfrak{A}$. $\square$

A proposição abaixo prescreve uma condição suficiente para que uma determinada subestrutura alcance sua expansão em produção de cortes.

Proposição 4.3.5. *Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são duas $\mathbf{C}(S)$ -estruturas linearmente ordenadas e $\mathfrak{B}$ é densa em $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{d}\mathfrak{B}$*

Demonstração. Considere $i : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ um monomorfismo em $\text{Ord}[\mathbf{C}(S)]$ tal que

$$a' < a'' \mid_S \exists b. a' < i(b) < a''. \tag{4.28}$$

Desejamos construir, a partir de i , um isomorfismo $h : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}$. Notemos primeiramente que

$$u \in \mathfrak{d}A \mid_S \langle \{b : i(b) \in \pi'(u)\}, \{b : i(b) \in \pi''(u)\} \rangle \in \mathfrak{d}B \tag{4.29}$$

pelo fato de $\mathfrak{B}$ ser densa em $\mathfrak{A}$. A S -função $h : \mathfrak{d}A \rightarrow \mathfrak{d}B$, definida por

$$u \mapsto \langle \{b : i(b) \in \pi'(u)\}, \{b : i(b) \in \pi''(u)\} \rangle, \quad (4.30)$$

torna-se assim uma candidata natural. Verifiquemos se h é, de fato, uma bijeção. Primeiro, que é injetora:

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S h(u) = h(v) &\rightarrow \{b : i(b) \in \pi'(u)\} = \{b : i(b) \in \pi'(v)\} \\ &\rightarrow \forall b [i(b) \in \pi'(u) \leftrightarrow i(b) \in \pi'(v)]; \end{aligned} \quad (4.31)$$

todavia:

$$\begin{aligned} \forall b [i(b) \in \pi'(u) \leftrightarrow i(b) \in \pi'(v)] \vdash_S & a \in \pi'(u) \\ &\rightarrow \exists a' [a < a' \wedge a' \in \pi'(u)] \\ &\rightarrow \exists b' [a < i(b') < a' \wedge i(b') \in \pi'(u)] \\ &\rightarrow \exists b' [a < i(b') \wedge i(b') \in \pi'(v)] \\ &\rightarrow a \in \pi'(v); \end{aligned} \quad (4.32)$$

de maneira idêntica:

$$\forall b [i(b) \in \pi'(u) \leftrightarrow i(b) \in \pi'(v)] \vdash_S a \in \pi'(v) \rightarrow a \in \pi'(u); \quad (4.33)$$

logo:

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S h(u) = h(v) &\rightarrow \forall a [a \in \pi'(u) \leftrightarrow a \in \pi'(v)] \\ &\rightarrow \pi'(u) = \pi'(v); \end{aligned} \quad (4.34)$$

do mesmo modo:

$$u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S h(u) = h(v) \rightarrow \pi''(u) = \pi''(v); \quad (4.35)$$

finalmente:

$$u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S h(u) = h(v) \rightarrow u = v. \quad (4.36)$$

Agora, para mostrar que h é sobrejetora, observemos o seguinte fato:

$$\begin{aligned} \vdash_S & \pi' \circ h(\langle \{a : \exists b \in \pi'(v). a < i(b)\}, \{a : \exists b \in \pi''(v). i(b) < a\} \rangle) \\ &= \{b : i(b) \in \{a : \exists b \in \pi'(v). a < i(b)\}\} \\ &= \{b : \exists b' \in \pi'(v). i(b) < i(b')\} \\ &= \{b : \exists b' \in \pi'(v). b < b'\} \\ &= \pi'(v); \end{aligned} \quad (4.37)$$

analogamente:

$$\vdash_S \pi'' \circ h(\langle \{a : \exists b \in \pi'(v). a < i(b)\}, \{a : \exists b \in \pi''(v). i(b) < a\} \rangle) = \pi''(v); \quad (4.38)$$

dessa forma:

$$\vdash_S h(\langle \{a : \exists b \in \pi'(v). a < i(b)\}, \{a : \exists b \in \pi''(v). i(b) < a\} \rangle) = v. \quad (4.39)$$

Portanto, podemos concluir que:

$$v \in \mathfrak{d}B \vdash_S \exists u \in \mathfrak{d}A. h(u) = v. \quad (4.40)$$

Resta mostrar que h é um isomorfismo. Por um lado:

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S u < v &\rightarrow \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\rightarrow \exists a, a' [a < a' \wedge a, a' \in \pi'(v) \cap \pi''(u)] \\ &\rightarrow \exists b. i(b) \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\rightarrow \exists b. b \in \{b' : i(b') \in \pi'(v)\} \\ &\quad \cap \{b' : i(b') \in \pi''(u)\} \\ &\rightarrow \exists b. b \in \pi' \circ h(v) \cap \pi'' \circ h(u) \\ &\rightarrow h(u) < h(v); \end{aligned} \quad (4.41)$$

por outro:

$$\begin{aligned} u, v \in \mathfrak{d}A \vdash_S h(u) < h(v) &\rightarrow \exists b. b \in \pi' \circ h(v) \cap \pi'' \circ h(u) \\ &\rightarrow \exists b. b \in \{b' : i(b') \in \pi'(v)\} \\ &\quad \cap \{b' : i(b') \in \pi''(u)\} \\ &\rightarrow \exists b. i(b) \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\rightarrow \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u) \\ &\rightarrow u < v. \end{aligned} \quad (4.42)$$

□

Uma consequência interessante da Proposição 4.3.4 e da Proposição 4.3.5 é a conclusão de que, se $\mathfrak{A}$ é uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura linearmente ordenada e persistente e $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ é linear, então $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{d}\mathfrak{d}\mathfrak{A}$. Isso significa que a construção por cortes de Dedekind é idempotente, num certo sentido, quando aplicada a $\mathbf{C}(S)$ -estruturas persistentes.

O próximo lema, que resume em grande parte os resultados anteriores, terá papel significativo na Capítulo 6, em que discutiremos os cortes de Dedekind sobre o objeto dos números racionais.

Lema 4.3.6. *Considere as seguintes afirmações:*

- $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são $\mathbf{C}(S)$ -estruturas linearmente ordenadas e persistentes;
- $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ é um isomorfismo parcial;
- $\text{dom}(f)$ é denso em $\mathfrak{A}$ e $\text{cod}(f)$ é denso em $\mathfrak{B}$.

Então existe um isomorfismo $h : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}$ que estende f , isto é, para o qual $h \circ i_{\mathfrak{A}}|_{\text{dom}(f)} = i_{\mathfrak{B}} \circ f$.

Demonstração. Sejam $\mathfrak{A}' = \langle \text{dom}(f), <_{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{B}' = \langle \text{cod}(f), <_{\mathfrak{B}} \rangle$ as respectivas $\mathbf{C}(S)$ -estruturas (isomorfas) geradas por $\text{dom}(f)$ e $\text{cod}(f)$; inferimos facilmente das hipóteses que $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$ são persistentes. Pelo Lema 4.3.3, existe um isomorfismo $\tilde{f} : \mathfrak{d}\mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}'$ que estende f . Agora, pela Proposição 4.3.5, existem isomorfismos $h' : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}'$ e $h'' : \mathfrak{d}\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}'$. Portanto, podemos definir $h : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{B}$ por $h = h''^{-1} \circ \tilde{f} \circ h'$, de acordo com o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{d}\mathfrak{A} & \xrightarrow{h} & \mathfrak{d}\mathfrak{B} \\ \downarrow h' & & \downarrow h'' \\ \mathfrak{d}\mathfrak{A}' & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathfrak{d}\mathfrak{B}' \end{array}$$

h é um isomorfismo por se tratar de uma composição de isomorfismos; e é uma extensão de $\tilde{f}$ pelo fato de o diagrama acima ser comutativo. Logo, é também uma extensão de f . $\square$

A definição mais geral de cortes de Dedekind que estamos adotando neste trabalho não é simplesmente uma generalização arbitrária da construção tradicional efetuada sobre o objeto dos números racionais. Há critérios técnicos que demandam tal procedimento. Como teremos a oportunidade de constatar no Capítulo 7, a demonstração da homogeneidade da estrutura ordenada dos números reais de Dedekind requer o manejo de cortes de Dedekind de subobjetos persistentes do objeto dos números racionais. E o Lema 4.3.6, em especial, prenuncia as nossas futuras aplicações.

4.4 Objetos estendidos

Se $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura linearmente ordenada, definimos a S -função $\delta : PA \rightarrow PA$ por:

$$X \mapsto \{a : \exists a' [a' < a \wedge \forall a'' \in X. a'' < a']\}; \quad (4.43)$$

similarmente, a S -função $\epsilon : PA \rightarrow PA$ é definida por:

$$X \mapsto \{a : \exists a'[a < a' \wedge \forall a'' \in X. a' < a'']\}. \quad (4.44)$$

Um *elemento estendido* de $\mathfrak{A}$ é um par $\langle X, Y \rangle \in PA \times PA$ que satisfaz

$$\vdash_S \text{Est}_{\mathfrak{A}}(\langle X, Y \rangle), \quad (4.45)$$

em que

$$\text{Est}_{\mathfrak{A}}(\langle X, Y \rangle) :\Leftrightarrow \text{Hab}(X) \wedge \text{Hab}(Y) \wedge \delta(X) = Y \wedge \epsilon(Y) = X. \quad (4.46)$$

O S -conjunto de todos os elementos estendidos de $\mathfrak{A}$ será representado por $\mathfrak{e}A$. Assim:

$$\mathfrak{e}A := \{u \in PA \times PA : \text{Est}(u)\}. \quad (4.47)$$

Se a ordem estrita sobre $\mathfrak{e}A$ for definida por

$$u < v :\Leftrightarrow \exists a. a \in \pi'(v) \cap \pi''(u), \quad (4.48)$$

exatamente como fizemos para $\mathfrak{d}A$, determinamos uma $\mathbf{C}(S)$ -estrutura $\langle \mathfrak{e}A, < \rangle$ que será denotada por $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$.

Verifica-se, pela linearidade de $\mathfrak{A}$, que todo corte de Dedekind satisfaz a condição de elemento estendido (cf. [4]); logo, $\mathfrak{d}A \subseteq \mathfrak{e}A$ e, portanto, existe um monomorfismo $l : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{e}\mathfrak{A}$. Queremos mostrar agora que $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ é uniformemente persistente em $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$.

Proposição 4.4.1. *Se a estrutura linearmente ordenada $\mathfrak{A}$ é persistente, então $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \looparrowright \mathfrak{e}\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Por definição de $<$ em $\mathfrak{e}A$, $\mathfrak{A}$ é persistente em $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$ e, assim, $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ é persistente em $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$.

Seja $h : \mathfrak{d}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}$ um automorfismo de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$. Definimos um automorfismo $\tilde{h}$ de $\mathfrak{e}\mathfrak{A}$ por:

$$\langle X, Y \rangle \mapsto \langle \{a : l(a) \in h \circ l(X)\}, \{a : l(a) \in h \circ l(Y)\} \rangle, \quad (4.49)$$

em que $l : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{e}\mathfrak{A}$ é o monomorfismo definido no parágrafo acima. É fácil ver que $u \in \mathfrak{e}A \vdash_S \tilde{h}(u) = h(u)$. $\square$

Capítulo 5

Objeto dos números naturais num topos

Introduzimos neste capítulo os axiomas que representam o objeto dos números naturais numa teoria local de conjuntos. Não temos o propósito de apresentar uma exposição exaustiva da teoria local naturalizada, como é chamada a teoria local provida dos números naturais. Nosso objetivo é preparar o terreno para a definição das noções fundamentais e demonstração dos resultados centrais deste trabalho, que envolvem essencialmente os objetos dos números reais. O leitor interessado encontrará novamente em [4] a referência básica sobre o assunto.

Após a apresentação dos axiomas básicos de uma teoria local naturalizada e de algumas noções fundamentais que compõem o seu alicerce, demonstramos o princípio do mínimo para propriedades decidíveis e introduzimos as definições de enumerabilidade e finitude. Seqüências finitas recebem um tratamento mais pessoal, constituindo um caso particular da definição mais geral de seqüência. Finalmente, depois de uma preparação teórica no âmbito das estruturas ordenadas, concluímos o capítulo com a demonstração do teorema do vaivém de Cantor, que envolve praticamente todo o instrumental sobre os naturais aqui desenvolvido.

5.1 Objeto dos números naturais

Números naturais foram introduzidos em categorias por F. W. Lawvere em 1971. Num topos $\mathbf{E}$, um *objeto dos números naturais* é um objeto $\mathbb{N}$, munido

de morfismos $1 \xrightarrow{o} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$, tal que, para todo diagrama da forma $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} X$, existe um único morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{!} X$ que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{N} \\ & \searrow x & \downarrow ! & & \downarrow ! \\ & & X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comutar. Demonstra-se que há, a menos de isomorfismo, um único objeto $\mathbb{N}$ satisfazendo a definição acima [30].

A definição categorial de $\mathbb{N}$ é simples e direta, mas o desenvolvimento da teoria – que envolve recursão, objetos enumeráveis, objetos finitos, seqüências e outras noções – se torna por demais complexo se conduzido em linguagem categorial. Retornemos então ao nosso ambiente de trabalho que é a teoria local dos conjuntos.

Uma teoria local N é dita ser *naturalizada* se sua linguagem possui um tipo $\mathbb{N}$, um termo fechado 0 de tipo $\mathbb{N}$ e uma N -função s de tipo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfazendo os *axiomas de Peano*:

$$\vdash_N \neg[s(n) = 0]; \quad (5.1)$$

$$s(m) = s(n) \vdash_N m = n; \quad (5.2)$$

$$0 \in u, \forall n[n \in u \rightarrow s(n) \in u] \vdash_N \forall n.n \in u. \quad (5.3)$$

O axioma (5.3) é chamado de *axioma de indução*. O N -conjunto $U_{\mathbb{N}}$ (cf. definição (3.8)), denotado por $\mathbb{N}$, é então chamado de objeto dos números naturais, que coincide, naturalmente, com o objeto $\mathbb{N}$ de $\mathbf{C}(N)$ (cf. [4]). Elementos de $\mathbb{N}$ serão denotados, como nos axiomas acima, por m, n, n' etc. A N -função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é chamada de *sucessor*, enquanto que os elementos $0, 1 := s(0), 2 := s(1)$ e $3 := s(2)$ são chamados de *zero, um, dois* e *três*, respectivamente (os demais elementos de $\mathbb{N}$ não são explicitados neste trabalho; basta contar até 3).

No axioma de indução (5.3), se a variável u (de tipo $\mathbf{PN}$) for substituída por $\{n : \alpha(n)\}$, para qualquer fórmula α de contexto n , teremos o seguinte *esquema de indução*:

$$\alpha(0), \forall n[\alpha(n) \rightarrow \alpha(s(n))] \vdash_S \forall n.\alpha(n). \quad (5.4)$$

Em particular, se $\vdash_N \alpha(0)$ e $\alpha(n) \vdash_N \alpha(s(n))$, então $\vdash_N \forall n.\alpha(n)$.

O seqüente apresentado a seguir é o chamado *princípio da recursão* (*primitiva*), cuja demonstração pormenorizada pode ser verificada em [4]:

$$x \in X, g \in X^{X \times \mathbb{N}} \vdash_N \exists! f \in X^{\mathbb{N}} [f(0) = x \wedge \forall n. f \circ s(n) = g(f(n), n)]. \quad (5.5)$$

Como primeira aplicação do princípio da recursão, definimos uma N -função $[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow P\mathbb{N}$ que, intuitivamente, coleta todos os naturais menores que um dado n . Pelo princípio da recursão:

$$\vdash_N \exists! [\cdot] \in (P\mathbb{N})^{\mathbb{N}} [[0] = \emptyset \wedge [s(n)] = [n] \cup \{n\}]. \quad (5.6)$$

Podemos agora definir a relação de *ordem estrita* em $\mathbb{N}$ por:

$$m < n :\Leftrightarrow m \in [n]. \quad (5.7)$$

Usando a nova notação, temos agora $\vdash_N [n] = \{m : m < n\}$.

O lema seguinte é uma coletânea de fatos básicos sobre a ordem estrita e o N -conjunto $\mathbb{N}$. A demonstração é direta e pode ser verificada em [4].

Lema 5.1.1. *A ordem estrita $<$ em $\mathbb{N}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- *elemento minimal:*

$$\vdash_N \neg(n < 0); \quad (5.8)$$

- *discrição:*

$$\vdash_N m < s(n) \leftrightarrow m = n \vee m < n; \quad (5.9)$$

- *irreflexividade:*

$$\vdash_N \neg(n < n); \quad (5.10)$$

- *transitividade:*

$$m' < n, n < m'' \vdash_N m' < m''; \quad (5.11)$$

- *linearidade:*

$$\vdash_N m < n \vee m = n \vee n < m; \quad (5.12)$$

- *decidibilidade:*

$$\vdash_N m = n \vee \neg(m = n). \quad (5.13)$$

A decidibilidade da igualdade em $\mathbb{N}$ dá ocasião para que empreguemos a relação $\leq$ em sua acepção tradicional:

$$m \leq n :\Leftrightarrow m = n \vee m < n. \quad (5.14)$$

A *adição* (ou *soma*) $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é definida como sendo a transposta da N -função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida por recursão:

$$\vdash_N f(0) = \text{id}_{\mathbb{N}} \wedge (f \circ s)(n) = (s^{\mathbb{N}} \circ f)(n), \quad (5.15)$$

em que $s^{\mathbb{N}} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é a N -função $g \mapsto s \circ g$. Pela definição, a adição satisfaz a propriedade ordinária:

$$\vdash_N 0 + n = n \wedge s(m) + n = s(m + n). \quad (5.16)$$

Notemos que $\vdash_N s(n) = n + 1$.

O *produto* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é obtido de maneira semelhante, satisfazendo a propriedade:

$$\vdash_N 0.n = 0 \wedge s(m).n = m.n + n. \quad (5.17)$$

Verificam-se por indução as condições de associatividade e comutatividade da adição e da multiplicação.

Finalmente, a *exponencial* $(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é obtida por:

$$\vdash_N m^0 = 1 \wedge m^{s(n)} = m^n.m. \quad (5.18)$$

5.2 Princípio do mínimo

Toda função recursiva primitiva é representável (cf. [33]) num topos: as N -funções zero ($n \mapsto 0$), projeção e sucessor integram o repertório convencional de uma teoria local naturalizada; substituição é simplesmente a composição com o produto; e a recursão primitiva equivale à expressão (5.5).

Funções recursivas primitivas, através de suas representações, serão de grande valia no desenvolvimento da teoria. Exemplos fundamentais são as bijeções usuais entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$:

$$\langle m, n \rangle \mapsto 2^m(1 + 2n) - 1; \quad (5.19)$$

$$\langle m, n \rangle \mapsto \frac{((m + n)^2 + 3m + n)}{2}. \quad (5.20)$$

Traçamos como objetivo desta seção a demonstração do princípio do mínimo, que pode ser descrito intuitivamente como: se algum número natural tem uma determinada propriedade *decidível*, então sempre haverá um menor número natural com essa propriedade. É importante destacar que estamos lidando com propriedades – isto é, fórmulas na linguagem local – decidíveis, cuja definição foi apresentada na expressão (3.28). Em [55] encontramos uma demonstração construtiva de que a imposição do caso mais geral leva à lei do terceiro excluído.

Antes da demonstração propriamente, vamos introduzir uma notação que será de muita serventia neste capítulo e nos demais. A *conjunção finita* de uma fórmula α é a N -função $\bigwedge_{i < (\cdot)} \alpha : \mathbb{N} \rightarrow U_\Omega$ definida recursivamente pela expressão¹:

$$\vdash_N \bigwedge_{i < 0} \alpha = \top \wedge \forall n \left[\bigwedge_{i < n+1} \alpha = \bigwedge_{i < n} \alpha \wedge \alpha(n) \right]. \quad (5.21)$$

Recordemos que U_Ω é o N -conjunto $\{\omega : \top\}$ (cf. definição (3.8)).

Da mesma forma, a *disjunção finita* de α é definida por:

$$\vdash_N \bigvee_{i < 0} \alpha = \perp \wedge \forall n \left[\bigvee_{i < n+1} \alpha = \bigvee_{i < n} \alpha \vee \alpha(n) \right]. \quad (5.22)$$

Uma simples indução é suficiente para garantir o resultado intuitivo:

$$n \leq m \vdash_N \bigwedge_{i < m} \alpha \rightarrow \bigwedge_{i < n} \alpha; \quad (5.23)$$

$$n \leq m \vdash_N \bigvee_{i < n} \alpha \rightarrow \bigvee_{i < m} \alpha; \quad (5.24)$$

e a aplicação direta da definição, com ajuda de propriedades elementares do cálculo proposicional intuicionista (cf. [19]), produz:

$$\vdash_N \left[\bigvee_{i < n+1} \alpha \wedge \neg \bigvee_{i < n} \alpha \right] \rightarrow \alpha(n). \quad (5.25)$$

O lema seguinte, de capital importância para a Proposição 5.2.2, atesta a decidibilidade das fórmulas $\bigwedge_{i < n} \alpha$ e $\bigvee_{i < n} \alpha$ como consequência da decidibilidade de α .

¹Sendo uma fórmula um termo de tipo Ω , a conjunção finita seria mais rigorosamente definida por uma N -função da forma $\bigwedge_{i < (\cdot)} (\cdot) : U_\Omega \times \mathbb{N} \rightarrow U_\Omega$.

Lema 5.2.1. *Se a fórmula α é decidível em $\mathbb{N}$, então, para cada n , $\bigwedge_{i < n} \alpha$ e $\bigvee_{i < n} \alpha$ também o são.*

Demonstração. Usando indução, o caso $n = 0$ é imediato. Para o próximo passo, é suficiente aplicar o Lema 3.6.1. $\square$

Já temos condições de demonstrar o princípio do mínimo, tarefa da próxima proposição.

Proposição 5.2.2. *Se a fórmula α é decidível em $\mathbb{N}$, então*

$$\exists n. \alpha(n) \vdash_N \exists n [\alpha(n) \wedge \forall m (\alpha(m) \rightarrow n \leq m)]. \quad (5.26)$$

Demonstração. Precisamos de uma N -função auxiliar $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & f(0) = 0 \\ & \wedge \forall n [(\bigvee_{i < n+1} \alpha \rightarrow f(n+1) = f(n) + 1) \\ & \wedge (\neg \bigvee_{i < n+1} \alpha \rightarrow f(n+1) = f(n))]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

O Lema 5.2.1 garante que f está bem definida. Uma propriedade imediata de f é:

$$\vdash_N \exists n. \alpha(n) \rightarrow \exists n. f(n) > 0. \quad (5.28)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \vdash_N \exists n. \alpha(n) \quad & \rightarrow \exists n. \bigvee_{i < n+1} \alpha \\ & \rightarrow \exists n. f(n+1) = f(n) + 1 \\ & \rightarrow \exists n. f(n) > 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Outro fato elementar de que faremos uso é:

$$\vdash_N \forall n. f(n) \leq f(n+1). \quad (5.30)$$

O roteiro da nossa demonstração é o seguinte: mostraremos inicialmente que, se $\vdash_N \exists n. \alpha(n)$, e portanto $\vdash_N \exists n. f(n) > 0$, então f é sobrejetora. Em particular, satisfeita a condição descrita, o número natural 1 sempre pertencerá à imagem de f . Depois disso, partiremos para o resultado final, que exhibe o mínimo requerido:

$$f(n+1) = 1 \vdash_N \alpha(n) \wedge \forall m [\alpha(m) \rightarrow n \leq m]. \quad (5.31)$$

Demonstraremos agora por indução que

$$\vdash_N \forall n [f(n) > 0 \rightarrow \text{Sbj}(f)]. \quad (5.32)$$

O passo $n = 0$ sai diretamente da definição. Consideremos então a hipótese de indução (HI) $\vdash_N f(n) > 0 \rightarrow \text{Sbj}(f)$; para $\vdash_N f(n+1) > 0$, temos duas possibilidades: se $\vdash_N f(n) > 0$, aplica-se a HI; caso contrário:

$$\vdash_N f(n) = 0 \rightarrow f(n+1) = f(n) + 1 = 1. \quad (5.33)$$

Nesse caso, temos da definição de f que $\vdash_N \bigvee_{i < n+1} \alpha$ e, portanto,

$$\vdash_N \forall m \left[m > 0 \rightarrow \bigvee_{i < n+m} \alpha \right]. \quad (5.34)$$

Com isso, ainda pela definição de f , concluímos por nova indução que

$$\begin{aligned} f(n) = 0 \quad & \vdash_N \forall m. f(n+m) = m \\ & \vdash_N \text{Sbj}(f) \end{aligned} \quad (5.35)$$

e assim vale a expressão (5.32), da qual tiramos como consequência o resultado:

$$\vdash_N \exists n. f(n) > 0 \rightarrow \text{Sbj}(f). \quad (5.36)$$

Para finalizar, vamos demonstrar por indução a expressão (5.31). Para $n = 0$, temos:

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \vdash_N f(1) = f(0) + 1; \quad (5.37)$$

assim, $f(1) = 1 \vdash_N \bigvee_{i < 1} \alpha$ e portanto $f(1) = 1 \vdash_N \alpha(0)$; logo,

$$f(1) = 1 \vdash_N \alpha(0) \wedge \forall m [\alpha(m) \rightarrow 0 \leq m]. \quad (5.38)$$

Guardemos a HI e suponhamos que $\vdash_N f(n+2) = 1$. Admitamos, por absurdo, que $\vdash_N f(n+1) = 1$; dessa forma:

$$\begin{aligned} f(n+2) = f(n+1) = 1 \quad & \vdash_N \alpha(n) \\ & \vdash_N \bigvee_{i < n+2} \alpha \\ & \vdash_N f(n+2) = f(n+1) + 1 \\ & \vdash_N \perp, \end{aligned} \quad (5.39)$$

o que nos conduz a $f(n+2) = 1 \vdash_N f(n+1) \neq 1$; por (5.30), temos que $f(n+2) = 1 \vdash_N f(n+1) = 0 = f(n)$; logo, $f(n+2) = 1 \vdash_N \neg \bigvee_{i < n+1} \alpha$. Além disso,

$$f(n+2) = f(n+1) + 1 \vdash_N \bigvee_{i < n+2} \alpha, \quad (5.40)$$

o que, pela expressão (5.25), nos assegura que $f(n+2) = 1 \vdash_N \alpha(n+1)$. Para encerrar, admitamos agora, novamente por absurdo, que $\vdash_N m \leq n$. Então, pela expressão (5.24):

$$\begin{array}{c} m+1 \leq n+1, \neg \bigvee_{i < n+1} \alpha \vdash_N \neg \bigvee_{i < m+1} \alpha \\ \vdash_N \neg \alpha(m). \end{array} \quad (5.41)$$

Completando a argumentação:

$$\begin{array}{c} f(n+2) = 1, \alpha(m) \vdash_N m < n+1 \rightarrow \neg \alpha(m) \\ \vdash_N m < n+1 \rightarrow \perp \\ \vdash_N \neg(m < n+1) \\ \vdash_N n+1 \leq m; \end{array} \quad (5.42)$$

portanto:

$$f(n+2) = 1 \vdash_N \alpha(n+1) \wedge \forall m[\alpha(m) \rightarrow n+1 \leq m]. \quad (5.43)$$

E a proposição finalmente está demonstrada. $\square$

Se a fórmula $\alpha(n)$ é decidível e $\vdash_N \exists n.\alpha(n)$, então, como consequência da anti-simetria de $\leq$, o mínimo será único, isto é:

$$\vdash_N \exists! n[\alpha(n) \wedge \forall m(\alpha(m) \rightarrow n \leq m)]. \quad (5.44)$$

Esse mínimo é denotado por $\mu n.\alpha(n)$.

5.3 Enumerabilidade e finitude

Para qualquer topos, possuir um objeto dos números naturais $\mathbb{N}$ equivale à propriedade de ter um objeto X tal que $X \simeq X+1$, em que 1 é o objeto final do topos [4]. Costuma-se definir então um objeto X como sendo *infinito* se existe um isomorfismo $X \simeq X+1$. Portanto, todo topos naturalizado tem um objeto infinito e vice-versa. Mais profícuas serão para nós as noções de enumerabilidade e finitude, que serão definidas por uma abordagem mais direta.

No topos **Cnj**, enumerabilidade significa equipotência com o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais. Definiremos inicialmente uma noção mais fraca do que essa. Dizemos que o N -conjunto X é *enumerável* se satisfaz o axioma $\vdash_N \text{Enm}(X)$, sendo

$$\text{Enm}(X) :\Leftrightarrow X = \emptyset \vee \exists g \in X^{\mathbb{N}}.\text{Sbj}(g). \quad (5.45)$$

Dizemos também que cada N -função g (que representaremos na maioria das vezes por g_X) satisfazendo a condição acima é uma *enumeração* de X .

Se X satisfizer a condição mais forte $\vdash_N X \simeq \mathbb{N}$, diremos que ele é *totalmente enumerável*.

Na início da seção 5.2 foram apresentadas duas bijeções de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que atestam a enumerabilidade total de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (expressões (5.19) e (5.20)). Assim, se os N -conjuntos X e Y são (totalmente) enumeráveis por $g_X : X \rightarrow \mathbb{N}$ e $g_Y : Y \rightarrow \mathbb{N}$, respectivamente, então a composição $g_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \circ g_{X \times Y}$ da enumeração $g_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com o produto $g_{X \times Y} := g_X \times g_Y : X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é claramente uma enumeração (total) de $X \times Y$.

Um N -conjunto X é *finito* se $\vdash_N \text{Fin}(X)$, sendo

$$\text{Fin}(X) :\Leftrightarrow \exists n. X \simeq [n]. \quad (5.46)$$

5.4 Seqüências finitas

Definimos uma *seqüência (com valores) em X* como uma N -função $f : \mathbb{N} \rightarrow X + \{\#\}$, em que $\#$ representa um elemento qualquer; por exemplo, $\# = 0$. Por comodidade, atribuiremos valores a f diretamente de X e de $\{\#\}$, desprezando o rótulo conferido pela união disjunta. Para isso, basta ter em mente que $\vdash_N \# \notin X$ sempre que $\#$ estiver rotulado.

Uma *seqüência finita em X* é uma seqüência em X que satisfaz o axioma $\vdash_N \text{Sfn}_X(f)$, em que

$$\text{Sfn}_X(f) :\Leftrightarrow \exists n [f([n]) \subseteq X \wedge f(\mathbb{N} - [n]) = \{\#\}]. \quad (5.47)$$

Na definição acima, a expressão $\mathbb{N} - [n]$ é inequívoca, uma vez que a fórmula $m \in [n]$ é decidível e, com isso, a diferença entre os N -conjuntos pode ser de qualquer natureza². Observemos também que o natural n da expressão (5.47) é único. Com efeito, seja m satisfazendo igualmente as condições descritas; sem perda de generalidade, consideremos $\vdash_N m < n$. Com isso,

$$\begin{array}{ll} m < n & \vdash_N f(m) \in X \wedge f(m) = \# \\ & \vdash_N \# \in X \\ & \vdash_N \perp. \end{array} \quad (5.48)$$

²Queremos dizer com isso que a diferença $\mathbb{N} - [n]$ pode significar, indistintamente, $\{m : m \notin [n]\}$ ou $\{m : \bigwedge_{i < n} (m \neq i)\}$.

Usando o mesmo raciocínio, podemos afirmar que $\vdash_N f(n) = \sharp \vee f(n) \neq \sharp$, isto é, a fórmula $f(n) = \sharp$ é decidível em $\mathbb{N}$.

Podemos coletar todas as seqüências finitas de um dado N -conjunto X por meio de:

$$X^* := \{f \in (X + \{\sharp\})^{\mathbb{N}} : \text{Sfn}_X(f)\}. \quad (5.49)$$

Os elementos de X^* serão denotados por $\vec{x}$, $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ etc³. Isso reflete a natureza finita dessas N -funções, que, apesar de terem, de fato, domínio $\mathbb{N}$, atingem apenas um número finito de elementos do N -conjunto X , conforme reza a expressão (5.47). Entre os elementos de X^* , encontra-se a N -função constante definida por $n \mapsto \sharp$. Ela será denotada também por $\sharp$, um abuso de notação que julgamos justificável.

A cada elemento $\vec{x}$ de X^* está associado um número natural, que representa intuitivamente o comprimento ou número de elementos relevantes de $\vec{x}$. A N -função $\text{cmp}_X : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ é definida por

$$\vec{x} \mapsto \mu n. \vec{x}(n) = \sharp. \quad (5.50)$$

A N -função cmp nos capacita a coletar todas as seqüências finitas de um determinado comprimento:

$$X^n := \{\vec{x} \in X^* : \text{cmp}_X(\vec{x}) = n\}. \quad (5.51)$$

É conveniente notar que $\vec{x} \mapsto \vec{x}(0)$ fornece uma bijeção entre X^1 e X , mas não ocorre uma igualdade. De fato, os elementos de X^1 são de uma natureza diferente da dos elementos de X . Fenômeno semelhante ocorre entre $X \times X$ e X^2 (neste caso, $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}(0), \vec{x}(1) \rangle$ promove a bijeção), e assim por diante. Tal fato não deve fugir à intuição, uma vez que nossa real intenção é definir seqüências finitas em oposição a elementos. E, mais importante do que isso, a forma como nossas seqüências foram construídas está estritamente desenvolvida dentro da teoria local. Entretanto, por uma questão de comodidade, confundiremos deliberadamente as noções de seqüência e produto finito, ainda que este último não esteja definido formalmente dentro de nossa teoria.

Definimos a *imagem útil* de uma seqüência finita $\vec{x}$ como sendo:

$$\text{imu}_X(\vec{x}) := \vec{x}([\text{cmp}_X(\vec{x})]) = \{\vec{x}(n) : n < \text{cmp}_X(\vec{x})\}. \quad (5.52)$$

³Embora a mesma notação já tenha sido usada para contextos, a circunstância do uso livrará o leitor da ambigüidade.

A partir de agora, quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos o índice que representa o N -conjunto, escrevendo simplesmente Sfn , cmp e imu ao invés de Sfn_X , cmp_X e imu_X , respectivamente.

Podemos acrescentar a toda seqüência de X^* um novo elemento de X , aumentando em uma unidade o seu comprimento. É o que faz a N -função $*$: $X^* \times X \rightarrow X^*$, definida por:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & \forall n[(n = \text{cmp}(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x} * x)(n) = x) \\ & \wedge (n \neq \text{cmp}(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x} * x)(n) = \vec{x}(n))]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

É possível também determinar uma ordem estrita entre os elementos de X^* :

$$\vec{x}_0 < \vec{x}_1 : \Leftrightarrow \text{cmp}(\vec{x}_0) < \text{cmp}(\vec{x}_1) \wedge \forall n[n < \text{cmp}(\vec{x}_0) \rightarrow \vec{x}_0(n) = \vec{x}_1(n)]; \quad (5.54)$$

dessa forma,

$$\vdash_N [\text{cmp}(\vec{x}_1) = \text{cmp}(\vec{x}_0) + 1 \wedge \vec{x}_0 < \vec{x}_1] \leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_0 * \vec{x}_1(\text{cmp}(\vec{x}_0)) \quad (5.55)$$

e, além disso, $\vdash_N \forall \vec{x} \in X^*[\vec{x} = \# \vee \# < \vec{x}]$.

Um resultado importantíssimo é o que estabelece uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$. A N -função $h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ que cumpre tão nobre tarefa é, além de tudo, recursiva primitiva; sua definição faz uso de recursão sobre o comprimento da seqüência:

$$\vdash_N h(\#) = 0 \wedge h(\vec{n} * n) = 2^n(1 + 2h(\vec{n})). \quad (5.56)$$

A proposição seguinte generaliza o resultado anterior.

Proposição 5.4.1. *Se o N -conjunto X é enumerável, então X^* também o é. Além disso, se X é totalmente enumerável, então X^* o é igualmente.*

Demonstração. Seja $g_X : \mathbb{N} \rightarrow X$, como de praxe, uma enumeração (total) de X . É suficiente apresentar uma sobrejeção (ou bijeção, conforme o caso) $g : \mathbb{N}^* \rightarrow X^*$, pois $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^*$. De uma maneira ou de outra, a N -função abaixo, definida recursivamente sobre o comprimento da seqüência, atinge o nosso objetivo:

$$\vdash_N g(\#) = \# \wedge g(\vec{n} * n) = g(\vec{n}) * g_X(n). \quad (5.57)$$

□

5.5 Estruturas ordenadas revisitadas

Uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura $\mathfrak{A}$ é enumerável se o seu domínio A é enumerável. O mesmo vale para as noções de finitude, enumerabilidade total etc.

Seja então $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linearmente ordenada e enumerável. Recordando que A^* é o N -conjunto de todas as seqüências finitas de elementos de A , dizemos que $\vec{a} \in A^*$ é *crescente* se $\vdash_N \text{Crs}(\vec{a})$, em que

$$\text{Crs}(\vec{a}) :\Leftrightarrow \forall n, m [n < m < \text{cmp}(\vec{a}) \rightarrow \vec{a}(n) < \vec{a}(m)]. \quad (5.58)$$

O N -conjunto de todas as seqüências finitas crescentes de elementos de A é denotado por A_{cr}^* . Assim:

$$A_{cr}^* := \{\vec{a} \in A^* : \text{Crs}(\vec{a})\}. \quad (5.59)$$

A próxima proposição atesta a enumerabilidade de A_{cr}^* .

Proposição 5.5.1. *Se $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linear e enumerável, então A_{cr}^* é também enumerável.*

Demonstração. Seja $g_A : \mathbb{N} \rightarrow A$ uma enumeração de A . Como $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^*$, é suficiente apresentar uma sobrejeção $g : \mathbb{N}^* \rightarrow A_{cr}^*$. A mesma pode ser definida recursivamente sobre o comprimento da seqüência:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & g(\#) = \# \\ & \wedge [0 < \text{cmp}(g(\vec{n})) \\ & \rightarrow [[g(\vec{n})(\text{cmp}(g(\vec{n})) - 1) < g_A(n) \rightarrow g(\vec{n} * n) = g(\vec{n}) * g_A(n)] \\ & \wedge [g_A(n) \leq g(\vec{n})(\text{cmp}(g(\vec{n})) - 1) \rightarrow g(\vec{n} * n) = \#]]]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Outra maneira de demonstrar seria observar que a expressão (5.58) pode ser escrita na forma de uma conjunção finita dupla de uma fórmula decidível, o que acarreta em $\vec{a} \in A_{cr}^*$ ser também decidível. Isso, somado ao fato de que A^* é enumerável, implica a enumerabilidade de A_{cr}^* . $\square$

Seja agora $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linearmente ordenada. Por causa de sua estrutura de reticulado (cf. [41]), podemos definir N -funções $\wedge, \vee : A \times A \rightarrow A$ por:

$$\vdash_N (a' \wedge a'' = a') \leftrightarrow (a' \leq a''); \quad (5.61)$$

$$\vdash_N (a' \vee a'' = a'') \leftrightarrow (a' \leq a''). \quad (5.62)$$

Estabelecemos a convenção de que $\vdash_N \# \wedge a = \# \vee a = a$. Considerando um caso mais geral, definimos agora as N -funções $\min, \max : A^* \rightarrow A + \{\#\}$, respectivamente, por:

$$\vdash_N \min(\#) = \# \wedge \min(\vec{a} * a) = \min(\vec{a}) \wedge a; \quad (5.63)$$

$$\vdash_N \max(\#) = \# \wedge \max(\vec{a} * a) = \max(\vec{a}) \vee a. \quad (5.64)$$

Daqui em diante, faremos livre uso das N -funções $\min$ e $\max$, aplicando-as tanto a seqüências finitas quanto a conjuntos finitos, desde que, evidentemente, exista uma maneira canônica, e clara pelo contexto, de verter tais conjuntos em seqüências.

5.6 Teorema do vaivém de Cantor

Esta seção foi reservada para a demonstração do chamado teorema do vaivém (em inglês *back and forth*), classicamente devido a Cantor, que expressa o isomorfismo de duas estruturas linearmente ordenadas, persistentes e enumeráveis.

A proposição seguinte é o teorema que dá nome a esta seção.

Proposição 5.6.1. *Se as $\mathbf{C}(N)$ -estruturas ordenadas $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ e $\mathfrak{B} = \langle B, < \rangle$ são habitadas, lineares, persistentes e enumeráveis, então $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes. Na primeira, mostramos que as estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são parcialmente isomorfas, ou seja, que há um N -conjunto F de seqüências finitas em $A \times B$, preservando a ordem dos pares, com a propriedade do vaivém. Na segunda parte, construímos o isomorfismo requerido.

Parte 1. Seja

$$F := \{f \in (A \times B)^* : \forall n, m [n < m < \text{cmp}(f) \rightarrow (\pi' \circ f(n) < \pi' \circ f(m) \leftrightarrow \pi'' \circ f(n) < \pi'' \circ f(m))]\} \quad (5.65)$$

o N -conjunto de todas as seqüências finitas em $A \times B$ que preservam a ordem dos pares. Por comodidade, estamos escrevendo simplesmente $\pi' \circ f$ (e $\pi'' \circ f$) ao invés da forma rigorosa $(\pi' + \text{id}_{\{\#\}}) \circ f$ (e $(\pi'' + \text{id}_{\{\#\}}) \circ f$, respectivamente). O produto $A \times B$ de N -conjuntos enumeráveis é sempre enumerável (cf. seção

5.3); logo, $(A \times B)^*$ também o é, pela Proposição 5.4.1. Chamemos de β a fórmula

$$\pi' \circ f(n) < \pi' \circ f(m) \leftrightarrow \pi'' \circ f(n) < \pi'' \circ f(m). \quad (5.66)$$

Notemos que podemos escrever $\forall n, m[n < m < \text{cmp}(f) \rightarrow \beta]$ na forma de uma conjunção finita dupla:

$$\bigwedge_{n < m} \left(\bigwedge_{m < \text{cmp}(f)} \beta \right); \quad (5.67)$$

ou, abreviadamente,

$$\bigwedge_{n < m < \text{cmp}(f)} \beta. \quad (5.68)$$

Sabendo que β é decidível (porque o conectivo $\leftrightarrow$ – que é definido a partir de $\rightarrow$ e $\wedge$ – quando aplicado a fórmulas decidíveis, produz uma fórmula composta decidível), podemos concluir que a fórmula dada pela expressão (5.67) também o é. Portanto, o N -conjunto F é caracterizado por um predicado decidível. Em seguida, vamos mostrar que F possui a propriedade do vaivém. Para isso, demonstremos primeiramente a expressão abaixo:

$$\vdash_N \forall f \in (A \times B)^* \forall a \exists b. f * \langle a, b \rangle \in F. \quad (5.69)$$

Para $\text{cmp}(f) = 0$, é imediato que $\vdash_N \# * \langle a, b \rangle \in F$. Se $\text{cmp}(f) > 0$, usemos as seguintes abreviações:

$$a_{\min} := \min(\pi' \circ f); \quad a_{\max} := \max(\pi' \circ f); \quad (5.70)$$

$$b_{\min} := \min(\pi'' \circ f); \quad b_{\max} := \max(\pi'' \circ f); \quad (5.71)$$

$$a^+ := \min\{a' \in \pi'(\text{imu}(f)) : a < a'\}; \quad (5.72)$$

$$a^- := \max\{a' \in \pi'(\text{imu}(f)) : a' < a\}. \quad (5.73)$$

A expressão abaixo é consequência direta da persistência de $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & a < a_{\min} \rightarrow \exists b. b < b_{\min} \\ & a_{\max} < a \rightarrow \exists b. b_{\max} < b \\ & a_{\min} < a < a_{\max} \rightarrow \exists b \exists n, m < \text{cmp}(f). f(n)(a^-) < b < f(m)(a^+). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Em qualquer uma das situações acima, verificamos que $\vdash_N \exists b.f * \langle a, b \rangle \in F$. Da mesma forma, podemos demonstrar que:

$$\vdash_N \forall f, b \exists a.f * \langle a, b \rangle \in F. \quad (5.75)$$

Dessa forma, podemos definir as N -funções $\hat{f} : F \times A \rightarrow F$ e $\check{f} : F \times B \rightarrow F$, que cumprem explicitamente a propriedade do vaivém (g_A e g_B são, como de praxe, enumerações de A e B , respectivamente):

$$\langle f, a \rangle \mapsto f * \langle a, g_B(\mu n.f * \langle a, g_B(n) \rangle \in F) \rangle; \quad (5.76)$$

$$\langle f, b \rangle \mapsto f * \langle g_A(\mu n.f * \langle g_A(n), b \rangle \in F), b \rangle. \quad (5.77)$$

Parte 2. Iniciamos agora a construção de um isomorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$. Note-mos primeiramente que temos a seguinte propriedade dos números naturais:

$$\vdash_N \forall m [(m = 0) \vee \exists n(m = 2n + 1) \vee \exists n(m = 2n + 2)]. \quad (5.78)$$

Podemos então construir uma (única) N -função $\bar{f} : \mathbb{N} \rightarrow F$ que satisfaz:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad \bar{f}(0) = \# \wedge \bar{f}(2n + 1) &= \hat{f}(\bar{f}(2n), g_A(n)) \\ \wedge \bar{f}(2n + 2) &= \check{f}(\bar{f}(2n + 1), g_B(n)). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Rematando a demonstração, definimos o isomorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ desejado pela expressão:

$$h := \text{img} \left(\bigcup_n \bar{f}(n) \right). \quad (5.80)$$

□

Corolário 5.6.2. *Considere as seguintes afirmações:*

- $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são $\mathbf{C}(N)$ -estruturas habitadas, lineares, persistentes e enumeráveis;
- $\alpha(x, y)$ é uma fórmula decidível em $A \times B$;
- $\{a : \exists b.\alpha(a, b)\}$ é persistente em B e $\{b : \exists a.\alpha(a, b)\}$ é persistente em A .

Então há um isomorfismo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ tal que $\vdash_N \forall a.\alpha(a, h(a))$.

Demonstração. Só precisamos acrescentar as novas informações à demonstração da Proposição 5.6.1. Seja então o N -conjunto F_α definido por:

$$F_\alpha := \{f \in F : \forall n < \text{cmp}(f). \alpha(f(n))\}, \quad (5.81)$$

em que F é definido pela expressão (5.65). Como α é decidível em $A \times B$ e a fórmula $\forall n < \text{cmp}(f). \alpha(f(n))$ pode ser escrita na forma

$$\bigwedge_{n < \text{cmp}(f)} \alpha, \quad (5.82)$$

e portanto também decidível, podemos assegurar que F_α é caracterizado por um predicado decidível. Além disso, sendo $\{a : \exists b. \alpha(a, b)\}$ persistente em B e $\{b : \exists a. \alpha(a, b)\}$ persistente em A , é possível adaptar de forma direta as expressões (5.69) e (5.75) para:

$$\vdash_N \forall f, b \exists a. f * \langle a, b \rangle \in F_\alpha; \quad (5.83)$$

$$\vdash_N \forall f, a \exists b. f * \langle a, b \rangle \in F_\alpha. \quad (5.84)$$

O restante da demonstração é idêntico ao que foi feito na Proposição 5.6.1, cabendo apenas usar F_α em lugar de F . $\square$

Capítulo 6

Sistemas numéricos num topos

Uma grande vantagem de uma teoria local naturalizada é a possibilidade de definição de sistemas numéricos explícitos. Números inteiros e racionais são construídos, sem maiores complicações, por meio das técnicas tradicionalmente empregadas em álgebra moderna, resultando em anéis linearmente ordenados. Os números reais, contudo, suscitam maior interesse num topos. Em **Cnj**, todos os métodos utilizados para a construção dos reais, em especial cortes de Dedekind e seqüências de Cauchy sobre os racionais, produzem resultados isomorfos (classicamente, com efeito, todos os corpos linearmente ordenados e completos são isomorfos). Entretanto, num topos qualquer (com objeto dos números naturais), essas construções originam, em geral, objetos que não são necessariamente isomorfos. Exemplo ilustre dessa discrepância são os reais obtidos no topos dos feixes sobre um espaço topológico (apresentados no Capítulo 8).

Para a definição do objeto dos reais de Cauchy, precisamos de algumas noções preliminares que serão expostas na primeira seção. Em seguida, os inteiros e racionais abrem o caminho para a construção das cinco estruturas de reais que estaremos estudando, duas das quais sugeridas por questões relacionadas com completamento.

6.1 Dispersões de Cauchy

Uma *seqüência infinita em X* é uma seqüência $f : \mathbb{N} \rightarrow X + \{\#\}$ em X para a qual $\text{img}(f) \subseteq X$. Recordemos que, ao tratar de seqüências, estamos desprezando o rótulo conferido pela união disjunta. Dizemos então, por

simplicidade, que uma seqüência infinita em X é uma N -função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Uma *dispersão de Cauchy sobre* uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura ordenada $\mathfrak{A}$ é uma seqüência infinita $f : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ satisfazendo $\vdash_N \text{Cch}_{\mathfrak{A}}(f)$, em que

$$\begin{aligned} \text{Cch}_{\mathfrak{A}}(f) : \Leftrightarrow & \quad \forall n [\pi' \circ f(n) \leq \pi' \circ f(n+1) \leq \pi'' \circ f(n+1) \leq \pi'' \circ f(n)] \\ & \quad \wedge \forall a', a'' [a' < a'' \rightarrow \exists n (a' < \pi' \circ f(n) \vee \pi'' \circ f(n) < a'')]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

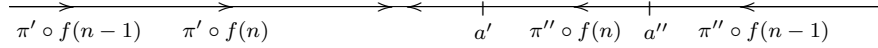


Figura 4

Representaremos, por conveniência, o N -conjunto de todas as dispersões de Cauchy de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{c}A$. Assim:

$$\mathfrak{c}A := \{f \in (A \times A)^{\mathbb{N}} : \text{Cch}(f)\}. \quad (6.2)$$

Definindo a ordem estrita sobre $\mathfrak{c}A$ por

$$f' < f'' : \Leftrightarrow \exists n. \pi'' \circ f'(n) < \pi' \circ f''(n), \quad (6.3)$$

determinamos uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura $\langle \mathfrak{c}A, < \rangle$, que será denotada por $\mathfrak{c}\mathfrak{A}$.

Trataremos, nesta seção, apenas de $\mathbf{C}(N)$ -estruturas $\mathfrak{A}$ linearmente ordenadas, pois nosso objetivo primordial consiste em aplicar os resultados desenvolvidos à estrutura dos reais de Cauchy, definida na seção 6.3, que é construída a partir da estrutura linearmente ordenada dos racionais, $\mathfrak{Q}$. Na seção 6.4, voltaremos a lidar com estruturas parcialmente ordenadas.

Muitos dos resultados estabelecidos na seção 4.3 refletem-se aqui de forma natural, ganhando demonstrações muito semelhantes, motivo que nos escusa a não reproduzi-las. Apenas indicaremos as proposições mais importantes para o desenvolvimento do trabalho.

É sempre possível definir um monomorfismo $j : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{c}\mathfrak{A}$ por

$$\vdash_N \forall a, n. \pi' \circ j(a)(n) = \pi'' \circ j(a)(n) = a, \quad (6.4)$$

que será portanto único e denominado monomorfismo canônico.

Proposição 6.1.1. *Se a $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linearmente ordenada $\mathfrak{A}$ é persistente, então ela é uniformemente persistente em $\mathfrak{c}\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Semelhante à da Proposição 4.3.4, fazendo uso, evidentemente, do monomorfismo definido na expressão (6.4). $\square$

Proposição 6.1.2. *Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são duas $\mathbf{C}(N)$ -estruturas linearmente ordenadas e $\mathfrak{B}$ é densa em $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{c}\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{c}\mathfrak{B}$.*

Demonstração. Semelhante à da Proposição 4.3.5. $\square$

Lema 6.1.3. *Considere as seguintes afirmações:*

- $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são $\mathbf{C}(N)$ -estruturas linearmente ordenadas e persistentes;
- $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ é um isomorfismo parcial;
- $\text{dom}(f)$ é denso em $\mathfrak{A}$ e $\text{cod}(f)$ é denso em $\mathfrak{B}$.

Então existe um isomorfismo $h : \mathfrak{c}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{c}\mathfrak{B}$ que estende f , isto é, para o qual $h \circ j_{\mathfrak{A}}|_{\text{dom}(f)} = j_{\mathfrak{B}} \circ f$.

Demonstração. Segue os mesmos passos do Lema 4.3.6. $\square$

Para qualquer $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linearmente ordenada e persistente $\mathfrak{A}$, podemos construir um monomorfismo $k : \mathfrak{c}\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}$, das dispersões de Cauchy de $\mathfrak{A}$ nos cortes de Dedekind de $\mathfrak{A}$, por:

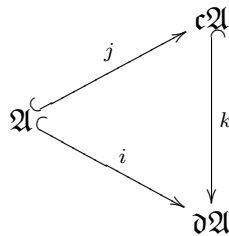
$$f \mapsto \langle \{a : \exists n. a < \pi' \circ f(n)\}, \{a : \exists n. \pi'' \circ f(n) < a\} \rangle. \quad (6.5)$$

Com efeito, os N -conjuntos que constituem cada par acima são habitados (pois $\mathfrak{A}$ não tem pontos extremos), disjuntos (pela definição (6.1)), abertos (pois $\mathfrak{A}$ é denso) e consecutivos (pois $\mathfrak{A}$ é linear).

Notemos que

$$\vdash_N \forall f \in \mathfrak{c}A. k(f) = \langle \{a : j(a) < f\}, \{a : f < j(a)\} \rangle \quad (6.6)$$

e, portanto, $i = k \circ j$, em que i é a injeção canônica de A em $\mathfrak{d}A$.



Conforme expressam a Proposição 4.3.4 e a Proposição 6.1.1, se a $\mathbf{C}(N)$ -estrutura $\mathfrak{A}$ é persistente, ela é mais do que simplesmente uma imersão em $\mathfrak{cA}$ ou em $\mathfrak{dA}$. É, além disso, persistente nessas duas $\mathbf{C}(N)$ -estruturas e o faz de maneira uniforme. Resta saber se há também uma relação de persistência uniforme entre $\mathfrak{cA}$ e $\mathfrak{dA}$. A próxima proposição encarrega-se dessa tarefa.

Proposição 6.1.4. *Se a $\mathbf{C}(N)$ -estrutura linearmente ordenada e habitada $\mathfrak{A}$ é persistente, então $\mathfrak{cA} \dashv \mathfrak{dA}$.*

Demonstração. Por definição de $<$ em $\mathfrak{dA}$, $\mathfrak{A}$ é persistente em $\mathfrak{dA}$ e, assim, $\mathfrak{cA}$ é persistente em $\mathfrak{dA}$. Seja h um automorfismo de $\mathfrak{cA}$. Podemos definir um automorfismo $\tilde{h}$ de $\mathfrak{dA}$ por:

$$\langle X, Y \rangle \mapsto \langle \{a : j(a) \in h \circ j(X)\}, \{a : j(a) \in h \circ j(Y)\} \rangle. \quad (6.7)$$

De fato, os N -conjuntos acima são habitados (pois $\mathfrak{A}$ é habitada), disjuntos (pois X e Y são disjuntos), abertos (pois $\mathfrak{A}$ é persistente) e consecutivos (pois X e Y são consecutivos). Mostremos que $\tilde{h}$ estende h :

$$\begin{aligned} \vdash_N \tilde{h} \circ k(f) &= \tilde{h}(\langle \{a' : j(a') < f\}, \{a' : f < j(a')\} \rangle) \\ &= \langle \{a : j(a) \in h \circ j(\{a' : j(a') < f\})\}, \\ &\quad \{a : j(a) \in h \circ j(\{a' : f < j(a')\})\} \rangle \\ &= \langle \{a : j(a) \in h(\{j(a') : j(a') < f\})\}, \\ &\quad \{a : j(a) \in h(\{j(a') : f < j(a')\})\} \rangle \quad (6.8) \\ &= \langle \{a : j(a) \in h(\{f' : f' < f\})\}, \\ &\quad \{a : j(a) \in h(\{f' : f < f'\})\} \rangle \\ &= \langle \{a : j(a) < h(f)\}, \{a : h(f) < j(a)\} \rangle \\ &= k \circ h(f). \end{aligned}$$

□

6.2 Números inteiros e racionais

A maneira usual de definir o *objeto dos números inteiros* $\mathbb{Z}$ num topos naturalizado $\mathbf{E}$ consiste em tomar a união disjunta de $\mathbb{N}$ com a sua imagem por s (cf. [27]). Assim:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} + s(\mathbb{N}). \quad (6.9)$$

Uma definição mais autenticamente categorial o toma a partir do empurador exibido no diagrama abaixo (cf. [30]).

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{o} & \mathbb{N} \\ o \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

Claramente, o N -conjunto $\mathbb{Z}$ assim definido é totalmente enumerável. Elementos de $\mathbb{Z}$ são denotados por z, z' etc. O N -conjunto $\mathbb{Z}^+ := \iota'(\mathbb{N}) = \{\langle \{n\}, \emptyset \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ é chamado de objeto dos números *inteiros positivos*, enquanto que $\mathbb{Z}^- := \iota''(s(\mathbb{N})) = \{\langle \emptyset, \{n\} \rangle : n > 0\}$ é chamado de objeto dos números *inteiros negativos*. Cada elemento $\langle \{n\}, \emptyset \rangle$ será denotado simplesmente por n (um justificado abuso de notação) e cada $\langle \emptyset, \{n\} \rangle$ por $-n$. Definimos então a N -função *módulo*, $\text{mod}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, por:

$$\vdash_N \text{mod}_{\mathbb{Z}}(n) = n \wedge \text{mod}_{\mathbb{Z}}(-n) = n. \quad (6.10)$$

Uma relação de ordem estrita pode ser definida em $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} z' < z'' : \Leftrightarrow & [z' \in \mathbb{Z}^- \wedge z'' \in \mathbb{Z}^+] \\ & \vee [\text{mod}_{\mathbb{Z}}(z') < \text{mod}_{\mathbb{Z}}(z'') \wedge z', z'' \in \mathbb{Z}^+] \\ & \vee [\text{mod}_{\mathbb{Z}}(z'') < \text{mod}_{\mathbb{Z}}(z') \wedge z', z'' \in \mathbb{Z}^-]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dessa forma, $z' < z''$ é sempre uma fórmula decidível.

Adição e produto em $\mathbb{Z}$ são definidos de maneira usual e, como consequência, temos que a estrutura $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, < \rangle$ é um anel comutativo linearmente ordenado.

Usualmente, o *objeto dos números racionais* $\mathbb{Q}$ é obtido, em **Cnj**, como o corpo de quocientes de elementos de $\mathbb{Z}$ (cf. [35]). Por comodidade, vamos adotar uma definição mais “enxuta” de $\mathbb{Q}$, de tal forma que os elementos resultantes já se encontrem em sua forma reduzida. Definimos então:

$$\mathbb{Q} := \{\langle z, n \rangle \in \mathbb{Z}^{\dot{+}} \times s(\mathbb{N}) : \text{mdc}(\text{mod}_{\mathbb{Z}}(z), n) = 1\} \cup \{\langle 0, 1 \rangle\}, \quad (6.12)$$

em que $\mathbb{Z}^{\dot{+}} := \iota'(s(\mathbb{N})) \cup \iota''(s(\mathbb{N}))$ e $\text{mdc}(m, n)$ é o máximo divisor comum de m e n , uma N -função recursiva primitiva (cf. [18]). Elementos de $\mathbb{Q}$ são denotados por p, q, q' etc.

O racionais *positivos* e *negativos* são então, respectivamente, calculados por:

$$\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : \pi'(q) > 0\}; \quad (6.13)$$

$$\mathbb{Q}^- := \{q \in \mathbb{Q} : \pi'(q) < 0\}. \quad (6.14)$$

Mostraremos agora que o N -conjunto $\mathbb{Q}$ é totalmente enumerável. Seja $h^+ : \mathbb{Q}^+ \rightarrow s(\mathbb{N})$ a bijeção definida por:

$$q \mapsto \prod_{i < \pi'(q)} \text{prm}(i)^{2\text{edp}(\pi'(q), i)} \cdot \prod_{i < \pi''(q)} \text{prm}(i)^{2\text{edp}(\pi''(q), i) - 1}, \quad (6.15)$$

em que $\text{prm}(n)$ é o n -ésimo primo e $\text{edp}(n, m)$ é o expoente de $\text{prm}(m)$ na decomposição prima de n (ambas N -funções recursivas primitivas; cf. [18]).

Da mesma forma definimos uma bijeção $h^- : \mathbb{Q}^- \rightarrow s(\mathbb{N})$. Portanto, existe uma bijeção $h^+ + 0 + h^- : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, em que 0 é $\langle 0, 1 \rangle \mapsto 0$. E assim conseguimos um duplo isomorfismo:

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}. \quad (6.16)$$

É importante observar que esses isomorfismos relacionam os objetos e não as $\mathbf{C}(N)$ -estruturas ordenadas.

A ordem estrita é definida em $\mathbb{Q}$ por:

$$p < q :\Leftrightarrow \pi'(p) \cdot \pi''(q) < \pi'(q) \cdot \pi''(p), \quad (6.17)$$

em que os produtos são computados em $\mathbb{Z}$. Obtemos então a estrutura ordenada:

$$\mathfrak{Q} := \langle \mathbb{Q}, < \rangle. \quad (6.18)$$

Definindo convenientemente adição e produto em $\mathbb{Q}$, formamos uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, < \rangle$ que satisfaz igualmente os axiomas de anel comutativo linearmente ordenado. Além disso, verifica-se facilmente que a estrutura ordenada $\mathfrak{Q}$ é persistente; portanto, pela Proposição 5.6.1, ela é, a menos de isomorfismo, a única estrutura linearmente ordenada habitada, persistente e totalmente enumerável.

6.3 Números reais

O *objeto dos números reais de Cauchy* é simplesmente o N -conjunto de todas as dispersões de Cauchy sobre a estrutura $\mathfrak{Q}$ dos racionais. Assim:

$$\mathbb{R}_c := \mathfrak{c}\mathbb{Q}; \quad (6.19)$$

e a estrutura ordenada dos reais de Cauchy é dada então por:

$$\mathfrak{R}_c := \mathfrak{c}\Omega. \quad (6.20)$$

Similarmente, o objeto dos números reais de Dedekind é o N -conjunto de todos os cortes de Dedekind sobre a estrutura Ω dos racionais. Logo:

$$\mathbb{R}_d := \mathfrak{d}\mathbb{Q}; \quad (6.21)$$

e a estrutura ordenada segue então:

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{d} := \mathfrak{d}\Omega. \quad (6.22)$$

No topos **Cnj**, demonstra-se que essas duas construções de objetos (no caso conjuntos) dos reais produzem estruturas isomorfas $\mathfrak{R}_c \simeq \mathfrak{R}_\mathfrak{d}$. No Capítulo 8, contudo, verificamos que no topos dos feixes sobre um espaço topológico não ocorre o isomorfismo, mas simplesmente um monomorfismo¹ $\mathfrak{R}_c \hookrightarrow \mathfrak{R}_\mathfrak{d}$, o qual pode ser constatado em qualquer topos (com objeto dos números naturais) por causa da monomorfismo j definido na expressão (6.5). Mais do que isso, sendo a estrutura Ω persistente, a Proposição 6.1.4 implica $\mathfrak{R}_c \dashv \vdash \mathfrak{R}_\mathfrak{d}$.

Todos os resultados gerais estabelecidos na seção 4.3 (para os cortes de Dedekind) e na seção 6.1 (para as dispersões de Cauchy) aplicam-se, em particular, a $\mathfrak{R}_c$ e $\mathfrak{R}_\mathfrak{d}$, respectivamente.

Definimos ainda o *objeto dos números reais estendidos* como o N -conjunto de todos os elementos estendidos de Ω :

$$\mathbb{R}_e := \mathfrak{e}\mathbb{Q}; \quad (6.23)$$

e a estrutura ordenada:

$$\mathfrak{R}_e := \mathfrak{e}\Omega. \quad (6.24)$$

Pela Proposição 4.4.1, $\mathfrak{R}_\mathfrak{d}$ é uniformemente persistente em $\mathfrak{R}_c$. Portanto, pelas relações de persistência uniforme estabelecidas anteriormente, obtemos a cadeia (confira as considerações expostas na seção 4.2):

$$\Omega \dashv \vdash \mathfrak{R}_c \dashv \vdash \mathfrak{R}_\mathfrak{d} \dashv \vdash \mathfrak{R}_e. \quad (6.25)$$

¹Se o espaço topológico X for separável e 0-dimensional, é possível obter um isomorfismo $\mathfrak{R}_c \simeq \mathfrak{R}_\mathfrak{d}$ no topos **Fei**(X) (cf. [30]).

Gostaríamos de saber em que condições $\mathbb{R}_d = \mathbb{R}_e$. A resposta foi dada por P. Johnstone, que demonstrou que

$$\vdash_N \mathbb{R}_d = \mathbb{R}_e \leftrightarrow \forall \omega [\neg \omega \vee \neg \neg \omega]. \quad (6.26)$$

Isso significa que, num topos puro com objeto dos números naturais, $\mathbb{R}_d$ é um subobjeto próprio de $\mathbb{R}_e$.

6.4 Completamento

Uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura (parcialmente) ordenada $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é *seqüencialmente completa* se $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{c}\mathfrak{A}$, ou seja, se toda dispersão de Cauchy sobre $\mathfrak{A}$ é imagem de um elemento de A pelo monomorfismo canônico j , definido na expressão (6.4). Dizemos então que esse elemento de A é um *limite* da dispersão.

Na seção 4.3, demonstramos que cortes de Dedekind, quando aplicados a estruturas persistentes $\mathfrak{A}$, é “idempotente”, ou melhor, $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{d}\mathfrak{d}\mathfrak{A}$. O mesmo não ocorre com dispersões de Cauchy, uma vez que $\mathfrak{R}_c$ não é isomorfo a $\mathfrak{c}\mathfrak{R}_c$ (cf. [23]). Relatando de outra maneira, a estrutura $\mathfrak{R}_c$ não é seqüencialmente completa.

Em [23], define-se um novo objeto dos reais, a que se chama de objeto dos reais euclidianos. Esse objeto finaliza o trabalho de completamento seqüencial de $\mathfrak{Q}$, que havia sido deixado inacabado por $\mathfrak{R}_c$. Antes de defini-lo, notemos que a estrutura $\mathfrak{R}_d$ é seqüencialmente completa, fato comprovado pelo isomorfismo $\mathfrak{c}\mathfrak{R}_d \simeq \mathfrak{R}_d$ definido por:

$$f \mapsto \left\langle \bigcup \pi' \circ \pi' \circ f(\mathbb{N}), \bigcup \pi'' \circ \pi'' \circ f(\mathbb{N}) \right\rangle. \quad (6.27)$$

O *objeto dos números reais euclidianos*, $\mathbb{R}_{cc}$, é então definido por:

$$\mathbb{R}_{cc} := \bigcap \{X \subseteq \mathbb{R}_d : i(\mathbb{Q}) \subseteq X \wedge \mathfrak{X} \simeq \mathfrak{c}\mathfrak{X}\}, \quad (6.28)$$

em que $\mathfrak{X}$ é a subestrutura ordenada $\langle X, < \rangle \subseteq \langle \mathbb{R}_d, < \rangle$. Dessa forma, $\mathbb{R}_{cc}$ é o menor subconjunto seqüencialmente completo de $\mathbb{R}_d$ que “contém” $\mathbb{Q}$ (cf. [23]). E $\mathfrak{R}_{cc}$ será a subestrutura de $\mathfrak{R}_d$ gerada por $\mathbb{R}_{cc}$.

Como $\mathfrak{R}_{cc}$ é seqüencialmente completa e $\mathfrak{Q} \hookrightarrow \mathfrak{R}_{cc}$, inferimos $\mathfrak{R}_c \hookrightarrow \mathfrak{R}_{cc}$. E, sendo $\mathfrak{R}_{cc} \subseteq \mathfrak{R}_d$, temos que $i(\mathfrak{R}_c) \subseteq \mathfrak{R}_{cc}$, em que $i : \mathfrak{R}_c \hookrightarrow \mathfrak{R}_d$ é o monomorfismo canônico.

Para a próxima definição, precisamos de uma notação suplementar. Sejam $\mathfrak{A}$ uma estrutura (parcialmente) ordenada e $X \subseteq A$ tal que $\vdash_N \text{Hab}(X)$;

estabelecemos então as noções de *limitante superior* e de *supremo*, respectivamente:

$$\text{slm}_{\mathfrak{A}}(a, X) :\Leftrightarrow \forall x[x < a \vee x = a]; \quad (6.29)$$

$$\text{sup}_{\mathfrak{A}}(a, X) :\Leftrightarrow \text{slm}_{\mathfrak{A}}(a, X) \wedge \forall a'[\text{slm}_{\mathfrak{A}}(a', X) \rightarrow (a < a' \vee a = a')]. \quad (6.30)$$

Dizemos então que uma estrutura (parcialmente) ordenada $\mathfrak{A}$ é *condicionalmente completa* se $\vdash_N \text{Ccc}(\mathfrak{A})$, em que:

$$\text{Ccc}(\mathfrak{A}) :\Leftrightarrow \forall X \in PA[(\text{Hab}(X) \wedge \exists a.\text{slm}_{\mathfrak{A}}(a, X)) \rightarrow \exists a.\text{sup}_{\mathfrak{A}}(a, X)]. \quad (6.31)$$

Intuitivamente, todo subconjunto $X \subseteq A$ limitado superiormente tem supremo.

É conhecido o fato de que a estrutura $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}}$ não é, em geral, condicionalmente completa [4]. Temos, entretanto, o resultado abaixo.

Proposição 6.4.1. *A estrutura $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}}$ é condicionalmente completa.*

Demonstração. Seja $u \subseteq \mathbb{R}_e$ um N -conjunto limitado superiormente. Tomamos então

$$X := \bigcup \pi'(u) \quad (6.32)$$

e definimos $t := \langle \epsilon \circ \delta(X), \delta(X) \rangle$, que é o requerido supremo. $\square$

Podemos assim repetir o procedimento seguido em [23] e definir o menor subobjeto condicionalmente completo de $\mathbb{R}_e$ que contém $\mathbb{R}_d$. Assim, definimos o *objeto dos números reais arquimedianos* por:

$$\mathbb{R}_{dd} := \bigcap \{X \subseteq \mathbb{R}_e : \mathbb{R}_d \subseteq X \wedge \text{Ccc}(\mathfrak{X})\}. \quad (6.33)$$

A estrutura $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\mathfrak{d}}$ é a subestrutura de $\mathfrak{R}_{\mathfrak{e}}$ gerada por $\mathbb{R}_{dd}$.

Proposição 6.4.2. *A estrutura $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\mathfrak{d}}$ é condicionalmente completa.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} Y \subseteq \mathbb{R}_{dd}, \text{Hab}(Y), \exists s.\text{slm}_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\mathfrak{d}}}(s, Y) &\vdash_N \forall X \in P\mathbb{R}_e[(\mathbb{R}_d \subseteq X \wedge \text{Ccc}(\mathfrak{X})) \\ &\rightarrow Y \subseteq X] \\ &\dots \rightarrow \exists x.\text{slm}_{\mathfrak{X}}(x, Y) \\ &\dots \rightarrow \exists x.\text{sup}_{\mathfrak{X}}(x, Y) \\ &\dots \rightarrow \exists x \in \mathbb{R}_{dd}.\text{sup}_{\mathfrak{X}}(x, Y)] \\ &\vdash_N \exists s.\text{sup}_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\mathfrak{d}}}(s, Y). \end{aligned} \quad (6.34)$$

$\square$

Organizamos agora todos os objetos de números reais estudados numa seqüência de monomorfismos:

$$\Omega \hookrightarrow \mathfrak{R}_c \hookrightarrow \mathfrak{R}_{cc} \hookrightarrow \mathfrak{R}_d \hookrightarrow \mathfrak{R}_{dd} \hookrightarrow \mathfrak{R}_e. \quad (6.35)$$

Desses, aqueles considerados na expressão (6.25) representam persistência uniforme.

Surge imediatamente uma questão: os novos monomorfismos apreciados (os que envolvem as estruturas $\mathfrak{R}_{cc}$ e $\mathfrak{R}_{dd}$) também representariam persistência uniforme? A solução desse problema sugeriria uma cadeia (cf. seção 4.2) envolvendo todos os objetos de números reais considerados neste trabalho.

Capítulo 7

Homogeneidade num topos

Filosoficamente, situamos a noção de homogeneidade em conexão com a idéia de *magnitudes que variam continuamente*, concepção que acompanha historicamente as discussões acerca dos objetos dos números reais. Elegemos, na seção 2.3, a noção de homogeneidade como uma alternativa de formalização dessa concepção tradicional. Por conseguinte, em virtude das considerações históricas levantadas no Capítulo 1, a homogeneidade serve como um dos critérios de identificação de um objeto de números reais.

Neste capítulo apresentamos a noção de homogeneidade num topos e demonstramos que as estruturas ordenadas dos racionais ($\mathfrak{Q}$), dos reais de Dedekind ($\mathfrak{R}_d$) e dos reais de Cauchy ($\mathfrak{R}_c$) são homogêneas. Dentro de uma abordagem menos formal, uma demonstração construtiva da homogeneidade de $\mathfrak{R}_c$ aparece pela primeira vez em [56]. Na última seção, definimos estruturas efetivamente homogêneas e demonstramos que a estrutura ordenada dos racionais pode ser imersa em qualquer estrutura satisfazendo essa definição.

7.1 Estruturas homogêneas

A noção de homogeneidade foi introduzida, no contexto da teoria de modelos, por B. Jónsson em 1960. De maneira geral, considera-se uma classe de estruturas conjuntistas (usualmente uma classe de modelos de uma determinada teoria) e diz-se que um membro $\mathfrak{A}$ dessa classe é uma estrutura κ -homogênea (κ um cardinal infinito) se, para todo isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ com domínio (ou contradomínio) de cardinal $\kappa' < \kappa$, existe um automorfismo de $\mathfrak{A}$ que o estende (cf. [6] ou [38]).

Num topos qualquer, em que se torna difícil um estudo sistemático dos cardinais, não é possível obter tamanho grau de generalização. No presente trabalho, lidaremos apenas com isomorfismos parciais finitos, ou seja, dentro daquela noção geral de homogeneidade, estaremos entendendo por homogêneas as estruturas $\aleph_0$ -homogêneas.

Seja $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ uma $\mathbf{C}(N)$ -estrutura (parcialmente) ordenada. Dizemos que uma seqüência finita $f : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ *preserva a ordem dos pares* se $\vdash_N \text{Pop}(f)$, em que

$$\text{Pop}(f) :\Leftrightarrow \bigwedge_{m < n < \text{cmp}(f)} [\pi' \circ f(m) < \pi' \circ f(n) \leftrightarrow \pi'' \circ f(m) < \pi'' \circ f(n)]. \quad (7.1)$$

Uma estrutura ordenada $\mathfrak{A}$ é (*fortemente*) *homogênea* se, para toda seqüência finita $f : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ que preserva a ordem dos pares, existe um automorfismo de $\mathfrak{A}$ que estende $\text{imu}(f)$. Intuitivamente, todo isomorfismo parcial finito pode ser estendido a um automorfismo.

O primeiro exemplo de estrutura homogênea é a estrutura ordenada dos racionais. A proposição seguinte comprova esse fato.

Proposição 7.1.1. *A $\mathbf{C}(N)$ -estrutura $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ é homogênea.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ uma seqüência finita que preserva a ordem dos pares. Definimos uma fórmula α por:

$$\alpha(q', q'') :\Leftrightarrow \bigwedge_{n < \text{cmp}(f)} [\pi' \circ f(n) < q' \leftrightarrow \pi'' \circ f(n) < q'']. \quad (7.2)$$

Então α é decidível em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e, além disso,

$$\vdash_N \mathbb{Q} = \{q' : \exists q''. \alpha(q', q'')\} = \{q'' : \exists q'. \alpha(q', q'')\}. \quad (7.3)$$

Logo, α satisfaz todas as condições do enunciado do Corolário 5.6.2. Assim, há um automorfismo h de $\mathfrak{Q}$ tal que $\vdash_N \forall q. \alpha(q, h(q))$, isto é, h estende $\text{imu}(f)$. $\square$

A próxima tarefa é mostrar que as estruturas ordenadas dos reais de Dedekind, $\mathfrak{R}_d$, e de Cauchy, $\mathfrak{R}_c$, são homogêneas. Para isso, precisamos de um resultado preliminar.

Lema 7.1.2. *Se $\vec{r}$ é uma seqüência finita em $\mathbb{R}_d$, então o N -conjunto $\mathbb{Q}_{\vec{r}}$, definido por*

$$\mathbb{Q}_{\vec{r}} := \left\{ q : \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{r})} \vec{r}(n) \# i(q) \right\}, \quad (7.4)$$

é denso em $\mathbb{Q}$ e enumerável.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente, por indução no comprimento de $\vec{r}$, que

$$\begin{aligned} \vdash_N \forall \vec{q} \in \mathbb{Q}^* \quad & [(\text{cmp}(\vec{q}) = \text{cmp}(\vec{r}) + 1 \wedge \bigwedge_{n < m < \text{cmp}(\vec{q})} \vec{q}(n) \neq \vec{q}(m)) \\ & \rightarrow \bigvee_{n < \text{cmp}(\vec{q})} \vec{q}(n) \in \mathbb{Q}_{\vec{r}}] \end{aligned} \quad (7.5)$$

(intuitivamente, toda seqüência finita de racionais com $\text{cmp}(\vec{r}) + 1$ elementos diferentes tem pelo menos um elemento em $\mathbb{Q}_{\vec{r}}$). Se $\text{cmp}(\vec{r}) = 0$, então $\mathbb{Q}_{\vec{r}} = \mathbb{Q}$ e a verificação é imediata. Seja agora $\text{cmp}(\vec{r}) = n+1$ (logo, $\text{cmp}(\vec{q}) = n+2$): nesse caso, se tomarmos (o único) $\vec{r}_0$ tal que $\vec{r} = \vec{r}_0 * \vec{r}(\text{cmp}(\vec{r}) - 1)$, a hipótese de indução nos assegura que

$$\vdash_N \bigvee_{n, m < \text{cmp}(\vec{q})} [\vec{q}(n) \neq \vec{q}(m) \wedge \vec{q}(n), \vec{q}(m) \in \mathbb{Q}_{\vec{r}_0}]. \quad (7.6)$$

Por outro lado, a expressão (4.13) garante que

$$\vdash_N q(n) \in \pi'(\vec{r}(\text{cmp}(\vec{r}) - 1)) \vee q(m) \in \pi''(\vec{r}(\text{cmp}(\vec{r}) - 1)). \quad (7.7)$$

Portanto,

$$\vdash_N \bigvee_{n, m < \text{cmp}(\vec{q})} [\vec{q}(n) \neq \vec{q}(m) \wedge (\vec{q}(n) \in \mathbb{Q}_{\vec{r}} \vee \vec{q}(m) \in \mathbb{Q}_{\vec{r}})] \quad (7.8)$$

e a expressão (7.5) está demonstrada. Podemos então tomar um elemento $q_0 \in \mathbb{Q}_{\vec{r}}$ definido por:

$$q_0 := \min\{q : g_{\mathbb{Q}}(q) < \text{cmp}(\vec{r} + 1)\} \quad (7.9)$$

e construir uma sobrejeção $g : \mathbb{Q}^{\text{cmp}(\vec{r})+1} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_{\vec{r}}$ por:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & \left[\bigwedge_{n < m < \text{cmp}(\vec{q})} \vec{q}(n) \neq \vec{q}(m) \rightarrow g(\vec{q}) = \min(\vec{q}) \right] \\ & \wedge \left[\neg \bigwedge_{n < m < \text{cmp}(\vec{q})} \vec{q}(n) \neq \vec{q}(m) \rightarrow g(\vec{q}) = q_0 \right]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Sendo $\mathbb{Q}^{\text{cmp}(\vec{r})+1}$ totalmente enumerável, concluímos que $\mathbb{Q}_{\vec{r}}$ é enumerável. A densidade de $\mathbb{Q}_{\vec{r}}$ em $\mathbb{Q}$ sai da expressão abaixo, que diz intuitivamente que, dados dois racionais diferentes, há um número arbitrário de racionais diferentes entre eles:

$$\vdash_N \forall q', q'' \exists \vec{q} \left[\vec{q}(0) = \frac{q' + q''}{2} \wedge \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{r})+1} \vec{q}(n+1) = \frac{\vec{q}(n) + q''}{2} \right]. \quad (7.11)$$

Logo, é suficiente aplicar a expressão (7.5). $\square$

Corolário 7.1.3. *Se $\vec{s}$ é uma seqüência finita em $\mathbb{R}_c$, então*

$$\mathbb{Q}_{\vec{s}} := \left\{ q : \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{s})} \vec{s}(n) \# j(q) \right\} \quad (7.12)$$

é denso em $\mathbb{Q}$ e enumerável.

Demonstração. Tomando a injeção (canônica) $k : \mathbb{R}_c \hookrightarrow \mathbb{R}_d$, podemos aplicar o Lema 7.1.2 à seqüência $\vec{r} = (k + \text{id}_{\{\#\}}) \circ \vec{s} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_d + \{\#\}$, atentando para o fato de que

$$\begin{aligned} \vdash_N \mathbb{Q}_{\vec{s}} &= \{ q : \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{s})} \vec{s}(n) \# j(q) \} \\ &= \{ q : \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{r})} \vec{r}(n) \# k \circ j(q) \} \\ &= \{ q : \bigwedge_{n < \text{cmp}(\vec{r})} \vec{r}(n) \# i(q) \}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

$\square$

Proposição 7.1.4. *As $\mathbf{C}(N)$ -estruturas $\mathfrak{R}_d = \langle \mathbb{R}_d, < \rangle$ e $\mathfrak{R}_c = \langle \mathbb{R}_c, < \rangle$ são homogêneas.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para $\mathfrak{R}_d$, uma vez que o procedimento para $\mathfrak{R}_c$ é idêntico. Seja então $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}_d$ uma seqüência finita que preserva a ordem dos pares. Pelo Lema 7.1.2, os N -conjuntos $\mathbb{Q}_{\pi' \circ f}$ e $\mathbb{Q}_{\pi'' \circ f}$ são enumeráveis e densos em $\mathbb{Q}$, e portanto também persistentes. Seja agora a fórmula α definida por:

$$\alpha(q', q'') : \Leftrightarrow \bigwedge_{n < \text{cmp}(f)} [\pi' \circ f(n) < q' \leftrightarrow \pi'' \circ f(n) < q'']. \quad (7.14)$$

Então α é decidível em $\mathbb{Q}_{\pi' \circ f} \times \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f}$ e, ademais,

$$\{q' \in \mathbb{Q}_{\pi' \circ f} : \exists q'' \in \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f} . \alpha(q', q'')\} = \mathbb{Q}_{\pi' \circ f}, \quad (7.15)$$

assim como

$$\{q'' \in \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f} : \exists q' \in \mathbb{Q}_{\pi' \circ f} . \alpha(q', q'')\} = \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f}. \quad (7.16)$$

Com efeito, por indução no comprimento de f demonstramos facilmente que

$$\vdash_N \forall q' \in \mathbb{Q}_{\pi' \circ f} \exists q'' \in \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f} . \alpha(q', q'') \quad (7.17)$$

e vice-versa. Dessa forma, pelo Corolário 5.6.2, existe um isomorfismo $h : \langle \mathbb{Q}_{\pi' \circ f}, < \rangle \rightarrow \langle \mathbb{Q}_{\pi'' \circ f}, < \rangle$ (ou seja, entre as $\mathbf{C}(N)$ -estruturas geradas) tal que $\vdash_N \forall q \in \mathbb{Q}_{\pi' \circ f} . \alpha(q, h(q))$, isto é, que estende $\text{imu}(f)$. Agora, pelo Lema 4.3.6 (para o caso de $\mathfrak{R}_\epsilon$, deve-se usar o Lema 6.1.3), existe um automorfismo $\tilde{h}$ de $\mathfrak{R}_\delta$ que estende h e, portanto, estende também $\text{imu}(f)$. $\square$

7.2 Estruturas efetivamente homogêneas

Quando da demonstração da homogeneidade das estruturas $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}_\epsilon$ e $\mathfrak{R}_\delta$, os requeridos automorfismos foram todos efetivamente construídos, isto é, dada uma seqüência finita preservando a ordem dos pares, a mesma foi, em cada caso, estendida inequivocamente a um automorfismo. Essa constatação motiva a definição a seguir.

Uma estrutura ordenada $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ é *efetivamente homogênea* se existe uma N -função

$$\tilde{h} : \{f \in (A \times A)^\mathbb{N} : \text{Sfn}(f) \wedge \text{Pop}(f)\} \rightarrow \{h \in A^A : \text{Aut}(h)\} \quad (7.18)$$

tal que

$$\vdash_N \forall f \in \text{dom}(\tilde{h}) . \tilde{h}(f) \circ \pi'(\text{imu}(f)) = \pi''(\text{imu}(f)). \quad (7.19)$$

Na expressão (7.18), $\vdash_N \text{Aut}(h)$ indica formalmente que $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é um automorfismo. Intuitivamente, a definição diz que, para cada estrutura ordenada, existe um procedimento efetivo, representado pela N -função $\tilde{h}$, que estende todo isomorfismo parcial finito dessa estrutura a um automorfismo.

Pela Proposição 5.6.1, $\mathfrak{Q}$ é, a menos de isomorfismo, a única estrutura linearmente ordenada habitada, persistente e totalmente enumerável. Mostramos também, pela Proposição 7.1.1, que essa estrutura singular é (efetivamente) homogênea. Gostaríamos então de saber se $\mathfrak{Q}$ é menor, dentro

de uma álgebra de subobjetos, do que qualquer outra estrutura ordenada efetivamente homogênea. A proposição abaixo responde a essa questão.

Proposição 7.2.1. *Para cada estrutura efetivamente homogênea e habitada da forma $\mathfrak{A} = \langle A, <, a_0, a_1 \rangle$, em que $\vdash_N a_0 < a_1$, existe um monomorfismo $f : \mathfrak{Q} \hookrightarrow \mathfrak{A}$.*

Demonstração. Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ uma enumeração total de $\mathbb{Q}$. Vamos definir uma injeção $f' : \mathbb{N} \rightarrow A$ de tal maneira que a composição $f' \circ g^{-1}$ seja um monomorfismo $f' \circ g^{-1} : \mathfrak{Q} \hookrightarrow \mathfrak{A}$. Antes disso, estabelecemos algumas convenções. Por questão de brevidade, quando a N -função $\hat{h}$ se aplica a uma seqüência de comprimento 1, digamos $0 \mapsto \langle a', a'' \rangle$, escrevemos simplesmente $\hat{h}(a' \mapsto a'')$ para o automorfismo resultante; da mesma forma, se a seqüência tem comprimento 2, escrevemos $\hat{h}(a' \mapsto a'', \dot{a} \mapsto \ddot{a})$. Definimos agora as N -funções $\hat{g}, \check{g} : s(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$, respectivamente, por:

$$n \mapsto g^{-1}(\max\{g(m) : g(m) < g(n) \wedge m < n\}); \quad (7.20)$$

$$n \mapsto g^{-1}(\min\{g(m) : g(n) < g(m) \wedge m < n\}). \quad (7.21)$$

Por fim, consideremos as fórmulas:

$$\alpha^<(n) :\Leftrightarrow 1 < n \wedge \bigwedge_{m < n} g(m) < g(n); \quad (7.22)$$

$$\alpha^>(n) :\Leftrightarrow 1 < n \wedge \bigwedge_{m < n} g(n) < g(m); \quad (7.23)$$

$$\alpha(n) :\Leftrightarrow 1 < n \wedge \bigvee_{m', m'' < n} g(m') < g(n) < g(m''). \quad (7.24)$$

Observemos que

$$\vdash_N \forall n [1 < n \rightarrow [\alpha^<(n) \vee \alpha^>(n) \vee \alpha(n)]]. \quad (7.25)$$

A N -função f' pode então ser definida por:

$$\begin{aligned} \vdash_N \quad & f'(0) = a_0 \wedge f'(1) = a_1 \\ & \wedge [\alpha^<(n) \rightarrow f'(n) = \hat{h}(a_0 \mapsto f' \circ \hat{g}(n))(f' \circ \hat{g}(n))] \\ & \wedge [\alpha^>(n) \rightarrow f'(n) = \hat{h}(a_1 \mapsto f' \circ \check{g}(n))(f' \circ \check{g}(n))] \\ & \wedge [\alpha(n) \rightarrow f'(n) = \hat{h}(f' \circ \hat{g}(n) \mapsto f' \circ \hat{g}(n), \\ & \quad \hat{h}(f' \circ \hat{g}(n) \mapsto f' \circ \check{g}(n))(f' \circ \check{g}(n)) \mapsto f' \circ \check{g}(n))(f' \circ \check{g}(n))]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Intuitivamente (acompanhe a Figura 3 para o caso $\alpha(n)$):

$$f'(0) := a_0;$$

$$f'(1) := a_1;$$

$$f'(n) := \begin{cases} \hbar(a_0 \mapsto a)(a), & \text{em que } a = f'(\hat{g}(n)), & \text{se } \alpha^<(n); \\ \hbar(a_1 \mapsto a)(a), & \text{em que } a = f'(\check{g}(n)), & \text{se } \alpha^>(n); \\ \hbar(a' \mapsto a', \hbar(a' \mapsto a'')(a'') \mapsto a'')(a''), & \text{em que } a' = f'(\hat{g}(n)) \text{ e } a'' = f'(\check{g}(n)), & \text{se } \alpha(n). \end{cases} \quad (7.27)$$

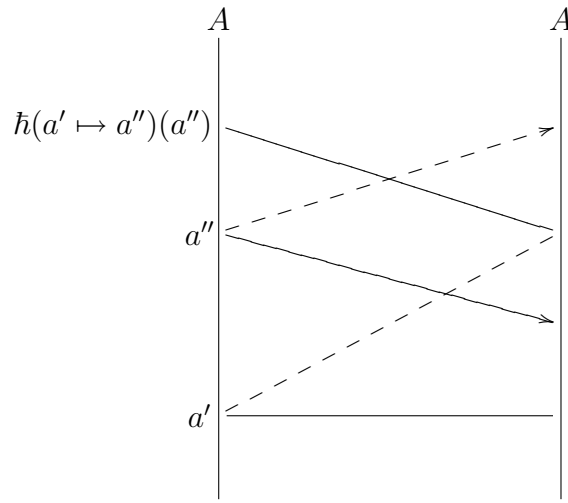


Figura 5

□

Não é supérfluo ressaltar que o monomorfismo da Proposição 7.2.1 não indica necessariamente uma persistência de $\mathfrak{Q}$ em $\mathfrak{A}$.

A Proposição 7.2.1 ensina que a estrutura ordenada dos racionais é, dentro de uma álgebra de subobjetos adequada, minimal enquanto estrutura efetivamente homogênea. Assim sendo, o resultado revelado pela proposição acima concretiza formalmente a idéia intuitiva de que a estrutura $\mathfrak{Q}$ é um limitante inferior, dentro daquela álgebra de subobjetos, das estruturas ordenadas dos números reais.

Capítulo 8

Reais no topos dos feixes sobre um espaço topológico

Este capítulo pretende ser, simultaneamente, uma ilustração matemática do desenvolvimento abstrato empreendido ao longo deste trabalho e testemunho formal das idéias defendidas na seção 2.2. Feixes constituem um modelo para a lógica intuicionista de primeira ordem e a chamada teoria intuicionista de modelos tem recebido, recentemente, a merecida atenção de pesquisadores (cf. [42] e [12]). Embora este trabalho se oriente predominantemente para o estudo de aspectos conceituais dos números reais, são claras as conexões com a teoria de modelos: homogeneidade é um conceito central e matematicamente relevante (cf. [38] ou [6]); e a tradução de problemas geométricos, de natureza topológica, em lógicos – através da teoria local de conjuntos – constitui poderosa ferramenta para o trato de questões matemáticas formuladas em teoria de modelos. Com efeito, as demonstrações envolvendo persistência uniforme e homogeneidade dos objetos dos reais, além da importância filosófica pretendida, comprovam a eficiência do método de importação de problemas geométricos para o ambiente lógico.

A exposição seguinte, das noções fundamentais da teoria de feixes de conjuntos sobre um espaço topológico, é apenas sumária e de caráter informativo. Ainda que reconheçamos as vantagens da adoção de elementos parciais, não nos adentramos por esse terreno, recomendando ao leitor interessado as referências [49], [16] e [12]. A melhor introdução ao estudo da teoria de feixes é [42] e um livro mais avançado sobre o tema é [10].

8.1 Feixes de conjuntos sobre um espaço topológico

A primeira definição geral de feixe surgiu em 1945 num artigo de J. Leray, a qual foi aperfeiçoada por H. Cartan e M. Lazard. Na década de cinquenta, J. P. Serre divisou sua utilidade em geometria algébrica e o arcabouço categorial levou A. Grothendieck a generalizar a definição, considerando feixes sobre sítios. Neste capítulo estudamos apenas os feixes de conjuntos sobre espaços topológicos.

Um espaço topológico X pode ser concebido como uma categoria pequena cujos objetos são os abertos $U \subseteq X$ e cujos morfismos são as inclusões $U \subseteq V$, isto é, o conjunto $\text{Hom}_X(U, V)$ tem um (único) elemento se, e somente se, $U \subseteq V$. Um *pré-feixe de conjuntos sobre X* é um funtor $P : X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cnj}$; portanto, se $U \subseteq V$, há uma função $P_{VU} : P(V) \rightarrow P(U)$, que será chamada de *restrição de $P(V)$ a $P(U)$* . Os elementos do conjunto $P(U)$ são chamados de *seções de P sobre U* ; em particular, as seções sobre X são chamadas de *globais*.

O pré-feixe P é um *subpré-feixe* do pré-feixe Q se, para todo aberto $U \subseteq X$, $P(U) \subseteq Q(U)$. Um morfismo π do pré-feixe P no pré-feixe Q é uma transformação natural $\pi : P \rightarrow Q$; logo, se $U \subseteq V$, então $Q_{VU} \circ \pi_V = \pi_U \circ P_{VU}$.

$$\begin{array}{ccc} V & & P(V) \xrightarrow{\pi_V} Q(V) \\ \uparrow \subseteq & & \downarrow P_{VU} \quad \quad \downarrow Q_{VU} \\ U & & P(U) \xrightarrow{\pi_U} Q(U) \end{array}$$

Pré-feixes sobre X e seus morfismos constituem, assim, uma categoria (e também um topos), denotada por $\mathbf{Pfx}(X)$. O objeto final dessa categoria é o pré-feixe 1 definido por $1(U) := \{*\}$ para todo aberto $U \subseteq X$. Por convenção, adota-se $P(\emptyset) = \{*\}$ para todo pré-feixe P de $\mathbf{Pfx}(X)$.

Estabelecemos agora algumas definições e convenções. O *domínio* $|P|$ de um pré-feixe P é a união disjunta $\coprod_{U \subseteq X} P(U)$, enquanto que a *extensão* $E_P s$ (ou simplesmente Es , quando o contexto o permitir) de uma seção $s \in |P|$ é o índice do elemento na união disjunta, ou seja, o único aberto $U \subseteq X$ para o qual $s \in P(U)$; da mesma forma, a extensão $E_P S$ (ou simplesmente ES) do subconjunto de seções $S \subseteq |P|$ é a união $\bigcup_{s \in S} Es$. Definimos a *restrição* $s|_U$ de uma seção $s \in |P|$ a um aberto $U \subseteq X$ como sendo a nova seção $P_{Es, U \cap Es}(s)$; e a *igualdade interna em P* entre as seções s e t de $|P|$ como

sendo o aberto:

$$\llbracket s = t \rrbracket_P := \bigcup \{U \subseteq (Es \cap Et) : s|_U = t|_U\}. \quad (8.1)$$

Um conjunto de seções $S \subseteq |P|$ é *denso* no pré-feixe P se, para toda seção $t \in |P|$, $Et = \bigcup_{s \in S} \llbracket s = t \rrbracket$. Finalmente, um pré-feixe P é *extensional* quando, para quaisquer seções $s, t \in |P|$, se $Es = Et = \llbracket s = t \rrbracket$, então $s = t$.

Resumimos, no lema seguinte, algumas propriedades úteis de um pré-feixe. Sua demonstração integral pode ser encontrada em [42].

Lema 8.1.1. *Sejam P um pré-feixe sobre X , $s, t, u \in |P|$ e os abertos $U, V \subseteq X$. Então:*

- $s|_{Es} = s$;
- $(s|_U)|_V = s|_{U \cap V}$;
- $E(s|_U) = U \cap Es$;
- $Es = \llbracket s = s \rrbracket$;
- $\llbracket s|_U = t|_V \rrbracket = U \cap V \cap \llbracket s = t \rrbracket$;
- $\llbracket s = t \rrbracket \subseteq (Es \cap Et)$;
- $\llbracket s = t \rrbracket = \llbracket t = s \rrbracket$;
- $\llbracket s = t \rrbracket \cap \llbracket t = u \rrbracket \subseteq \llbracket s = u \rrbracket$;
- se P for *extensional*, então $s|_{\llbracket s=t \rrbracket} = t|_{\llbracket s=t \rrbracket}$.

Consideremos um pré-feixe P sobre X ; um conjunto de seções $S \subseteq |P|$ é *compatível* se, para quaisquer $s, t \in S$, $s|_{Et} = t|_{Es}$. O pré-feixe F é um *feixe* se, para todo conjunto $S \subseteq |F|$ compatível, existe uma única seção $t \in |F|$ tal que $Et = \bigcup_{s \in S} Es$ e, para todo $s \in S$, $t|_{Es} = s$. Observemos que todo feixe é extensional.

O feixe F é um *subfeixe* do feixe G , fato que será denotado por $F \subseteq G$, se F é um subpré-feixe de G . Um morfismo ϕ do feixe F no feixe G é um morfismo $\phi : F \rightarrow G$ entre os pré-feixes subjacentes. A subcategoria plena resultante, dos feixes sobre X , é denotada por $\mathbf{Fei}(X)$. Trata-se, efetivamente, de um topos de Grothendieck [36].

8.2 Feixes constantes

Recordemos que, na categoria **Top** dos espaços topológicos e funções contínuas, o conjunto $\text{Hom}(X, Y)$ coleta todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$. Se $U \subseteq V$ são abertos do espaço X , a imersão de Yoneda $\mathbf{y}(Y)(U \subseteq V) : \text{Hom}(V, Y) \rightarrow \text{Hom}(U, Y)$ determina uma aplicação que associa a cada $f : V \rightarrow Y$ a restrição $f|_U : U \rightarrow Y$. Podemos verificar que o funtor $\mathbf{y}(Y) : X^{op} \rightarrow \mathbf{Cnj}$ é, de fato, um feixe sobre X , chamado de *feixe das funções contínuas* de X em Y e representado por $C_X(Y)$ (ou simplesmente por $C(Y)$, quando o contexto o permitir).

Todo conjunto A pode ser visto como um espaço topológico munido da topologia discreta. O feixe de funções contínuas $C_X(A)$, que será denotado por $L_X(A)$ (ou simplesmente $L(A)$), é chamado de *feixe constante de fibra* (em inglês *stalk*) A sobre X . Portanto, para cada aberto $U \subseteq X$, o conjunto $L_X(U, A)$ coleta, como seções, todas as funções localmente constantes¹ $s : U \rightarrow A$.

De maneira equivalente, $L : \mathbf{Cnj} \rightarrow \mathbf{Fei}(X)$ pode ser definido como um adjunto à esquerda do funtor $\Gamma : \mathbf{Fei}(X) \rightarrow \mathbf{Cnj}$ que associa a cada feixe F o conjunto $\Gamma(F)$ de suas seções globais.

Toda função constante é localmente constante. Acompanhando [42], escrevemos $\hat{a} : X \rightarrow A$ para a função constante definida por $x \mapsto a$ e $\hat{A}$ para a imagem de A em $L(X, A)$ pela injeção $a \mapsto \hat{a}$.

O lema abaixo reúne algumas propriedades de feixes constantes. As demonstrações podem ser conferidas em [42].

Lema 8.2.1. *Sejam A um conjunto, $s, t \in |L(A)|$ e F um feixe sobre X . Então:*

- para qualquer $a \in A$, $s^{-1}(a) = \llbracket s = \hat{a} \rrbracket$, que é aberto e fechado em Es ;
- para $a \in A$, $\llbracket s = \hat{a} \rrbracket \neq \emptyset$ se, e somente se, $a \in s(Es)$;
- se $a \neq b$ em A , então $\llbracket s = \hat{a} \rrbracket \cap \llbracket s = \hat{b} \rrbracket = \emptyset$;
- $Es = \bigcup_{a \in s(Es)} \llbracket s = \hat{a} \rrbracket$, isto é, $\hat{A}$ é denso em $L(A)$;

¹Uma função $f : X \rightarrow A$, em que X é um espaço topológico e A um conjunto, é dita ser *localmente constante* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $f(U) = \{f(x)\}$. De maneira equivalente, f é localmente constante se é uma função contínua de X no espaço discreto A .

- para $a \in s(Es)$, $s|_{\llbracket s=\hat{a} \rrbracket} = \hat{a}|_{\llbracket s=\hat{a} \rrbracket}$;
- $\llbracket s = t \rrbracket = \{x \in Es \cap Et : s(x) = t(x)\}$;
- se $U \subseteq X$ é aberto e fechado, então a restrição $L(A)_{XU} : L(X, A) \rightarrow L(U, A)$ é sobrejetora;
- a função $h : \text{Hom}_{\mathbf{Fei}(X)}(L(A), F) \rightarrow F(X)^A$, definida por $\lambda \mapsto \lambda_X|_A$, é bijetora.

8.3 Números naturais em $\mathbf{Fei}(X)$

Começemos por construir uma categoria $\mathbf{Ind}(X)$; seus objetos são todas as triplas $\langle F, \varphi, s \rangle$, em que F é um feixe sobre X com seções globais (isto é, $F(X) \neq \emptyset$), $\varphi : F \rightarrow F$ é um endomorfismo e s uma seção global de F ; e seus morfismos $f : \langle F, \varphi, s \rangle \rightarrow \langle G, \gamma, t \rangle$ são os morfismos $f : F \rightarrow G$, em $\mathbf{Fei}(X)$, para os quais $f \circ \varphi = \gamma \circ f$ e $f_X(s) = t$. O lema de Yoneda assegura a existência de uma bijeção $(\cdot) : F(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Fei}(X)}(1, F)$ definida, para cada $s \in F(X)$, por $\bar{s} : 1 \rightarrow F$ tal que $\bar{s}_U(*) = s|_U$. O diagrama abaixo ilustra a definição de morfismo na categoria $\mathbf{Ind}(X)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \xrightarrow{\bar{s}} & F & \xrightarrow{\varphi} & F \\
 & \searrow \bar{t} & \downarrow f & & \downarrow f \\
 & & G & \xrightarrow{\gamma} & G
 \end{array}$$

Definimos o *objeto dos números naturais* em $\mathbf{Fei}(X)$ como sendo o objeto inicial da categoria $\mathbf{Ind}(X)$. A proposição seguinte estabelece que esta construção coincide com o feixe constante de fibra $\mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais).

Proposição 8.3.1. *O objeto $\langle L(\mathbb{N}), \sigma, \hat{0} \rangle$, em que $\sigma : L(\mathbb{N}) \rightarrow L(\mathbb{N})$ é o morfismo sucessor, definido por $\sigma_{Es}(s)(x) := s(x) + 1$ para quaisquer $s \in |L(\mathbb{N})|$ e $x \in Es$, satisfaz a condição de objeto dos números naturais em $\mathbf{Fei}(X)$.*

Demonstração. Se $\langle F, \varphi, s \rangle$ é um objeto de $\mathbf{Ind}(X)$, então, pelo princípio da definição por recursão, há uma única função $f : \mathbb{N} \rightarrow F(X)$ para a qual $f(n+1) = \varphi_X \circ f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $f(0) = s$. Assim, pelo último item do

Lema 8.2.1, existe um único morfismo $\lambda : L(\mathbb{N}) \rightarrow F$ tal que $\lambda_X(\hat{n}) = f(n)$, ou seja, tal que $\lambda_X(\hat{0}) = s$ e $\lambda \circ \sigma = \varphi \circ \lambda$, o que mostra que $\langle L(\mathbb{N}), \sigma, \hat{0} \rangle$ é o objeto inicial de $\mathbf{Ind}(X)$. $\square$

A próxima proposição expressa o princípio da indução no topos $\mathbf{Fei}(X)$, o que o credencia, de acordo com as considerações expostas na seção 5.1, a possuir legalmente o objeto dos números naturais.

Proposição 8.3.2. *Para qualquer subfeixe F de $L(\mathbb{N})$, se $\hat{0} \in F(X)$ e $\sigma(F) \subseteq F$, então $F = L(\mathbb{N})$.*

Demonstração. Por hipótese, $\hat{0} \in F(X)$ e $\sigma_X(F(X)) \subseteq F(X)$, o que, pelo princípio de indução, implica $\hat{\mathbb{N}} \subseteq F(X)$. Sendo, pelo Lema 8.2.1, $\hat{\mathbb{N}}$ denso em $L(\mathbb{N})$, concluímos que $F = L(\mathbb{N})$. $\square$

Podemos introduzir, como em qualquer topos com objeto dos naturais, morfismos para adição e produto $(+, \cdot : L(\mathbb{N})^2 \rightarrow L(\mathbb{N}))$, respectivamente) de naturais em $\mathbf{Fei}(X)$. Para $s, t \in |L(\mathbb{N})|$, definimos

$$s + t : Es \cap Et \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{por} \quad (s + t)(x) := s(x) + t(x); \quad (8.2)$$

$$s \cdot t : Es \cap Et \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{por} \quad (s \cdot t)(x) := s(x) \cdot t(x). \quad (8.3)$$

É possível reproduzir, em $\mathbf{Fei}(X)$, as demonstrações de comutatividade e associatividade da adição e do produto de naturais, assim como da neutralidade de $\hat{0}$ e $\hat{1}$, respectivamente. Mostra-se também que a relação de ordem estrita $< \hookrightarrow L(\mathbb{N})^2$, dada por

$$<(U) := \{ \langle s, t \rangle \in L(U, \mathbb{N})^2 : s(x) < t(x) \text{ para todo } x \in U \} \quad (8.4)$$

para cada aberto $U \subseteq X$, é linear.

Um feixe F é dito ser *finito* se existe um isomorfismo natural $\varphi : F \rightarrow L([n])$ para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, se F é isomorfo, em $\mathbf{Fei}(X)$, a algum feixe constante $L([n])$, em que $[n] = \{0, \dots, n-1\}$ em $\mathbf{Cnj}$. Assim, um subfeixe finito de F é um subfeixe de $F' \subseteq F$ que é ao mesmo tempo finito.

8.4 Números reais em $\mathbf{Fei}(X)$

As construções levadas a efeito na seção 6.2 para os objetos dos números inteiros e racionais produzem, no topos $\mathbf{Fei}(X)$, respectivamente, os feixes

constantes $L(\mathbb{Z})$ e $L(\mathbb{Q})$. Isso resulta do fato de o funtor $L : \mathbf{Cnj} \rightarrow \mathbf{Fei}(X)$, definido na seção anterior, preservar limites finitos e co-limites (cf. [36]). A partir disso, define-se, como se fez para $L(\mathbb{N})$, as operações usuais para os feixes $L(\mathbb{Z})$ e $L(\mathbb{Q})$ e demonstra-se que as $\mathbf{Fei}(X)$ -estruturas $\langle L(\mathbb{Z}), +, \cdot, <, \widehat{0}_{\mathbb{Z}}, \widehat{1}_{\mathbb{Z}} \rangle$ e $\langle L(\mathbb{Q}), +, \cdot, <, \widehat{0}_{\mathbb{Q}}, \widehat{1}_{\mathbb{Q}} \rangle$ satisfazem os axiomas de anel comutativo linearmente ordenado.

Na seção 6.3, o objeto $\mathbb{R}_d$ dos reais de Dedekind foi construído numa teoria local arbitrária com objeto dos números naturais, revelando a existência desse objeto num topos qualquer provido do mesmo objeto dos números naturais. No topos $\mathbf{Fei}(X)$, em particular, tal construção dos reais de Dedekind produz um objeto $\mathbb{R}_d$ isomorfo ao feixe $C(\mathbb{R})$ das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e restrições², sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais. A demonstração pode ser acompanhada em [36]. Cabem aqui as palavras de J. L. Bell: “Here *everything* is varying (continuously) over X , so shifting from $\mathbf{Set}$ to $\mathbf{Sh}(X)$ essentially amounts to placing oneself in a framework which is, so to speak, itself ‘co-moving’ with the variation over X of any given variable real number. This cause its variation not to be ‘notice’ in $\mathbf{Sh}(X)$; it [a real-valued continuous function on the topological space X] is accordingly regarded as being a *constant* real number. In this way the concept ‘real-valued continuous function on X ’ is transformed into the concept ‘real number’ when interpreted in $\mathbf{Sh}(X)$. (...) Putting it the other way around, the concept ‘real number’, interpreted in $\mathbf{Sh}(X)$ corresponds to the concept ‘real-valued continuous function on X ’ interpreted in $\mathbf{Set}$.”³ [4]

Consideremos as funções contínuas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$; definimos a relação de ordem (parcial) estrita em $\mathbb{R}_d(X) = C(X, \mathbb{R})$ da seguinte maneira: $f < g$ se, para todo $x \in X$, $f(x) < g(x)$. A relação $< \hookrightarrow \mathbb{R}_d^2$ é obtida pelas restrições $<|_U$ para cada aberto $U \subseteq X$. Verifica-se que a relação de ordem estrita estabelecida na seção 4.3 para topoi quaisquer coincide, em $\mathbf{Fei}(X)$, com a

²Como convém ao exame da idéia de magnitudes variando continuamente.

³“Aqui *tudo* está variando (continuamente) sobre X , de tal forma que a mudança de $\mathbf{Cnj}$ para $\mathbf{Fei}(X)$ resulta essencialmente em situar-se num arcabouço que está, por assim dizer, ‘co-movendo’ com a variação sobre X de qualquer número real variável dado. Isso faz com que sua variação não seja ‘percebida’ em $\mathbf{Fei}(X)$; ela [uma função contínua definida no espaço topológico X com valores reais] é considerada conseqüentemente como sendo um número real *constante*. Nesse sentido o conceito ‘função contínua definida em X com valores reais’ é transformado no conceito ‘número real’ quando interpretado em $\mathbf{Fei}(X)$. (...) Colocando de outra maneira, o conceito ‘número real’ interpretado em $\mathbf{Fei}(X)$ corresponde ao conceito ‘função contínua definida em X com valores reais’ interpretado em $\mathbf{Cnj}$.”

relação definida acima.

Também o objeto $\mathbb{R}_c$ dos reais de Cauchy pode ser construído em $\mathbf{Fei}(X)$ em concordância com o procedimento exposto na seção 6.1. Neste caso, o objeto resultante é isomorfo ao feixe $L(\mathbb{R})$ das funções localmente constantes $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e restrições. Claramente $\mathbb{R}_c \subseteq \mathbb{R}_d$; portanto, $\mathbb{R}_c$ herda a relação de ordem de $\mathbb{R}_d$.

8.5 Homogeneidade em $\mathbf{Fei}(X)$

A definição de homogeneidade apresentada no Capítulo 7 ganha uma formulação particular em $\mathbf{Fei}(X)$. Uma relação de *ordem estrita* $<_F$ num feixe F qualquer (com seções globais) é obtida a partir da restrição da relação $<_{F(X)}$, definida no conjunto das seções globais $F(X)$, a $<_{F(U)}$, para cada aberto $U \subseteq X$.

Sejam F e F' feixes sobre X . A $\mathbf{Fei}(X)$ -estrutura (ou simplesmente estrutura, quando o contexto permitir) ordenada $\mathfrak{F}' = \langle F', < \rangle$ é uma subestrutura da estrutura $\mathfrak{F} = \langle F, < \rangle$ se, para todo aberto $U \subseteq X$, $\langle F'(U), <(U) \rangle$ é uma subestrutura de $\langle F(U), <(U) \rangle$ em $\mathbf{Cnj}$.

Se $\mathfrak{F} = \langle F, < \rangle$ e $\mathfrak{G} = \langle G, < \rangle$ são duas estruturas ordenadas, um *homomorfismo* $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ é um morfismo $\varphi : F \rightarrow G$ que preserva a ordem, isto é, para cada aberto $U \subseteq X$ e seções $s, t \in F(U)$, se $s <_{F(U)} t$, então $\varphi_U(s) <_{G(U)} \varphi_U(t)$; um *isomorfismo parcial (finito)* $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ é um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{G}'$, em que $\mathfrak{F}'$ e $\mathfrak{G}'$ são subestruturas (finitas) de $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$, respectivamente.

A estrutura $\mathfrak{F}$ é *homogênea* se todo isomorfismo parcial finito $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ pode ser estendido a um automorfismo de $\mathfrak{F}$. De acordo com as considerações expostas no Capítulo 1, é de fundamental relevância indagar se as estruturas ordenadas $\mathfrak{R}_d = \langle \mathbb{R}_d, < \rangle$ e $\mathfrak{R}_c = \langle \mathbb{R}_c, < \rangle$ são homogêneas. A resposta positiva é dada no Capítulo 7, em que se demonstra que, num topos qualquer com objeto dos números naturais, as estruturas $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}_c$ e $\mathfrak{R}_d$ são homogêneas. No Capítulo 6, demonstramos que $\mathfrak{Q}$ é uniformemente persistente em $\mathfrak{R}_c$, assim como $\mathfrak{R}_c$ (e conseqüentemente $\mathfrak{Q}$) é uniformemente persistente em $\mathfrak{R}_d$.

Epílogo

Poca favilla gran fiamma seconda:
forse dietro a me con miglior voci
si pregherà perché Cirra risponda.
Dante: Paradiso I, 34 [20]

Este trabalho representa um esforço no sentido de oferecer, por um lado, um aporte filosófico à compreensão do continuum matemático e, por outro, uma contribuição matemática ao estudo dos números reais. Sobrelevando a idéia de magnitudes variando continuamente, que defendemos, com base em fundamentação histórica, ser o principal atributo essencial do continuum, propomos sua formalização através do conceito matemático de homogeneidade. Propugnamos ainda, dentro de uma linha filosófica que preserva a unidade essencial do continuum, a adoção de topoi para acolher o desdobramento teórico da investigação.

Valendo-nos da teoria local de conjuntos, introduzimos algumas noções, entre as quais a de persistência uniforme, e estabelecemos uma série de resultados que conduziram à demonstração da homogeneidade das estruturas ordenadas dos racionais, dos reais de Dedekind e dos reais de Cauchy. Por fim, ilustramos matematicamente os frutos da investigação mediante o topos dos feixes sobre um espaço topológico, que forneceu ademais um testemunho da eficácia do método de transferência de problemas geométricos para o domínio lógico.

Em virtude de seu caráter eminentemente técnico, os fundamentos conceituais da matemática, em particular a concepção de continuum, têm recebido pouca atenção por parte de profissionais da área de filosofia. Paralelamente, a literatura cobrindo teoria intuicionista de modelos permanece, com heróicas exceções, praticamente ignorada pela comunidade matemática. Nesse estado de coisas, não foram poucos os obstáculos e limitações encontrados no nosso empreendimento. Em suma, ecoando os versos de Dante, este trabalho legou

mais lacunas do que elucidações.

No decurso do texto vimos indicando direções para o estudo posterior de alguns aspectos da teoria que receberam tratamento marginal ou superficial. Na seção 4.2, por exemplo, sugerimos um leque de alternativas para o estudo da noção de persistência uniforme. Depois, na seção 6.4, aventamos a possibilidade de uma cadeia elencando, através dessa relação de persistência uniforme, todas as estruturas consideradas neste trabalho, a que poderíamos denominar “cadeia real”.

Tratamento insuficiente receberam, aliás, as estruturas ordenadas dos reais estendidos, dos reais euclidianos – estas já figurando na literatura – e dos reais arquimedianos, proposta neste trabalho. Dentro da nossa tese de sustentar a posição da idéia de magnitudes variando continuamente como atributo essencial do continuum, semelhante atenção deveria ser dispensada a essas estruturas quanto à demonstração de sua homogeneidade. Além do mais, outros tópicos relacionados com o tema do trabalho foram inevitavelmente omitidos, entre os quais cumpre destacar o método de construção direta dos reais a partir do anel dos inteiros (cf. [53]) e as conseqüências decorrentes da hipótese de Souslin (cf. [13]) e das propriedades topológicas dos números reais (cf. [52]) no cerne desta investigação.

Faltou sobretudo situar o estudo do continuum matemático num contexto mais geral e abrangente, levando-se em consideração outras particularidades historicamente associadas à sua natureza, entre as quais a idéia de infinitésimo, tão em voga atualmente graças à análise não-standard e à análise infinitesimal suave. Acreditamos, contudo, que as nossas investigações abrem novas perspectivas de pesquisa dentro de um campo deveras estimado mas pouco explorado.

Referências Bibliográficas

- [1] Aristóteles. *Metafísica*, trad. H. Zucchi, Editorial Sudamericana, Buenos Aires, 2000.
- [2] H. P. Barendregt. *The Lambda calculus: its syntax and semantics*, North-Holland, Amsterdã, 1981.
- [3] M. Barr, C. Wells. *Toposes, triples and theories*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1984.
- [4] J. L. Bell. *Toposes and local set theories: an introduction*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [5] J. L. Bell. *A Primer of infinitesimal analysis*, Cambridge U. P., 1998.
- [6] J. L. Bell, A. B. Slomson. *Models and ultraproducts: an introduction*, North-Holland, Amsterdã, 1971.
- [7] E. Bishop, D. Bridges. *Constructive analysis*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1985.
- [8] J. L. Borges. El Aleph; em *El Aleph*, pp. 239-267, Emecé, Buenos Aires, 1996.
- [9] C. B. Boyer. *The History of the calculus and its conceptual development*, Dover, Nova Iorque, 1959.
- [10] G. E. Bredon. *Sheaf theory*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1996.
- [11] G. E. Bredon. *Topology and geometry*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1993.

- [12] A. Brunner. O Método das constantes na teoria dos modelos em feixes sobre uma álgebra de Heyting, tese de doutorado, USP, São Paulo, 2000.
- [13] M. C. Bunge. Topos theory and Souslin's hypothesis, *Journal of Pure and Applied Algebra* 4, pp. 159-187, 1974.
- [14] F. Cajoli. *A History of mathematical notations*, 2 vol., Dover, Nova Iorque, 1993.
- [15] J. C. Cifuentes. *O Método dos isomorfismos parciais*, Coleção CLE, Campinas, 1992.
- [16] M. E. Coniglio. Categorical logic with partial elements; em W. A. Carnielli e I. M. L. D'Ottaviano (editores), *Advances in contemporary logic and computer science*, Contemporary Mathematics 235, pp. 63-82, 1999.
- [17] M. E. Coniglio, C. Sernadas. A Hilbert-style axiomatization of higher-order intuitionistic logic; em H. A. Feitosa e F. T. Sautter (editores), *Lógica: teoria, aplicações e reflexões*, pp. 25-58, Coleção CLE, Campinas, 2004.
- [18] N. J. Cutland. *Computability: an introduction to recursive function theory*, Cambridge U. P., 1980.
- [19] D. van Dalen. *Logic and structure*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1997.
- [20] Dante Alighieri. *A Divina comédia: Paraíso*, ed. bilíngüe, trad. I. E. Mauro, Editora 34, São Paulo, 1998.
- [21] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas. *Mathematical logic*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1994.
- [22] R. L. Epstein, W. A. Carnielli. *Computability: computable functions, logic and the foundations of mathematics*, Wadsworth Publishing, Belmont, 2000.
- [23] M. H. Escardó, A. K. Simpson. A Universal characterization of the closed Euclidean interval, *Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 115-128, 2001.
- [24] H. Eves. *Introdução à história da matemática*, trad. H. H. Domingues, Ed. UNICAMP, Campinas, 2002.

- [25] M. P. Fourman, D. S. Scott. Sheaves and logic; em M. P. Fourman, C. J. Mulvey e D. S. Scott (editores), *Applications of sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, pp. 302-401, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1979.
- [26] R. Goldblatt. *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1998.
- [27] R. Goldblatt. *Topoi: the categorical analysis of logic*, North-Holland, Amsterdã, 1986.
- [28] J. G. Hocking, G. S. Young. *Topology*, Dover, Nova Iorque, 1988.
- [29] P. Johnstone. Notes on categorical logic, Tutorials of WoLLIC '97, Fortaleza, 1997.
- [30] P. Johnstone. *Topos theory*, Academic Press, Londres, 1977.
- [31] I. Kant. *Crítica da razão pura*, trad. M. P. dos Santos e A. F. Morujão, Fund. Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1994.
- [32] S. Körner. *The Philosophy of mathematics: an introduction*, Dover, Nova Iorque, 1986.
- [33] J. Lambek, P. J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge U. P., 1986.
- [34] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1997.
- [35] S. Mac Lane, G. Birkhoff. *Algebra*, AMS Chelsea, Providence, 1991.
- [36] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1992.
- [37] M. Makkai, G. E. Reyes. *First order categorical logic*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1977.
- [38] D. Marker. *Model theory: an introduction*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 2002.
- [39] C. McLarty. *Elementary categories, elementary toposes*, Claredon Press, Oxford, 1992.

- [40] P. B. Menezes, E. H. Haeusler. *Teoria das categorias para ciência da computação*, Sagra Luzzatto, Porto Alegre, 2001.
- [41] F. Miraglia. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*, Coleção CLE, Campinas, 1987.
- [42] F. Miraglia. *An Introduction to partially ordered structures and sheaves*, não publicado.
- [43] I. Moerdijk, G. E. Reyes. *Models for smooth infinitesimal analysis*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1991.
- [44] C. J. Mulvey. Intuitionistic algebra and representations of rings, *Memoirs of the American Mathematical Society* 148, pp. 3-57, 1974.
- [45] Platão. *A República*, trad. C. A. Nunes, Ed. UFPA, Belém, 2000.
- [46] Platão. *Teeteto*, trad. C. A. Nunes, Ed. UFPA, Belém, 2001.
- [47] H. Poincaré. Science and hypothesis; em *The Value of science: essential writings of Henri Poincaré*, pp. 1-178, Modern Library, Nova Iorque, 2001.
- [48] G. Reale, D. Antiseri. *História da filosofia Vol. 1: Filosofia pagã antiga*, trad. I. Storniolo, Paulus, São Paulo, 2003.
- [49] L. A. Sbardellini. Semântica categorial generalizada, dissertação de mestrado, UNICAMP, Campinas, 2001.
- [50] D. S. Scott. Identity and existence in intuitionistic logic; em M. P. Fourman, C. J. Mulvey e D. S. Scott (editores), *Applications of sheaves*, *Lecture Notes in Mathematics* 753, pp. 660-696, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1979.
- [51] S. Shapiro. *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics*, Oxford U. P., 2000.
- [52] L. N. Stout. Topological properties of the real numbers object in a topos, *Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle* XVII-3, pp. 295-326, 1976.

- [53] R. Street. An Efficient construction of the real numbers, Gazette of the Australian Mathematical Society 12, pp. 57-58, 1985.
- [54] P. Suppes. *Axiomatic set theory*, Dover, Nova Iorque, 1972.
- [55] A. S. Troelstra, D. van Dalen. *Constructivism in mathematics: an introduction*, 2 vol., North-Holland, Amsterdã, 1988.
- [56] W. Veldman, F. Waaldijk. Some elementary results in intuitionistic model theory, The Journal of Symbolic Logic 61, pp. 745-767, 1996.
- [57] H. Weyl. *The Continuum: a critical examination of the foundation of analysis*, trad. S. Pollard e T. Bole, Dover, Nova Iorque, 1987.

Índice Remissivo

- $\aleph_0$ -categórico, 53
 - aceleração, 12
 - adaequalitas – pseudo-igualdade, 21
 - adequação da teoria local, 43
 - adição, 21, 66, 83, 84, 102
 - adjunto à esquerda, 100
 - agregados de Weierstraß, 15
 - álgebra, 12, 20, 22
 - de Heyting, 43, 46, 47
 - de subobjetos, 6, 43, 46, 94, 95
 - moderna, 16, 79
 - análise, 14–17, 24, 25
 - combinatória, 23
 - construtiva, 17
 - infinitesimal, 23, 25
 - suave, 26, 106
 - intuicionista, 26
 - não-standard, 21, 25, 106
 - analogia, 53
 - Anaximandro, 10
 - anel, 79, 83, 84, 103
 - antiderivada, 23
 - antinomia, 14
 - anulação de diferenças, 21
 - apartação, 50
 - apeiron, 10
 - árabes, 11, 12
 - área, 10, 12, 17–19, 21–23
 - Aristóteles, 10–12, 17
 - aritmética, 11, 13–15, 21, 22, 27
 - infinitesimal, 22
 - aritmetização
 - da análise, 14, 25, 27
 - da geometria, 13
 - Arquimedes, 18, 19
 - astronomia, 10
 - atomismo, 17
 - automorfismo, 32, 33, 52, 57, 61, 82, 89, 90, 93, 94, 104
 - avaliação, 7
 - axioma, 5, 15, 17, 30, 35, 39, 43, 45, 63, 64, 70, 71, 84, 103
 - básico, 38
 - compreensão, 38
 - congruência, 38
 - emparelhamento, 38
 - projeções, 38
 - tautologia, 38
 - unidade, 38
 - da escolha, 29
 - enumerável, 31
 - de indução, 64
 - de Peano, 64
-
- babilônios, 10, 17
 - Barrow, Isaac, 13, 22, 23
 - Bell, J. L., 103
 - Bénabou, J., 35
 - Berkeley, George, 24
 - Bernoulli, Jakob, 23, 24

Bernoulli, Johann, 23, 24
 bicondicional, 37
 Bishop, Errett, 17
 Bolzano, Bernhard, 14, 16
 Bradwardine, Thomas, 11
 Brouwer, L. E. J., 17
 Buridano, João, 12

 $C(N)$ -estrutura, 74, 75, 77, 80–82, 84, 86, 90, 92, 93
 $C(S)$ -estrutura, 50–52, 54–57, 59–61
 cadeia, 85, 88, 106
 real, 106
 Calculador, 12, 13
 cálculo, 14–16, 18, 22, 24, 25, 27
 diferencial, 3, 14, 15, 19, 21, 22, 25
 infinitesimal, 18, 24
 integral, 3, 15, 22
 cálculo de seqüentes, 4, 30, 35
 cálculo proposicional
 intuicionista, 67
 Cantor, Georg, 14, 16, 27
 cardinal, 90
 infinito, 89
 Carnot, Lazare, 25
 Cartan, H., 98
 categoria, 5, 6, 26, 28, 30, 35, 44, 45, 49, 51–53, 63, 98, 100, 101
 dos conjuntos, 6, 51, 52, 70, 79, 83, 85, 102–104
 dos conjuntos finitos, 6, 44
 dos espaços topológicos, 6, 100
 dos feixes sobre um espaço topológico, 5, 6, 31, 79, 85, 99, 101–105
 dos pré-feixes, 6
 dos pré-feixes sobre um espaço topológico, 98
 dual, 6
 equivalente a, 35, 45
 finitamente co-completa, 45
 finitamente completa, 45
 pequena, 6, 98
 plena, 99
 Cauchy, Augustin-Louis, 14, 15
 causa material, 17
 Cavalieri, Bonaventura, 19, 20, 22
 cinemática, 13, 22
 classe, 6, 16, 36, 38, 89
 de equivalência, 53
 classificador de subobjetos, 7, 28, 45
 co-limite, 6, 28, 103
 finito, 45
 co-produto, 7
 compatível, 99
 compensação de erros, 25
 completamento, 5, 16, 54, 79
 condicional, 15, 87
 seqüencial, 86
 completude lógica, 29, 35, 41, 43, 44
 composição, 42, 45, 60, 66, 71, 94
 comprimento, 10, 18
 de seqüência, 72–74, 91, 93, 94
 congruência, 10
 conjunção, 37
 finita de uma fórmula, 67, 74, 76
 conjunto, 6, 31, 32, 35, 52, 53, 85, 98–100, 104
 denso, 32
 dos números naturais, 31, 70,

101
 dos números racionais, 53
 dos números reais, 85, 103
 enumerável, 53, 70
 eqüipotente a, 31, 52, 70
 finito, 6, 44, 71, 75
 infinito, 27
 limitado superiormente, 15, 87
 local, 35, 39
 ordenado, 53
 constante, 44, 103
 indeterminada, 13, 21
 infinitesimal, 21
 construtivismo matemático, 4, 5,
 17, 27, 29–31, 50, 54, 67,
 89
 contexto, 37, 41, 42, 46, 64, 72
 adequado a, 37, 38
 canônico, 37, 43
 continuidade, 11, 15, 24, 27, 32
 continuum, 3, 4, 9–12, 14, 27–29,
 31–33, 105, 106
 aritmético, 28
 matemático, 3, 9, 32, 105, 106
 contradição, 18, 24, 44
 contradomínio, 6, 45, 89
 convergência, 14, 15
 corpo, 16, 25, 26
 de quocientes, 83
 ordenado completo, 16, 79
 correção lógica, 29, 35, 41, 43, 44
 corte de Dedekind, 4, 16, 29, 50,
 53, 54, 57, 59–61, 79, 81,
 85, 86
 cosmologia, 19
 Cournot, Antoine Augustin, 25
 cristãos, 11
 cubatura, 22
 curva, 12, 13, 17, 18, 21–24, 26
 Cusa, Nicolau de, 18
 D'Alembert, Jean-le-Rond, 14, 25
 Dante Alighieri, 3, 105
 decidível, 5, 46, 63, 65–68, 70–72,
 74, 76–78, 83, 90, 93
 Dedekind, Richard, 16, 27
 Demócrito, 17
 densidade, 12, 31–33, 50, 51, 57,
 81, 92
 em pré-feixe, 99
 derivada, 14, 15, 25
 Descartes, René, 13, 22
 diagonal, 42
 de um quadrado, 10
 diagrama, 6, 14, 41, 42, 52, 60, 64,
 83, 101
 diferença – diferencial, 23
 diferencial, 15, 23, 24
 disjunção, 37
 finita de uma fórmula, 67
 dispersão de Cauchy, 5, 80, 81, 84–
 86
 domínio
 de estrutura, 54, 74
 de morfismo, 6, 45, 72, 89
 de pré-feixe, 98
 Dubuc, E., 26
 egípcios, 17
 elemento, 4, 5, 16, 28, 33, 46, 64,
 71–74, 83, 86, 91, 98
 complementado, 46, 47
 distinguido, 36
 estendido, 61, 85
 minimal, 65, 95
 neutro, 45

nilpotente, 26
 parcial, 97
 eliminabilidade de descrições, 39
 empurrador, 7, 83
 endomorfismo, 101
 enumerável, 5, 53, 63, 64, 70, 71, 73–75, 77, 91–93
 totalmente, 71, 73, 74, 83, 84, 92, 94
 epimorfismo, 6, 46
 epistemologia, 30
 equalizador, 7
 equivalência, 53
 equivalência elementar, 53
 equivalência entre categorias, 53
 escola
 de Abdera, 17
 eleata, 10, 17
 peripatética, 10
 pitagórica, 10, 13, 17, 20
 escolástica, 12, 16, 18, 22
 espaço, 9, 27, 28
 euclidiano, 31
 espaço topológico, 5, 6, 9, 31, 79, 85, 97, 98, 100, 105
 0-dimensional, 85
 discreto, 100
 separável, 85
 esquema de indução, 64
 estrutura, 29, 49, 53, 85, 89
 $\aleph_0$ -homogênea, 90
 categorial, 49, 83
 homogênea, 89, 90
 κ -homogênea, 89
 estrutura ordenada, 4, 33, 49–57, 59–61, 63, 74, 75, 77, 80–82, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 104, 106
 análoga a, 53
 condicionalmente completa, 87
 densa, 51
 densa em, 51, 57, 81
 dos racionais, 5, 80, 84, 85, 89, 90, 93, 95, 104, 105
 dos reais, 4, 5, 30, 52, 79, 95
 arquimedianos, 87, 88, 106
 de Cauchy, 5, 52, 80, 85, 86, 89, 90, 93, 104, 105
 de Dedekind, 5, 52, 60, 85–87, 89, 90, 93, 104, 105
 estendidos, 5, 52, 85, 87, 106
 euclidianos, 88, 106
 efetivamente homogênea, 5, 89, 93–95
 enumerável, 74, 75, 77
 finita, 74
 gerada por, 60, 86, 87, 93
 habitada, 55, 75, 77, 82, 84, 93, 94
 homogênea, 4, 5, 33, 52, 60, 89, 90, 92, 93, 97, 104–106
 linearmente, 50, 51, 54–57, 59–61, 74, 75, 77, 80–82, 84, 93
 parcialmente, 80
 persistente, 51, 55–57, 59–61, 75–77, 80–82, 84–86, 93
 persistente em, 51, 57, 61, 77, 78, 82, 95
 seqüencialmente completa, 86
 totalmente enumerável, 74, 84, 93
 uniformemente persistente, 52, 56, 82
 uniformemente persistente em, 52, 61, 80, 85, 104

Euclides, 11, 13
 Eudoxo, 17, 18
 Euler, Leonhard, 13, 14, 24, 25
 exaustão, 17, 18
 exponencial, 7, 28, 45
 numérico, 66
 extensão, 50, 61
 de seção, 98
 falsum, 37
Fei(X)-estrutura, 103, 104
 feixe, 5, 6, 30, 31, 79, 85, 97–105
 constante, 100–102
 de funções contínuas, 100, 103
 de funções localmente constantes, 100, 104
 dos números inteiros, 103
 dos números naturais, 101, 102
 dos números racionais, 103
 dos números reais, 30, 79
 de Cauchy, 31, 104
 de Dedekind, 31, 103
 extensional, 99
 finito, 102, 103
 sobre um sítio, 98
 Fermat, Pierre de, 13, 20–23
 fibra, 100, 101
 filosofia natural, 11
 finito, 5, 19, 24, 63, 64, 70–72, 74, 102
 flecha, 6
 fluens, 12
 fluente, 13, 14
 fluxo, 14
 fluxus, 12
 Fontenelle, Bernard de, 25
 força, 12
 forma, 9, 11
 dinâmica, 23
 formalismo matemático, 3, 24
 fórmula, 36, 37, 39, 43, 49, 64, 67, 68, 70–72, 74, 76–78, 83, 90, 92, 94
 decidível, 46, 67, 70, 71, 74, 76, 78, 83
 decidível em, 46, 68, 72, 77, 78, 90, 93
 em contexto, 43, 46
 fechada, 36
 Fraenkel, A., 16
 fragmento, 49
 função, 14–16, 25, 27, 100, 101
 algébrica, 21
 bijetora, 6, 13, 16, 32, 101
 constante, 100
 contínua, 14–16, 31, 100, 103
 derivada, 25
 diferenciável, 14
 exponencial, 25
 injetora, 100
 local, 35
 localmente constante, 31, 100, 104
 logarítmica, 24
 recursiva primitiva, 66
 representável, 66
 restrição, 98
 trigonométrica, 21, 25
 fundamentos, 16
 da análise, 15, 16
 da matemática, 105
 funtor, 6, 53, 98, 100, 103
 contravariante, 6
 Galileu Galilei, 12–14, 19, 23, 31

geometria, 5, 10, 12–17, 20–22, 27,
 30, 97, 105
 algébrica, 98
 analítica, 13, 21, 22
 diferencial sintética, 26
 sintética, 23
 gnosiologia, 3
 Gordan, Paul, 30
 Grandi, Guido, 25
 Gregory, James, 22
 gregos, 10, 11, 15, 17–19
 Grothendieck, A., 98

 habitado, 46
 Heine, Eduard, 16
 Hilbert, David, 30
 hindus, 11, 12
 hipótese de Souslin, 106
 Hobbes, Thomas, 13
 homogeneidade, 4, 5, 27, 30, 33, 52,
 60, 89, 90, 92–94, 97, 104–
 106
 homomorfismo, 51, 104
 Hudde, Johann, 22
 Huygens, Christiaan, 22, 23

 idempotente, 59, 86
 igualdade interna, 98
 imagem, 68, 82, 86, 100
 útil, 72
 imersão, 82, 89
 de Yoneda, 6, 100
 ímpeto, 11
 implicação, 37
 inclusão, 7, 51, 98
 incomensurabilidade, 10, 11
 indiferenciabilidade, 50, 51
 indivisível, 10, 11, 19, 22

 ínfimo, 6, 43
 infinitésimo, 3, 9, 11, 17–26, 106
 de ordem superior, 21, 24
 infinito, 11, 14, 17–19, 21, 27, 70,
 89
 atual, 11, 18, 24
 categoremático, 11, 16, 22
 divisibilidade, 11, 32
 potencial, 11, 18
 sincategoremático, 11
 integral, 14, 15, 23
 definida, 15, 21
 interpretação, 41, 43–45, 49
 intuicionismo, 3, 17
 isomorfismo, 4–6, 16, 29, 46, 52–
 57, 59, 60, 64, 70, 75, 77,
 79, 81, 84–86, 93, 102–104
 canônico, 42
 natural, 6, 102
 parcial, 33, 60, 75, 81, 89
 finito, 33, 90, 93, 104

 João XXI – Petrus Hispanus, 11
 Johnstone, P., 86
 jônios, 17
 Jónsson, B., 89
 Joyal, A., 35

 Kant, Immanuel, 3, 27, 28
 Kepler, Johannes, 19
 Kock, A., 26

 λ -cálculo, 35
 Lagrange, Joseph Louis, 25
 latitude, 12
 latitude formarum, 12
 Lawvere, F. William, 26, 35, 63
 Lazard, M., 98

Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 14,
 15, 21, 23, 24, 31
 lema de Yoneda, 6, 101
 Leonardo de Pisa, 11
 Leray, J., 98
 L'Hospital, Marquês de, 24
 L'Huilier, Simon, 25
 limitante
 inferior, 95
 superior, 87
 limite, 6, 28
 de dispersão de Cauchy, 86
 de função, 14–16, 23, 25
 de seqüência, 15, 20–22
 finito, 45, 103
 linguagem
 de Mitchell-Bénabou, 45
 formal, 30, 35, 49, 53
 infinitária, 49
 interna, 4, 27, 29, 45
 local, 35–37, 41, 43–45, 64, 67
 linha, 9, 11, 12, 28
 reta, 11, 12
 lógica, 5, 16, 24, 25, 29–31, 35, 39,
 97, 105
 clássica, 5, 17, 29–31, 35, 39,
 40, 53, 75, 79
 intuicionista, 4, 26, 29, 30, 35,
 39, 49, 53, 97
 de ordem superior, 4, 29, 30,
 35, 39
 de primeira ordem, 53, 97
 de segunda ordem, 53
 matemática, 25, 30
 longitude, 12
 magnitude, 10, 16–18, 24, 27
 magnitudes variando continuamente, 3, 4, 9–11, 13, 19, 27, 31–
 33, 89, 103, 105, 106
 máximo, 21, 23
 divisor comum, 83
 Mengenlehre, 16
 Méray, Charles, 16
 metafísica, 10, 11, 19
 mínimo, 21, 23, 68, 70
 Mitchell, W., 35
 modelo, 5, 16, 26, 29, 53, 89, 97
 duma teoria local, 43
 monomorfismo, 6, 46, 51, 52, 55,
 57, 61, 80, 81, 85, 88, 94,
 95
 canônico, 51, 52, 56, 57, 80, 81,
 86, 92
 morfismo, 6, 7, 30, 35, 41, 44, 51,
 55, 64, 98, 99, 101, 102, 104
 característico, 42, 43
 movimento, 11–13
 multiplicação, 66
 multiplicidade, 28

 n -categoria, 53
 N -conjunto, 64, 65, 67, 70–76, 78,
 80–85, 87, 91, 92
 N -função, 64–68, 71–75, 77, 80, 93,
 94
 bijetora, 72, 73, 84
 constante, 72
 injetora, 94
 módulo, 83
 projeção, 66
 recursiva primitiva, 83, 84
 sobrejetora, 73, 74, 91
 sucessor, 64, 66
 zero, 66
 negação, 37

Newton, Isaac, 12–15, 22–24
 Nieuwentijdt, Bernard, 24
 notação, 6, 12, 18, 19, 22, 23, 25,
 39, 49, 50, 56, 65, 67, 72,
 83, 86
 números, 10–15, 21
 hiper-reais, 26
 inteiros, 5, 79, 82, 83, 102
 negativos, 83
 positivos, 16, 83
 irracionais, 11–13, 15, 22
 naturais, 4, 5, 13, 28, 31, 49,
 63–65, 67, 68, 70–72, 77,
 79, 85, 86, 101–104
 negativos, 11, 12
 racionais, 5, 15, 16, 20, 21, 31,
 53, 54, 59, 60, 79, 80, 83–
 85, 89–92, 102, 105
 negativos, 83
 positivos, 83
 reais, 3–5, 9, 14–16, 25, 26, 28–
 31, 33, 49, 50, 52, 53, 60,
 63, 79, 85, 88, 89, 97, 103,
 105, 106
 arquimedianos, 87, 106
 de Cauchy, 5, 31, 52, 79, 80,
 84, 85, 89, 90, 104, 105
 de Dedekind, 5, 31, 52, 85,
 89, 90, 103, 105
 estendidos, 5, 50, 52, 85, 106
 euclidianos, 86, 106
 objeto, 6, 7, 28–31, 35, 41, 43–45,
 52, 64, 70, 79, 84, 86, 98,
 101, 103, 104
 dos números inteiros, 82, 102
 negativos, 83
 positivos, 83
 dos números naturais, 4, 5, 28,
 49, 63, 64, 70, 79, 85, 86,
 101–104
 dos números racionais, 59, 60,
 83, 102
 dos números reais, 4, 28, 33,
 49, 52, 53, 63, 88, 89, 97
 arquimedianos, 87
 de Cauchy, 79, 84, 104
 de Dedekind, 85, 103
 estendidos, 50, 85
 euclidianos, 86
 enumerável, 64, 74
 final, 6, 70, 98
 finito, 64, 74
 infinito, 70
 inicial, 6, 101, 102
 representável, 6
 totalmente enumerável, 74
 Occam, Guilherme de, 11
 ordem, 16, 27, 50, 51, 53, 75, 90,
 92, 93, 104
 estrita, 32, 54, 61, 65, 73, 80,
 83, 84, 102–104
 linear, 50, 53, 65
 Oresme, Nicolau de, 12
 Pacioli, Luca, 11
 paradoxo, 16, 20
 de Aquiles e da tartaruga, 20
 de Russell, 16
 paralogismo, 24
 participação
 acidental, 3, 9
 essencial, 3, 4, 9, 31–33, 105,
 106
 Pascal, Blaise, 20–23
 persistência, 32, 33, 51–53, 55–57,

- 59–61, 75–78, 80–82, 84–86,
92, 93, 95
- uniforme, 4, 5, 30, 50, 52, 53,
56, 61, 80, 82, 85, 88, 97,
104–106
- Petrus Hispanus – João XXI, 11
- Pitágoras, 10, 18
- plano, 13
- Platão, 10, 18, 19
- Poincaré, Henri, 28
- Poisson, Siméon, 25
- ponto, 3, 4, 11, 13, 14, 20, 21, 27,
28, 31, 32, 51
 - de inflexão, 23
- pragmático, 30
- pré-feixe, 6, 98, 99
 - extensional, 99
 - representável, 6
- pré-ordem, 52
- preserva a ordem dos pares, 75, 90,
92, 93
- princípio, 10
 - da microafinidade, 26
 - da recursão, 65, 66, 101
 - de indução, 102
 - do mínimo, 5, 63, 67, 68
 - lógico, 29, 30
 - particular, 31, 54
- produto, 6, 7, 66, 71, 75
 - finito, 72
 - numérico, 23, 66, 83, 84, 102
- projeção, 7, 54, 66
- propriedade duma teoria local
 - compreensão, 40
 - extensionalidade, 40
 - intersecção, 40
 - ordem, 40
 - partes, 40
 - substituição, 40
 - união, 40
 - unitário, 40
 - universo, 40
 - vazio, 40
- pseudo-igualdade – adaequalitas, 21
- puxador, 7
- quadratura, 20, 22–24
- quantificador, 37
 - existencial, 37
 - universal, 37
- razão de magnitudes, 10
- razão última de mudança, 23, 24
- redução ao absurdo, 18, 30
- regra de inferência, 38
 - corte, 38
 - enfraquecimento, 38
 - equivalência, 38
 - extensionalidade, 38
 - substituição, 38
- relação, 4, 50, 53, 55, 65, 66, 82,
83, 85, 102–104, 106
 - de equivalência, 53
 - discreta, 65
 - irreflexiva, 50, 65
 - reflexiva, 52
 - transitiva, 50, 52, 65
- restrição de seção, 98
- reta, 11–13, 20, 26
- reticulado, 6, 74
- Roberval, Giles Persone de, 13, 20–
22
- Robinson, Abraham, 25
- Russell, B., 16
- S*-conjunto, 39, 44–46, 50, 54, 56,
61

S -função, 44, 45, 58, 60, 61
 bijetora, 45, 55, 58
 identidade, 45
 imagem direta, 46
 imagem inversa, 46
 injetora, 45
 sobrejetora, 45
 Saint-Vincent, Gregório de, 20, 25
 seção, 98, 99
 global, 98, 100, 101
 segmento, 11, 13, 21
 de parábola, 19
 de reta, 20
 semântica
 categorial, 49
 sentença, 36
 seqüência, 14, 31, 63, 64, 71–75, 79, 88, 92, 94
 de Cauchy, 15, 16, 29, 79
 finita, 5, 63, 71, 72, 74, 75, 90–93
 crescente, 74
 infinita, 5, 14, 79, 80
 seqüente, 4, 30, 35, 37–39, 43, 65
 derivável de, 38, 39
 válido, 39, 44
 válido por, 43, 45
 série, 15
 de Taylor, 25
 infinita, 12, 20, 22–24
 Serre, J. P., 98
 símbolo lógico, 37, 39
 sistema axiomático, 35
 sistema de coordenadas, 12
 sistema formal, 30
 Sluze, René, 22
 sólido, 17–19
 de revolução, 17
 soma, 15, 20, 22, 23, 66
 sorte, 36, 45
 Stevin, Simon, 19
 subcategoria, 99
 subclasse, 49
 subconjunto, 15, 46, 86, 87, 98
 subestrutura, 86, 87, 104
 finita, 104
 subfeixe, 99, 102
 finito, 102
 subobjeto, 6, 43, 60, 86, 87
 próprio, 86
 subpré-feixe, 98, 99
 substituição, 66
 substituição simultânea, 37
 sucessor, 64, 66, 101
 superfície, 17–19
 supremo, 6, 15, 87
 Swineshead, Ricardo de – Calculador, 12
 Tacquet, Andreas, 20, 25
 tangente, 13, 21–23
 tempo, 9, 10, 12, 13, 27, 28
 teologia, 11, 13, 30
 teorema, 22
 binomial de Newton, 20, 23
 da base finita para ideais polinomiais, 30
 da compacidade, 26
 da equivalência, 35, 45
 de Schröder-Bernstein, 52
 do ponto fixo de Tarski, 52
 do vaivém de Cantor, 5, 53, 63, 75
 fundamental do cálculo, 22
 teoria das categorias, 4–7, 26, 28–31, 46, 49, 50, 53, 64, 83,

- 98
- teoria de conjuntos, 4, 5, 16, 17, 27,
29, 30, 32, 35, 39, 40, 53
- teoria de feixes, 30, 97
- teoria de modelos, 4, 53, 89, 97, 105
intuicionista, 4, 97, 105
- teoria de topos, 7, 26, 30, 53
- teoria dos números, 15, 20, 27
- teoria local de conjuntos, 4, 6, 29–
31, 35, 39, 40, 43–45, 49,
63, 64, 72, 97, 103, 105
consistente, 39, 44
inconsistente, 39
naturalizada, 30, 63, 64, 66, 79
pura, 39, 44
- terceiro excluído, 30, 67
- termo, 36, 37, 39, 41, 67
de tipo partes, 36, 39
em contexto, 37
fechado, 36, 39, 64
 λ -equivalente a, 36, 37
- tipo, 4, 29, 30, 35–37, 39–42, 46,
64, 67
básico, 36
- topologia, 97, 106
discreta, 100
- topos, 4–6, 27–31, 35, 41, 43–46,
49, 52, 53, 63, 66, 70, 79,
85, 89, 90, 98, 102–105
booleano, 52
de Grothendieck, 26, 99
dos conjuntos, 6, 51, 52, 70, 79,
83, 85, 102, 104
dos conjuntos finitos, 6, 44
dos feixes sobre um espaço to-
pológico, 5, 6, 31, 79, 85,
99, 101–105
dos pré-feixes, 6
dos pré-feixes sobre um espaço
topológico, 98
lingüístico, 35, 45
naturalizado, 70, 82
puro, 54, 86
- Torricelli, Evangelista, 13, 20, 22
- transformação natural, 98
- transposta, 42
- triângulo
aritmético, 21, 23
harmônico, 23
- uerum, 37
- unidade, 10, 13, 15, 28, 73, 105
- Valerio, Luca, 19
- variação, 11–14, 23
- variável, 13, 15, 17, 23, 36, 37, 39,
64
ligada, 36, 37
livre, 36–38, 40, 44
- variedade diferenciável, 26
- velocidade, 12, 25
instantânea, 11, 13
- Viète, François, 12, 13
- vizinhança aberta, 100
- Volger, H., 35
- volume, 10, 17–19, 21
- Wallis, John, 13, 22, 25
- Weierstraß, Karl, 14–16, 25, 27
- Weyl, Hermann, 28
- Wolff, Christian von, 24
- Wronski, Josef Hoëné-, 25
- Zangwill, J., 35
- Zenão, 10
- Zermelo, E., 16