UNICAMP

Newton Marques Peron

(In)Completude Modal por (N)Matrizes Finitas

Campinas

2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

NEWTON MARQUES PERON

Bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

(IN)COMPLETUDE MODAL POR (N)MATRIZES FINITAS

ORIENTADOR: PROF. DR. MARCELO E. CONIGLIO

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) para a obtenção do Título de Doutor em Filosofia.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO NEWTON M. PERON, ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCELO E. CONIGLIO.

CPG, 20 de fevereiro, 2014.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Marta dos Santos - CRB 8/5892

P424i

Peron, Newton Marques, 1982-
(In)completude modal por (N)matrizes finitas / Newton Marques Peron. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Modalidade (Lógica). I. Coniglio, Marcelo Esteban,1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modal (in)completeness by finite Nmatrices
Palavras-chave em inglês:
Modality (logic)
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora:
Marcelo Esteban Coniglio [Orientador]
Cezar Augusto Mortari
Luis Fariñas del Cerro
Marcelo Finger
Walter Alexandre Carnielli
Data de defesa: 20-02-2014
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em 20 de fevereiro de 2014, considerou o candidato NEWTON MARQUES PERON aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio ____________________

Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari ____________________

Prof. Dr. Luis Fariñas del Cerro ____________________

Prof. Dr. Marcelo Finger ____________________

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli ____________________

AGRADECIMENTOS

Essa Tese é fruto de um trabalho que, embora colhido por mim e sob minha total e exclusiva responsabilidade, não teria o mesmo resultado final sem as parcerias que tive. Devo aqui elencar algumas delas.

Meu orientador Prof. Marcelo E. Coniglio, com quem tive o prazer de trabalhar desde a gradução, foi o idealizador dessa pesquisa e teve papel crucial nos resultados mais árduos com os quais me deparei. De mesma importância, mas de outra natureza, foi a orientação do Prof. Luis Fariñas del Cerro da *Université Paul Sabatier* (UPS), em Toulouse, França. Seu ritmo infatigável e comentários perspicazes me incentivaram e me contagiaram durante minha estadia francesa.

Também devo agradecer aos professores do CLE (Centro de Lógica e Epistemologia) da Unicamp, Profa. Ítala M. L. D'Ottaviano e Prof. Walter A. Carnielli. Ambos acompanharam minha carreira desde a graduação e tiveram papel fundamental na minha formação, tendo o último tornado viável meu rico e produtivo estágio em Toulouse.

Outros pesquisadores contribuíram oferecendo materiais, tirando dúvidas e esclarecendo pontos até então obscuros para mim. Cabe aqui citar Prof. Cézar A. Mortari (UFSC), Profa. Andrea M. A. de C. Loparić (USP), Prof. Jean Yves Béziau (UFRJ), Prof. Andreas Herzig (UPS), Prof. Phillippe Balbiani (UPS), Prof. John T. Kearns (*University at Buffalo*, EUA), Prof. Cláudio Pizzi (*Università Degli Studi di Siena*, Itália) e John Halleck (EUA).

Por fim, mas jamais em último lugar, gostaria aqui de expressar a minha profunda alegria ao ter compartilhado momentos de amizade e companherismo tanto no IRIT (*Institut de Recherche d'Informatique de Toulouse*) quanto sobretudo no CLE, onde passei a maior parte de minha vida acadêmica. Para encurtar a lista, devo mencionar Edgar Almeira e Leandro O. Suguitani, que

tiveram a incrível paciência de ler esse texto, fazendo anotações, críticas e sugestões. Devo aos dois os meus mais sinceros agradecimentos.

Ressalto que, apesar de ser uma obra realizada por muitas mãos, é assinada apenas por mim. Os erros e deslizem que forem encontrados no texto que se segue se devem aos meus lapsos e minhas limitações, nenhuma responsabilidade pode ser imputada a qualquer nome listado aqui.

RESUMO

Esse é um estudo sobre a viabilidade de matrizes finitas como semântica para lógica modal. Separamos nossa análise em dois casos: matrizes determinísticas e não-determinísticas. No primeiro caso, generalizamos o Teorema de Incompletude de Dugundji, garantindo que uma vasta família de lógicas modais não pode ser caracterizada por matrizes determinísticas finitas. No segundo caso, ampliamos a semântica de matrizes não-determinísticas para lógica modal proposta independentemente por Kearns e Ivlev. Essa ampliação engloba sistemas modais que, de acordo com nossa generalização, não podem ser caracterizados por matrizes determinísticas finitas.

ABSTRACT

This is a study on the feasibility of finite matrices as semantics for modal logics. We separate our analysis into two cases: deterministic and non-deterministic matrices. In the first case, we generalize Dugundji's Incompleteness Theorem, ensuring that a wide family of modal logic cannot be characterized by deterministic finite matrices. In the second, we extend the non-deterministic matrices semantics to modal logics proposed independently by Kearns and Ivlev. This extension embraces modal systems that, according to our generalization, cannot be characterized by finite deterministic matrices.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O título deste trabalho é enganoso. De fato, "(In)Completude Modal por (N)Matrizes Finitas" pode nos levar a inferir que a Tese contém quatro resultados originais: incompletude modal por matrizes finitas, incompletude modal por Nmatrizes finitas, completude modal por matrizes finitas e completude modal por Nmatrizes finitas.

O Capítulo 1, entretanto, trata de (in)completude proposicional por matrizes finitas, o que mostra que nossa análise não se resume ao contexto modal, pois dedicamos boa parte do texto ao estudo de lógicas proposicionais. O prefixo "(in)" também pode levar ao erro, visto que os resultados demonstrados nesse capítulo são exclusivamente de incompletude, enquanto a completude por matrizes finitas é apenas anunciada sem maiores detalhes.

Temos algumas razões para organizar o Capítulo 1 dessa maneira. Teoremas de incompletude são em geral menos frequentes na literatura do que resultados de completude, por isso preferimos nos deter nas demonstrações dos primeiros. Acreditamos que desse modo provas de incompletude vão se tornando mais familiares, já que ocuparão boa parte também do Capítulo 2.

Além disso, mesmo que os resultados de incompletude proposicional não sejam originais, não encontramos os detalhes das demonstrações na literatura. Resultados de completude, por sua vez, são muitas vezes apresentados com muito mais cuidado. Por fim, o catálogo de cálculos proposicionais incompletos por matrizes finitas do Capítulo 1 tem a função propedêutica de separar quais sistemas modais não-clássicos (ou seja, construídos a partir de uma lógica proposicional não-clássica) podem ser caracterizados por matrizes finitas. Como será argumentado no Capítulo 2, se uma lógica proposiocional não for caracterizada por matrizes finitas, sua extensão modal também não será.

Há, contudo, muitos sistemas proposicionais não-clássicos caracterizáveis por matrizes finitas. Nos restringiremos a expor uma família desses sistemas, aqueles que são construídos a partir do fragmento implicativo da lógica intuicionista. Essa restrição também não é arbitrária, pois no Capítulo 2 mostraremos que todos os resultados de incompletude modal por nós obtidos também valem para sistemas modais construídos a partir da implicação intuicionista.

O objetivo de nosso trabalho não é, todavia, limitar-se a mostrar resultados técnicos de completude e incompletude por matrizes finitas. Discussões conceituais e apresentações históricas fizeram parte também de nossas preocupações.

No Capítulo 1, por exemplo, discorremos sobre como surgem as tabelas veritativas para a lógica proposional clássica. No Capítulo 2 há uma discussão de como tabelas finitas, que eram uma semântica almejada nos primórdios da lógica modal, se mostraram infrutíferas. Ainda no mesmo capítulo, apresentamos cronologicamente uma série de sistemas modais, dando as referências bibliográficas de suas axiomáticas originais. Por fim, no Capítulo 3 apresentamos semânticas alternativas às tabelas finitas, generalizando as noções de valoração e de matrizes por meio dos conceitos de semi-valorações e de matrizes não-determinísticas, ou Nmatrizes.

Há ainda no Capítulo 2 uma longa discussão sobre a hieraquia $\mathbf{Ł}_3 \ldots \mathbf{Ł}_n$ de Łukasiewicz. Argumentamos que, por um lado, podemos de fato considerar os operadores $\Box$ e $\Diamond$ da maneira com que foram definidos originalmente por Łukasiewicz como genuinamente modais. Por outro lado, apresentamos uma nova maneira de defini-los que parece ir de acordo com os critérios defendidos pelo próprio Łukasiewicz. Visto por esse ângulo, essa hierarqua faria parte das lógicas modais caracterizadas por matrizes finitas. No mesmo capítulo, mostramos ainda parcos exemplos de lógicas modais tetravalentes (ou seja, caracterizada por matrizes de 4 valores de verdade), os únicos que pudemos encontrar na literatura sobre o assunto. Terminamos o capítulo enunciando resultados diametralmente oposto ao de incompletude por matrizes: há alguns sistemas modais em que todas as extensões próprias são caracterizadas por matrizes finitas.

Ao longo do Capítulos 2 e do Capítulo 3, nosso tratamento à logica modal pode gerar algum desconforto. Em nenhum momento usamos modelos relacionais e sequer definimos tais modelos. Não queremos com isso minimizar a importância da semântica relacional de Kripke para a lógica modal. Nossa intenção é primeiramente desvincular a semântica e a sintática modal, verificando de que modo uma semântica por matrizes finitas seria viável à lógica modal. Em segundo lugar, temos pretensões de oferecer uma semântica modal alternativa à semântica de Kripke, baseada em Nmatrizes de 4 e 6 valores.

Apesar da ambição, não temos intenções megalomaníacas. Sabemos do apelo intuitivo que têm os modelos relacionais e como a semântica de Kripke oferece uma interpretação refinada aos operadores modais. Nossa semântica não visa ser concorrente à de Kripke e sim complementar, no sentido de elucidar algumas propriedades semânticas dos sistemas modais que podem não ser muito claras na obordagem clássica.

Primeiramente, nos modelos de Kripke não há uma separação nítida entre aqueles sistemas modais em que $\Box$ e $\Diamond$ têm uma interpretação alética (ou epistêmica) daqueles cuja interpretação é deôntica (ou doxástica). Em outras palavras, a fronteira para que $\Box$ seja intepretado como "necessário" ou "obrigatório" (e, consequentemente, para que $\Diamond$ seja intepretado como "possível" ou "permitido") não é tão demarcada, exceto por uma das propriedades da relação dos modelos, que é de ser no primeiro caso, serial e no segundo, reflexiva. Na nossa semântica essa distinção é marcada pelo número de valores de verdade: se for alética bastam 4 valores, já no contexto deôntico precisamos de 6 valores.

Essa discussão é um dos temas do Capítulo 3.

Defendemos ainda que a semântica de Kripke é apropriada para os sistemas modais normais, ou seja, aqueles em que vale a regra de necessitação. Nos cálculos modais em que essa regra é enfraquecida, tal semântica deve ser adaptada com recursos que a distanciam de seu apelo intuitivo original. Acreditamos que nossa semântica poderia ser facilmente adaptada para sistemas modais não-normais, ainda que não obtivemos resultados de completude nesse sentido. Pelo seu carácter predominantemente especulativo, tal tema é um dos objetos de análise das Considerações Finais.

Cabe ainda às Considerações Finais verificar a viabilidade da semântica modal de Nmatrizes em sistemas modais não-clássicas. Quando uma lógica proposicional caracterizada por matrizes ou Nmatrizes finitas é estendida modalmente, em geral constrói-se uma semântica mista, combinando (N)matrizes com modelos relacionais. Acreditamos que é possível obter uma semântica mais simples nesses casos, envolvendo apenas Nmatrizes finitas, mas multiplicando o número de valores modais, que são 2 na abordagem alética e 3 na deôntica. Assim, por exemplo, $\mathbf{Ł}_3$ - que é caracterizada por 3 valores - teria uma semântica completa de 6 valores na interpretação alética e 9 valores na intepretação deôntica. Temos razões para crer que esse tópico pode contribuir ao estudo de preservação da completude em combinação de lógicas.

Para encerrar essa Introdução, esperamos que ao final do texto se tenha clareza da viabilidade da semântica de matrizes e Nmatrizes finitas para a lógica modal. Esperamos ainda que nosso trabalho tenha dado alguma contribuição para esse tema. Cremos que essa contribução é dada por meio de uma extensão dos resultados originais em dois sentidos: por um lado, os resultados de incompletude modal por matrizes finitas e, por outro lado, os resultados de completude modal por Nmatrizes finitas.

1. (IN)COMPLETUDE PROPOSICIONAL POR MATRIZES FINITAS

Esse capítulo tem como objetivo apresentar os limites da semântica multi-valorada para lógica proposicional. Tal tema pressupõe evidentemente dois esclarecimentos prévios: em que consiste a semântica multi-valorada e quais lógicas são englobadas na classe proposicional.

Entre uma definição canônica de semântica multi-valorada fora do espaço e do tempo e uma contextualização histórica, demos preferência pela segunda opção. Escolhemos partir das tabelas-verdades bivalentes tais como apresentadas por Wittgenstein em seu *Tractatus Logico-Philosophicus* rumo às multivalências.

Quanto aos sistemas proposicionais, buscamos um desenvolvimento parcialmente cronológico. Começamos com o cálculo proposicional clássico em direção aos resultados de incompletude por matrizes finitas tanto para o cálculo intuicionista quanto para uma vasta família de lógicas paraconsistentes.

Por fim, mostraremos certos sistemas proposicionais não-clássicos que podem ser caracterizados por matrizes finitas. Visto que um dos objetivos centrais da Tese é estudar o fenômeno da incompletude por matrizes finitas, não nos deteremos na prova de completude para sistemas já conhecidos, nos limitando a apresentar seus axiomas, suas regras de inferência e suas tabelas-verdades.

1.1 A Lógica Proposicional Clássica

É difícil medir a importância que teve a filosofia de Ludwig Wittgenstein no século XX. De acordo com Bertrand Russell, três filosofias dominaram o mundo britânico durante décadas: o *Tractatus* de Wittgenstein, o positivismo lógico e as *Investigações Filosóficas.*[1] Mesmo tendo o seu nome vinculado a três correntes filosóficas, é mister salientar para o tema dessa Tese um aspecto particular de sua primeira obra, o *Tractatus Logico-Philosophicus.*[2]

Wittgenstein tinha em mente obter a verdade ou a falsidade de uma proposição complexa por meio de uma combinação de seus elementos mais simples. Em suas palavras:

> 2.0201 Todo enunciado sobre complexo pode-se decompor em um enunciado sobre as partes constituintes desses complexos e nas proposições que os descrevem completamente

Em termos matemáticos, Wittgenstein procurava que suas noções de verdade e falsidade fossem vero-funcionais, ou seja, uma função matemática aplicada aos valores verdadeiro e falso. A idéia intuitiva desse procedimento pode ser representada por meio de uma tabela, hoje chamada de tabela-verdade:

> 4.31 Podemos representar as possibilidades de verdade por meio de esquemas da seguinte espécie ("V" significa "verdadeiro", "F" significa "falso". As séries dos "V" e "F" sob a série das proposições elementares significam, num simbolismo facilmente compreensível, as possibilidades de verdade dessas proposições):

p	q	r
V	V	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F
F	F	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

,

p	q
V	V
F	V
V	F
F	F

,

p
V
F

Coloquemos entre parênteses a sequência de V's e F's possíveis dadas duas proposições elementares. Teremos portanto (V V V V)(p, q), (V V V F)(p, q)

[1] Conferir [Rus75] p. 160.

[2] Todas as citações da obra em questão foram retiradas de [Wit01].

e assim por diante, totalizando dezesseis operações possíveis para obter o valor de verdade da nova proposição complexa.[3] Essas operações - bem como sua representação na linguagem formal e sua interpretação na linguagem natural - são apresentadas no aforismo 5.101.

> 5.101 As funções de verdade de um número qualquer de proposições elementares podem ser inscritas num esquema da segunte espécie:
>
> (V V V V)(p, q) Tautologia (Se p, então p; e se q então q.) $(p \supset p \centerdot q \supset q)$
>
> (F V V V)(p, q) em palavras: Não ambos p e q. $\sim(p \centerdot q)$
>
> (V F V V)(p, q) " " : Se q, então p. $(q \supset p)$
>
> (V V F V)(p, q) " " : Se p, então q. $(p \supset q)$
>
> (V V V F)(p, q) " " : p ou q. $(p \vee q)$
>
> (F F V V)(p, q) " " : Não q. $(\sim q)$
>
> (F V F V)(p, q) " " : Não p. $(\sim p)$
>
> (F V V F)(p, q) " " : p ou q mas não ambos. $(p \centerdot \sim q : \vee : q \centerdot \sim p)$
>
> (V F F V)(p, q) " " : Se p, então q; e se q, então p. $(p = q)$
>
> (V F V F)(p, q) " " : p
>
> (V V F F)(p, q) " " : q
>
> (F F F V)(p, q) " " : Nem p nem q. $(\sim p \centerdot \sim q$ ou $p|q)$
>
> (F F V F)(p, q) " " : p e não q. $(p \centerdot \sim q)$
>
> (F V F F)(p, q) " " : q e não p. $(q \centerdot \sim p)$
>
> (F F F F)(p, q) Contradição (p e não p; e q e não q). $(p \centerdot \sim p \centerdot q \centerdot \sim q)$

Com suas tabelas, Wittgenstein propôe uma interpretação para as sentenças da linguagem formal do Cálculo de Funções Proposicionais (mais tarde chamado de Cálculo Proposicional - *Propositional Calculus* - ou simplesmete **PC**) do *Principia Matematica* de Russell e Whitehead. Em termos mais precisos, as tabelas-verdade são uma *semântica* para o Cálculo Proposicional.

[3] Para esclarecer melhor a notação, tomemos a tabela-verdade de duas variáveis em que O é uma operação entre esses valores:

p	q	$O(p, q)$
V	V	X_1
F	V	X_2
V	F	X_3
F	F	X_4

As variáveis X_1, X_2, X_3, X_4 podem assumir os valores V ou F, totalizando $2 \times 4 = 16$ combinações. Cada combinação é notada por $(X_1X_2X_3X_4)(p, q)$.

O formalismo usado por Wittgenstein segue o de Russell e Whitehead: os símbolos $\sim$, v, $\centerdot$ e $\supset$ representam as funções de negação, disjunção, conjunção e implicação.[4] A única diferença sintática entre as duas linguagens está no fato de Wittgenstein usar $=$ para a bi-implicação, enquanto Russell e Witehead preferem $\equiv$. No *Principia* os operadores $\sim$ e v são primitivos enquanto $\centerdot$, $\supset$ e $\equiv$ são definidos. O símbolo $\centerdot$ também serve para indicar colchetes. Assim, é possível apresentar as seguintes definições (indicadas por $=$ e Df)

$$
\begin{array}{ll}
p \centerdot q \centerdot = \centerdot \sim(\sim p \vee \sim q) & \text{Df} \\
p \supset q \centerdot = \centerdot \sim p \vee q & \text{Df} \\
p \equiv q \centerdot = \centerdot (p \supset q) \centerdot (q \supset p) & \text{Df}
\end{array}
$$

Não só "$\centerdot$" como também ":" servem para indicar colchetes, sendo o primeiro prioritário em relação ao segundo. A linguagem do *Principia* também inclui o símbolo de asserção $\vdash$.

Há três tipos de proposições no *Principia*: as proposições *primitivas*, *asseridas* e *simples*. As primitivas são aquelas tomadas como verdadeiras sem prová-las, também denominadas indemonstráveis. São sete:

(1) Qualquer coisa implicada por uma premissa verdadeira é verdade.

(2) $\vdash: p \vee p \centerdot \supset \centerdot p$

(3) $\vdash: q \centerdot \supset \centerdot p \vee q$

(4) $\vdash: p \vee q \centerdot \supset \centerdot q \vee p$

(5) $\vdash: p \vee (q \vee r) \centerdot \supset \centerdot q \vee (p \vee r)$

(6) $\vdash: \centerdot q \supset r \centerdot \supset: p \vee q \centerdot \supset \centerdot p \vee r$

(7) Axioma de identificação de variáveis.

[4] As funções de negação e disjunção também são denominadas contradição e soma, respectivamente. Conferir [RW27] p. 6.

Uma proposição é asserida quando existe uma *prova* para ela. Uma prova é uma sequência de proposições em que cada proposição é uma proposição indemonstrável ou uma consequência direta das proposições anteriores. Já uma proposição simples é aquela que não é asserida (e consequentemente tampouco indemonstrável).

Observe que o ítem (7) regula de que maneira podemos substituir variáveis numa proposição. Por exemplo, de

$\vdash: p \vee p\,.\supset.\,p$ podemos substituir por

$\vdash: q \vee q\,.\supset.\,q$ ou $\vdash: (p\,.\,q) \vee (p\,.\,q)\,.\supset.\,(p\,.\,q)$

mas não por $: p \vee q\,.\supset.\,p$

Como a segunda e a terceira proposições são demonstradas aplicando uma das sete proposições indemonstráveis, estamos diante de dois exemplos de proposições asseridas. Já a quarta é tipicamente uma proposição simples.

Retomemos o *Tractatus*. Observe que a função que retorna (V V V V) para as variáveis p e q é chamada de tautologia. Há dois problemas cruciais com relação às tabelas-verdades e as proposições do **PC**. O primeiro deles é saber se todas as proposições asseridas são tautologias. E o segundo é a recíproca, ou seja, determinar se todas as tautologias são as proposições asseridas.

O primeiro problema é chamado de Corretude e o segundo, de Completude. Coube a Post demonstrar também em 1921 ambos os resultados.[5]

O Cálculo Proposicional não tem apenas a almejada característica de ser Correto e Completo com relação à uma semântica extremamente intuitiva e vero-funcional, que é o caso das tabelas-verdades. Ele é, além disso, *maximal* num sentido preciso: se adicionarmos qualquer proposição primitiva à lista de

[5] Demonstrado em [Pos21]. Devido à concomitância dos trabalhos de Wittgenstein (1921), Post (1921) e Łukasiewicz (1920 - em [Łuk20]) sobre tabelas-verdades, acredita-se que a idéia original tenha sido do próprio Russell, de acordo com [Ann04].

Russell e Whitehead que não seja uma proposição asserida, teremos o colapso de **PC**, no sentido de todas as proposições se tornarem asseridas.

Isso significa que não é possível estender **PC** com mais axiomas sem colapsá-lo. Mas isso não significa que a história da lógica proposicional termina com Post, mas apenas que seu desenvolvimento se bifurcará *grosso modo* em três possibilidades: seja aumentando o números de valores-verdade para ganhar expressabilidade em sua semântica, seja restringindo seus axiomas para invalidar certos teoremas (ou seja, proposições asseridas), seja estendendo a linguagem de **PC** com novos operadores. No primeiro caso, teremos os sistemas multivalorados. Veremos alguns exemplos desses sistemas na Subseção 1.3.2 e na Subseção 1.3.3. O sistema emblemático do segundo caso será O Cálculo Proposicional Intuicionista de Heyting, que será visto na Subseção 1.2.1. Finalmente, para o terceiro caso teremos a hierarquia de sistemas modais de Lewis **S1**-**S5**, como veremos no Capítulo 2.

1.2 Incompletude Proposicional por Matrizes Finitas

Tendo em vista que o objetivo central desse capítulo é o estudo do fenômeno da incompletude proposicional, dividiremos essa seção em duas subsecções. Na Subseção 1.2.1 veremos o Metateorema de Incompletude por Matrizes Finitas no contexto intuicionista. Em vez de reproduzir *ipsis litteris* a demonstração de Gödel, faremos uma pequena alteração para provar um resultado original: não somente **IPC**, mas nenhum sistema entre **IPC** e o seu fragmento implicativo-disjuntivo pode ser caracterizado por matrizes finitas.

A Subseção 1.2.2 diz respeito ao mesmo resultado de incompletude concernente a uma vasta família de lógicas paraconsistentes. Essas lógicas serão construídas a partir do fragmento implicativo intuicinista e serão analisadas no Capítulo 2 quando estendidas modalmente. Nenhum resultado original será demonstrado nessa subseção, embora até onde sabemos não exista uma prova esmiuçada desses metateoremas na literatura.

Independente da originalidade, ambas subseções têm dois papéis na Tese que valem a pena destacar: um propedêutico e outro taxonomático. O aspecto propedêutico visa mostrar a técnica recorrente ao se demonstrar resultados de incompletude por matrizes finitas, tema tanto do Capítulo 1 quanto do Capítulo 2. Já o caráter taxonomático será relevante sobretudo no Capítulo 2, para delimitar a abrangência da incompletude por matrizes finitas no contexto modal.

1.2.1 O Caso Intuicionista

Os trabalhos de Lewis não foram os primeiros a mostrar os limites do Cálculo Proposicional. Já em 1908, Brouwer criticava a proposição asserida $\vdash$: p v $\sim p$ - também conhecida como *Lei do Terceiro Excluído* - visto que tal asserção seria o caso em matemática apenas para afirmações de caráter finito. Consideremos, por exemplo, dois números naturais x e y e a proposição "há $y < x$ de modo que y e $y + 2$ sejam primos". Sabemos que não existe um método geral para decidir se a proposição é verdadeira ou falsa para um x arbitrário. Com a intenção de suplantar esse tipo de dificuldade, Brouwer propõe que proposições asseridas sobre séries infinitas sejam demonstradas apenas de maneira construtiva, inaugurando a matemática intuicionista.[6]

Inspirado na matemática intuicionista de Brouwer que recusava a *Lei do Terceiro Excluído* dentre outros princípios, Heyting ofereceu em 1930 uma lista de axiomas que buscava apreender formalmente a proposta Brouweriana. O cálculo de Heyting é conhecido como Cálculo Proposicional Intuicionista - *Intuitionistic Propositional Calculus* - ou simplesmente **IPC**.[7]

O Cálculo **IPC** restringe **PC** no sentido de que certos teoremas que são provados no segundo cálculo não podem ser provados no primeiro. Daqui em

[6] De acordo com [Mos10]. O artigo de Brouwer em questão é [Bro08].
[7] Em [Hey30].

diante, usaremos a notação de Heyting em que os símbolos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ denotam as operações de negação, conjunção, disjunção, implicação e bi-implicação, respectivamente. Usaremos ainda o simbolismo $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ para dizer que a fórmula α é um teorema na lógica **L**. Quando não houver ambiguidade, simplificaremos a notação e usaremos simplesmente $\vdash \alpha$. Feitas as observações acima, anunciamos os seguintes resultados de **IPC**:

(i) $\nvdash_{\mathbf{IPC}} \neg\neg p \rightarrow p$

(ii) $\nvdash_{\mathbf{IPC}} p \vee \neg p$

Além disso, se a fórmula (ii) for adicionada a **IPC** como axioma, recupera-se todos os teoremas de **PC**. O mesmo, entretanto, não ocorre se (i) for adicionado.[8]

Diferentemente de **PC**, os operadores $\wedge, \vee$ e $\leftrightarrow$ não podem ser definidos em **IPC** em termos de negação e implicação. Isso significa que todos os operadores devem ser tratados independentemente com seus respectivos axiomas.

No que diz respeito ao conectivo $\rightarrow$, os axiomas abaixo o governam:[9]

(Ax1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(Ax2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Já o operador $\wedge$ é regido pelos axiomas:

(Ax3) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

(Ax4) $(p \wedge q) \rightarrow p$

[8] Como observado em [Mos10]

[9] Usaremos a apresentação de Zeman em [Zem73]. Não usamos a axiomática original de Heyting de [Hey30] por dois motivos: primeiramente para definirmos o fragmento implicativo-disjuntivo de **IPC** e demonstrarmos que nenhuma matriz finita pode ser uma semântica para qualquer lógica entre tal fragmento e o cálculo intuicionista e, em segundo lugar, para construirmos uma vasta família de lógicas paraconsistentes e multivaloradas a partir do fragmento implicativo intuicista.

(Ax5) $(p \wedge q) \to q$

A disjunção $\vee$, por sua vez, obedece os postulados:

(Ax6) $p \to (p \vee q)$

(Ax7) $q \to (p \vee q)$

(Ax8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

Finalmente para a negação $\neg$, temos:

(Ax9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

(Ax10) $\neg p \to (p \to q)$

Além dos axiomas abaixo, **IPC** é regido por duas regras. Usaremos a notação $\alpha[p/\beta]$ para dizer que na fórmula α toda ocorrência da variável proposicional p pode ser substituída pela fórmula β.

(MP) α, $\alpha \to \beta$ implicam β

(US) $\alpha \vdash \alpha[p/\beta]$

As regras (US) e (MP) também são conhecidas como *Substituição Uniforme* e *Modus Ponens*, respectivamente.

Como verificado por Zeman, o conjunto de axiomas e as regras acima nos permitem definir não apenas **IPC**, mas quatro novos sistemas:[10]

- **ICI** $= \{(Ax1), (Ax2), (MP), (US)\}$

[10] O sistema **ICI** foi originalmente introduzido por [Zem73]. A partir de **ICI**, podemos obter mais dois sistemas intermediários: acrescentando o operador de conjunção $\wedge$ teremos a linguagem de **ICK**, enquanto acrescescentando conjunção e disjunção $\vee$ teremos a linguagem de **ICA**, ou, Cálculo Intuicionista Positivo. O sistema **ICA** aparece em [Zem73] se referindo ao cálculo intuicionista com implicação, disjunção e conjunção. Enquanto o que denominamos **ICA** Zeman chama de fragmento C-A de **ICA**. Visto que o nosso foco nessa subseção será o fragmento intuicioista apenas com disjunção e implicação, buscamos uma notação mais conveniente que a de Zeman. Para o cálculo intuicionista com implicação, disjunção e conjunção escolhemos $\mathbf{IPC}^+$ em vez de **ICA**, seguindo a notação no caso clássico, como $\mathbf{P}_+$ ou $\mathbf{CPL}^+$ para se referir a cálculo clássico positivo. Vide [Hac66] e [CCM07], respectivamente.

- $\mathbf{ICK} = \mathbf{ICI} \cup \{(Ax3), (Ax4), (Ax5)\}$

- $\mathbf{ICA} = \mathbf{ICI} \cup \{(Ax6), (Ax7), (Ax8)\}$

- $\mathbf{IPC}^+ = \mathbf{ICK} \cup \mathbf{ICA}$

- $\mathbf{IPC} = \mathbf{IPC}^+ \cup \{(Ax9), (Ax10)\}$

Há uma relação de inclusão evidente entre os sistemas listados acima, para tanto é mister definir de modo rigoroso quando uma lógica é uma extensão conservativa de outra.[11]

Definição 1.2.1: Uma lógica $\mathbf{L}_2$ é uma *extensão conservativa* (dedutivamente) de uma lógica $\mathbf{L}_1$ quando:

1) A linguagem de $\mathbf{L}_2$ estende a de $\mathbf{L}_1$;

2) Todo teorema de $\mathbf{L}_1$ é um teorema de $\mathbf{L}_2$;

3) Todo teorema de $\mathbf{L}_2$ expresso na linguagem $\mathbf{L}_1$ já é um teorema de $\mathbf{L}_1$. $\square$

Dado os sistemas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ usaremos a notação $\mathbf{L_1} \longrightarrow \mathbf{L_2}$ ou $\mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L_2}$ para dizer que $\mathbf{L}_2$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{L}_1$. Dizemos ainda que $\mathbf{L_2}$ está entre $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_3}$ quando $\mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L_2} \subseteq \mathbf{L_3}$.

É possível construir o seguinte gráfico de inclusão a partir dos sistemas listados acima:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{ICA} \arrow[dr] & & \\
\mathbf{ICI} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{IPC}^+ \arrow[r] & \mathbf{IPC} \\
 & \mathbf{ICK} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Fig. 1.1: Sistemas entre **ICI** e **IPC**

[11] A definição abaixo pode ser encontrada em [CCM07].

Uma propriedade relevante de **ICI** (e de todos as suas extensões) é o chamado Metateorema da Dedução. Para enunciá-lo, é conveniente definir a noção de consequência sintática

Seja Γ um conjunto de fórmulas de **L** e α uma fórmula de **L**. Para dizer que α é uma consequência sintática de Γ em **L**, usaremos a notação $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$. Isso significa que existe uma prova de α aplicando as regras de **L** aos axiomas de **L**, às formulas em Γ ou às fórmulas que são consequência sintática de Γ. Além disso, dada uma fórmula β, usaremos a notação $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ como abreviação de $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$.

Teorema 1.2.2 (Metateorema da Dedução (MD)): Sejam α e β fórmulas e Γ um conjunto de fórmulas de **ICI**.

$$\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{ICI}} \beta \text{ se e somente se } \Gamma \vdash_{\mathbf{ICI}} \alpha \to \beta$$

Demonstração: Análoga ao caso clássico.[12] ■

Pela Definição 1.2.1, não é difícil verificar que o Metateorema da Dedução vale também para **ICA**, **ICK**, $\mathbf{IPC}^+$ e **IPC**. Veremos, ainda, que esse metateorema valerá para todas as lógicas proposicionais tratadas no Capítulo 1.

Uma das possíveis semânticas do Cálculo Proposicional Intuicionista é as chamadas álgebras de Heyting. Uma questão muito natural é saber se há tabelas-verdades com um número finito de valores verdades como semântica alternativa para o Cálculo Intuicionista.[13] Já em 1932 - ou seja, um ano depois da publicação do texto de Heyting - Gödel prova que existe uma cadeia de sistemas entre **IPC** e uma certa lógica **L** - que é uma extensão conservativa de **IPC** - em que nenhum desses sistemas pode ser completo com relação a uma semântica de tabelas-verdade finitamente valorável.[14]

[12] Uma demonstração para o Metateorema da Deduçao em **ICI** pode ser encontrada em [Zem73]. Para o caso clássico, vide [Men64] p. 37.
[13] Segundo Gödel em [G$\ddot{3}$2] essa questão foi formulada por Hahn.
[14] A lógica **L** em questão é **LC**. É também em [G$\ddot{3}$2] que Gödel demonstra a incompletude

Para provar esse resultado, Gödel lança mão do seguinte procedimento: toma-se uma fórmula e demonstra-se que qualquer tabela com uma quantidade finita de valores de verdade que caracteriza **IPC** valida também essa fórmula. Em seguida, demonstra-se que essa mesma fórmula não é válida numa matriz de infinitos valores para uma lógica **L** que é uma extensão conservativa de **IPC**. Logo, a fórmula em questão não pode ser um teorema de **IPC**. Assim, qualquer matriz de finitos valores valida uma fórmula que não é teorema de **IPC** e portanto não pode fornecer uma semântica completa para **IPC**.

Usaremos uma demonstração muito semelhante para provar que nenhum sistema entre **ICA** e **IPC** (incluindo o próprio **ICA**) pode ser caracterizado por matrizes finitas.[15]

Definição 1.2.3: Uma *matriz* de uma lógica **L** é uma tripla $\mathcal{M} = \langle M, D, V \rangle$ em que:

(i) $M \neq \emptyset$

(ii) $D \subseteq M$ é um conjunto de valores designados

(iii) Para cada conectivo n-ário c de **L** existe uma função $v \in V$ tal que $v : M^n \longrightarrow M$ □

Definição 1.2.4: Uma matriz $\mathcal{M}$ *valida* uma fórmula α se e somente se - ou sse - α recebe sempre valores designados por meio das funções v em $\mathcal{M}$ aplicadas aos conectivos que ocorrem em α. □

Definição 1.2.5: Uma matriz $\mathcal{M}$ é um *modelo* para uma lógica **L** sse $\mathcal{M}$ valida todos os teoremas de **L** (mas não necessariamente apenas eles). □

de qualquer sistema entre **IPC** e **LC** por matrizes finitas. Apresentaremos a axiomática de **LC** na Subseção 1.3.3.

[15] As definições de matriz, modelo e fórmula válida foram retiradas de [CP08].

Definição 1.2.6: Uma matriz $\mathcal{M}$ *caracteriza* uma lógica **L** sse todos os teoremas de **L**, e somente eles, recebem valores designados por meio das funções em $\mathcal{M}$. □

Definição 1.2.7: Sejam i, j e n números naturais em que $i < j$. O esquema de fórmulas (ou simplesmente fórmula) de Gödel adaptada G_n é obtida do seguinte modo:[16]

$$G_n \equiv_{def} \bigvee_{i \neq j}^{n+1} (p_i \to p_j)$$

□

Para esclarecermos melhor a notação, no caso em que $n = 2$, teríamos:

$$G_2 \equiv_{def} ((p_1 \to p_2) \vee (p_1 \to p_3)) \vee (p_2 \to p_3)$$

Antes de demonstrar o nosso resultado de incompletude, é necessário provar que $p \to p$ é teorema em **ICI**:[17]

1.	$(p \to (p \to p)) \to (p \to ((p \to p) \to p) \to (p \to p))$	$(Ax2)$
2.	$p \to (p \to p)$	$(Ax1)$
3.	$(p \to (p \to p) \to p) \to (p \to p)$	(MP) em 1. e 2.
4.	$p \to (p \to p) \to p$	$(Ax1)$
5.	$p \to p$	(MP) em 3. e 4.

Mostraremos agora que qualquer matriz finita que fornecesse uma semântica completa para **ICA** validaria a fórmula da Definição 1.2.7.

[16] Originalmente em [G3̈2] em vez de $(p_i \to p_j)$ há $(p_i \leftrightarrow p_j)$.

[17] A primeira coluna é uma enumeração das fórmulas da prova. A segunda é o axioma ou teorema que foi usado e a terceira é sua justificativa. Em 1., por exemplo, a instanciação é obtida por meio de (US) aplicada a $(Ax2)$ e, em termos estritos, deveria ser grafada como $(Ax2)[q/p \to p, r/p]$. Escolhemos a notação simplificada e justificamos simplesmente como $(Ax2)$.

Proposição 1.2.8: Qualquer matriz finita de n valores de verdade que caracteriza **ICA** valida G_n.

Demonstração: Suponha que exista uma matriz com n valores que caracteriza **ICA**. Como na fórmula acima temos n valores para $n+1$ variáveis, haverá i e j de modo que os valores atribuídos a $(p_i \to p_j)$ sejam os mesmos a $(p_i \to p_i)$ para algum i. Ora, visto que $\vdash_{\mathbf{ICI}} p \to p$ então como **ICA** é uma extensão conservativa de **ICI**, temos $\vdash_{\mathbf{ICA}} p \to p$. Além disso, por (Ax6), (Ax7) e (MP) temos que tanto $(p_i \to p_i) \vee \alpha$ quanto $\alpha \vee (p_i \to p_i)$ são teoremas de **ICA**, e portanto a matriz validaria toda a fórmula G_n. ■

Definição 1.2.9: Seja $\mathcal{M}_G$ a matriz infinita em que o conjunto de valores-verdade é $\{1, 2, 3, \ldots, \omega\}$ em que é 1 o único valor designado. Sejam α e β fórmulas proposicionais. A função de valoração v é calculada do seguinte modo para cada operador:

$$v(\alpha \vee b) = \min(v(\alpha), v(\beta))$$

$$v(a \wedge b) = \max(v(\alpha), v(\beta))$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) \geq v(\beta) \\ v(\beta) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} \omega & \text{se } v(\alpha) \neq \omega \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

□

A segunda parte da demonstração do Metateorema da Incompletude é verificar que a matriz infinita da Definição 1.2.9 é um modelo de **IPC**.

Proposição 1.2.10: $\mathcal{M}_G$ é um modelo para **IPC**

Basta verificar que $\mathcal{M}_G$ valida os axiomas de **IPC** e que as regras de **IPC** preservam o valor designado 1.

(Ax1) $p \to (q \to p)$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(q \to p) = v(p)$. Como $v(p) \geq v(q \to p)$, então $v(Ax1) = 1$.
- se $v(p) < v(q)$, então $v(q \to p) = 1$. Como $v(p) \geq 1$, então $v(Ax1) = 1$.

(Ax2) $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

- se $v(p) \geq v(q)$, então
  - se $v(q) \geq v(r)$, então $v(p) \geq v(r)$ e $v(p \to r) = 1$. Assim, $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = 1$ e portanto $v(Ax2) = 1$.
  - se $v(q) < v(r)$ então $v(q \to r) = v(r)$ e $v(p \to (q \to r)) = v(p \to r)$. Temos então que $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = v((p \to r) \to (p \to r))$ e como $v(p \to r) \geq v(p \to r)$ conclui-se portanto que $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = 1$ e $v(Ax1) = 1$.
- se $v(p) < v(q)$, então
  - se $v(q) \geq v(r)$, então $v(q \to r) = 1$ e $v(p \to (q \to r)) = 1$. Assim, $v(p \to (q \to r) \to (p \to r)) = v(p \to r)$. Como $v(p \to q) = v(q)$ então $v(Ax1) = v(q \to (p \to r))$. Visto que $v(q) \geq v(p)$ e $v(q) \geq v(r)$, então $v(q) \geq v(p \to r)$ e $v(Ax1) = 1$.
  - se $v(q) < v(r)$, então $v(q \to r) = v(r)$ e o resto se segue analogamente ao caso em que $v(p) \geq v(q)$ e $v(q) < v(r)$.

(Ax3) $p \to (q \to (p \wedge q))$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q)) = v(p)$. Portanto $v(Ax3) = v(Ax1) = 1$.
- se $v(p) < v(q)$, então $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q)) = v(q)$. Temos portanto que $v(q \to (p \wedge q)) = v(q \to q) = 1$ e $v(Ax3) = 1$.

(Ax4) $(p \wedge q) \rightarrow p$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q)) = v(p)$. Portanto $v(Ax4) = v(p \rightarrow p) = 1$.
- se $v(p) < v(q)$, então $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q)) = v(q)$. Portanto $v(Ax4) = v(q \rightarrow p) = 1$.

(Ax5) $(p \wedge q) \rightarrow q$

- análogo ao (Ax4).

(Ax6) $p \rightarrow (p \vee q)$

- se $p \geq q$, então $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(q)$. Portanto $v(Ax6) = v(p \rightarrow q) = 1$.
- se $p < q$, então $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(p)$. Portanto $v(Ax6) = v(p \rightarrow p) = 1$.

(Ax7) $q \rightarrow (p \vee q)$

- análogo ao (Ax6).

(Ax8) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(q)$. Temos daí $v((p \vee q) \rightarrow r) = v(q \rightarrow r)$. Isso significa que teremos então $v((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) = v((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$. Como $v(q \rightarrow r) \geq v(q \rightarrow r)$, daí $v((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) = 1$ e portanto $v(Ax8) = 1$
- se $v(p) < v(q)$, então $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(p)$. Temos daí $v((p \vee q) \rightarrow r) = v(p \rightarrow r)$. Isso significa que teremos então $v((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) = v((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$. Portanto $v(Ax8) = v(Ax1) = 1$.

(Ax9) $((p \to q) \to (p \to \neg q)) \to \neg p$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(p \to q) = 1$
  - se $v(p) = \omega$, então $v(\neg p) = 1$. Tendo em vista que temos $v(((p \to q) \to (p \to \neg q))) \geq 1$ conclui-se que $v(Ax9) = 1$.
  - se $v(p) \neq \omega$, então $v(q) \neq \omega$ e $v(\neg q) = \omega$. Daí, $v(p \to \neg q) = \omega$ e $v(p \to q) \neq \omega$. Como $v(p \to q) < v(p \to \neg q)$, teremos $v((p \to q) \to (p \to \neg q)) = v(p \to \neg q) = \omega$. Visto que $\omega \geq v(\neg p)$, conclui-se portanto que $v(Ax9) = 1$.
- se $v(p) < v(q)$, então $v(p) \neq \omega$ e $v(\neg p) = 1$. Temos portanto que $v((p \to q) \to (p \to \neg q)) \geq v(\neg p)$ e $v(Ax9) = 1$

(Ax10) $\neg p \to (p \to q)$

- se $v(p) \geq v(q)$, então $v(p \to q) = 1$. Como $v(\neg p) \geq 1$, então $v(\neg p) \geq v(p \to q)$ e $v(Ax10) = 1$
- se $v(p) < v(q)$, então $v(p \to q) = v(q)$. Além disso, $v(p) \neq \omega$, logo $v(\neg p) = \omega$. Como $\omega \geq v(p \to q)$, então $v(\neg p) \geq v(p \to q)$ e $v(Ax10) = 1$

(MP) Suponha que $v(p \to q) = 1$, $v(p) = 1$ mas $v(q) \neq 1$. Daí $v(p) \geq v(q)$, o que implica que $v(q) = 1$. ■

A proposição abaixo garante que a fórmula adaptada de Gödel não é válida na matriz infinita da Definição 1.2.9.

Proposição 1.2.11: Existe uma valoração de $\mathcal{M}_G$ que não valida G_n.

Demonstração : Considere a seguinte valoração da formla G_n da Definição 1.2.7: $v(p_i) = i$ e $v(p_j) = j$. No caso em que $n = 3$, temos $v(p_1 \to p_2) = 2$, $v(p_1 \to$

$p_3) = 3$ e $v(p_2 \to p_3) = 3$. Desse modo $v(G_3) = \min(2, 3, 3) = 2$. Suponha agora que $V(G_n) = 2$ para $n = k$. Assim, para $n = k + 1$ temos:

$$v(G_n) = \min(2, v(p_1 \to p_{k+1}), \ldots, v(p_k \to p_{k+1})) = \min(2, k+1, \ldots, k+1) = 2$$

E portanto $v(G_n) = 2$ para todo n natural. ■

Finalmente, podemos provar nossa extensão do resultado de Gödel.

Teorema 1.2.12: Nenhuma lógica entre **ICA** e **IPC** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Suponha que exista um conjunto de matrizes finitas que caracterize alguma lógica **L** entre **ICA** e **IPC**. Pela Proposição 1.2.8, essas matrizes validariam a fórmula G_n da Definição 1.2.7 e portanto G_n seria um teorema de **L**. Por outro lado, a matriz infinita $\mathcal{M}_G$ da Definição 1.2.9 é um modelo para **IPC** de acordo com a Proposição 1.2.10. Além disso, pela Proposição 1.2.11, $\mathcal{M}_G$ invalida G_n, forçando que G_n não seja um teorema de **L**. Por absurdo, concluimos que não pode existir um conjunto de matrizes finitas que caracterize **L**. ■

Ao longo da Tese, veremos que resultados de incompletude com respeito a matrizes finitas dizem respeito a uma classe de lógicas $\mathbf{L_1} \ldots \mathbf{L_n}$ de modo que $\mathbf{L_1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{L_n}$. Nem sempre nossa generalização abarca todos os sistemas almejados. No caso dessa subseção, gostaríamos de tratar de todos os sistemas da Figura 1.1 e determinar também se os sistemas **ICI** e **ICK** são caracterizáveis por matrizes finitas. Deixemos essa questão em aberto para lidar com o mesmo problema concernente às lógicas paraconsistentes.

1.2.2 O Caso Paraconsistente

O fenômeno da inconsistência é, em geral, abolido por teorias baseadas em lógica clássica. Isso porque nessas teorias, se a partir de um conjunto Γ de premissas concluímos α e $\neg\alpha$, então a teoria é trivial, ou seja, todas as fórmulas são teoremas. Lógicas paraconsistentes são basicamente uma família de lógicas em que se é possível construir teorias que caso infiramos α e $\neg\alpha$, não podemos inferir que todas as fórmulas dessa teoria são teoremas. Em termos formais, dizemos que uma lógica $\mathbf{L}$ é paraconsistente em relação à $\neg$ quando existem fórmulas α e β e um conjunto de fórmulas Γ em que:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha \text{ e } \Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg\alpha \text{ mas } \Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \beta$$

A expressão "lógica paraconsistente" foi difundida por da Costa, ainda que existam exemplos de sistemas com o comportamento acima surgido antes dos seus trabalhos pioneiros.[18] Ja em 1963, da Costa propõe sua hierarquia $\mathbf{C}_n$ (para $1 \leq n \leq \omega$) proposicional, $\mathbf{C}^*{}_n$ de primeira ordem e $\mathbf{C}_n^=$ de primeira ordem com igualdade. Restringiremos nosso estudo aos cálculos proposicionais.

Seja $\circ p$ a abreviação da fórmula $\neg(p \wedge \neg p)$ enquanto $\circ^n p$ significa que o operador $\circ$ foi iterado n vezes. Finalmente:

$$\circ^{(n)} p = \circ^1 p \wedge \ldots \wedge \circ^n p$$

Para construir a hieraquia $\mathbf{C}_n$ (para $1 \leqslant n \leqslant \omega$) devemos levar em consideração novos axiomas:[19]

(Ax11) $p \vee (p \to q)$

[18] Lógicas paraconsistentes foram independentemente desenvolvidas por Jaśkovski e da Costa em [Jaś48] e [DC63], respectivamente. No que diz respeito aos sistemas citados, consultamos sobretudo [DC74]. Sobre a origem dos sistemas de da Costa e Jaśkovski, usamos como referência [D'O90].

[19] Essa não é a axiomática original de da Costa em [DC74]. Visto que esses axiomas serão usados para construir outras hierarquias de lógicas paraconsistentes, para efeitos de simplificação escolhemos a axiomática de [CCM07].

(Ax12) $p \vee \neg p$

(cf) $\neg\neg p \rightarrow p$

$(bC)_n$ $\circ^{(n)} p \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

$(ca1)_n$ $(\circ^{(n)} p \wedge \circ^{(n)} q) \rightarrow \circ^{(n)}(p \wedge q)$

$(ca2)_n$ $(\circ^{(n)} p \wedge \circ^{(n)} q) \rightarrow \circ^{(n)}(p \vee q)$

$(ca3)_n$ $(\circ^{(n)} p \wedge \circ^{(n)} q) \rightarrow \circ^{(n)}(p \rightarrow q)$

Definimos do seguinte modo a hierarquia de da Costa:

- $\mathbf{C}_\omega = \mathbf{IPC}^+ \cup \{(Ax11), (Ax12), (cf)\}$
- $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_\omega \cup \{(bC)_n, (ca1)_n, (ca2)_n, (ca3)_n\}$

Da Costa apresenta matrizes que validam os axiomas de $\mathbf{C}_{n+1}$ mas não os axiomas de $\mathbf{C}_n$. A rigor, não podemos dizer que $\mathbf{C}_n$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{C}_{n+1}$, visto que ambos os sistemas têm a mesma linguagem e, pela Definição 1.2.1, se uma lógica $\mathbf{L}_2$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{L}_1$ e ambas têm a mesma linguagem, então são a mesma lógica, o que não é o caso para . Para suplantar esse limite, apresentamos a noção de extensão própria:[20]

Definição 1.2.13: $\mathbf{L}_2$ é uma extensão própria de $\mathbf{L}_1$ quando:

(i) $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ têm a mesma linguagem

(ii) $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ têm as mesmas regras

(iii) para toda fórmula α temos que se $\vdash_{\mathbf{L_1}} \alpha$ então $\vdash_{\mathbf{L_2}} \alpha$

(iv) existe uma fórmula α de modo que $\nvdash_{\mathbf{L_1}} \alpha$ mas $\vdash_{\mathbf{L_2}} \alpha$ $\square$

[20] Tal noção encontra-se já em 1951 no artigo [Scr51]. Como veremos na Subseção 2.3.3, essa definição é fundamental para provar resultados de completude por matrizes finitas para um conjunto de lógicas modais.

Consideraremos certa simplifcação em nossa notação e usaremos $\mathbf{L_1} \subseteq \mathbf{L_2}$ e $\mathbf{L_1} \longrightarrow \mathbf{L_2}$ para designar tanto que $\mathbf{L}_2$ é uma extensão própria de $\mathbf{L}_1$ ou uma extensão conservativa de $\mathbf{L}_1$. Relembraremos a distinção quando for conveninente.

É sabido que nos sistemas de da Costa vale a relação de inclusão:[21]

$$\mathbf{C}_\omega \subseteq \ldots \mathbf{C}_n \subseteq \ldots \mathbf{C}_1 \text{ para } 1 < n < \omega$$

Mostraremos usando uma técnica um pouco diferente da Subseção 1.2.1 que nenhum sistema dessa hieraquia pode ser caracterizado por matrizes finitas.[22] Assim como no caso intuicionista, apresentaremos um conjunto de matrizes infinitas que é um modelo para os sistemas $\mathbf{C}_n$ (que, pela relação de inclusão citada acima, basta mostrar que esse conjunto de matrizes é um modelo para $\mathbf{C}_1$). Em seguida, devido à característica intrínseca da negação nessa hierarquia, será demonstrado que nenhum desses sistemas pode ser caracterizado por tabelas finitas.

Definição 1.2.14: Seja $\mathcal{M}_C$ um conjunto de matrizes infinitas em que o conjunto de valores-verdade é $\{1, 2, 3, \ldots\}$ e em que 1 é o único valor não-designado. Sejam α e β fórmulas proposicionais. A função de valoração v é definida do seguinte modo para cada operador:

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) \neq 1 \text{ e } v(\beta) = 1 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 2 & \text{se } v(\alpha) \neq 1 \text{ e } v(\beta) \neq 1 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) = 1 \text{ e } v(\beta) = 1 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

[21] A demonstração em questão pode ser encontrada em [DC63].
[22] Esse resultado foi demonstrado por Arruda em [Arr75].

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{se } v(\alpha) = 1 \\ v(\alpha) - 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

□

Proposição 1.2.15: $\mathcal{M}_C$ é um modelo para $\mathbf{C}_1$

Demonstração: Basta mostrar que os axiomas de $\mathbf{C}_1$ recebem em $\mathcal{M}_C$ sempre um valor designado $n > 1$ para n natural e que as regras de $\mathbf{C}_1$ preservam o valor designado.

(Ax1) $p \to (q \to p)$

- se $v(p) = 1$, então $v(Ax1) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(q \to p) = 2$ e $v(Ax1) = 2$

(Ax2) $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \to r) = 2$. Assim, $v(((p \to (q \to r)) \to (p \to r))) = 2$ e portanto $v(Ax2) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então
  - se $v(q) = 1$, então $v(p \to q) = 1$ e $v(Ax2) = 2$.
  - se $v(q) \neq 1$, então
    - se $v(r) = 1$, então $v(q \to r) = 1$ e $v(p \to (q \to r)) = 1$. Logo, $v(((p \to (q \to r)) \to (p \to r))) = 2$ e portanto $v(Ax2) = 2$.
    - se $v(r) \neq 1$, então $v(p \to r) = 2$. Temos portanto que $v(((p \to (q \to r)) \to (p \to r))) = 2$ e $v(Ax2) = 2$.

(Ax3) $p \to (q \to (p \wedge q))$

- se $v(p) = 1$, então $v(Ax3) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então

  - se $v(q) = 1$, então $v(q \to (p \wedge q)) = 2$. Logo $v(Ax3) = 2$.
  - se $v(q) \neq 1$, então $v(p \wedge q) = 2$. Logo $v(q \to (p \wedge q)) = 2$ e $v(Ax3) = 2$.

(Ax4) $(p \wedge q) \to p$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \wedge q) = 1$ e $v(Ax4) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(Ax4) = 2$.

(Ax5) $(p \wedge q) \to q$

- análogo ao (Ax4).

(Ax6) $p \to (p \vee q)$

- se $v(p) = 1$, então $v(Ax6) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(p \vee q) = 2$ e $v(Ax6) = 2$.

(Ax7) $q \to (p \vee q)$

- análogo ao (Ax6).

(Ax8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

- se $v(p) = 1$, então
  - se $v(q) = 1$, então $v(p \vee q) = 1$ e daí $v((p \vee q) \to r) = 2$. Logo, $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.
- se $v(q) \neq 1$, então
  - se $v(r) = 1$, então $v(q \to r) = 1$. Temos, portanto, que $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.
  - se $v(r) \neq 1$, então $v((p \vee q) \to r) = 2$. Temos, portanto, que $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.

se $v(p) \neq 1$, então

- se $v(q) = 1$, então
  - se $v(r) = 1$, então $v(p \to r) = 1$ e $v(Ax8) = 2$.
  - se $v(r) \neq 1$, então $v(q \to r) = 1$. Temos, portanto, que $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.
- se $v(q) \neq 1$, então
  - se $v(r) = 1$, então $v(q \to r) = 1$. Temos, portanto, que $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.
  - se $v(r) \neq 1$, então $v((p \vee q) \to r) = 2$. Temos, portanto, que $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 2$ e $v(Ax8) = 2$.

(Ax11) $p \vee (p \to q)$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \to q) = 2$ e $v(Ax9) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(Ax11) = 2$.

(Ax12) $p \vee \neg p$

- se $v(p) = 1$, então $v(\neg p) = 2$ e $v(Ax10) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(Ax12) = 2$.

(cf) $\neg\neg p \to p$

- se $v(p) = 1$, então $v(\neg p) = 2$ e $v(\neg\neg p) = 1$. Portanto $v(cf) = 2$
- se $v(p) \neq 1$, então $v(cf) = 2$.

$(bC)_1$ $\neg(p \wedge \neg p) \to (p \to (\neg p \to q))$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \to (\neg p \to q)) = 2$ e $v(bC_1) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então
  - se $v(p) = 2$, então $v(\neg p) = 1$. Daí $v(\neg p \to q) = 2$. Logo $v(p \to (\neg p \to q)) = 2$ e portanto $v(bC_1) = 2$.

  - se $v(p) \neq 2$, então $v(\neg p) \neq 1$. Assim, $v(p \wedge \neg p) = 2$. Portanto $v(\neg(p \wedge \neg p)) = 1$ e $v(bC_1) = 2$.

(ca1)$_1$ $(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \wedge q) = 1$ e aí $v((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)) = 1$. Portanto $v(\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))) = 2$. e $v(ca1)_1 = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então
  - se $v(q) = 1$, então $v(p \wedge q) = 1$ e aí $v((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)) = 1$. Portanto $v(\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))) = 2$. e $v(ca1)_1 = 2$.
  - se $v(q) \neq 1$, então $v(p \wedge q) = 2$. Assim, $v(\neg(p \wedge q)) = 1$. Logo, $v((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)) = 1$. Temos, portanto, que $v(\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))) = 2$. e $v(ca1)_1 = 2$.
- se $v(p) \neq 1$, então $v(p \vee q) = 2$ e o resto é idêntico ao caso em que $v(q) \neq 1$.

(ca2)$_1$ $(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))$

- se $v(p) = 1$, então
  - se $v(q) = 1$, então $v(p \vee q) = 1$. Assim, $v((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)) = 1$. Portanto, $v(\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))) = 2$ e $v((ca2)_1) = 2$.
  - se $v(q) \neq 1$, então $v(p \vee q) = 2$. Assim, $v((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)) = 1$. Portanto, $v(\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))) = 2$ e $v((ca2)_1) = 2$.

(ca3)$_1$ $(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q))$

- se $v(p) = 1$, então $v(p \rightarrow q) = 2$. Daí $v(\neg(p \rightarrow q)) = 1$. Logo, $v((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)) = 1$. Assim, $v(\neg((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q))) = 2$ e portanto $v((ca3)_1) = 2$.
- se $v(p) \neq 1$

- se $v(q) = 1$, então $v(p \to q) = 1$. Logo, $v((p \to q) \wedge \neg(p \to q)) = 1$. Assim, $v(\neg((p \to q) \wedge \neg(p \to q))) = 2$ e portanto $v((ca3)_1) = 2$.
- se $v(q) \neq 1$, então o argumento é idêntico ao caso em que $v(p) = 1$.

(MP) Finalmente, para (MP), se $v(p) \neq 1$ e $v(p \to q) \neq 1$, então temos que $v(p \to q) = 2$, o que nos força concluir que $v(q) \neq 1$. ■

Proposição 1.2.16: Em $\mathbf{C}_n$ (para $1 \leq n \leq \omega$) a *redução de negação* é impossível, ou seja, os esquemas abaixo não são válidos em geral dados p e k naturais (A notação $\neg^n\alpha$ significa que o operador $\neg$ foi iterado n vezes, enquanto usaremos $\alpha \dashv\vdash \beta$ como abreviação de $\alpha \vdash \beta$ e $\beta \vdash \alpha$)

(i) $\alpha \dashv\vdash \neg^k\alpha$

(ii) $\neg^{2p}\alpha \dashv\vdash \neg^{2k}\alpha (p \neq k)$

(iii) $\neg^{2p}\alpha \dashv\vdash \neg^{2k+1}\alpha$

(iv) $\neg^{2p+1}\alpha \dashv\vdash \neg^{2k+1}\alpha (p \neq k)$

Demonstração: Por um lado, a Proposição 1.2.15 garante que $\mathcal{M}_C$ é um modelo para cada $\mathbf{C}_n$, visto que $\mathbf{C}_n \subset \mathbf{C}_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{C}_1$. Por outro lado, $\mathcal{M}_C$ invalida as equivalências $(i) - (iv)$, como podemos verificar pela figura abaixo:

α	$\neg\alpha$	$\neg^2\alpha$	$\neg^3\alpha$	$\ldots$	$\neg^{2p}\alpha$	$\neg^{2p+1}\alpha$
1	2	1	2	$\ldots$	1	2
2	1	2	1	$\ldots$	2	1
3	2	1	2	$\ldots$	1	2
4	3	2	1	$\ldots$	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$2p+1$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	1	2
$2p+2$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	2	1

Fig. 1.2: Operador $\neg$ nos **C**-sistemas para matrizes finitas

Observe que a linha diagonal mostra uma valoração em $\mathcal{M}_C$ para um conjunto finito de valores em que nenhuma das igualdades dos itens $(i) - (iv)$ é o caso. ■

Teorema 1.2.17: Nenhum dos sistemas da hieraquia $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ (para n natural) pode ser caracterizado por matrizes finitas.

Demonstração: Suponha que existe uma lógica $\mathbf{L}$ entre $\mathbf{C}_n$ e $\mathbf{C}_1$ que é caracterizada por matrizes finitas. Assim, haveria algum tipo de redução da negação em $\mathbf{L}$ tal qual indicado nos itens $(i) - (iv)$ da Proposição 1.2.16, pois o operador $\neg$ seria vero-funcional. Mas isso contraria justamente a Proposição 1.2.16, o que mostra que **L** não pode ser caracterizado por matrizes finitas. ■

Recentemente foi introduzida por Canielli, Coniglio e Marcos uma generalização dos sistemas proposicionais de da Costa com a noção de Lógicas da Inconsistência Formal - LFI's (*Logics of Formal Inconsistency*).[23] Seja $\bigcirc(\alpha)$ um conjunto de fórmulas em que α é a única fórmula que ocorre em cada elemento desse conjunto. Seja ainda Γ um conjunto de fórmulas e α e β fórmulas. Uma LFI é uma lógica paraconsistente com relação a $\neg$ em que vale para algum α e para todo β:

$$\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$$

Apesar das LFI's serem um caso particular de lógicas paraconsistentes, elas englobam toda a hierarquia proposicional de da Costa (e, consequentemente, seus desdobramentos de primeira ordem).

Veremos a seguir que muitas LFI's não podem ser caracterizadas por matrizes finitas.[24] O primeiro resultado que veremos a esse respeito diz que nenhuma LFI entre **mbC** e **Ciae** pode ter uma semântica completa com tabelas finitas. A lógica **mbC** é axiomatizada tendo o operador $\circ$ acrescido à linguagem de **PC** e o seguinte axioma para regular o novo operador:

(bC) $\circ p \to (p \to (\neg p \to q))$[25]

Já para obter **Ciae** devemos levar em conta os seguintes axiomas:

(ca1) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \wedge q)$

(ca2) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \vee q)$

(ca3) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \to q)$

[23] Inicialmente em [CM02] e aprimorado em [CCM07].
[24] Os teoremas de incompletude a seguir foram retirados de [CCM07].
[25] O axioma (bc) é, na verdade,$(\mathrm{bC})_1$. Usamos um nome diferente para enfatizar quando $\circ$ é operador primitivo ou definido. A mesma observação vale para (ca1)-(ca3) como veremos logo a seguir.

(ci) $\neg\circ p \to (p \wedge \neg p)$

(cc)$_n$ $\circ\neg^n\circ p \qquad (n \geq 0)$

(ce) $p \to \neg\neg p$

Os dois sistemas mencioandos são regidos pela axiomática abaixo:

- $\mathbf{mbC} = \mathbf{IPC}^+ \cup \{(Ax11), (Ax12), (bC)\}$
- $\mathbf{Ciae} = \mathbf{mbc} \cup \{(ca1) - (ca3), (ci), (ce), (cf)\}$

Outros sistemas paraconsistentes intermediários podem ser definidos por meio desses axiomas.

Definição 1.2.18:

- $\mathbf{bC} = \mathbf{mbC} \cup \{(cf)\}$
- $\mathbf{mbCe} = \mathbf{mbC} \cup \{(ce)\}$
- $\mathbf{bCe} = \mathbf{bC} \cup \{(ce)\}$
- $\mathbf{mCi} = \mathbf{mbC} \cup \{(ci), (cc)_n\}$
- $\mathbf{Ci} = \mathbf{mbC} \cup \{(ci), (cf)\}$
- $\mathbf{mCie} = \mathbf{mCi} \cup \{(ce)\}$
- $\mathbf{Cie} = \mathbf{Ci} \cup \{(ce)\}$
- $\mathbf{Cia} = \mathbf{Ci} \cup \{(ca1), (ca2), (ca3)\}$
- $\mathbf{Ciae} = \mathbf{Cia} \cup \{(ce)\}$ $\square$

Por meio da Definição 1.2.18, podemos construir o seguinte gráfico de inclusão a partir dos sistemas paraconsistentes listados acima:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{mbCe} \arrow[dr] & \\
\mathbf{mbC} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{bC} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{bCe} \arrow[d] \\
\mathbf{mCi} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Ci} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Cie} \arrow[d] \\
\mathbf{mCie} \arrow[urr] & \mathbf{Cia} \arrow[r] & \mathbf{Ciae}
\end{tikzcd}$$

Analogamente ao caso **IPC**, definiremos uma fórmula que será válida para qualquer conjunto de matrizes finitas que seriam completas com relação a **mbC**. Em seguida, mostraremos que essa mesma fórmula é invalida numa matriz infinita que é modelo para **Ciae**. Visto que **mbC** $\subseteq$ **Ciae**, então a matriz infinita é um modelo para todos os sistemas entre **mbC** e **Ciae**. Além disso, todas as extensões de **mbC** que fossem caracterizadas por matrizes finitas validariam a fórmula em questão e, portanto, matrizes finitas não podem ser uma semântica completa para qualquer lógica entre **mbC** e **Ciae**.

Definição 1.2.19: Sejam i, k e m números naturais. O esquema de fórmula Δ_m é obtido do seguinte modo:

$$\Delta_m \equiv_{def} \left(\bigwedge_{i \geq 0}^{m-1} \delta^i \right) \to \delta^m$$

Em que $\delta^0 = p$ enquanto $\delta^1 \equiv_{def} \neg(p \wedge \neg p)$ e $\delta^{k+1} = \neg(\delta^k \wedge \neg\delta^k)$. □

Tomemos como exemplo na fórmula acima $m = 1$ e $m = 2$. Teríamos:

$$\Delta_1 \equiv p \to \neg(p \wedge \neg p)$$

$$\Delta_2 \equiv (p \wedge \neg(p \wedge \neg p)) \to \neg((p \wedge \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg p))$$

Proposição 1.2.20: Qualquer matriz finita de $m+1$ valores de verdade que caracteriza **mbC** valida Δ_m.

Demonstração: Suponha que exista uma matriz com $m+1$ valores que caracteriza **mbC**. Como na fórmula Δ_m temos $m+1$ valores para m variáveis, haverá dois naturais k e l de modo que o valor atribuído a δ_k será o mesmo a δ_l para $0 \leq k < l \leq m+1$. Pela definição de δ, temos que δ_{k+1} terá também o mesmo valor de δ_{l+1}. Assim, a fórmula Δ_m terá o mesmo valor de uma fórmula do tipo:

$$(\delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_k \wedge \ldots \wedge \delta_l) \to \delta_l$$

Por $(Ax4)$ e **US** sabemos que a fórmula acima é um teorema de **mbC** e, portanto, será válida numa matriz finita que caracterize **mbC**. ■

Definição 1.2.21: Seja $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ um conjunto de n matrizes infinitas em que o conjunto de valores-verdade é $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega,\}$ e em que é ω o único valor não-designado. Sejam α e β fórmulas proposicionais. A função de valoração v é calculada do seguinte modo para cada operador:

$$v(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(\alpha) = n \text{ e } v(\beta) = n+1 \\ \max(v(\alpha), v(\beta)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\alpha \vee \beta) = \min(v(\alpha), v(\beta))$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} \omega & \text{se } v(\alpha) \in \mathbb{N} \text{ e } v(\beta) = \omega \\ v(\beta) & \text{se } v(\alpha) = \omega \text{ e } v(\beta) \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } v(\alpha) = v(\beta) = \omega \\ \max(v(\alpha), v(\beta)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} \omega & \text{se } v(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{se } v(\alpha) = \omega \\ v(\alpha)+1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\circ\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(\alpha) \in \{0, \omega\} \\ \omega & \text{caso contrário} \end{cases}$$

□

Proposição 1.2.22: $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ é um modelo para **Ciae**

Demonstração:

(Ax1) $p \to (q \to p)$

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(q \to p) = \max(v(p), v(q))$ e então $v(q \to p) \in \mathbb{N}$. Logo, $v(Ax1) = \max(v(p), \max(v(p), v(q))) = \max(v(p), v(q))$ e portanto $v(Ax1) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$, então $v(q \to p) \in \mathbb{N}$ e $v(Ax1) = \max(v(p), v(q \to p))$. Portanto $v(Ax1) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(q \to p) = \omega$ e portanto $v(Ax1) = 0$.
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) = \omega$, então $v(q \to p) = 0$ e portanto $v(Ax1) = 0$.

(Ax2) $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

- se $v(p), v(q), v(r) \in \mathbb{N}$, então $v(p \to q) = \max(v(p), v(q))$ e ainda $v(p \to q) \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo $v(q \to r) = \max(v(q), v(r))$ e $v(p \to (q \to r)) = \max(v(p), \max(v(q), v(r))) = \max(v(p), v(q), v(r))$ e $v(p \to (q \to r)) \in \mathbb{N}$. Mas $v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$ e $v(p \to r) \in \mathbb{N}$. Daí, $v(Ax2) = \max(\max(v(p), v(q)), \max(v(p), v(q), v(r))) = \max(v(p), v(q), v(r))$ e portanto $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p), v(q) \in \mathbb{N}$ e $v(r) = \omega$, então $v(p \to q) = \max(v(p), v(q))$ e $v(p \to q) \in \mathbb{N}$. Já $v(q \to r) = v(p \to r) = \omega$. Daí, se segue que $v(p \to (q \to r)) = \omega$ e $v((p \to (q \to r)) \to (p \to q)) = 0$. Assim, $v(Ax2) = \max(\max(v(p), v(q)), 0) = \max(v(p), v(q))$ e portanto $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p), v(r) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$, então $v(p \to q) = \omega$. Além disso, $v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$ e $v(p \to r) \in \mathbb{N}$. Como $v(q \to r) =$

$v(r)$ então $v(p \to (q \to r)) = v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$. Assim $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = v((p \to r) \to (p \to r)) = v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$. Portanto $v(Ax2) = \max(v(p), v(r))$ e $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = v(r) = \omega$, então $v(p \to q) = \omega$ e também $v(p \to r) = \omega$. Além disso, $v(q \to r) = 0$. Daí $v(p \to (q \to r)) = \max(v(p), 0) = v(p)$ e então $v(p \to (q \to r)) \in \mathbb{N}$. Assim, $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \omega$ e portanto $v(Ax2) = 0$

- se $v(p) = \omega$ e $v(q), v(r) \in \mathbb{N}$, então $v(p \to q) = v(q)$ e ainda $v(p \to r) = v(r)$ e portanto $v(p \to q), v(p \to r) \in \mathbb{N}$. Além disso, $v(q \to r) = \max(v(q), v(r))$ e logo $v(q \to r) \in \mathbb{N}$. Então $v(p \to (q \to r)) = v(q \to r)$ e assim $v(p \to (q \to r)) \in \mathbb{N}$. Logo, $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \max(v(p \to (q \to r)), v(r))$ e daí $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) \in \mathbb{N}$. Portanto, $v(Ax2) = \max(v(q), v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)))$ e $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = v(r) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(p \to q) = v(q)$ e também $v(p \to q) \in \mathbb{N}$. Além disso, $v(p \to r) = 0$ e $v(q \to r) = \omega$. Assim, $v(p \to (q \to r)) = 0$ e $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \max(0, 0) = 0$. Portanto, $v(Ax2) = \max(v(q), 0) = v(q)$ e $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = v(q) = \omega$ e $v(r) \in \mathbb{N}$. então $v(p \to q) = 0$ e $v(p \to q) \in \mathbb{N}$. Além disso, $v(q \to r) = v(r)$ e $v(q \to r) \in \mathbb{N}$. Logo, $v(p \to (q \to r)) = v(p \to r) = v(r)$. Assim, $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = v(r \to r) = v(r)$. Portanto, $v(Ax2) = v((p \to q) \to r) = \max(0, v(r)) = v(r)$ e $v(Ax2) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = v(q) = v(r) = \omega$, então $v(p \to q) = v(q \to r) = v(p \to r) = 0$. Além disso, $v(p \to (q \to r)) = 0$ e $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \max(0, 0) = 0$. Portanto, $v(Ax2) = \max(0, 0) = 0$.

(Ax3) $p \to (q \to (p \land q))$

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) \in \mathbb{N}$
  - se em $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ temos $v(p) = n$ e $v(q) = n+1$, então $v(p \wedge q) = 0$ e $v(q \to (p \wedge q)) = \max(v(q), 0) = v(q)$. Assim, temos que $v(Ax3) = \max(v(p), v(q)) = \max(v(p), v(p)+1) = v(p)+1$. Portanto, $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.
  - caso contrário $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q))$. Assim, $v(q \to (p \wedge q)) = \max(v(q), \max(v(p), v(q))) = \max(v(p), v(q))$. Portanto, temos que $v(Ax3) = \max(v(p), \max(v(p), v(q))) = \max(v(p), v(q))$ e sabemos então que $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$, então $v(p \wedge q) = \omega$. Assim, temos que $v(q \to (p \wedge q)) = 0$. Portanto, $v(Ax3) = \max(v(p), 0) = v(p)$ e $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(p \wedge q) = \omega$. Assim $v(q \to (p \wedge q)) = \omega$. Portanto, $v(Ax3) = 0$.
- se $v(p) = v(q) = \omega$, então $v(p \wedge q) = \max(\omega, \omega) = \omega$. Assim, $v(q \to (p \wedge q)) = 0$. Portanto $v(Ax3) = 0$.

(Ax4) $(p \wedge q) \to p$

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) \in \mathbb{N}$ então
  - se em $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ temos $v(p) = n$ e $v(q) = n+1$, então $v(p \wedge q) = 0$ e $v(Ax4) = \max(0, v(p)) = v(p)$. Portanto $v(Ax) \in \mathbb{N}$.
  - caso contrário $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q))$. Assim, tempos que $v(Ax4) = \max(v(p), \max(v(p), v(q))) = \max(v(p), v(q))$. Portanto, $v(Ax4) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$ então $v(p \wedge q) = \max(v(p), \omega) = \omega$. Assim, $v(Ax3) = v(p)$ e portanto $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$ então $v(p \wedge q) = \max(\omega, v(q)) = \omega$. Portanto $v(Ax3) = 0$ e $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = v(q) = \omega$, então $v(p \wedge q) = \max(\omega, \omega) = \omega$. Portanto $v(Ax3) = 0$ e $v(Ax3) \in \mathbb{N}$.

(Ax5) $(p \wedge q) \to q$

- Análogo ao $(Ax4)$, substituindo convenientemente p por q.

(Ax6) $p \to (p \vee q)$

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) \in \mathbb{N}$ então $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q))$. Assim, $v(Ax6) = \max(v(p), \min(v(p), v(q))) = v(p)$. Logo $v(Ax6) \in \mathbb{N}$
- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$, então $v(p \vee q) = \min(v(p), \omega) = v(p)$. Portanto $v(Ax6) = \max(v(p), v(p)) = v(p)$ e $v(Ax6) \in \mathbb{N}$
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$ então $v(p \vee q) = \min(\omega, v(q)) = v(q)$. Portanto $v(Ax6) = v(q)$ e $v(Ax6) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = v(q) = \omega$, então $v(p \vee q) = \min(\omega, \omega) = \omega$. Portanto $v(Ax6) = 0$ e $v(Ax6) \in \mathbb{N}$.

(Ax7) $q \to (p \vee q)$

- Análogo ao $(Ax6)$, substituindo convenientemente p por q.

(Ax8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

- se $v(p), v(q), v(r) \in \mathbb{N}$, então $v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$ e também $v(q \to r) = \max(v(q), v(r))$. Além disso, $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q))$ e $v((p \vee q) \to r) = \max(\min(v(p), v(q)), v(r))$. Assim, $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = \max(v(q \to r), v((p \vee q) \to r))$ e logo $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) \in \mathbb{N}$. Portanto $v(Ax8) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p), v(q) \in \mathbb{N}$ e $v(r) = \omega$, então $v(p \to r) = \omega$ e aí $v((p \vee q) \to r) = \max(v(p \vee q), \omega) = \omega$. Mas temos também $v(q \to r) = \omega$ e então $v(q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 0$. Portanto $v(Ax8) = 0$.

- se $v(p), v(r) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$ então $v(p \to r) = \max(v(p), v(r))$ e $v(q \to r) = v(r)$. Além disso, $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(p)$ e então $v((p \vee q) \to r) = \max(v(p), v(r))$. Logo, $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = \max(v(r), \max(v(p), v(r)) = \max(v(p), v(r))$. Portanto $v(Ax8) = \max(\max(v(p), v(r)), \max(v(p), v(r)))$ ou seja $v(Ax8) = \max(v(p), v(r))$ e $v(Ax8) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = v(r) = \omega$ então $v(p \to r) = \omega$ e $v(q \to r) = 0$. Daí, temos que $v(p \vee q) = \min(v(p), \omega) = v(p)$ e então $v((p \vee q) \to r) = \omega$. Logo, $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = \omega$ e então $v(Ax8) = 0$.

- se $v(p) = \omega$ e $v(q), v(r) \in \mathbb{N}$ então $v(p \to r) = v(r)$ e $v(q \to r) = \max(v(q), v(r))$. Assim, $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(q)$ e então $v((p \vee q) \to r) = \max(v(q), v(r)) = v(r)$. Logo, $v((q \to r) \to (p \vee q) \to r)) = v((q \to r) \to (q \to r) = \max(v(q), v(r))$. Portanto $v(Ax8) = \max(v(r), \max(v(q), v(r)) = \max(v(q), v(r))$ e $v(Ax8) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = v(r) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(p \to r) = 0$ e $v(q \to r) = \omega$. Além disso, $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q)) = v(q)$ e então $v((p \vee q) \to r) = v(q \to r) = \omega$. Logo, $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = 0$ e $v(Ax8) = \max(0, 0) = 0$.

- se $v(p) = v(q) = \omega$ e $v(r) \in \mathbb{N}$ então $v(p \to r) = v(r)$ e $v(q \to r) = v(r)$. Além disso, $v(p \vee q) = \min(\omega, \omega) = \omega$ e então $v((p \vee q) \to r) = v(r)$. Logo $v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = \max(v(r), v(r)) = v(r)$. Portanto $v(Ax8) = \max(v(r), v(r)) = v(r)$ e $v(Ax8) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) = v(q) = v(r) = \omega$, então $v(p \to r) = 0$ e $v(q \to r) = 0$. Além disso, $v(p \vee q) = \min(\omega, \omega) = \omega$ e $v((p \vee q) \to r) = 0$. Logo

$v((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)) = \max(0,0) = 0$. Portanto $v(Ax8) = \max(0,0) = 0$.

(Ax11) $p \vee (p \to q)$

- se $v(p), v(q) \in \mathbb{N}$ então $v(p \to q) = \max(v(p), v(q))$. Daí $v(Ax10) = \min(v(p), \max(v(p), v(q))) = v(p)$ e portanto $v(Ax10) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$ então $v(p \to q) = \omega$. Daí $v(Ax10) = \min(v(p), \omega) = v(p)$ e portanto $v(Ax10) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$ então $v(p \to q) = v(q)$. Daí $v(Ax10) = \min(v(p), v(p \to q)) = v(q)$. Portanto $v(Ax10) \in \mathbb{N}$
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) = \omega$ então $v(p \to q) = 0$ e $v(Ax10) = \min(\omega, 0) = 0$.

(Ax12) $p \vee \neg p$

- se $v(p) = \omega$, então $v(\neg p) = 0$. Portanto $v(Ax10) = \min(\omega, 0) = 0$.
- se $v(p) = 0$, então $v(\neg p) = \omega$. Portanto $v(Ax10) = \min(0, \omega) = 0$.
- se $v(p) \neq 0$ e $v(p) \neq \omega$ então $v(\neg p) = v(p) + 1$. Portanto $v(Ax10) = \min(v(p), v(p) + 1) = v(p)$ e $v(Ax10) \in \mathbb{N}$.

(bC1) $\circ p \to (p \to (\neg p \to q))$

- se $v(p), v(q) \in \mathbb{N}$, então
  - se $v(p) = 0$, então $v(\circ p) = 0$ e $v(\neg p) = \omega$. Assim $v(\neg p \to q) = v(q)$. Logo, $v(p \to (\neg p \to q)) = \max(0, v(q)) = v(q)$. Portanto, $v(bC1) = \max(0, v(q)) = v(q)$ e $v(bC1) \in \mathbb{N}$.
  - se $v(p) \neq 0$, então $v(\circ p) = \omega$ e $v(\neg p) = v(p) + 1$. Assim, $v(\neg p \to q) = \max(v(p) + 1, v(q))$ e então $v(p \to (\neg p \to q)) = \max(v(p), \max(v(p) + 1, v(q))) = \max(v(p) + 1, v(q))$. Portanto $v(bC1) = \max(v(p) + 1, v(q))$ e $v(bC1) \in \mathbb{N}$.

- se $v(p) \in \mathbb{N}$ e $v(q) = \omega$, então
  - se $v(p) = 0$, então $v(\circ p) = 0$ e $v(\neg p) = \omega$. Assim, $v(\neg p \to q) = 0$ e $v(p \to (\neg p \to q)) = \max(0, 0) = 0$. Portanto $v(bC1) = \max(0, 0) = 0$ e $v(bC1) \in \mathbb{N}$.
  - se $v(p) \neq 0$, então $v(\circ p) = \omega$ e $v(\neg p) = v(p) + 1$. Assim, $v(\neg p \to q) = \omega$ e $v(p \to (\neg p \to q)) = \omega$. Logo $v(bC1) = 0$.
- se $v(p) = \omega$ e $v(q) \in \mathbb{N}$, então $v(\circ p) = 0$, $v(\neg p) = 0$ e $v(\neg p \to q) = \max(0, v(q)) = v(q)$. Assim, $v(p \to (\neg p \to q)) = v(q)$. Portanto $v(bc1) = \max(0, v(q)) = v(q)$ e $v(bc1) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) = v(q) = \omega$, então $v(\circ p) = 0$ e $v(\neg p) = 0$. Assim, $v(\neg p \to q) = \omega$ e $v(p \to (\neg p \to q)) = 0$. Portanto $v(bc1) = \max(0, 0) = 0$.

(ca1) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \wedge q)$

- se $v(p), v(q) \in \{0, \omega\}$, então $v(\circ p) = v(\circ q) = 0$. Assim temos $v(\circ p \wedge \circ q) = \max(0, 0) = 0$ enquanto $v(p \wedge q) = \max(v(p), v(q))$ e $v(p \wedge q) \in \{0, \omega\}$. Logo, $v(\circ(p \wedge q)) = 0$. Portanto $v(ca1) = \max(0, 0) = 0$ e $v(ca2) \in \mathbb{N}$.
- se $v(p) \notin \{0, \omega\}$ ou $v(q) \notin \{0, \omega\}$ então $v(\circ p) = \omega$ ou $v(\circ q) = \omega$. Assim, $v(\circ p \wedge \circ q)) = \max(v(\circ p), v(\circ q)) = \omega$.
  - se $v(\circ(p \wedge q)) \in \mathbb{N}$, então $v(ca1) \in \mathbb{N}$.
  - se $v(\circ(p \wedge q)) = \omega$, então $v(ca1) = 0$.

(ca2) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \vee q)$

- se $v(p), v(q) \in \{0, \omega\}$, então $v(\circ p) = v(\circ q) = 0$. Assim temos $v(\circ p \wedge \circ q) = \max(0, 0) = 0$ enquanto $v(p \vee q) = \min(v(p), v(q))$ e $v(p \vee q) \in \{0, \omega\}$. Logo, $v(\circ(p \vee q)) = 0$. Portanto $v(ca1) = \max(0, 0) = 0$.
- se $v(p) \notin \{0, \omega\}$ ou $v(q) \notin \{0, \omega\}$ então o argumento é análogo ao caso $(ca1)$, substituindo $v(\circ(p \wedge q))$ por $v(\circ(p \vee q))$.

(ca3) $(\circ p \wedge \circ q) \to \circ(p \to q)$

- análaogo ao caso $(ca2)$, substituindo $v(\circ(p \vee q))$ por $v(\circ(p \to q))$.

(ci) $\neg\circ p \to (p \wedge \neg p)$

- se $v(p) \in \{0, \omega\}$, então $v(\circ p) = 0$, $v(\neg\circ p) = \omega$ e $v(\neg p) \in \{0, \omega\}$. Mas $v(p \wedge \neg p) = \max(v(p), v(\neg p)) = \omega$ e portanto $v(ci) = 0$.
- se $v(p) \notin \{0, \omega\}$, então $v(\circ p) = \omega$, $v(\neg\circ p) = 0$ e $v(\neg p) = v(p) + 1$. Assim, $v(p \wedge \neg p) = \max(v(p), v(p) + 1) = v(p) + 1$. Portanto $v(ci) = \max(0, v(p) + 1) = v(p) + 1$ e $v(ci) \in \mathbb{N}$.

(cf) $\neg\neg p \to p$

- se $v(p) = 0$, então $v(\neg p) = \omega$ e $v(\neg\neg p) = 0$. Portanto $v(cf) = \max(0, 0) = 0$
- se $v(p) = \omega$, então $v(\neg p) = 0$ e $v(\neg\neg p) = \omega$. Portanto $v(cf) = 0$.
- se $v(p) = n$ (para $0 < n < \omega$) então $v(\neg p) = n + 1$ e $v(\neg\neg p) = n + 2$. Aí $v(cf) = \max(n + 2, n) = n + 2$ e portanto $v(cf) \in \mathbb{N}$.

(ce) $p \to \neg\neg p$

- A prova é análoga a (cf).

(MP) Finalmente, para (MP) se $v(p) =\neq \omega$ e $v(p \to q) \neq \omega$, então $v(p \to q) = \max(v(p)), v(q))$ daí necessariamente $v(q) \neq \omega$. ∎

Proposição 1.2.23: Existe uma valoração de $\mathcal{M}^{\Delta}_{2m+1}$ que não valida Δ_m

Demonstração : Considere na fórmula Δ_m da Definição 1.2.19 a valoração em que $v(p) = 1$ em $\mathcal{M}^{\Delta}_{2m+1}$. Provaremos por indução que $v(\Delta_m) = \omega$.

- caso $m = 1$

  - temos em $\mathcal{M}_3^{\Delta}$ que $v(\neg p) = 2$, $v(p \wedge \neg p) = 2$ e $v(\delta_0) = v(\neg(p \wedge \neg p) = 3$. Mas $v(\neg\delta_0) = 4$ e $v(\delta_0 \wedge \neg\delta_0) = 0$, o que implica que $v(\delta_1) = \neg(\delta_0 \wedge \neg\delta_0) = \omega$ e portanto $v(\Delta_1) = v(\delta_0) \to v(\delta_1) = \omega$.

- caso $m = k$

  - suponha que $v(\Delta_k) = \omega$. Temos que provar que $v(\Delta_{k+1}) = \omega$. Para isso, provaremos que $v(\delta_i) = 2(i+1) + 1$ para $0 \leq i \leq k-1$

    * caso $i = 0$

      · $v(\delta_0) = \max(1, 1+1) + 1 = 2 + 1 = 2.(0+1) + 1$

    * caso $i = l$.

      · suponha que $v(\delta_l) = 2(l+1)+1$. Assim, $v(\delta_{l+1}) = \max(2(l+1)+1, 2(l+1)+2)+1 = 2(l+2)+1$.

    Logo, $v(\delta_i) = 2(i+1) + 1$.

  Assim, temos que:

  $$v(\Delta_k) = v(\delta_0 \ldots \wedge \ldots \delta_{k-1}) = \max(2.(0+1), \ldots, 2((k-1)+1)+1) = 2k+1$$

  Desse modo, $v(\delta_{k-1} \wedge \neg\delta_{k-1}) = 0$. Assim, $v(\delta_k) = \omega$ e portanto $v(\Delta_k) = v(\delta_{k-1} \to \delta_k) = \omega$. ■

Teorema 1.2.24: Nenhuma lógica entre **mbC** e **Ciae** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Análoga ao Teorema 1.2.12, substituindo a Proposição 1.2.8 pela Proposição 1.2.20, a Proposição 1.2.10 pela Proposição 1.2.22, a Proposição 1.2.11 pela Proposição 1.2.23 e a fórmula G_n pela fórmula Δ_m. ■

Nem todas as LFI's estão entre **mbC** e **Ciae**. Considere, por exemplo, o seguinte axioma:

(cl) $\neg(p \wedge \neg p) \rightarrow \circ p$

Tal axioma não vale em nenhum dos sistemas apresentados acima. De fato, se tomarmos na matriz $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ da Definição 1.2.21 a valoração $v(p) = 1$, então teremos $v(\neg p) = 2$ e $v(p \wedge \neg p) = 2$. Isso significa que $v(\neg(p \wedge \neg p)) = 3$. Por outro lado, $v(\circ p) = \omega$ e portanto $v(cl) = \omega$. Temos, portanto, que (cl) não é teorema em **Ciae** e em nenhum de seus subsistemas.

Visto não ser um teorema de nenhum sistema entre **mbC** e **Ciae**, por meio de (cl) podemos definir uma nova hierarquia de LFI's:

- $\mathbf{Cl}^{-} = \mathbf{IPC}^{+} \cup \{((bC), (cl), \}$
- $\mathbf{Cl} = \mathbf{Cl}^{-} \cup \{(Ax11), (Ax12), (cf)\}$
- $\mathbf{Cil} = \mathbf{Ci} \cup \{(cl)\}$
- $\mathbf{Cila} = \mathbf{Cil} \cup \{(ca1) - (ca3)\}$
- $\mathbf{Cilae} = \mathbf{Cila} \cup \{(ce)\}$

Para se ter ideia da relação entre esses sistemas e as LFI's anteriores, apresentamos o seguinte gráfico de inclusão:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{mbC} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Ci} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Cia} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Ciae} \arrow[d] \\
\mathbf{Cl}^{-} \arrow[r] & \mathbf{Cl} \arrow[r] & \mathbf{Cil} \arrow[r] & \mathbf{Cila} \arrow[r] & \mathbf{Cilae}
\end{tikzcd}$$

O próximo resultado de incompletude[26] mostra que nenhum sistema entre $\mathbf{Cl}^{-}$ e **Cilae** pode ser caracterizado por tabelas finitas, fechando desse modo ambos os gráficos de inclusão. Obteremos a incompletude por meio da mesma estratégia usada anteriormente: define-se um esquema de fórmula que é teorema

[26] Também retirado de [CCM07].

em qualquer matriz que caracteriza $\mathbf{Cl}^-$, em seguida apresenta-se um conjunto de matrizes que é um modelo para **Cilae** e uma valoração que invalida o esquema de fórmulas.

Definição 1.2.25: Sejam i, j e m números naturais. O esquema de fórmula Δ'_m é obtido do seguinte modo:

$$\Delta'_m \equiv_{def} \bigvee_{1<i<j<m} \delta_{ij}$$

Em que $\delta_{ij} = \neg(p_i \wedge \neg p_j) \wedge (p_i \wedge \neg p_j)$ □

Proposição 1.2.26: Qualquer matriz finita de m valores de verdade que caracteriza $\mathbf{Cl}^-$ valida Δ_{m+1}.

Demonstração: Suponha que exista uma matriz com m valores que caracteriza **mbC**. Como na fórmula Δ_m temos m valores para $m+1$ variáveis, haverá dois naturais k e l de modo que o valor atribuído a p_i e p_j será o mesmo que a p_i para $1 < i < j < m$. Temos então que o valor de δ_{ij} será o mesmo de $(\neg(p_i \wedge \neg p_i) \wedge (p_i \wedge \neg p_i))$. Ora, por (cl) e (bC1) sabemos que $\vdash_{\mathbf{Cl}^-} (\neg(p_i \wedge \neg p_i) \wedge (p_i \wedge \neg p_i))$ e por (Ax6) e (ax7) $\alpha \vee (\neg(p_i \wedge \neg p_i) \wedge (p_i \wedge \neg p_i))$ e $(\neg(p_i \wedge \neg p_i) \wedge (p_i \wedge \neg p_i)) \vee \alpha$ também são teoremas de $\mathbf{Cl}^-$. Portanto Δ_{m+1} seria também teorema de $\mathbf{Cl}^-$ e válida na matriz de m valores. ■

Definição 1.2.27: Seja $\mathcal{M'}^{\Delta}_n$ para $n \in \mathbb{N}$ o conjunto de matrizes idêntico à Definição 1.2.21 cuja única diferença reside no comportamento da função de valoração para o operador $\wedge$ descrita abaixo:

$$v(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(\beta) = v(\alpha) + 1 \\ \max(v(\alpha), v(\beta)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Proposição 1.2.28: $\mathcal{M'}^{\Delta}_n$ é um modelo para **Cilae**.

Demonstração: Observe, primeiramente, que os axiomas $(Ax1)$, $(Ax2)$, $(Ax6)-(Ax10), (bc1), (cc)_n, (cf), (ce), (ca1)-(ca3), (ci)$ e para a regra (MP) não há operador de conjunção, o que significa que a demonstração será idêntica à Proposição 1.2.22. Por outro lado, para os axiomas $(ca1)-(ca3)$ é fácil verificar na demonstração da Proposição 1.2.22 que não é possível uma valoração tal que $v(q)=v(p)+1$, e portanto a demonstração também será a mesma para esses casos. Já para os axiomas $(Ax3), (Ax4)$ e $(Ax5)$, a única diferença é que a condição "se em $\mathcal{M}_n^{\Delta}$ temos $v(p)=n$ e $v(q)=n+1$" será substituída simplesmente por "se $v(q)=v(p)+1$" e o resto permanecerá análogo. O único axioma que nos resta analisar é (cl).

(cl) $\neg(p\wedge\neg p)\rightarrow\circ p$

- se $v(p)=0$, então $v(\neg p)=1$. Assim, $v(p\wedge\neg p)=\max(0,1)=1$. Logo $v(\neg(p\wedge\neg p))=2$. Portanto $v(cl)=2$.
- se $v(p)=\omega$, então $v(\neg p)=0$. Assim, $v(p\wedge\neg p)=\max(\omega,0)=\omega$. Logo $v(\neg(p\wedge\neg p))=0$. Visto que $v(\circ p)=0$ temos portanto que $v(cl)=0$.
- se $v(p)\notin\{0,\omega\}$, então $v(p)=k$ para $0<k<\omega$. Assim, $v(\neg p)=k+1$ e então $v(p\wedge\neg p)=0$. Logo, $v(\neg(p\wedge\neg p)=\omega$. Visto que $v(\circ p)=\omega$ temos portanto que $v(cl)\in\mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.29: Existe uma valoração de $\mathcal{M'}_n^{\Delta}$ que não valida Δ'_m para $n,m\in\mathbb{N}$.

Demonstração : Considere a seguinte valoração de $\mathcal{M'}_m^{\Delta}$ para algum $n\in\mathbb{N}$ em que $v(p_i)=v(p_j)=1$ em Δ'_m. Assim, $v(\neg p_i)=v(\neg p_j)=2$ e $v(p_i\wedge\neg p_j)=v(p_j\wedge\neg p_i)=0$. Logo, $v(\neg(p_i\wedge\neg p_j))=\omega$ e então $v(\delta_{ij})=\max(\omega,0)=\omega$. Portanto $v(\Delta'_m)=\min(\omega,\ldots,\omega)=\omega$. ■

Teorema 1.2.30: Nenhuma lógica entre $\mathbf{Cl}^-$ e **Cilae** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Análoga ao Teorema 1.2.12, substituindo a Proposição 1.2.8 pela Proposição 1.2.26, a Proposição 1.2.10 pela Proposição 1.2.28, a Proposição 1.2.11 pela Proposição 1.2.29 e a fórmula G_n pela fórmula Δ'_m. ∎

1.3 Completude Proposicional por Matrizes Finitas

Veremos nessa seção algumas lógicas proposicionais que, diferentemente das vistas anteriormente, podem ser caracterizadas por matrizes finitas. Como já dissemos, não apresentaremos aqui a prova do Metaeorema de Completude para essas lógicas, uma vez que tais provas podem ser encontrados na literatura e não são o objetivo central da Tese. Nos limitaremos a oferecer suas tabelas-verdades, sua axiomática e a referência de onde encontrar a prova da completude.

Na primeira subseção, discutiremos brevemente dois sistemas lógicos que restringem a linguagem de **PC**: o primeiro é **PCI** e tem apenas $\rightarrow$ como operador primitivo (veremos que a disjunção $\vee$ será definida em termos de implicação), enquanto $\mathbf{PC}^+$ é o cálculo proposicional clássico sem negação. Ambos os sistemas podem ser caracterizados pelas tabelas clássicas de **PC**.

Na subseção seguinte, focaremos nossa atenção em três lógicas que podem ser caracterizadas por matrizes de três valores: $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{I}^1$ e $\mathbf{G}_3$. Há, ainda, muitas outras lógicas trivaloradas na literatura. As três lógicas acima são dignas de nossa atenção porque suas extensões modais estarão dentro do escopo da generalização do Teorema de Dugundji, que será demonstrada no Capítulo 2.

Por fim, na terceira subseção, mostraremos a hierarquia desses três sistemas para lógicas n-valoradas (com $n \geq 3$). Veremos também no Capítulo 2 que tal semântica multivalorada garante que suas extensões modais estejam dentro do escopo de nossa generalização.

1.3.1 Matrizes bivalentes

Uma maneira de se obter lógicas proposicionais subclássicas é restringindo a linguagem de **PC**. Começaremos com o fragmento implicativo do Cálculo Proposicional Clássico, ou simplesmente Cálculo Proposicional Implicativo.[27] Para tanto, deve-se levar em conta o axioma:[28]

(C3) $((p \to q) \to p) \to p$

O Cálculo Implicativo **PCI** pode ser obtido do seguinte modo:

- $\mathbf{PCI} = \mathbf{ICI} \cup \{(C3)\}$

A semântica de **PCI** nada mais é que as matrizes bivalentes clássicas restritas à implicação. Graficamente:

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

É possível ainda definir uma disjunção clássica em **PCI**:

$$\alpha \vee \beta \equiv_{def} (\alpha \to \beta) \to \beta$$

Semanticamente, teremos a tabela esperada para interpretar esse conectivo:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

[27] Há diversas formalizações do Cálculo Proposicional Implicativo. Em [Hen49] acrescenta-se o axioma

$$(p \to r) \to (((p \to q) \to r) \to r)$$

a **ICI** e o cálculo resultante é denominado $\mathbf{PC}^{\supset}$. Já em [Łuk48] há uma axiomática alternativa para esse cálculo com um único axioma. Seguiremos a axiomática de [Zem73].

[28] O axioma abaixo, conhecido como *Lei de Pierce*, foi usado para provar a completude do cálculo proposicional clássico por Łukasiewicz e Tarski em [ŁT30]. Diferentemente do conjunto de axiomas aqui usado, foi considerado o axioma $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ no lugar de $(Ax2)$.

Não é difícil verificar que teremos os seguintes teoremas concernentes à disjunção em **PCI**.

Teorema 1.3.1:

(i) $\vdash_{\mathbf{PCI}} p \to (p \vee q)$

(ii) $\vdash_{\mathbf{PCI}} q \to (p \vee q)$

(iii) $\vdash_{\mathbf{PCI}} (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

Demonstração:

(i)

1.	p	[Hip.]
2.	$p \to q$	[Hip.]
3.	q	[(MP) em 1. e 2.]
4.	$p, p \to q \vdash q$	[(MD) em 1.-3.]
5.	$\vdash p \to ((p \to q) \to q)$	[(MD) em 4.]
6.	$\vdash p \to (p \vee q)$	[Def$_\vee$ em 5.]

(ii)

1.	$\vdash q \to ((p \to q) \to q))$	$(Ax1)[p/q, q/p \to q]$
2.	$\vdash q \to (p \vee q)$	[Def$_\vee$ em 2.]

(iii)

1.	$p \to r$	[Hip.]
2.	$r \to q$	[Hip.]
3.	p	[Hip.]
4.	r	[(MP) em 1. e 3.]
5.	q	[(MP) em 2. e 4.]
6.	$\vdash (p \to r) \to ((r \to q) \to (p \to q))$	[(MD) de 1. a 5.]
7.	$p \to r$	[Hip.]
8.	$q \to r$	[Hip.]
9.	$(p \to q) \to q$	[Hip.]
10.	$(r \to q) \to (p \to q)$	[(MP) em 6. e 7.]
11.	$((p \to q) \to q) \to ((r \to q) \to ((p \to q) \to q))$	[(Ax1)]
12.	$(r \to q) \to ((p \to q) \to q)$	[(MP) em 9. e 11.]
13.	$((r \to q) \to (p \to q)) \to$ $(((r \to q) \to ((p \to q) \to q)) \to ((r \to q) \to q))$	[(Ax2)]
14.	$((r \to q) \to ((p \to q) \to q)) \to ((r \to q) \to q)$	[(MP) em 10. e 13.]
15.	$(r \to q) \to q$	[(MP) em 12. e 14.]
16.	$((r \to q) \to q) \to$ $(((r \to q) \to (q \to r)) \to ((r \to q) \to r))$	[(Ax2)]
17.	$((r \to q) \to (q \to r)) \to ((r \to q) \to r)$	[(MP) em 15. e 16.]
18.	$(q \to r) \to ((r \to q) \to (q \to r))$	[(Ax1)]
19.	$(r \to q) \to (q \to r)$	[(MP) em 8. e 18.]
20.	$(r \to q) \to r$	[(MD) em 17. e 19.]
21.	$((r \to q) \to r) \to r$	[(Ax3)]
22.	r	[(MP) em 20. e 21.]
23.	$\vdash (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to q) \to r)$	[(MD) de 7. a 22.]
24.	$\vdash (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)$	[Def$_\vee$ em 23.]

■

É digno de nota que esses teoremas são, exatamente, os axiomas $(Ax6)$, $(Ax7)$ e $(Ax8)$ de **ICA**.

Definamos uma disjunção análoga à **PCI**:

$$p \uplus q \equiv_{def} (p \to q) \to q$$

Mas seria $\uplus$ de fato uma disjunção? O Teorema abaixo esclarece tal indagação.

Teorema 1.3.2: Em **ICI**, vale:

(i) $\vdash \alpha \to (\alpha \uplus \beta)$

(ii) $\vdash \beta \to (\alpha \uplus \beta)$

(iii) $\nvdash (p \to r) \to ((q \to r) \to (p \uplus q) \to r))$

Demonstração Para (i) e (ii), a demonstração é idêntica a do Teorema 1.3.1. Para provar (iii), consideremos a função v trivalorada de implicação da lógica $\mathbf{G}_3$ em que $1, 2$ e 3 são valores de verdade e 1 é o único designado e a implicação se comporta do seguinte modo:[29]

$\to$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	3
3	1	1	1

A matriz acima é um modelo para **ICI** por ser o fragmento implicativo da matriz $\mathcal{M}_G$ da Definição 1.2.8 restrita a três valores. O que significa que teremos $v(Ax1) = 1$ e $v(Ax2) = 1$. Por outro lado, se $v(p) = v(r) = 2$ e $v(q) = 3$, então $v(p \to q) = 3$ e $v(p \uplus q) = 1$. Além disso $v(q \to r) = 1$ e ainda $v((p \uplus q) \to r) = 2$. Daí temos que $v((q \to r) \to v(p \uplus q) \to r) = 2$. Por outro lado $v(p \to r) = 1$, o que implica que fórmula acima recebe portanto o valor 2, que não é designado. ■

O Teorema 1.3.2 mostra que embora $\uplus$ não seja uma disjunção clássica, o operador tem uma propriedade desejável a uma disjunção: dado uma fórmula α concluímos $\alpha \uplus \beta$ e $\beta \uplus \alpha$. Além disso, como corolário do teorema acima, temos que se acrescentarmos a **ICI** uma versão de $(Ax8)$ em que $\vee$ é substituído por $\uplus$, teremos **ICA**, ou seja, o fragmento implicativo-disjuntivo da lógica intuicionista. Voltaremos a esse tópico na Subseção 2.2.3, ao generalizarmos o teorema de incompletude modal no contexto intuicionista.

Diferentemente do contexto intuicionista, no caso clássico é possível definir uma disjunção em que vale $(Ax6), (Ax7)$ e $(Ax8)$ por meio da implicação. Isso significa que para se obter o Cálculo Proposicional Positivo $\mathbf{PC}^+$ é suficiente acrescentar à linguagem de **PCI** apenas o operador $\wedge$. Do ponto de vista axiomático, define-se:[30]

[29] A lógica $\mathbf{G}_3$ será apresentada em detalhes na Subseção 1.3.2

[30] Existem muitas maneiras de se axiomatizar o Cálculo Proposicional Positivo. De acordo com [Hac66] p.48, a primeira axiomatização desse sistema se deve a Hilbert e Bernays. O sistema de Hilbert e Bernay tem $\to, \vee, \wedge$ e $\leftrightarrow$ como operadores primitivos e é formado pelos axiomas $(Ax1), (Ax4) - (Ax9)$ além dos axiomas:

$$(p \to (p \to q)) \to (p \to q) \text{ e } (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

Há três axiomas para $\leftrightarrow$ que são consequência imediata da definição desse operador por meio de $\to$ e $\wedge$ mais os axiomas (Ax7)-(Ax9), conferir [HB01] p. 125. O cálculo de Hackstaff é denominado $\mathbf{P}_+$ e é construído por meio da mesma linguagem do sistema de Hilbert e regido pelos axiomas $(Ax1)$,$(Ax3) - (Ax9)$ mais o axioma:

$$((p \to q) \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

- $\mathbf{PC}^+ = \mathbf{PCI} \cup \{(Ax3), (Ax4), (Ax5)\}$

A semântica de $\mathbf{PC}^+$ é formada por meio da tabela bivalente de $\rightarrow$ e a tabela bivalente de $\wedge$ descrita abaixo:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Há muitas maneiras de se obter **PC** do ponto de vista axiomático. A partir de $\mathbf{PC}^+$ basta acrescentar $(Ax12)$ e o axioma abaixo:[31]

(exp) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

Semanticamente, acrescentamos a $\mathbf{PC}^+$ a tabela da negação:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Veremos na próxima subseção algumas lógicas com três valores de verdade. Essas lógicas têm a característica de estarem entre **IPI** e **PC**, o que será crucial para o resultado de incompletude do Capítulo 2.

1.3.2 Matrizes Trivaloradas

Como ressaltamos na subseção 1.2.2, a maioria das lógicas paraconsistentes não pode ser caracterizada por matrizes finitas. Há, entretanto, algumas exceções. A lógica $\mathbf{P}^1$ propostas por Sette é uma lógica paraconsistente em que $\neg$ e $\rightarrow$ são seus operadores primitivos e tem como semântica as seguintes matrizes:[32]

que é equivalente a $(Ax2)$.

Outra maneira de se obter o Calculo Positivo é excluindo de **mbC** os axiomas $(Ax11)$ e $(bC1)$, como em [CCM07]. O sistema resultante é denominado $\mathbf{CPL}^+$. Pode-se ainda construir o mesmo cálculo acrescentando os axiomas $(Ax7)-(Ax9)$ ao cálculo implicativo de Henkin $\mathbf{PC}^{\supset}$ de [Hen49] e obtermos $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$. Conferir [BS09] p.30.

[31] Tal axiomática é consequência do fato de acrescentarmos $\circ p$ como axioma em **mbC** para obter **PC** como observado em [CCM07] e da axiomática de **mbC** a partir do Cálculo Positivo de [BS09] p. 98.

[32] A semântica e sintática originais de $\mathbf{P}^1$ estão em [Set73].

p	$\neg p$
T	F
T^*	T
F	T

$\to$	T	T^*	F
T	T	T	F
T^*	T	T	F
F	T	T	T

Os valores T e T^* são designados. Primeiramente, é fácil verificar que $\mathbf{P}^1$ é uma lógica paraconsistente. Seja v a função de valoração que respeita as tabelas acima. Assim, se $v(p) = T^*$ e $v(q) = F$ teremos:

$$p, \neg p \nvDash_{\mathbf{P}^1} q$$

Para provar que $\mathbf{P}^1$ além de paraconsistente é uma LFI, define-se os operadores de conjunção e consistência do seguinte modo:

$$\alpha \wedge \beta \equiv_{def} (((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \neg((\beta \to \beta) \to \beta)) \to \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

$$\circ\alpha \equiv_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Teremos, assim, as seguintes tabelas para esses operadores definidos:

p	$\circ p$
T	T
T^*	F
F	T

$\wedge$	T	T^*	F
T	T	T	F
T^*	T	T	F
F	F	F	F

Não é difícil verificar que se $v(\circ p) \in \{T, T^*\}$ e $v(p) \in \{T, T^*\}$ então forçosamente $v(p) = T$ e $v(\neg p) = F$. O que significa que a inferência abaixo é válida por vacuidade:

$$\circ p, p, \neg p \vDash_{\mathbf{P}^1} q$$

Isso significa que $\mathbf{P}^1$ também é uma LFI. A lógica paraconsistente $\mathbf{P}^1$ não tem apenas a propriedade de ser caracterizada por matrizes de três valores, esse sistema é, além disso, uma lógica maximal num sentido específico: qualquer axioma acrescentado a essa lógica (que não seja um teorema de $\mathbf{P}^1$) faz com que $\mathbf{P}^1$ se colapse com **PC**.

A axiomática original de $\mathbf{P}^1$ leva em conta os seguintes axiomas:[33]

[33] Orignalmente em [Set73] os nomes desses axiomas são Ax.3, Ax.4 e Ax.5. Usamos uma

P1 $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to \neg\neg q) \to q)$

P2 $\neg(p \to \neg\neg p) \to p$

P3 $(p \to q) \to \neg\neg(p \to q)$

Podemos, então, definir:

- $\mathbf{P^1} = \mathbf{ICI} \cup \{(P1), (P2), (P3)\}$

Há, entretanto, uma axiomática alternativas a esse sistema. Considere a lógica **Ci** da Definição 1.2.18. Outra maneira de se obter $\mathbf{P}^1$ é acrescentando a **Ci** o seguinte esquema de axioma:[34]

(cz) $\circ\alpha$ se α não é uma variável proposicional

Ou seja, α é uma fórmula não-atômica, o que é o mesmo que dizer que α é uma fórmula em que há ao menos uma variável proposicional e um operador.

Outra lógica trivalorada digna de menção é $\mathbf{I}^1$. É digno de nota que $\mathbf{I}^1$ é também maximal no sentido de $\mathbf{P}^1$. A linguagem dessa lógica também tem $\neg$ e $\to$ como operadores primitivos e sua semântica é regida pelas matrizes abaixo, em que o único valor designado é T, enquanto F^* e F são não designados.

p	$\neg p$
T	F
F^*	F
F	T

$\to$	T	F^*	F
T	T	F	F
F^*	T	T	T
F	T	T	T

Define-se nessa lógica $\vee$ e $\star$ como:

$$\alpha \vee \beta \equiv_{def} (\neg(\beta \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha))$$

$$\star\alpha \equiv_{def} \alpha \vee \neg\alpha$$

A definição acima implica as tabelas abaixo para esses operadores:

p	$\star p$
T	T
F^*	F
F	T

$\vee$	T	F^*	F
T	T	T	T
F^*	T	F	F
F	T	F	F

nova nomenclatura para evitar possíveis confusões com relação aos axiomas da subseção anterior.

[34] Como apresentado em [CCM07].

Vejamos alguns axiomas específicos dessa lógica:

I1 $(\neg\neg p \to \neg q) \to ((\neg\neg p \to q) \to \neg p)$

I2 $\neg\neg(p \to q) \to (p \to q)$

O cálculo $\mathbf{I}^1$ é composto pelos axiomas:

- $\mathbf{I^1} = \mathbf{ICI} \cup \{(I1), (I2)\}$

Outro cálculo trivalorado é atribuído a Gödel. Considere as matrizes de $\mathcal{M}_G$ da Definição 1.2.9 restrita a apenas três valores: 1, 2, 3 em que 1 é o único designado. Essa lógica é denominada $\mathbf{G}_3$ e tem como semântica as tabelas:

$\vee$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

$\wedge$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$\to$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	3
3	1	1	1

p	$\neg p$
1	3
2	3
3	1

A axiomática de $\mathbf{G}_3$ é obtida acrescentando a **IPC** o axioma:[35]

G_3 $(\neg q \to p) \to (((p \to q) \to p) \to p)$

Veremos na subseção seguinte de que modo os três sistemas trivalorados $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{I}^1$ e $\mathbf{G}_3$ podem gerar uma hierarquia de n-valores de verdade.

1.3.3 Matrizes n-valoradas

Duas décadas mais tarde, Sette e Carnielli construíram uma hierarquia $\mathbf{P}^n$ com n natural. Para cada $\mathbf{P}^n$ teremos o conjunto $\{T, T^*, T^{**}, \ldots T^{(n)}, F\}$ de $n+$ 2valores de verdade em que o único não-designado é F e a função de verdade v é definida para cada $\mathbf{P}^n$ como:[36]

[35] Esse resultado foi demonstrado por Łukasiewicz em [Łuk52].

[36] Essa não é exatamente a semântica proposta em [SC95] para a hierarquia $\mathbf{P^2} \ldots \mathbf{P}^n$, mas a proposta em [Fer01] p. 36. Por exemplo, para $\mathbf{P^2}$ se $v(p) = T^{**}$ e $v(q) = T^*$, então $v(p \to q) = T^*$ em [SC95] mas $v(p \to q) = T$ em [Fer01]. Escolhemos a segunda semântica por ao menos duas razões. Primeiramente, não há uma axiomática completa para a versão original da hierarquia $\mathbf{P^2} \ldots \mathbf{P}^n$. Em segundo lugar, a versão posterior além de ter uma axiomática completa cumpre três características esperadas por essa hieraquia: 1) para cada n natural vale a relação de inclusão $\mathbf{P}^n \subseteq \mathbf{P}^{n-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{P^1}$; 2) cada $\mathbf{P}^n$ tem $n+2$ valores e é uma lógica paraconsistente (cono veremos logo adiante); 3) em cada $\mathbf{P}^n$ os operadores $\to$, $\wedge$ e $\vee$ se comportam classicamente.

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) = F \\ F & \text{se } v(\alpha) = T \\ T^{(i-1)} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) = F \text{ ou } v(\beta) \neq F \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos verificar que cada $\mathbf{P}^i$ é uma LFI (e, portanto, também uma lógica paraconsistente). Para isso, devemos levar em conta as definições:

$$\alpha \wedge \beta \equiv_{def} \neg(\alpha \to \neg(\neg\beta \to \beta))$$

$$\circ\alpha \equiv_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Pelas definições acima e pelas funções de valoração para $\neg$ e $\to$, teremos para esses operadores o seguinte comportamento semântico:

$$v(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) \neq F \text{ e } v(\beta) \neq F \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v(\circ\alpha) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) \in \{T, F\} \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que para cada $\mathbf{P}^n$ temos que se $v(p) = T^*$, então $v(\neg p) = T$. Temos portanto que:

$$p, \neg p \nvDash_{\mathbf{P}^n} q$$

Logo, cada $\mathbf{P}^n$ é paraconsistente com relação à $\neg$. Por outro lado, se $v(p) \neq F$ e $v(\neg p) \neq F$, então $v(p) = T^{(i)}$ para $1 \leq i \leq n$. Assim, $v(\circ p) = F$. Temos, portanto, por vacuidade:

$$\circ p, p, \neg p, \vDash_{\mathbf{P}^n} q$$

O que mostra que cada $\mathbf{P}^n$ é uma LFI. Para obtermos a axiomática de $\mathbf{P}^n$ devemos levar em conta um novo axioma e um novo esquema de axiomas:[37]

[37] Os nomes originais de (ccz) e $(cn)_n$ são $(A12)$ e $(A13)$. Escolhemos (ccz) por serem semelhante aos axiomas (cz) e $(cc)_n$. Conferir [CCM07] e [Fer01] p. 98.

(ccz) $\circ(p \wedge q) \wedge \circ(p \vee q) \wedge \circ(p \to q)$

$(cn)_n$ $\circ(\neg^n p)$

Uma maneira de obter a axiomática dessa hierarquia é:[38]

- $\mathbf{P}^n = \mathbf{mbC} \cup \{(ccz), (cn)_n\}$

É interessante notar que a hierarquia $\mathbf{I}^n$ mantém as mesmas propriedades diametralmente oposta de $\mathbf{P}^n$ como já encontramos entre $\mathbf{I}^3$ e $\mathbf{P}^3$. Cada $\mathbf{I}^n$ tem o conjunto de valores $\{T, F^*, \ldots F^{(n)}, F\}$ em que T é o único designado. Os operadores primitivos $\neg$ e $\to$ são interpretados semânticamente do seguinte modo:

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) = F \\ F & \text{se } v(\alpha) = T \\ F^{(i-1)} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) \neq T \text{ ou } v(\beta) = T \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mantendo a analogia com relação à $\mathbf{P}^n$, para cada $\mathbf{I}^n$ define-se $\vee$ e $\star$ como

$$\alpha \vee \beta \equiv_{def} (\alpha \to \neg\alpha) \to \beta$$

$$\star\alpha \equiv_{def} \alpha \vee \neg\alpha$$

O que implica no seguinte comportamento semântico:

$$v(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) = T \text{ ou } v(\beta) = T \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v(\star\alpha) = \begin{cases} T & \text{se } v(\alpha) \in \{T, F\} \\ F & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[38] Essa não é, todavia, a axiomática original de [Fer01] p. 98. Em vez de *(bC)* (que, em sentido extrito, é $(bC)_1$, visto que o operador $\circ$ é definido e não primitivo) o axioma utilizado é *(A11)* $\circ q \to ((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p))$. Não é difícil ver que ambas as axiomáticas são equivalentes. Supondo *(bC)* temos *(A11)* por consequência imediata de valer *reductio* e o Metateorema da Dedução em **mbC**. Supondo *(A11)* temos *(bC)* por meio de *(Ax1)*, *(MP)* e Metateorema da Dedução.

Usando o mesmo argumento que apresentamos para $\mathbf{I}^1$, sabemos que se $v(\alpha) = F^*$, então $v(\neg\alpha) = F^*$ e $v(\alpha \vee \neg\alpha) = F$. Por outro lado, se $v(\star\alpha) = T$, então ou $v(\alpha) = T$ ou $v(\neg\alpha) = T$, mostrando assim que cada $\mathbf{I}^n$ é uma lógica paracompleta e uma LFU.

Do ponto de vista axiomático, para construirmos a hierarquia $\mathbf{I}^n$ leva-se em conta os axiomas:

(I3) $\star p \to ((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg q))$

(I4) $\star(p \wedge q) \wedge \star(p \vee q) \wedge \star(p \to q)$

(I5)$_n$ $\star(\neg^n p)$

A axiomática da hierarquia é obtida da seguinte maneira:

- $\mathbf{I^n} = \mathbf{PC}^+ \cup \{(I3), (I4), (I5)_n\}$

A última hierarquia que analisaremos é a dos sistemas de Gödel. Tomemos a extensão do Cálculo Intuicionista **IPC** abaixo:

- $\mathbf{LC} = \mathbf{IPC} \cup \{(p \to q) \vee (q \to p)\}$

Dummet provou que **LC** tem como semântica exatamente as matrizes infinitas de $\mathcal{M}_G$ da Definição 1.2.9.[39] Seja $\mathbf{G}_n$ o sistema cuja semântica se obtém por meio das operações de $\mathcal{M}_G$ e restringindo os valores de verdade ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ em que 1 é o único valor designado. Obtemos a hierarquia $\mathbf{G}_3 \ldots \mathbf{G}_n$ acrescentando a **LC** o esquema de axioma $Fin(n)$:[40]

Fin(n) $p_1 \vee (p_1 \to p_2) \vee \ldots \vee (p_{n-2} \to p_{n-1}) \vee \neg p_{n-1}$

Pelas mesmas razões apontadas na Subseção 1.3.2, não é difícil verificar que cada $\mathbf{G}_n$ é paracompleta, visto que se $v(p) = 2$, então $v(\neg p) = n$ e $v(p \vee \neg p) = 2$, que não é designado. Seja $\star$ um operador definido da mesma maneira que em $\mathbf{G}_3$. Semanticamente teremos:

$$v(\star\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) \in \{1, n\} \\ v(\alpha) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Caso $v(\star p) = 1$, teremos $v(p) = 1$ ou $v(p) = n$, que é o mesmo que $v(\neg p) = 1$, o que mostra que cada $\mathbf{G}_n$ é uma LFU.

[39] No artigo [Dum59].

[40] Uma prova de completude para essa hierarquia pode ser encontrada em [Pre03] p. 31-35.

Vale lembrar que todas as lógicas vistas nessa Seção são lógicas completas com relação às matrizes finitas e estão entre **IPI** e **PC**. Um dos resultados do próximo capítulo é mostrar que essas lógicas quando são estendidas modalmente não podem, em geral, ser caracterizadas por matrizes finitas.

2. (IN)COMPLETUDE MODAL POR MATRIZES FINITAS

Outro percurso histórico faz-se necessário para delimitar em linhas grosseiras a ampla classe daquilo que tem sido denominado lógica modal. O nosso ponto de partida são os trabalhos pioneiros de Lewis iniciados em 1914. Deixaremos de lado a tarefa monumental de catalogar um século de uma das áreas mais profícuas da logica formal para nos concentrarmos em dois catálogos importantes - ainda que datados - sobre o assunto: *An Essay in Classical Modal Logic* de Segerberg e *A New Introduction to Modal Logic* de Hughes e Creswell, respectivamente de 1967 e 1996.[1] Muitos sistemas modais foram criados desde então, mas para não nos perdermos na imensa e tortuosa trilha - com suas inúmeras ramificações - que se formou ao longo da história da lógica modal e nos distanciarmos do objetivo da Tese, tomaremos os dois catálogos como faróis para nos guiarmos nessa empreitada. Cabe ressaltar que estamos pressupondo um cenário muito restrito do que consideramos ser lógica modal, limitando nossa linguagem a dois operadores modais monádicos, como veremos em detalhes adiante.

Gostaríamos que a história da lógica proposicional e da lógica modal não fossem consideradas dois rios distintos partindo de um mesmo afluente, mas um brejo nutrido por dois córregos que se cruzam em diversos pontos. Esperamos mostrar de que maneira a semântica multi-valorada era almejada nos princípios da lógica modal e como o resultado de Dugundji matou o sonho de vero-funcionalidade que nutria a imaginação dos lógicos modais. Veremos ainda que a morte desse sonho impulsionou semânticas alternativas, culminando na Semântica Relacional de Kripke. Além disso, citaremos brevemente alguns trabalhos sobre lógica modal intuicionista e paraconsistente, mostrando que a distinção entre essas duas histórias cumpre um papel meramente expositivo e está longe de ser definitiva.

Nosso trabalho não é, contudo, um trabalho de história da lógica formal (ainda que, diferentemente da grande parte dos trabalhos de lógica modal formal, desejemos estampar essa história constantemente em segundo plano). O

[1] Doravante [Seg71] e [CH96].

alvo da Tese é oferecer resultados originais no que diz respeito à semântica multi-valorada para lógica modal. Quanto ao aspecto da originalidade desses dois primeiros capítulos, podemos condensá-lo na seguinte enunciação: aprofundar e expandir os resultados de Incompletude Modal por Matrizes Finitas.

Os termos "apronfundar" e "expandir" serão usados num sentido preciso. Entendemos por "aprofundar" concentrar-se no "fundo" da lógica modal, ou seja, no seu substrato proposicional. Em palavras mais claras, queremos verificar os resultado de incompletude no contexto de lógicas modais proposicionais não-clássicas. Esses sistemas são obtidos em geral por meio de uma operação de extensão modal a partir de um sistema proposicional não-clássico, como definiremos em linhas gerais ao longo do capítulo. Já "expandir" toma o sentido de abarcar os sistemas modais que estão fora do resultado original de Dugundji e que foram desenvolvido ao longo de décadas. É nesse ponto que os dois referidos catálogos modais desempenham um papel fundamental: o de traçar os limites externos da nossa generalização do Teorema de Incompletude Modal por Matrizes Finita de Dugundji.

2.1 Os sistemas de Lewis e as multi-valorações.

Em 1914, Lewis defende num artigo pioneiro que a implicação material tal qual concebida no *Principia Matematica* de Russell e Whitehead produzia "teoremas alarmantes: (1) uma proposição falsa implica qualquer proposição (2) uma proposição verdadeira é implicada por qualquer proposição."[2] Em termos formais:

(i) $\neg p \to (p \to q)$

(ii) $p \to (q \to p)$

Segundo Lewis, esses teoremas "não são misteriosos, nem grandes descobertas tampouco enormes absurdos. Eles mostram apenas, em linhas gerais, o sentido de 'implica' que tem sido incorporado em álgebra".[3] Esse não é, porém, o sentido usual da palavra "implica": dizemos que uma proposição implica outra quando a primeira foi logicamente deduzida da segunda. À primeira vista, Lewis pretendia substituir a implicação material de Russell por aquilo que ele

[2] "startling theorems: (1) a false proposition implies any proposition, and (2) a true proposition is implied by any proposition." [Lew14]. Sobre a história dos sistemas de Lewis, vide [Bal10].

[3] "In themselves, they are neither mysterious sayings, nor great discoveries, nor gross absurdities. They exhibit only, in sharp outline, the meaning of 'implies' which has been incorporated into the algebra". *Idem.Ibidem.*

denominou *implicação estrita*. Em seguida, optou por uma abordagem que considerava a implicação material como um fragmento de seu novo cálculo. Apenas em 1932 foi formulada uma axiomática definitiva.[4] A fórmula $p \prec q$ passa a ser definida como $\neg\Diamond(p \wedge \neg q)$, em que p e q são variáveis proposicionais, estendendo o cálculo implicativo do *Principia Matematica* com o novo operador $\Diamond$.[5]

S1, o primeiro dos cinco sistemas da hierarquia de Lewis, é obtido adicionando-se o operador $\prec$ à linguagem do cálculo proposicional clássico e os seguintes axiomas:[6]

(B1) $(p \wedge q) \prec (q \wedge p)$

(B2) $(p \wedge q) \prec q$

(B3) $p \prec (p \wedge p)$

(B4) $(p \wedge (q \wedge r)) \prec ((p \wedge q) \wedge r)$

(B6) $((p \prec q) \wedge (q \prec r)) \prec (p \prec r)$

(B7) $(p \wedge (p \prec q)) \prec q$

Observe que os axiomas acima dizem respeito apenas a $\wedge$ e $\prec$, procurando manter a maior parte das propriedades da implicação material que não envolve negação. Por exemplo, sabemos por (B6) que esperamos valer uma forma de *Silogismo Hipotético*[7] para a implicação estrita enquanto (B7) parece garantir alguma forma de *Modus Ponens*. O mesmo acontece com a regra de *Inferência Estrita*, como podemos conferir abaixo na lista das regras de **S1**.

Podemos provar que $\prec$ mantém propriedades convenientes de uma implicação. Provaremos, por exemplo, que $p \prec p$ é teorema em **S1**:

[4] Em seu livro *A Survey of Symbolic Logic* [Lew18].

[5] Na verdade, Lewis toma os operadores $\wedge$ e $\neg$ como primitivos e não $\vee$ e $\neg$ como considerados por Russell e Whitehead. Vide Seção 1.1.

[6] Excluímos o axioma (B5) $p \prec \neg\neg p$, dado que Mckinsey demonstrou em [Mck34] que ele pode ser deduzido dos demais.

[7] De acordo com [Bob06], o silogismo hipotético em sua versão original foi estudado por Theoprastus, seguidor de Aristóteles. Sua versão em linguagem natural é:

Se alguma coisa é F, enão é G
Se alguma coisa é G, então é H
Logo, Se alguma coisa é F, então é H

Em nossa linguagem proposicional, teríamos $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

Substituição Uniforme	Uma fórmula válida permanece válida se substituirmos uniformemente suas variáveis; proposicionais por outras fórmulas;
Substituição de Equivalentes	Duas fórmulas estritamente equivalentes são intercambiáveis;
Inserção da Conjunção	Infere-se $\alpha \wedge \beta$ de α e β;
Inferência Estrita	Infere-se β de α e $\alpha \prec \beta$.

1.	$p \prec (p \wedge p)$	[(B3)]
2.	$(p \wedge p) \prec p$	[*Substituição Uniforme* em (B2)]
3.	$(p \prec (p \wedge p)) \wedge ((p \wedge p) \prec p)$	[*Inserção da Conjunção* em 1 e 2]
4.	$((p \prec (p \wedge p)) \wedge ((p \wedge p) \prec p)) \prec (p \prec p)$	[*Substituição Uniforme* em (B6)]
5.	$p \prec p$	[*Inferência Estrita* em 3 e 4]

Logo, $\vdash_{\mathbf{S1}} p \prec p$.[8]

Considere, agora, os demais axiomas:

(B8) $\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$

(A8) $(p \prec q) \prec (\neg\Diamond q \prec \neg\Diamond p)$

(C10) $\neg\Diamond\neg p \prec \neg\Diamond\neg\neg\Diamond\neg p$

(C11) $\Diamond p \prec \neg\Diamond\neg\Diamond p$

Para Lewis, (B8) procura interpretar $\Diamond$ como "consistente", axioma que ao adicionarmos a **S1** obtemos **S2**. (A8) é uma forma de contraposição para $\prec$. Se interpretarmos $\neg\Diamond\neg$ como "demonstrável",[9] (C10) estabelece que se demonstramos p, então necessariamente demonstramos que demonstramos p. Por fim, (C11) diz que se p é consistente, então demonstramos a consistência de p. **S3** é **S1** mais (A8), enquanto temos **S4** acrescentando-se (C10) a **S1** e temos **S5** acrescentando-se (C11) a **S3**.

Lewis mostra que **S1** $\subseteq$ **S2** $\subseteq$ **S3** $\subseteq$ **S4** $\subseteq$ **S5**, por meio da seguinte estratégia: apresenta tabelas-verdades que satisfazem os axiomas de **S1** mas não (B8);

[8] Esse teorema de **S1** será importante no Teorema de Incompletude de Dugundji, tal como será mostrado na Subseção 2.2.1.

[9] Boolos sugere que Lewis tinha em mente a noção de demonstração para interpretar $\neg\Diamond\neg$. Conferir [Boo93]. Lemmon defende todavia em [Lem57] que o sistema mais fraco **S0.5** seria apropriado para interpretar que uma fórmula é demonstrável em **PC**. Já em [CP13] argumenta-se que para fragmentos de **PC**, é apropriado tomar o sistema ainda mais fraco $\mathbf{S0.5}^0$ para respresentar essas noções. Veremos a axiomática de **S0.5** e de $\mathbf{S0.5}^0$ na Subseção 2.2.2.

em seguida, tabelas que satisfazem os axiomas de **S2** mas não (A8), e assim por diante. Para isso, Lewis utiliza tabelas-verdade com quatro valores de verdade.

É importante ressaltar que Lewis não oferece nenhuma semântica para esses sistemas: por exemplo, suas tabelas para **S1** validam todos os teoremas de **S1**, mas nada garante que elas validem apenas esses teoremas. É razoável supor que foi com a intenção oferecer uma semântica para sistemas modais que Łukasiewicz propôs a seguinte tabela para o operador $\Diamond$:[10]

p	$\Diamond p$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	1

Aqui, se 1 é verdadeiro e 0 é falso, o terceiro valor $\frac{1}{2}$ pode ser visto como indeterminado.[11] Uma fórmula é possivelmente verdadeira quando é verdadeira ou apenas indeterminada, mas uma fórmula é tautologia apenas se recebe o valor 1 em que 1 é o único valor designado.

Na verdade, Łukasiewicz construiu uma hierarquia de n sistemas, para $n > 3$. O primeiro desses sistemas é **Ł**$_3$ e tem as tabelas:

p	$\neg p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

[10] Assim defende Ballarin em [Bal10]. As tabelas em questão estão em [Łuk30].

[11] "What is this third value? I have no suitable name for it. But after the preceding explanations it should not be difficult to understand what I have in mind. I maintain that there are propositions which are neither true nor false but *indeterminate*. (O que é esse terceiro valor? Eu não tenho um nome apropriado para ele. Mas depois das explanações acima não seria difícil compreender o que eu tinha em mente. Eu continuo defendendo que há proposições as quais não são verdadeira tampouco falsas mas *indeterminadas*) Em [Łuk61].

Como observado pelo seu aluno Tarski em 1921, pode-se definir o operador modal $\Diamond p$ como $\neg p \to p$.[12]

A lógica $\textbf{Ł}_3$ não é, entretanto, uma extensão do sistema minimal que tratamos no capítulo anterior, a saber, **ICI**. Seja v a função de valoração que respeita as tabelas acimas. De fato, se $v(p) = 1$, $v(q) = \frac{1}{2}$ e $v(r) = 0$ então $v(p \to q) = \frac{1}{2}$, $v(p \to r) = 0$ e $v(q \to r) = \frac{1}{2}$. Daí temos $v(p \to (q \to r)) = \frac{1}{2}$ e $v((p \to (q \to r) \to (p \to r)) = 0$ o que implica que $v(Ax2) = \frac{1}{2}$, que não é distinguido.

Por outro lado, $\textbf{Ł}_3$ pode ser entendida como um modelo para os axiomas modais de Lewis. Até então vimos apenas axiomas e tabelas para $\Diamond$ e $\prec$. Gödel, porém, foi o primeiro a introduzir o operador $\Box$ como equivalente a $\neg\Diamond\neg$. Sua intenção era mostrar que **IPC** poderia ser interpretada em **S4**. Para isso, propôs a seguinte versão:[13]

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(T) $\Box p \to p$

(4) $\Box p \to \Box\Box p$

Introdução da Necessitação	Se uma fórmula α é teorema então a fórmula $\Box\alpha$ também é teorema.

E para obtermos **S5**, basta adicionarmos:

(5) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Para efeitos de simplificação, denominaremos a regra *Introdução da Necessitação* simplesmente de **(Nec)**. Na versão de Gödel, $p \prec q$ é equivalente a $\Box(p \to q)$. Veremos que essa notação será muito eficiente para provar os resultados de completude e incompletude modal.

Podemos provar concomitantemente que as condições (i) e (ii) da implicação estrita não valem tanto na hierarquia de Lewis quanto na de Łukasiewicz, reforçando a tese de que Łukasiewicz almejava que sua semântica fosse usada para sistemas modais. Voltemos à $\textbf{Ł}_3$ e definamos $\Box p$ com equivalente a $\neg\Diamond\neg p$. Teremos então a seguinte tabela para $\Box$:

[12] De acordo com [Łuk53]. A definição de $\Box$ em termos de $\Diamond$ está em [Łuk30].

[13] A axiomática abaixo bem como a intepretação de **IPC** em **S4** podem ser encontradas em [G3̈3].

p	$\Box p$
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

Basta agora comprovar que as tabelas de Ł_3 são um modelo para os axiomas modais de **S5**, ou seja, que todos os seus axiomas modais recebem o valor designado 1, o que é verificado abaixo:

$\Box$	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(\Box p$	$\to$	$\Box q)$
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$\Box p$	$\to$	p
0	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1

$\Box p$	$\to$	$\Box\Box$	p
0	1	0	0
0	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1

$\Diamond$	p	$\to$	$\Box$	$\Diamond$	p
0	0	1	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	1

Como vimos, Ł_3 é um modelo para os axiomas modais de **S5**, ou seja, todos esses axiomas tomam o único valor designado 1 e a Regra de Necessitação preserva o valor designado. Além disso, não é difícil verificar que Ł_3 invalida as condições (i) e (ii) de Lewis. Interpretando à maneira de Gödel $p \multimap q$ como $\Box(p \to q)$, temos:

Teorema 2.1.1:

(i) $\nvDash_{\text{Ł}_3} \neg p \multimap (p \multimap q)$

(ii) $\nvDash_{\text{Ł}_3} p \multimap (q \multimap p)$

Demontração: Seja v a função de verdade que associa a cada proposição modal um valor de verdade do conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ respeitando as tabelas de $\mathbf{Ł}_3$. Tome $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 0$. Pelas tabelas de $\rightarrow$, $\neg$ e $\Box$, sabemos que $v(p \rightarrow q) = \frac{1}{2}$ e então temos que $v(\Box(p \rightarrow q)) = 0$, enquanto $v(\Box(\neg p \rightarrow \Box(p \rightarrow q))) = \frac{1}{2}$, que não é um valor designado. Analogamente, se $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 1$, então $v(q \rightarrow p) = \frac{1}{2}$ e ainda $v(p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)) = \frac{1}{2}$ o que nos força a concluir $v(\Box(p \rightarrow \Box(q \rightarrow p))) = 0$. ■

Por outro lado, visto **S5** ser uma extensão de **PC**, então as tabelas de $\mathbf{Ł}_3$ não são um modelo para **S5**, pois invalidam $(Ax2)$. Por outro lado não sabemos se algum outro conjunto de matrizes de três ou mais valores de verdade é capaz de ser uma semântica apropriada para **S5** e os demais sistemas de Lewis. Essa pergunta foi respondida por Dugundji em 1940, como veremos na próxima seção.

2.2 Incompletude Modal por Matrizes Finitas

Essa seção será dividida em três subseções. Na primeira parte veremos o resultado original de Dugundji com relação à semântica multivalorada para os sistemas de Lewis. Como ja fizemos anteriormento no Capítulo 1, a prova de incompletude será mostrada em detalhes, reconstruindo e esmiuçando o resultado original de Dugundji.

Na segunda parte seguiremos os dois catálogos modais mencionados anteriormente ao citarmos diversos sistemas modais que surgiram depois da hierarquia de Lewis. Nossa intenção é, além de formar uma panorâmica do escopo do resultado de Dugundji, esboçar uma história da lógica modal clássica, restrita aos operadores $\Box$ e $\Diamond$.

Por fim, à terceira parte cabe mostrar a parte original do Capítulo 2, a saber, certa generalização do Teorema de Incompletude Modal para matrizes finitas. Para compreender o alcance e a profundidade da generalização, será necessário ter em mente os sistemas modais para além de **S1**-**S5** e ainda os sistemas proposicionais apresentados no Capítulo 1. Essa parte será, portanto, não apenas o cerne original do Capítulo 2 mas também o fio condutor de ambos capítulos.

2.2.1 O Resultado Original de Dugundji

Num pequeno artigo (de apenas duas páginas) Dugudji demonstra que nenhuma matriz com um número finito de valores pode caracterizar qualquer lógica entre

S1-S5.[14]

O procedimento é semelhante ao de Gödel para demonstrar a incompletude de **IPC** por meio de matrizes-finitas:[15] toma-se uma fórmula e demonstra-se que qualquer matriz de n valores de verdade que caracteriza **S1** valida também essa fórmula. Em seguida, demonstra-se que tal fórmula não é teorema numa matriz de infinitos valores que é modelo para **S5**.

A primeira parte do teorema consiste em demonstrar que existe uma fórmula D_n de $n+1$ variáveis - denominada fórmula de Dugundji - que é válida em qualquer matriz de n valores que caracteriza **S1**.

Proposição 2.2.1: Qualquer matriz finita de n valores de verdade que caracteriza **S1** valida D_n.

Demonstração: Defina a seguinte fórmula de Dugundji, para $1 \leq i \leq n+1$ e $1 \leq j \leq n+1$:

$$D_n \equiv_{def} \bigvee_{i \neq j} (p_i \asymp p_j)$$

Em que $p_i \asymp p_j$ abrevia $(p_i \dashv p_j) \wedge (p_j \dashv p_i)$.

Suponha que exista uma matriz $\mathcal{M}$ com n valores que caracteriza **S1**. Como na fórmula acima temos n valores para $n+1$ variáveis, haverá i e j de modo que os valores atribuídos a $(p_i \dashv p_j)$ sejam os mesmos a $(p_i \dashv p_i)$. Ora, como $\vdash_{\mathbf{S1}} p \dashv p$, temos pela *Inserção da Conjunção* que $(p_i \asymp p_i)$ é teorema. Logo, por Teorema 1.3.1 *(i)* e *(ii)* sabemos que $(p_i \asymp p_i) \vee \alpha$ e $\alpha \vee (p_i \asymp p_i)$ são teoremas, e portanto a matriz $\mathcal{M}$ valida $\alpha \vee (p_i \asymp p_i) \vee \beta$, ou seja, toda a fórmula de Dugundji. ■

A segunda parte do teorema mostra que existe uma matriz infinita que é modelo para **S5** e que não valida a fórmula do Dugundji.

Para facilitar nossa demonstração, usaremos uma axiomática simplificada para **PC**, em que $\neg$ e $\rightarrow$ são os operadores primitivos. Para isso, levaremos en conta um novo axioma:[16]

(Axm) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$

O Cálculo Proposicional Clássico pode ser axiomatizado de modo muito mais sucinto como:

[14] O artigo referido é [Dug40], mas preferimos a demonstração mais detalhada de [CP08].
[15] Como já visto na Subseção 1.2.1. De acordo com o próprio Dugundji em [Dug40] "The method used here originated with K. Gödel" (O Método usado aqui originou-se com Gödel).
[16] A axiomática acima foi retirada de [Men64] p. 35. O nome (Axm) é por nossa conta uma homenagem a Mendelson.

- $\mathbf{PC} = \mathbf{ICI} \cup \{(Axm)\}$

Proposição 2.2.2: Existe uma matriz infinita $\mathcal{M}_\infty$ que é um modelo para **S5**

Demonstração: Defina a seguinte matriz $\mathcal{M}_\infty$

- $M = \wp(\mathbb{N})$, ou seja, o conjunto das partes dos números naturais
- $D = \mathbb{N}$

Seja $\cup, \cap$ e $-$ as operações usuais de "união", "conjunção" e "complementação" enquanto se calcula $\triangledown$ e $\vartriangle$ do seguinte modo:

$$\vartriangle X = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{se } X = \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\triangledown X = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{se } X \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $V : Var \longrightarrow M$ uma função que atribui um elemento de $\wp(\mathbb{N})$ para cada variável proposicional de **S5** do seguinte modo:[17]

- $V(\neg\alpha) = \overline{V(\alpha)}$
- $V(\alpha \to \beta) = \overline{V(\alpha)} \cup V(\beta)$
- $V(\Box\alpha) = \vartriangle(V(\alpha))$
- $V(\Diamond\alpha) = \triangledown(V(\alpha))$

Vamos provar que todos os axiomas e regras de **S5** são válidos na matriz $\mathcal{M}_\infty$.

(Ax1) $V(p \to (q \to p)) = \overline{V(p)} \cup (\overline{V(q)} \cup V(p)) = (\overline{V(p)} \cup V(p)) \cup \overline{V(q)} = \mathbb{N}$

(Ax2) $V((p \to q) \to ((p \to (q \to r) \to (p \to r))) =$

$$= \overline{(\overline{V(p)} \cup V(q))} \cup \overline{\overline{V(p)} \cup (\overline{V(q)} \cup V(r))} \cup \overline{V(p)} \cup V(r) =$$

$$= V(p) \cap \overline{V(q)} \cup V(p) \cap V(q) \cap \overline{V(r)} \cup \overline{V(p)} \cup V(r) =$$

$$= V(p) \cap (\overline{V(q)} \cup V(q) \cap \overline{V(r)}) \cup \overline{V(p)} \cup V(r)$$

[17] Em termos estritos, V é o conjunto de quatro funções: $v_\neg, v_\Box, v_\Diamond$ e $v_\to$. Usamos a notação abaixo com o intuito de simplificar a leitura.

$$= V(p) \cap \overline{V(r)} \cup \overline{V(p)} \cup V(r) = \mathbb{N}$$

(Axm) $V((\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q) =$

$$= \overline{\overline{\overline{V(q)}} \cup \overline{V(p)}} \cup \overline{\overline{\overline{V(q)}} \cup V(p)} \cup V(q) =$$

$$= \overline{V(q)} \cap V(p) \cup \overline{V(q)} \cap \overline{V(p)} \cup V(q) =$$

$$\overline{V(q)} \cap (v(p) \cup \overline{V(p)}) = \overline{V(q)} \cup V(q) = \mathbb{N}$$

(K) $V(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)) = \overline{\triangle(\overline{V(p)} \cup V(q))} \cup \overline{\triangle V(p)} \cup \triangle V(q)$

- se $V(p) \neq \mathbb{N}$, então $\overline{\triangle V(p)} = \mathbb{N}$
- se $V(p) = \mathbb{N}$, então
  - se $V(q) = \mathbb{N}$, então $\triangle V(q) = \mathbb{N}$
  - se $V(q) \neq \mathbb{N}$, então $\overline{V(p)} \cup V(q) \neq \mathbb{N}$ e $\overline{\triangle(\overline{V(p)} \cup V(q))} = \mathbb{N}$

(T) $V(\Box p \to p) = \overline{\triangle V(p)} \cup V(p)$

- se $V(p) = \mathbb{N}$, então $\overline{\triangle V(p)} \cup V(p) = \mathbb{N}$
- se $V(p) \neq \mathbb{N}$, então $\overline{\triangle V(p)} = \mathbb{N}$

(4) $v(\Box p \to \Box\Box p) = \overline{\triangle V(p)} \cup \triangle\triangle V(p)$

- se $V(p) = \mathbb{N}$, então $\triangle V(p) = \mathbb{N}$ e $\triangle\triangle V(p) = \mathbb{N}$
- se $v(p) \neq \mathbb{N}$, então $\triangle V(p) = \emptyset$ e $\overline{\triangle V(p)} = \mathbb{N}$

(5) $V(\Diamond p \to \Box\Diamond p) = \overline{\nabla V(p)} \cup \triangle\nabla V(p)$

- se $V(p) = \emptyset$, então $\nabla V(p) = \emptyset$ e $\overline{\nabla V(p)} = \mathbb{N}$
- se $V(p) \neq \emptyset$, então $\nabla V(p) = \mathbb{N}$ e $\triangle\nabla V(p) = \mathbb{N}$

(MP) se $V(p) = \mathbb{N}$ e $\overline{V(p)} \cup V(q) = \mathbb{N}$, então $\emptyset \cup V(q) = \mathbb{N}$ e daí $V(q) = \mathbb{N}$.

(Nec) se $V(p) = \mathbb{N}$, então $\triangle V(p) = \mathbb{N}$ ■

Teorema 2.2.3 (Teorema de Dugundji): Nenhuma lógica modal **L** entre **S1** e **S5** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Tome a seguinte valoração V em **S5**: para cada variável proposicional p_k associa-se o conjunto $\{k\} \subseteq \mathbb{N}$. Note que para p e q distintos, temos $\overline{V(p)} \neq \mathbb{N}$ e $\overline{V(q)} \neq \mathbb{N}$. Do mesmo modo que $\overline{V(p)} \cup V(q) \neq \mathbb{N}$ e $\overline{V(q)} \cup V(p) \neq \mathbb{N}$ e, portanto:

$$V(p \asymp q) = \triangle(\overline{V(p)} \cup V(q)) \cap \triangle(\overline{V(q)} \cup V(p)) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

Portanto, a fórmula de Dugundji toma valor $\emptyset$ na matriz $\mathcal{M}_\infty$. Se uma matriz de n valores caracterizasse **S**, então pela Proposição 2.2.1 a fórmula de Dugundji seria teorema em **L** e portanto teorema em **S5**. Mas a Proposição 2.2.2 garante que $\mathcal{M}_\infty$ é um modelo de **S5**, logo a fórmula de Dugundji não pode ser um teorema de **S5**, o que prova por absurdo que **S5** não pode ser caracterizado por matrizes finitas. ■

Vimos, portanto, que os sistemas **S1**-**S5** não podem ser caracterizados por matrizes finitas. Veremos ainda na Seção 2.3 que **S5** tem a propriedade peculiar de que todas as suas extensões podem ser caracterizadas por matrizes finitas.

2.2.2 Sistemas modais para além da hierarquia de Lewis

A lógica modal não termina em 1940 com o resultado de Dugundji. Já em 1943, Alban propôs uma extensão de **S5** acrescentando o axioma $\Diamond\Diamond p$ a **S2**.[18] O sistema resultante será denominado **S6**, que será o primeiro de uma série de sistemas modais que surgirão ao longo de século XX e que não estarão entre **S1** e **S5** e, portanto, fora dos domínios do Teorema de Dugundji.

Feys prôpoe em 1950 duas versões enfraquecidas de **S1** e **S2**. Considere os axiomas definidos na linguagem original de Lewis:

(F1) $(p \wedge q) \prec p$

(F2) $(p \wedge q) \prec (q \wedge p)$

(F3) $((p \wedge q) \wedge r) \prec (p \wedge (q \wedge r))$

(F4) $(p \wedge p) \prec p$

(F5) $((p \prec q) \wedge (q \prec r)) \prec (p \prec r)$

Se adicionarmos aos axiomas acima as regras de **S1**, temos $\mathbf{S1}^0$.[19] O sistema $\mathbf{S2}^0$ é obtido acrescentarmos o axioma:

[18] Em seu artigo [Alb43].

[19] É relevante lembrar que $(F2)$ é $(B1)$ e $(F5)$ é $(B6)$ na axiomática original de Lewis. Preferimos expor os axiomas como denominados por Feys.

(K1) $\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$

Feys ainda mostra que $\mathbf{S1}^0 \subseteq \mathbf{S1}$ e $\mathbf{S2}^0 \subseteq \mathbf{S2}$. Além disso, $\mathbf{S1}^0 \subseteq \mathbf{S2}^0$, de onde concluimos que ambos os sistemas de Feys estão fora do resultado de Dugundji.[20]

No mesmo ano, Halldén estende a hierarquia de Lewis com os axiomas:

(C13) $\Diamond\Diamond p$

(C14) $\neg\Diamond\neg\Diamond\Diamond p$

Formando, assim, os sistemas:[21]

- $\mathbf{S7} = \mathbf{S3} \cup \{(C13)\}$
- $\mathbf{S8} = \mathbf{S3} \cup \{(C14)\}$

Vale lembrar que os dois sistemas são extensões de **S5** e nos encontramos, mais uma vez, fora do resultado de Dugundji.

Por outro lado, em 1957, ao propor uma nova axiomática para a hierarquia de Lewis, Lemmon apresenta um sistemas mais fraco que **S1**, a saber, **S0.5**.[22] Propôe ainda o sistema **T**,[23] demonstrando que está fora da hierarquia **S1**-**S5**. Sua nova axiomática permite ainda construir os sistemas **E2** e **E3**.[24] Para definir esses sistemas, considere os seguintes axiomas:[25]

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

[20] [Fey50] apud [Sob62]. Não tivemos acesso ao artigo original de Feys.
[21] Halldén definiu **S7** e **S8** em seu artigo [Hal50].
[22] Em [Lem57]. Lemmon também apresenta o sistema **S0.9**. Embora mostre que $\mathbf{S0.5} \subseteq \mathbf{S0.9}$, Lemmon, porém, não conseguiu encontrar matrizes para mostrar que $\mathbf{S0.9} \neq \mathbf{S0.5}$. Esse resultado será demonstrado apenas em 1975 por Girle em [Gir75]. Visto que **S0.9** não é citado nos dois catálogos que nos guiam nesse trabalho - [Seg71] e [CH96] - não nos deteremos nesse e em outros sistemas modais que aparecerem nos artigos citados ao longo do texto, exceto se o sistema em questão tiver alguma propriedade digna de nota com relação à completude ou incompletude por matrizes finitas. No que diz respeito ao caso particular de **S0.9**, por ora basta ter em mente que $\mathbf{S0.5} \subseteq \mathbf{S0.9} \subseteq \mathbf{S1}$ para verificarmos que nossa generalização do teorema de Dugundji também incluirá **S0.9**.
[23] Embora consideremos a axiomática de **T** com proposta por Lemmon no artigo acima referido, o sistema foi originalmente formulado von Wright em [VW51] p. 8-18, denominado **M1**.
[24] Os sistemas **D1**-**D5**, **E1**, **E4** e **E5** serão vistos na Subseção 2.2.3, ao generalizarmos o resultado de Dugundji. Por ora nos limitaremos a apresentar **E2** e **E3**, para seguirmos extritamente o católogo de Hugues e Creswell. No Capítulo 3 ofereceremos uma semântica alternativa a **D2** e **E2**.
[25] Esses não são os nomes originais dos axiomas de Lemmon. Seguimos a nomenclatura de [Seg71].

(K') $\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$

(D) $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$

(T) $\Box p \to p$

(Nec) $\vdash p$ implica $\vdash \Box p$

(N') $\vdash_{\mathbf{PC}} p$ implica $\vdash \Box p$

(N)* $\vdash p \to q$ implica $\vdash \Box p \to \Box q$

Observe que a regra *(N')* permite a inclusão do operador $\Box$ apenas para os teoremas de **PC**.[26] Tomemos um exemplo: embora possamos provar por meio de *(N')* o teorema $\Box(p \to p)$, não podemos entretanto inferir $\Box\Box(p \to p)$ como teorema. Feita a devida ressalva, definiremos os seguintes sistemas modais:

- $\mathbf{S0.5} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (T), (N')\}$
- $\mathbf{E2} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (T), (N^*)\}$
- $\mathbf{E3} = \mathbf{PC} \cup \{(K'), (T), (N^*)\}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (T), (Nec)\}$

Dois anos mais tarde, Lemmon e Dummett constroem dois sistemas intermediários entre **S4** e **S5** por meio dos axiomas:[27]

(G1) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

(D1) $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$

Podemos, então, definir os sistemas:

- $\mathbf{S4.2} = \mathbf{S4} \cup \{(G1)\}$
- $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} \cup \{(D1)\}$

[26] A Regra *(N*)* é denominada *(Eb)* por Lemmon em [Lem57] e *(R*)* em [CH96]. Lemmon denomina *(a")* a regra enfraquecida que denominamos *(N')* seguindo [CH96]. Procuramos nos aproximar da notação de [CH96], mas para fins de simplicação usaremos N para idenficar as regras de inclusão do operador de necessitação.

[27] Mais uma vez, usamos a notação de [CH96]. Não tivemos acesso ao artigo de Lemmon e Dummet, [DL59].

É digno de nota que **S4** $\subseteq$ **S4.1** $\subseteq$ **S4.2** $\subseteq$ **S4.3** $\subseteq$ **S5**, estando portanto dentro da abrangência do Teorema de Dugundji.[28]

Em 1962 Sobociński oferece as extensões naturais do sistemas de Feys. Para tanto, devemos levar em conta os seguintes axiomas:

(L1) $(p \prec q) \prec (\Diamond p \prec \Diamond q)$

(M1) $\Diamond\Diamond p \prec \Diamond p$

Formam-se, assim, os sistemas:

- $\mathbf{S3^0} = \mathbf{S1}^0 \cup \{L1\}$
- $\mathbf{S4^0} = \mathbf{S1}^0 \cup \{M1\}$

Sobociński demonstra que $\mathbf{S1}^0 \subseteq \mathbf{S2}^0 \subseteq \mathbf{S3}^0 \subseteq \mathbf{S4}^0$ e observa que acrescentando a esses sistemas $p \prec \Diamond p$ como axioma, obtemos os quatro primeiros sistemas da hierarquia de Lewis. Dois anos mais tarde,[29] Sobociński oferece mais alguns sistemas modais que também estão fora do escopo do Teorema de Dugundji, em que ele denomina sistemas modais não-Lewis (*non-Lewis modal systems*). Os axiomas usados por Sobociński são:

(J1) $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

(H1) $p \to \Box(\Diamond p \to p)$

(M) $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

Por meio deles,[30] define-se os sistemas:

- **K1**(ou **S4M**)[31] $= \mathbf{S4} \cup \{(M)\}$
- $\mathbf{K1.1} = \mathbf{S4} \cup \{(J1)\}$

[28] Os sistemas **S4.1** e **S4.2** foram apresentados primeiramente em [DL59]. De acordo com [CH96] p. 143 o axioma (G1) é em homenagem a P. T. Geach, que prôpos (G1) como uma maneira de reduzir o número de modalidades de **S4** sem se colapsar com **S5**.

[29] Os artigos de 1962 e 1964 em questão são [Sob62] e [Sob64a], respectivamente.

[30] $(J1)$ e $(H1)$ são os nomes originais de Sobociński. O nome (M) é de Lemmon e Scott em [LS77] p. 74, nome que também será usado por Hughes e Creswell. Originalmente (M) é $(K2)$.

[31] Esse sistema aparece pela primeira vez em [McK45] com o nome **S4.1**. É obtido adicionando a **S4** o axioma

(F) $(\neg\Diamond\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond\neg\Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$

Mas em [LS77] p. 75 é demonstrado que o axioma (F) pode ser substuído por (M). Além disso, como observado por [CH96] p. 143, temos que $\mathbf{S4M} \not\subseteq \mathbf{S4.2}$, sendo portanto o nome **S4.1** inapropriado.

- $\mathbf{K1.2} = \mathbf{S4} \cup \{(H1)\}$
- $\mathbf{K2} = \mathbf{S4.2} \cup \{(M)\}$
- $\mathbf{K2.1} = \mathbf{K2} \cup \{(J1)\}$
- $\mathbf{K3} = \mathbf{S4.3} \cup \{(M)\}$
- $\mathbf{K3.1} = \mathbf{S4.3} \cup \{(J1)\}$
- $\mathbf{K4}'$ (ou **S4.4M**)[32] $= \mathbf{S4.4} \cup \{(M)\}$

Sobociński oferece outros sistemas entre **S4** e **S5**, propondo um novo axioma:[33]

(R1) $p \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$

E define três novos sistemas:

- $\mathbf{S4.2.1} = \mathbf{S4.2} \cup \{(N1)\}$
- $\mathbf{S4.3.1} = \mathbf{S4.3} \cup \{(N1)\}$
- $\mathbf{S4.4} = \mathbf{S4} \cup \{(R1)\}$

O autor ainda coloca a questão da existência de algum sistema entre **S4.4** e **S5**. Schumm responde positivamente, considerando o axioma:

(M18) $(\Diamond\Box q \to q) \vee (\Box\Diamond q \to q)$

E definindo o sistema:

- $\mathbf{S4.9} = \mathbf{S4.4} \cup \{(M18)\}$

O sistema **S4.9** tem ainda a propriedade peculiar de não existir nenhum outro entre ele e **S5**. Em outros palavras, acrescentando qualquer axioma em **S4.9**, teríamos ou um sistema fora da hierarquia de Lewis ou o próprio **S5**.[34]

[32] Esse sistema foi originalmente designado por **K4** em [Sob64b] mas Lemmon usará o nome **K4** para se referir ao sistema obtido excluindo o axioma **T** em **S4**, como veremos adiante. Para evitar confusões, usamos a mesma notação de [CH96].

[33] Sobociński usa a notação prefixa no artigo em questão [Sob64b]. Mantivemos os nomes originais dos axiomas e dos sitemas, preferindo a notação infixa com implicação material, como a oferecida por [CH96].

[34] O nome original de **S4.9** dado por Schumm em [Sch69] é **S4.7**. Zeman demonstrou em [Zem71] que não havia nenhum sistema entre **S4.7** e **S5**, propondo que o nome **S4.9** seria mais conveniente. O nome $(M18)$ para o axioma acima, aparece em [Zem73] p. 266. Mantivemos o nome do sistema e do axioma tal qual matidos por [CH96].

De grande importância é o axioma formulado pela primeira vez em 1963 por Smiley.[35]

(W) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Normalmente interpretado como "é demonstrável", o operador $\Box$ é em geral estudado no sistema **KW**:

- $\mathbf{KW} = \mathbf{K4} \cup \{(W)\}$

Desde então, **KW** se tornou a base de um importante ramo da lógica modal: a lógica da provabilidade.[36]

Um ano depois, Åqvist propôe mais dois sistemas:

- $\mathbf{S3.5} = \mathbf{S3} \cup \{\Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{S9} = \mathbf{S3.5} \cup \{\Diamond\Diamond p\}$

Åqvist mostra que $\mathbf{S3} \subseteq \mathbf{S3.5} \subseteq \mathbf{S4}$ e $\mathbf{S7} \subseteq \mathbf{S9}$.[37] Além disso, demonstra a propriedade peculiar de que uma fórmula em **S3.5** é teorema se e somente se for teorema em **S5** e em **S9**.

No mesmo ano Thomas apresenta uma hierarquia intermediária entre **T** e **S4** por meio do seguinte esquema de axioma:[38]

(4_n) $\Box^n p \to \Box^{n+1} p$

A hierarqua é construída a partir de **T**

- $\mathbf{S4}_n = \mathbf{T} \cup \{(4_n)\}$

De modo que se $n < m$ então $\mathbf{S4}_n \subseteq \mathbf{S4}_m$ e por consequência teremos $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4}_n \subseteq \mathbf{S4}_m \subseteq \mathbf{S4}$.

[35] A sequência cronológica foi levemente interrompida aqui para priorizar a fluência do texto.

[36] O axioma em questão foi proposto em 1955 por Löb em [L5̈5], como resposta a uma pergunta formuada por Henkin sobre o Teorema de Incompletude da Aritmética em [Hey52]. Löb entretanto usa o operador $\vec{\mathcal{B}}$, que foi subtituído por Smiley em [Smi63] por $\Box$. Também conhecido como (GL) em [Boo93], mantivemos o nome do axioma que aparece tanto em [Seg71] p. 84 quanto em [CH96] p. 139. Não tivemos acesso ao artigo de Smiley, mas referências sobre a história da lógica da provabilidade podem ser encontradas em [CH96] p. 144 e [Ver10].

[37] O axioma adicionado originalmente em **S3** por Åqvist em [Åqv64] é $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$, mas mais uma vez preferimos a formulação em [CH96] p. 364. O nome original de **S9** é **S7.5**. A denominação **S9** foi proposto por Hughes e Creswell ao demonstrar que $\mathbf{S8} \subseteq \mathbf{S7.5}$. Conferir [CH68] p. 273 e [Hal13].

[38] De acordo com Thomas em [Tho64], essa hierarquia se deve a Sobociński, num resultado não-publicado.

No ano de 1963 uma verdadeira revolução ocorre na lógica modal. Kripke generaliza a semântica de mundos possíveis de Carnap de 1946, incluindo a noção de relação entre mundos, provando a completude para **T**, **S4** e **S5**. Sua semântica relacional não é apenas poderosa e extremamente intuitiva, mas possibilita a definição de novos sistemas modais.[39] Por exemplo, uma maneira alternativa de axiomatizar **S5** é adicionando-se a **S4** o axioma:[40]

(C12) $p \prec \neg\Diamond\neg\Diamond p$

Tal axioma foi denominado em [LL32] de axioma Brouwersche, em homenagem a Brouwer.[41] No mesmo artigo, Kripke mostra como sua semântica relacional possibilita a criação de um novo sistema por meio de uma nova versão do axioma Brouwersche, usando implicação material em vez da implicação estrita.

(B) $p \to \Box\Diamond p$

Define-se então o sistema **KTB** ou simplesmente **B** como:

- $\mathbf{B} = \mathbf{T} \cup \{(B)\}$

Kripke insiste que sua semântica permite caracterizar sistemas ainda mais fracos que **T**, podendo obter sistemas do tipo deôntico. Esses sistemas serão estudados por Lemmon em 1966. Em seu artigo, propõe três novos sistemas:[42]

- $\mathbf{K} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (Nec)\}$
- $\mathbf{D} = \mathbf{K} \cup \{(D)\}$
- $\mathbf{E2^0} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (N^*)\}$

Lemmon mostran a completude algébrica para esses sistemas e seus respectivos modelos relacionais.[43] No mesmo ano, Lemmon e Scott construíram um

[39] Embora usemos o termo "revolução" do mesmo modo que em [BRV01] p.41, preferimos a data de 1963 em vez de 1959. Como assinalado em [Bal10], o artigo de Kripke de 1959 [Kri59] mostra somente uma nova completude para **S5**, resultado que já havia sido demonstrado em 1946 por Carnap em [Car46]. Kripke apenas indica a possibilidade de uma semântica mais genérica para lógica modal sem contudo oferecê-la. Tal semântica será apresentada apenas em 1963 em [Kri63].

[40] De acordo com [Bal10].

[41] De acordo com [CH96] p. 70, o nome se deve provavelmente ao fato de termos na lógica intuicionista $p \to \neg\neg p$ como teorema se interpretarmos a negação intuicionista como $\neg\Diamond$ e $\prec$ como implicação intuicionista.

[42] Em [Lem66]. O nome original de $\mathbf{E2^0}$ é **C2**. Seguimos a nomenclatura de [CH96] p. 363.

[43] Os nomes originais desses sistemas são **T(C)** e **T(D)**. Usamos a denominação de Segerberg em [Seg71], onde **T(D)** passa a ser chamado simplesmente de **D** (de *deontic*) enquanto **T(C)** é chamado de **K**, em homenagem a Kripke.

grande número de sistemas modais intermediários entre **K** e **S5**. Propuseram, por exemplo, o axioma:

(E) $\Diamond\Box p \to \Box p$

E definiram os seguintes sistemas intermediários:

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \cup \{(4)\}$
- $\mathbf{KD4} = \mathbf{K4} \cup \{(D)\}$
- $\mathbf{KDB} = \mathbf{D} \cup \{(B)\}$
- $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \cup \{(B)\}$
- $\mathbf{KE} = \mathbf{K} \cup \{(E)\}$
- $\mathbf{KBE} = \mathbf{KB} \cup \{(E)\}$

Apresentando os seus respectivos modelos relacionais.[44] Nota-se, portanto, como os trabalhos de Lemmon em particular e de lógica modal em geral tomaram um rumo diferente depois da semântica relacional de Kripke. Em vez de refletir sobre axiomas e buscar uma semântica para certa axiomática, o movimento predominante foi o contrário: buscar axiomas que caracterizam certas propriedades dos modelos relacionais.[45]

Esse movimento encontrou seus limites no axioma:

(Mk) $\Box(\Box\Box p \to \Box\Box\Box p) \to (\Box p \to \Box\Box p)$

Proposto em 1969 por Makinson, **Mk** é um sistema que está entre **T** e **S4** e é definido como:

- $\mathbf{Mk} = \mathbf{T} \cup \{(Mk)\}$

[44] Os sistemas acima foram citados por [Seg71] p. 48 como sendo de autoria de Lemmon e Scott, citado como "rascunhos preliminares do primeiro capítulo" (*preliminary draft of initials chapters*), que seria publicado como trabalho póstumo de Lemmon onze anos mais tarde sob o título de *The Lemmon Notes: An Introduction to Modal Logic*, em co-autoria com Scott e editador por Segerberg. Ver [LS77].

[45] Esse é o caso, por exemplo, do axioma (E), cujo nome se deve a propriedade euclidiana de seus modelos: se um mundo ω_1 está relacionado com um mundo ω_2 e também relacionado com um mundo ω_3, então ω_2 e ω_3 estão relacionados entre si. Conferir [Seg71] p. 48 e [CH96] p. 70.

Mas em 1974 foram apresentados independentemente por Thomanson e Fine dois resultados de incompletudes por modelos de Kripke, esbarrando nos limites da semântica relacional. O sistema de Thomanson está também entre **T** e **S4**, enquanto o de Fine é uma extensão de **S4**.[46]

Devemos mencionar ainda uma lista de sistemas propostos por Segerberg que não são extensões do sistema **D**, e sim de **K4**. Para tanto, leva-se em conta os axiomas:

(Lem$_0$) $\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$

(G$_0$) $\Diamond(p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$

(Z) $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow (\Diamond\Box p \rightarrow p)$

E define-se os sistemas:[47]

- $\mathbf{K4.2} = \mathbf{K4} \cup \{(Lem_0)\}$
- $\mathbf{K4.3} = \mathbf{K4} \cup \{(G_0)\}$
- $\mathbf{K4Z} = \mathbf{K4} \cup (Z)$
- $\mathbf{K4.2Z} = \mathbf{K4.2} \cup \{(Z)\}$
- $\mathbf{K4.3Z} = \mathbf{K4.3} \cup \{(Z)\}$
- $\mathbf{K4.2W} = \mathbf{K4.2} \cup \{(W)\}$
- $\mathbf{K4.3W} = \mathbf{K4.3} \cup \{(W)\}$

Há sistemas, por outro lado, que não são extensões de **K4** ou tampouco **D**. É o caso daqueles propostos por Hughes e Creswell em 1975 por meio dos axiomas:

(B$^+$) $\Box p \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Box(\Box p \vee \Diamond p))$

(Seg$_n$) $(\Diamond\Diamond p_1 \wedge \ldots \Diamond\Diamond p_n) \rightarrow \Diamond(\Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_n)$ (para $n \geq 1$)

[46] Os resultados de incompetudos foram demonstrados em [Fin74] e [Tho74]. Já o nome original do sistema de Mkinsey conforme apresentado em [Mak69] é **C**. Usamos o nome dado por Hughes e Creswell em homenagem a Makinson para um sistema semelhante em que (Mk) é substituído pelo axioma:

$$\Box(\Box\Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$$

Esse sistema, por sua vez, é completo com respeito à semântica relacional. Conferir [CH96] p.158.

[47] Os sistemas **K4.2** e **K4.3** são definidos em [Seg71] p.50 enquanto os demais podem ser encontrados em *Idem*, *Ibidem* p. 84-96.

As axiomáticas resultantes são extensões do sistema **B**:[48]

- $\mathbf{B^+} = \mathbf{B} \cup \{(B^+)\}$
- $\mathbf{Bseg_n} = \mathbf{B} \cup \{(Seg_n)\}$

Hughes e Creswell ressaltam que $\mathbf{Bseg_n} \subseteq \mathbf{Bseg_{n+1}}$. Todas as relações de inclusão mencionadas aqui serão relevantes para compreender o alcance do Teorema de Incompletude da próxima subseção.

Enfatizamos os limites da semântica de Kripke ao mencionarmos os sistemas de Fine e Thomanson. Esse, entretanto, não foi o único caso de incompletude na história da lógica modal. Em 1979, van Benthem chamou atenção para o sistema construído a partir do axioma:[49]

(VB) $\Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \to q) \to q)$

A incompletude surge quando é demonstrado que qualquer semântica relacional para o sistema **VB** valida a fórmula abaixo

(MV) $\Diamond\Box p \vee \Box p$

Mas **(MV)** não é teorema de **VB**. Temos, assim, duas axiomáticas:

- $\mathbf{MV} = \mathbf{K} \cup \{(MV)\}$
- $\mathbf{VB} = \mathbf{K} \cup \{(VB)\}$

O sistema **MV** é completo via semântica de Kripke mas não há semântica kripkiana completa para **VB**. Veremos que também não haverá semântica matricial para ambos sistemas. Para isso, será importante levar em conta que $\mathbf{VB} \subseteq \mathbf{MV}$.

Outro exemplo de incompletude se deve ao axioma abaixo:

[48] O sistema $\mathbf{B^+}$ foi descrito em [Hug75] enquanto a hierarquia $\mathbf{Bseg}_n$ foi construida em [HC75].

[49] O artigo em questão é [Ben78]. Van Benthem demonstra primeiramente a incompletude do sistema $\mathbf{L}_1$, obtido estendendo **K** por meio dos axiomas:

$\Box p \to p$

$\Box(\Box p \to \Box q) \vee \Box(\Box q \to \Box p)$

$(\Diamond p \wedge \Box(p \to \Box p)) \to p$

$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

O autor chama atenção ao fato de que $\mathbf{L}_1$ é mais simples que os sistemas incompletos de Fine e Thomanson. Outro exemplo é $\mathbf{L}_2$, que também estende **K**:

$\Box p \to p$

$\Box(\Box(p \to \Box p) \to \Box\Box\Box p) \to p$

De acordo com [CH84] p. 67, a axiomática abaixo é equivalente a do artigo de Benthem.

(H) $\Box(p \leftrightarrow \Box p) \rightarrow \Box p$

O sistema **KH** é obtido acrescentando a **K** o axioma (H).[50] Visto que em **KH** o axioma (4) não é teorema, temos **KH** $\subseteq$ **KW**. Por outro lado, qualquer semântica relacional completa para **KH** também seria para **KW**, provando a incompletude do primeiro.[51]

Finalmente, não devemos deixar de lado alguns sistemas propostos por Hughes e Cresswell em *A New Introduction to Modal Logic*, catálogo que tem guiado a breve história da lógica modal (mais especificamente, dos operadores $\Box$ e $\Diamond$) esboçada nessa subseção. Na obra em questão, proôe-se os sistemas:

- $\mathbf{E3^0} = \mathbf{E2^0} \cup \{(K')\}$
- $\mathbf{E6^0} = \mathbf{E2^0} \cup \{\Diamond\Diamond p\}$
- $\mathbf{E6} = \mathbf{E6^0} \cup \{(T)\}$
- $\mathbf{E7^0} = \mathbf{E3^0} \cup \{\Diamond\Diamond p\}$
- $\mathbf{E7} = \mathbf{E7^0} \cup \{(T)\}$
- $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E2^0} \cup \{\Diamond p\}$
- $\mathbf{S0.5^0} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (N')\}$
- $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} \cup \{\Box p\}$
- $\mathbf{T_c} = \mathbf{K} \cup \{p \rightarrow \Box p\}$
- $\mathbf{Triv} = \mathbf{D} \cup \{\Box p \leftrightarrow p\}$

Seguindo a mesma obra, denominamos sistemas modais *normais* aqueles que são extensão de **K**, enquanto os demais serão denominados *não-normais*. Por meio da lista de sistemas apresentados nessa subseção, é possível construir os seguintes gráficos de inclusão:[52]

[50] Primeiramente proposto por [BG85], o sistema acima foi denominado **HL**. Seguimos mais uma vez a nomenclatura de [CH96].
[51] Demonstrado em [BG85].
[52] Os gráficos podem ser encontrados em [CH96] p. 367 e 368.

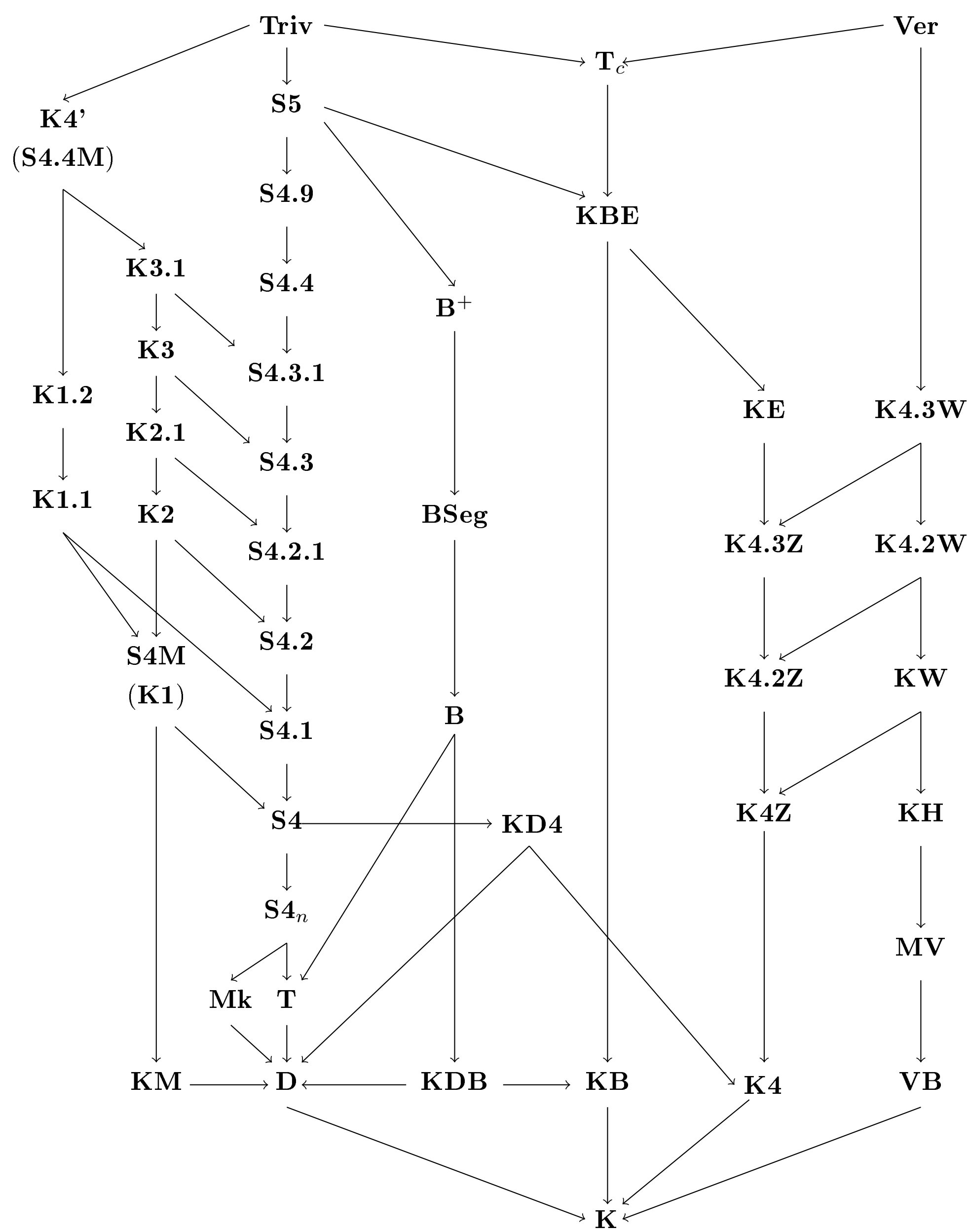

Fig. 2.1: Sistemas modais normais

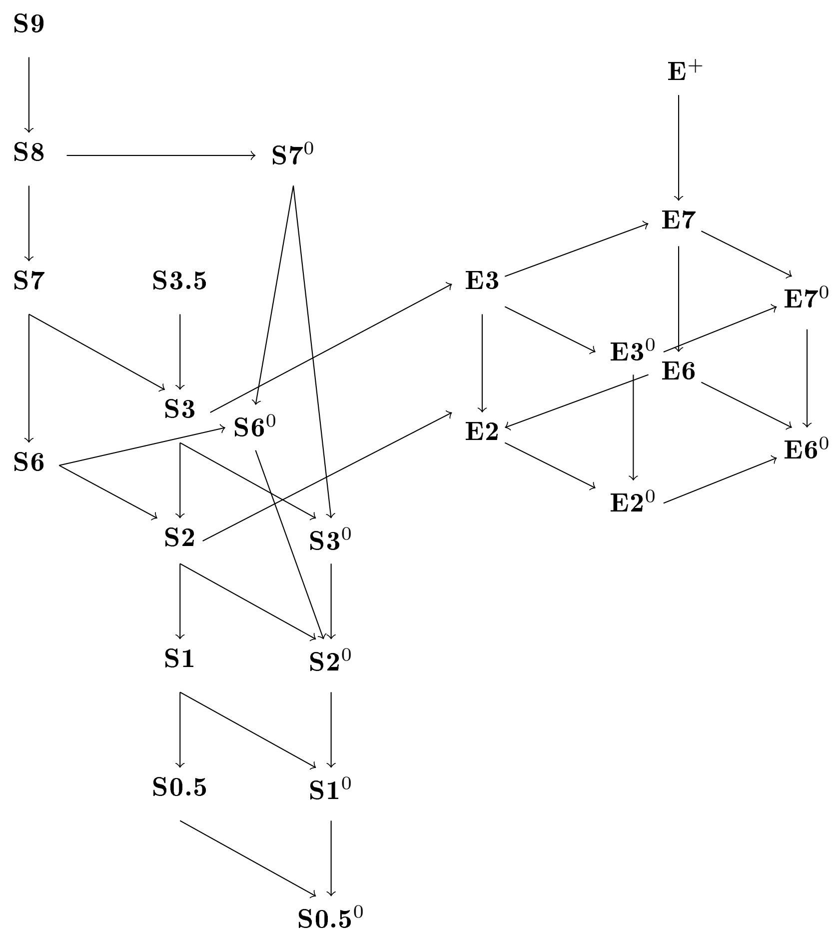

Fig. 2.2: Sistemas modais não-normais

Na subseção seguinte mostramos dois novos gráficos de inclusão para delimitar quais dos sistemas acima não podem ser caracterizados por matrizes finitas.

2.2.3 Generalizando o Teorema de Dugundji

Temos insistido ao longo da Tese que apresentaremos uma generalização do Teorema de Incompletude de Dugundji. Essa afirmação é, entretanto, imprecisa. O que provaremos aqui é que nenhum sistema entre $\mathbf{S0.5}^0$ e $\mathbf{S5}$, entre $\mathbf{E2}^0$ e $\mathbf{S5}$ ou entre $\mathbf{K}$ e $\mathbf{KW}$ pode ser caracterizado por matrizes finitas. Isso significa que teremos, portanto, três generalizações. Para que o leitor possa visualizar a relação de inclusão entre sistemas normais e não-normais, apresentamos a figura abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{S2}^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S3} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S3.5} \arrow[d] \\
\mathbf{K} \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] & \mathbf{S4} \arrow[r] & \mathbf{S5}
\end{tikzcd}
$$

Fig. 2.3: Relação entre sistemas modais normais e não-normais

Nossa generalização não se limita também ao que tem sido chamado de Lógica Modal Clássica.[53] Veremos que o resultado se aplica também às lógicas modais construídas a partir de lógicas proposicionais não-clássicas.

Aqui cabe uma ressalva: usando a Definição 1.2.1 para delimitar quando uma lógica $\mathbf{L}_2$ é uma extensão conservativa de uma lógica $\mathbf{L}_1$, podemos inferir - com base nos resultados do Capítulo 1 - que alguns sistemas modais de base proposicional não-clássica não podem ser caracterizados por matrizes finitas.[54]

Suponhamos agora que temos uma lógica modal $\mathbf{L}_2$ que é uma extensão conservativa de uma lógica proposicional $\mathbf{L}_1$ que, por sua vez, não é caracterizável por matrizes finitas. Mostraremos por absurdo que $\mathbf{L}_2$ não é caracterizável por matrizes finitas.

Teorema 2.2.4: Seja $\mathbf{L}_2$ uma extensão conservativa de $\mathbf{L}_1$. Se $\mathbf{L}_1$ não pode ser caracterizada por matrizes finitas, $\mathbf{L}_2$ também não pode.

Demonstração: Suponha que $\mathbf{L}_2$ seja uma extensão conservatida de $\mathbf{L}_1$. Suponha ainda que $\mathbf{L}_1$ não seja caracterizado por matrizes finitas, mas existe um conjunto de matrizes finitas $\mathcal{M}_n$ que caracteriza $\mathbf{L}_2$. Considerando o item *1)* da Definição 1.2.1, tomemos uma fórmula α de $\mathbf{L}_1$ que é também uma fórmula de $\mathbf{L}_2$. Pelo item *3)* da mesma definição temos que se $\vdash_{\mathbf{L}_2} \alpha$, então $\vdash_{\mathbf{L}_1} \alpha$. Por hipótese temos $\mathcal{M}_n \vDash_{\mathbf{L}_2} \alpha$ sse $\vdash_{\mathbf{L}_2} \alpha$ e teríamos $\mathcal{M}_n \vDash_{\mathbf{L}_1} \alpha$ e existiria um conjunto de matrizes finitas que caracterizaria $\mathbf{L}_1$, absurdo. ■

[53] O sentido que adotamos de Lógica Modal Clássica não é o de Segerberg em [Seg71] p. 6. De acordo com o autor, uma Lógica Modal é clássica quando preserva (MP) e a regra denominada *Replacement* (Reposição): a partir de $p \leftrightarrow q$ infere-se $\Box p \leftrightarrow \Box q$. Aqui, diremos que uma Lógica Modal é classica quando é uma extensão conservativa de **PC**, ou seja, estende a linguagem de **PC** com o operador $\Box$ e ainda todas as regras e teoremas de **PC** são preservados. É nesse sentido, *grosso modo*, que poderemos falar em lógica modal intuicionista ou paraconsistente, como usador por [Sim94] e [BS09], respectivamente.

[54] Essa observação se deve ao prof. W. A. Carnielli, em comunicação pessoal.

Como exemplo, vamos mostrar uma aplicação direta do Teorema 2.2.4. O primeiro sistema modal intuicionista foi proposto por Fitch em 1948.[55] Fitch leva em conta os seguintes axiomas modais:[56]

(K1) $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$

($T_\Diamond$) $p \to \Diamond p$

($N_\Diamond$) $\neg\Diamond\bot$

A versão intuicionista de **KT** é axiomatizada abaixo:

- $\mathbf{IT} = \mathbf{IPC} \cup \{(K), (T), (K1), (T_\Diamond), (N_\Diamond), (Nec)\}$

Observe que pela Definição 1.2.1, **IT** é uma extensão conservativa de **IPC**.[57] Pelo Teorema 1.2.12, sabemos que **IPC** é incompleto por matrizes finitas. Logo, pelo Teorema 1.2.1, **IT** também é incompleto por matrizes finitas.

Outro exemplo é a lógica deôntica paraconsistente $\mathbf{C_1}^D$.[58] Acrescentemos a $\mathbf{C}_1$ o operador deôntico $\bigcirc$ em que $\bigcirc p$ é interpretado como "p é obrigatório". Definamos ainda uma negação clássica do seguinte modo:

$$\sim p \equiv_{def} \neg p \wedge \circ p$$

O operador deôntico é regido pelos axiomas:[59]

($\bigcirc_1$) $\bigcirc(p \to q) \to (\bigcirc p \to \bigcirc q)$

($\bigcirc_2$) $\bigcirc p \to \sim\bigcirc\sim p$

($\bigcirc_3$) $\circ p \to \circ\bigcirc p$

($\mathrm{N}^{\bigcirc}$) $\vdash p$ implica $\vdash \bigcirc p$

O sistema $\mathbf{C_1}^D$ é definido da maneira esperada:

- $\mathbf{C_1}^D = \mathbf{C_1} \cup \{(\bigcirc_1), (\bigcirc_2), (\bigcirc_3), (N^{\bigcirc})\}$

[55] De acordo com [Sim94]. O artigo de Fitch em questão é [Fit48], em que o autor propõe um sistema modal intuicionista de primeira ordem. Tendo em vista que o escopo da Tese é a lógica modal proposicional, restringimos o sistema de Fitch ao seu fragmento modal proposicional.

[56] Seguimos a nomenclatura do axioma $(K1)$ encontrado em [BS09] p. 55, do axioma $(T_\Diamond)$ em [Che80] p. 16 e do axioma $(N_\Diamond)$ em [Che80] p. 71.

[57] O nome original do sistema modal intuicionista de primeira ordem de Fitch é **M**. Seguimos a nomenclatura de [Sim94] p. 57 denominando **IT** o framento proposicional de **M**.

[58] Introduzida por da Costa e Carnielli em [dCC86].

[59] Os nomes originais dos axiomas foram mantidos, excetuando-se a regra de introdução de $\bigcirc$. Vide nota 26.

Ora, pelo Teorema 1.2.17 sabemos que $\mathbf{C}_1$ não pode ser caracterizado por matrizes finitas. Pela Definição 1.2.1, $\mathbf{C}_1^D$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{C}_1$. Finalmente, o Teorema 2.2.4 garante que $\mathbf{C}_1^D$ não pode ser caracterizado por matrizes finitas.

Finalmente, **DmbC** é a extensão deôntica de **mbC**. Define-se **DmbC** de modo análogo a $\mathbf{C}_1^D$:[60]

- $\mathbf{DmbC} = \mathbf{mbC} \cup \{\bigcirc_1, \bigcirc_2, (N^{\bigcirc})\}$

Pelo Teorema 1.2.24, a lógica **mbC** não é caracterizável por matrizes finitas e sendo **Dmbc** sua extensão conservativa, pelo Teorema 2.2.4 concluímos que **DmbC** não tem tabelas finitas como semântica completa.

Eis, portanto, três exemplo de lógicas modais não-clássicas. Muitos outros podem ser encontrados na literatura.[61] À primeira vista, o Teorema 2.2.4 parece garantir que nenhum desses sistemas são caracterizáveis por matrizes finitas. Se esse fosse realmente o caso, "aprofundar" o Teorema de Dugundji soaria totalmente inócuo.

Devemos, entretanto, ter cautela. Retomemos os cálculos **PCI** e $\mathbf{PC}^+$ da Subseção 1.3.3. Podemos obter suas extensões **K** monomodais do seguinte modo:[62]

- $\mathbf{K}^{\supset} = \mathbf{PCI} \cup \{(K), (Nec)\}$
- $\mathbf{K}^{\supset,\wedge} = \mathbf{PC}^+ \cup \{(K), (Nec)\}$

Na Subseção 1.3.3, vimos que **PCI** e $\mathbf{PC}^+$ podem ser caracterizados por matrizes de 2 valores de verdade. Pela Figura 2.1 e pela Figura 2.2 podemos

[60] A lógica **Dmbc** foi proposta primeiramente em [Con07], com uma axiomática levemente diferente. O axioma $\bigcirc_3$ é substuído por:

$$(O - E)^{\circ} \bigcirc \perp_\alpha \to \perp_\alpha \text{ em que } \perp_\alpha \equiv_{def} (\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \circ\alpha$$

Pela definição de $\sim$ não é difícil verificar que as duas axiomáticas são equivalentes.

[61] Sobre lógica modal paraconsistente, cabe citar: [PdCC88], [CL03] e [CP09]. Uma vasta bibliografia sobre lógica modal intuicionista pode ser encontrada em [Sim94] p. 41-57. A existência de lógicas modais não-clássica no sentido aqui limitado coloca problemas na classicação de Susan Haack em [Haa98] p. 28-29. A autora classifica as lógicas formais em: clássica, ampliadas, alternativas e indutivas. Por um lado, lógicas modais são classificadas de acordo com a autora no grupo das lógicas ampliadas, pois estendem a linguagem da lógica proposicional clássica. Por outro lado, a lógica intuicionista e lógicas paraconsistentes são lógicas alternativas, pois apesar de terem a mesma linguagem, restringem axiomas e regras da lógicas clássica. Lógicas modais não-clássicas não podem ser classicadas nem como alternativas e tampouco como ampliadas. Não são também lógicas indutivas, pois essas enfraquecem a noção de consequência lógica. Por razões evidentes, lógicas modais não-clássicas tampouco podem ser consideradas clássicas, ficando portanto sem classificação.

[62] Originalmente a axiomática de $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ são obtidas por meio de $\mathbf{PC}\wedge,\supset$. Vide Nota 30.

verificar que **K** não pertence à hierarquia de Lewis, visto que $\mathbf{K} \not\subseteq \mathbf{S3}$ e $\mathbf{S3} \not\subseteq \mathbf{K}$. Nesse caso, faz todo sentido buscarmos generalizar o Teorema de Dugundji para lógicas modais não-clássicas.

Observe, entretanto, que o operador $\Diamond$ não pode ser definido tanto em $\mathbf{K}^{\supset}$ quanto em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$. Isso porque a linguagem do primeiro é gerada pelos operadores $\Box$ e $\rightarrow$, enquanto a do segundo é gerada pelos mesmos conectivos acrescentando-se $\wedge$. Como não temos o operador de negação $\neg$, não podemos definir $\Diamond$ em termos de $\Box$ e $\neg$.

Para que $\Diamond$ e $\Box$ se comportem de modo independente, é preciso considerar dois axiomas para reger a interação desses operadores. São eles:[63]

(K2) $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

(K3) $(\Diamond p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$

A extensão bimodal de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ é definida abaixo:

- $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond} = \mathbf{K}^{\supset,\wedge} \cup \{(K1), (K2), (K3)\}$

Como, então, podemos generalizar o resultado de incompletude de modo a abarcar sistemas modais não-clássicos tão distintos? Nossa estratégia consiste primeiramente em escolher sistemas modais minimais. Por exemplo, a Figura 2.1 garante que **K** é um desses sistemas minimais. Mas não podemos desprezar sistemas modais não-normais. Nesse caso, a Figura 2.2 mostra que $\mathbf{S0.5}^0$ e $\mathbf{E2}^0$ são dois casos minimais dessa classe de sistemas modais.

Do ponto de vista proposicional, escolhemos o cálculo implicativo intuicionista **ICI** como sistema mínimo proposicional. Vimos no Capítulo 1 que esse sistema serve de base para a construção de lógicas positivas, da lógica intuicinista (e seus fragmentos), de lógicas paraconsistentes, paracompletas e da hierarquia $\mathbf{G_3}, \ldots, \mathbf{G_n}$ de Gödel. Vimos também no Capítulo 1 quais desses sistemas podem ser caracterizados por matrizes finitas.

Há, todavia, uma dificuldade técnica quanto à linguagem dessas lógicas. Sabemos que para sistemas modais não-clássicos, acrescenta-se em geral axiomas distintos para tratar $\Box$ e $\Diamond$ de modo independente.

A técnica usada foi modificar não os casos mínimos, mas os máximos. Tomemos uma lógica proposicional sem a partícula $\perp$ que estende **IPI** denominada

[63] Esses axiomas podem ser encontrados em [BS09] p. 55 e [Sim94] p. 52. No último caso, também é acrescentado $(N_\Diamond)$, visto que $\perp$ pode ser definido em **IPC**. Esse não é porém o caso em **PCI** e $\mathbf{PC}^{+}$.

$\mathbf{L}^{\supset}$. A versão de **S5** para essa lógica será denominada $\mathbf{S5L}^{\supset}$. No caso de existir uma partícula $\perp$ na linguagem de $\mathbf{L}^{\supset}$, o caso máximo será $\mathbf{S5L}^{\supset,\perp}$. Assim, para cada $\mathbf{L}^{\supset}$ e $\mathbf{L}^{\supset,\perp}$ define-se:

- $\mathbf{S5L}^{\supset} = \mathbf{L}^{\supset} \cup \{(K), (T), (K1), (K2), (K3).(4), (5)\}$
- $\mathbf{S5L}^{\supset,\perp} = \mathbf{L}^{\supset,\perp} \cup \{(K), (T), (K1), (K2), (K3), (N_{\Diamond}), (4), (5)\}$

Visto que $(K1)$,$(K2)$,$(K3)$ e $(N_{\Diamond})$ são teoremas de **S5**, teremos então como caso limite que $\mathbf{S5PC} \equiv \mathbf{S5}$.

Por fim, temos sistemas proposicionais em que não é possível definir uma disjunção clássica, como em **ICI** e **ICA**. Nesse caso, uma saída é definir o operador $\uplus$ como feito na Subseção 1.2.1 e considerar o axioma:

(K2') $\Diamond(p \uplus q) \to (\Diamond p \uplus \Diamond q)$

Os cálculos **S5ICI** e **S5ICA** serão obtidos de maneira análoga a $\mathbf{S5L}^{\supset}$, substituindo $(K2)$ por $(K2')$.

Outra situação limite de nossa generalização é **KW**. Não conseguimos para os sistemas entre **K** e **KW** uma prova de incompletude sem o operador de conjunção. Por outro lado, não é necessário uma disjunção clássica com as propriedades do Teorema 1.3.1, basta que se defina a disjunção $\uplus$ com as condições do Teorema 1.3.2.

Teremos, portanto, **ICK** e $\mathbf{PC}^{+}$ como casos proposicionais minimais. Seja $\mathbf{L}^{+}$ uma lógica que estende $\mathbf{PC}^{+}$. Seja ainda $\mathbf{L}^{\uplus}$ uma lógica que estende **ICK** e em que não é possível definir uma disjunção clássica.

- $\mathbf{KWL}^{+} = \mathbf{L}^{+} \cup \{(K), (K1), (K2), (K3), (W), (4)\}$
- $\mathbf{KWL}^{\uplus} = \mathbf{L}^{\uplus} \cup \{(K), (T), (K1), (K2'), (K3), (4), (5)\}$

E se em $\mathbf{KWL}^{+}$ é possível definir uma partícula $\perp$, basta acrescentar o axioma $(N_{\Diamond})$. É digno de nota que, como no caso anterior, temos $\mathbf{KWPC} \equiv \mathbf{KW}$.

Modalmente, nossos casos minimais serão **K**, $\mathbf{E2}^{0}$ e $\mathbf{S0.5}^{0}$. Tomaremos os sistemas:

- $\mathbf{KICK} = \mathbf{ICK} \cup \{(K), (K1), (K2), (K3), (Nec)\}$
- $\mathbf{E2^0ICI} = \mathbf{ICI} \cup \{(K), (K1), (K2), (K3), (N^*)\}$
- $\mathbf{S0.5^0ICI} = \mathbf{ICI} \cup \{(K), (K1), (K2), (K3), (N')\}$

Queremos chamar atenção para o fato de que quando *(N')* vale numa lógica modal $\mathbf{L_2}$ construída a partir de uma proposicional $\mathbf{L_1}$ diferente de **PC**, devemos comprender a regra como:

(N') $\vdash_{\mathbf{L_1}} p$ implica $\vdash_{\mathbf{L_2}} \Box p$

E não aplicada às tautologias de **PC**.[64]

Finalmente, feita as devidas ressalvas, provaremos que qualquer lógica modal entre $\mathbf{S0.5}^0$ and **S5** ou entre $\mathbf{E2}^0$ and **S5** cujo fragmento proposicional esteja entre **ICI** e **PC** não pode ser caracterizado por matrizes finitas. Para isso, devemos definir duas novas fórmulas de Dugundji: D'_n e D^*_n.

Definição 2.2.5: Para cada número natural n, a formula de Dugundji adaptada D'_n é definida do seguinte modo:

$$D'_n \equiv_{def} \biguplus_{i \neq j} (p_i \curlyvee p_j)$$

em que $1 \leq i, j \leq n+1$ e $p_i \curlyvee p_j$ abrevia $\Box(p_i \to p_j) \uplus \Box(p_j \to p_i)$. $\Box$

Definição 2.2.6: Para cada número natural n, a formula de Dugundji adaptada D^*_n é definida do seguinte modo:

$$D'_n \equiv_{def} \biguplus_{i \neq j} (p_i \twoheadrightarrow p_j)$$

em que $1 \leq i, j \leq n+1$ e $p_i \twoheadrightarrow p_j$ abrevia $\Box(p_i \to p_i) \to \Box(p_j \to p_i)$. $\Box$

Mostraremos, primeiramente, que se um conjunto de matrizes finitas caracteriza algum sistema que é uma extensão de $\mathbf{S0.5^0ICI}$ ou $\mathbf{E2^0ICI}$, então valida D'_n ou D^*_n, respectivamente.

Proposição 2.2.7: Qualquer matriz $\mathcal{M}$ com n valores de verdade que caracteriza uma extensão de $\mathbf{S0.5^0ICI}$ valida D'_n.

Demontração: Suponha que exista $\mathcal{M}$ com n valores de verdade que caracteriza uma extensão de $\mathbf{S0.5^0ICI}$, e seja v uma valoração em $\mathcal{M}$. Visto que

[64] Como argumentado em [CP13], no sistema $\mathbf{S0.5}^0$ é mais apropriado interpretar $\Box$ como "demonstrável" usando a regra *(N')* aplicadas às tautologias de **PC**. Por outro lado, essa interpretação da regra é mais forte que a acima, o que diminuiria a amplitude do nosso resultado de incompletude.

em D'_n temos n valores para $n+1$ variáveis, existe $i \neq j$ de modo que o valor atribuído por v a p_i e p_j coincide. Assim, o valor atribuído por v a $(p_i \to p_i)$ e $(p_i \to p_j)$ também coincide. Mas sabemos que $\vdash_{\mathbf{ICI}} p \to p$ e por (N') temos que $\Box(p_i \to p_i)$ é um teorema de $\mathbf{S0.5^0ICI}$ e pelo Teorema 1.3.2 (ii) e (MP), $(p_i \curlyvee p_i)$ é também um teorema de $\mathbf{S0.5^0ICI}$. Assim, o valor atribuído por v a $(p_i \curlyvee p_i)$ (e também $(p_i \curlyvee p_j)$) é distinguido. Logo, pelo Teorema 1.3.2 (ii)e (iii), o valor atribuído por v a $(p_i \curlyvee p_j) \uplus \alpha$ e $\alpha \uplus (p_i \curlyvee p_j)$ são distinguidos para cada α, e então o valor atribuído por v à fórmula D'_n é distinguido. Portanto, a matriz $\mathcal{M}$ valida a fórmula D'_n. ■

Proposição 2.2.8: Qualquer matriz $\mathcal{M}$ com n valores de verdade que caracteriza uma extensão de $\mathbf{E2^0ICI}$ valida D^*_n.

Demontração:

Análoga à demonstração da Proposição 2.2.7, com a única diferença de que $\vdash_{\mathbf{ICI}} (p \to p) \to (p \to p)$ e por (N^*) temos que $(p_i \twoheadrightarrow p_i)$ é um teorema de $\mathbf{E2^0ICI}$. O resto permance o mesmo. ■

O segundo passo é mostrar que a matrix infinita $\mathcal{M}_\infty$ da Proposição 2.2.2 é um modelo para **S5PC**.

Proposição 2.2.9: A matrix infinita $\mathcal{M}_\infty$ é um modelo para **S5PC**.

Demontração: Para os axiomas de **S5**, a prova é análoga à Proposição 2.2.2. Os únicos casos que devemos verificar são os novos axiomas acrescentados a **S5**.

(K1) $v(\Box(\alpha \to \beta) \to (\Diamond\alpha \to \Diamond\beta) = \overline{\triangle(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))} \cup \overline{\triangledown v(\alpha)} \cup \triangledown v(\beta)$

- se $\triangledown v(\alpha) = \emptyset$, então $\overline{\triangledown v(\alpha)} = \mathbb{N}$ e $v(\mathrm{K1}) = \mathbb{N}$
- se $\triangledown v(\alpha) \neq \emptyset$, então $\triangledown v(\alpha) = \mathbb{N}$
  - se $\triangledown v(\beta) = \mathbb{N}$, então $v(\mathrm{K1}) = \mathbb{N}$.
  - se $\triangledown v(\beta) \neq \mathbb{N}$, então $v(\beta) = \emptyset$ e daí $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta) = \overline{v(\alpha)}$.
    logo, $\overline{\triangle(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))} = \overline{\triangle\overline{v(\alpha)}} = \triangledown v(\alpha) = \mathbb{N}$ e $v(\mathrm{K1}) = \mathbb{N}$.

(K2) $v(\Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)) = \overline{\triangledown(v(\alpha) \cup v(\beta))} \cup \triangledown v(\alpha) \cup \triangledown v(\beta)$

- se $\triangledown v(\alpha) = \mathbb{N}$, então $v(\mathrm{K2}) = \mathbb{N}$
- se $\triangledown v(\alpha) \neq \mathbb{N}$, então
  - se $\triangledown v(\beta) = \mathbb{N}$, então $v(\mathrm{K2}) = \mathbb{N}$.

  * se $\nabla v(\beta) \neq \mathbb{N}$, então $v(\alpha) = v(\beta) = \emptyset$. Logo, $\nabla((v(\alpha) \cup v(\beta)) = \emptyset$ e $\overline{\nabla((v(\alpha) \cup v(\beta))} = \mathbb{N} = v(\mathrm{K2})$.

(K3) $v((\Diamond\alpha \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \to \beta)) = \overline{\overline{\nabla v(\alpha)} \cup \Delta v(\beta)} \cup \Delta(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))$

- se $v(\alpha) = \emptyset$, então $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta) = \mathbb{N}$ e $\Delta(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \mathbb{N}$
- se $v(\alpha) \neq \emptyset$, então
  * se $v(\beta) \neq \mathbb{N}$, então $\overline{\nabla v(\alpha)} \cup \Delta v(\beta) = \emptyset$ e $\overline{\overline{\nabla v(\alpha)} \cup \Delta v(\beta)} = \mathbb{N}$
  * se $v(\beta) = \mathbb{N}$, então $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta) = \mathbb{N}$ e $\Delta(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \mathbb{N}$.

($\mathrm{N}_\Diamond$) $v(\neg\Diamond\bot) = \overline{\nabla v(\bot)}$

- visto que $v(\bot) \neq \mathbb{N}$, então $\nabla v(\bot) = \emptyset$ e $\overline{\nabla v(\bot)} = \mathbb{N}$. ■

Podemos finalmente demonstrar nossas duas generalizações.

Teorema 2.2.10: Nenhuma lógica modal **L** entre $\mathbf{S0.5}^0$ e **S5** cujo fragmento proposicional esteja entre **ICI** e **PC** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Idêntica ao Teorema 2.2.3, substituindo a Proposição 2.2.1 e Proposição 2.2.2 pela Proposição 2.2.7 e Proposição 2.2.9. ■

Teorema 2.2.11: Nenhuma lógica modal **L** entre $\mathbf{E2}^0$ e **S5** cujo fragmento proposicional esteja entre **ICI** e **PC** pode ser caracterizado por matrizes finitas.

Demonstração: Considere a fórmula adaptada de Dugundji D_n^* da Definição 2.2.6 e suponha que $\mathcal{M}$ é uma matriz de n valores de verdade que caracteriza **L**. Observe que pela Proposição 2.2.8 $\mathcal{M}$ valida D_n^*.

Considere agora a matriz $\mathcal{M}_\infty$ da Proposiçãon 2.2.9 e a valoração v da Proposição 2.2.3. Desse modo, temos:

$$v(p \asymp q) = \overline{\Delta(\overline{P} \cup P)} \cup \Delta(\overline{Q} \cup P) = \overline{\Delta\mathbb{N}} \cup \Delta(\overline{Q}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

O resto da prova é idêntica ao Teorema 2.2.3. ■

Para visualizarmos melhor nossas duas primeiras generalizações do Teorema de Dugundji, divideremos nossa análise em dois grandes grupos (como fizemos na Subseção 2.2.2): os sistemas normais e não-normais.

Tratemos, primeiramente, dos sistemas não-normais. Além dos sistemas dispostos na Figura 2.2, outros sistemas foram levado em conta, tais como as hierarquias de Lemmon **D2**-**D5**, **E2**-**E5** e o sistema **S0.9**.[65]

[65] Como já citado na Nota 22, esses sistemas foram apresentados em [Lem57].

- $\mathbf{D2} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (D), (N^*)\}$
- $\mathbf{E4} = \mathbf{E2} \cup (4)$
- $\mathbf{E5} = \mathbf{E2} \cup (4)$

Para os sistemas **D3**, **D4** e **D5** é necessário, entretanto, certa cautela. Lemmon deseja que na hieraquia dos **D**-sistemas valha a mesma relação de inclusão dos **E**-sistemas. Sabemos, entretanto, que o sistema **E3** é uma extensão de **E2** porque em ambos os sistemas temos o axioma (T). Por meio de (K'), (T) e Silogismo Hipotético, obtemos em **E3** o axioma (K) como teorema. Para garantir a mesma derivação em **D3**, Lemmon formula a regra abaixo:[66]

(N^D) se α é totalmente modalizada, então $\vdash \Box\alpha \to \alpha$

O autor diz que uma fórmula é totalmente modalizada quando todas as variáveis proposicionais de α estão dentro do escopo de um operador modal. Por exemplo, $\Box p \to q$ não é uma fórmula totalmente modalizada, enquanto $\Box p \to \Diamond q$ tem todas as variáveis proposicionais dentro do escopo de $\Box$ e $\Diamond$ e é, por isso, totalmente modalizada. A regra acima nos permite então inferir:

$$\vdash \Box(\Box p \to \Diamond q) \to (\Box p \to \Diamond q) \text{ mas não } \vdash \Box(\Box p \to q) \to (\Box p \to q)$$

Lemmon constrói, então, os demais **D**-sistemas do seguinte modo:

- $\mathbf{D3} = \mathbf{PC} \cup \{(K'), (D), (N^D)\}$
- $\mathbf{D4} = \mathbf{D2} \cup \{(N^D), (4)\}$
- $\mathbf{D5} = \mathbf{D2} \cup \{(N^D), (5)\}$

Por fim, para o sistema **S0.9** devemos considerar mais uma regra modal:[67]

(N^{**}) $\vdash p \leftrightarrow q$ implica $\vdash \Box p \asymp \Box q$

Finalmente, define-se o sistema **S0.9** abaixo:

- $\mathbf{S0.9} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (K''), (T)\}$

Estamos aptos a construir o seguinte gráfico de inclusão para mostrar o escopo de nossa generalização para sistemas modais não-normais. Observe que a área tracejada diz respeito ao sistemas que já haviam sido contemplados no resultado original de Dugundji.

[66] O nome original da regra é (D), mas para não confundirmos com o axioma (D), escolhemos (N^D). Conferir [Lem57].
[67] Originalmente, (N^{**}) é (b''). Buscamos uma notação coerente com o resto da Tese.

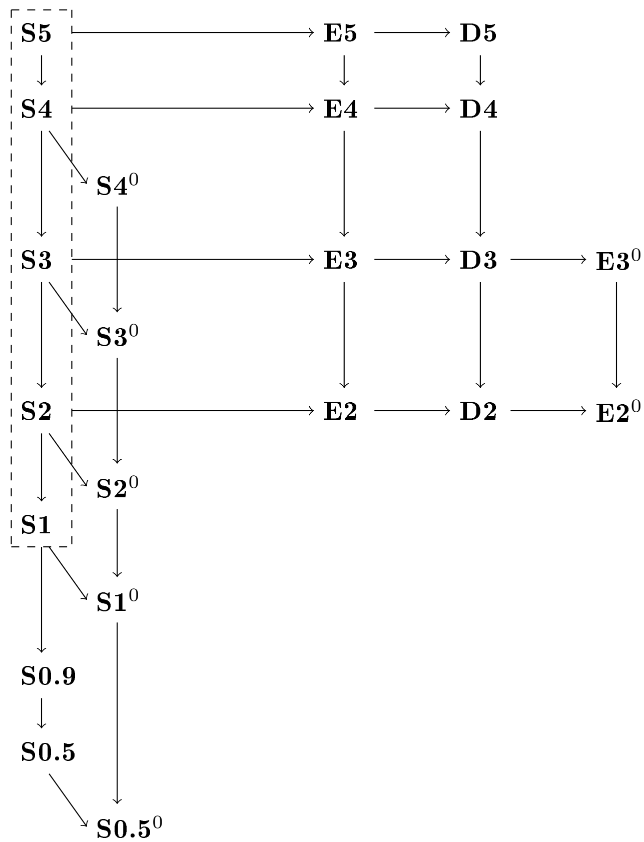

Fig. 2.4: Sistemas modais não-normais incompletos por matrizes finitas

Embora nossa generalização englobe muitos outros sistemas que não foram previstos pelo resultado de Dugundji, o resultado aqui apresentado está longe de dar conta de todos os sistemas modais não-normais. Ficaram de fora de nossa generalização os seguintes sistemas da Figura 2.2: **S3.5**, **E6**, $\mathbf{E6}^0$, **S6**, **E7**, $\mathbf{E7}^0$, **S7**, $\mathbf{E}^+$, **S8** e **S9**.[68]

Para esses sistemas não conseguimos encontrar uma matriz $\mathcal{M}_\infty$ de infinitos valores de verdade que fosse modelo para os casos limites (como **S9** e $\mathbf{E}^+$) e, ao mesmo tempo, uma valoração dessa matriz que invalidasse todas as instâncias da fórmula de Dugundji ou de certa adaptação da fórmula original. Fica, portanto, em aberto o problema de determinar quais desses sistemas são caracterizáveis

[68] Acreditamos, por outr lado, que nossa generalização pode abarcar sistemas ainda mais fracos que $\mathbf{E2}^0$, bastando restringir a regra (N^*) às tautologias de **PC**. Sobre esses sistemas, vide [Mor07].

por matrizes finitas.

A situação é mais favorável para sistemas normais. Visto que o sistema **K** é uma extensão de $\mathbf{S0.5}^0$, temos como corolário do Teorema 2.2.10 que nenhum sistema entre **K** e **S5** pode ser caracterizado por matrizes finitas. Ainda que de grande alcance, esse corolário não engloba todos os sistemas modais normais. Vimos na Subseção 2.2.2 que os sistemas modais não-Lewis são normais não estão na hierarquia de Lewis. Além disso, a Figura 2.1 garante que esses sistemas tampouco estão entre **K** e **S5**.

Outra família não englobada pelo Teorema 2.2.10 e Teorema 2.2.11 são as famílias da vizinhança de **KW**. Vimos que em **KW** não temos nem o axioma (T) e tampouco (D), apesar de termos (4). Pelo gráfico Figura 2.1 sabemos que os sistemas **VB**, **MV**, **KH**, **KW**, **K4.2W** e **K4.3W** também estão fora do espectro **K**-**S5**. Trataremos desses sistemas primeiramente e nos ocuparemos dos sistemas não-Lewis na próxima subseção.

Assim como no caso dos sistemas normais não-normais, não conseguimos em nossa generalização para lógicas normais modais a amplitude de início desejada. Excluímos de nosso caso limite os sistemas **K4.2W** e **K4.3W**, deixando mais uma vez em aberto saber se esses sistemas têm uma semântica matricial finita completa. Concentraremos nossos esforços na hierarqua $\mathbf{K} - \mathbf{KW}$.

Encontrar uma fórmula adaptada de Dugundji não é o suficiente para obter o resultado de imcompletude. Visto que **KW** não é um subsistema de **S5**, a matriz $\mathcal{M}_\infty$ da Proposição 2.2.2 não será um modelo para **KW**. Graças às álgebras de Magari podemos encontrar uma matriz $\mathcal{M}'_\infty$ de infinitos valores de verdade que é modelo de **KW**.[69]. Mas **KW** é uma extensão de **K**, de modo que não é difícil ver que qualquer matriz de finitos valores que caracterize **KW**, valida todas as instâncias da fórmula original de Dugundji. Coube, entretanto, encontrar uma valoração em $\mathcal{M}'_\infty$ que invalidasse a cada (D_n). Esse será o ponto capcioso de nosso argumento.

Queremos relembrar que no axioma (W) ocorre o operador de implicação e de conjunção, de modo que nosso caso minimal será **ICK** em vez de **ICI**. Temos que provar $\vdash_{\mathbf{KICK}} \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ para prosseguirmos em nossa demonstração.

[69] O artigo referido de Magari é [Mag75].

1.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	[Hip.]
2.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	[Hip.]
3.	$\Box(p \wedge q)$	[Hip.]
4.	$\Box p$	[(MP) em 1. e 3.]
5.	$\Box q$	[(MP) em 2. e 3.]
6.	$\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	[(Ax3)]
7.	$\Box q \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	[(MP) em 4. e 6.]
8.	$\Box p \wedge \Box q$	[(MP) em 5. e 7.]
9.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p, \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	
	$\Box(p \wedge q) \vdash_{\mathbf{KICK}} \Box p \wedge \Box q$	[(MD) de 1. a 8.]
10.	$\vdash_{\mathbf{KICK}} (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow$	
	$((\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)))$	[(MD) em 9.]
11.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	[(Ax4)]
12.	$\Box((p \wedge q) \rightarrow p)$	[(Nec) em 11.]
13.	$\Box((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$	[(K)]
14.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	[(MP) em 12. e 13.]
15.	$(p \wedge q) \rightarrow q$	[Ax5]
16.	$\Box((p \wedge q) \rightarrow q)$	[(Nec) em 15.]
17.	$\Box((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q)$	[(K)]
18.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	[(MP) em 16. e 17.]
19.	$(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	[(MP) em 10. e 14.]
21.	$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	[(MP) em 18. e 19.]

■

Feitas as devidas observações, definiremos a fórmula de Dugundji com o operador $\uplus$ e provaremos uma proposição análoga à Proposição 2.2.1

Definição 2.2.12: Para cada número natural n, a formula de Dugundji adaptada D''_n é definida do seguinte modo:

$$D''_n \equiv_{def} \biguplus_{i \neq j} (p_i \asymp p_j)$$

Em que $1 \leq i, j \leq n+1$ e $p_i \asymp p_j$ abrevia $(p_i \multimap p_j) \wedge (p_j \multimap p_i)$. □

Proposição 2.2.13: Qualquer matriz $\mathcal{M}$ com n valores de verdade que caracteriza uma extensão de **KICK** valida D_n.

Demontração: Análoga à Proposição 2.2.1, devendo ressalvar que temos $\vdash_{\mathbf{ICK}} p_i \rightarrow p_i$ viso que $\mathbf{ICI} \subseteq \mathbf{ICK}$ e $\vdash_{\mathbf{ICK}} p_i \rightarrow (p_i \wedge p_i)$ por $(Ax4)$. Assim, por (Nec) temos que $\Box(p_i \leftrightarrow p_i)$ é um teorema de **KICI**. Além disso, $\vdash_{\mathbf{KICK}} \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$, logo por (MP) temos $\vdash_{\mathbf{KICK}} p_i \asymp p_i$. O resto do argumento permanece idêntico. ■

Antes de apresentarmos uma nova matriz infinita que é um modelo para **KWPC**, queremos chamar atenção para uma definição em Teoria dos Conjuntos. Sabemos que todo conjunto pode ser finito ou infinito. Há, entretanto, outra denominação. Além de finito ou infinito, um conjunto pode ser cofinito. Cofinito é um conjunto cujo complemento é finito. Por exemplo, se $\mathbb{N}$ é o nosso domínio, então o conjunto dos números pares é infinito, mas não é cofinito, visto que seu complemento é o conjunto dos números ímpares, que, por sua vez, também é infinito. Já o conjunto dos números naturais excetuando o zero é infinito e cofinito, pois seu complemento é o conjunto finito cujo único elemento é o zero. Veremos na proposição abaixo como essa noção será aplicada para definir uma matriz infinita que é modelo para **KW**.

Proposição 2.2.14: Existe uma matriz infinita $\mathcal{M}'_\infty$ que é um modelo de **KWPC**.

Defina a seguinte matriz $\mathcal{M}'_\infty$

- $M = \wp(\mathbb{N})$
- $D = \wp(\mathbb{N})$
- $O = \{\cup, \cap, -, \boxtimes\}$, em que $\cup, \cap$ e $-$ são operações Booleanas, enquanto define-se $\boxtimes$ como:[70]

$$\boxtimes X = \begin{cases} \wp(\mathbb{N}) & \text{se X é cofinito} \\ \overline{\{\emptyset\}} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere valorações em $\mathcal{M}'_\infty$ como funções v que associam cada fórmula de **KWPC** a um elemento de $\wp(\mathbb{N})$ do seguinte modo:

- $v(\neg\alpha) = \overline{v(\alpha)}$;
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = \overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$;
- $v(\Box\alpha) = \boxtimes(v(\alpha))$.

[70] A função que calcula $\boxtimes$ foi inspirado em [Mag75], como exemplo de operador modal para álgebras diagonizáveis.

Veremos que todos os axiomas e regras modais de **KWPC** são válidos em $\mathcal{M}'_\infty$. Para os axiomas e regras proposicionais, a prova é análoga à Proposição 2.2.2.

(K) $v(\mathrm{K}) = \overline{\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))} \cup (\overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta))$

- se $v(\beta)$ é cofinito, então $\boxtimes v(\beta) = \wp(\mathbb{N})$ e daí $v(\mathrm{K}) = \wp(\mathbb{N})$.
- se $v(\beta)$ não é cofinito, então $\boxtimes v(\beta) = \overline{\{\emptyset\}}$.
  - se $v(\alpha)$ não é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \overline{\{\emptyset\}}$. Temos então que $\overline{\boxtimes v(\alpha)} = \{\emptyset\}$ e $\overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta) = \wp(\mathbb{N})$. Portanto, $v(\mathrm{K}) = \wp(\mathbb{N})$.
  - se $v(\alpha)$ é cofinito, então $\overline{v(\alpha)}$ é finito. Daí, $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$ não é cofinito, $\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))} = \{\emptyset\}$. Portanto $v(\mathrm{K}) = \{\emptyset\} \cup (\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\{\emptyset\}}) = \wp(\mathbb{N})$.

(K1) $v(K1) = \overline{(\overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta))} \cup (\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}})$

- se $v(\alpha)$ é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$ e $\overline{\boxtimes v(\alpha)} = \emptyset$. Além disso, $\overline{v(\alpha)}$ é finito. Logo, $\overline{v(\alpha)}$ não é cofinito e $\boxtimes\overline{v(\alpha)} = \overline{\{\emptyset\}}$.
  - se $v(\beta)$ é cofinito, então $\overline{v(\beta)}$ é finito e $\overline{v(\beta)}$ não é cofinito. Logo, $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$. Assim, $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \overline{\{\emptyset\}} \cup \{\emptyset\}$ e $v(K1) = \wp(\mathbb{N})$.
  - se $v(\beta)$ não é cofinito, então $\boxtimes v(\beta) = \overline{\{\emptyset\}}$. Assim, $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta) = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta)} = \{\emptyset\}$
    - · se $\overline{v(\beta)}$ não é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$. Assim, $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \overline{\{\emptyset\}} \cup \{\emptyset\} = \wp(\mathbb{N})$ e portanto $v(K1) = \wp(\mathbb{N})$.
    - · se $\overline{v(\beta)}$ é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \wp(\mathbb{N})$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \emptyset$. Daí $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \overline{\{\emptyset\}}$. e $v(K1) = \{\emptyset\} \cup \overline{\{\emptyset\}} = \wp(\mathbb{N})$.
- se $v(\alpha)$ não é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes v(\alpha)} = \{\emptyset\}$
  - se $\overline{v(\alpha)}$ é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\alpha)} = \mathbb{N}$ e $v(K1) = \mathbb{N}$.
  - se $\overline{v(\alpha)}$ não é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\alpha)} = \overline{\{\emptyset\}}$
    - · se $v(\beta)$ é cofinito, então $\overline{v(\beta)}$ é finito e $\overline{v(\beta)}$ não é cofinito. Daí $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e então $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$. Logo $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \mathbb{N}$ e portanto $v(K1) = \mathbb{N}$.
    - · se $v(\beta)$ não é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$. Logo $\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \overline{\{\emptyset\}} \cup \{\emptyset\} = \wp(\mathbb{N})$ e $v(K1) = \wp(\mathbb{N})$.

(K2) $v(K2) = \boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}) \cup (\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)}} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}})$

- se $v(\alpha)$ é cofinito, então $v(\alpha) \cup v(\beta)$ é cofinito, $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ é finito e $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ não é cofinito. Daí $\boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}) = \overline{\{\emptyset\}}$. Além disso, temos que $\overline{v(\alpha)}$ é finito, o que implica que $\boxtimes\overline{v(\alpha)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)}} = \{\emptyset\}$. Portanto $v(K2) = \overline{\{\emptyset\}} \cup (\{\emptyset\} \cup \overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}}) = \wp(\mathbb{N})$.
- se $v(\alpha)$ não é cofinito, então
  - ∗ se $v(\beta)$ é cofinito, então $v(\alpha) \cup v(\beta)$ é cofinito e $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ é finito. Assim, $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ não é cofinito e $\boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}) = \overline{\{\emptyset\}}$. Mas $\overline{v(\beta)}$ é finito, então $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$. Portanto $v(K2) = \overline{\{\emptyset\}} \cup (\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)}} \cup \{\emptyset\}) = \wp(\mathbb{N})$.
  - ∗ se $v(\beta)$ não é cofinito, então
    - · se $\overline{v(\beta)}$ é cofinito, então $v(\beta)$ é finito. Daí $v(\alpha) \cup v(\beta)$ é finito e $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ é cofinito. Logo $\boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(K2) = \wp(\mathbb{N})$.
    - · se $\overline{v(\beta)}$ não é cofinito, então $\boxtimes\overline{v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e daí temos que $\overline{\boxtimes\overline{v(\beta)}} = \{\emptyset\}$.Por um lado, se $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ é cofinito, então $\boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}) = \wp(\mathbb{N})$ e daí $v(K2) = \wp(\mathbb{N})$. Por outro, se $\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)}$ não é cofinito, então $\boxtimes(\overline{v(\alpha) \cup v(\beta)} = \overline{\{\emptyset\}}$ e portanto $v(K2) = \overline{\{\emptyset\}} \cup (\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)}} \cup \{\emptyset\}) = \wp(\mathbb{N})$.

(K3) $v(K3) = (\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta)}) \cup \boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta))$

- se $\overline{v(\alpha)}$ é cofinito, então $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$ também é cofinito. Portanto $\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(K3) = \wp(\mathbb{N})$.
- se $\overline{v(\alpha)}$ não é cofinito, então
  - ∗ se $v(\beta)$ é cofinito, então $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$ também é cofinito. Portanto $\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(K2) = \wp(\mathbb{N})$.
  - ∗ se $v(\beta)$ não é cofinito, então
    - · se $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$ é cofinito, então $\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(K2) = \wp(\mathbb{N})$
    - · se $\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)$ não é cofinito, então $\boxtimes(\overline{v(\alpha)} \cup v(\beta)) = \overline{\{\emptyset\}}$. Mas $\overline{v(\alpha)}$ e $v(\beta)$ não são cofinitos, daí temos que $\boxtimes\overline{v(\alpha)} = \boxtimes v(\beta) = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes\overline{v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\beta)} = \{\emptyset\}$. Portanto $v(K2) = \{\emptyset\} \cup \overline{\{\emptyset\}} = \wp(\mathbb{N})$.

(4) $v(4) = \overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup \boxtimes\boxtimes v(\alpha)$

- se $v(\alpha)$ é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$. Mas $\wp(\mathbb{N})$ é cofinito, daí temos que $\boxtimes\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(4) = \wp(\mathbb{N})$.

- se $v(\alpha)$ não é cofinito, daí $\boxtimes v(\alpha) = \overline{\{\emptyset\}}$. Mas $\overline{\{\emptyset\}}$ também é cofinito, então $\boxtimes\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(4) = \wp(\mathbb{N})$.

(W) $v(W) = \overline{\boxtimes(\overline{\boxtimes(v(\alpha)} \cup v(\alpha)} \cup \boxtimes v(\alpha)$

- se $v(\alpha)$ é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$ e $v(W) = \wp(\mathbb{N})$.
- se $v(\alpha)$ não é cofinito, então $\boxtimes v(\alpha) = \overline{\{\emptyset\}}$. Daí $\overline{\boxtimes v(\alpha)} = \{\emptyset\}$ e então $\overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup v(\alpha)$ não é cofinito. Assim, $\boxtimes(\overline{\boxtimes v(\alpha)} \cup v(\alpha)) = \overline{\{\emptyset\}}$ e $\overline{\boxtimes(\overline{\boxtimes v(\alpha) \cup v(\alpha)})} = \{\emptyset\}$. Portanto $v(W) = \{\emptyset\} \cup \overline{\{\emptyset\}} = \wp(\mathbb{N})$.

Finalmente, se $v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$, então $v(\alpha)$ é cofinito e $\boxtimes v(\alpha) = \wp(\mathbb{N})$. Daí, concluí-se que $\mathcal{M}'_\infty$ preserva (Nec) e todos os axiomas de **KWPC**.

Teorema 2.2.15: Nenhuma lógica modal **L** entre **K** e **KW** cujo fragmento proposicional esteja entre **IPK** e **PC** pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Demonstração: Dado $n \geq 1$, considere a fórmula de Dugundji D''_n e a matriz $\mathcal{M}'_\infty$ da Proposição 2.2.14. Seja v uma valoração em $\mathcal{M}'_\infty$ que associa a cada variável proposicional p_i (para $1 \leq i \leq n+1$) o conjunto

$$X_i = \wp(\{x \ : \ x = (n+1) \times k + (i-1) \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}).$$

Seja $1 \leq i, j \leq n+1$ de modo que $i \neq j$. Assim, $X_i \cap X_j = \emptyset$ e então $\overline{X_i} \cup X_j = \overline{X_i}$ de modo que $\overline{X_i}$ não é cofinito. Analogamente, $\overline{X_j} \cup X_i = \overline{X_j}$ e $\overline{X_j}$ também não é cofinito. Daí, conclui-se:

$$\boxtimes(\overline{X_i} \cup X_j) \cap \boxtimes(\overline{X_j} \cup X_i) = \boxtimes\overline{X_i} \cap \boxtimes\overline{X_j} = \overline{\{\emptyset\}} \cap \overline{\{\emptyset\}} = \overline{\{\emptyset\}}$$

e então v atribui a D''_n o valor não-distinguido $\overline{\{\emptyset\}}$.

Suponha agora que existe uma matriz de n-valores $\mathcal{M}'_n$ que caracteriza uma lógica **L** entre **KIPK** e **KWPC**. Assim, pela Proposição 2.2.8, a fórmula D''_n seria um teorema de **L** e também um teorema de **KW**. Mas então, pela Proposição 2.2.14, D''_n receberia o valor distinguido $\wp(\mathbb{N})$ por meio da valoração v em $\mathcal{M}'_\infty$, contradição. ■

As generalizações do Teorema de Dugundji por meio do Teorema 2.2.10 e do Teorema 2.2.11 abarcam uma grande parte dos sistemas normais modais da Figura 2.1. Assim como foi feito para os sistemas não-normais, mostraremos um novo gráfico de inclusão de sistemas normais modais que não podem ser caracterizados por matrizes finitas, em que mais uma vez a área tracejada indica os domínios originais do Teorema de Dugundji.

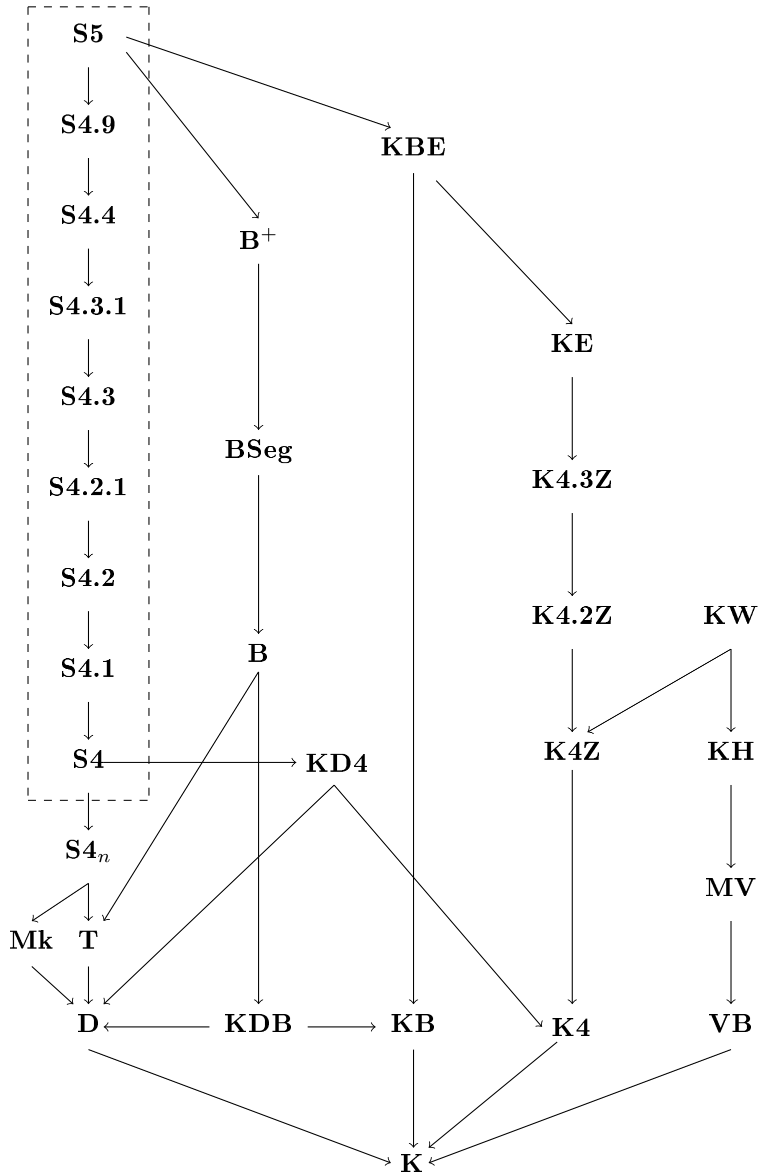

Fig. 2.5: Sistemas modais normais incompletos por matrizes finitas

Mais uma vez nossa generalização não é definiva. Comparando com a Figura 2.1, duas extensões de **KW** não foram consideradas, a saber, **K4.2W** e **K4.3W**. Além disso, está aberta a questão de saber se há algum sistema entre **KW** e

Ver que pode ser caracterizado por matrizes finitas.

Tampouco sabemos a possibilidade de usar semântica matricial finita para sistemas entre **KBE** e $\mathbf{T}_c$. Por outro lado, há certos resultados concernentes aos sistemas entre **S5** e **Triv** que vereremos na próxima seção. Resultados da mesma natureza sobre os sistemas não-Lewis (a saber, **K1**, **K1.1** **K1.2**, **K2**, **K2.1**, **K3** e **K3.1**) serão também abordados na seção seguinte.

2.3 Completude modal por matrizes finitas

Veremos nessa seção resultados diametralmente opostos ao Teorema de Dugundji, a saber, quais lógicas modais são caracterizadas por matrizes finitas.

Na primeira subseção, estudamos a hieraquia $\mathbf{Ł}_3 \ldots \mathbf{Ł}_n$ de Łukasiewicz. Veremos em que sentido essas lógicas multivaloradas podem ser compreendidas como modais e quais são as propriedades de $\Box$ e $\Diamond$ nessa hierarquia. Veremos que, na verdade, há dois modos de definir esses operadores e que suas propriedades são distintas dependendo da maneira como são definidos.

Tendo em vista que as lógicas de Łukasiewicz não são extensões conservativas de **PC** (e tampouco estão entre **ICI** e **PC**), veremos um caso de lógica modal tetravalente que pode ser vista como uma extensão de **PC**, e nesse sentido, uma lógica modal clássica caracterizada por matrizes. Esse é o tema da segunda subseção.

Por outro lado, nenhuma dessas lógicas modais mutivaloradas podem ser consideradas lógicas modais normais: as primeiras por não serem clássicas, e as segundas por não validarem a regra (Nec). Caberá à terceira subseção mostrar dois teoremas de completude por matrizes finitas para certos sistemas modais normais.

2.3.1 Operadores modais na hierarquia $\mathbf{Ł}_3 \ldots \mathbf{Ł}_n$

Retomemos a Subseção 2.1 e analisemos as matrizes de $\mathbf{Ł}_3$. Seria $\mathbf{Ł}_3$ de fato uma lógica modal? Quais são as exigências mínimas de *necessário* e *possível* para que sejam considerados operadores modais unários (e não simplesmente um operador de negação ou de consistência?)

É sabido que os medievais contribuíram muito para o avanço da lógica modal e o filósofo francês do século XII Pedro Abelardo (*Petrus Abelardus*) foi um grande colaborar nesse campo.[71] Segundo Abelardo, “o verdadeiro antecede o

[71] Sobre a contribuição de Abelardo à lógica modal, conferir [KK68] p. 204.

que é possível, segue-se o verdadeiro do que é necessário; o falso porém apenas se segue do impossível”[72]. A princípio, $\mathbf{Ł_3}$ seria uma lógica adequada para formular as condições modais de Abelardo, visto que:

- $\vdash p \rightarrow \Diamond p$
- $\vdash \Box p \rightarrow p$
- $\vdash \neg\Diamond p \rightarrow \neg p$

Łukasiewicz ainda argumenta que sua lógica trivalorada satisfaz as quatro condições a seguir:

(i) o “quadrado modal” de oposições;

(ii) “infere-se da necessidade para o que é” e o seu dual “do que é infere-se para o possível”;

(iii) “qualquer coisa quando é, é necessário”;

(iv) “para algum p, é possível p e é possível não p”[73]

A condição (i) pode ser formalizada como $\Box p \dashv\vdash \neg\Diamond\neg p$ e $\Diamond p \dashv\vdash \neg\Box\neg p$. A condição (ii) vai de encontro com a afirmação de Abelardo e a condição (iv) é formalizada em primeira ordem. Já o requisito (iii), mais polêmico, foi interpretado por Łukasiewicz como equivalente à fórmula $p \rightarrow (p \rightarrow \Box p)$.

Os axiomas para $\mathbf{Ł_3}$ foram elegantemente apresentados por Wajsberg do seguinte modo:

($\mathbb{W}_1$) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

($\mathbb{W}_2$) $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

($\mathbb{W}_3$) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

($\mathbb{W}_4$) $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$

Por meio desses axiomas, verifica-se que:

$$\mathbf{G_n}, \mathbf{P^n}, \mathbf{I^n} \nsubseteq \mathbf{Ł_3} \text{ e } \mathbf{Ł_3} \nsubseteq \mathbf{G_n}, \mathbf{P^n}, \mathbf{I^n}$$

[72] “verum antecedit quidem ad possibile, sequitur vero ad necessarium; falsum autem ad impossibile tantum sequitur” Abelardo, P. Dialectia, p. 204. Apud [KK68].

[73] “(i) the ‘modal square’ of oppositions; (ii) ‘Ab oportere ad esse valet consequentia’, and its dual ‘Ab esse ad posse valet consequentia’; (iii) ‘Unumquodque, quando est, oportet esse’; (iv) ‘For some p, it is possible that p and it is possible that not-p”’. Vide [Min02] e [Łuk53].

Vimos na Subseção 2.1, que **ICI** $\nsubseteq$ **Ł**$_3$, o que implica em particular que $\mathbf{G_n} \nsubseteq$ **Ł**$_3$, $\mathbf{P^n} \nsubseteq$ **Ł**$_3$ e $\mathbf{I^n} \nsubseteq$ **Ł**$_3$ para n natural, visto que nas três hierarquias temos $(Ax2)$ que, por sua vez, não é teorema em **Ł**$_3$. Por outro lado, **Ł**$_3 \nsubseteq \mathbf{G_n}$. De fato, se $v(p) = 1$ e $v(q) = n$ temos em cada $\mathbf{G_n}$ que $v(\neg p) = v(\neg q) = n$, o que implica por um lado $v(p \to q) = 2$ e por outro $v(\neg p \to \neg q) = 1$. Logo $v(\mathbb{W}_3) = 2$, que não é designado. Também podemos mostrar que **Ł**$_3 \nsubseteq \mathbf{P^n}, \mathbf{I^n}$. Para tanto, basta tomar $v(p) = T$ e $v(q) = F$. Em ambas hierarquias teremos $v(\neg p) = F$, $v(\neg q) = T$, o que implica $v(\neg p \to \neg q) = T$ mas $v(p \to q) = F$. Portanto $v(\mathbb{W}_3) = F$, que não é designado nas duas hierarquias.

Se o Teorema 1.2.2 vale nessas três hierarquias, é fácil ver que o mesmo não vale em **Ł**$_3$. Tome $\Gamma = \emptyset, \alpha = p$ e $\beta = \Box p$. É evidente que $p \vDash \Box p$ mas $\nvDash p \to \Box p$.

Por outro lado, em **Ł**$_3$ vale o seguinte Metateorema Modal da Dedução:[74]

Teorema 2.3.1 (Metateorema Modal da Dedução (MMD)):

(i) $\Gamma, \alpha \vDash \beta$ sse $\Gamma \vDash \Box\alpha \to \beta$

(ii) Para $\circledast \in \{\Box, \Diamond\}$: $\begin{cases} \Gamma, \circledast\alpha \vDash \beta & \text{sse } \Gamma \vDash \circledast\alpha \to \beta \\ \Gamma, \neg\circledast\alpha \vDash \beta & \text{sse } \Gamma \vDash \neg\circledast\alpha \to \beta \end{cases}$

Demonstração:

(i)
- se $\Gamma, \Box\alpha \vDash \beta$, então
  - se $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$, então $v(\Box\alpha) = 1$ e $v(\Box\alpha \to \beta) = 1$
  - se $v(\alpha) \neq 1$, então $v(\Box\alpha) = 0$ e $v(\Box\alpha \to \beta) = 1$

  Logo, $\Gamma \vDash \Box\alpha \to \beta$
- se $\Gamma, \Box\alpha \nvDash \beta$, então
  - $v(\Box\alpha) = 1$ e $v(\beta) \neq 1$. Assim, $v(\Box\alpha \to \beta) \neq 1$.

  Logo, $\Gamma \nvDash \Box\alpha \to \beta$

(ii)
- se $\Gamma, \circledast\alpha \vDash \beta$, então
  - se $v(\circledast\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$, então $v(\circledast\alpha \to \beta) = 1$
  - se $v(\circledast\alpha) \neq 1$, então $v(\circledast\alpha) = 0$ e $v(\circledast\alpha \to \beta) = 1$

  Logo, $\Gamma \vDash \circledast\alpha \to \beta$
- se $\Gamma, \circledast\alpha \nvDash \beta$, então
  - $v(\circledast\alpha) = 1$ e $v(\beta) \neq 1$. Assim $v(\circledast\alpha \to \beta) \neq 1$

[74] Uma prova sintática do teorema abaixo para **Ł**$_3$ pode ser encontrado em [Min02].

Logo, $\Gamma \nvDash \circledast\alpha \to \beta$ ■

Vimos na Subseção 2.1 que são teoremas de $\mathbf{Ł}_3$ os axiomas (K),(T),(4) e (5). Além disso, a regra (Nec) preserva o valor designado 1. Não é difícil verificar que (D) e (E) também são teoremas de $\mathbf{Ł}_3$:

$\Box p$	$\to$	$\Diamond p$
0	1	0
0	1	1
1	1	1

$\Box$	$\Diamond p$	$\to$	p
0	0	1	0
0	0	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1

Também cabe notar que (N') preserva a validade em $\mathbf{Ł}_3$, visto que se $v(\alpha \to \beta) = 1$, então para que $v(\alpha) \neq v(\Box\alpha)$ e $v(\beta) \neq v(\Box\beta)$ teríamos $v(\alpha) = v(\beta) = \frac{1}{2}$. Nesse caso $v(\Box\alpha) = v(\Box\beta) = 0$ e daí $v(\Box\alpha \to \Box\beta) = 1$.

Łukasiewicz não propôs uma única lógica multivalorada, mas uma hierarquia $\mathbf{Ł}_3 \ldots \mathbf{Ł}_n$ cuja função de valoração para cada lógica respeita a definição abaixo:[75]

Definição 2.3.2: Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto de matrizes cujos valores-verdade para cada $\mathbf{Ł}_n$ para n natural é dado pelo conjunto:

$$M = \left\{ \frac{i}{n-1} : 0 \leq i \leq n-1 \right\}$$

Em que 1 é sempre o único valor designado. Sejam α e β fórmulas proposicionais. A função de valoração v é calculada do seguinte modo para cada operador:

$$\begin{array}{rcl} v(\neg\alpha) & = & 1 - v(\alpha) \\ v(\alpha \wedge \beta) & = & \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \\ v(\alpha \vee \beta) & = & \max\{v(\alpha), v(\beta)\} \end{array}$$ □

Pela definição acima, podemos conferir que:

$$\mathbf{ICI} \not\subseteq \mathbf{Ł}_n$$

Tomemos $v(p) = 1$, $v(r) = 0$ e $v(q) = \frac{i}{n-1}$ em que $0 < \frac{i}{n-1} < 1$ e $i > \frac{n-1}{2}$. Daí $v(p \to q) = \min\{1, 1 - 1 + \frac{i}{n-1}\} = \frac{i}{n-1}$ e $v(p \to r) = \min\{1, 1-1+0\} = 0$. Por outro lado $v(q \to r) = \min\{1, 1 - \frac{i}{n-1} + 0\} = 1 - \frac{i}{n-1}$. Conclui-se então que

[75] Tal definção foi retirada de [CDM95] p. 8 e p. 13.

$v(p \to (q \to r)) = \min\{1, 1 - 1 + \frac{i}{n-1}\} = \frac{i}{n-1}$. Além disso, temos que $v((p \to (q \to r)) \to (p \to r)) = \min\{1, 1 - \frac{i}{n-1} + 0\} = 1 - \frac{i}{n-1}$. Visto que $i > \frac{n-1}{2}$, temos que $\frac{i}{n-1} > \frac{1}{2}$. Assim, $1 - \frac{i}{n-1} < \frac{1}{2}$ e $2(1 - \frac{i}{n-1}) < 1$. Temos portanto que $v(Ax2) = \min\{1, 1 - \frac{i}{n-1} + 1 - \frac{i}{n-1}\} = \min\{1, 2(1 - \frac{i}{n-1})\} = 2(1 - \frac{i}{n-1})$, que não é um valor designado.

Feita a ressalva acima, retomemos os operadores $\Box$ e $\Diamond$ como definido em Ł_3. As funções abaixo calculam para cada Ł_n os valores de $\Diamond$ e $\Box$

$$v(\Diamond\alpha) = \min\{1, 2v(\alpha)\}$$

$$v(\Box\alpha) = 1 - \min\{1, 2(1 - v(\alpha))\}$$

Teremos, desse modo as seguintes tabelas para $\Diamond$ e $\Box$ em Ł_4:

p	$\Diamond p$
0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	1
1	1

p	$\Box p$
0	0
$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	1

Parece ser legítimo perguntar se teríamos para toda a hierarquia as mesmas propriedades de $\Box$ e $\Diamond$. Particularmente para Ł_4, temos que (D), (T) e (B) recebem sempre o valor designado 1, o que podemos conferir pelas tabelas abaixo:

$\Box p$	$\to$	$\Diamond p$
0	1	0
0	1	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	1
1	1	1

$\Box p$	$\to$	p
0	1	0
0	1	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
1	1	1

p	$\to$	$\Box$	$\Diamond p$
0	1	0	0
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	1	1	1
1	1	1	1

Já a tabela de (K) tem 16 linhas e também recebe sempre o valor designado 1.

$\Box$	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(\Box p$	$\to$	$\Box q)$
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	$\frac{1}{3}$	1	0	1	0
1	0	1	$\frac{2}{3}$	1	0	1	$\frac{1}{3}$
1	0	1	1	1	0	1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	1	0
1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	0	1	0
1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	0	1	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	1	1	1	0	1	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{3}$	1	1	1	$\frac{1}{3}$	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0	0
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	1	1	1	1	1	1	1

Por outro lado, (4), (E) e (5) não o são. Para invalidar (4) e (E), basta tomar $v(p) = \frac{2}{3}$, enquanto (5) é invalidado quando $v(p) = \frac{1}{3}$.

Não é difícil verificar que o Teorema 2.3.1 não é o caso em $\mathbf{Ł}_4$. Se tomarmos $v(p) = \frac{1}{3}$ e $v(q) = \frac{2}{3}$, temos que $\Box p \vDash q$ mas $v(\Box p \to q) = \frac{2}{3}$ o que nos força concluir que $\nvDash \Box p \to q$, invalidando o ítem (i). Para o ítem (ii) em que $\divideontimes = \Box$ consideremos $v(p) = \frac{2}{3}$ enquanto $v(q) = 0$, desse modo $\Box p \vDash q$ mas $v(\Box p \to q) = \frac{2}{3}$. Por fim, para $\divideontimes = \Diamond$, tome $v(p) = \frac{2}{3}$ e $v(q) = \frac{1}{3}$, teremos $\vDash \Diamond p \to q$ mas $v(\Diamond p \to q) = \frac{2}{3}$.

Para definirmos os operadores $\Diamond$ e $\Box$ em $\mathbf{Ł}_4$ de modo a manter as propriedades modais de $\mathbf{Ł}_3$ devemos considerar uma nova definição.[76] Para evitar maiores confusões, denotaremos $\Diamond_4$ e $\Box_4$ os novos operadores modais de $\mathbf{Ł}_4$. Definiremos ambos os conectivos por meio de $\neg$ e $\to$ do seguinte modo:

$$\Diamond_4 p \equiv_{def} \neg p \to (p \to p) \text{ e } \Box_4 p \equiv_{def} \neg \Diamond_4 \neg p$$

[76] Essa não é a definição fornecida por Łukasiewicz em [Łuk53]. Para toda a hierarquia, $\Diamond p$ é definido como equivalente a $\neg p \to p$ enquanto $\Box p$ é o mesmo que $\neg \Diamond \neg p$.

As duas definições acima implicam nas tabelas abaixo:

p	$\Diamond_4 p$
0	0
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	1
1	1

p	$\Box_4 p$
0	0
$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	0
1	1

Não é evidente saber se podemos definir matrizes para operadores modais $\Diamond_n$ e $\Box_n$ em cada Ł_n por meio dos operadoroes primitivos $\neg$ e $\rightarrow$ de modo natural com o seguinte cálculo:

$$v(\Box_n \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\Diamond_n \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(\alpha) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Diferentemente de **PC**, as lógicas $\text{Ł}_3 \ldots \text{Ł}_n$ não são funcionalmente completas. Isso significa que dado um dos valores de verdade do conjunto M da Definição 2.3.2, nada garante que podemos definir as funções acima.[77]

Por meio de algumas definições auxiliares podemos mostrar que essas duas funções são definíveis em termos de $\neg$ e $\rightarrow$. Consideremos, primeiramente, um novo operador $\oplus$ definido abaixo:[78]

$$p \oplus q \equiv_{def} \neg p \rightarrow q$$

Usamos, em seguida, uma notação para o número de ocorrências do operador $\rightarrow$:

Definição 2.3.3: Para todo número natural k e elementos x e y de M:

(i) $x \rightarrow_0 y \equiv_{def} y$

(ii) $x \rightarrow_{k+1} y \equiv_{def} x \rightarrow (x \rightarrow_k y)$ $\Box$

[77] Para provar que a hierarquia não é funcionalmente completa, basta tomar em Ł_3 um operador $\top$ de modo que $v(\top p)$ sempre retorna o valor $\frac{1}{2}$. Para uma argumentação mais detalhada, vide [Res69] p. 64.

[78] As definições abaixo e as observações foram retiradas de [CDM95].

Por fim, lançaremos mão da seguinte observação:

Nota 2.3.4: Para todo número natural k e elementos x e y de M:

1. $x \oplus y = \min(1, x \times y)$
2. $\neg x \rightarrow_k x = (k+1) \oplus x$ $\square$

Definamos em cada $\mathbf{Ł}_n$ os conectivos $\Diamond_n$ e $\Box_n$. Veremos que para cada $\Diamond_n$ respeitar a operação acima, basta considerar

$$\Diamond_n p \equiv_{def} \neg p \rightarrow_{n-2} p$$

Dado um valor $v(p)$ em M, temos:

$$v(\neg p \rightarrow_{n-2} p) = \min(1, ((n-2)+1)v(p)) = \min(1, (n-1)v(p))$$

É importante ressaltar que para nossos propósitos $n \geq 3$. Se $v(p) = 0$, então $v(\Diamond p) = \min(1, (n-1)0) = 0$. Se $v(p) = 1$, evidentemente $v(\Diamond p) = \min(1, (n-2)1) = 1$. Por fim, para o caso em que $0 < v(p) < 1$, teremos $v(\Diamond p) = \min(1, (n-1)v(p))$. Mas pela Definição 2.3.2 sabemos que $v(p) = \frac{i}{n-1}$ para $0 < i < n-1$. Assim, concluímos que

$$v(\Diamond p) = \min(1, (n-1)v(p)) = \min\left(1, \frac{(n-1)i}{n-1}\right) = 1$$

O raciocínio para $\Box_n$ é análogo. Dados n e k como acima definidos, considere:

$$\Box_n p \equiv_{def} \neg \Diamond_n \neg p$$

Definindo-se $\Box_n$ por meio de $\Diamond_n$ e $\neg$, pode-se inferir a igualdade:

$$v(\Box p) = 1 - \min(1, (k+1)(1 - v(p))) = 1 - \min(1, (n-1)(1 - v(p)))$$

Se $v(p) = 1$, então $v(\Box_n p) = 1 - \min(1, (n-2)0) = 1 - 0 = 1$. Caso contrário, $0 \leq v(p) < 1$. Mas sabemos que $v(p) = \frac{i}{n-1}$ para $0 \leq i < n-1$. Daí infere-se que:

$$v(\Box_n p) = 1 - \min(1, (n-1)v(p)) = 1 - \min\left(1, 1 - \frac{(n-1)i}{n-1}\right) = 1 - 1 = 0$$

O que mostra que as funções de valoração para $\Box_n$ e $\Diamond_n$ podem ser definidas da maneira que esperávamos na hierarquia $\text{Ł}_3, \ldots, \text{Ł}_n$.

Estamos agora aptos a mostrar que os axiomas de **S5** e o Metateorema Modal da Dedução valem em toda hierarquia de Łukasiewicz para esses novos conectivos modais.

Teorema 2.3.5: Seja $n \geq 3$ um número natural. Para cada n considere as matrizes da Definição 2.3.2. Sejam $\Box_n$ e $\Diamond_n$ operadores modais definidos abaixo:

$$\Diamond_n p \equiv_{def} \neg p \to_{n-2} p \text{ e } \Box_n p \equiv_{def} \neg\Diamond_n \neg p$$

Cada lógica Ł_n valida os seguintes teoremas e metateoremas:

(i) $\Diamond_n \alpha \vDash \neg\Box_n \neg\alpha$ e $\neg\Box_n\neg\alpha \vDash \Diamond_n\alpha$

(ii) $\vDash \Box_n(p \to q) \to (\Box_n p \to \Box_n q)$

(iii) $\vDash \Box_n p \to \Diamond_n p$

(iv) $\vDash \Box_n p \to p$

(v) $\vDash p \to \Diamond_n p$

(vi) $\vdash \neg\Diamond_n p \to \neg p$

(vii) $\vDash \Diamond_n \Box_n p \to p$

(viii) $\vDash p \to \Box_n \Diamond_n p$

(ix) $\vDash \Diamond_n p \to \Box_n \Diamond_n p$

(x) $\vDash p \to (p \to \Box_n p)$

(xi) $\Gamma, \alpha \vDash \beta$ sse $\Gamma \vDash \Box_n \alpha \to \beta$

(xii) Para $\divideontimes \in \{\Box_n, \Diamond_n\}$: $\begin{cases} \Gamma, \divideontimes\alpha \vDash \beta & \text{sse } \Gamma \vDash \divideontimes\alpha \to \beta \\ \Gamma, \neg\divideontimes\alpha \vdash \beta & \text{sse } \Gamma \vDash \neg\divideontimes\alpha \to \beta \end{cases}$

Demonstração:

(i)
- se $v(\Diamond_n\alpha) = 1$, então $v(\alpha) \neq 0$ e $v(\neg\alpha) \neq 1$. Daí $v(\Box\neg\alpha) = 0$ e portanto $v(\neg\Box\neg\alpha) = 1$.
- se $v(\neg\Box_n\neg\alpha) = 1$, então $v(\Box_n\neg\alpha) = 0$. Daí $v(\neg\alpha) \neq 1$ e então $v(\alpha) \neq 0$. Temos portanto que $v(\Diamond_n\alpha) = 1$.

(ii)
- Se $v(p) \neq 1$, então $v(\Box_n p) = 0$. Daí temos que $v(\Box_n p \to \Box_n q) = \min(1, 1 - 0 + v(\Box_n q)) = 1$. Podemos concluir então que $v(K) = \min(1, 1 - v(\Box_n(p \to q)) + 1) = 1$.
- Se $v(p) = 1$, então
  - se $v(q) = 1$, então $v(\Box_n p) = 1$. Daí se segue $v(\Box_n p \to \Box_n q) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$. Pelas mesmas razões acima temos que $v(K) = 1$.
  - se $v(q) \neq 1$, então $v(p \to q) = \min(1, 1 - 1 + v(q) = v(q)$. Temos então que $v(p \to q) \neq 1$ e $v(\Box_n(p \to q)) = 0$. Portanto $v(K) = \min(1, 1 - 0 + v(\Box_n p \to \Box_n q)) = 1$.

(iii)
- Se $v(p) = 1$, então $v(\Diamond_n p) = 1$ e $v(D) = \min(1, 1 - v(\Box_n p) + 1) = 1$.
- Se $v(p) \neq 1$, então $v(\Box_n p) = 0$ e $v(D) = \min(1, 1 - 0 + v(\Diamond_n p)) = 1$.

(iv)
- Se $v(p) = 1$, então $v(\Box_n p) = 1$ e $v(T) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$.
- Se $v(p) \neq 1$, então $v(\Box_n p) = 0$ e $v(T) = \min(1, 1 - 0 + v(p)) = 1$.

(v)
- Se $v(p) = 0$, então $v(\Diamond_n p) = 0$ e $v(p \to \Diamond_n p) = \min(1, 1 - 0 + 0) = 1$.
- Se $v(p) \neq 0$, $v(\Diamond_n p) = 1$ e $v(p \to \Diamond_n p) = \min(1, 1 - v(p) + 1) = 1$.

(vi)
- Se $v(\neg\Diamond_n p) = 0$, então $v(\neg\Diamond_n p \to \neg p) = \min(1, 1 - 0 + v(\neg p)) = 1$
- Se $v(\neg\Diamond_n p) \neq 0$, então $v(\neg\Diamond_n p) = 1$. Assim, $v(\Diamond_n p) = 0$, $v(p) = 0$ e $v(\neg p) = 1$. Daí $v(\neg\Diamond_n p \to \neg p) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$.

(vii)
- Se $v(p) = 1$, então $v(\Box_n p) = 1$ e $v(\Diamond_n \Box_n p) = 1$. Daí temos que $v(E) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$.
- Se $v(p) \neq 1$, então $v(\Box_n p) = 0$ e $v(\Diamond_n \Box_n p) = 0$. Temos portanto que $v(E) = \min(1, 1 - 0 + v(p)) = 1$.

(viii)
- Se $v(p) \neq 0$, então $v(\Diamond_n p) = 1$ e $v(\Box_n \Diamond_n p) = 1$. Daí temos que $v(B) = \min(1, 1 - v(p) + 1) = 1$.
- Se $v(p) = 0$, então $v(B) = \min(1, 1 - 0 + v(\Box_n \Diamond_n p)) = 1$.

(ix)
- Se $v(p) \neq 0$, então $v(\Diamond_n p) = 1$ e $v(\Box_n \Diamond_n p) = 1$. Daí temos que $v(5) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$.
- Se $v(p) = 0$, então $v(\Diamond_n p) = 0$ e $v(\Box_n \Diamond_n p) = 0$. Temos então que $v(5) = \min(1, 1 - 0 + 0) = 1$.

(x)
- se $v(\Box_n \alpha) = 0$, então $v(\alpha \to \Box_n \alpha) = \min\{1, 1 - v(\alpha) + 1\} = 1$ e daí $v(\alpha \to (\alpha \to \Box_n \alpha) = \min\{1, 1 - v(\alpha) + 1\} = 1$.
- se $v(\Box_n \alpha) \neq 0$, então $v(\Box_n \alpha) = 1$ o que implica que $v(\alpha) = 1$. Assim $v(\alpha \to \Box \alpha) = \min\{1, 1 - 1 + 1\} = 1$. Conclui-se portanto que $v(\alpha \to (\alpha \to \Box \alpha)) = \min\{1, 1 - 1 + 1\} = 1$.

(xi)
- se $\Gamma, \alpha \vDash \beta$, então
  - se $v(\alpha) \neq 1$, então $v(\Box_n \alpha) = 0$. Teremos desse modo que $v(\Box_n \alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 0 + v(\beta)) = 1$.
  - se $v(\alpha) = 1$, então $v(\beta) = 1$. Temos daí $v(\Box_n \alpha \to \beta) = \min(1, 1 - v(\Box_n \alpha) + 1) = 1$

  Logo, $\Gamma \vDash \Box_n \alpha \to \beta$
- se $\Gamma, \alpha \nvDash \beta$, então
  - $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) \neq 1$. Daí concluí-se que $v(\Box_n \alpha) = 1$ e desse modo $v(\Box_n \alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 1 + v(\beta)) = v(\beta)$. Portanto $v(\Box_n \alpha \to \beta) \neq 1$.

  Logo, $\Gamma \nvDash \Box_n \alpha \to \beta$

(xii)
- se $\Gamma, \circledast\alpha \vDash \beta$, então
  - se $v(\circledast\alpha) = 1$, então $v(\beta) = 1$. Daí concluí-se $v(\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$
  - se $v(\circledast\alpha) \neq 1$, então $v(\circledast\alpha) = 0$. Podemos conclui então que $v(\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 0 + v(\beta)) = 1$.

  Logo, $\Gamma, \vDash \circledast\alpha \to \beta$
- se $\Gamma, \circledast\alpha \nvDash \beta$, então
  - $v(\circledast\alpha) = 1$ e $v(\beta) \neq 1$. Daí $v(\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 1 + v(\beta)) = v(\beta)$. Portanto $v(\circledast\alpha \to \beta) \neq 1$

  Logo, $\Gamma, \circledast\alpha \nvDash \beta$
- se $\Gamma, \neg\circledast\alpha \vDash \beta$, então
  - se $v(\neg\circledast\alpha) \neq 1$, então $v(\neg\circledast\alpha) = 0$. Daí $v(\neg\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 0 + v(\beta)) = 1$.
  - se $v(\neg\circledast\alpha) = 1$, então $v(\beta) = 1$. Temos então $v(\neg\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 1 + 1) = 1$.

  Logo, $\Gamma, \neg\circledast\alpha \vDash \beta$

- se $\Gamma, \neg\circledast\alpha \nvDash \beta$, então
  - $v(\neg\circledast\alpha) = 1$ e $v(\beta) \neq 1$. Daí se segue que $v(\neg\circledast\alpha \to \beta) = \min(1, 1 - 1 + v(\beta)) = v(\beta)$. Portanto $v(\neg\circledast\alpha \to \beta) \neq 1$.

  Logo, $\Gamma \nvDash \neg\circledast\alpha \to \beta$. ■

O Teorema 2.3.5 mostra de que modo se deve definir $\Box_n$ e $\Diamond_n$ para que toda a hierarquia $\mathbf{Ł}_3, \ldots, \mathbf{Ł}_n$ valide os teoremas modais de **S5** e preserve o Metateorema Modal da Dedução que, como vimos, não valem em $\mathbf{Ł}_4$ caso consideremos $\Diamond$ em vez de $\Diamond_4$. Além disso, os ítens (iv), (v) e (vi) do Teorema 2.3.5 garantem que os requisitos propostos por Abelardo sejam satisfeitos.

Mas seriam satisfeitos também os requisitos do próprio Łukasiewicz? Pela definição de $\Box_n$ e a condição (i) é quase imediato valer o quadrado modal de oposições. Além disso, "infere-se da necessidade o que é" e "do que é infere-se o possível" estão garantidos também por (iv) e (v). Por fim, a asserção "qualquer coisa quando é, é necessário" na interpretação de Łukasiewicz é assegurada por (x).

Tudo indica que Łukasiewicz optou por estender a mesma definição dos operadores modais que há em $\mathbf{Ł}_3$ para toda a sua hierarqua afim de manter os requisitos mínimos daquilo que ele julgava que uma lógia modal deveria atender. O preço a pagar é que essas lógicas não validam, por exemplo, os axiomas (4), (5) e o Metateorema Modal da Dedução, que, como vimos, são válidos em $\mathbf{Ł}_3$.

Esse não é, contudo o ponto nevrálgico dos operadores modais em $\mathbf{Ł}_3 \ldots \mathbf{Ł}_n$. Para dirimir dúvidas quando a definição de $\Diamond$, restrinjamos a princípio nossa análise a $\mathbf{Ł}_3$. Vale notar que $\Diamond_3$ e $\Diamond$ coincidiem. Não é difícil verificar que em $\mathbf{Ł}_3$, temos:

$$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \vDash \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \text{ e } \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \vDash \Diamond(\alpha \wedge \beta)$$

A primeira inferência não nos causa constrangimento. A segunda, por outro lado, força-nos a concluir em particular que se é possível p e é possível $\neg p$, então é possível p e $\neg p$, o que parece contraintuitivo na linguagem natural.[79]

[79] Essa é a objeção de Béziau ao considerar as lógicas de Łukasiewicz como lógicas modais. Nas palavras de Béziau:

> "O absurdo aparece claramente por meio do seguinte exemplo: Se é possível que choverá amanhã e é possível que não choverá amanhã, então é possível que choverá e não choverá amanhã."("The absurdity appears clearly through the following example: If it is possible that it will rain tomorrow and it is possible that it will not rain tomorrow, then it is possible that it will rain and not rain tomorrow.")

Há, todavia, uma segunda maneira de definir uma conjunção na hierarquia por meio do operador $\oplus$:

$$\alpha \odot \beta \equiv_{def} \neg(\neg\alpha \oplus \neg\beta)$$

A interpretação semântica desse novo operador é dada pela função:

$$v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, v(\alpha) + v(\beta) - 1\}$$

Mas seria $\odot$ de fato uma conjunção? Eis três teoremas em $\mathbf{Ł}_n$ que justificam tal interpretação para esse operador:

Teorema 2.3.6: Seja $\mathbf{L}$ uma lógica entre $\mathbf{Ł}_3$ e $\mathbf{Ł}_n$

(i) $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha \to (\beta \to (\alpha \odot \beta))$

(ii) $\vdash_{\mathbf{L}} (\alpha \odot \beta) \to \alpha$

(iii) $\vdash_{\mathbf{L}} (\alpha \odot \beta) \to \beta$

Demonstração:

(i)
- se $v(\alpha) + v(\beta) > 1$, então $v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, v(\alpha) + v(\beta) - 1\} = v(\alpha)+v(\beta)-1$. Daí podemos concluir que $v(\beta \to (\alpha \odot \beta)) = \min\{1, 1 - v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) - 1\} = \min\{1, v(\alpha)\} = v(\alpha)$. Por fim, temos que $v(\alpha \to (\beta \to \alpha \odot \beta)) = \min\{1, 1 - v(\alpha) + v(\alpha)\} = \min\{1, 1\} = 1$.
- se $v(\alpha) + v(\beta) < 1$, então $v(\alpha \odot \beta) = 0$. Daí $v(\beta \to (\alpha \odot \beta)) = \min\{1, 1 - v(\beta) + 0\} = 1 - v(\beta)$. Finalmente $v(\alpha \to (\beta \to (\alpha \odot \beta)) = \min\{1, 1 - v(\alpha) + 1 - v(\beta)\} = \min\{1, 2 - v(\alpha) - v(\beta))\}$. Visto que $v(\alpha) + v(\beta) < 1$, então $2 - v(\alpha) - v(\beta) \geq 3$. Logo $v(\alpha \to (\beta \to (\alpha \odot \beta))) = 1$.

(ii)
- se $v(\alpha) + v(\beta) > 1$, então $v(\alpha \odot \beta) = v(\alpha) + v(\beta) - 1$. Daí temos que $v((\alpha \odot \beta) \to \alpha) = \min\{1, 1 - (v(\alpha) + v(\beta) - 1) + v(\alpha)\} = \min\{1, 2 - v(\beta)\} = 1$.
- se $v(\alpha) + v(\beta) \leq 1$, então $v(\alpha \odot \beta) = 0$. Daí $v((\alpha \odot \beta) \to \alpha) = \min\{1, 1 - 0 + v(\alpha)\} = 1$

(iii) Análogo ao caso (ii), substituindo apropriadamente $v(\alpha)$ por $v(\beta)$. ■

Na verdade, observação de Béziau diz respeito não apenas a $\mathbf{Ł}_4$, mas a toda hierarquia de Łukasiewicz. Cf. [B04].

É relevante ressaltar que os teoremas (i),(ii) e (iii) são correlatos aos axiomas (Ax4), (Ax5) e (Ax6) que, como vimos ao longo do Capítulo 1, são o suficiente para considerar $\wedge$ uma conjunção clássica.

Resta agora saber se ao substituirmos $\wedge$ por $\odot$ em todo $\mathbf{Ł}_n$ teremos os mesmos constrangimentos ao interpretarmos $\Diamond$ como "é possível" e $\wedge$ como "e" na linguagem natural. O teorema abaixo mostra como tal constrangimento surge apenas ao usarmos $\wedge$ como operador de conjunção. O problema, no entanto, é dirimido se a conjunção for $\odot$, independentemente de como é definido o operador modal de possibilidade.

Teorema 2.3.7: *S*eja $\mathbf{L}$ uma lógica entre $\mathbf{Ł}_3$ e $\mathbf{Ł}_n$

(i) $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \vDash_{\mathbf{L}} \Diamond(\alpha \wedge \beta)$ mas

(ii) $\Diamond\alpha \odot \Diamond\beta \nvDash_{\mathbf{L}} \Diamond(\alpha \odot \beta)$

(iii) $\Diamond_n\alpha \wedge \Diamond_n\beta \vDash_{\mathbf{L}} \Diamond_n(\alpha \wedge \beta)$ mas

(iv) $\Diamond_n\alpha \odot \Diamond_n\beta \nvDash_{\mathbf{L}} \Diamond_n(\alpha \odot \beta)$

Demonstração:

Para (i), visto que $v(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) = \min\{v(\Diamond\alpha), v(\Diamond\beta)\}$, então para que $v(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) = 1$, temos que $v(\Diamond\alpha) = v(\Diamond\beta) = 1$, o que por sua vez implica que $v(\alpha) \geq \frac{1}{2}$ e $v(\beta) \geq \frac{1}{2}$. Nesse caso, $v(\alpha \wedge \beta) \geq \frac{1}{2}$ e então $v(\Diamond(\alpha \wedge \beta)) = 1$.

Para (ii), tome para cada $\mathbf{Ł}_n$ a valoração $v(\alpha) = v(\beta) = \frac{i}{n-1}$ em que $i = \frac{n}{2}$ se n é par e $i = \frac{n-1}{2}$ se n é ímpar. Observe que a Definição 2.3.2 garante que estamos atribundo valorações do conjunto M, pois teremos sempre i natural tal que $0 \leq i \leq n-1$.

Consideremos primeiramente o caso em que n é impar. Assim, teremos $v(\alpha) = v(\beta) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$. Podemos então inferir que $v(\Diamond\alpha) = v(\Diamond\beta) = \min\{1, 2.\frac{1}{2}\} = 1$. Logo, $v(\Diamond\alpha \odot \Diamond\beta) = \max\{0, 1+1-1\} = 1$ Por outro lado, temos $v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\} = 0$ e $v(\Diamond(\alpha \odot \beta)) = \min\{1, 2.0\} = 0$.

No caso em que n é par, $v(\Diamond\alpha) = v(\Diamond\beta) = \min\{1, 2\frac{i}{2i-1}\}$. Visto que $n \geq 4$, então $i \geq 2$ o que implica que $\frac{2i}{2i-1} \geq 1$. Daí $v(\Diamond\alpha) = v(\Diamond\beta) = 1$ e $v(\Diamond\alpha \odot \Diamond\beta) = \max\{0, 1+1-1\} = 1$. Por outro lado, $v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, \frac{i}{2i-1} + \frac{i}{2i-1} - 1\} = \max\{0, \frac{1}{2i-1}\}$. Mas como $i > 1$, então $\frac{1}{2i-1} > 0$ e $v(\alpha \odot \beta) = \frac{1}{2i-1}$. Por fim, $v(\Diamond(\alpha \odot \beta)) = \min\{1, \frac{2}{2i-1}\}$. Visto que $i \geq 2$, temos então que $3 < 2i$ e $2 < 2i-1$ e então $\frac{2}{2i-1} < 1$. Conclúi-se daí que $v(\Diamond(\alpha \odot \beta)) < 1$.

Para (iii), visto que $v(\Diamond_n\alpha \wedge \Diamond_n\beta) = \min\{v(\Diamond_n\alpha), v(\Diamond_n\beta)\}$, então para que $v(\Diamond_n\alpha \wedge \Diamond_n\beta) = 1$, temos que $v(\Diamond_n\alpha) = v(\Diamond_n\beta) = 1$, o que por sua vez implica que $v(\alpha) \neq 0$ e $v(\beta) \neq 0$. Assim, $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \neq 0$ e então $v(\Diamond_n(\alpha \wedge \beta)) = 1$.

Para (iv), no caso em que n é impar, tomemos a mesma valoração de (ii). Teremos então $v(\Diamond_n \alpha) = v(\Diamond_n \beta) = 1$. Assim, $v(\Diamond_n \alpha \odot \Diamond_n \beta) = \max\{0, 1 + 1 - 1\} = 1$. Por outro lado, $v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\} = 0$ e $v(\Diamond_n(\alpha \odot \beta)) = 0$.

Já no caso em que n é par, tomemos $v(\alpha) = \frac{1}{n-1}$ e $v(\beta) = \frac{n-2}{n-1}$. Considerando $i = 1$ no primeiro caso e $i = n - 2$ no segundo, temos a garantia de que $v(\alpha)$ e $v(\beta)$ recebem valorações do conjunto M da Definição 2.3.2. Temos, por uma lado, que $v(\Diamond_n \alpha) = v(\Diamond_n \beta) = 1$ e assim $v(\Diamond\alpha \odot \Diamond\beta) = \max\{0, 1 + 1 - 1\} = 1$. Por outro lado, $v(\alpha \odot \beta) = \max\{0, \frac{1+(n-2)}{n-1} - 1\} = 0$ e $v(\Diamond_n(\alpha \odot \beta)) = 0$. ■

O Teorema 2.3.7 mostra que o problema da distributividade dos operadores de possibilidade com relação à conjunção nas lógicas de Łukasiewicz pode ser resolvido se considerarmos no contexto modal o operador $\odot$ no lugar de $\wedge$. De maneira análoga, a distributividade dos operadores ne necessidade no que concerne à necessidade é limitada se tomarmos $\oplus$ em vez de $\vee$.

Há, todavia, algumas dificuldades colocadas pelos operadores modais na hieraquia $\mathbf{Ł}_3, \ldots, \mathbf{Ł}_n$ que não podem ser suplantadas substituindo os operadores. Para isso, teremos que considerar certas condições minimais esperadas de uma lógica modal e construir tabelas finitas que garantem que essas condições sejam preservadas. Esse será o tema da próxima subseção.

2.3.2 Lógicas Modais Tetravalentes

Os critérios de Abelardo e Łukasiewicz estão longe de ser consensuais. Béziau oferece novos critérios para demarcar quando uma lógica multi-valorada pode ser encarada como uma lógica modal.

Definição 2.3.8: Uma lógica modal é uma lógica com os operadores $\Box$ e $\Diamond$ na qual valem[80]:

(i)	$\Box\alpha \vDash \alpha$	(ii)	$\alpha \nvDash \Box\alpha$
(iii)	$\alpha \vDash \Diamond\alpha$	(iv)	$\Diamond\alpha \nvDash \alpha$

É digno de nota que as condições acima dizem respeito a certa noção de consequência semântica no contexto de tabelas finitas. Assim, por exemplo, (i) e (ii) devem ser interpretadas, respectivamente, como: se $\Box\alpha$ tem valor designado numa linhas da tabela, então α também tem; α pode ter um valor

[80] Béziau oferece em [B04] critérios sintáticos em vez de semânticos, utilizando $\vdash$. Visto que nosso enfoque aqui é semântico e, ao mesmo tempo, as demonstrações de Béziau enfocam matrizes multi-valoradas, preferimos $\vDash$ em vez de $\vDash$.

designado numa linha da tabela, mas $\Box\alpha$ pode não ter. E analogamente para $\Diamond$.

Não é difícil perceber que a Definição 2.3.8 obriga-nos a descartar qualquer matriz com 3 valores de verdade como contrapartida semântica de uma lógica modal em que os operadores $\Box$ e $\Diamond$ não se colapsem com $\bot$ ou $\top$. Para valer (i) e (ii) ao mesmo tempo precisamos de dois valores designados: todo designado que satisfaz $\Box\alpha$ também satisfaz α mas existe ao menos um valor que satisfaz α e não satisfaz $\Box\alpha$. De modo equivalente, para as condições (iii) e (iv) valerem, temos que considerar dois valores não-designados: se $\Diamond\alpha$ recebe valor não-designado , α recebe não-designado, mas não a recíproca.

Também é imediato o fato do operador $\Box_n$ invalidar em cada $\mathbf{Ł}_n$ a cláusula (ii) da definição acima. Mas a definição original de $\Box$ também invalida a mesma claúsula, visto que se $v(\alpha) = 1$, então $v(\Box\alpha) = 1 - \min\{1, 2(1-1)\} = 1 - 0 = 1$.

Buscando matrizes que satisfaçam as condições acima, Béziau propôe tabelas de quatro valores. Sejam 1^+ e 1^- valores designados enquanto 0^+ e 0^- são não-designados. São propostas as seguintes tabelas para $\Box$ e $\Diamond$:

α	$\Box\alpha$	$\Diamond\alpha$
0^-	0^-	0^-
0^+	0^-	1^+
1^-	0^-	1^+
1^+	1^+	1^+

A interpretação desses valores é: 0^- é necessariamente falso, 0^+ é possivelmente falso, 1^- é possivelmente verdadeiro, 1^+ é necessariamente verdadeiro.

Dentre as propostas de Béziau, concentraremos naquel em que $\wedge$ e $\sim$ obedece as matrizes:[81]

$\wedge$	0^-	0^+	1^-	1^+
0^-	0^-	0^-	0^-	0^-
0^+	0^-	0^+	0^-	0^+
1^-	0^-	0^-	1^-	1^-
1^+	0^-	0^+	1^-	1^+

α	$\sim\alpha$
0^-	1^+
0^+	1^-
1^-	0^+
1^+	0^-

[81] Béziau usa o símbolo $\neg$. Preferimos $\sim$ para manter a distinção de [CF13], como veremos adiante.

Um modo de interpretar as matrizes acima é considerando cada valor como um par ordenado $\langle x, y\rangle$ em que $x \in \{0,1\}$ e $y \in \{+,-\}$. As tabelas de $\wedge$ e $\neg$ respeitam o seguinte comportamento clássico:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\wedge$	$-$	$+$
$-$	$-$	$-$
$+$	$-$	$+$

p	$\sim p$
0	1
1	0

p	$\sim p$
$-$	$+$
$+$	$-$

Veremos como essa notação pode ser esclarecedora no Capítulo 3 para sistemas deônticos e ao combinarmos matrizes em Considerações Finais. Por hora, definamos $\rightarrow$ e $\vee$ analogamante ao caso clássico. Tais definições acarretam as tabelas:

$\rightarrow$	0^-	0^+	1^-	1^+
0^-	1^+	1^+	1^+	1^+
0^+	1^-	1^+	1^-	1^+
1^-	0^+	0^+	1^+	1^+
1^+	0^-	0^+	1^-	1^+

$\vee$	0^-	0^+	1^-	1^+
0^-	0^-	0^+	1^-	1^+
0^+	0^+	0^+	1^+	1^+
1^-	1^-	1^+	1^-	1^+
1^+	1^+	1^+	1^+	1^+

Mais uma vez, se cada valor for visto como um par ordenado, as tabelas de $\{1,0\}$ e $\{+,-\}$ se comportam de maneira clássica.

Béziau denomina **PM4N** a lógica governada pelas matrizes acima.

O Teorema abaixo mostra algumas propriedades desses conectivos modais (usaremos $\alpha \dashv\vdash \beta$ como abreviação de $\alpha \vDash \beta$ e $\beta \vDash \alpha$).

Teorema 2.3.9: Em **PM4N** valem:

(i) $\sim\sim\alpha \dashv\vdash \alpha$

(ii) $\alpha \wedge \beta \dashv\vdash \sim(\sim\alpha \vee \sim\beta)$

(iii) $\Diamond\alpha \dashv\vdash \sim\Box\sim\alpha$

(iv) $\sim\Diamond\sim\alpha \dashv\vdash \Box\alpha$

(v) $\sim(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash \sim\alpha \vee \sim\beta$

(vi) $\Box\Box\alpha \dashv\vdash \Box\alpha$

(vii) $\Diamond\Diamond\alpha \dashv\vdash \Diamond\alpha$

(viii) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \Vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$

Demonstração: Seja $1 = \{1^-, 1^+\}$ e $0 = \{0^-, 0^+\}$.

(i) $v(\sim\sim\alpha) = 1$ sse $v(\sim\alpha) = 0$ sse $v(\alpha) = 1$

(ii) $v(\alpha\wedge\beta) = 1$ sse $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ sse $v(\sim\alpha) = (\sim\beta) = 0$ sse $v(\sim\alpha\vee\sim\beta) = 0$ sse $v\sim(\sim\alpha \vee \sim\beta) = 1$

(iii)
- se $v(\Diamond p) = 1$, então
  - $v(\alpha) = 0^+$ implica $v(\sim\alpha) = 1^-$, $v(\Box\sim\alpha) = 0^-$ e $v(\sim\Box\sim\alpha) = 1^+$
  - se $v(\alpha) = 1$, então $v(\sim\alpha) = 0$. Daí $v(\Box\sim\alpha) = 0$ e $v(\sim\Box\sim\alpha) = 1$
- se $v(\sim\Box\sim\alpha) = 1$, então $v(\Box\sim\alpha) = 0$. Daí
  - se $v(\sim\alpha) = 0$, então $v(\alpha) = 1$ e $v(\Diamond\alpha) = 1^+$
  - se $v(\sim\alpha) = 1^-$, então $v(\alpha) = 0^+$ e $v(\Diamond\alpha) = 1^+$

(iv)
- se $v(\sim\Diamond\sim\alpha) = 1$, então $v(\Diamond\sim\alpha) = 0^-$. Assim, temos $v(\sim\alpha) = 0^-$ e $v(\alpha) = 1^+$. Portanto $v(\Box\alpha) = 1^+$.
- se $v(\Box\alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 1^+$. Daí $v(\sim\alpha) = 0^-$ e $v(\Diamond\sim\alpha) = 0^-$. Portanto $v(\sim\Diamond\sim\alpha) = 1^+$.

(v)
- se $v(\sim(\alpha \wedge \beta)) = 1$, então $v(\alpha \wedge \beta) = 0$.
  - se $v(\alpha) = 0$, então $v(\sim \alpha) = 1$ e $v(\sim\alpha \vee \sim\beta) = 1$.
  - se $v(\beta) = 0$, então $v(\sim \beta) = 1$ e $v(\sim\alpha \vee \sim\beta) = 1$.
- se $v(\sim\alpha \vee \sim\beta) = 1$, então
  - se $v(\sim\alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 0$, $v(\alpha \wedge \beta) = 0$ e $v(\sim(\alpha \wedge \beta) = 1$.
  - se $v(\sim\beta) = 1$, então $v(\beta) = 0$, $v(\alpha \wedge \beta) = 0$ e $v(\sim(\alpha \wedge \beta) = 1$.

(vi)
- se $v(\Box\Box\alpha) = 1$, então $v(\Box\alpha) = 1^+$.
- se $v(\Box\alpha) = 1$, então $v(\Box\alpha) = 1^+$ e $v(\Box\Box\alpha) = 1^+$.

(vii)
- se $v(\Diamond\Diamond\alpha) = 1$, então $v(\Diamond\alpha) \neq 0^-$ e $v(\Diamond\alpha) = 1^+$.
- se $v(\Diamond\alpha) = 1$, então $v(\Diamond\alpha) = 1^+$ e $v(\Diamond\Diamond\alpha) = 1^+$. ■

Béziau não oferece uma axiomática para **PMN4**. Coube a Coniglio e Figallo prôpo-la. Os autores denominam $\mathcal{M}_4 m^{\sim}$ as matrizes obtidas a partir de **PMN4** ao acrescentar uma nova negação:

α	$\neg\alpha$
0^-	1^+
0^+	0^+
1^-	1^-
1^+	0^-

A axiomática oferecida para $\mathcal{M}_4 m^{\sim}$ leva em consideração um novo axioma para a implicação, além de dois axiomas que regulam a interação entre as negações $\neg$ e $\sim$ e mais uma regra para implicação:[82]

(M$_4$1) $(\sim q \to \sim p) \to (\sim q \to p) \to q)$

(M$_4$2) $\neg(\sim p \to q) \to \sim(\neg p \to \sim\neg q)$

(M$_4$3) $\sim(\neg p \to \sim\neg q) \to \neg(\sim p \to q)$

(CP) $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

O cálculo de $\mathcal{M}_4 m^{\sim}$ - denotado pelos autores de $\mathcal{H}_4 m^{\sim}$ - pode ser descrito do seguinte modo:

- $\mathcal{H}_4 m^{\sim} = \mathbf{ICI} \cup \{(ce), (cf), (M_4 1), (M_4 2), (M_4 3), (CP)\}$

Visto ser uma extensão de **ICI**, em $\mathcal{H}_4 m^{\sim}$ valerá o Metateorema da Dedução. Os operadores $\vee$ e $\wedge$ são definidos da maneira clássica, enquanto os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ são definidos na linguagem de $\mathcal{H}_4 m^{\sim}$ como:

- $\Box\alpha \equiv_{def} \sim\alpha \wedge \neg\sim\alpha$
- $\Diamond\alpha \equiv_{def} \sim\alpha \vee \neg\sim\alpha$

É possível ainda definir um operador de consistência $\circ$ do seguinte modo:

$$\circ\alpha \equiv_{def} \Box\alpha \wedge \sim\Box\alpha$$

[82] A axiomática abaixo bem como sua completude é apresentada em [CF13]. Os nomes originais de $(M_4 1)$, $(M_4 2)$ e $(M_4 3)$ são respectivamentes $(A3)$, $(A6)$ e $(A7)$.

Esse conectivo será interpretado pela matriz:

α	$\circ\alpha$
0^-	1^+
0^+	0^-
1^-	0^-
1^+	1^+

Não é difícil verificar que $\mathcal{H}_4m^{\sim}$ é uma lógica paraconsistente em relação a $\neg$, pois se $v(\alpha) = 1^-$ então $v(\neg\alpha) = 1^-$. Por outro lado, seja $1 = \{1^+, 1^-\}$. Se $v(\circ\alpha) = 1$, então ou $v(\alpha) = 1$ ou $v(\neg\alpha) = 1$, o que prova que $\mathcal{H}_4m^{\sim}$ é uma LFI em relação a $\neg$.

Mesmo sendo uma lógica paraconsistente, $\mathcal{H}_4m^{\sim}$ pode ser visto como uma extensão da lógica clássica, visto que satisfaz as condições da Definição 1.2.1. Além disso, restringindo a $\{1^+\}$ o conjunto dos valores de designados, a lógica resultante é uma extensão própria de **S5**. Veremos na próxima seção outros sistemas modais que são ao mesmo tempo extensões próprias de **K** e podem ser caracterizados por matrizes finitas.

2.3.3 Sistemas modais normais caracterizados por matrizes finitas

Vimos na Subseção 2.2.3 que a grande parte dos sistemas modais não é caracterizada por matrizes finitas. Sabemos, em particular, que nenhum sistema entre **K** e **S5** pode ter semântica matricial completa. Coube à Scrogs provar em 1951 um resultado dual ao Teorema de Dugundji: todo sistema modal normal que estende **S5** pode ser caracterizado por matrizes finitas.

Está fora do objetivo dessa Tese apresentar em detalhes a prova de Scrogs, visto que tal demonstração faz uso de alguns resultados em álgebra modal. Queremos apenas relembrar o leitor da noção de extensão própria conforme a Definição 1.2.13, que está pressuposta na enunciação do Teorema de Scrogs.

Estamos aptos a enunciar com rigor o resultado de Scrogs:

Teorema 2.3.10: Toda extensão própria de **S5** pode ser caracterizada por matrizes finitas. □

Como consequência do teorema acima, temos o corolário abaixo:

Corolário 2.3.11: Seja $\mathbf{L}$ uma extensão própria de $\mathbf{S5}$ construída do seguinte modo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{S5} \cup \{D_n\} \qquad (\text{para } n \in \mathbb{N})$$

Em que D_n é uma instanciação da fórmula de Dugundji da Definição 2.2.1. Então

- se $\mathbf{L}'$ é uma extensão própria de $\mathbf{S5}$, então $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}'$ e $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$
- $\mathbf{L}$ pode ser caracterizado por matrizes de k valores de verdade en que $n < 2^k \leq n + 1$. $\square$

O corolário acima garante que todas as extensões próprias de $\mathbf{S5}$ podem ser caracterizadas acrescentando certa instância da fórmula de Dugundji. Em particular, seja $\mathcal{M}_4m$ as matrizes $\mathcal{M}_4m^{\sim}$ restritas a um único valor designado. Tomemos a axiomática abaixo:

- $\mathcal{H}_4m = \mathbf{S5} \cup \{D_3\}$

De acordo com o Corolário 2.3.11 sabemos que $\mathcal{M}_4m$ é uma semântica correta e completa para $\mathcal{H}_4m$.

Mas seria $\mathbf{S5}$ o único sistema modal com a propriedade enunciada pelo Teorema 2.3.10? Denominemos *crítico* um sistema normal modal cujas todas as extensões própria podem ser caracterizadas por matrizes finitas. Esakia e Meski provaram em 1977 que há cinco sistemas críticos que são extensões próprias de $\mathbf{S4}$.[83]

Vimos na Subseção 2.2.2 alguns sistemas modais normais denominados não-Lewis propostos por Sobociński. Esses sistemas são ao mesmo tempo extensões de $\mathbf{S4}$ sem estarem contidos em $\mathbf{S5}$. Vimos por hora os sitemas $\mathbf{K1.1}$, $\mathbf{K1.2}$, $\mathbf{K2}$, $\mathbf{K2.1}$, $\mathbf{K3}$ e $\mathbf{K3.1}$. Visto não estar nos dois catálogos que guiam essa Tese, deixamos propositadamente de mencionar $\mathbf{K3.2}$, construído levando em conta axioma:[84]

[83] Em [EM77].

[84] Essa não é o axiomática orignal de Sobociński em [Sob70]. O autor considera os axiomas:

(D1) $(\Box p \strictif q) \vee (\Box q \strictif p)$

(F1) $(\Box p \strictif q) \wedge (\Diamond\Box q \to p)$

(K1) $(\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q) \strictif \Diamond(p \wedge q)$

E define os sistemas:

- $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} \cup \{(D1)\}$
- $\mathbf{S4.3.2} = \mathbf{S4.3} \cup \{(F1)\}$

(K3) $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Diamond\Box q \rightarrow p)$

Esakia e Meski apresentam ainda um novo axioma sem dá-lo um nome, mas que denominaremos $(K2)$.

(K2) $p \rightarrow \Box(\neg p \rightarrow \Box(p \rightarrow \Box p)$

Estamos aptos a apresentar dois novos sistemas não-Lewis:

- $\mathbf{K3.2} = \mathbf{S4} \cup \{(K3), (M)\}$
- $\mathbf{K2.2} = \mathbf{S4.2} \cup \{(K2)\}$

Eis uma maneira de enunciar o resultado de Esakia e Meski:

Teorema 2.3.12: Toda extensão própria dos sistemas **K1.2**, **K2.2**, **K3.1** ou **K3.2** pode ser caracterizada por matrizes finitas. $\Box$

Em outras palavras, há cinco sistemas críticos que são extensões próprias de **S4**: os quatro mencionados no teorema acima mais **S5**.

Pode-se verificar pela Figura 2.1 que **S4.4M** é um extensão própria de **K1.2**. Como corolário do Teorema 2.3.12 sabemos que **S4.4M** é uma extensão própria de **K1.2** e que, portanto, pode ser caracterizado por matrizes finitas. Diferentemente de Scroggs, os autores não dizem de que maneira é possível obter tais matrizes. Resta como problema aberto encontrar matrizes finitas como semântica para **S4.4M** que, por sua vez, tem semântica completa via modelos de Kripke.

Se por um lado Esakia e Meski generalizaram o Teorema de Scrogs, por outro lado, com a noção de sistemas críticos, surge naturalmente a seguinte pergunta: quantos sistemas críticos que são extensões próprias de **K** existem? Visto que **K** é o sistema normal modal minimal, a resposta a essa pergunta seria fundamental para responder uma pergunta mais geral: Quais sistemas modais normais podem ser caracterizados por matrizes finitas?

Ainda não estamos aptos a respondê-las, mas nosso trabalho já contribui em respondê-la de maneira dual ao resultado de Esakia e Meski. No que concerne aos sistemas modais não-normais, as mesmas perguntas poderiam ser colocadas, a saber: quantos sistemas críticos que são extensões próprias de $\mathbf{S0.5}^0$ existem

- $\mathbf{K3.2} = \mathbf{S4.3.2} \cup \{(K1)\}$

Procuramos apresentar o sistema tal qual apresentado por [EM77], usando o nome $(K3)$ para fazer referência ao sistema **K3.2** e evitar confusões com o axioma $(K1)$ de Feys.

e quais sistemas modais não-normais podem ser caracterizados por matrizes finitas.

Sem ter a garantia de que é possível encontrar uma solução para essas perguntas, comprometemos em estudá-la em trabalho futuro. Por hora, esperamos que nosso trabalho tenha se não contribuído par respondê-las, ao menos tenha ajudado a compreendê-las melhor e a formulá-las com mais precisão.

3. COMPLETUDE POR NMATRIZES FINITAS

Os dois primeiros capítulos da Tese têm um caráter essencialmente negativo: restringimo-nos a mostrar detalhamente resultados de incompletude por matrizes finitas, nos limitando a citar certas completudes por tabelas finitas sem demonstrá-las.

Já o presente capítulo é prioritariamente positivo, no sentido de priorizar os resultados de completude. Na Seção 3.1 apresentamos semânticas completas para todos os sistema proposicionais do Capítulo 1, deixando em segundo plano os resultados de incompletude.

A Seção 3.2, por sua vez, prova em detalhes a completude para 16 sistemas modais, cuja relação entre eles esperamos que seja esclarecida ao longo do capítulo. Por ora, salientamos que não encontramos tais demonstrações na literatura, sendo 11 dessas semânticas de nossa autoria. Nesses resultados, portanto, se concentra a contribuição positiva da Tese e seu aspecto mais original.

3.1 Semânticas Não-Determinísticas para a Lógica Proposicional

Vimos no Capítulo 1 que **IPC** (e alguns de seus fragmentos) não é caracterizável por matrizes finitas. Vimos também no mesmo capítulo o resultado que garante que nenhum dos cálculos $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ tem semântica matricial completa. A primeira semântica para essa hierarquia de sistemas foi proposta em 1977 por da Costa e Alves com a noção de *semi-valoração*. De fato, veremos que não apenas essa hieraquia e **IPC**, mas todos sistemas listados no Capítulo 1 terão uma semântica completa via semi-valorações. Esse é o tema da Subseção 3.1.1.

Também vimos que a maioria das LFI's não são caracterizáveis por tabelas finitas. Recentemente foram propostas independentemente duas alternativas às semi-valorações: as *Matrizes Não-determinísticas* e as *Semânticas de Traduções Possíveis*, que são o tema da Subseção 3.1.2 e Subseção 3.1.3, respectivamente.

Gostaríamos, por fim, de salientar que essa seção não se restringe a fornecer uma interpretação aos cálculos proposicionais do Capítulo 1. Ela visa também introduzir a noção de semântica não-determinística, que será usada ao longo da Tese como alternativa aos cálculos incompletos por tabelas finitas.

3.1.1 Semi-valorações

Temos usado ao longo da Tese a noção intuitiva de *valoração*. Em particular, valorações em **PC** são funções que - dado uma atribuição de valor do conjunto $\{0,1\}$ (ou V e F) às variáveis proposicionais - associam um único valor nesse mesmo conjunto a certa fórmula em que essas variáveis ocorrem. Como vimos na Seção 1.1, essa parece ser a noção que Wittgenstein tinha em mente ao propor suas tabelas. Tabelas multivaloradas finitas podem ser vistas como generalizações de tabelas bivaloradas, em que se associa um elemento m do conjunto de valores M que contêm mais do que dois elementos.

Há, todavia, outra maneira de generalizar a noção de *valoração*. Dado uma atribuição de valores às variáveis proposicionais, podemos associar um valor não-determinado no conjunto de valores $\{0,1\}$. Tomemos o caso da negação. Uma maneira simples de exemplificar essa situação é com a cláusula:

$$v(\neg\alpha) = 0 \text{ implica } v(\alpha) = 1$$

Aqui, a função que calcula $v(\neg\alpha)$ é uma valoração apenas quando $v(\alpha) = 0$. Caso contrário, nada podemos afirmar sobre o valor de $v(\neg\alpha)$, sendo assim uma semi-valoração. Feitas as considerações acima, define-se a semântica dos **C**-sistemas do seguinte modo:

Definição 3.1.1: Seja For um conjunto de fórmulas da linguagem de $\mathbf{C}_n$ para $1 \leq n < \omega$. Seja ainda $\alpha, \beta \in For$. Cada semi-valoração $v_n : For \longrightarrow \{0,1\}$ de cada $\mathbf{C}_n$ respeita as cláusulas abaixo:

(i) $v_n(\neg\alpha) = 0$ implica $v_n(\alpha) = 1$

(ii) $v_n(\neg\neg\alpha) = 1$ implica $v_n(\alpha) = 1$

(iii) $v_n(\circ^{(n)}\beta) = v_n(\alpha \to \beta) = v_n(\alpha \to \neg\beta) = 1$ implica $v_n(\alpha) = 0$

(iv) $v_n(\alpha \to \beta) = 1$ sse $v_n(\alpha) = 0$ ou $v_n(\beta) = 1$

(v) $v_n(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v_n(\alpha) = v_n(\beta) = 1$

(vi) $v_n(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v_n(\alpha) = 1$ ou $v_n(\beta) = 1$

(vii) $v_n(\circ^{(n)}(\alpha \to \beta)) = 0$ implica $v_n(\alpha) = 0$ ou $v_n(\beta) = 0$

(viii) $v_n(\circ^{(n)}(\alpha \wedge \beta)) = 0$ implica $v_n(\alpha) = 0$ ou $v_n(\beta) = 0$

(ix) $v_n(\circ^{(n)}(\alpha \vee \beta)) = 0$ implica $v_n(\alpha) = 0$ ou $v_n(\beta) = 0$ □

Da Costa e Alves mostram a completude de $\mathbf{C}_1$ com relação a v_1, garantindo que para os demais sistemas a prova é análoga.[1]

A semântica de semi-valorações mostrou-se completa para uma série de sistemas que não podem ter matrizes finitas como semântica. No caso das LFI's, temos o seguinte resultado:[2]

Teorema 3.1.2: Seja For° um conjunto de fórmulas na linguagem proposicional acrescida do operador primitivo $\circ$. Seja $v : For^\circ \longrightarrow \{0, 1\}$ uma semi-valoração. Considere agora as seguintes cláusulas:

(i) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$

(ii) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$

(iii) $v(\alpha \to \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$

(iv) $v(\neg\alpha) = 0$ implica $v(\alpha) = 1$

(v) $v(\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$

(vi) $v(\neg\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 1$

(vii) $v(\circ\neg^n\circ\alpha) = 1$ (para $n \geq 1$)

(viii) $v(\neg\neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 1$

(ix) $v(\alpha) = 1$ implica $v(\neg\neg\alpha) = 1$

(x) $v(\circ(\alpha\sharp\beta)) = 0$ implica $v(\circ\alpha) = 0$ ou $v(\circ\beta) = 0$ (para $\sharp \in \{\wedge, \vee, \to\}$)

(xi) $v(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$

Cada lógica $\mathbf{L}$ é correta e completa se a função v respeita as cláusulas acima de acordo com a tabela abaixo:

[1] O resultado de da Costa e Alves se encontra em [dCA77].
[2] Demonstrado em [CCM07].

LÓGICA	CLÁUSULAS	LÓGICA	CLÁUSULAS
mbC	$(i) - (v)$	**Cia**	$(i) - (viii)$ e (x)
bC	$(i) - (v)$ e $(viii)$	**Ciae**	$(i) - (x)$
mbCe	$(i) - (v)$ e (ix)	**Cl–**	$(i) - (iii)$, (v) e (xi)
bCe	$(i) - (v)$ e $(viii) - (ix)$	**Cl**	$(i) - (v)$ e (xi)
mCi	$(i) - (vii)$	**Cil**	$(i) - (viii)$ e (xi)
Ci	$(i) - (viii)$	**Cila**	$(i) - (viii)$ e $(x) - (xi)$
Cie	$(i) - (ix)$	**Cilae**	$(i) - (xii)$

□

Há, ainda, semântica de semi-valorações correta e completa para **IPI**, **IPK**, **IPA**, **IPC**$^+$ e **IPC**. É o que garante o teorema abaixo:[3]

Teorema 3.1.3: Seja $For_{\mathbf{L}}$ um conjunto de fórmulas gerados acrescidos na linguagem proposicional de **L** para $\mathbf{L} \in \{\mathbf{IPI}, \mathbf{IPK}, \mathbf{IPA}, \mathbf{IPC}^+, \mathbf{IPC}.\}$. Seja $v : For_{\mathbf{L}} \longrightarrow \{0,1\}$ uma semi-valoração. Considere agora as seguintes cláusulas:

(i) $v(\alpha \to \beta) = 0$ implica $v(\beta) = 0$

(ii) $v(\alpha \to \beta) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$

(iii) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$

(iv) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$

(v) $v(\neg\alpha) = v(\alpha) = 1$ implica $v(\neg\beta) = 1$

(vi) $v(\neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$

Cada lógica **L** é correta e completa quando a função v respeita as cláusulas acima de acordo com a tabela abaixo:

LÓGICA	CLÁUSULAS
IPI	$(i) - (ii)$
IPA	$(i) - (ii)$ e (iv)
IPK	$(i) - (iii)$
IPC$^+$	$(i) - (iv)$
IPC	$(i) - (vi)$

[3] Loparić demonstra em [Lop10] a completude de **IPI**, **IPC**$^+$ e **IPC**. A completude de **IPA** e **IPK** é imediata, restringindo as cláusulas de **IPC** apropriadamente.

$\square$

Gostarímos de ressaltar, por fim, que há uma relação intrínseca entre lógicas multivaloradas e semi-valorações. Considere a lógica $\mathbf{Ł}_3$ e a seguinte função t:

(i) $v(\alpha) = 0$ sse $t(\Box\alpha) = 0$ e $t(\Diamond\alpha) = 0$

(ii) $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ sse $t(\Box\alpha) = 0$ e $t(\Diamond\alpha) = 1$

(iii) $v(\alpha) = 1$ sse $t(\Box\alpha) = 1$

Como demonstrado por Suszsko em 1975, $\mathbf{Ł}_3$ pode ser entendida como uma lógica de dois valores. Evidentemente se t for uma semântica para $\mathbf{Ł}_3$, então t não será vero-funcional, tratando-se portanto de uma semi-valoração.[4]

O resultado de Suzko pode ser generalizado para um conjunto de lógicas denominadas *tarskianas*, como definimos abaixo:

Definição 3.1.4: Seja $\mathbf{L}$ uma lógica, α uma fórmula de $\mathbf{L}$, Γ e Δ conjuntos de fórmulas de $\mathbf{L}$. Dizemos que uma lógica é *tarskiana* quando:[5]

1. $\Gamma, \alpha, \Delta \vDash_{\mathbf{L}} \alpha$
2. se $\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} \alpha$ então $\Gamma, \Delta \vDash_{\mathbf{L}} \alpha$
3. se $\Gamma, \alpha \vDash_{\mathbf{L}} \beta$ e $\Delta \vDash_{L} \alpha$ então $\Gamma, \Delta \vDash \beta$ $\square$

A tese de Suszko pressupõe que uma lógica além de ser tarskiana deve ser estruturada (ou seja, deve permitir substituição uniforme). Essa tese, entretanto, pode ser reformulada nos seguintes termos:[6]

Teorema 3.1.5: Toda lógica tarskiana n-valorada pode ser caracterizada por meio de uma função bivalorada.

O teorema acima garante que lógicas multivaloradas são um caso particular de semi-valorações. Perde-se em geral a vero-funcionalidade quando um conjunto de valores maior ou igual a três é reduzido a dois valores. De qualquer maneira, reduzir os valores de uma lógica multivalorada a apenas "verdadeiro" e "falso" força-nos a refletir em que sentido essas lógicas podem ser vistas como genuinamente multivaloradas.

[4] Vide [Suz75].

[5] Usamos a definição de lógica tarskiana como encontrada em [CCCM05], onde os autores oferecem um algoritmo para transformar tabelas multivaloradas em cláusulas de semi-valorações.

[6] A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [CCCM05].

3.1.2 Matrizes não-determinísticas

Se semi-valorações são generalizações de valorações, é possivel generalizar a definição de matriz por meio de noção de *matriz não-determinística*.

Definição 3.1.6: Dizemos que $\mathcal{N}$ é uma *matriz não-determinística* (ou Nmatriz) de uma lógica $\mathbf{L}$ quando $\mathcal{N}$ é uma tripla $\mathcal{N} = \langle M, D, V \rangle$ em que:

(i) $M \neq \emptyset$

(ii) $D \subseteq M$ é um conjunto de valores designados

(iii) Para cada conectivo n-ário c de $\mathbf{L}$ existe uma função $v \in V$ tal que $v : M^n \longrightarrow \wp(M) - \{\emptyset\}$ □

Em linguagem natural, uma matriz não-determinística nada mais é que uma matriz em que dado um valor de uma variável proposicional p não são associados valores determinados à formula complexa α em que p ocorre, mas um conjunto possível de valores escolhidos não-deterministicamente. Seriam, porém, as semi-valorações um caso particular de Nmatriz, em que $M = \{0, 1\}$?

Tomemos um exemplo. A cláusula (i) da Definição 3.1.1 poderia, a princípio, ser apreendida pela seguinte tabela não-determinística:

<table>
<tr><th>p</th><th>$\neg p$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

Essa parece ser justamente a noção de *quasi-matriz* de Alvez e da Costa. Estendamos a tabela acima com o intuito de calcularmos os valores de $\neg\neg p$.

<table>
<tr><th>p</th><th>$\neg p$</th><th>$\neg\neg p$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

Observe que pela Nmatriz acima na linha 2 podemos ter $v(\neg\neg p) = 1$ mas $v(p) = 0$, contrariando a cláusula (ii) da Definição 3.1.1. Isso mostra dois resultados: semi-valorações não são um caso particular de Nmatrizes e Nmatrizes de

2 valores não são o suficiente para caracterizar $\mathbf{C}_1$. Avron, porém, mostra um resultado muito mais geral:[7]

Teorema 3.1.7: O sistema $\mathbf{C}_1$ de da Costa não pode ser caracterizado por Nmatrizes finitas.

Esse não é o caso, todavia, para todas as lógicas paraconsistentes que não são caracterizáveis por matrizes finitas. Vimos na Subseção 1.2.2 que, de acordo com o Teorema 1.2.24, a lógica **mbC** não pode ser caracterizada por matrizes finitas.

Por outro lado, Avron apresenta Nmatrizes de três valores para **mbC**, **mCi**, **mCie**, $\mathbf{Cl}^{-}$, **Cila** e **Cilae**, provando que essas lógicas não podem ser caracterizadas por Nmatrizes de dois valores. Os três valores são: f, I e t em que t e I são valores designados. O teorema abaixo resume os resultados de completude para esses sistemas.[8]

Teorema 3.1.8: Considere as seguintes Nmatrizes de três valores, em que t e I são valores designados:

$\mathcal{N}^1_\vee$

$\vee$	t	I	f
t	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$
f	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$

$\mathcal{N}^2_\vee$

$\vee$	t	I	f
t	$\{t\}$,	$\{t,I\}$	$\{t\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$
f	$\{t\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$

$\mathcal{N}^1_\wedge$

$\wedge$	t	I	f
t	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
f	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

$\mathcal{N}^2_\wedge$

$\wedge$	t	I	f
t	$\{t\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
f	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$

$\mathcal{N}^1_\to$

$\to$	t	I	f
t	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
f	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$

$\mathcal{N}^2_\to$

$\to$	t	I	f
t	$\{t\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
I	$\{t,I\}$	$\{t,I\}$	$\{f\}$
f	$\{t\}$	$\{t,I\}$	$\{t\}$

[7] Esse resultado foi provado por Avron em [Avr05a].

[8] Os resultados de completude mencionados abaixo foram todos retirados de [Avr07].

$\mathcal{N}_\neg^1$

p	$\neg p$
t	$\{f\}$
I	$\{I,t\}$
f	$\{I,t\}$

$\mathcal{N}_\neg^2$

p	$\neg p$
t	$\{f\}$
I	$\{I,t\}$
f	$\{t\}$

$\mathcal{N}_\neg^3$

p	$\neg p$
t	$\{f\}$
I	$\{I\}$
f	$\{I,t\}$

$\mathcal{N}_\neg^4$

p	$\neg p$
t	$\{f\}$
I	$\{I\}$
f	$\{t\}$

$\mathcal{N}_\circ^1$

p	$\circ p$
t	$\{t,I,f\}$
I	$\{f\}$
f	$\{t,I,f\}$

$\mathcal{N}_\circ^2$

p	$\circ p$
t	$\{t\}$
I	$\{f\}$
f	$\{t\}$

Cada lógica **L** é correta e completa se a semântica de **L** respeita as Nmatrizes acima de acordo com a tabela abaixo:

Lógica	Nmatrizes
mbC	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^1$ e $\mathcal{N}_\circ^1$
mbCe	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^3$ e $\mathcal{N}_\circ^1$
bC	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^2$ e $\mathcal{N}_\circ^1$
bCe	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^4$ e $\mathcal{N}_\circ^1$
Ci	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^2$ e $\mathcal{N}_\circ^2$
Cie	$\mathcal{N}_\wedge^1$, $\mathcal{N}_\vee^1$, $\mathcal{N}_\rightarrow^1$, $\mathcal{N}_\neg^4$ e $\mathcal{N}_\circ^2$
Cia	$\mathcal{N}_\wedge^2$, $\mathcal{N}_\vee^2$, $\mathcal{N}_\rightarrow^2$, $\mathcal{N}_\neg^2$ e $\mathcal{N}_\circ^2$
Ciae	$\mathcal{N}_\wedge^2$, $\mathcal{N}_\vee^2$, $\mathcal{N}_\rightarrow^2$, $\mathcal{N}_\neg^4$ e $\mathcal{N}_\circ^2$

□

Avron ainda obtém uma certa generalização do Teorema 1.2.30:

Teorema 3.1.9: Nenhum sistema entre **Cl** e **Cilae** pode ser caracterizado por Nmatrizes finitas.[9]

Algumas das LFI's aqui apresentadas não foram analisadas por Avron. Esse é caso de **mCi**, **mCie** e **Cl**$^-$. Na se sabe se essas lógicas podem ou não ser

[9] Demonstrado por Avron em [Avr05b] para sistemas que estendem **PC**$^+$ e valem (cl). Como argumentado em [Avr05a], uma maquinaria extra seria necessária para obter Nmatrizes finitas para sistemas que estendem **IPC**$^+$, como é o caso dos sistemas entre **Cl**$^-$ e **Cilae**.

caracterizadas por Nmatrizes finitas e, em caso afirmativo, apresentar suas respectivas Nmatrizes completas. A mesma observação vale para a hierarquia de da Costa, excluindo-se $\mathbf{C}_1$.

3.1.3 Semântica de Traduções Possíveis

Na Subseção 3.1.2, vimos que a definição de Nmatrizes generaliza a de matrizes, pois dado um conectivo n-ário, cada n-tupla de valores de verdade é associado a um conjunto de valores que, em particular, pode ser unitário. Vimos também na Subseção 3.1.1 que as semi-valorações são generalizações de valorações, de modo que toda lógica tarksiana caracterizada por matrizes finitas é caracterizada por semi-valorações. Veremos agora as Semânticas de Traduções Possíveis - ou simplesmente PTS (*Possible Translation Semantics*) - como uma terceira interpretação não-determinística para os cálculos proposicionais não-clássicos.

Introduzidas por Carnielli, as PTS são uma proposta de tornar mais intuitiva a semântica por meio de semi-valorações das lógicas paraconsistentes.[10] A ideia é tomar conjuntos de matrizes finitas como "cenários" possíveis para cada operador: uma fórmula é valida quando recebe um valor designado em um cenário, mas é tautologia quando recebe sempre um valor designado em todos os cenários.

Diferentemente das Nmatrizes, não há resultados de incompletude na literatura com relação às PTS. Por outro lado, essa semântica pode ser vista tanto como generalizações das semi-valorações como das Nmatrizes.[11] Limitaremos aqui a apresentar PTS completas para o cálculo paraconsistente $\mathbf{C}_1$ que, como vimos na Subseção 3.1.2, é incompleto por Nmatrizes.[12]

Para os cálculos $\mathbf{C_1} \ldots \mathbf{C_n}$ considere as seguintes matrizes de 3 valores, em que T e T^- são distinguidos:

[10] Segundo [BS09] p. 137, PTS foram introduzidas por Carnielli em [Car90] como *semântica não-determinística*, a mesma expressão é usada em [AZ07] para se referir às Nmatrizes. Utilizamos aqui a expressão de modo mais amplo, abarcando tanto as PTS como as Nmatrizes e as semi-valorações.

[11] Em [CC05] é demonstrado que as Nmatrizes são um caso particular de PTS. Já em [Mar05] é explorada a relação entre as PTS e as semi-valorações.

[12] As matrizes abaixam se encontram em [Car00]. Uma demonstração detalhada da completude dos cálculos $\mathbf{C_1} \ldots \mathbf{C_n}$ pode ser encontrada em [Mar99].

$\wedge_1$	T	T^-	F
T	T	T	F
T^-	T^-	T^-	F
F	F	F	F

$\wedge_2$	T	T^-	F
T	T	T^-	F
T^-	T	T^-	F
F	F	F	F

$\wedge_3$	T	T^-	F
T	T	T^-	F
T^-	T^-	T^-	F
F	F	F	F

$\vee_1$	T	T^-	F
T	T	T	T
T^-	T^-	T^-	T^-
F	T	T	F

$\vee_2$	T	T^-	F
T	T	T^-	T
T^-	T	T^-	T
F	T	T^-	F

$\vee_3$	T	T^-	F
T	T	T^-	T
T^-	T^-	T^-	T^-
F	T	T^-	F

$\rightarrow_1$	T	T^-	F
T	T	T	F
T^-	T^-	T^-	F
F	T	T	T

$\rightarrow_2$	T	T^-	F
T	T	T^-	F
T^-	T	T^-	F
F	T	T^-	T

$\rightarrow_3$	T	T^-	F
T	T	T^-	F
T^-	T^-	T^-	F
F	T	T^-	T

	$\neg_L$
T	F
T^-	F
F	T

	$\neg_C$
T	F
T^-	T^-
F	T

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes acima. Seja ainda $\textsc{Tr}_n$ conjunto das funções $* : For \longrightarrow \mathcal{M}$ que respeitam as seguintes cláusulas (para facilitar a leitura no lugar de $*(\alpha)$ usaremos α^*):

(tr0) para as variáveis atômicas

(a) $p^* = p$

(b) $(\neg p)^* = \neg_C p$

(tr1) para fórmulas do tipo $\alpha\sharp\beta$ em que $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

(a) se $\alpha\sharp\beta$ é $\alpha \wedge \neg\alpha$, então $(\alpha \wedge \neg\alpha)^* = \alpha^* \wedge_3 (\neg\alpha)^*$, senão

(b) $(\alpha\sharp\beta)^* = \alpha^*\sharp_1\beta^*$ se $(\neg\alpha)^* = \neg_C\alpha^*$ e $(\neg\beta)^* = \neg_L\beta^*$

(c) $(\alpha\sharp\beta)^* = \alpha^*\sharp_2\beta^*$ se $(\neg\alpha)^* = \neg_L\alpha^*$ e $(\neg\beta)^* = \neg_C\beta^*$

(d) $(\alpha\sharp\beta)^* = \alpha^*\sharp_3\beta^*$ caso contrário *(tr2)* para fórmulas do tipo $\neg(\alpha\sharp\beta)$ em que $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

(a) se $\alpha\sharp\beta$ é $\circ^{(n-1)}\gamma \wedge \neg\circ^{(n-1)}\gamma$ para algum γ, então $(\neg(\circ^{(n-1)}\gamma \wedge \neg\circ^{(n-1)}\gamma))^* = \neg_L(\circ^{(n-1)}\gamma \wedge \neg\circ^{(n-1)}\gamma)^*$, senão

(b) $(\neg(\alpha\sharp\beta))^* = \neg_L(\alpha\sharp\beta)^*$ se $(\neg\alpha)^* = \neg_L\alpha^*$ e $(\neg\beta)^* = \neg_L\beta^*$

(c) $(\neg(\alpha\sharp\beta))^* \in \{\neg_L(\alpha\sharp\beta)^*, \neg_C(\alpha\sharp\beta)^*\}$ caso contrário

(tr3) para fórmulas do tipo $\neg\neg\alpha$

(a) se α é $\gamma\wedge\neg\gamma$ para algum γ e se $(\neg\alpha)^* = \neg_C(\gamma\wedge\neg\gamma)^*$, então $(\neg\neg\alpha)^* = \neg_C(\neg\alpha)^*$, senão

(b) $(\neg\neg\alpha)^* = \neg_L(\neg\alpha)^*$, se $(\neg\alpha)^* = \neg_L\alpha$

(c) $(\neg\neg\alpha)^* \in \{\neg_L(\neg\alpha)^*, \neg_C(\neg\alpha)^*\}$ caso contrário

Denominamos $\mathrm{PT}_n = \langle \mathcal{M}, \mathrm{T}\textsc{r}_n \rangle$ uma estrutura semântica de tradução possível para $\mathbf{C}_n$. Se $\vDash_{\mathcal{M}}$ é a relação de conseqüência sobre $\mathcal{M}$, então

$$\Gamma \vDash_{\mathrm{PT}_n} \alpha \text{ sse } \Gamma^* \vDash_{\mathcal{M}} \alpha^* \text{ para toda tradução } * \text{ em } \mathrm{T}\textsc{r}_n$$

Temos, assim, o seguinte resultado de completude:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{C_n}} \alpha \text{ sse } \Gamma \vDash_{\mathrm{PT}_n} \alpha$$

Resultados de completude via PTS também podem ser obtidos para **mbC**, **mCi**, **bC**, **Ci**, **bCe** e **Cie**.[13] Visto PTS serem generalizações de Nmatrizes, temos também de acordo com Teorema 3.1.8 PTS completas para **mbCe**, **Cia** e **Ciae**. Resta saber se é possível obtê-las para os sistemas $\mathbf{Cl}^-$, **mCie** e sobretudo os cálculos entre **Cl** e **Cilae**, pois pelo Teorema 3.1.9 sabemos que esses cálculos não são caracterizáveis por Nmatrizes finitas.

3.2 Completude Modal por Nmatrizes de 4 e 6 valores

Mesmo ofuscadas pelo sucesso da semântica relacional de Kripke, algumas abordagens heterodoxas iluminaram - ainda que timidamente - nossa compreensão sobre os operadores modais de necessário e possível. Esse é o caso das (N)matrizes modais de 4-valores com níveis de valoração propostas por Kearns para os sistemas **T**, **S4** e **S5**.[14] O autor, entretanto, se limita a mostrar

[13] Esses resultados podem ser conferidos em [Mar04].
[14] Propostas em [Kea81].

a completude apenas para **T** considerando um sistema de Dedução Natural. Mostraremos a completude desses sistemas (e do sistema **B**) considerando suas respectivas axiomáticas apresentadas na Subseção 3.2.2.

Já na Subseção 3.2.1, nosso esforço será o contrário: encontrar a respectivas axiomáticas das (N)matrizes acima referidas sem níveis de valoração, obtendo assim os sistemas **Tm**, **4m**, **5m** e **Bm**. Alguns desses sistemas já haviam sido estudados por Ivlev. Nós os denominaremos *sistemas de Ivlev* em sua homenagem.

Por fim, na Subseção 3.2.3 apresentaremos matrizes de 6 valores substituindo nos sistemas acima o axioma (T) por (D). Argumentaremos ainda porque 4 valores não seriam o suficiente para esses sistemas e porque acreditamos que nossa semântica - mesmo fadada ao ofuscamento pela semântica relacional - fornece uma trêmula luz para esclarecer as noções de *necessário* e de *possível* no contexto deôntico.

3.2.1 Os sistemas de Ivlev

Antes dos trabalhos de Avron, Ivlev já havia em 1988 proposto Nmatrizes de dois valores para interpretar os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ da seguinte maneira:[15]

p	$\Box p$
t	t
	f
f	f

p	$\Diamond p$
t	t
f	t
	f

O Cáculo $\mathbf{S}_{min}$ é obtido acrescentando à linguagem de **PC** os operadores $\Box$ e $\Diamond$. Do ponto de vista axiomático, temos:

- $\mathbf{S}_{min} = \mathbf{PC} \cup \{(T), (T_\Diamond)\}$

Retomemos a Subseção 2.3.1. As condições (i) e (ii) do que Łukasiewicz interpretou como sendo os requisitos mínimos de uma lógica modal são justamente os axiomas (T) e $(T_\Diamond)$. Quanto às condições (iii) e (iv), as tabelas abaixo nos dão a resposta:

p	$\neg p$	$\Diamond p$	$\neg\Diamond p$	$\neg\Diamond p \to \neg p$
t	f	t	f	t
f	t	t	f	t
		f	t	t

[15] Todos os resultados de Ivlev aqui referidos foram retirados de [Ivl88].

p	$\Box p$	$p \to \Box p$	$p \to (p \to \Box p)$
t	t	t	t
	f	f	f
f	f	t	t

As tabelas acima mostram que a condição (iii) é satisfeita em $\mathbf{S}_{min}$, o que não acontece com a condição (iv). Todavia, justamente por ser mais polêmica, não acreditamos ser um empecilho para que $\mathbf{S}_{min}$ seja considerada uma lógica modal.[16]

É digno de nota que $\mathbf{S}_{min}$ satisfaz as condições $(i) - (iv)$ da Definição 2.3.8, como podemos verificar imediatamente pelas Nmatrizes de $\Box$ e $\Diamond$. Desse modo, não vemos motivo para que $\mathbf{S}_{min}$ não seja considerada genuinamente uma lógica modal.

Ivlev constrói na verdade uma hierarquia de sistemas a partir de $\mathbf{S}_{min}$. O seu conjunto de valores é ampliado para quatro: t^n (necessariamente verdadeiro), t^c (contingentemente verdadeiro), f^c (contingentemente falso) e f^i (impossível); t^n e t^c são valores distinguidos. Seja $t = \{t^n, t^c\}$ e $f = \{f^c, f^i\}$. Para efeito de simplificação, dado o conjunto de valores M e o valor $m \in M$, usaremos a notação m no lugar de $\{m\}$ para uma Nmatriz. Considere agora as seguintes tabelas:

$\mathcal{N}_{\to}$

p	$\neg p$
t^n	f^i
t^c	f^c
f^c	t^c
f^i	t^n

$\mathcal{M}_{\neg}$

$\to$	t^n	t^c	f^c	f^i
t^n	t^n	t^c	f^c	f^i
t^c	t^n	t	f^c	f^c
f^c	t^n	t	t	t^c
f^i	t^n	t^n	t^n	t^n

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{T}}$

p	$\Box p$
t^n	t
t^c	f
f^c	f
f^i	f

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{B}}$

p	$\Box p$
t^n	t
t^c	f
f^c	f^i
f^i	f^i

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{4}}$

p	$\Box p$
t^n	t^n
t^c	f
f^c	f
f^i	f

$\mathcal{M}_{\Box}^{\mathbf{5}}$

p	$\Box p$
t^n	t^n
t^c	f^i
f^c	f^i
f^i	f^i

[16] De fato, $p \to (p \to \Box p)$ não é teorema na maioria das lógicas modais. Veremos na seção a seguir que nenhuma extensão de **D** ou **D2** (excetuando-se **Triv**) valida a fórmula em questão.

Essas tabelas serão usadas na próxima seção para apresentarmos uma semântica alternativa aos sistemas **T**, **B**, **S4** e **S5**.[17] Por ora, considere os axiomas abaixo:

(M1) $\neg\Diamond p \to \Box(p \to q)$

(M2) $\Box q \to \Box(p \to q)$

(M3) $\Diamond q \to \Diamond(p \to q)$

(M4) $\Diamond\neg p \to \Diamond(p \to q)$

Considere ainda a seguinte regra:

(DN) $\dfrac{\alpha[\neg\neg\beta]}{\alpha[\beta]}\ \dfrac{\alpha[\beta]}{\alpha[\neg\neg\beta]}$

A regra (DN) significa que podemos substituir cada ocorrência de $\neg\neg\beta$ na fórmula α por β e vice-versa. Por meio dessa regra, dos axiomas acima, e definindo $\Diamond$ e $\vee$ à maneira clássica, construiremos os seguintes sistemas:[18]

- $\mathbf{Tm} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (K1), (K2), (M1) - (M4), (T), (DN)\}$
- $\mathbf{4m} = \mathbf{Tm} \cup \{(4)\}$
- $\mathbf{Bm} = \mathbf{Tm} \cup \{(B)\}$
- $\mathbf{5m} = \mathbf{4m} \cup \{(5)\}$

Mostraremos a corretude e a completude desses sistemas.[19] Mostraremos os resultados de corretude e completude primeiramente para **Tm**. Em particular, para a corretude será conveniente consultar as tabelas dos operadores definidos $\Diamond$ e $\vee$:

[17] Essas não são originalmente as tabelas de Ivlev. De fato, $\mathcal{M}_\neg$, $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{T}}$, $\mathcal{M}_\Box^{\mathbf{5}}$ e $\mathcal{M}_\to$ já se encontram em seu artigo. Kearns propõe indepentemente em [Kea81] as mesmas (N)matrizes, acrescentando uma Nmatriz para **S4**. A diferença entre $\mathcal{M}_\Box^{\mathbf{4}}$ e a Nmatriz de Kearns para **S4** está na última linha. Na nossa proposta f^i é substituido por f, visto que não conseguimos obter a completude por meio da proposta de Kearns. Já $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{B}}$ é de nossa própria autoria.

[18] Essa não é a formalização origninal de Ivlev para os sistemas **Tm** e **5m**, denominados $\mathbf{Sa}^+$ e $\mathbf{Sb}^+$, respectivamente. Orignalmente os operadores $\Box$ e $\Diamond$ são tratados independentemente. Já os sitemas **Bm** e **4m** são de nossa autoria.

[19] Ivlev garante ter obtido esses resultados para uma série de sistemas, incluindo **Tm** e **5m**. Todavia sua referência está em russo e, dada a barreira idiomática e pela importância que esses resultados terão na próxima subseção, decidimos reconstruir a prova.

$\mathcal{N}_{\vee}$

$\vee$	t^n	t^c	f^c	f^i
t^n	t^n	t^n	t^n	t^n
t^c	t^n	t	t	t^c
f^c	t^n	t	f^c	f^c
f^i	t^n	t^c	f^c	f^i

$\mathcal{N}_{\Diamond}^{\mathbf{T}}$

p	$\Diamond p$
t^n	t
t^c	f
f^c	f
f^i	f

Uma fórmula α é uma tautologia em **Tm** (notação: $\vDash_{\mathbf{Tm}} \alpha$) quando interpretada em $\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{T}}$, $\mathcal{M}_{\neg}$ e $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ recebe um dos valores designados t^n ou t^c.

Teorema 3.2.1 (Corretude fraca para Tm): Seja α uma fórmula de **Tm**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{Tm}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{Tm}} \alpha$$

Demonstração:

(Ax1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

- se $v(p) \in t$, então $v(q \rightarrow p) \in t$ e $v(Ax1) \in t$.
- se $v(p) \notin t$, então $v(p) \in f$ e $v(Ax1) \in t$.

(Ax2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- se $v(r) \in t$, então $v(p \rightarrow r) \in t$. Daí podemos concluir que $v((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in t$ e $v(Ax2) \in t$.
- se $v(r) \notin t$, então:
  - ∗ se $v(p) \in t$, então
    - · se $v(q) \in t$, então $v(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \notin t$, o que implica que $v((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in t$ e $v(Ax2) \in t$.
    - · se $v(q) \notin t$, então $v(q \rightarrow r) \in t$ e $v(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \in t$. Por outro lado $v(p \rightarrow r) \notin t$, o que implica que teremos $v((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)) \notin t$ e $v(Ax2) \in t$.
  - ∗ se $v(p) \notin t$, então $v(p \rightarrow r) \in t$ e $v(Ax2) \in t$.

(Axm) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$

- se $v(q) \in t$, então $v((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q) \in t$ e $v(Ax2) \in t$.
- se $v(q) \notin t$, então $v(\neg q) \in t$

    * se $v(p) \in t$, então $v(\neg p) \in f$. Daí $v(\neg q \to \neg p) \in f$ e $v(Axm) \in t$
    * se $v(p) \notin t$, então $v(\neg q \to p) \in f$. Daí $v((\neg q \to p) \to p) \in t$ e $v(Axm) \in t$

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

- se $v(p) = f^i$ ou $v(q) = t^n$, então $v(\Box p) \in f$ ou $v(\Box q) \in t$. Temos portanto que $v(\Box p \to \Box q) \in t$ e $v(K1) \in t$
- se $v(p) \neq f^i$ e $v(q) \neq t^n$, então $v(p \to q) \neq t^n$ e $v(\Box(p \to q)) \in f$. Conclui-se então que $v(K) \in t$.

(K1) $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q))$

- se $v(p) = f^i$ ou $v(q) = t^n$ então $v(\Diamond p) \in f$ ou $v(\Diamond q) \in t$. Assim $v(\Diamond p \to \Diamond q) \in t$ e $v(K1) \in t$.
- se $v(p) \neq f^i$ e $v(q) \neq t^n$ então $v(p \to q) \neq t^n$ e $v(\Box(p \to q)) \in f$. Logo $v(K1) \in t$.

(K2) $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$

- se $v(p) = f^i$ e $v(q) = f^i$ então $v(p \vee q) = f^i$ e $v(\Diamond(p \vee q)) \in f$. Logo $v(K2) \in t$.
- se $v(p) \neq f^i$ ou $v(q) \neq f^i$ então $v(\Diamond p) \in t$ ou $v(\Diamond q) \in t$. Daí $v(\Diamond p \vee \Diamond q) \in t$ e $v(K2) \in t$.

(M1) $\neg\Diamond p \to \Box(p \to q)$

- se $v(q) = t^n$, então $v(p \to q) = t^n$. Daí $v(\Box(p \to q)) \in t$ e $v(M1) \in t$
- se $v(q) \neq t^n$, então:
    * se $v(p) = f^i$, então $v(p \to q) = t^n$. Daí $v(\Box(p \to q)) \in t$ e $v(M1) \in t$.
    * se $v(p) \neq f^i$, então $v(\neg p) \neq t^n$. Daí temos $v(\Box\neg p) \in f$ e $v(\neg\neg\Box\neg p) \in f$. Pela Definição de $\Diamond$, temos que $v(\neg\Diamond p) \in f$ e portanto $v(M1) \in t$.

(M2) $\Box q \to \Box(p \to q)$

- se $v(q) \neq t^n$, então $v(\Box q) \in f$ e $v(M1) \in t$
- se $v(q) = t^n$, então $v(p \to q) = t^n$, $v(\Box(p \to q)) \in t$ e $v(M3) \in t$

(M3) $\Diamond q \to \Diamond(p \to q)$

- se $v(q) = f^i$, então $v(\Diamond q) \in f$ e $v(M3) \in t$
- se $v(q) \neq f^i$, então $v(p \to q) \neq f^i$, $v(\Diamond(p \to q)) \in t$ e $v(M3) \in t$

(M4) $\Diamond\neg p \to \Diamond(p \to q)$

- se $v(p) = t^n$, então $v(\neg p) = f^i$, $v(\Diamond\neg p) \in f$ e $v(M4) \in t$
- se $v(p) \neq t^n$, então $v(p \to q) \neq f^i$, $v(\Diamond(p \to q)) \in t$ e $v(M4) \in t$

(T) $\Box p \to p$

- se $v(p) = t^n$ então $v(T) = t^n$
- se $v(p) \neq t^n$ então $v(\Box p) \in f$ e $v(T) \in t$

(DN) $\dfrac{\alpha[\neg\neg\beta]}{\alpha[\beta]}$ $\dfrac{\alpha[\beta]}{\alpha[\neg\neg\beta]}$

- Basta notar que em $\mathcal{M}_\neg$ para todo valor $m \in M$ temos $v(\beta) = m$ sse $v(\neg\neg\beta) = m$

(MP) α, $\alpha \to \beta$ implica β

- Basta notar que em $\mathcal{M}_\to$ temos que se $v(\alpha) \in t$ e $v(\alpha \to \beta) \in t$, então $v(\beta) \in t$. ■

Mostraremos agora a completude de **Tm** construindo uma valoração canônica por meio de um conjunto maximal consistente de fórmulas. Dizemos que um conjunto Δ é maximal consistente em **Tm** quando Δ é consistente e se acrescentarmos a Δ qualquer fórmula α de **Tm** então Δ se torna inconsistente. O Lema de Lindenbaum garante que, dado um conjunto **Tm**-consistente, podemos construir um conjunto maximal consistente que contém **Tm**. Para esse conjunto maximal temos as seguintes propriedades: $\neg\alpha \in \Delta$ sse $\alpha \notin \Delta$ e $\alpha \to \beta$ sse $\alpha \notin \Delta$ ou $\beta \in \Delta$.[20]

Definição 3.2.2: Seja Δ um conjunto maximal consistente em $\mathbf{L}$ para $\mathbf{L} \in \{\mathbf{Tm}, \mathbf{Bm}, \mathbf{4m}, \mathbf{5m}\}$. Uma valoração canônica $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}} : For_{\mathbf{L}} \longrightarrow \{t^n, t^c, f^c, f^i\}$ é definida do seguinte modo

[20] Uma versão do Lema de Lindenbaum para a lógica modal pode ser encontrado em [CH96] p. 115 e 116. O argumento pode ser facilmente generalizado para qualquer lógica modal que seja uma extensão conservativa de **PC**. Esse será o caso para todas as lógicas modais do Capítulo 3.

(i) $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) = t^n$ sse $\Box\alpha \in \Delta$ (e $\alpha \in \Delta$)

(ii) $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) = t^c$ sse $\neg\Box\alpha \in \Delta$ e $\alpha \in \Delta$

(iii) $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) = f^c$ sse $\Diamond\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$

(iv) $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) = f^i$ sse $\neg\Diamond\alpha \in \Delta$ (e $\neg\alpha \in \Delta$) $\Box$

Lema 3.2.3: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}$ é uma $\mathbf{Tm}$-valoração.

Demonstração:

- **CASO 1**: α é $\neg\beta$
  - (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^n$ então $\Box\beta \in \Delta$. Por Def$_\Diamond$ e por (DN) temos $\neg\Diamond\neg\beta \in \Delta$. Logo, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\neg\beta) = f^i$.
  - (ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^c$ então $\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\beta \in \Delta$. Logo $\Diamond\neg\beta \in \Delta$, $\neg\neg\beta \in \Delta$ e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\neg\beta) = f^c$.
  - (iii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = f^c$ então $\Diamond\beta \in \Delta$ e $\neg\beta \in \Delta$. Logo, $\neg\Box\neg\beta \in \Delta$ e então $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\neg\beta) = t^c$.
  - (iv) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = f^i$ então $\neg\Diamond\beta \in \Delta$. Por Def$_\Diamond$ e por (DN) temos $\Box\neg\beta \in \Delta$. Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\neg\beta) = t^n$.
- **CASO 2**: α é $\Box\beta$
  - (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^n$ então $\Box\beta \in \Delta$ e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\Box\beta) \in t$.
  - (ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^c$ então $\neg\Box\beta \in \Delta$ e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\Box\beta) \in f$.
  - (iii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) \in f$ então $\neg\beta \in \Delta$ e então $\neg\Box\beta \in \Delta$, por (T). Daí $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\Box\beta) \in f$.
- **CASO 3**: α é $\beta \to \gamma$
  - (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) = t^n$ então $\Box\gamma \in \Delta$. Daí, $\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M2)$, e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = t^n$
  - (ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = f^i$ então $\neg\Diamond\beta \in \Delta$. Daí, $\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M1)$, Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = t^n$
  - (iii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) = t^c$ então $\gamma, \neg\Box\gamma \in \Delta$ e daí $(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(Ax1)$. Além disso, se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^n$ então $\Box\beta \in \Delta$. Mas $\neg\Box\gamma \in \Delta$ e então $(\Box\beta \wedge \neg\Box\gamma) \in \Delta$ e daí $\neg(\Box\beta \to \Box\gamma) \in \Delta$. Daí se segue que $\neg\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por (K), e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = t^c$.

(iv) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^n$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) \in f$ então $\Box\beta, \beta, \neg\gamma \in \Delta$. Daí temos $(\beta \wedge \neg\gamma) \in \Delta$ e então $\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$, logo $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) \in f$. Se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) = f^c$ então $\Diamond\gamma \in \Delta$ e daí $\Diamond(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M3)$. Isso significa que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = f^c$. Por outro lado, se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) = f^i$ então $\neg\Diamond\gamma \in \Delta$ e daí $(\Box\beta \wedge \neg\Diamond\gamma) \in \Delta$. Logo $\neg(\Diamond\neg\beta \vee \Diamond\gamma) \in \Delta$ e então $\neg\Diamond(\neg\beta \vee \gamma) \in \Delta$, por $(K2)$. Segue-se portanto que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\neg\beta \vee \gamma) = \mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = f^i$.

(v) Se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = t^c$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) \in f$ então $\neg\Box\beta, \beta, \neg\gamma \in \Delta$. Logo $\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$, como demonstrado acima. Além disso, $\Diamond\neg\beta \in \Delta$ e então $\Diamond(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M4)$. Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = f^c$.

(vi) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta) = f^c$ então $\Diamond\beta, \neg\beta \in \Delta$. Portanto $(\beta \to \gamma) \in \Delta$ e então $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) \in t$. Além disso, se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\gamma) = f^i$ então $\neg\Diamond\gamma \in \Delta$ e daí $\neg(\Diamond\beta \to \Diamond\gamma) \in \Delta$. Portanto $\neg\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(K1)$, e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\beta \to \gamma) = t^c$. ■

Lema 3.2.4: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **Tm**. Assim, existe uma **Tm**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in t \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Pela Definição 3.2.2, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}$ é uma função tal que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}(\alpha) \in t$ sse $\alpha \in \Delta$. Pelo Lema 3.2.3, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Tm}}$ é uma **Tm**-valoração. ■

Teorema 3.2.5 (Completude fraca para Tm): Seja α uma fórmula de **Tm**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{Tm}} \alpha \ \text{ implica } \ \vdash_{\mathbf{Tm}} \alpha.$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{Tm}} \alpha$. Assim, pelo Lema de Lindenbaum existe um conjunto maximal consistente Δ em **Tm** de modo que $\alpha \notin \Delta$. Pelo Lemma 3.2.4, existe uma **Tm**-valoração $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}(\alpha) \notin t$. Portanto $\nvDash_{\mathbf{Tm}} \alpha$ ■

Com algumas adaptações, podemos provar esse mesmo resultado para os sistemas **Bm**, **4m** e **5m**.

Com relação a **Bm**, uma fórmula α é tautologia quando interpretada de maneira análoga a **Tm**, substituindo $\mathcal{N}^{\mathbf{T}}_{\Box}$ por $\mathcal{N}^{\mathbf{B}}_{\Box}$. Verificaremos que essa semântica é correta e completa.

Teorema 3.2.6 (Corretude fraca para Bm): Seja α uma fórmula de **Bm**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{Bm}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{Bm}} \alpha$$

Demonstração: Note que para $(Ax1)$, $(Ax2)$, (DN), (MP) e (AxM) a demonstração é idêntica a do Teorema 3.2.1, visto que esses casos não envolvem o operador $\Box$. Não há nenhuma alteração também na demonstração para os axiomas $(K1), (K2), (M1) - (M4)$ e (T). Para os demais casos:

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

- se $v(p) = f^i$ ou $v(q) = t^n$, então $v(\Box p) = f^i$ e o resto da demonstração é idêntica a do Teorema 3.2.1.

(B) $p \to \Box\Diamond p$

- se $v(p) \in f$ então $v(B) \in t$
- se $v(p) \notin f$ então $v(\Diamond p) = t^n$ e $v(B) \in t$ ■

A completude para **Bm** também será análoga a de **Tm**.

Lema 3.2.7: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}$ é uma **Bm**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.3. Com relação ao **CASO 2**, a mesma observação vale quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = t^n$ ou $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = t^c$. Restam dois ítens a serem analisados.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$

  (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = f^c$ então $\Diamond\beta \in \Delta$ e $\neg\beta \in \Delta$. Daí por (B) temos $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$ e pela definição de $\Diamond$ e (DN) temos $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\neg\Diamond\Box\beta \in \Delta$. Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\Box\beta) = f^i$

  (ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = f^i$ então $\neg\Diamond\beta \in \Delta$. Ora, por (B) podemos inferir que $\neg\Box\Diamond\gamma \to \neg\gamma$ o que implica $\Diamond\Box\neg\gamma \to \neg\gamma \in \Delta$. Substituindo γ por $\neg\beta$ concluimos por (DN) que $\Diamond\Box\beta \to \beta \in \Delta$. Mas de (T) temos $\beta \to \Diamond\beta \in \Delta$ o que implica $\Diamond\Box\beta \to \Diamond\beta \in \Delta$, ou seja, $\neg\Diamond\beta \to \neg\Diamond\Box\beta \in \Delta$. Daí por (MP) temos $\neg\Diamond\Box\beta \in \Delta$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\Box\beta) = f^i$ ■

Lema 3.2.8: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **Bm**. Assim, existe uma **Bm**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in t \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lemma 3.2.4, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.7. ■

Teorema 3.2.9 (Completude fraca para Bm): Seja α uma fórmula de **Bm**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{Bm}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{Bm}} \alpha.$$

Demonstração: Análoga a do Teorema 3.2.5, substituindo Lemma 3.2.4 por Lemma 3.2.8. ■

A semântica de **4m** é obtida de maneira análoga, substuindo em **Tm** a Nmatriz $\mathcal{N}_{\square}^{\mathbf{T}}$ por $\mathcal{N}_{\square}^{\mathbf{4}}$. Eis a prova da corretude e completude de **4m**:

Teorema 3.2.10 (Corretude fraca para 4m): Seja α uma fórmula de **4m**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{4m}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{4m}} \alpha$$

Demonstração: Para $(Ax1), (Ax2), (Axm), (K), (DN), (T)$ e (MP) a demonstração é idêntica a do Teorema 3.2.1. Para os demais axiomas compartilhados com **Tm**, algumas alterações são necessárias, substituindo:

(K1) $v(\Diamond p) \in f$ por $v(\Diamond p) = f^i$

(K2) $v(\Diamond(p \vee q) \in f$ por $v(\Diamond(p \vee q)) = f^i$

(M1) $v(\square(p \to q)) \in t$ por $v(\square(p \to q)) = t^n$

(M2) $v(\square(p \to q) \in t$ por $v(\square(p \to q)) = t^n$

(M3) $v(\Diamond q) \in f$ por $v(\Diamond q) = f^i$

(M4) $v(\Diamond \neg p) \in f$ por $v(\Diamond \neg p) = f^i$

Finalmente para (4) temos

(4) $\square p \to \square\square p$

- se $v(\square p) = t^n$ então $v(\square\square p) = t^n$ e $v(4) = t^n$
- se $v(\square p) \neq t^n$, então $v(\square\square p) \in f$ e $v(4) \in t$. ■

Lema 3.2.11: $\mathbb{V}_{\mathbf{4m}}^{\Delta}$ é uma **4m**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.3. Com relação ao **CASO 2**, vale o mesmo argumento quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) \neq t^n$. Resta um único ítem a ser analisado.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$
    (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) = t^n$ então $\Box\beta \in \Delta$ e por (4) temos $\Box\Box\beta \in \Delta$. Desse modo $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\Box\alpha) = t^n$. ■

Lema 3.2.12: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **4m**. Assim, existe uma **4m**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in t \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lemma 3.2.4, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.11. ■

Teorema 3.2.13 (Completude fraca para 4m): Seja α uma fórmula de **4m**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{4m}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{4m}} \alpha.$$

Demonstração: Análoga a do Teorema 3.2.5, substituindo Lemma 3.2.4 por Lemma 3.2.12. ■

Por fim, a semântica de **5m** é obtida substituindo em **Tm** a Nmatriz $\mathcal{N}^{\mathbf{T}}_{\Box}$ por $\mathcal{N}^{\mathbf{5}}_{\Box}$. A prova de corretude e completude de **5m** segue-se abaixo:

Teorema 3.2.14 (Corretude fraca para 5m): Seja α uma fórmula de **5m**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{5m}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{5m}} \alpha$$

Demonstração: Para $(Ax1), (Ax2), (Axm), (DN)$ e (MP) a demonstração é idêntica a do Teorema 3.2.1. Para os demais axiomas compartilhados com **Tm**, basta substituir $v(\alpha) \in t$ por $v(\alpha) = t^n$ e $v(\alpha) \in f$ por $v(\alpha) = f^i$ quando α é do tipo $\Box\beta$ ou $\Diamond\beta$. Finalmente, para (5) temos:

(5) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

- se $v(p) = f^i$ então $v(\Diamond p) = f^i$ e $v(5) = t^n$
- se $v(p) \neq f^i$ entao $v(\Diamond p) = t^n$, $v(\Box\Diamond p) = t^n$ e $v(5) = t^n$ ■

Antes de provar a completude, é mister salientar que (B) é teorema em **5m**, como mostra a prova abaixo:

1.	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(5)
2.	$\Box\neg p \to \neg p$	(T)
3.	$p \to \neg\Box\neg p$	**PC** em 2.
4.	$p \to \Diamond p$	$Def_{\Diamond}$ em 3.
5.	$p \to \Box\Diamond p$	**PC** em 1. e 4.

Tal fato simplificará a demonstração do seguinte Lema:

Lema 3.2.15: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{5m}}$ é uma **5m**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é análoga a do Lemma 3.2.3. Com relação ao **CASO 2**, visto que (4) e (B) são teoremas em **5m** a demonstração é análoga ao Lema 3.2.11 quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) = t^n$; e a do Lema 3.2.7 quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = f^c$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}(\beta) = f^i$. Resta um único ítem a ser analisado.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$

  (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{5m}}(\beta) = t^c$ então $\beta, \Diamond\neg\beta \in \Delta$ e daí $\neg\Box\beta \in \Delta$. Assim temos $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$, por (5). Daí $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\neg\Diamond\Box\beta \in \Delta$, por Def$_{\Diamond}$ e (DN). Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{5m}}(\Box\beta) = f^i$. ■

Lema 3.2.16: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **5m**. Assim, existe uma **5m**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in t \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lemma 3.2.4, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.15. ■

Teorema 3.2.17 (Completude fraca para 5m): Seja α uma fórmula de **Tm**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{5m}} \alpha \ \text{ implica } \ \vdash_{\mathbf{5m}} \alpha.$$

Demonstração: Análoga a do Teorema 3.2.5, substituindo Lemma 3.2.4 por Lemma 3.2.16. ■

Teorema 3.2.5, Teorema 3.2.9, Teorema 3.2.13 e Teorema 3.2.17 mostram a completude fraca de **Tm**, **Bm 4m** e **5m**, respectivamente. Se Γ é um conjunto de fórmulas de **L** e α uma fórmula de **L**, então a completude forte pode ser enunciada como:

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} \alpha \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha.$$

Não obtivemos a completude forte dessas lógicas . Por ora, a completude fraca será o suficiente para provar a completude (fraca) dos sistemas normais modais **T**, **B**, **S4** e **S5**.

3.2.2 Os Níveis de Valoração de Kearns

Vimos na subseção anterior matrizes não-determinística para quatro sistemas modais: **Tm**, **Bm**, **4m**, **5m**. É digno mencionar que diferentemente dos sistemas da Figura 2.1 e da Figura 2.2, as quatro lógicas acima não têm propriamente uma regra para introduzir o operador $\Box$.

Ainda que não haja nenhum resultado de incompletude modal por Nmatrizes finitas, Avron argumenta que regras como a regra de necessitação são regras impuras, o que dificultaria obter uma semântica completa por meio de Nmatrizes.[21] Avron ainda sugere que uma maquinaria extra seria necessária para obter uma semântica completa.

Na verdade, essa maquinaria extra já havia sido proposta por Kearns em 1981. Desejando uma semântica alternativa à de Kripke para os sistemas **T**, **S4** e **S5**, Kearns introduz a noção de *nível de valoração*.

Tomemos em particular a regra de necessitação no sistema **T**. Sabemos que $\vdash_{\mathbf{T}} \Box(\Box p \to p)$, aplicando (Nec) ao axioma (T). Por outro lado, tal teorema recebe um valor não-designado quando interpretado em **Tm**. Na notação de Kearns, os valores t^n, t^c, f^c e f^i são T,t,f e F; já os conjuntos $t = \{t^n, t^c\}$ e $f = \{f^c, f^i\}$ são grafados como "T,t"e "f,F". Vejamos qual é a valoração de tal teorema de **T** nas Nmatrizes de **Tm**:

[21] Como analisado em [Avr07].

<table>
<tr><th>p</th><th>$\Box p$</th><th>$\Box p \to p$</th><th>$\Box(\Box p \to p)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">T</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="6">t</td><td rowspan="4">f</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td>f</td></tr>
<tr><td>F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="6">f</td><td rowspan="4">f</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td>f</td></tr>
<tr><td>F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="4">F</td><td rowspan="2">f</td><td rowspan="2">t</td><td>f</td></tr>
<tr><td>F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
</table>

Vemos claramente que $\Box(\Box p \to p)$ pode assumir os valores não designados f ou F quando $v(\alpha)$ $\neq$T, invalindando a regra (Nec), pois $\Box p \to p$ recebe sempre um valor designado. Os níveis de valorações procuram validar (Nec) reconstruindo a tabela acima. A ideia é que, ao nos depararmos com uma coluna em que há apenas valores designados, substuiremos t por T e subiremos um nível de valoração. Por ora, usaremos $\mathsf{Val}_k(\alpha)$ com k natural para nos referirmos a uma certa coluna da tabela acima. Se em $\mathsf{Val}_k(\alpha)$ apenas os valores T e t ocorrem, então em $\mathsf{Val}_{k+1}(\alpha)$ subtuiremos t por T, e apenas ocorrerá o valor T. Seja agora $\mathsf{Val}_0(\alpha)$, $\mathsf{Val}_1(\alpha)$ $\ldots \mathsf{Val}_k(\alpha)$ aos níveis de valoração $0, 1, \ldots, k$ com relação a α. Assim, podemos reconstruir a tabela acima do seguinte modo:

<table>
<tr><th>Val_0</th><th>Val_0</th><th>Val_0</th><th>Val_1</th><th>Val_1</th><th>Val_2</th></tr>
<tr><th>p</th><th>$\Box p$</th><th>$\Box p \to p$</th><th>$\Box p \to p$</th><th>$\Box(\Box p \to p)$</th><th>$\Box(\Box p \to p)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">T</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="6">t</td><td rowspan="4">f</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="6">f</td><td rowspan="4">f</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="4">F</td><td rowspan="2">f</td><td rowspan="2">t</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>t</td><td>T</td></tr>
</table>

Vemos que a noção de valoração parece preservar a validade em **T**. Todavia, para garantirmos a completude dessa semântica é preciso formalizar a noção de nível de valoração de maneira precisa. Definiremos os níveis de valoração por meio da semântica de **Tm** e por isso usaremos os valores de Ivlev t^n, t^c, f^c e f^i no lugar dos valores de Kearns T, t, f e F.

Definição 3.2.18: Seja Val o conjunto das **Tm**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val definida do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$, e, para $k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k \ : \ \text{para toda fórmula } \alpha,\ \mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t \text{ implica } v(\alpha) = t^n\}$$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* $\mathbf{T}$.

(b) O conjunto das $\mathbf{T}$-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{T}} = \bigcap_{k \geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

Uma fórmula α é tautologia em $\mathbf{T}$ quando recebe o valor t^n para todas as valorações em $\mathbf{T}$. Em termos formais:

Definição 3.2.19: Seja α uma fórmula de $\mathbf{T}$. Assim:

$\vDash_{\mathbf{T}} \alpha$ sse $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{T}}$. □

Intuitivamente, uma tautologia em $\mathbf{T}$ deve ser uma fórmula que num certo nível k de valoração terá em todas as linhas o valor t^n. É o que garante a proposição abaixo:

Proposição 3.2.20: Seja α uma fórmula de $\mathbf{T}$. Assim:

$\vDash_{\mathbf{T}} \alpha$ sse existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$.

Demonstração: Suponha que $\vDash_{\mathbf{T}} \alpha$. Pela Definição 3.2.19 temos então que $\mathsf{Val}_{\mathbf{T}}(\alpha) = \{t^n\}$. Assim, pela Definição 3.2.18 (b), existe $k \geq 0$ tal que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$.

Por outro lado, se $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$ para algum k então sabemos pela Definição 3.2.18 (a) que existe k' tal que $\mathsf{Val}_{k'}(\alpha) = \{t^n\}$ para todo $k' \geq k$. Assim $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{T}}$. Ou seja, $\vDash_{\mathbf{T}} \alpha$, pela Definição 3.2.19. ■

Mostraremos agora a corretude e a completude de $\mathbf{T}$ com relação à semântica de Nmatrizes de níveis de valoração. Para facilitar a demonstração, utilizaremos a seguinte axiomática:

- $\mathbf{T} = \mathbf{Tm} \cup \{(Nec)\}$

A axiomática acima é de fato equivalente com a proposta na Subseção 2.2.2. Para os axiomas proposicionais, tal fato é consequência da completude da axiomática de Mendelsohn.[22] Na Subseção 2.2.3 fizemos referência ao fato de $(K1)$ e $(K2)$ serem teoremas em $\mathbf{K}$. Resta-nos provar que os axiomas modais $(M1) - (M4)$ de $\mathbf{Tm}$ são teoremas em $\mathbf{T}$. Eis a prova abaixo:

[22] A demonstração do Teorema de Completude para a axiomática de Mendelsohn encontra-se em [Men64] p. 38-42.

(M1) $\neg\Diamond p \to \Box(p \to q)$

1.	$\neg p \to (p \to q)$	[**PC**-teorema]
2.	$\Box(\neg p \to \Box(p \to q))$	[(Nec) em 1.]
3.	$\Box(\neg p \to (p \to q)) \to (\Box\neg p \to \Box(p \to q))$	[(K)]
4.	$\Box\neg p \to \Box(p \to q)$	[(MP) em 2. e 3.]
5.	$\neg\Diamond p \to \Box(p \to q)$	[Def$_\Diamond$ em 4.]

(M2) $\Box q \to \Box(p \to q)$

1.	$q \to (p \to q)$	[(Ax1)]
2.	$\Box(q \to (p \to q))$	[(Nec) em 1.]
3.	$\Box(q \to (p \to q)) \to (\Box q \to \Box(p \to q))$	[(K)]
4.	$\Box q \to \Box(p \to q)$	[(MP) em 2. e 3.]

(M3) $\Diamond q \to \Diamond(p \to q)$

1.	$q \to (p \to q)$	[(Ax1)]
2.	$\neg(p \to q) \to \neg q$	[**PC** em 1.]
3.	$\Box(\neg(p \to q) \to \neg q)$	[(Nec) em 2.]
4.	$\Box(\neg(p \to q) \to \neg q) \to (\Box\neg(p \to q) \to \Box q)$	[(K)]
5.	$\Box\neg(p \to q) \to \Box\neg q$	[(MP) em 3. e 4.]
6.	$\neg\Box\neg q \to \neg\Box\neg(p \to q)$	[**PC** em 5.]
7.	$\Diamond q \to \Diamond(p \to q)$	[Def$_\Diamond$ em 6.]

(M4) $\Diamond\neg p \to \Diamond(p \to q)$

1.	$\neg p \to (p \to q)$	[**PC**-teorema]
2.	$\neg(p \to q) \to \neg\neg p$	[**PC** em 1.]
3.	$\Box(\neg(p \to q) \to \neg\neg p)$	[(Nec) em 2.]
4.	$\Box(\neg(p \to q) \to \neg\neg p) \to (\Box\neg(p \to q) \to \Box\neg\neg p)$	[(K)]
5.	$\Box\neg(p \to q) \to \Box\neg\neg p$	[**MP** em 3. e 4.]
6.	$\neg\Box\neg\neg p \to \neg\Box\neg(p \to q)$	[**PC** em 5.]
7.	$\Diamond\neg p \to \Diamond(p \to q)$	[Def$_\Diamond$ em 6.]

Por fim, (DN) é consequência imediata de valer Metateorema da Substituição de Equivalentes, Metateorema da Dedução Restrito em **K**, $\vdash_{\mathbf{PC}} \beta \leftrightarrow \neg\neg\beta$

e $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\beta \leftrightarrow \Box\neg\neg\beta$.[23]

Estamos aptos agora a demonstrar a corretude e a completude de $\mathbf{T}$ com relação às Nmatrizes de $\mathbf{Tm}$ acrescidas dos níveis de valoração.

Teorema 3.2.21 (Corretude fraca de T): Seja α uma fórmula de $\mathbf{T}$. Assim:

$$\vdash_{\mathbf{T}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{T}} \alpha$$

Demosntração: Suponha que $\vdash_{\mathbf{T}} \alpha$. Pelo Teorema 3.2.1 e pela Definição 3.2.18 temos que $\mathsf{Val}_0(\alpha) \subseteq t$ se α é um axioma de $\mathbf{T}$. Daí se segue que $\mathsf{Val}_1(\alpha) = \{t^n\}$. O único caso que resta ser verificado é a Regra de Necessitação (Nec).

Suponha que o resultado valha para uma fórmula α do tipo $\Box\beta$ que foi obtida por meio de β usando (Nec). Por hipótese, $\vDash_{\mathbf{T}} \beta$ e então existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\beta) = \{t^n\}$, pela Proposição 3.2.20. Assim, $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t$, por $\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{T}}$, e então $\mathsf{Val}_{k+1}(\alpha) = \{t^n\}$. Isso mostra que $\vDash_{\mathbf{T}} \alpha$, pela Proposição 3.2.20. ■

Para a demonstração da completude de $\mathbf{T}$, também faremos referência a certos resultados que obtivemos ao provar a completude de $\mathbf{Tm}$

Definição 3.2.22: O conjunto das $\mathbf{T}$-*valorações canônicas* é o conjunto

$$\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}} = \{\mathbb{V}_{\mathbf{Tm}}^{\Delta} \ : \ \Delta \text{ é um conjunto maximal em } \mathbf{T}\},$$

em que $\mathbb{V}_{\mathbf{Tm}}^{\Delta}$ é dado de acordo om a Definição 3.2.2.

Lema 3.2.23: $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}} \subseteq \mathsf{Val}_0$.

Demonstração: Consequência imediata da definição acima adaptando a prova do Lemma 3.2.3, visto que (DN) e os axiomas de $\mathbf{Tm}$ valem em $\mathbf{T}$. ■

Lema 3.2.24: Se $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}} \subseteq \mathsf{Val}_k$ então $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}} \subseteq \mathsf{Val}_{k+1}$.

Demonstração: Seja $\mathbb{V}_{\Delta} \in \mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}}$. Mostraremos que $\mathbb{V}_{\Delta} \in \mathsf{Val}_{k+1}$. Seja ainda α uma fórmula de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t$. Como $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{T}} \subseteq \mathsf{Val}_k$, temos que $\mathbb{V}_{\Delta} \in \mathsf{Val}_k$ e então $\mathbb{V}_{\Delta}(\alpha) \in t$ pela Definição 3.2.18.

[23] O Metateorema da Substiuição de Equivalentes diz que se $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$, se γ ocorre em α, se β difere de α apenas tendo a fórmula δ ocorrendo no lugar de γ e se $\vdash_{\mathbf{L}} \gamma \leftrightarrow \delta$, então $\vdash_{\mathbf{L}} \beta$, uma prova desse metateorema para $\mathbf{K}$ encontra-se em [CH96] p. 32. No caso em que α não é teorema, bastar aplicarmos Metateorema da Dedução Restrito. Cabe notar que o Metateorema da Dedução Restrito difere do Metateorema da Dedução ao aplicarmos a regra (Nec), pois $\{p\} \nvdash_{\mathbf{T}} \Box p$ (vide [CH96] p. 211).

Suponha que $\{\neg\alpha\}$ seja consistente em $\mathbf{T}$. Assim, $\neg\alpha \in \Delta$ e então $\mathbb{V}_\Delta(\alpha) \in f$, absurdo. Portanto $\{\neg\alpha\}$ não é consistente em $\mathbf{T}$. Além disso, por **PC** temos $\vdash_\mathbf{T} \neg\alpha \to \beta$ para todo β, em particular, $\vdash_\mathbf{T} \neg\alpha \to \alpha$. Visto que por **PC** temos $\vdash_\mathbf{T} (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$, então por (MP) concluímos $\vdash_\mathbf{T} \alpha$. Assim $\vdash_\mathbf{T} \Box\alpha$, por (Nec), e então $\Box\alpha \in \Delta$. Daí se segue que $\mathbb{V}_\Delta(\alpha) = t^n$, pela Definição 3.2.2. Portanto, $\mathbb{V}_\Delta \in \mathsf{Val}_{k+1}$, pela Definição 3.2.18. ■

Corolário 3.2.25: $\mathsf{Val}^\mathbf{T}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_\mathbf{T}$.

Demonstração: Consequência imediata do Lemma 3.2.23, Lemma 3.2.24 e da Definição 3.2.18. ■

Teorema 3.2.26 (Completude fraca de T): Seja α uma fórmula de $\mathbf{T}$. Assim:

$$\vDash_\mathbf{T} \alpha \text{ implica } \vdash_\mathbf{T} \alpha$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_\mathbf{T} \alpha$. Assim, pelo Teorema de Lindenbaum existe um conjunto maximal Δ em $\mathbf{T}$ de modo que $\alpha \notin \Delta$ e então $\neg\alpha \in \Delta$. Se $\vDash_\mathbf{T} \alpha$ então existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$, pela Proposição 3.2.20. Como $\mathsf{Val}^\mathbf{T}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_\mathbf{T}$ pelo Corolário 3.2.25, temos daí pela Definição 3.2.18 (iii) que $\mathsf{Val}^\mathbf{T}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_k$. Assim, dado $\mathbb{V}_\Delta \in \mathsf{Val}^\mathbf{T}_{can}$ sabemos que $\mathbb{V}_\Delta$ é uma $\mathbf{T}$-valoração de modo que $\mathbb{V}_\Delta(\alpha) = t^n$ (pois $\mathbb{V}_\Delta \in \mathsf{Val}_k$) e $\alpha \in \Delta$. Mas $\neg\alpha \in \Delta$ e então Δ seria inconsistente, absurdo. Portanto $\nvDash_\mathbf{T} \alpha$. ■

Vimos que as matrizes de **Tm** enriquecidas com a noção de nível de valoração é uma semântica correta e completa para $\mathbf{T}$. Veremos que o mesmo ocorre com relação a **4m** e **S4**. Propomos a seguinte axiomática para **S4** a partir de **4m**:

- $\mathbf{S4} = \mathbf{4m} \cup \{(Nec)\}$

Pelas considerações que fizemos com relação à $\mathbf{T}$, é imediato verificar que a axiomática acima é equivalente à apresentada na Subseção 2.2.2. Os níveis de valoração também serão definidos de modo semelhante.

Definição 3.2.27: Seja Val o conjunto das **4m**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val definina do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$, e, para $k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k \ : \text{ para toda fórmula } \alpha,\ \mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t \text{ implica } v(\alpha) = t^n\}$$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **S4**.

(b) O conjunto das **S4**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{S4}} = \bigcap_{k \geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

Definição 3.2.28: Seja α uma fórmula de **S4**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{S4}} \alpha$ sse $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{S4}}$. □

Proposição 3.2.29: Seja α uma fórmula de **S4**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{S4}} \alpha$ sse existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$.

Demonstração: Análoga à Proposição 3.2.20. ■

Teorema 3.2.30 (Corretude fraca de S4): Seja α uma fórmula de **S4**. Assim:

$$\vdash_{\mathbf{S4}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{S4}} \alpha$$

Demonstração: Análoga a do Teorema 3.2.21, substituindo Teorema 3.2.1, Proposição 3.2.20 e Definição 3.2.18 pelo Teorema 3.2.10, Proposição 3.2.29 e Definição 3.2.27. ■

Definição 3.2.31: O conjunto **S4**-*valorações canônicas* é o conjunto

$$\mathsf{Val}^{\mathbf{S4}}_{can} = \{\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}} \ : \ \Delta \text{ é um conjunto maximal de } \mathbf{S4}\},$$

em que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}$ é dado de acordo om a Definição 3.2.2. □

Lema 3.2.32: $\mathsf{Val}^{\mathbf{S4}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_0$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.23, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.11. ■

Lema 3.2.33: Se $\mathsf{Val}^{\mathbf{S4}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_k$ então $\mathsf{Val}^{\mathbf{S4}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{k+1}$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.24, substituindo Definição 3.2.18 pela Definição 3.2.27. ■

Corolário 3.2.34: $\mathsf{Val}^{\mathbf{S4}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{\mathbf{S4}}$.

Demonstração: Consequência imediata do Lemma 3.2.32, Lemma 3.2.33 e da Definição 3.2.27. ■

Teorema 3.2.35 (Completude fraca de S4): Seja α uma fórmula de **S4**. Assim:

$$\vDash_{\mathbf{S4}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{S4}} \alpha$$

Demonstração: Análogo a do Teorema 3.2.26, substituindo Proposição 3.2.20 por Proposição 3.2.28, Corolário 3.2.25 por Corolário 3.2.34 e Definição 3.2.18 por Definição 3.2.27. ■

As Nmatrizes de **Bm** acrescidas dos níveis de valoração também são uma semântica correta e completa para **B**. Nossa axiomática alternativa para **B** é também análoga a de **T** e **S4**:

- $\mathbf{B} = \mathbf{Bm} \cup \{(Nec)\}$

A prova de corretude e completude é semelhante a dos dois casos acima. Também será análoga a definição dos níveis de valoração em **B**.

Definição 3.2.36: Seja Val o conjunto das **Bm**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val definida do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$, e, para $k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k \ : \ \text{para toda fórmula } \alpha, \mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t \text{ implica } v(\alpha) = t^n\}$$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **B**.

(b) O conjunto das **B**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{B}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

Definição 3.2.37: Seja α uma fórmula de **B**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{B}} \alpha$ sse $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{B}}$. □

Proposição 3.2.38: Seja α uma fórmula de **B**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{B}} \alpha$ sse existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$.

Demonstração: Análoga à Proposição 3.2.20. ■

Teorema 3.2.39 (Corretude fraca de B): Seja α uma fórmula de $\mathbf{B}$. Assim:

$$\vdash_{\mathbf{B}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{B}} \alpha$$

Demosntração: Análoga a do Teorema 3.2.21, substituindo o Teorema 3.2.1 e Definição 3.2.18 pelo Teorema 3.2.6 e Definição 3.2.36. ■

Definição 3.2.40: O conjunto $\mathbf{B}$-*valorações canônicas* é o conjunto

$$\mathsf{Val}^{\mathbf{B}}_{can} = \{\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}} \ : \ \Delta \text{ é um conjunto maximal de } \mathbf{B}\},$$

em que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Bm}}$ é dado de acordo om a Definição 3.2.2. □

Lema 3.2.41: $\mathsf{Val}^{\mathbf{B}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_0$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.23, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.7. ■

Lema 3.2.42: Se $\mathsf{Val}^{\mathbf{B}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_k$ então $\mathsf{Val}^{\mathbf{B}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{k+1}$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.24, substituindo Definição 3.2.18 pela Definição 3.2.36. ■

Corolário 3.2.43: $\mathsf{Val}^{\mathbf{B}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{\mathbf{B}}$.

Demonstração: Consequência imediata do Lemma 3.2.41, Lemma 3.2.42 e da Definição 3.2.36. ■

Teorema 3.2.44 (Completude fraca de B): Seja α uma fórmula de $\mathbf{B}$. Assim:

$$\vDash_{\mathbf{B}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{B}} \alpha$$

Demonstração: Análogo a do Teorema 3.2.26, substituindo Proposição 3.2.20 por Proposição 3.2.38, Corolário 3.2.25 por Corolário 3.2.43 e Definição 3.2.18 por Definição 3.2.36. ■

Por fim, pelas mesmas razões apontadas na Subseção 3.2.1, o sistema **S5** pode ser definido como a união de **S4** e **B** ou, alternativamente:

- $\mathbf{S5} = \mathbf{5m} \cup \{(Nec)\}$

Eis a prova da completude e corretude de **S5** com relação às Nmatrizes com níveis de valoração:

Definição 3.2.45: Seja Val o conjunto das **5m**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val definida do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$, e, para $k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k \ : \ \text{para toda fórmula } \alpha,\ \mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t \text{ implica } v(\alpha) = t^n\}$$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **S5**.

(b) O conjunto das **S5**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{S5}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

Definição 3.2.46: Seja α uma fórmula de **S5**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{S5}} \alpha$ sse $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{S5}}$. □

Proposição 3.2.47: Seja α uma fórmula de **S5**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{S5}} \alpha$ sse existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{t^n\}$.

Demonstração: Análoga à Proposição 3.2.20. ■

Teorema 3.2.48 (Corretude fraca de S5): Seja α uma fórmula de **S5**. Assim:

$$\vdash_{\mathbf{S5}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{S5}} \alpha$$

Demosntração: Análoga a do Teorema 3.2.21, substituindo o Teorema 3.2.1 e Definição 3.2.18 pelo Teorema 3.2.14 e Definição 3.2.45. ■

Definição 3.2.49: O conjunto **S5**-*valorações canônicas* é o conjunto

$$\mathsf{Val}^{\mathbf{S5}}_{can} = \{\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{5m}} \ : \ \Delta \text{ é um conjunto maximal de } \mathbf{S5}\},$$

em que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{5m}}$ é dado de acordo om a Definição 3.2.2. □

Lema 3.2.50: $\mathsf{Val}^{\mathbf{S5}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_0$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.23, substituindo Lemma 3.2.3 por Lemma 3.2.15. ■

Lema 3.2.51: Se $\mathsf{Val}^{\mathbf{S5}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_k$ então $\mathsf{Val}^{\mathbf{S5}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{k+1}$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.24, substituindo Definição 3.2.18 pela Definição 3.2.45. ■

Corolário 3.2.52: $\mathsf{Val}^{\mathbf{S5}}_{can} \subseteq \mathsf{Val}_{\mathbf{S5}}$.

Demonstração: Consequência imediata do Lemma 3.2.50, Lemma 3.2.51 e da Definição 3.2.45. ■

Teorema 3.2.53 (Completude fraca de S5): Seja α uma fórmula de **S5**. Assim:

$$\vDash_{\mathbf{S5}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{S5}} \alpha$$

Demonstração: Análogo a do Teorema 3.2.26, substituindo Proposição 3.2.20 por Proposição 3.2.47, Corolário 3.2.25 por Corolário 3.2.52 e Definição 3.2.18 por Definição 3.2.45. ■

Vimos que os sistemas **Tm**, **Bm**, **4m** e **5m** são completos com respeito às matrizes não-determinísticas de 4 valores apresentadas no início dessa subseção. Ao acrescentarmos os níveis de valoração, obtemos a completude para **T**, **B S4** e **S5**. Também sabemos que existe o seguinte gráfico de inclusão para esses 8 sistemas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{S5} & & \mathbf{B} \arrow[ll] \\
\mathbf{S4} \arrow[ur] & & \mathbf{T} \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
& \mathbf{5m} \arrow[uu] & & \mathbf{Bm} \arrow[ll] \arrow[uu] \\
\mathbf{4m} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathbf{Tm} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.1: Sistemas modais completos por Nmatrizes de 4 valores

Na próxima Subseção defenderemos que se o operador $\Box$ for interpretado de maneira deôntica, 4 valores não são o suficiente para que uma lógica modal tenha Nmatrizes completas. Na subseção seguinte construiremos uma figura análoga à Figura 3.1 para as versões deônticas desses sistemas.

3.2.3 Nmatrizes no contexto deôntico/doxástico

Na Subseção 2.3.2, vimos que quando $\Box$ é intepretado como "é necessário" e $\Diamond$ como "é possível", sabemos que 4 valores são o suficiente para atender certos requisitos mínimos de uma lógica que lide com esses operadores. Essa não é, todavia, a única interpretação desses conectivos modais.

Lógicas deônticas contrapôem à interpretação acima, denominada alética. Se $\Box$ for interpretado como "é obrigatório" e $\Diamond$ como "é permitido", devemos esperar que $\Box\alpha \nvDash \alpha$ e $\alpha \nvDash \Diamond\alpha$, contrariando a Definição 2.3.8. Ou ainda, sintaticamente, não é esperado que os esquemas de Abelardo $\Box\alpha \to \alpha$ e $\alpha \to \Diamond\alpha$ sejam teoremas.

Por outro lado, um princípio mais fraco seria conveniente: $\Box\alpha \vDash \Diamond\alpha$ ou sintaticamente que $\Box p \to \Diamond p$ seja teorema. Mas quantos valores de verdade seriam o suficiente para dar conta dessas noções?

Na subseção anterior, tratamos de quatro valores de verdade para exprimir as noções aléticas de necessário e posssível, a saber: "necessariamente verdadeiro", "possivelmente verdadeiro", "possivelmente falso" e "impossível". Para o contexto deôntico, é preciso contemplar não só os casos em que uma proposição seja obrigatória, permitida e proibida. Devemos considerar o caso em que a proposição é obrigatória mas não é o caso, e o seu dual, que a proposição é proibida mas é o caso.

Para diferenciar esses cenários, usaremos o termo "cumprido" para se referir à situação em que uma proposição é obrigatória e foi o caso ou que é proibida e não é o caso. Já "infringido" reservamos para uma proposição que é obrigatória mas não é o caso ou que é proibida mas é o caso. Por fim, opcional será uma proposição que não é obrigatória nem proibida. Teremos então seis valores: T^+ (p é cumprido), C^+ (p é opcional), F^+ (p é infringido), T^- ($\neg p$ é infringido), C^- ($\neg p$ é opcional) e F^- ($\neg p$ é cumprido).

Esses 6 valores também podem caracterizar uma lógica doxástica, e não apenas deôntica. No contexto doxástico, podemos ter os cenários: o agente acredita que p, p é compatível com o que o agente acredita e p é incompatível com o que o agente acredita. Note que temos as mesmas relações entre esses cenários que com obrigatório/permitido/proibido. E no caso de 4 valores, teríamos uma lógica epistêmica usual: não pode ser o caso que p é necessária, mas falsa, como não pode ser o caso que p é sabida, mas falsa.

Considere a seguinte abreviação:

$$T = \{T^+, T^-\} \qquad C = \{C^+, C^-\} \qquad F = \{F^+, F^-\}$$

$$+ = \{T^+, C^+, F^+\} \qquad - = \{T^-, C^-, F^-\}$$

Aqui, no contexto deôntico os conjuntos T, C e F são interpretados como "obrigatório", "opcional" e "proibido", enquanto $+$ e $-$ são entendidos como "é o caso" e "não é o caso". Além disso, $+$ é o conjunto dos valores distinguidos.

Propomos a semântica abaixo para os operadores $\to, \neg$ e $\Box$:

$\to$	T	C	F
T	T	C	F
C	T	$T \cup C$	C
F	T	T	T

α	$\Box\alpha$
T	$+$
C	$-$
F	$-$

α	$\neg\alpha$
T	F
C	C
F	T

$\to$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$

α	$\neg\alpha$
$+$	$-$
$-$	$+$

Qualquer valoração das matrizes acima é denominada uma **Dm**-valoração. Observe que há duas Nmatrizes para $\to$ e $\neg$. É requirido que as condições impostas por ambas as matrizes sejam respeitadas. Isso é equivalente a ter as seguintes tabelas (determinísticas) para $\neg$ e Nmatriz para $\to$:

$\mathcal{M}^6_\neg$

α	$\neg\alpha$
T^+	F^-
T^-	F^+
C^+	C^-
C^-	C^+
F^+	T^-
F^-	T^+

$\mathcal{N}^6_\to$

$\to$	T^+	T^-	C^+	C^-	F^+	F^-
T^+	T^+	T^-	C^+	C^-	F^+	F^-
T^-	T^+	T^+	C^+	C^+	F^+	F^+
C^+	T^+	T^-	$\{T^+, C^+\}$	$\{T^-, C^-\}$	C^+	C^-
C^-	T^+	T^+	$\{T^+, C^+\}$	$\{T^+, C^+\}$	C^+	C^+
F^+	T^+	T^-	T^+	T^-	T^+	T^-
F^-	T^+	T^+	T^+	T^+	T^+	T^+

Definindo-se $\Diamond$ da maneira usual, teremos as seguintes Nmatrizes:

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{D}}$

α	$\Box\alpha$
T^+	$\{T^+, C^+, F^+\}$
T^-	$\{T^+, C^+, F^+\}$
C^+	$\{T^-, C^-, F^-\}$
C^-	$\{T^-, C^-, F^-\}$
F^+	$\{T^-, C^-, F^-\}$
F^-	$\{T^-, C^-, F^-\}$

$\mathcal{N}_{\Diamond}^{\mathbf{D}}$

α	$\Diamond\alpha$
T^+	$\{T^+, C^+, F^+\}$
T^-	$\{T^+, C^+, F^+\}$
C^+	$\{T^+, C^+, F^+\}$
C^-	$\{T^+, C^+, F^+\}$
F^+	$\{T^-, C^-, F^-\}$
F^-	$\{T^-, C^-, F^-\}$

Observe que as Nmatrizes para $\Diamond$ e $\vee$ podem ser apresentadas de uma forma mais compacta:

α	$\Diamond\alpha$
T	$+$
C	$+$
F	$-$

$\vee$	T	C	F
T	T	T	T
C	T	$T \cup C$	C
F	T	C	F

$\vee$	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$-$

É interessante notar que os valores T^- e F^+ representam as situações $\Box\alpha \wedge \neg\alpha$ e $\neg\Diamond\alpha \wedge \alpha$. Esses cenários não existem quando (T) e $(T_{\Diamond})$ são o caso. Note ainda que se eliminarmos esses valores teremos exatamente as **Tm**-Nmatrizes da subseção anterior (interpretando T^+, C^+,C^- e F^- como t^n, t^c, f^c e f^i, respectivamente). Por essas razões defendemos que as (N)matrizes de **Dm** se comportam como se fossem a versão deôntica de **Tm**.

Não nos limitaremos à versão deôntica de **Dm**. Propomos ainda as (N)matrizes abaixo como contrapositiva deôntica para $\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{B}}$, $\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{4}}$ e $\mathcal{M}_{\Box}^{\mathbf{5}}$:

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{DB}}$

α	$\Box\alpha$
T^+	$+$
T^-	F^+
C^+	$-$
C^-	F^-
F^+	$-$
F^-	F^-

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{D4}}$

α	$\Box\alpha$
T^+	T^+
T^-	T^+
C^+	$-$
C^-	$-$
F^+	$-$
F^-	$-$

$\mathcal{N}_{\Box}^{\mathbf{D5}}$

α	$\Box\alpha$
T^+	T^+
T^-	T^+
C^+	F^-
C^-	F^-
F^+	F^-
F^-	F^-

A mesma observação com relação a **Dm** vale para as tabelas acima, a saber, eliminando os valores T^- e F^+, temos exatamante as matrizes para $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{B}}$, $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{4}}$ e $\mathcal{M}_\Box^{\mathbf{5}}$.

Uma **DBm**-valoração substitui numa **Dm**-valoração $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{D}}$ por $\mathcal{N}_\Box^{\mathbf{DB}}$. Definimos analogamante uma **D4m**-valoração e **D45m**-valoração.

Mantendo sempre a mesma analogia da Subseção 3.2.1 e Subseção 3.2.2, acrescentaremos os níveis de valoração para obter a completude dos sistemas **KDB** e **KD4** definidos na Subseção 2.2.2.

Outro sistema deôntico importante é o denominado **KD45**, cuja axiomática é a que se segue:[24]

- $\mathbf{KD45} = \mathbf{KD4} \cup \{(5)\}$

Veremos a seguir que **KD45** é completo acrescentando os níveis de valoração às (N)matrizes de **D45m**. Por ora, definimos sintaticamente os sistemas:

- $\mathbf{Dm} = \mathbf{PC} \cup \{(K), (K1), (K2), (M1) - (M4), (D), (DN)\}$
- $\mathbf{D4m} = \mathbf{Dm} \cup \{(4)\}$
- $\mathbf{DBm} = \mathbf{Dm} \cup \{(B)\}$
- $\mathbf{D45m} = \mathbf{D4m} \cup \{(5)\}$

Mostraremos, a seguir, a corretude e completude para esses respectivos sistemas.

Teorema 3.2.54 (Corretude fraca para Dm): Seja α uma fórmula de **Dm**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{Dm}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{Dm}} \alpha$$

Demonstração: Para os axiomas $(Ax1), (Ax2)$ e (Axm) e para as regras (DN) e (MP) a demonstração é análoga a do Teorema 3.2.1, substituindo t por $+$. Para os demais casos, temos:

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

– se $v(\Box(p \to q)) \in -$ então $v(K) \in +$.

[24] Esse sistema aparece em [Seg71] p. 50 obtido originalmente acrescentando o axioma (E) a **KD4**. Preferimos a axiomática a partir de (5) para mantermos a analogia com **S5**. Não é difícil verificar que em qualquer lógica modal clássica em que vale (DN) e $\Diamond$ é definido usualmente, temos que os axiomas (5) e (E) são equivalentes.

– se $v(\Box(p \to q)) \in +$, então $v(p \to q) \in T$. Daí temos $v(p) \in F$ ou $v(q) \in T$. Inferimos então que $v(\Box p) \in -$ ou $v(\Box q) \in +$. Portanto $v(\Box p \to \Box q) \in +$ e $v(K) \in +$.

(K1) $\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$

– se $v(\Box(p \to q)) \in -$, então $v(K1) \in +$

– se $v(\Box(p \to q)) \in +$, então $v(p \to q) \in T$. Daí temos $v(p) \in F$ ou $v(q) \in T$. Assim. $v(\Diamond p) \in -$ ou $v(\Diamond q) \in +$. Temos portanto que $v(\Diamond p \to \Diamond q) \in +$ e $v(K1) \in +$.

(K2) $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$

– se $v(\Diamond(p \vee q)) \in -$ então $v(K2) \in +$.

– se $v(\Diamond(p \vee q)) \in +$ então $v(p \vee q) \notin F$ e daí $v(p) \notin F$ ou $v(q) \notin F$. Suponha que $v(\Diamond p \vee \Diamond q) \in -$. Isso significa que $v(\Diamond p) \in -$ e $v(\Diamond q) \in -$, o que implica que $v(p) \in F$ e $v(q) \in F$, absurdo. Portanto $v(\Diamond p \vee \Diamond q) \in +$ e $v(K2) \in +$.

(M1) $\neg\Diamond p \to \Box(p \to q)$

– se $v(\neg\Diamond q) \in -$, então $v(M1) \in +$

– se $v(\neg\Diamond p) \in +$ então $v(\Diamond p) \in -$ e $v(p) \in F$. Daí $v(p \to q) \in T$ e $v(\Box(p \to q)) \in +$. Portanto $v(M1) \in +$.

(M2) $\Box q \to \Box(p \to q)$

– se $v(\Box q) \in -$, então $v(M2) \in +$

– se $v(\Box q) \in +$, então $v(q) \in T$. Daí temos que $v(p \to q) \in T$ e $v(\Box(p \to q)) \in +$. Portanto $v(M2) \in +$

(M3) $\Diamond q \to \Diamond(p \to q)$

– se $v(\Diamond q) \in -$, então $v(M3) \in +$

– se $v(\Diamond q) \in +$, então $v(q) \notin F$. Daí temos que $v(p \to q) \notin F$ e $v(\Diamond(p \to q)) \in +$. Portanto $v(M3) \in +$

(M4) $\Diamond\neg p \to \Diamond(p \to q)$

– se $v(\Diamond\neg p) \in -$, então $v(M4) \in +$

- se $v(\Diamond\neg p) \in +$, então $v(\neg p) \notin F$ e $v(p) \notin T$. Daí temos que $v(p \to q) \notin F$ e $v(\Diamond(p \to q)) \in +$

(D) $\Box p \to \Diamond p$

- se $v(\Box p) \in -$ então $v(D) \in +$
- se $v(\Box p) \in +$ então $v(p) \in T$ e $v(\Diamond p) \in +$. Portanto $v(D) \in +$ ■

Mostraremos agora a completude de **Dm** construindo analogamente a **Tm** uma valoração canônica por meio de um conjunto maximal consistente de fórmulas.

Definição 3.2.55: Seja Δ um conjunto maximal consistente de uma lógica $\mathbf{L}$ para $\mathbf{L} \in \{\mathbf{Dm}, \mathbf{DBm}, \mathbf{D4m}, \mathbf{D45m}\}$. Uma valoração canônica é uma função $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}} : For_{\mathbf{L}} \longrightarrow \{T^+, C^+, F^+, T^-, C^-, F^-\}$ definida do seguinte modo:

1. $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) \in +$ sse $\alpha \in \Delta$
2. $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) \in -$ sse $\neg\alpha \in \Delta$
3. $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) \in T$ sse $\Box\alpha \in \Delta$
4. $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) \in C$ sse $\Diamond\alpha \in \Delta$ e $\Diamond\neg\alpha \in \Delta$
5. $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{L}}(\alpha) \in F$ sse $\Box\neg\alpha \in \Delta$

□

Lema 3.2.56: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}$ é uma **Dm**-valoração.

Demonstração:

- **CASO 1**: α é $\neg\beta$
  - (i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in T$ então $\Box\beta \in \Delta$. Por (DN) temos $\Box\neg\neg\beta \in \Delta$ e então $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\neg\beta) \in F$.
  - (ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in C$ então $\Diamond\beta, \Diamond\neg\beta \in \Delta$. Por (DN), $\Diamond\neg\neg\beta \in \Delta$ e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\neg\beta) \in C$.
  - (iii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in F$ então $\Box\neg\beta \in \Delta$ e daí $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\neg\beta) \in T$.
  - (iv) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in +$ então $\beta \in \Delta$. Por (DN) temos $\neg\neg\beta \in \Delta$ e daí $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\neg\beta) \in -$.

(v) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in -$ então $\neg\beta \in \Delta$, e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\neg\beta) \in +$.

- **CAS0 2**: α é $\Box\beta$

(i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in T$ então $\Box\beta \in \Delta$ e $\mathbb{V}_{\Delta}(\Box\beta) \in +$.

(ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in C$ então $\Diamond\neg\beta \in \Delta$. Daí por Def$_{\Diamond}$ e (DN) temos $\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\Box\beta) \in -$.

(iii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in F$ então $\mathbb{V}_{\Delta}(\beta) \notin T$ e $\Box\beta \notin \Delta$. Daí $\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\Box\beta) \in -$.

- **CASO 3**: α é $\beta \to \gamma$

(i) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in T$ então $\Box\gamma \in \Delta$. Por (M2), temos desse modo que $\Box\gamma \to \Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$ e por (MP) $\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in T$.

(ii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in F$ então $\neg\Diamond\beta \in \Delta$. Por (M1) e (MP), $\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Daí $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in T$.

(iii) Se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in T$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in C$ então $\Box\beta \in \Delta$ e $\Diamond\gamma, \Diamond\neg\gamma \in \Delta$. Como $\Diamond\gamma \in \Delta$ então $\Diamond(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por (M3). Por outro lado, como $\neg\Diamond\gamma \in \Delta$ por (D) temos $\neg\Box\gamma \in \Delta$. Daí $\Box\beta \wedge \neg\Box\gamma \in \Delta$ e então $\neg(\Box\beta \to \Box\gamma) \in \Delta$. Logo $\neg\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por (K). Portanto $\Diamond\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$ e então $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in C$.

(iv) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in T$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in F$ então $\Box\beta, \Box\neg\gamma \in \Delta$ e daí temos que $\Box\beta \wedge \Box\neg\gamma \in \Delta$. Ora, $\neg(\Diamond\neg\beta \vee \Diamond\neg\neg\gamma) \to \neg\Diamond(\neg\beta \vee \neg\neg\gamma) \in \Delta$ por (K2) e então $(\Box\beta \wedge \Box\neg\gamma) \to \Box(\beta \wedge \neg\gamma)$ Logo, $\Box(\beta \wedge \neg\gamma) \in \Delta$ por (MP) e portanto $\Box\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$, ou seja, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in F$.

(v) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in C$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in C$ então $\Diamond\beta, \Diamond\neg\beta, \Diamond\gamma, \Diamond\neg\gamma \in \Delta$. Se $\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$ temos $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in T$. Caso contrário, $\Diamond\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Além disso, $\Diamond\gamma \in \Delta$ e então $\Diamond(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M3)$. Isso mostra que $\Diamond(\beta \to \gamma), \Diamond\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$ e então $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in C$.

(vi) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in C$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in F$ então $\Diamond\beta, \Diamond\neg\beta \in \Delta$ e $\Box\neg\gamma \in \Delta$. Como temos $\Diamond\neg\beta \in \Delta$ então $\Diamond(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por $(M4)$. Por outro lado, como $\Diamond\beta \in \Delta$ e $\neg\Diamond\gamma \in \Delta$ então $\Diamond\beta \wedge \neg\Diamond\gamma \in \Delta$ e $\neg(\Diamond\beta \to \Diamond\gamma) \in \Delta$. Daí $\neg\Box(\beta \to \gamma) \in \Delta$, por (K1). Temos então $\Diamond\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Isso mostra que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in C$.

(vii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in +$ então $\gamma \in \Delta$ e $(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Temos portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in +$.

(viii) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in -$ então $\neg\beta \in \Delta$ e $(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Temos então que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in +$.

(ix) se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta) \in +$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\gamma) \in -$ então $\beta \in \Delta$ e $\neg\gamma \in \Delta$. Assim, $\beta \wedge \neg\gamma \in \Delta$ e daí $\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$. Portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\beta \to \gamma) \in -$.

Lema 3.2.57: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **Dm**. Assim, existe uma **Dm**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in + \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Pela Definição 3.2.55, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}$ é uma função tal que $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}(\alpha) \in +$ sse $\alpha \in \Delta$. Pelo Lemma 3.2.56, $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{Dm}}$ é uma **Dm**-valoração. ∎

Teorema 3.2.58 (Completude fraca para Dm): Seja α uma fórmula de **Dm**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{Dm}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{Dm}} \alpha.$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{Dm}} \alpha$. Assim existe um conjunto maximal consistente Δ em **Dm** de modo que $\alpha \notin \Delta$. Pelo Lemma 3.2.57, existe uma **Dm**-valoração $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}(\alpha) \notin +$. Portanto $\nvDash_{\mathbf{Dm}} \alpha$ ∎

Mostraremos a seguir a corretude e completude para **DBm**.

Teorema 3.2.59 (Corretude fraca para DBm): Seja α uma fórmula de **DBm**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{DBm}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{DBm}} \alpha$$

Demonstração: Para os axiomas e para as regras de **Dm** a demonstração é análoga a do Teorema 3.2.54. Para o axioma **B**, temos:

(B) $p \to \Box\Diamond p$

- se $v(p) \in +$, então $v(\neg p) \in -$. Daí $v(\Box\neg p) = F$ e $v(\Diamond p) = T$. Portanto $v(\Box\Diamond p) \in +$ e $v(B) \in +$. ∎

Lema 3.2.60: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}$ é uma **DBm**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.56. Com relação ao **CASO 2**, a mesma observação vale quando $\mathbb{V}_{\Delta}(\beta) \in +$. Restam três ítens a serem analisados.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$
  - se $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\beta) = T^{-}$, então $\Box\beta, \neg\beta \in \Delta$. Por (B) temos que $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$ e daí $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$. Portanto $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\Box\beta) = F^{+}$.
  - se $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\beta) = C^{-}$ então $\neg\beta, \Diamond\beta, \Diamond\neg\beta \in \Delta$. Por um lado temos $\neg\Box\beta \in \Delta$. Por outro, $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$, por (B). Daí $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$ e portanto $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\Box\beta) = F^{+}$.
  - se $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\beta) = F^{-}$, então $\Box\neg\beta, \neg\beta \in \Delta$. Temos então $\Diamond\neg\beta \in \Delta$, por (D) e daí $\neg\Box\beta \in \Delta$. Além disso, por (B) concluímos que $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$ e $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$. Portanto $\mathcal{V}^{\Delta}_{\mathbf{DBm}}(\Box\beta) = F^{-}$. ■

Lema 3.2.61: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **DBm**. Assim, existe uma **DBm**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in + \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.57, substituindo o Lema 3.2.56 pelo Lema 3.2.60. ■

Teorema 3.2.62 (Completude fraca para DBm): Seja α uma fórmula de **DBm**. Então:

$$\models_{\mathbf{DBm}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{DBm}} \alpha.$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{DBm}} \alpha$. Assim existe um conjunto maximal consistente Δ em **DBm** de modo que $\alpha \notin \Delta$. Pelo Lemma 3.2.61, existe uma **DBm**-valoração $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}(\alpha) \notin +$. Portanto $\nvDash_{\mathbf{DBm}} \alpha$ ■

Os próximos resultados que serão apresentados dizem respeito à corretude e à completude de **D4m**.

Teorema 3.2.63 (Corretude fraca para D4m): Seja α uma fórmula de **D4m**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{D4m}} \alpha \text{ implica } \models_{\mathbf{D4m}} \alpha$$

Demonstração: Para os axiomas (K2),(M3),(M4) para as regras de **Dm** a demonstração é análoga a do Teorema 3.2.54. Nos demais casos algumas alterações são necessárias, substituindo:

(K) $v(\Box q) \in +$ por $v(\Box q) = T^{+}$ e $v(\Box p \to \Box q) \in +$ por $v(\Box p \to \Box q) = T^{+}$.

(K1) $v(\Diamond p) \in -$ por $v(\Diamond p) = F^-$.

(M1) $v(\Box(p \to q)) \in +$ por $v(\Box(p \to q)) = T^+$.

(M2) $v(\Box(p \to q)) \in +$ por $v(\Box(p \to q)) = T^+$.

Para o axioma (4), temos:

(4) $\Box p \to \Box\Box p$

- se $v(p) \in +$, então $v(\Box p) = T^+$ e $v(\Box\Box p) = T^+$. Logo $v(4) \in +$. ■

Lema 3.2.64: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}$ é uma **D4m**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.56. Com relação ao **CASO 2**, a mesma observação vale quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) \in C$ ou $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}\Delta(\beta) \in F$. Resta analisar quando $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) \in T$.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$
  - se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\beta) \in T$, então $\Box\beta \in \Delta$. Por (4) temos que $\Box\Box\beta \in \Delta$ e daí $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{4m}}(\Box\beta) \in T$. ■

Lema 3.2.65: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **D4m**. Assim, existe uma **D4m**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in + \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.57, substituindo o Lema 3.2.56 pelo Lema 3.2.64. ■

Teorema 3.2.66 (Completude fraca para D4m): Seja α uma fórmula de **D4m**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{D4m}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{D4m}} \alpha.$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{D4m}} \alpha$. Assim existe um conjunto maximal consistente Δ em **D4m** de modo que $\alpha \notin \Delta$. Pelo Lemma 3.2.65, existe uma **D4m**-valoração $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}(\alpha) \notin +$. Portanto $\nvDash_{\mathbf{D4m}} \alpha$ ■

Provamos, por fim, a completude para **D45m**.

Teorema 3.2.67 (Corretude fraca para D45m): Seja α uma fórmula de **D45m**. Então:

$$\vdash_{\mathbf{D45m}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{D45m}} \alpha$$

Demonstração: Para os axiomas e para as regras de **Dm** a demonstração é análoga a do Teorema 3.2.54, bastando substituir $v(\alpha) \in +$ por $v(\alpha) = T^+$ e $v(\alpha) \in -$ por $v(\alpha) = F^-$ se α é do tipo $\Box\beta$ ou $\Diamond\beta$ Para o axioma (4), a demonstração é análoda a do Teorema 3.2.63. Para (5):

(5) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

- se $v(\Diamond p) \in +$, então $v(\Box\neg p) \in -$ e $v(\neg p) \notin T$. Logo $v(p) \in T$, o que implica que $v(\Diamond p) = T^+$ e $v(\Box\Diamond p) = T^+$. Portanto $v(5) \in +$. ■

Lema 3.2.68: $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{D45m}}$ é uma **D45m**-valoração.

Demonstração: Para **CASO 1** e **CASO 3** a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.56. Com relação ao **CASO 2**, a demonstração é idêntica a do Lemma 3.2.64 quando $V_{\Delta}(\beta) \in T$. Restam quatro ítens a serem analisados.

- **CASO 2**: α é $\Box\beta$
  - se $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{D45m}}(\beta) \in C$, então $\Diamond\beta, \Diamond\neg\beta \in \Delta$. De $\Diamond\neg\beta \in \Delta$ temos $\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$, por (5). Daí $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$ e portanto $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{D45m}}(\Box\beta) = F^-$.
  - se $\mathbb{V}_{\Delta}(\beta) \in F$, então $\neg\Diamond\beta \in \Delta$ e por (D) $\neg\Box\beta \in \Delta$. De $\neg\Diamond\beta \in \Delta$ temos $\Box\neg\beta \in \Delta$ e novamente por (D) temos $\Diamond\neg\beta \in \Delta$. Por fim, $\Box\Diamond\neg\beta \in \Delta$, por (5). Logo $\Box\neg\Box\beta \in \Delta$ e $\mathbb{V}^{\Delta}_{\mathbf{D45m}}(\Box\beta) = F^-$.

Lema 3.2.69: Seja Δ um conjunto maximal consistente em **D45m**. Assim, existe uma **D45m**-valoração $\mathbb{V}$ de modo que, para toda fórmula α:

$$\mathbb{V}(\alpha) \in + \text{ sse } \alpha \in \Delta$$

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.57, substituindo o Lema 3.2.56 pelo Lema 3.2.68. ■

Teorema 3.2.70 (Completude fraca para D45m): Seja α uma fórmula de **D45m**. Então:

$$\vDash_{\mathbf{D45m}} \alpha \ \text{ implica } \ \vdash_{\mathbf{D45m}} \alpha.$$

Demonstração: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{D45m}} \alpha$. Assim existe um conjunto maximal consistente Δ em **D45m** de modo que $\alpha \notin \Delta$. Pelo Lemma 3.2.69, existe uma **D45m**-valoração $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}(\alpha) \notin +$. Portanto $\nvDash_{\mathbf{D45m}} \alpha$ ■

Vimos acima a completude para **Dm**, **DBm**, **D4m** e **D45m** com relação às respectivas (N)matrizes de 6-valores apresentadas no ínicio dessa subseção. Analogamente, defineremos os sistemas não normais por meio dessas lógicas deônticas minimais.

- $\mathbf{D} = \mathbf{Dm} \cup \{(Nec)\}$
- $\mathbf{KDB} = \mathbf{DBm} \cup \{(Nec)\}$
- $\mathbf{KD4} = \mathbf{D4m} \cup \{(Nec)\}$
- $\mathbf{KD45} = \mathbf{D45m} \cup \{(Nec)\}$

Note que a demonstração de que essas axiomáticas correspondem à original é análoga a que fizemos na Subseção 3.2.2 ao nos referirmos de como construir **T** a partir de **Tm**.

Do ponto de vista semântico, nossa solução será semelhante a de Kearns. Acrescentaremos os níveis de valoração, com a diferença de que se $v(\alpha)$ recebe sempre um valor distinguido, ou seja, $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq +$, teremos $\mathsf{Val}_{k+1}(\alpha) = T^+$. A definição de tautologia também será adaptada, uma fórmula α será tautologia quando existir um nível de valoração k em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = T^+$.

Mostraremos abaixo a completude de **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45** a partir das (N)Matrizes de **Dm**, **DBm**, **D4m** e **D45m**, respectivamente.

Definição 3.2.71: Seja $\mathbf{Lm} \in \{\mathbf{Dm}, \mathbf{DBm}, \mathbf{D4m}, \mathbf{D45m}\}$. Seja também $\mathbf{L} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{KDB}, \mathbf{KD4}, \mathbf{KD45}\}$. Por fim, seja Val^L o conjunto das **Lm**-valorações

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k^L)_{k\in\mathbb{N}}$ para uma sequência dos subconjuntos de Val^L definida do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0^L = \mathsf{Val}^L$, e, para $k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1}^L = \{v \in \mathsf{Val}_k^L \ : \ \text{para cada fórmula } \alpha,\ \mathsf{Val}_k^L(\alpha) \subseteq + \text{ implica } v(\alpha) = T^+\}$$

em que $\mathsf{Val}_k^L(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k^L\}$. Os elementos de Val_k^L são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **L**.

(b) O conjunto das **L**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{L}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathsf{Val}_k^L$. □

Definição 3.2.72: Seja $\mathbf{L} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{KDB}, \mathbf{KD4}, \mathbf{KD45}\}$ e α uma fórmula de **L**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{L}} \alpha$ sse $v(\alpha) = T^+$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{L}}$. □

Proposição 3.2.73: Seja $\mathbf{L} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{KDB}, \mathbf{KD4}, \mathbf{KD45}\}$ e α uma fórmula de $\mathbf{L}$. Assim:

$\vDash_{\mathbf{L}} \alpha$ sse existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k^L(\alpha) = \{T^+\}$.

Demosntração: Análoga à Proposição 3.2.20 ■

Teorema 3.2.74 (Corretude fraca de L): Seja $\mathbf{L} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{KDB}, \mathbf{KD4}, \mathbf{KD45}\}$ e α uma fórmula de $\mathbf{L}$. Assim:

$$\vdash_{\mathbf{L}} \alpha \text{ implica } \vDash_{\mathbf{L}} \alpha$$

Demonstração: Para os axiomas e regras de **Lm** a prova é análoga aos Teorema 3.2.54, Teorema 3.2.59, Teorema 3.2.63 e Teorema 3.2.67. Para a regra (Nec), o argumento é semelhante a do Teorema 3.2.21. O único detalhe digno de nota é que, se $\mathsf{Val}_k^L(\beta) = \{T^+\}$ então $\mathsf{Val}_k^L(\Box\beta) \subseteq +$ e daí $\mathsf{Val}_{k+1}^L(\Box\beta) = \{T^+\}$. ■

Definição 3.2.75: O conjunto das **L**-*valorações canônicas* é o conjunto

$$\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} = \{\mathbb{V}_{\mathbf{L}}^{\Delta} \ : \ \Delta \text{ é um conjunto maximal consistente em } \mathbf{L}\},$$

em que cada $\mathbb{V}_{\mathbf{L}}^{\Delta}$ é dado de acordo com a Definição 3.2.55. □

Lema 3.2.76: $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathsf{Val}_0^L$.

Demonstração: Consequência imediata da Definição 3.2.75 e Definição 3.2.55, adaptando a prova do Lema 3.2.56, Lema 3.2.60, Lema 3.2.64 e Lema 3.2.68 levando em consideração que cada axioma de **Lm** vale em **L**. ■

Lema 3.2.77: Se $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathsf{Val}_k^L$ então $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathsf{Val}_{k+1}^L$.

Demonstração: Análoga a do Lema 3.2.24. A única modificação é a que se segue: dado $\mathbb{V}_{\mathbf{L}}^{\Delta} \in \mathsf{Val}_k^L(\alpha)$, se α é uma fórmula de modo que $\mathsf{Val}_k^L(\alpha) \subseteq +$ então $\mathbb{V}_{\Delta}(\alpha) \in +$. Como $\Box\alpha \in \Delta$ (prova análoga a do Lema 3.2.24) então $\mathbb{V}_{\Delta}(\alpha) \in T$, pela Definição 3.2.55. Daí, $\mathbb{V}_{\Delta}(\alpha) = T^+$ e então $\mathbb{V}_{\Delta} \in \mathsf{Val}_{k+1}^L$, pela Definição 3.2.71. ■

Corolário 3.2.78: $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathsf{Val}_{\mathbf{L}}$.

Demonstração: Consequência imediata do Lema 3.2.76 e Lema 3.2.77. ■

Teorema 3.2.79 (Completude fraca de L): Seja $\mathbf{L} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{KDB}, \mathbf{KD4}, \mathbf{KD45}\}$ e α uma fórmula de $\mathbf{L}$. Assim:

$$\vDash_{\mathbf{L}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$$

Proof: Suponha que $\nvdash_{\mathbf{L}} \alpha$. Logo, existe um conjunto Δ maximal consistente em $\mathbf{L}$ de modo que $\alpha \notin \Delta$, assim $\neg\alpha \in \Delta$. Suponha que $\vDash_{\mathbf{L}} \alpha$. Assim, existe $k \geq 0$ de modo que $\mathsf{Val}_k^L(\alpha) = \{T^+\}$, pela Proposição 3.2.73. Visto que $\mathsf{Val}_{can}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathsf{Val}_k^L$, pelo Corolário 3.2.78, segue-se que $\mathbb{V}_\Delta(\alpha) = T^+$. Mas $\neg\alpha \in \Delta$ e então $\mathbb{V}_\Delta(\alpha) \in -$, contradição. Portanto $\nvDash_{\mathbf{L}} \alpha$. ■

Antes de encerrar o capítulo, gostaríamos de fazer algumas considerações finais. Vimos na Subseção 3.2.1 os sistemas **Tm**, **Bm**, **4m** e **5m**. Na Subseção 3.2.2, acrescentamos os níveis de valorações e obtivemos uma semântica completa para **T**, **B**, **S4** e **S5**. A Figura 3.1 mostra a relação de inclusão que existe entre esses sistemas caracterizáveis por Nmatrizes de 4-valores.

Nessa subseção, substituímos nos sistemas acima o axioma (T) por (D), obtendo **DTm**, **DBm**, **D4m** e **D5m**. Semanticament,e acrescentamos os valores T^- e F^+, para lidar com as situações em que $\Box p$ é o caso mas $\neg p$ é o caso, e reciprocamente, quando $\Box\neg p$ é o caso mas p é o caso. Acrescentando os níveis de valorações temos a completude para **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45**. A Figura abaixo mostra a relação de inclusão desses sistemas, análoga à Figura 3.1.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{KD45} & & \mathbf{KDB} \arrow[ll] \\
\mathbf{KD4} \arrow[ur] & & \mathbf{D} \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
 & \mathbf{D45m} \arrow[uu] & & \mathbf{DBm} \arrow[ll] \arrow[uu] \\
\mathbf{D4m} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathbf{Dm} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.2: Sistemas modais completos por Nmatrizes de 6 valores

Como afirmado na subseção 3.2.2, Kearns mostrou a completude para um sistema de Dedução Natural para **T**, apresentando (N)matrizes de 4 valores para **S4** e **S5**. Mostramos a completude dessas lógicas para seus respectivos sistemas axiomáticos. Além disso, propusemos (N)matrizes completas de 4 valores para **B** e de 6 valores para **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45**.

Queremos ainda ressaltar que em qualquer sistema que estende **PC** em que vale (T), também vale (D). De fato, por (T) temos $\Box\neg p \to \neg p$ e daí $p \to \Diamond p$ e por Silogismo Hipotético temos $\Box p \to \Diamond p$. Isso significa que a relação de inclusão dos sistemas modais normais vistos nesse capítulo pode ser descrita no gráfico abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{S5} & & \mathbf{B} \arrow[ll] \\
\mathbf{S4} \arrow[ur] & & \mathbf{T} \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
 & \mathbf{KD45} \arrow[uu] & & \mathbf{KDB} \arrow[ll] \arrow[uu] \\
\mathbf{KD4} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathbf{D} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.3: Sistemas modais normais completos por Nmatrizes

A semântica exposta nesse capítulo possui certas limitações. Acreditamos que faz sentido pensar que sistemas em que vale (D) são caracterizados por 6 valores que passam a ser reduzidos a 4 quando vale (T). Por outro lado, as (N)matrizes para os axiomas (B), (4) e (5) não são obtidas de maneira tão intuitiva como nos modelos relacionais.[25]

É importante mencionar que ainda não temos clareza sobre a relação entre as Nmatrizes e os modelos de Kripke. Tampouco sabemos se é possível obter um resultado genérico de completude, como o obtido por Lemmon com relação aos modelos relacionais.[26] Acreditamos, entretanto, que será possível obter algum resultado genérico de completude por meio de combinações de lógicas. Algumas intuições serão fornecidas em Considerações Finais.

Outra questão aberta é saber se é possível obter algum resultado de incompletude para a semântica de Nmatrizes finitas com níveis de valoração e se esses resultados coincidiriam com os resultados de incompletude por semântica relacional. Também não obtivemos completudes para sistemas não-normais ou sistemas modais cujo fragmento proposicional não é clássico. Temos, entretanto, uma ideia de como atacar esses problemas. Nossa estratégia também será esmiuaçada nas Considerações Finais.

[25] Nos modelos relacionais de Kripke, para obter a completude desses sistemas basta garantir que a relação seja simétrica, transitiva ou de equivalência. Vide [Kri63]

[26] Em [LS77], Lemmon mostra a completude para todas as extensões de $\mathbf{K}$ obtidas pelas instanciações do esquema $\Diamond^k\Box^l\alpha \to \Box^m\Diamond^n\alpha$ para k, l, m, n naturais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa última parte da Tese é de caráter essencialmente especulativo. Fornecemos intuições, caminhos e sugestões de como poderíamos aplicar a semântica de Nmatrizes para outros sistemas distintos dos apresentados no Capítulo 3.

Nessa parte da Tese, deixamos propositalmente de lado as referências biblográficas. Primeiramente, tais referências já foram citadas ao longo da Tese; além disso preferimos ocultá-las para sermos coerente com a falta de rigor técnico do que se segue. Também pressupomos definições e teoremas apresentados na Tese, sobretudo no último capítulo, muitas vezes sem enunciá-los explicitamente.

As considerações que se seguem se dividem em basicamente dois caminhos: buscar Nmatrizes para lógicas modais não-clássicas e lógicas modais não normais. Também oferecemos pistas de como obteríamos tal semântica para o cálculo proposicional intuicionista. Todas elas têm, porém, a característica de não serem pretensiosas.

Combinando Nmatrizes com matrizes

Sistemas modais deônticos - como **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45** - e os aléticos - **T**, **B**, **S4** e **S5** - não podem ser caracterizados por matrizes finitas. Buscando uma nova semântica distinta dos modelos de Kripke a esses sistemas, apresentamos o conceito de Nmatrizes.

Mostramos também a completude desses sistemas aléticos com relação às Nmatrizes de 4 valores e desses sistemas deônticos com relação a 6 valores. Tivemos que acrescentar uma maquinaria extra, com a noção de níveis de valoração para obter a completude. Por ora, ignoremos essa maquinaria e nos concentremos nas Nmatrizes deônticas.

Recordemos que nossa semântica para **D** tem os valores de verdade: T^+, C^+, F^+, T^-, C^- e F^- que podem ser rearranjados do seguinte modo:

$$\mathbb{T} = \{T^+, T^-\} \qquad \mathbb{C} = \{C^+, C^-\} \qquad \mathbb{F} = \{F^+, F^-\}$$

$$\oplus = \{T^+, C^+, F^+\} \qquad \ominus = \{T^-, C^-, F^-\}$$

Recordemos ainda que $\oplus$ é o conjunto dos valores distinguidos. A semântica para **D** é regida por meio das Nmatrizes abaixo:

$\to$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T} \cup \mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

p	$\Box p$
$\mathbb{T}$	$\oplus$
$\mathbb{C}$	$\ominus$
$\mathbb{F}$	$\ominus$

p	$\neg p$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

$\to$	$\oplus$	$\ominus$
$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$

p	$\neg p$
$\oplus$	$\ominus$
$\ominus$	$\oplus$

Lembremos que para os operadores $\neg$ e $\to$ é requirido que as condições impostas por ambas as matrizes sejam respeitadas. Isso implica nas seguintes tabelas de 6 valores para esses operadores (para o conjunto unitário de valores $\{x\}$ escreveremos simplesmente x):

p	$\neg p$
T^+	F^-
T^-	F^+
C^+	C^-
C^-	C^+
F^+	T^-
F^-	T^+

$\to$	T^+	T^-	C^+	C^-	F^+	F^-
T^+	T^+	T^-	C^+	C^-	F^+	F^-
T^-	T^+	T^+	C^+	C^+	F^+	F^+
C^+	T^+	T^-	$\{T^+, C^+\}$	$\{T^-, C^-\}$	C^+	C^-
C^-	T^+	T^+	$\{T^+, C^+\}$	$\{T^+, C^+\}$	C^+	C^+
F^+	T^+	T^-	T^+	T^-	T^+	T^-
F^-	T^+	T^+	T^+	T^+	T^+	T^+

Gostaríamos de chamar atenção para o fato de que em **D** os 6 valores podem ser vistos como duplas:

$$\begin{array}{ll} T^+ = \langle T, 1\rangle & T^- = \langle T, 0\rangle \\ C^+ = \langle C, 1\rangle & C^- = \langle C, 0\rangle \\ F^+ = \langle F, 1\rangle & F^- = \langle F, 0\rangle \end{array}$$

Seja $\langle x, y\rangle$ um par de valores qualquer para $x \in \{T, C, F\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Assim, o conjunto $\mathbb{T}$, por exemplo, seria representado por $\langle T, y\rangle$ enquanto o conjunto $\ominus$ seria por $\langle x, 0\rangle$.

Observe que dado um par $\langle x, y\rangle$, cada $y \in \{0, 1\}$ se comporta nas duas últimas matrizes acima exatamente do mesmo modo que nas tabelas para a lógica proposicional clássica. De fato, para todo $x \in \{T, C, F\}$ todo $x' \in \{T, C, F\}$ e todo $x'' \in \{T, C, F\}$:

$\to$	$\langle x', 1\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$

p	$\neg p$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x', 1\rangle$

Já o operador $\Box$ visto sobre os pares de verdade $\langle x, y\rangle$ tem o seguinte comportamento semântico em **D**, para todo $x \in \{T, C, F\}$ e todo $y \in \{0, 1\}$:

p	$\Box p$
$\langle T, y\rangle$	$\langle x, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$

Na subseção 3.2.3, vimos ainda que - afim de obter Nmatrizes completas para os sistemas **KDB**, **KD4** e **KD5** - temos que alterar apenas a Nmatriz com relação ao operador modal $\Box$ do seguinte modo:

KDB

α	$\Box\alpha$
T^+	$\oplus$
T^-	F^+
C^+	$\ominus$
C^-	F^-
F^+	$\ominus$
F^-	F^-

KD4

α	$\Box\alpha$
T^+	T^+
T^-	T^+
C^+	$\ominus$
C^-	$\ominus$
F^+	$\ominus$
F^-	$\ominus$

KD45

α	$\Box\alpha$
T^+	T^+
T^-	T^+
C^+	F^-
C^-	F^-
F^+	F^-
F^-	F^-

Em termos de pares de valores verdades $\langle x, y\rangle$, essas Nmatrizes podem ser reescritas para todo $x \in \{T, C, F\}$ e todo $y \in \{0, 1\}$:

KDB

α	$\Box\alpha$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle x, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$

KD4

α	$\Box\alpha$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$

KD45

α	$\Box\alpha$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle F, 0\rangle$

Devemos também relembrar que se eliminarmos os pares $\langle T, 0\rangle$ e $\langle F, 1\rangle$ das Nmatrizes de **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45** obtemos a semântica de **T**, **B**, **S4** e **S5**, respectivamente.

Vimos ao longo da Tese alguns sistemas proposicionais caracterizados por matrizes finitas. Talvez o mais célebre dentre eles seja $\mathbf{Ł}_3$. Essa lógica tem os três valores $1, \frac{1}{2}$ e 0, em que 1 é o distinguido. Sua semântica obedece as matrizes:

p	$\neg p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Acreditamos que a abordagem por meio de pares de valores poderia fornecer uma semântica para lógicas deônticas e aléticas cujo fragmento não é clássico. Combinando, por exemplo, os cálculos deônticos e $\mathbf{Ł}_3$, teríamos 9 valores:

$$\begin{array}{ccc} \langle T, 1\rangle & \langle T, \frac{1}{2}\rangle & \langle T, 0\rangle \\ \langle C, 1\rangle & \langle C, \frac{1}{2}\rangle & \langle C, 0\rangle \\ \langle F, 1\rangle & \langle F, \frac{1}{2}\rangle & \langle F, 0\rangle \end{array}$$

Os valores distinguidos seriam $\langle T, 1\rangle$, $\langle C, 1\rangle$ e $\langle F, 1\rangle$.

A ideia subjacente aos pares de valores $\langle x, y\rangle$ nesse caso é que $x \in \{T, C, F\}$ respeita as (N)matrizes modais deônticas, enquanto $y \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ respeita matrizes proposicionais de $\mathbf{Ł}_3$. Note que $\langle T, y\rangle$ determina o conjunto de pares de valores $\{\langle T, 1\rangle, \langle T, \frac{1}{2}\rangle, \langle T, 0\rangle\}$, por outro lado $\langle x, 1\rangle$ determina o conjunto $\{\langle T, 1\rangle, \langle C, 1\rangle, \langle F, 1\rangle\}$. Isso significa que para os operadores $\neg$ e $\to$ teríamos as tabelas abaixo como semântica para certa combinação entre os sistemas deônticos e Ł_3 (para x, x' e $x'' \in \{T, C, F\}$; para y, y' e $y'' \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$):

p	$\neg p$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x', 1\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', \frac{1}{2}\rangle$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x', 0\rangle$

$\to$	$\langle x', 0\rangle$	$\langle x', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 1\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$	$\langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle$

$\mathcal{N}_\neg$

p	$\neg p$
$\langle T, y\rangle$	$\langle F, y'\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle C, y'\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle T, y'\rangle$

$\mathcal{N}_\to$

$\to$	$\langle T, y'\rangle$	$\langle C, y'\rangle$	$\langle F, y'\rangle$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle \cup \langle C, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle$

Denominemos $\mathcal{N}_\neg$ e $\mathcal{N}_\to$ as matrizes modais para $\neg$ e $\to$.

Com relação ao operador modal $\Box$ teríamos 6 pares não-distinguidos. Combinando Ł_3 com os cálculos deônticos **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45** teríamos as seguintes Nmatrizes para $x \in \{T, C, F\}$ e $y \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$:

D

p	$\Box p$
$\langle T, y\rangle$	$\langle x, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$

KD4

α	$\Box\alpha$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$

KDB

α	$\Box\alpha$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle x, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\{\langle F, \frac{1}{2}\rangle, \langle F, 0\rangle\}$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle x, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\{\langle F, \frac{1}{2}\rangle, \langle F, 0\rangle\}$

KD45

α	$\Box\alpha$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\{\langle F, \frac{1}{2}\rangle, \langle F, 0\rangle\}$
$\langle F, y\rangle$	$\{\langle F, \frac{1}{2}\rangle, \langle F, 0\rangle\}$

Para fins elucidativos, explicitaremos nossa notação compacta que temos em mente ao combinarmos $\mathbf{Ł}_3$ com os quatro sistemas deônticos listados acima. Para os operadores proposicionais, teríamos:

p	$\neg p$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle T, 1\rangle$

$\rightarrow$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$	$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$	$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$	$\{\langle T, 1\rangle, \langle C, 1\rangle\}$	$\{\langle T, \frac{1}{2}\rangle, \langle C, \frac{1}{2}\rangle\}$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\{\langle T, \frac{1}{2}\rangle, \langle C, \frac{1}{2}\rangle\}$	$\{\langle T, 1\rangle, \langle C, 1\rangle\}$

$\rightarrow$	$\langle C, 0\rangle$	$\langle F, 1\rangle$	$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\{\langle T, 1\rangle, \langle C, 1\rangle\}$	$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$

Já o operador modal $\Box$ respeitaria as seguintes (N)matrizes em cada um dos quatro sistemas deônticos:

D

α	$\Box\alpha$
$\langle T,1\rangle$	$\{\langle T,1\rangle,\langle C,1\rangle,\langle F,1\rangle\}$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle T,1\rangle,\langle C,1\rangle,\langle F,1\rangle\}$
$\langle T,0\rangle$	$\{\langle T,1\rangle,\langle C,1\rangle,\langle F,1\rangle\}$
$\langle C,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,0\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,0\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$

KDB

α	$\Box\alpha$
$\langle T,1\rangle$	$\{\langle T,1\rangle,\langle C,1\rangle,\langle F,1\rangle\}$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,0\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,0\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$

KD4

α	$\Box\alpha$
$\langle T,1\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,0\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,1\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,0\rangle$	$\{\langle T,\frac{1}{2}\rangle,\langle C,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle T,0\rangle,\langle C,0\rangle,\langle F,0\rangle\}$

KD45

α	$\Box\alpha$
$\langle T,1\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle C,0\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,1\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$
$\langle F,0\rangle$	$\{\langle F,\frac{1}{2}\rangle,\langle F,0\rangle\}$

Para validar o axioma **T**, seria preciso eliminar os valores $\langle T,0\rangle$, $\langle T,\frac{1}{2}\rangle$ e $\langle F,1\rangle$. Em outras palavras, dado M o conjunto dos valores de **Ł**$_3$ e $D\subseteq M$ o conjunto dos distinguidos, teríamos que eliminar os valores $\langle F,d\rangle$ e $\langle T,i\rangle$ em que $d\in D$ e $i\in M-D$ (ou seja, i não é distinguido). Isso nos permitiria obter Nmatrizes para as combinações dos sistemas aléticos **T**, **B**, **S4** e **S5** com **Ł**$_3$ a partir das tabelas acima.

Combinando Nmatrizes com Nmatrizes

Acreditamos que o mesmo método poderia ser usado para obter uma semântica completa para a combinação de duas lógicas caracterizáveis por Nmatrizes. Tomemos o caso da combinação de **mbC** com os quatro sistemas deônticos **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45**. O cálculo **mbC** pode ser caracterizado pelo conjunto de valores $M = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ em que $D = \{1, \frac{1}{2}\}$ é o conjunto dos distinguidos (usaremos 1, $\frac{1}{2}$ e 0 no lugar de t,I e f para efeitos de simplificação). Esse cálculo é regido pelas Nmatrizes abaixo:

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$
$\frac{1}{2}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$
0	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	0
$\frac{1}{2}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	0
0	0	0	0

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	0
$\frac{1}{2}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	0
0	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$	$\{1, \frac{1}{2}\}$

p	$\neg p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\{\frac{1}{2}, 1\}$
0	$\{\frac{1}{2}, 1\}$

p	$\circ p$
1	$\{1, \frac{1}{2}, 0\}$
$\frac{1}{2}$	0
0	$\{1, \frac{1}{2}, 0\}$

Teríamos nesse caso os mesmos 9 pares de valores que tivemos no caso anterior, com a diferença de que o conjunto dos pares distinguidos seria:

$$\{\langle T, 1\rangle, \langle C, 1\rangle, \langle F, 1\rangle, \langle T, \tfrac{1}{2}\rangle, \langle C, \tfrac{1}{2}\rangle, \langle F, \tfrac{1}{2}\rangle\}$$

Nossa intuição é garantir que cada coordenada modal x de cada par de valores $\langle x, y\rangle$ respeitaria as Nmatrizes deônticas acima. Isso significa que definindo $\wedge$ e $\vee$ à maneira clássica e aplicando tal definição às Nmatrizes modais $\mathcal{N}_\neg$ e $\mathcal{N}_\to$, teríamos as Nmatrizes modais abaixo para os operadores $\vee$ e $\wedge$ (em que y, y' e $y'' \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$):

$\mathcal{N}_\vee$

$\vee$	$\langle T, y'\rangle$	$\langle C, y'\rangle$	$\langle F, y'\rangle$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle T, y''\rangle \cup \langle C, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$

$\mathcal{N}_\wedge$

$\wedge$	$\langle T, y'\rangle$	$\langle C, y'\rangle$	$\langle F, y'\rangle$
$\langle T, y\rangle$	$\langle T, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle C, y''\rangle$	$\langle C, y''\rangle \cup \langle F, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle F, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$	$\langle F, y''\rangle$

A coordenada proposicional y de cada par de valores $\langle x, y\rangle$ respeitaria as Nmatrizes de **mbC** de modo que para x, x' e $x'' \in \{T, C, F\}$ teríamos:

$\vee$	$\langle x', 1\rangle$	$\langle x', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$

$\wedge$	$\langle x', 1\rangle$	$\langle x', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$

$\rightarrow$	$\langle x', 1\rangle$	$\langle x', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 0\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x'', 1\rangle \cup \langle x'', \frac{1}{2}\rangle$

p	$\neg p$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 1\rangle \cup \langle x', \frac{1}{2}\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x', 1\rangle \cup \langle x', \frac{1}{2}\rangle$

p	$\circ p$
$\langle x, 1\rangle$	$\langle x', 1\rangle \cup \langle x', \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x', 0\rangle$
$\langle x, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle x', 0\rangle$
$\langle x, 0\rangle$	$\langle x', 1\rangle \cup \langle x', \frac{1}{2}\rangle \cup \langle x', 0\rangle$

Com o intuito de que o operador modal $\Box$ respeite seu comportamento em **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45** teríamos que mudar apenas o conjunto de valores distinguidos, isso implicaria nas seguintes Nmatrizes para $x \in \{T, C, F\}$ e $y \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$:

D

p	$\Box p$
$\langle T, y\rangle$	$\langle x, 1\rangle \cup \langle x, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$

KD4

α	$\Box\alpha$
$\langle T, y\rangle$	$\{\langle T, 1\rangle, \langle T, \frac{1}{2}\}\rangle$
$\langle C, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$
$\langle F, y\rangle$	$\langle x, 0\rangle$

KDB

α	$\Box\alpha$
$\langle T,1\rangle$	$\langle x,1\rangle \cup \langle x,\frac{1}{2}\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\{\langle F,1\rangle, \langle F,\frac{1}{2}\}\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle x,0\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle x,0\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle F,0\rangle$

KD45

α	$\Box\alpha$
$\langle T,y\rangle$	$\{\langle T,1\rangle, \langle T,\frac{1}{2}\rangle\}$
$\langle C,y\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle F,y\rangle$	$\langle F,0\rangle$

Analogamente à seção anterior, dado M o conjunto dos valores de **mbC** e $D \subseteq M$ o conjunto dos distinguidos, teríamos que eliminar no contexto alético os valores $\langle F,d\rangle$ e $\langle T,i\rangle$ em que $d \in D$ e $i \in M - D$ (ou seja, i não é distinguido). Em outras palavras, a partir das tabelas acima, eliminando os valores $\langle T,0\rangle$, $\langle F,1\rangle$ e $\langle F,\frac{1}{2}\rangle$, teríamos Nmatrizes para **T**, **B**, **S4** e **S5** combinados com **mbC**.

Combinando Nmatrizes com Semântica de Traduções Possíveis

Por fim, temos razões para crer que a mesma intuição poderia valer ao combinarmos lógicas proposiocionais com modais via Semântica de Traduções Possíveis (PTS). Recapitulemos, por exemplo, as matrizes de $\mathbf{C_1}, \ldots, \mathbf{C_n}$ via PTS apenas para $\neg$. (usaremos 1, $\frac{1}{2}$ e 0 no lugar de T,T^- e F para efeitos de simplificação):

	$\neg_L$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

	$\neg_C$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

É digno mencionar que Nmatrizes deônticas também podem ser vistas como conjunto de matrizes determinísticas. Para o operador $\Box$ em **D**, teríamos:

	$\Box_1$
$\langle T,1\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle T,0\rangle$

	$\Box_2$
$\langle T,1\rangle$	$\langle C,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle C,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle C,0\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle C,0\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle C,0\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle C,0\rangle$

	$\Box_3$
$\langle T,1\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle F,0\rangle$

Essa perspectiva torna intuitiva como construir PTS para lógicas modais sem semântica de Kripke. Cabe recordar que nas PTS para $\mathbf{C_1}, \ldots, \mathbf{C_n}$ o conjunto dos valores distinguidos é $\{1, \frac{1}{2}\}$. Isso nos forçaria construir o mesmo conjunto de pares de valores e o mesmo conjunto distinguido de pares que foram propostos para as versões deônticas de **mbC**.

Visto o caráter essencialmente especulativo dessas Considerações Finais, nos limitaremos a sugerir as matrizes de $\neg$ e $\Box$ para **D** combinado com $\mathbf{C_1}, \ldots, \mathbf{C_n}$:

	$\neg_L$
$\langle T,1\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$

	$\neg_C$
$\langle T,1\rangle$	$\langle F,0\rangle$
$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$
$\langle T,0\rangle$	$\langle F,1\rangle$
$\langle C,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle C,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$
$\langle C,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$
$\langle F,1\rangle$	$\langle T,0\rangle$
$\langle F,\frac{1}{2}\rangle$	$\langle T,\frac{1}{2}\rangle$
$\langle F,0\rangle$	$\langle T,1\rangle$

	$\Box_1$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle T, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle T, 0\rangle$

	$\Box_2$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle C, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle C, 0\rangle$

	$\Box_3$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle F, 1\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$

	$\Box_4$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle T, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle T, 0\rangle$

	$\Box_5$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle C, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle C, 0\rangle$

	$\Box_6$
$\langle T, 1\rangle$	$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle T, 0\rangle$	$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$
$\langle C, 1\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle C, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle C, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, 1\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, \frac{1}{2}\rangle$	$\langle F, 0\rangle$
$\langle F, 0\rangle$	$\langle F, 0\rangle$

Não temos garantia de que as combinações aqui sugeridas sejam viáveis axiomaticamente e tampouco sabemos quais cláusulas via PTS as guiariam. Propomos apenas uma visão intuitiva do processo de como combinar matrizes modais e proposicionais, esperando algum tipo de contribuição no estudo de combinação de lógicas.

Nmatrizes para lógicas modais não-normais

Ainda que os modelos de Kripke sejam, a princípio, uma semântica extremamente intuitiva e que dá conta de uma vasta família de lógicas modais, esse não é forçosamente o caso para os sistemas modais não-normais. Por não valer (Nec) nesses sistemas, seus respectivos modelos de Kripke se tornam mais complexos, afastando da abordagem intuitiva dos sistemas normais.

No caso da semântica de Nmatrizes, substituindo a regra (Nec) pelas regras de Lemmon (N^*) ou (N') teríamos uma ligeira alteração na definição dos níveis de valoração. Retomemos essas duas regras:

(N') $\vdash_{\mathbf{PC}} p$ implica $\vdash \Box p$

(N)* $\vdash p \to q$ implica $\vdash \Box p \to \Box q$

Os sistemas **S0.5** e **E2**, por exemplo, poderiam ser reescritos do seguinte modo:

- $\mathbf{S0.5} = \mathbf{Tm} \cup \{$*(N')*$\}$
- $\mathbf{E2} = \mathbf{Tm} \cup \{$*(N*)*$\}$

Recapitulemos a semântica de **Tm**. Dado o conjunto de valores $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$, seja $t = \{t^n, t^c\}$ o conjunto dos distinguidos e $f = \{f^c, f^i\}$ o dos não-distinguidos.

p	$\neg p$
t^n	f^i
t^c	f^c
f^c	t^c
f^i	t^n

$\to$	t^n	t^c	f^c	f^i
t^n	t^n	t^c	f^c	f^i
t^c	t^n	t	f^c	f^c
f^c	t^n	t	t	t^c
f^i	t^n	t^n	t^n	t^n

p	$\Box p$
t^n	t
t^c	f
f^c	f
f^i	f

Relembremos ainda que enriquecemos a semântica acima para **Tm** com a noção de nível de valoração. Tomemos uma coluna Val de uma Nmatriz para uma fórmula α. Se num nível k temos $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t$, então teríamos no nível $k+1$ que $\mathsf{Val}_{k+1}(\alpha) = t^n$, preservando assim a regra (Nec) e obtendo a completude de **T**.

Tendo em vista que $\mathbf{T} = \mathbf{Tm} \cup \{(Nec)\}$, parece que existe uma relação intrínseca entre os níveis de valoração e a regra (Nec). Parece razoável ainda supor que para versões mais fracas de (Nec) teríamos que enfraquecer a noção de nível de valoração.

No caso de **S0.5**, a solução seria simples. Sabemos que (N') pode ser aplicado apenas aos teoremas de **PC**. Em termos intuitivos diríamos que se num nível k temos $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t$ e α é uma **PC** tautologia, então $\mathsf{Val}_{k+1}(\alpha) = t^n$. Em termos formais, teríamos:

Definição 3.2.80: Seja Val o conjunto das **Tm**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val defininda do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$ E, para$k \geq 0$,

$$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k \ : \ \vDash_{\mathbf{PC}} \alpha \text{ implica } v(\alpha) = t^n\}$$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **S0.5**.

(b) O conjunto das **S0.5**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{S0.5}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

A definição de tautologia em **S0.5** seria análoga a **T**:

Definição 3.2.81: Seja α uma fórmula de **S0.5**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{S0.5}} \alpha$ sse $v(\alpha) \in t$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{S0.5}}$. □

No caso de **E2**, mudaríamos de nível de valoração ao nos depararmos com uma coluna Val_k para k natural em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t^n$ e α é do tipo $\beta \to \gamma$, em que α, β e γ são fórmulas de **E2**. A definição abaixo tenta formalizar essa idéia:

Definição 3.2.82: Seja Val o conjunto das **Tm**-valorações.

(a) Seja $(\mathsf{Val}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Val defininda do seguinte modo: $\mathsf{Val}_0 = \mathsf{Val}$, e, para $k \geq 0$:

$\mathsf{Val}_{k+1} = \{v \in \mathsf{Val}_k : \mathsf{Val}_k(\alpha) \subseteq t$ implica $v(\alpha) = t^n$ para toda fórmula α do tipo $\beta \to \gamma\}$

em que $\mathsf{Val}_k(\alpha) = \{v(\alpha) \ : \ v \in \mathsf{Val}_k\}$. Os elementos de Val_k são chamados *k-nível valorações* ou *valorações de nível k para* **E2**.

(b) O conjunto das **E2**-valorações é dado por $\mathsf{Val}_{\mathbf{E2}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathsf{Val}_k$. □

A definição de tautologia para **E2** também seria análoga:

Definição 3.2.83: Seja α uma fórmula de **E2**. Assim:

$\vDash_{\mathbf{E2}} \alpha$ sse $v(\alpha) = t^n$ para todo $v \in \mathsf{Val}_{\mathbf{E2}}$. □

Embora essas alterações nos pareçam bastante intuitivas e naturais, não conseguimos obter a almejada completude para esses sistemas. Talvez uma outra técnica seja necessária afim de obtê-la, ou talvez tenhamos tomado uma trilha que não leva a lugar algum. De qualquer maneira, nos comprometemos e buscar a completude via Nmatrizes para sistemas modais não-normais por esse ou outros caminhos.

Nmatrizes para lógicas modais em que não vale (D)

Os quatro valores para os sistemas **T**, **B**, **S4** e **S5** correspondem sintaticamente a quatro cenários:

$$\begin{array}{r|l} t^n & \Box\alpha \wedge \alpha \\ t^c & \Diamond\neg\alpha \wedge \alpha \\ f^c & \Diamond\alpha \wedge \neg\alpha \\ f^i & \Box\neg\alpha \wedge \neg\alpha \end{array}$$

Vimos que para invalidar o axioma (T), a saber, $\Box p \to p$ temos que considerar ao menos mais dois cenários, em que temos $\Box\alpha \wedge \neg\alpha$ e o seu dual, a saber, $\Box\neg\alpha \wedge \alpha$. Substituindo (T) por (D), por exemplo, temos seis valores cuja correspondência sintática segue-se abaixo:

$$\begin{array}{r|l} T^+ & \Box\alpha \wedge \alpha \\ C^+ & \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \alpha \\ F^+ & \Box\neg\alpha \wedge \alpha \\ T^- & \Box\alpha \wedge \neg\alpha \\ C^- & \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \neg\alpha \\ F^- & \Box\neg\alpha \wedge \neg\alpha \end{array}$$

Vimos ainda que os seis valores são o suficiente para caracterizar **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45**. Esses sistemas, na verdade, são obtidos ao substituir (T) por (D) em **T**, **B**, **S4** e **S5**, respectivamente.

Analogamente, para invalidar (D) teríamos que considerar mais dois cenários: $\Box\alpha \wedge \Box\neg\alpha \wedge \alpha$ e o seu dual, $\Box\alpha \wedge \Box\neg\alpha \wedge \neg\alpha$. Seria necessário, a princípio, 8 valores:

$$\begin{array}{r|l} T^+ & \Box\alpha \wedge \Diamond\alpha \wedge \alpha \\ C^+ & \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \alpha \\ F^+ & \Box\neg\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \alpha \\ M^+ & \Box\alpha \wedge \Box\neg\alpha \wedge \alpha \\ T^- & \Box\alpha \wedge \Diamond\alpha \wedge \neg\alpha \\ C^- & \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \neg\alpha \\ F^- & \Box\neg\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \wedge \neg\alpha \\ M^- & \Box\alpha \wedge \Box\neg\alpha \wedge \neg\alpha \end{array}$$

Temos fortes intuições para acreditar que os oito valores acima seriam o suficiente para caracterizar **K**, **KB**, **K4** e **K45**. Almejamos ainda que ao eliminarmos os valores M^+ e M^- nas Nmatrizes para esses quatro sistemas, obteríamos as Nmatrizes de 6 valores para **D**, **KDB**, **KD4** e **KD45**. Não sabemos se obteremos esse resultado, mas garantimos que tentaremos obtê-lo. Também não temos ainda uma interpretação intuitiva para os valores M^+ e M^-. Por ora, sabemos que se nossa intuição estiver correta e obtivermos a desejada completude, nos comprometemos em oferecer uma intepretação intuitiva para esses valores.

Nmatrizes para lógica intuicionista

A semântica relacional de Kripke não se restringe às lógicas modais. Em 1963, Kripke apresenta modelos relacionais completos para lógica intuicionista, inspirando-se na tradução de Gödel entre **IPC** e **S4**. Dado α uma fórmula de **IPC**, Gödel apresenta a seguinte tradução t às formulas em **S4**:

$$\begin{array}{r|l} t(\neg\alpha) & \neg\Box\alpha \\ t(\alpha\to\beta) & \Box\alpha\to\Box\beta \\ t(\alpha\vee\beta) & \Box\alpha\vee\Box\beta \\ t(\alpha\wedge\beta) & \alpha\wedge\beta \end{array}$$

Se α é uma formula de **IPC**, a tradução acima garante o seguinte resultado:

$$\vdash_{\mathbf{IPC}} \alpha \text{ implica } \vdash_{\mathbf{S4}} t(\alpha)$$

Seguindo essa tradução e a semântica por Nmatrizes para **S4**, teríamos as seguintes Nmatrizes para **IPC** com relação aos operadores $\neg$ e $\wedge$:

$\wedge$	t^n	t^c	f^c	f^i
t^n	t^n	t^c	f^c	f^i
t^c	t^c	t^c	f	t^i
f^c	f^c	f	f	f^i
f^i	f^i	f^i	f^i	f^i

p	$\neg p$
t^n	f
t^c	t
f^c	t
f^i	t

No caso de $\to$ e $\vee$, os níveis de valoração deveriam ser considerados. Os valores t^n, t^c, f^c e f^i deveriam também ser interpretados de modo conveniente ao intuicionismo. Há, entretanto, fortes indícios de que a tradução acima conduziria a uma nova semântica para a lógica intuicionista baseada em Nmatrizes. Mais uma vez, não nos comprometemos em provar a completude para essas Nmatrizes, mas em estudar o tema em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Alb43] M. J. Alban. Independence of the primitive symbols of Lewis's calculi of propositions. *The Journal of Symbolic Logic*, 8(1):25–26, 1943.

[Ann04] I. Annelis. The genesis of the truth-table device. *the Journal of Bertrand Russell Studies*, 24:55–70, 2004.

[Åqv64] L. Åqvist. Results concerning some modal systems that contain S2. *The Journal of Symbolic Logic*, 29(2):79–87, 1964.

[Arr75] A. I. Arruda. Remarques sur les systèmes C_n. In *Comptes Rendus de l/' Academie de Sciences de Paris*, volume 280 of *A-B*, pages 1253–56, 1975.

[Avr05a] A. Avron. Non-deterministic matrices and modular semantics of rules. In J.-Y Béziau, editor, *Logica Universalis*, pages 155–173, Switzerland, 2005. Birkhäuser Verlag Basel.

[Avr05b] A. Avron. Non-deterministic semantics for paraconsistent c-systems. In L. Godo, editor, *Proceedings of the VIII European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2005)*, pages 625–637, Barcelona, 2005. Springer.

[Avr07] A. Avron. Non-deterministic semantics for logics with a consistency operator. *Int. J. Approx. Reasoning*, 45(2), 2007.

[AZ07] A. Avron and A. Zamansky. Many-valued non-deterministic semantics for first-order Logics of Formal (In)consistency. In S. Aguzzoli, A. Ciabattoni, B. Gerla, C. Manara, and V. Marra, editors, *Algebraic and Proof-theoretic Aspects of Non-classical Logics*, volume 4460 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 1–24. Springer-Verlag, 2007.

[B́04] J.Y. Béziau. A new four-valued approach to modal logic. In *Logika*, volume 22, 2004.

[Bal10] R. Ballarin. Modern origins of modal logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2010.
URL = `http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal-origins/`.

[Ben78] J. van Benthem. Two simple incomplete logics. *Theoria*, 44:25–37, 1978.

[BG85] G Boolos and Sambin G. An incomplete system of modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 14:351–358, 1985.

[Bob06] S. Bobzien. Ancient logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006.
URL = `http://plato.stanford.edu/entries/logic-ancient/`.

[Boo93] G. Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, 1993.

[Bor70] L. Borkowski, editor. *Selected Works*. Studies in Logic. North-Holland Publishing Company, London, 1970.

[Bro08] L. E Brouwer. The unreliability of the logical principles. In *Fourth International Conference of Mathematicians*, 1908. tradução para o inglês em Heyting, A. (ed.), 1975, *L. E. J. Brouwer: Collected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam and New York: Elsevier.

[BRV01] P. Blackburn, M. Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[BS09] J. Bueno-Soler. *Multimodalidades anódicas e catódicas: a negação controlada em lógicas multimodais e seu poder expressivo*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2009.

[Car46] R. Carnap. Modalities and quantification. *Journal of Symbolic Logic*, 11:33–64, 1946.

[Car90] W. A. Carnielli. Many-valued logics and plausible reasoning. In *Proceedings of the XX International Symposium on Multiple-Valued Logic*, volume 18, pages 328–335. IEEE Computer Society, 1990.

[Car00] W. A. Carnielli. Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In D. Batens and alli, editors, *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Logic and Computation Series*, pages 149–163, Baldock, 2000. Research Studies Press.

[CC05] W. A. Carnielli and M. E. Coniglio. Splitting logics. In S. Artemov and alli, editors, *We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay*, pages 389–414. College Publications, 2005.

[CCCM05] C. Caleiro, W. Carnielli, M. Coniglio, and J. Marcos. Two's company: "the humbug of many logical values". In J.-Y Béziau, editor, *Logica Universalis*, pages 169–189, Switzerland, 2005. Birkhäuser Verlag Basel.

[CCM07] W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, and J. Marcos. Logics of Formal Inconsistency. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic (2nd. edition)*, volume 14, pages 15–107. Springer, 2007.

[CDM95] R. L. O Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Álgebra das Lógicas de Łukasiewicz*, volume 12 of *Coleção CLE*. UNICAMP, Campinas, 1995.

[CF13] M. E. Coniglio and M. Figallo. On the relationship between tetravalent modal algebras, symmetric Boolean algebras and modal algebras for S5. *CLE e-Prints*, 13(3), 2013.

[CH68] M. J. Creswell and G. E. Hughes. *An Introduction to Modal Logic*. Methuen, London, 1968.

[CH84] M. J. Creswell and G. E. Hughes. *A Companion to Modal Logic*. Methuen, London, 1984.

[CH96] M. J. Creswell and G. E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London and New York, 1996.

[Che80] B.F. Chellas. *Modal Logic: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[CL03] A. Costa-Leite. Paraconsistência, modalidade e cognoscibilidade. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2003.

[CM02] W. A. Carnielli and J. Marcos. A taxonomy of C-systems. In W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, and I. M. L. D' Ottaviano, editors, *Proceedings of the 2nd World Congress on Paraconsistency 2000*, pages 1–94. Marcel Dekker, 2002. Versão preliminar publicada em *CLE e-Prints*, 1(5), 2001.

[Con07] M. E. Coniglio. Logics of deontic inconsistency. *CLE e-Prints*, 7(4), 2007.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_7,n_4,2007.html`.

[CP08] W.A. Carnielli and C. Pizzi. *Modalities and Multimodalities*, volume 12 of *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*. Springer-Verlag, 2008.

[CP09] M. E. Coniglio and N. M. Peron. A paraconsistentist approach to Chisholm's paradox. *Principia*, 13(03):299–326, 2009.

[CP13] M. E. Coniglio and N. M. Peron. Dugundji's Theorem revised. *Logica Universalis*, 2013. submetido à publicação.

[DC63] N. C. A Da Costa. *Sistemas Formais Inconsistentes*. UFPR, Curitiba, 1963.

[DC74] N. C. A. Da Costa. On the theory of inconsistency formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XV(4):497–510, 1974.

[dCA77] N. C. A da Costa and E. Alves. A semantical analysis of the calculi C_n. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 14(18):621–630, 77.

[dCC86] N. C. A da Costa and W. A. Carnielli. On paraconsistent deontic logic. *Philosophia*, 16(3/4):293–305, 1986.

[DL59] M. A. Dummet and E. J. Lemmon. Modal logics between S4 and S5. *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5:250–264, 1959.

[D'O90] I. M. L. D'Ottaviano. On the development of paraconsistent logic and da CostaŠs work. *The Journal of Non-Classical Logic*, 7(1/2):89–152, 1990.

[Dug40] J. Dugundji. Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions. *The Journal of Symbolic Logic*, 5(4):150–151, 1940.

[Dum59] M. Dummet. A propositional calculus with denumerable matrix. *Journal of Symbolic Logic*, 2:97–106, 1959.

[EM77] L. Esakia and V. Meskhi. Five critical modal systems. *Theoria*, 43(1):52–60, 1977.

[Fef86] S. Feferman, editor. *Kurt Gödel, Collected Works : Publications 1929-1936*. Oxford University Press, Cary, 1986. Versão bilíngue alemão-inglês.

[Fer01] V. A. Fernández. Semântica de sociedades para lógicas n-valentes. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2001.

[Fey50] R. Feys. Les systemès formalisés des modalités aristotéliciennes. *Revus Philosophique de Louvain*, XLVIII:478–509, 1950.

[Fin74] K. Fine. An incomplete logic containing S4. *Theoria*, 40:23–29, 1974.

[Fit48] F. B. Fitch. Intuitionistic modal logic with quantifiers. *Portugaliae Mathematicae*, 7:113–118, 1948.

[G3̈2] K. Gödel. On the intuitionistic propositional calculus. *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch-naturwiss. Klasse*, 32:65–66, 1932. Título original em alemão: "Zum intuitionistischen Aussagenkalkül" Tradução para o inglês em [Fef86] p. 222-225.

[G3̈3] K. Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:6–7, 1933. Título original em alemão: "Eine Intepretation des intionistischen Aussagenkalkül". Tradução para o inglês em [Fef86] p. 300-303.

[Gir75] R. Girle. S1 $\neq$ S0.9. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVI(3):339–344, 1975.

[Haa98] S. Haack. *Filosofia das Lógicas*. Editora da Unesp, São Paulo, 1998. Trad. Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique Araújo Dutra.

[Hac66] L. H. Hackstaff. *Systems of Formal Logic.* D. Reidel Publishing, 1966.

[Hal50] S. Halldén. Results concerning the decision problem of Lewis's calculi S3 and S6. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(4):230–236, 1950.

[Hal13] J. Halleck. John Halleck's logic systems.
URL = `http://home.utah.edu/ nahaj/logic/structures/`, 2013.

[HB01] D. Hilbert and P. Bernays. *Fondements des Mathématiques I.* L'Harmattan, 2001. Tradução do alemão por Farnçois Gaillard e Marcel Guillaume.

[HC75] G. E. Hughes and M. J. Creswell. Omnitemporal logic and converging time. *Theoria*, 41:11–34, 1975.

[Hen49] L. Henkin. Fragments of the proposicional calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1):42–48, 1949.

[Hey30] A. Heyting. Die formalen regeln der intuitionistischen logik. In *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, 1930. English translation in Mancosu, P., 1998, *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York and Oxford: Oxford University Press. 311Ũ327.

[Hey52] A. Heyting. A problem concerning provability. *Journal of Symbolic Logic*, 17(2):160, 1952.

[Hug75] G. E. Hughes. B(S4.3, S4) unveiled. *Theoria*, 41:85–88, 1975.

[Ivl88] J. V. Ivlev. A semantics for modal calculi. *Bulletin of the section of logic*, 17(3/4):114–121, 1988.

[Jaś48] S. Jaśkowski. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Societatis Scientiarun Torunesis, Sectio A*, I:55–77, 1948. Título original em polonês: Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. Tradução para o inglês em *Studia Logica*, 24:143–157, 1969.

[Kea81] J. Kearns. Modal semantics without possible worlds. *The Journal of Symbolic Logic*, 46(1):77–86, 1981.

[KK68] W. Kneale and M. Kneale. *O Desenvolvimento da Lógica*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1968.

[Kri59] S. A. Kripke. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symboli Logic*, 24:1–14, 1959.

[Kri63] S. A. Kripke. Semantic analysis of modal logic I, normal propositional calculi. *Zeitschrift für mathemathische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.

[L5̈5] M. H. Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, 20(2):115–118, 1955.

[Lem57] E. J Lemmon. New foundations for Lewis modal systems. *The Journal of Symbolic Logic*, 22(2):176–186, 1957.

[Lem66] E. J Lemmon. Algebraic semantics for modal logics I. *The Journal of Symbolic Logic*, 31(1):44–65, 1966.

[Lew14] C. I. Lewis. The calculus of strict implication. *Mind*, 23:240–247, 1914.

[Lew18] C. I. Lewis. *A Survey of Symbolic Logic*. University of Californa Press, 1918.

[LL32] C.I. Lewis and C. H. Langford. *Symbolic Logic*. Century, 1932.

[Lop10] A. Loparić. Valuation semantics for intuitionistic propositional calculus and some of its subcalculi. *Principia*, 14(1):125–133, 2010.

[LS77] E. J Lemmon and D. S. Scott. *The Lemmon Notes: An Introduction to Modal Logic*. Blackwell, 1977.

[ŁT30] J. Łukasiewicz and A. Tarski. Untersuchungen über den aussagenkalkül. In *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, volume 23, pages 39–50, 1930. Traduzido para o inglês em [Bor70] p. 131-152.

[Łuk20] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*, 5:170–171, 1920. Traduzido para o inglês em [Bor70] p. 87-88.

[Łuk30] J. Łukasiewicz. Philosophische bemerkunger zu mehrwertigen systemen des aussagenkalküls. In *Comptes rendus des séances de la*

Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, volume 23, pages 51–77, 1930. Traduzido para o inglês em [Bor70] p. 153-178.

[Łuk48] J. Łukasiewicz. The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, volume 52, pages 25–33, 1948.

[Łuk52] J. Łukasiewicz. On the intuitionistic theory of deduction. *Indagationes Mathematicae*, 14:202–212, 1952.

[Łuk53] J. Łukasiewicz. A system of modal logic. *The Journal of Computing Systems*, 1:111–149, 1953.

[Łuk61] J. Łukasiewicz. O determinizme. In L. Borkowski, editor, *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warsaw, 1961. Traduzido para o inglês em [Bor70] p. 110-130.

[Mag75] R. Magari. Representation and duality theory for diagonalizable algebras. *Studia Logica*, 34(4):305–313, 1975.

[Mak69] D. Makinson. A normal modal calculus between T and S4 without the finite model property. *Journal of Symbolic Logic*, 34(1):35–38, 1969.

[Mar99] J. Marcos. Semântica de traduções possíveis. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 1999.

[Mar04] João Marcos. Possible-translations semantics for some weak classically-based paraconsistent logics, 2004.

[Mar05] J. Marcos. Possible-translations semantics. In F. M. Dionísio W. A. Carnielli and P. Mateus, editors, *Proceedings of the Workshop on Combination of Logics: Theory and applications (CombLog'04)*, pages 119–128. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 2005.

[Mck34] J. C. C. Mckinsey. A reduction in number of the postulates for C. I. Lewis' system of strict implication. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 40:425–427, 1934.

[McK45] J. C. C. McKinsey. On the syntactical construction of systems of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 10(3):83–94, 1945.

[Men64] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. D. Van Nostrand, Princenton, 1964.

[Min02] P. Minari. A note on Lukasiewicz's three-valued logic. In *Annali del Dipartimento di Filosofia*, volume VIII, 2002.

[Mor07] C. A. Mortari. Restricted classical modal logics. *Logic Journal of the IGPL*, 15:741–757, 2007.

[Mos10] J. Moschovakis. Intuitionistic logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2010.
URL = `http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/`.

[PdCC88] L. Z. Puga, N. C. da Costa, and W. A. Carnielli. Kantian and non-Kantian logics. *Logique & Analyse*, 31(121/122):3–9, 1988.

[Pos21] E. L. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, 43(3):163–185, 1921.

[Pre03] N. Preining. *Complete Recursive Axiomatizability of Gödel Logics*. PhD thesis, Universidade de Viena, Viena, 2003.

[Res69] N. Rescher. *Many-valued logic*. McGraw-Hill, New York, 1969.

[Rus75] B. Russell. *My Philosophical Development*. Unwin Books, 1975. Primeira edição de 1957 por George Allen & Unwin Ltd.

[RW27] B. Russell and A.N. Witehead. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 1927. Primeira edição de 1910.

[SC95] A. M. Sette and W. A. Carnielli. Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, 55(1):181–207, 1995.

[Sch69] G. F. Schumm. On some open questions of B. Sobociński. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, X(3):261–262, 1969.

[Scr51] S. J. Scroggs. Extensions of the Lewis system S5. *The Journal of Symbolic Logic*, 16(2):112–120, 1951.

[Seg71] K. K. Segeberg. *An essay in Classical Modal Logic*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, 1971.

[Set73] A. Sette. On the propositional calculus $\mathbf{P}^1$. *Mathematica Japonicae*, 18(13):173–180, 1973.

[Sim94] A. K. Simpson. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. PhD thesis, Universidade de Edinburgh, Edinburgh, 1994.

[Smi63] T.J. Smiley. The logical basis of ethics. *Acta Philosophica Fennica*, 16:237–246, 1963.

[Sob62] B. Sobociński. A contribuition to the axiomatization of Lewis system S5. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, III(1):51–60, 1962.

[Sob64a] B. Sobociński. Family K of the non-Lewis modal systens. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, V(4):313–318, 1964.

[Sob64b] B. Sobociński. Modal system S4.4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, V(4):305–311, 1964.

[Sob70] B. Sobociński. Certain extensions of modal system S4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XI(3):347–368, 1970.

[Suz75] R. Suzsko. Remarks on Lukasiewick's three-valued logic. *Bulletin of the Section of Logic*, 4(3):87–89, 1975.

[Tho64] I. Thomas. Modal systems in the neighbourhood of T. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, V(1):59–61, 1964.

[Tho74] S. K. Thomason. An incompleteness theorem in modal logic. *Theoria*, 40:30–34, 1974.

[Ver10] R. L. C. Verbrugge. Provability logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2010.
URL = `http://plato.stanford.edu/entries/logic-provability/`.

[VW51] G. H. Von Wright. *An essay in modal logic*. North-Holland, 1951.

[Wit01] L. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Edusp, 2001. Texto bilingue alemão-português. Tradução, Apresentação e Ensaio Introdutório de Luiz Henrique Lopes dos Santos.

[Zem71] J. J. Zeman. A study of some systems in the neighborhood of S4.4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XII(3):341–357, 1971.

[Zem73] J. J. Zeman. *Modal Logic: The Lewis systems*. Clarendon Press, 1973.