

Semântica de Sociedades para Lógicas n -valentes

Víctor Leandro Fernández

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FILOSOFIA E
CIÊNCIAS HUMANAS DA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM LÓGICA

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio**

*Durante a confecção deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.*

21 de junho de 2001

Em memória da minha mãe, Chola.

Agradecimentos

A quantidade e intensidade das palavras de agradecimento seguintes são inversamente proporcionais à importância acadêmica desta dissertação. Porém, sinto que aqueles a quem eu tenho que agradecer são, obviamente, os que me apoiaram neste trabalho, mas principalmente aqueles que me ajudaram a concretizar um projeto que, três anos atrás, eu julgava impossível de realizar.

Primeiramente desejo agradecer a meu orientador, Marcelo Coniglio, não somente as suas sugestões e dedicação a esta dissertação, mas também o fato de ser ele responsável direto para que a minha chegada ao Brasil, e a estada e estudo neste país fossem possíveis. Agradeço também aos professores do IFCH Walter Carnielli e Itala D'Ottaviano, que me fizeram sentir parte integrante do CLE, um dos centros de pesquisa mais profissionais que eu já conheci. Graças a eles, e também graças à amizade dos meus colegas Márcio de Carvalho, Mauro Scheer e Ricardo Tassinari, senti-me muito menos estrangeiro do que supusera.

Também agradeço grandemente a João Marcos o apoio e sugestões que ele me deu quando eu ainda não entendia sequer o nome do tema desta dissertação. Desejo agradecer a Luís Sbardellini as muitas conversas sobre Lógica no restaurante universitário da Unicamp, e sobretudo a sua disposição para que esta não fosse a primeira dissertação em *portuñol* autêntico. Aos meus professores da Argentina Manuel Fidel e Aldo Figallo agradeço as suas aulas, que me fizeram ter verdadeira vontade de estudar Lógica, assim como o ânimo que me deram para vir à Unicamp. Aos meus colegas de formatura e amigos Ana e Fernando agradeço terem compartilhado comigo, num âmbito às vezes árido como é a Matemática, os sonhos, os *Aussonderungsaxioms* e uma ou outra idéia utópica (concretizar-se-á?).

Finalmente desejo agradecer aos que não sabem absolutamente nada de Lógica, mas deram-me todo seu amor neste tempo: meu pai, Maria Luisa, Camila, Julito, e meus amigos Gusty, Guillermo, Roberto, Omar e Pablo. E principalmente Lía e Ana Luz. Não concebo nada disto sem vocês duas.

Durante a confecção deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

“A pesar de que los cronistas serios se niegan a admitirlo, es indudable que existió en Flores la Sociedad de los Trabajos Difíciles. No es posible determinar hoy en día el lugar exacto en el que se ubicaba la sede central de esta entidad. En cualquier caso, nunca debió ser fácil dar con ella.”

“Con el tiempo, fueron apareciendo en la Sociedad de los Trabajos Difíciles algunos heresiarcas. Socios bizantinos confundían lo difícil con lo complicado.... Estos canallas despertaban la admiración general haciendo cada vez menos comprensibles sus tareas, y hablando de ellas en lenguaje especializado.”

Alejandro Dolina (Crónicas del Angel Gris)

Sumário

Introdução	1
1 Combinações entre Lógicas e Semântica de Sociedades	4
1.1 Combinações entre Lógicas	4
1.2 A Semântica de Sociedades	6
1.3 Formalização da Semântica de Sociedades n -valentes	16
1.4 Verofuncionalidade vs. bivalência.	20
2 Sociedades Triassertivas	22
2.1 Sociedades Triassertivas Abertas	22
2.2 Sociedades Triassertivas Fechadas	30
3 Aplicações em Lógicas n-valentes	34
3.1 A hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cálculos paraconsistentes	34
3.2 Uma semântica matricial para $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$	36
3.3 Semântica de Sociedades para $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$	39
3.4 A hierarquia $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cálculos paracompletos	48
3.5 Uma Semântica de Sociedades para $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$	51

4	Generalizações das Semânticas de Sociedades	61
4.1	A lógica dos agentes	61
4.2	Exemplos de aplicação	63
4.3	Os cálculos $I^n P^k$	69
4.4	Aceitação para fórmulas complexas	73
4.5	Agentes com diferentes lógicas	83
5	Considerações finais	90
5.1	Agentes com lógicas de semântica não matricial	90
5.2	Relação com a Semântica de Traduções Possíveis	91
5.3	As sociedades entendidas como bivalorações	94
I	Axiomáticas para I^n, P^k e $I^n P^k$	95
I.1	Uma axiomática sugerida para a hierarquia P^n	95
I.2	Uma axiomática correta e completa para P^n	97
I.3	Uma axiomática correta e completa para I^n	110
I.4	Axiomática Rosser-Turquette para $I^n P^k$	121
	Bibliografia	124

Introdução

A presente dissertação tem como objetivo principal determinar o escopo, formalizar matematicamente e obter os resultados fundamentais de um tipo de construção lógica denominado Semântica de Sociedades, definida e estudada inicialmente por W.Carnielli e M. Lima Marques (ver [CLM99]). Podemos situar a Semântica de Sociedades numa área de estudo relativamente nova dentro da Lógica, a qual estuda combinações entre diferentes sistemas lógicos (ver [GP97]). Isto é, trata-se de construir novas lógicas a partir de outras, utilizando certos procedimentos suscetíveis de ser formalizados matematicamente.

A Semântica de Sociedades foi proposta também como uma tentativa para dar uma nova resposta à questão, sempre presente dentro da Lógica, de expresar adequadamente casos que possam permitir a presença de enunciados contraditórios.

Para poder estudar de forma extensiva todos os tópicos relativos à Semântica de Sociedades, esta dissertação foi organizada da forma seguinte:

- No primeiro capítulo expressaremos algumas das características fundamentais das Combinações entre Lógicas em forma geral. Posteriormente apresentaremos a Semântica de Sociedades segundo a apresentação original ([CLM99]), definindo formalmente a Semântica de Sociedades de Agentes n -valentes. Finalizaremos o capítulo discutindo o papel que pode assumir a Semântica de Sociedades numa nova tentativa de explicitar a relação entre semânticas verofuncionais e semânticas bivalentes.
- Provaremos no Capítulo 2 que a formalização definida é aplicável a Semânticas de Sociedades mais complexas, como a Semântica de Sociedades Triassertivas.
- No Capítulo 3 tentamos dar Semânticas de Sociedades de forma geral para hie-

rarquias de cálculos proposicionais. Em particular estudaremos as hierarquias P^n e I^n , sugerindo para elas uma Semântica de Sociedades geral, de tal forma que uma Semântica de Sociedades para um cálculo P^{n+1} (respectivamente I^{n+1}) possa ser expressada a partir do cálculo P^n (respectivamente I^n).

- Nossa intenção no Capítulo 4 é a de examinar criticamente o escopo da Semântica de Sociedades. Discutiremos quanta informação das lógicas que constroem uma Sociedade é verdadeiramente utilizada, e estenderemos a primeira formalização dada para casos mais gerais tais como:
 - Distintas formas de expressar validade em fórmulas complexas.
 - Combinações de lógicas diferentes.
- Finalmente, no último capítulo, discutiremos problemas e tópicos que não tem sido estudados ainda sob a perspectiva da Semântica de Sociedades, entre os quais destacamos:
 - Uma Semântica de Sociedades definida a partir de Lógicas que não admitem Semânticas matriciais.
 - A relação da Semântica de Sociedades com um outro tipo de Combinações entre Lógicas, denominado Semântica de Traduções Possíveis.
 - A relação da Semântica de Sociedades com a construção de funções de verdade não homomórficas, no marco da Tese de Suszko.
 - As propriedades gerais dos cálculos da hierarquia de lógicas paraconsistentes e paracompletas $\{I^n P^k\}_{n,k \in \mathbb{N}}$.

Independentemente dos resultados relacionados em forma direta com a Semântica de Sociedades, forneceremos axiomáticas corretas e completas gerais para os cálculos das hierarquias $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ambas as duas, sub-hierarquias de $\{I^n P^k\}$.

No que concerne à estrutura geral da dissertação, consideramos conveniente esclarecer um ponto que julgamos importante: grande parte das discussões desta dissertação estão dirigidas à formalização de certos procedimentos. A motivação por trás disto é que, para poder tratar das situações que a Semântica de Sociedades pretende abranger de forma generalizada, é preciso prover à definição da mesma de uma linguagem matemática rigorosa o suficiente. Desta maneira, será possível estudar propriedades formais desta semântica tais como representações algébricas ou categoriais da mesma. Neste contexto, ver-se-á que a definição de Semântica de Sociedades mudará varias vezes. Assim, pretendemos avançar desde uma idéia relativamente intuitiva da Semântica de Sociedades até uma definição geral da mesma. Consideramos portanto que, evitando definir a Semântica de Sociedades de forma geral desde o início desta dissertação, o leitor não perderá as motivações que tornam a definição da Semântica de Sociedades cada vez mais sofisticada.

Combinações entre Lógicas e Semântica de Sociedades

1.1 Combinações entre Lógicas

A Combinação entre sistemas lógicos é uma disciplina que tem se desenvolvido principalmente como resposta a problemas das ciências da informação. Seu objeto de estudo em geral é combinar, mediante certos procedimentos, determinadas estruturas (sintáticas ou semânticas) relativas à Lógica para obter outras novas. Seu desenvolvimento tem sido bastante rápido e uma manifestação dessa situação é o fato de que publicações tradicionais dentro da Lógica têm dedicado edições especiais à divulgação de trabalhos relativos ao tema.

As motivações para combinar distintas lógicas são diversas, mas destacamos:

- A necessidade de expresar variações de interpretação dentro de um contexto dado: usualmente é melhor analisar certos aspectos diferentes de um processo mudando a linguagem e a lógica relativa a ele. Nesse sentido é conveniente tratar de diferentes lógicas e explicitar mecanismos que determinem em qual momento age cada lógica.
- Outra motivação é a de encontrar semânticas novas que sejam corretas e completas para axiomatizações de certos cálculos. Usualmente é preciso construir

estruturas combinadas que possam atingir esse último objetivo. Sob esta perspectiva, um tópico de pesquisa importante é investigar de que forma uma lógica combinada pode herdar correção e completude da própria correção e completude das suas lógicas componentes (ver [ZSS0?], onde se constroem novas semânticas por meio de técnicas de Fibrilação; ver também [Car99], e [Mar99], onde se define e se estuda a Semântica de Traduções Possíveis, a qual, por meio de certas funções, chamadas funções de tradução, “copia” as relações de consequência das lógicas componentes).

Existem diversos critérios para classificar distintas formas de combinar lógicas e analisar de que maneira se influenciam as lógicas componentes entre elas mesmas. Por exemplo, P. Blackburn e M. de Rijke (ver [BdR97a]) e [BdR97b]) distinguem três tipos de estruturas combinadas usuais: Estruturas de Refinamento, de Classificação e Fibriladas.

Nos dois primeiros tipos, considera-se que certas lógicas componentes estão totalmente subordinadas a outras. Mas no último, a interação entre as diferentes lógicas componentes é total, criando-se estruturas com linguagens híbridas, e não existindo nenhum tipo de subordinação entre as lógicas combinadas. Em geral, estes tipos de Combinações entre Lógicas (cf. [Gab96],[SSC98]) têm a característica de combinar simultaneamente as estruturas semânticas e de Teoria da Prova.

A Semântica de Sociedades, que será apresentada na próxima seção, diferencia-se das Combinações entre Lógicas acima mencionadas em pelo menos três aspectos:

- As lógicas componentes, por um lado, não interagem entre si.
- Além disso, requer-se que todas as lógicas componentes sejam expressáveis numa mesma linguagem. Desta forma, a lógica combinada resultante “escolhe” quais aspectos de cada lógica componente irá aceitar, mas não modifica a linguagem básica (neste sentido, é diferente da Fibrilação entre lógicas).
- Finalmente, a Semântica de Sociedades é um mecanismo que permite somente combinar as estruturas semânticas relativas a diversas lógicas. Portanto, não é suscetível de análise por ela nenhum tipo de propriedade relacionada à sintaxe.

Um fato que consideramos necessário destacar é que muitos mecanismos que combinam lógicas são formalizáveis em certas linguagens suficientemente abrangentes.

Com efeito, através de cálculos modais ou cálculos de predicados de ordem superior podem-se expressar muitas lógicas combinadas. Como justificativa à utilização de lógicas diferentes (ver outras justificações em [BdR97a]) julgamos conveniente notar que o próprio peso das linguagens lógicas que poderiam expressar combinações torna, às vezes, contraproducente seu uso, sendo preferível trabalhar com lógicas diferentes para estudar aspectos diversos de um determinado problema.

1.2 A Semântica de Sociedades

Dentro da área das Combinações entre Lógicas, uma abordagem desenvolvida por W. Carnielli e M. Lima-Marques, relacionada em certa forma com a Semântica de Traduções Possíveis (já mencionada na seção anterior, e que será discutida mais extensamente no capítulo final desta dissertação) é a Semântica de Sociedades. O interesse inicial desta proposta foi o estudo do processamento da informação obtida a partir de “medições clássicas”, mas onde o resultado de dito processo pudesse ter características não clássicas, tais como a negação do princípio do terceiro excluído (Sociedades Paracompletas) ou a negação do princípio da não-contradição, ainda quando esta negação não trivialize o cálculo obtido (Sociedades Paraconsistentes).

A motivação inicial de W. Carnielli e M. Lima-Marques poderia ser expressa da maneira seguinte: existem situações nas quais se compila informação com relação a um certo fato, digamos α , de um conjunto de várias medições de α . Essas medições (as quais diremos que são emitidas por *agentes*) podem ser consideradas como *opiniões* (dos agentes), no sentido em que elas são clássicas: a opinião de cada agente é a favor ou contra α , mas não as duas coisas ao mesmo tempo. Obviamente, pode acontecer que a opinião de um agente $O1$ sobre α seja favorável, mas que a opinião de outro agente $O2$ não o seja. Logo, quando se coletam todas as opiniões sobre um certo fato podemos estar na presença de informação contraditória. Neste caso, é preciso

decidir o que fazer para obter algum tipo de resposta satisfatória que leve novamente a situação aos padrões clássicos. Mas para isso é conveniente modelar a situação, coletando os diferentes pareceres dos agentes num conjunto (chamado *Sociedade*), e definindo, mediante certos critérios de seleção, um conjunto de opiniões aceitas a partir da Sociedade, o qual apresenta características não clássicas. A caracterização deste processo denomina-se Semântica de Sociedades.

Num primeiro momento, as prováveis soluções para aceitar diferentes medições de um mesmo evento são duas. A primeira solução seria adotar (segundo a expressão de W.Carnielli e M. Lima-Marques) uma política *aberta*, no seguinte sentido: é suficiente, para que um determinado evento α seja aceito pela Sociedade de medições (ou *agentes*), que exista no mínimo um agente que opine a favor de α ; e, para que o evento α seja rejeitado, somente é exigido que no mínimo exista um agente que o rejeite. Obviamente, uma Sociedade desse tipo tem todas as possibilidades de ser contraditória, pois um evento α poderia ser aceito e rejeitado ao mesmo tempo por diferentes agentes.

É conveniente observar que esta linha de aproximação a situações contraditórias a partir de opiniões que não são individualmente contraditórias já foi objeto de estudo. Considere-se por exemplo a Lógica Discursiva de Jaśkowski (cf. [Jaś48]). Este enfoque é expressável a partir de conceitos modais. Outro enfoque similar a partir de conceitos modais é dado, aparentemente de maneira independente, em [RB79] com os conceitos de mundos inconsistentes.¹

A outra solução é, de certa forma, dual: para que um evento α seja aceito, é necessário que todos os agentes aceitem α ao mesmo tempo; e para que α seja rejeitado é necessário que todos os agentes rejeitem α . Este tipo de Sociedade é suscetível de não aceitar nem de rejeitar α (tendo desta forma um caráter eminentemente paracompleto).²

¹A Semântica de Sociedades Abertas e Fechadas tem também interpretação modal. Porém, a relação de acessibilidade inerente a ela é somente reflexiva, fato que não acontece com os outros dois enfoques.

²Também aparece em [RB79] o conceito de mundos incompletos, sendo o correlato modal para este tipo de Sociedade.

As Semânticas de Sociedades apresentadas em [CLM99] estudam, precisamente, este tipo de Sociedades, chamadas *Sociedades Abertas* e *Fechadas*. Com o objetivo de estudar a formalização e estender este proceso a diversas lógicas com um número finito de valores de verdade de forma geral, introduzimos primeiramente as seguintes definições e notação, a serem utilizadas ao longo desta dissertação (cf.[Wój84]).

Notação 1.2.1 (O conjunto de variáveis proposicionais) Ao longo desta dissertação, utilizaremos o conjunto enumerável de símbolos de variáveis proposicionais $\mathcal{V} = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. $\square$

Definição 1.2.2 (Assinatura proposicional) *Uma assinatura proposicional é uma família $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada conjunto Σ_n é um conjunto de operações abstratas. Os elementos de cada conjunto Σ_n serão denominados como conectivos n -ários.* $\square$

Definição 1.2.3 (Linguagem proposicional) *A linguagem proposicional gerada por Σ é a álgebra livremente gerada pela assinatura Σ a partir do conjunto $\mathcal{V}$. A linguagem proposicional gerada por Σ será denotada por $\mathbb{L}(\Sigma)$. Dentro do contexto de $\mathbb{L}(\Sigma)$ as variáveis proposicionais serão chamadas de fórmulas atômicas de $\mathbb{L}(\Sigma)$.* $\square$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente $\mathbb{L}$ no lugar de $\mathbb{L}(\Sigma)$.

Definição 1.2.4 (Matriz lógica) *Uma matriz lógica para uma linguagem proposicional $\mathbb{L}$ é um par $M_{\mathcal{L}} = (\mathcal{A}, \mathcal{D})$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra similar a $\mathbb{L}$ (isto é, uma álgebra gerada pelas operações de Σ), e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$, sendo $\mathcal{T}$ o domínio de $\mathcal{A}$. Chamamos a todos os homomorfismos $v : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{T}$ de valorações para $\mathbb{L}$. O conjunto $\mathcal{T}$ é chamado de conjunto de valores de verdade de $M_{\mathcal{L}}$, e fazemos referência a $\mathcal{D}$ como o conjunto de valores distinguidos de $\mathcal{T}$. Chamamos de lógica proposicional (ou cálculo proposicional) com representação matricial a todo par $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, M_{\mathcal{L}} \rangle$. Dizemos também que $M_{\mathcal{L}}$ é a matriz associada à lógica $\mathcal{L}$. Se $\mathcal{T}$ é finito, com cardinalidade $|\mathcal{T}| = n$, dizemos que $\mathcal{L}$ é uma lógica n -valente.* $\square$

Observações 1.2.5

- Notar que numa matriz lógica estamos associando uma operação de $\mathcal{A}$ a cada conectivo da linguagem $\mathbb{L}$. Segundo essa perspectiva, os elementos do conjunto $\mathcal{D}$ são “operações 0-arias” na álgebra $\mathcal{A}$. Na verdade, $\mathcal{D}$ simplesmente indica quais valores de $\mathcal{T}$ são considerados “bons”. Isto é, valores que representam diferentes formas de considerar uma fórmula $\alpha \in \mathbb{L}$ como verdadeira. O conjunto $\mathcal{D}$ caracteriza uma relação de conseqüência definida em $\mathbb{L}$, como veremos a seguir.
- Toda matriz $M_{\mathcal{L}}$ induz uma relação de conseqüência em $\mathbb{L}$ (semântica neste caso), a qual é caracterizada da seguinte forma: $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \alpha$ sse para toda valoração v tal que, para todo $\beta \in \Gamma$, $v(\beta) \in \mathcal{D}$, então vale que $v(\alpha) \in \mathcal{D}$. Em particular, as tautologias (relativas à lógica $\mathcal{L}$ são definidas como sendo as fórmulas $\alpha \in \mathbb{L}$ tais que, para toda valoração v , vale que $v(\alpha) \in \mathcal{D}$. $\square$

Notação 1.2.6

A seguinte notação será estabelecida e utilizada no percurso desta dissertação: seja $M_{\mathcal{L}}$ uma matriz lógica para $\mathbb{L}$. Denotamos a $M_{\mathcal{L}}$ como:

$M_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{T}, \{\#_1, \dots, \#_n, \dots\}, \mathcal{D} \rangle$, com $\{\#_1, \dots, \#_n, \dots\}$ o conjunto de conectivos de $\mathbb{L}$. Isto é, especificamos o domínio e operações de $\mathcal{A}$, denotando estas últimas com os respectivos símbolos dos conectivos de $\mathbb{L}$.

Dado que, de forma geral, nosso estudo nesta dissertação é exclusivamente semântico, identificaremos o nome da matriz $M_{\mathcal{L}}$ associada à lógica $\mathcal{L}$ com o mesmo nome, $\mathcal{L}$. Assim, por exemplo, a matriz M_{P^1} da lógica P^1 (a ser estudada depois), será denotada simplesmente por P^1 . $\square$

Exemplo 1.2.7

A matriz do cálculo CPC é $CPC = \langle \{T, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T\} \rangle$, onde $\rightarrow$ e $\neg$ são a implicação e negação clássicas. $\square$

Agora estamos em condições de estudar as Semânticas de Sociedades Abertas e Fechadas, as quais podem ser expressas formalmente da maneira seguinte:

Definição 1.2.8 *Seja CPC o cálculo proposicional clássico. Um agente clássico (ou bivalorado) é uma valoração clássica $Ag : \mathbb{L} \longrightarrow \{T, F\}$ definida na linguagem $\mathbb{L}$ de CPC. Uma sociedade de agentes clássicos é um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ de agentes clássicos. $\square$*

Definição 1.2.9 (Sociedades Biassertivas Abertas) *Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes clássicos. A sociedade biassertiva aberta gerada por $\mathcal{A}$, denotada por $S_{\mathcal{A}}^+$, é uma função de valoração $S_{\mathcal{A}}^+ : \mathbb{L} \longrightarrow \{0, 1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(OBS-1) \ S_{\mathcal{A}}^+(p) = 1 \text{ sse existe um agente } Ag \in \mathcal{A} \text{ tal que } Ag(p) = T \ (p \in \mathcal{V})$$

$$(OBS-2) \ S_{\mathcal{A}}^+(\neg p) = 1 \text{ sse existe um agente } Ag \in \mathcal{A} \text{ tal que } Ag(p) = F \ (p \in \mathcal{V})$$

$$(OBS-3) \ S_{\mathcal{A}}^+(\alpha \vee \beta) = S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^+(\beta)$$

$$(OBS-4) \ S_{\mathcal{A}}^+(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}^+(\beta)$$

$$(OBS-5) \ S_{\mathcal{A}}^+(\alpha \rightarrow \beta) = \neg S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^+(\beta)$$

$$(OBS-6) \ S_{\mathcal{A}}^+(\neg \alpha) = \neg S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) \ (\alpha \notin \mathcal{V}). \ \square$$

Na definição anterior, $\sqcup$, $\sqcap$ e $\neg$ denotam respectivamente as operações de supremo, ínfimo e complemento em $\{0, 1\}$ com relação à sua estrutura usual de álgebra de Boole. Se $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$ dizemos que $S_{\mathcal{A}}^+$ satisfaz α e que α é satisfatível por $S_{\mathcal{A}}^+$, e o denotamos por $S^+ \models_{\mathcal{A}} \alpha$. Se $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 0$ dizemos que $S_{\mathcal{A}}^+$ não satisfaz α , e o denotamos por $S^+ \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Definição 1.2.10 (Sociedades Biassertivas Fechadas) *Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes clássicos. A sociedade biassertiva fechada gerada por $\mathcal{A}$, denotada por $S_{\mathcal{A}}^-$, é*

uma função $S_{\mathcal{A}}^- : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(CBS-1) \ S_{\mathcal{A}}^-(p) = 1 \text{ sse para todo agente } Ag \in \mathcal{A}, Ag(p) = T \ (p \in \mathcal{V})$$

$$(CBS-2) \ S_{\mathcal{A}}^-(\neg p) = 1 \text{ sse para todo agente } Ag \in \mathcal{A}, Ag(p) = F \ (p \in \mathcal{V})$$

$$(CBS-3) \ S_{\mathcal{A}}^-(\alpha \vee \beta) = S_{\mathcal{A}}^-(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^-(\beta)$$

$$(CBS-4) \ S_{\mathcal{A}}^-(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}^-(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}^-(\beta)$$

$$(CBS-5) \ S_{\mathcal{A}}^-(\alpha \rightarrow \beta) = \neg S_{\mathcal{A}}^-(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^-(\beta)$$

$$(CBS-6) \ S_{\mathcal{A}}^-(\neg \alpha) = \neg S_{\mathcal{A}}^-(\alpha) \ (\alpha \notin \mathcal{V}).$$

As definições de satisfabilidade são análogas às introduzidas na Definição 1.2.9 $\square$

Definição 1.2.11 *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas do CPC. Definimos a relação de consequência aberta, denotada por $\models^+$ (resp. a relação de consequência fechada, denotada por $\models^-$), como: $\Gamma \models^+ \alpha$ (resp. $\Gamma \models^- \alpha$) sse para toda sociedade $\mathcal{A}$ tal que $S_{\mathcal{A}}^+(\beta) = 1$ (resp. $S_{\mathcal{A}}^-(\beta) = 1$) para todo $\beta \in \Gamma$, vale que $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$ (resp. vale que $S_{\mathcal{A}}^-(\alpha) = 1$). Consequentemente, a definição de tautologias abertas e fechadas é como segue: uma fórmula α é uma tautologia aberta (resp. tautologia fechada) se e somente se é satisfatível por toda sociedade aberta $S_{\mathcal{A}}^+$ (resp. sociedade fechada $S_{\mathcal{A}}^-$). $\square$*

De acordo com a definição precedente, para caracterizar as fórmulas que são tautologias numa classe de sociedades (abertas ou fechadas) é preciso testar todas as sociedades possíveis dessa classe. Um resultado importante que permite representar todas as sociedades de uma forma mais simples é proporcionado pelo seguinte teorema, demonstrado em [CLM99].

Teorema 1.2.12 *Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes clássicos. Então existem sociedades de agentes clássicos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, cada uma delas com no máximo dois agentes,*

tais que, para toda fórmula α :

$$S^+ \models_{\mathcal{A}} \alpha \quad sse \quad S^+ \models_{\mathcal{A}_1} \alpha;$$

$$S^- \models_{\mathcal{A}} \alpha \quad sse \quad S^- \models_{\mathcal{A}_2} \alpha.$$

Observações 1.2.13

(1) A apresentação original de Sociedades de Agentes de Carnielli e Lima-Marques (cf. [CLM99]) foi dada em termos de agentes Ag vistos como conjuntos de variáveis proposicionais, onde $p \in Ag$ equivale a $Ag(p) = T$. Dado que uma variável proposicional p pode pertencer ou não a um agente Ag (mas não as duas coisas ao mesmo tempo), simplesmente poderíamos entender cada agente Ag como uma valoração clássica (dado o caráter vero-funcional de CPC).

(2) Por outro lado, vemos que as duas definições têm em comum o fato de que a aceitação dos literais é dada por definição, e que aceitação para fórmulas mais complexas é definida recursivamente “seguindo os padrões clássicos”. Desta forma, percebemos que as possíveis lógicas associadas a essas sociedades não devem ser vero-funcionais, ao menos no que concerne aos literais. Isto foi demonstrado em [CLM99]. Apresentaremos a seguir esses resultados, nos Teoremas 1.2.16 e 1.2.17. A demonstração do Teorema 1.2.16 aparece (com algumas modificações, incluindo mudanças na notação) em [CLM99] mas a nossa variante é aqui apresentada porque sua técnica é comum a quase todas as demonstrações referidas a Semântica de Sociedades. Antes da demonstração dos teoremas precisamos introduzir duas lógicas que formam o primeiro degrau de duas hierarquias de lógicas que estudaremos ao longo deste trabalho: a hierarquia das lógicas paraconsistentes P^n e a hierarquia das lógicas paracompletas I^n . $\square$

Definição 1.2.14 A lógica paraconsistente P^1 (ver [Set73]) é definida na sua expressão matricial como $P^1 = \langle \{T, T_1, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T, T_1\} \rangle$ a partir das seguintes tabelas:

	T	T_1	F
$\neg$	F	T	T

$\rightarrow$	T	T_1	F
T	T	T	F
T_1	T	T	F
F	T	T	T

Definição 1.2.15 A lógica paracompleta I^1 (ver [SC95]) é definida na sua expressão matricial como $I^1 = \langle \{T, F_1, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T\} \rangle$ a partir das seguintes tabelas:

	T	F_1	F
$\neg$	F	F	T

$\rightarrow$	T	F_1	F
T	T	F	F
F_1	T	T	T
F	T	T	T

Notemos que, nas definições anteriores, as relações de consequência dos cálculos P^1 e I^1 são definidas da forma usual, denotando-se por $\models_{P^1}$ e $\models_{I^1}$ respectivamente.

Teorema 1.2.16 A Lógica das sociedades abertas é P^1 .

Demonstração: A demonstração será dividida em duas partes: em primeiro lugar provaremos que, para cada Sociedade Biassertiva gerada por $\mathcal{A}$, existe uma valoração $v_{\mathcal{A}}$ para P^1 tal que $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ para toda fórmula α . Depois provaremos que, para toda valoração v para P^1 , existe um conjunto de Agentes $\mathcal{A}_v$ tal que a Sociedade gerada por $\mathcal{A}_v$ (isto é, $S_{\mathcal{A}_v}^+$) verifica que $S_{\mathcal{A}_v}^+(\alpha) = 1$ se e somente se $v(\alpha) = T$. Assim, pela definição de relação de consequência em S^+ (Definição 1.2.11) teremos que as relações $\models^+$ e $\models_{P^1}$ são as mesmas (Com efeito: Suponhamos que $\Gamma \models^+ \alpha$, e provemos $\Gamma \models_{P^1} \alpha$. Seja v valoração de P^1 tal que, para todo $\beta \in \Gamma$, $v(\beta) \in \mathcal{D}$. Logo, para todo $\beta \in \Gamma$, $S_{\mathcal{A}_v}(\beta) = 1$. Por nossa suposição vale que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$. Portanto, $v(\alpha) \in \mathcal{D}$. Provamos assim que $\Gamma \models_{P^1} \alpha$. A outra implicação é demonstrada em forma análoga).

Parte I: Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes clássicos. Definimos a valoração $v_{\mathcal{A}}$ para P^1 da seguinte forma:

Para cada fórmula atômica p , $v_{\mathcal{A}}(p)$ é definido por:

$v_{\mathcal{A}}(p) = T$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}^+(p) = 1$, e $S_{\mathcal{A}}^+(\neg p) = 0$.

$v_{\mathcal{A}}(p) = T_1$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}^+(p) = 1$, e $S_{\mathcal{A}}^+(\neg p) = 1$.

$v_{\mathcal{A}}(p) = F$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}^+(p) = 0$.

E, para toda fórmula não atômica α , $v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ é definido de acordo com as tabelas de verdade de P^1 .

Demonstraremos, por indução na complexidade de α , que $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$.

I.1) α é atômica. Então, $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ ou $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T_1$ sse (ver a definição de $v_{\mathcal{A}}$) $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$.

I.2) α é da forma $\neg\beta$, com β atômica.

Logo:

I.2.1) Se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ então, dado que α não pode ser atômica, obtemos que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$. Daqui $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ ou $v_{\mathcal{A}}(\beta) = T_1$. Então, pela definição de $v_{\mathcal{A}}$, sempre vale que $S_{\mathcal{A}}^+(\neg\beta) = S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$.

I.2.2) Se $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$, deve acontecer que $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ ou $v_{\mathcal{A}}(\beta) = T_1$. Logo, como $v_{\mathcal{A}}$ é valoração para P^1 , $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.

I.3) α é da forma $\neg\beta$, com β não atômica.

I.3.1) $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ então $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ (α não é atômica). Logo, $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ (β não é atômica) e, assim, por Hipótese de Indução, vale que $S_{\mathcal{A}}^+(\beta) = 0$. Portanto $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$.

I.3.2) $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = 1$ então $S_{\mathcal{A}}^+(\beta) = 0$. Logo, por (HI) vale que $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$, e assim $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.

I.4) α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$.

Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, se e somente se $[v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ ou $v_{\mathcal{A}}(\gamma) \in \mathcal{D}]$ se e somente se (por Hipótese de Indução) $[S_{\mathcal{A}}^+(\beta) = 0$ ou $S_{\mathcal{A}}^+(\gamma) = 1]$, se e somente se $S_{\mathcal{A}}^+(\alpha) = -S_{\mathcal{A}}^+(\beta) \sqcup S_{\mathcal{A}}^+(\gamma) = 1$.

Parte II: Seja v uma valoração da lógica P^1 . Consideremos os seguintes conjuntos:

$$X = \{p : p \text{ é fórmula atômica e } v(p) = T\};$$

$$Y = \{p : p \text{ é fórmula atômica e } v(p) = T_1\};$$

$$Z = \{p : p \text{ é fórmula atômica e } v(p) = F\}.$$

Definimos uma sociedade $\mathcal{A}_v = \{Ag_1, Ag_2\}$ de agentes clássicos da seguinte forma:

$$Ag_1(p) = T \text{ sse } p \in X \cup Y;$$

$$Ag_2(p) = T \text{ sse } p \in X.$$

As extensões dos valores dos Ag_i para fórmulas complexas são feitas de acordo com as tabelas de verdade clássicas ($i = 1, 2$).

Dada $\mathcal{A}_v = \{Ag_1, Ag_2\}$, provaremos que $S_{\mathcal{A}_v}^+(\alpha) = 1$ se e somente se $v(\alpha) \in \mathcal{D}$.

II.1) α é atômica.

Logo $v(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $\alpha \in X \cup Y$, sse existe um agente $Ag_i \in \mathcal{A}_v$ tal que $Ag_i(\alpha) = T$, se e somente se (pela definição de satisfatibilidade em Sociedades Biassertivas Abertas) $S_{\mathcal{A}_v}^+(\alpha) = 1$.

II.2) α é da forma $\neg\beta$, com β atômica.

II.2.1) Se $v(\alpha) \in \mathcal{D}$, então $v(\alpha) = T$ (pois α não é atômica), e assim $v(\beta) = F$ ou $v(\beta) = T_1$, donde $\beta \in Y$ ou $\beta \in Z$. Logo $Ag_2(\beta) = F$. Assim, $Ag_2(\alpha) = T$, e portanto (pela definição de satisfatibilidade em Sociedades Biassertivas Abertas) $S_{\mathcal{A}_v}^+(\alpha) = 1$.

II.2.2) Se $S_{\mathcal{A}_v}^+(\alpha) = 1$, então existe um agente $Ag_i \in \mathcal{A}_v$ tal que $Ag_i(\alpha) = T$, donde $Ag_i(\beta) = F$. Logo $\beta \in Y \cup Z$, e assim temos que $v(\beta) = F$, ou $v(\beta) = T_1$. Logo, vale que $v(\alpha) = T$.

II.3) α é da forma $\neg\beta$, com β não atômica.

II.4) α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$.

Os dois últimos casos demonstram-se de forma análoga aos casos I.3) e I.4).

Pelas considerações feitas no início da demonstração, a prova do teorema está concluída. $\square$

Teorema 1.2.17 *A Lógica das sociedades fechadas é I^1 .*

Demonstração: A prova deste teorema segue o mesmo procedimento da demonstração do teorema anterior (ver [CLM99]). $\square$

Uma vez compreendido o método e a idéia por trás da Semântica de Sociedades, estamos em condições de tentar formalizar de uma forma mais exata a definição da mesma. A formalização inicial somente tratará de Sociedades de Agentes n -valentes, das quais a Sociedade Biassertiva Aberta e Biassertiva Fechada são casos particulares.

1.3 Formalização da Semântica de Sociedades n -valentes

Nesta seção daremos uma definição formal para Semântica de Sociedades n -valentes, baseados nos exemplos de sociedades biassertivas (abertas e fechadas). Para obter uma definição adequada é preciso compreender o mecanismo que permite construir uma dada semântica $\mathcal{C}$ com base em outras semânticas $\mathcal{C}_i$. Observamos então que:

1) Como foi mencionado anteriormente, o conceito de *agente* presente em [CLM 99] é associado ao conceito de valorações: uma Sociedade de um tipo determinado não é outra coisa do que um conjunto de valorações.

2) Por outro lado, a Sociedade determina critérios de validade para certas classes de fórmulas (nos exemplos de sociedades biassertivas indicam-se critérios para fórmulas do tipo p e $\neg p$, e nas sociedades triassertivas, as quais serão objeto de estudo no próximo capítulo, propõem-se critérios para fórmulas do tipo p , $\neg p$ e $\neg\neg p$). Estes critérios, obviamente, são expressos em função dos agentes que compõem uma Sociedade.

3) Mas, dado que entendemos um agente como uma valoração, então os critérios para aceitação de fórmulas dependem de certas propriedades dos valores $Ag(\alpha)$. Isto pode-se entender assim: $S \models_{\mathcal{A}} \alpha$ sse $R_{\alpha} := \{Ag(\alpha)\}_{Ag \in \mathcal{A}}$ satisfaz alguma relação determinada com algum conjunto de valores de verdade.

Exemplos 1.3.1

1) Poderíamos considerar a Sociedade Biassertiva Aberta a partir de leis de aceitação para fórmulas de tipo p e de tipo $\neg p$ como sendo:

$$S^+ \models_{\mathcal{A}} p \text{ sse } R_p \cap \{T\} \neq \emptyset;$$

$$S^+ \models_{\mathcal{A}} \neg p \text{ sse } R_{\neg p} \cap \{T\} \neq \emptyset.$$

2) No caso das sociedades Biassertivas Fechadas, as leis de aceitação seriam:

$$S^- \models_{\mathcal{A}} p \text{ sse } R_p = \{T\};$$

$$S^- \models_{\mathcal{A}} \neg p \text{ sse } R_{\neg p} = \{T\}. \quad \square$$

Chegamos aqui a dois pontos importantes que nos permitirão caracterizar a Semântica de Sociedades para os exemplos citados: em todos esses exemplos os tipos de fórmulas, para as quais têm-se definido critérios de aceitação por parte da Sociedade $\mathcal{A}$ de agentes, verificam as seguintes condições:

a) Cada critério define-se para certa classe de fórmulas fechada por substituição de fórmulas atômicas. Nos nossos exemplos, as classes envolvidas são:

$$\mathcal{V} := \{p : p \text{ é atômica}\};$$

$$\mathcal{V}^\neg := \{\neg p : p \text{ é atômica}\};$$

$$\mathcal{V}^{\neg\neg} := \{\neg\neg p : p \text{ é atômica}\}.$$

b) Todas essas classes de fórmulas dependem de uma única fórmula atômica. Além disso, como os agentes são verofuncionais, não é preciso considerar conjuntos R_α para explicitar os critérios de aceitação de α , sendo α uma fórmula arbitrária: todos esses critérios podem-se expressar utilizando somente os conjuntos $R_p = \{Ag(p) : Ag \in \mathcal{A}\}$, para toda fórmula atômica p .

Exemplo 1.3.2

Consideremos os casos já estudados. Temos assim que:

a) A Sociedade Biassertiva Aberta poderia considerar-se como o par $S^+ = \langle CPC, W \rangle$ onde:

a.1) A designação do cálculo CPC (isto é, do cálculo proposicional clássico) indica que tipo de valorações (agentes) conformam as sociedades biassertivas abertas:

a.2) $W = \{S_0, S_1\}$ e:

$$S_0 := \{R \subseteq \{T, F\} : R \cap \{T\} \neq \emptyset\};$$

$$S_1 := \{R \subseteq \{T, F\} : R \cap \{F\} \neq \emptyset\}.$$

Finalmente $S^+ \models_{\mathcal{A}} p$ (resp. $S^+ \models_{\mathcal{A}} \neg p$) sse $R_p = \{Ag(p)\}_{Ag \in \mathcal{A}} \in S_0$ (resp. $R_p \in S_1$), para toda sociedade $\mathcal{A}$ de agentes clássicos.

b) Com a mesma notação, definimos a semântica de Sociedades Biassertivas Fechadas como o par: $S^- = \langle CPC, W \rangle$ tal que

$$W := \{S_0, S_1\} \text{ e onde:}$$

$$S_0 = \{\{T\}\};$$

$$S_1 = \{\{F\}\}.$$

Finalmente $S^- \models_{\mathcal{A}} p$ e $S^- \models_{\mathcal{A}} \neg p$ são definidos da mesma maneira que no exemplo a). $\square$

Estamos agora em condições de definir de maneira mais geral uma Semântica de Sociedades, baseando-nos na notação dos últimos exemplos:

Definição 1.3.3 1) Uma Semântica de Sociedades de Agentes n -valentes é um par $S = \langle \mathcal{L}, W \rangle$ onde:

- $\mathcal{L}$ é uma lógica proposicional n -valente.
- $W = \langle \mathcal{F}_i, S_i \rangle_{i \in I}$ tal que, para todo $i \in I$:
 - $\mathcal{F}_i$ é uma classe de fórmulas $\mathcal{F}_i \subseteq \mathbb{L}$ fechada por substituição de fórmulas atômicas, tal que cada fórmula de $\mathcal{F}_i$ depende de uma única variável atômica, $\emptyset \neq \mathcal{F}_i$ para $i \in I$ e $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ para $i \neq j$;
 - $\mathcal{F}_1 = \mathcal{V}$;
 - $S_i \subseteq \wp(\mathcal{T})$, com $\mathcal{T}$ o conjunto de valores de verdade da matriz $M_{\mathcal{L}}$.

2) Chamamos sociedade de agentes $\mathcal{L}$ a todo conjunto não vazio $\mathcal{A}$ de valorações da lógica $\mathcal{L}$.

3) Dizemos que S satisfaz a fórmula α na sociedade $\mathcal{A}$ (e o denotamos por $S \models_{\mathcal{A}} \alpha$ ou $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$)³ se:

3.1) Se $\alpha \in \mathcal{F}_i$ para algum $i \in I$, então $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $R_p \in S_i$, com p a única fórmula atômica presente em α .

3.2) Se $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para nenhum $i \in I$, então a função $S_{\mathcal{A}} : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$ é definida segundo os padrões clássicos. Isto é:

$$S_{\mathcal{A}}(\beta \vee \gamma) = 1 \text{ sse } S_{\mathcal{A}}(\beta) = 1 \text{ ou } S_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1;$$

$$S_{\mathcal{A}}(\beta \wedge \gamma) = 1 \text{ sse } S_{\mathcal{A}}(\beta) = 1 \text{ e } S_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1;$$

$$S_{\mathcal{A}}(\beta \rightarrow \gamma) = 1 \text{ sse } S_{\mathcal{A}}(\beta) = 0 \text{ ou } S_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1;$$

$$S_{\mathcal{A}}(\neg \beta) = 1 \text{ sse } S_{\mathcal{A}}(\beta) = 0.$$

4) Finalmente, dizemos que a fórmula α é consequência do conjunto Γ na Semântica S (e o denotaremos por $\Gamma \models^S \alpha$) sse para toda sociedade $\mathcal{A}$ tal que $S_{\mathcal{A}}(\beta) = 1$ para todas as fórmulas $\beta \in \Gamma$, vale que $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$. $\square$

Observações 1.3.4

Segundo a definição precedente, a Semântica de Sociedades é caracterizada por uma definição extremamente rígida.

Este tipo particular de Combinação de Lógicas, de acordo a sua definição final, tem a vantagem de ser facilmente operável e computável. Porém, esta mesma característica traz algumas consequências indesejáveis, sobretudo com relação ao seu poder expressivo, entre as que destacamos:

1) A Semântica de Sociedades somente pode ser aplicada entre valorações de uma mesma lógica.

2) A lógica resultante, mesmo quando ela possa ser diferente da lógica que a determina, deve ter a mesma linguagem que ela.

3) As lógicas presentes na Semântica de Sociedades devem ser verofuncionais.

4) As fórmulas que determinam os critérios iniciais de aceitação devem depender de uma única variável.

³Se S não satisfaz a fórmula α na sociedade $\mathcal{A}$, escreveremos $S \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ ou $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.

5) A extensão dos critérios de aceitação para fórmulas de complexidade superior segue somente as normas clássicas.

É bom considerar que, mesmo com estas restrições, a Semântica de Sociedades merece um estudo profundo (do qual esta dissertação atinge somente alguns aspectos), pois permite combinar, principalmente, cálculos n -valentes em geral de uma forma estrita.

Por outro lado, ao longo desta dissertação sugerimos alterações na definição da Semântica de Sociedades, que permitem estendê-la a combinações de cálculos mais complexos. $\square$

1.4 Verofuncionalidade vs. bivalência.

Neste ponto é bom analisar um aspecto da Semântica de Sociedades até agora não observado. De acordo com as definições das funções $S_{\mathcal{A}}^+$ e $S_{\mathcal{A}}^-$ a partir de uma dada sociedade $\mathcal{A}$, as mesmas verificam as seguintes características:

1) Elas são bivalentes no sentido em que o contradomínio das mesmas é o conjunto $\{0, 1\}$.

2) Porém, elas não constituem homomorfismos entre o conjunto $\mathbb{L}$ e $\{0, 1\}$, pois o valor de uma fórmula de tipo $\neg p$ não depende do valor da fórmula p .

Portanto, as Semânticas de Sociedades estudadas até agora são bivalentes (de acordo com 1)), mas não podem ser verofuncionais (devido a 2)). As Semânticas de Sociedades, portanto, verificam o postulado de R. Suszko (conhecido na literatura como **Tese de Suszko**), o qual afirma que toda lógica com relação de consequência estrutural de acordo com as condições usuais sugeridas por A. Tarski deve ter uma semântica bivalente (ver [Tsu98], [dCB98]).

Por outro lado, segundo os teoremas prévios, as lógicas associadas às diferentes Semânticas de Sociedades estudadas têm semânticas usuais verofuncionais, embora sejam n -valentes.

Contudo, é precisamente nas demonstrações dos Teoremas 1.2.16 e 1.2.17 em que é manifestado explicitamente o fato de poder-se associar a cada função bivalente não necessariamente homomórfica $S_{\mathcal{A}}$ (denominada nesta dissertação de **bivaloração**⁴) uma determinada valoração $v_{\mathcal{A}}$ e vice-versa. Neste sentido, as Semânticas de Sociedades vêm a expressar formalmente o processo postulado na Tese de Suszko, de forma tal que o mesmo possa ser aplicável também à área das Combinações entre Lógicas. Discutiremos mais profundamente esta característica da Semântica de Sociedades no Capítulo 4 e no Capítulo 5 (**Considerações finais**).

⁴Seguimos aqui a denominação de [dCB98] e [Mar0?].

Capítulo 2

Sociedades Triassertivas

2.1 Sociedades Triassertivas Abertas

Neste capítulo estudaremos o escopo da definição prévia de Semântica de Sociedades. Com efeito, pode ser provado que a formalização do conceito de Semântica de Sociedades n -valentes a partir de conjuntos de valores de verdade é suficientemente efetiva para o caso de Sociedades Biassertivas. Mas será igualmente efetiva em outros casos? Veremos neste capítulo que a resposta é afirmativa: demonstraremos a seguir que, no caso das Sociedades Triassertivas (as quais também foram caracterizadas em [CLM99]), a formalização prévia é igualmente apta para expresar os diferentes critérios de aceitação das mesmas. Iniciamos esta prova com as definições de Sociedades Triassertivas Abertas e Fechadas:

Definição 2.1.1 *Um agente trivalente é uma função $Ag : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Uma sociedade de agentes trivalentes é um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ de agentes trivalentes. $\square$*

Definição 2.1.2 (Sociedades Triassertivas) *Dada uma sociedade $\mathcal{A}$ de agentes trivalentes, definimos a Sociedade Triassertiva Aberta gerada por $\mathcal{A}$ como sendo uma função $S_{\mathcal{A}}^{++} : \mathbb{L} \longrightarrow \{0, 1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (OTS – 1) $S_{\mathcal{A}}^{++}(p) = 1$ sse existe algum agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(p) = 1$ ou $Ag(p) = \frac{1}{2}$
- (OTS – 2) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) = 1$ sse existe algum agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(p) = 0$ ou $Ag(p) = \frac{1}{2}$
- (OTS – 3) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 1$ sse existem agentes distintos Ag_i e Ag_j em $\mathcal{A}$ tais que $Ag_i(p) = 1$, e $Ag_j(p) \neq \frac{1}{2}$
- (OTS – 4) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}^{++}(\beta)$
- (OTS – 5) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha \vee \beta) = S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^{++}(\beta)$
- (OTS – 6) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha \rightarrow \beta) = \neg S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^{++}(\beta)$
- (OTS – 7) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\alpha) = \neg S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha)$ (α não literal). $\square$

Observação 2.1.3

A definição original de Sociedades Triassertivas Abertas que aparece em [CLM99] é construída a partir de pares de agentes clássicos. Assim, uma *Sociedade Trivalente* (*Triassertiva*, no original) é um conjunto não vazio de pares $\mathcal{A} = \{\langle Ag_i^+, Ag_i^- \rangle\}_{i \in I}$ satisfazendo as seguintes condições:

A1) Ag_i^+ e Ag_i^- são agentes clássicos, segundo a Definição 1.2.8.

A2) $Ag_i^- \cap Ag_i^+ = \emptyset$ (isto é, não podemos ter simultaneamente $Ag_i^+(p) = T$ e $Ag_i^-(p) = T$ para nenhuma fórmula atômica p). As três primeiras cláusulas de satisfação são as seguintes:

- (OTS – 1) $S_{\mathcal{A}}^{++}(p) = 1$ sse existe algum agente $Ag_i \in \mathcal{A}$ tal que $Ag_i^+(p) = T$ ou $Ag_i^-(p) = T$
- (OTS – 2) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) = 1$ sse existe algum agente $Ag_i \in \mathcal{A}$ tal que $Ag_i^+(p) = F$ ou $Ag_i^-(p) = T$
- (OTS – 3) $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 1$ sse existem agentes distintos Ag_i e Ag_j em $\mathcal{A}$ tais que $Ag_i^+(p) = T$, e $Ag_j^-(p) = F$.

Na verdade, segundo os requisitos A1) e A2) da definição acima, os pares de agentes clássicos não são outra coisa que valorações trivalentes. Com efeito, basta definir para cada $Ag = \langle Ag^+, Ag^- \rangle$ a função $w : \mathcal{V} \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ como:

$$w(p) = 1 \text{ sse } Ag^+(p) = T;$$

$$\begin{aligned} w(p) &= \frac{1}{2} \text{ sse } Ag^-(p) = T; \\ w(p) &= 0 \text{ sse } Ag^+(p) = F = Ag^-(p). \end{aligned}$$

Reciprocamente, um agente trivalente $w : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ induz um agente $Ag = \langle Ag^+, Ag^- \rangle$ dado por

$$\begin{aligned} Ag^+(p) &= T \text{ sse } w(p) = 1; \\ Ag^-(p) &= T \text{ sse } w(p) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil notar que não interessa verdadeiramente qual é a lógica subjacente à valoração w , pois as definições de Sociedade Triassertivas Abertas e Fechadas somente requerem a informação do valor de $w(p)$ no nível das fórmulas atômicas. Em geral, entende-se que para construir Sociedades Abertas as valorações w são de tipo P^1 . Portanto, podemos substituir na Definição 2.1.2 os valores $0, \frac{1}{2}, 1$ pelos valores F, T_1, T , respectivamente.¹ $\square$

W.Carnielli e M. Lima-Marques demonstraram que as Sociedades Triassertivas Abertas podem ser caracterizadas através da Lógica P^2 (segundo degrau na hierarquia de lógicas paraconsistentes P^n mencionada no Capítulo 1 e que estudaremos em detalhe no Capítulo 3), cuja expressão matricial é a seguinte:

$$P^2 = \langle \{T, T_1, T_2, F\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{T, T_1, T_2\} \rangle,$$

onde as operações $\neg$ e $\rightarrow$ são definidas como

	T	T_1	T_2	F
$\neg$	F	T	T_1	T

$\rightarrow$	T	T_1	T_2	F
T	T	T	T	F
T_1	T	T	T	F
T_2	T	T	T	F
F	T	T	T	T

¹A *a priori* não parece ser necessário dotar as funções w de uma lógica interna, isto é, de considerá-las valorações de uma certa lógica trivalente para todo tipo de fórmulas α e não meramente de fórmulas atômicas p . De fato, na totalidade dos exemplos, a propriedade de w ser uma valoração não é verdadeiramente utilizada. No entanto, partimos do suposto de que o presente método possa ser estendido a casos nos quais a lógica interna das funções w seja relevante para a construção da Semântica de Sociedades. Discutiremos tal extensão no Capítulo 4.

A conjunção e a disjunção em P^2 são conectivos secundários, definidos em termos de $\neg$ e de $\rightarrow$ ².

O que foi expressado previamente pode explicitar-se no seguinte Teorema:

Teorema 2.1.4 *A Lógica das Sociedades Triassertivas Abertas construídas a partir de sociedades não unitárias de agentes P^1 é P^2*

Demonstração: O Teorema é demonstrado seguindo a técnica habitual (ver [CLM99]). Isto é, mostrando que toda valoração v em P^2 pode ser associada a uma função $S_{\mathcal{A}}^{++}$ e vice-versa, de tal maneira que, para toda fórmula α , vale o seguinte:

$$S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) = 1 \text{ se e somente se } v(\alpha) \in \{T, T_1\}.$$

Assim, pelas definições de validade nas duas semânticas, concluímos que elas coincidem. $\square$

Observação 2.1.5

No prova original, W. Carnielli e M. Lima-Marques provaram que a Sociedade Triassertiva Aberta tem uma lógica de tipo P^2 . Isto é efetivamente certo se considerarmos que as sociedades são conjuntos não unitários de agentes (como foi enunciado no último teorema), mas não é válido se permitimos que existam sociedades triviais, com exatamente um agente P^1 (fato não observado no artigo em questão)³.

Com efeito, consideremos uma sociedade $\mathcal{A}$ com somente um agente A_g tal que $A_g(p) = T$ para alguma variável proposicional p . Pela definição de Sociedade Triassertiva Aberta temos que vale

$$S_{\mathcal{A}}^{++}(p) = 1, S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) = 0 \text{ e } S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 0$$

²A definição de $\wedge$ e de $\vee$ a partir de $\neg$ e de $\rightarrow$ será dada no Capítulo 3 de forma geral para todos os cálculos da hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

³Devo a Luís Sbardellini a observação deste fato.

Daí, $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p \vee \neg \neg p) = 0$ (por (OTS-6)). Isto é, nas Sociedades Triassertivas Abertas a fórmula $\alpha \vee \neg \alpha$ não é válida, fato que não acontece com P^2 .

Porém, se definimos sociedade $\mathcal{A}$ como um conjunto de agentes com $|A| \geq 2$, o Teorema 2.1.4 é válido.

Dado que no capítulo seguinte veremos uma forma geral de obter semânticas de sociedades P^{n+1} a partir de agentes P^n , o anteriormente mencionado não apresenta maiores inconvenientes. mas, para confirmar a abrangência da Definição 1.3.3, provaremos que toda Sociedade Triassertiva Aberta com mais de um agente pode ser explicitada por tal definição. $\square$

Para formalizar os resultados obtidos de acordo com a Definição 2.1.2, devemos entender cada agente trivalente Ag como uma valoração P^1 , conforme mencionado na Observação 2.1.3. O verdadeiro problema, porém, é explicitar os critérios de aceitação para fórmulas de tipo p , $\neg p$ e $\neg \neg p$ a partir de valores de verdade.

Com efeito: o critério de aceitação explicitado em (OTS – 1) pode ser expresso da maneira seguinte:

$$S_{\mathcal{A}}^{++}(p) = 1 \text{ se e somente se } R_p = \{Ag_i(p)\}_{i \in I} \in S_0 = \{R : R \cap \{T, T_1\} \neq \emptyset\}.$$

Por outro lado, o critério expressado em (OTS – 2) para fórmulas de tipo $\neg p$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$S_{\mathcal{A}}^{++}(1) = 1 \text{ se e somente se } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{T_1, F\} \neq \emptyset\}.$$

O problema surge na tentativa de expressar o critério (OTS – 3) a partir de conjuntos de $\wp(\mathcal{T})$, com $\mathcal{T}$ o conjunto de valores de verdade de P^2 . Pois, como esta instrução solicita que existam dois agentes distintos Ag_i e Ag_j tais que $Ag_i(p) = T$, mas $Ag_j(p) \neq T_1$, teríamos a seguinte situação:

- Por um lado, deve valer que $T \in R_p$ (em virtude de Ag_i);
- Além disso, deve acontecer que, fora do valor T de $Ag_i(p)$, exista outro agente tal que $Ag_j(p) = T$ ou $Ag_j(p) = F$.

Mas esta situação não pode ser capturada se simplesmente analisarmos o conjunto R_p , conforme veremos no exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.6

Seja uma sociedade $\mathcal{A}$ que consiste de três agentes tais que: $Ag_1(p) = T$, $Ag_2(p) = T_1$ e $Ag_3(p) = T$. Logo, para esta sociedade obtemos $R_p = \{T, T_1\}$. E também vale que $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 1$, devido a Ag_1 e a Ag_3 .

Seja, por outro lado, a sociedade $\mathcal{A}'$, que consiste também de três agentes, com $Ag'_1(p) = T$, $Ag'_2(p) = T_1$, e $Ag'_3(p) = T_1$. Neste caso temos novamente que $R_p = \{T, T_1\}$, mas agora vale que $S_{\mathcal{A}'}^{++}(\neg\neg p) = 0$. Logo, $(OTS - 1)$ não pode ser expresso a partir da análise de R_p . $\square$

A solução para a situação precedente é a seguinte: simplesmente podemos mudar os critérios de aceitação para Sociedades Triassertivas Abertas de Agentes P^1 por outros critérios novos (estes sim, expressáveis em função do conjunto R_p) tal que a Semântica de Sociedades obtida a partir destes critérios seja a mesma que a Semântica antiga. É precisamente esta nova caracterização de Sociedades Triassertivas Abertas que é apresentada a seguir.

Definição 2.1.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes trivalentes, e $R_p = \{Ag(p) : Ag \in \mathcal{A}\}$ para cada fórmula atômica p . Definimos a Sociedade Triassertiva Aberta $\overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}$ gerada por $\mathcal{A}$ como sendo uma função*

$$\overline{S}_{\mathcal{A}}^{++} : \mathbb{L} \longrightarrow \{0, 1\}$$

satisfazendo as seguintes cláusulas:

$$(\overline{OTS} - 1) \quad \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(p) = 1 \text{ sse } R_p \in \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \cap \{T, T_1\} \neq \emptyset\}$$

$$(\overline{OTS} - 2) \quad \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) = 1 \text{ sse } R_p \in \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \cap \{F, T_1\} \neq \emptyset\}$$

$$(\overline{OTS} - 3) \quad \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 1 \text{ sse } R_p \in \{R \in \wp(\mathcal{T}) : \{T, F\} \subseteq R \text{ ou } R = \{T\}\}$$

$$(\overline{OTS} - 4) \quad \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha \wedge \beta) = \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) \sqcap \overline{S}_{\mathcal{A}}^{++}(\beta)$$

$$(\overline{OTS-5}) \quad \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\alpha \vee \beta) = \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\alpha) \sqcup \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\beta)$$

$$(\overline{OTS-6}) \quad \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\alpha \rightarrow \beta) = -\overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\alpha) \sqcup \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\beta)$$

$$(\overline{OTS-7}) \quad \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\neg\alpha) = -\overline{S_{\mathcal{A}}^{++}} \quad (\alpha \text{ não literal}). \quad \square$$

Observações 2.1.8

(1) Dada uma sociedade $\mathcal{A}$, as valorações $S_{\mathcal{A}}^{++}$ e $\overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}$ ficam absolutamente determinadas a partir dos seus valores nos conjuntos

$$\mathcal{V} = \{p : p \text{ é atômica}\};$$

$$\mathcal{V}^{\neg} = \{\neg p : p \text{ é atômica}\};$$

$$\mathcal{V}^{\neg\neg} = \{\neg\neg p : p \text{ é atômica}\}.$$

Isto é, se $FC = \mathcal{V} \cup \mathcal{V}^{\neg} \cup \mathcal{V}^{\neg\neg}$, então

$$S_{\mathcal{A}}^{++} = \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}} \text{ sse } S_{\mathcal{A}}^{++}(\alpha) = \overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\alpha) \text{ para toda } \alpha \in FC.$$

(2) Dada $\mathcal{A}$, a única divergência que pode ocorrer entre as funções $S_{\mathcal{A}}^{++}$ e $\overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}$ é, portanto, na seguinte situação:

- $\mathcal{A}$ tem ao menos três agentes diferentes, e
- existem uma fórmula atômica p e um agente $Ag \in \mathcal{A}$ tais que $Ag(p) = T_1$, e $Ag'(p) = T$ para todo $Ag' \in \mathcal{A}$, $Ag' \neq Ag$.

Nessa situação teremos que $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) = 1$, enquanto que $\overline{S_{\mathcal{A}}^{++}}(\neg\neg p) = 0$. $\square$

A partir da Observação 2.1.8 provaremos a seguir que as lógicas geradas pelas sociedades S^{++} e $\overline{S^{++}}$ coincidem. Previamente, reproduzimos um resultado (Teorema 4.1) que aparece em [CLM99].

Teorema 2.1.9 *Para toda Sociedade Trivalente $\mathcal{A}$ de Agentes P^1 existe uma Sociedade Trivalente $\mathcal{A}'$ de agentes P^1 , com no máximo três agentes, tal que $S_{\mathcal{A}}^{++} = S_{\mathcal{A}'}^{++}$.*

Teorema 2.1.10 *Dada uma família $\mathcal{A} = \{Ag_i\}_{i \in I}$ de agentes P^1 existe uma família $\mathcal{A}' = \{Ag'_i\}_{i \in I}$ de agentes P^1 tal que $S_{\mathcal{A}}^{++} = \overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \{Ag_i\}_{i \in I}$ uma família de valorações P^1 . Pelo Teorema 2.1.9, podemos considerar $\mathcal{A}$ simplesmente como uma família de no máximo três valorações, no que concerne à definição da função $S_{\mathcal{A}}^{++}$. Se $\mathcal{A}$ tem menos de três agentes então, pela Observação 2.1.8(2), podemos tomar $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Se, por outro lado, $\mathcal{A}$ tem exatamente três agentes Ag_1, Ag_2 e Ag_3 , podem acontecer duas situações:

CASO I: Não existe nenhuma fórmula atômica p na situação da Observação 2.1.8(2). Nesse caso, novamente podemos tomar $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

CASO II: Existem variáveis proposicionais p “críticas”, isto é, na situação da Observação 2.1.8 (2). Para cada p crítica, considere $k(p)$ o único índice de $I = \{1, 2, 3\}$ tal que $Ag_{k(p)}(p) = T_1$. Definimos então uma sociedade $\mathcal{A}' = \{Ag'_1, Ag'_2, Ag'_3\}$ da maneira seguinte:

$$Ag'_i(p) = \begin{cases} F & \text{se } i = k(p) \\ T & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nas outras variáveis, definimos $Ag'_i(p) = Ag_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$).

É imediato observar que

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}^{++}(p) &= 1 = \overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++}(p), \\ S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) &= 1 = \overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++}(\neg p), \\ S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) &= 1 = \overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++}(\neg\neg p), \end{aligned}$$

para toda variável p crítica. Portanto, pela Observação 2.1.8(2) obtemos que $S_{\mathcal{A}}^{++} = \overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++}$. $\square$

Teorema 2.1.11 *Dada uma família $\mathcal{A}' = \{Ag'_i\}_{i \in I}$ de agentes P^1 existe uma família $\mathcal{A} = \{Ag_i\}_{i \in I}$ de agentes P^1 tal que $\overline{S_{\mathcal{A}'}}^{++} = S_{\mathcal{A}}^{++}$.*

Demonstração: 1) A prova é similar à prova do teorema anterior. Considere então $\mathcal{A}' = \{Ag'_i\}_{i \in I}$ uma família de valorações P^1 . Nos casos em que I tem menos de três agentes, ou quando $\mathcal{A}$ tem mais de dois agentes mas não existe nenhuma variável p

“crítica”, isto é, na situação da Observação 2.1.8(2), podemos definir $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Suponhamos então que temos ao menos três agentes, e existem variáveis críticas. Para cada variável crítica, escolha um índice $k(p)$ de I tal que $Ag_{k(p)}(p) = T$. (Observe que estamos usando aqui o Axioma da Escolha, e portanto nossa demonstração não é mais um argumento construtivo. Por outro lado, podemos evitar este problema se considerarmos linguagens enumeráveis.) Definiremos uma sociedade $\mathcal{A} = \{Ag_i\}_{i \in I}$ da maneira seguinte:

$$Ag_i(p) = \begin{cases} T & \text{se } i = k(p) \\ T_1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nas outras variáveis, definimos $Ag_i(p) = Ag'_i(p)$ para todo $i \in I$.

É imediato observar que

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}^{++}(p) &= 1 = \overline{S_{\mathcal{A}'}^{++}}(p), \\ S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p) &= 1 = \overline{S_{\mathcal{A}'}^{++}}(\neg p), \\ S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg\neg p) &= 0 = \overline{S_{\mathcal{A}'}^{++}}(\neg\neg p), \end{aligned}$$

para toda variável p crítica. Portanto, pela Observação 2.1.8(2) obtemos que $S_{\mathcal{A}}^{++} = \overline{S_{\mathcal{A}'}^{++}}$. $\square$

2.2 Sociedades Triassertivas Fechadas

Podemos agora, analogamente ao trabalho que foi realizado com as Sociedades Triassertivas Abertas, definir e analisar as Sociedades Triassertivas Fechadas.

Definição 2.2.1 *Dada uma Sociedade trivalente $\mathcal{A}$ (em que os agentes podem agora ser pensados como valorações I^1 , conforme observado na Observação 2.1.3), definimos a Sociedade Triassertiva Fechada gerada por $\mathcal{A}$ como sendo uma função $S_{\mathcal{A}}^{--} : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (CTS – 1) $S_{\mathcal{A}}^{--}(p) = 1$ sse para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$
 $Ag(p) = T$ ou $Ag(p) = F_1$
- (CTS – 2) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\neg p) = 1$ sse para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$
 $Ag(p) = F$ ou $Ag(p) = F_1$
- (CTS – 3) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\neg\neg p) = 1$ sse para todo $Ag \in \mathcal{A}$
 $Ag(p) = T$
- (CTS – 4) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}^{--}(\beta)$
- (CTS – 5) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha \vee \beta) = S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^{--}(\beta)$
- (CTS – 6) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha \rightarrow \beta) = \neg S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}^{--}(\beta)$
- (CTS – 7) $S_{\mathcal{A}}^{--}(\neg\alpha) = \neg S_{\mathcal{A}}^{--}(\alpha)$ (α não literal). $\square$

Observação 2.2.2

A definição original de Sociedades Triassertivas Fechadas que aparece em [CLM99] é formulada, da mesma maneira que as Sociedades Triassertivas Abertas, a partir de pares de agentes clássicos. Podemos repetir o processo de tradução de agentes $\langle Ag^+, Ag^- \rangle$ para valorações I^1 , e vice-versa. Com efeito, basta definir para cada $Ag = \langle Ag^+, Ag^- \rangle$ a função $w : \mathcal{V} \longrightarrow \{F, F_1, T\}$ como:

$$\begin{aligned} w(p) &= T \text{ sse } Ag^+(p) = T; \\ w(p) &= F_1 \text{ sse } Ag^-(p) = T; \\ w(p) &= F \text{ sse } Ag^+(p) = F = Ag^-(p). \end{aligned}$$

Reciprocamente, um agente $w : \mathcal{V} \longrightarrow \{F, F_1, T\}$ da lógica I^1 induz um agente $Ag = \langle Ag^+, Ag^- \rangle$ dado por

$$\begin{aligned} Ag^+(p) &= T \text{ sse } w(p) = T; \\ Ag^-(p) &= T \text{ sse } w(p) = F_1. \quad \square \end{aligned}$$

A Lógica I^2 , que definiremos a seguir, está no segundo degrau na hierarquia de lógicas paracompletas I^n mencionada no Capítulo 1 e que estudaremos em detalhe no Capítulo 3.

Definição 2.2.3 (A Lógica paracompleta tetravalente I^2) *A Lógica I^2 é definida da maneira seguinte:*

$$I^2 = \langle \{T, F_1, F_2, F\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{T\} \rangle,$$

onde as operações $\neg$ e $\rightarrow$ são definidas como

	T	F_1	F_2	F
$\neg$	F	F	F_1	T

$\rightarrow$	T	F_1	F_2	F
T	T	F	F	F
F_1	T	T	T	T
F_2	T	T	T	T
F	T	T	T	T

□

A partir da definição das Sociedades Triassertivas Fechadas, e do cálculo I^2 , temos os seguintes resultados que caracterizam a sua lógica:

Teorema 2.2.4 *Para toda Sociedade Trivalente $\mathcal{A}$ de Agentes I^1 existe uma Sociedade Trivalente $\mathcal{A}'$ de agentes I^1 , com no máximo três agentes, tal que $S_{\mathcal{A}}^{--} = S_{\mathcal{A}'}^{--}$.*

Teorema 2.2.5 *A Lógica das Sociedades Triassertivas Fechadas é I^2*

A demonstração destes dois últimos teoremas segue das técnicas utilizadas nos teoremas anteriores, e aparece em [CLM99].

Vemos aqui que, diferentemente do caso das Sociedades Triassertivas Abertas, as Sociedades Triassertivas Fechadas podem ser expressas diretamente no nosso formalismo. Com efeito: os critérios de aceitação ($CTS - 1$) e ($CTS - 2$) para fórmulas da forma p e fórmulas da forma $\neg p$ respectivamente, sendo análogos aos critérios ($OTS - 1$) e ($OTS - 2$) da Definição 2.1.2 (somente muda o quantificador), já têm uma expressão unívoca a partir da caracterização do conjunto $R_p = \{Ag(p)\}_{Ag \in \mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}^{--}(p) &= 1 \text{ sse } R_p \in \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq \{T, F_1\}\}, \\ S_{\mathcal{A}}^{--}(\neg p) &= 1 \text{ sse } R_p \in \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq \{F, F_1\}\}. \end{aligned}$$

E o critério ($CTS - 3$) pode ser caracterizado por:

$$S_{\mathcal{A}}^{--}(\neg\neg p) = 1 \text{ sse } R_p \in \{\{T\}\}.$$

Para finalizar este capítulo faremos um breve comentário que será aprofundado no Capítulo 4: para caracterizar as Sociedades estudadas até agora, têm uma importância muito maior os critérios de aceitação que a caracterização da lógica dos Agentes, exigindo-se, nos dois exemplos deste capítulo, certas condições que impeçam que as funções $S_{\mathcal{A}}^{++}$ e $S_{\mathcal{A}}^{--}$ sejam homomorfismos (dada a independência, por exemplo, dos valores de $S_{\mathcal{A}}^{++}(p)$ com relação a $S_{\mathcal{A}}^{++}(\neg p)$). Uma questão interessante a se colocar é a seguinte: em que condições os agentes começam a ter influência efetiva na construção da Sociedade, e mais ainda, em que condições é verdadeiramente imprescindível considerar cada Agente como uma valoração, e não simplesmente como um designador de valores exclusivamente para fórmulas atômicas?

Capítulo 3

Aplicações em Lógicas n -valentes

Neste capítulo dedicamo-nos ao estudo das aplicações da Semântica de Sociedades a certas lógicas n -valentes. A razão de que sejam elas e não outros tipos de lógicas não clássicas objeto de análise sob a perspectiva da Semântica de Sociedades radica na definição desta última (para os exemplos citados) a partir de valorações. Em particular, nosso estudo será dirigido a duas hierarquias de cálculos (cujos primeiros elementos já foram estudados nos dois primeiros capítulos) que têm certa dualidade intrínseca: a hierarquia de cálculos paraconsistentes P^n , e a de cálculos paracompletos I^n .

3.1 A hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cálculos paraconsistentes

A lógica paraconsistente P^1 apresentado no primeiro capítulo desta dissertação foi desenvolvida por A.M. Sette (cf.[Set73]) com o objetivo de buscar novas alternativas para lógicas paraconsistentes. A lógica P^1 tem as seguintes características:

- 1) É uma lógica contida estritamente no cálculo proposicional clássico (CPC). Isto é, todas as tautologias de P^1 são tautologias de CPC , mas a propriedade recíproca não é válida (considerar como exemplo a fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$).
- 2) Como vimos, P^1 admite semântica matricial, em que o comportamento das funções associadas aos conectivos da linguagem é o mesmo das matrizes para CPC *somente*

após uma aplicação de $\neg$, ou do conectivo binário $\rightarrow$.¹

3) P^1 tem uma axiomática de tipo hilbertiano, dada em [Set73]. Duas axiomáticas alternativas são fornecidas em [Mar99].

4) P^1 é *maximal* com relação a CPC . Isto é, se acrescentamos à axiomática de P^1 qualquer teorema de CPC que não seja teorema de P^1 , os teoremas demonstrados com a nova axiomática são exatamente os de CPC .

A segunda lógica da hierarquia, P^2 , foi estudada em [Mar99], extrapolando certas propriedades de P^1 . É definida inicialmente por suas propriedades semânticas ao invés das sintáticas, as quais são:

- P^2 tem semântica matricial, denotada por

$$P^2 = \langle \{T, T_1, T_2, F\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{T, T_1, T_2\} \rangle$$
- P^2 é sub-cálculo estrito de P^1 .
- O comportamento das operações em P^2 é o mesmo que o comportamento das operações clássicas após duas negações ou uma aplicação de $\rightarrow$.

No que se refere a seu aspecto sintático, P^2 também admite uma axiomática de tipo Hilbert.

A idéia de uma hierarquia geral de lógicas paraconsistentes P^n aparece pela primeira vez em [Mar99], com o objetivo de estender, não somente as propriedades intrínsecas das lógicas P^1 e P^2 , mas também a relação dada entre CPC e P^1 , e entre P^1 e P^2 . Portanto, as propriedades gerais da hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deveriam ser:

- 1) $P^0 = CPC$.
- 2) Nas lógicas da hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o princípio de não contradição não deve valer de forma geral.
- 3) Toda fórmula válida de P^m também é fórmula válida de P^n , quando n é menor que m . A recíproca não é válida.

¹Uma semântica algébrica no estilo Blok-Pigozzi para P^1 pode ser vista em [LMS90].

Um tema de estudo interessante é referido às propriedades de maximalidade entre as diferentes lógicas da hierarquia. Isto é, saber por exemplo se a lógica P^{n+1} é maximal com relação a P^n .

Observações 3.1.1

A combinação dos requerimentos **1)**, **2)** e **3)** sugere imediatamente uma semântica matricial para esta hierarquia. Simplesmente consiste em construir, para um cálculo P^n dado, tabelas que validem o princípio de não contradição a partir de fórmulas atômicas com n negações, ou de fórmulas construídas a partir de conectivos binários. Portanto, o índice n determina quantas negações deve ter uma fórmula atômica para começar a comportar-se como a negação clássica. Isto é, como uma negação em que valem tanto o princípio do terceiro excluído quanto a lei da não contradição.

De fato, é relativamente simples construir uma hierarquia de semânticas n -valentes de matrizes que verifiquen as condições **1)-3)**. A construção é apresentada na seção seguinte. $\square$

3.2 Uma semântica matricial para $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

A representação matricial dos cálculos P^n é (considerando $T_0 = T$):

$$P^n = \langle \{T_0, T_1, \dots, T_n, F\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{T_0, T_1, \dots, T_n\} \rangle$$

As operações $\neg$ e $\rightarrow$ são definidas segundo as seguintes tabelas:

	T	T_i	F
$\neg$	F	T_{i-1}	T

$\rightarrow$	T	T_j	F
T	T	T	F
T_i	T	T	F
F	T	T	T

com $1 \leq i, j \leq n$.

Notar que, num certo cálculo P^n , o comportamento do conectivo $\rightarrow$ é sempre clássico, atribuindo F a $X \rightarrow F$ (com $X \in \mathcal{D}$) e T em caso contrário. Por outro lado, $\neg$ é a negação clássica somente a partir de n negações.

Como vemos, segundo a definição das tabelas, cada valor T_i é simplesmente um valor de “verdade” mais afastado do valor T_0 (que não é outra coisa do que o valor T , “absolutamente verdadeiro” – “ou classicamente verdadeiro”), quanto maior seja o índice i . Assim, a negação do cálculo P^n somente diminui em um grau o “afastamento” do valor T , até se converter no próprio valor T . Poderíamos interpretar este fenômeno da maneira seguinte: uma fórmula α com valor T_k é considerada verdadeira com um grau de *tolerância* k ; dessa forma, quanto menor é o grau k , mais verdadeira a fórmula resulta ser. Portanto, dada uma certa fórmula α , a qual é verdadeira com um certo grau de tolerância $k > 0$, então a sua negação acrescenta informação *negativa* com relação à incerteza de ser α verdadeira, no sentido que agora $\neg\alpha$ é verdadeira com um grau de tolerância $k - 1$, isto é, temos *maior certeza* da veracidade de $\neg\alpha$ do que da veracidade de α e, portanto, α é “menos verdadeira” do que $\neg\alpha$.

Por outro lado, a implicação é incapaz de distinguir entre diferentes graus de falsidade: simplesmente opera com eles como se fossem o valor T_0 ($= T$) dando como resultado somente os valores F ou T .

Um fato interessante de destacar é a definição dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ a partir de $\neg$ e $\rightarrow$: A idéia básica é que (do mesmo modo que $\rightarrow$), $\wedge$ e $\vee$ possam simular as operações clássicas de conjunção e disjunção de tal forma que os valores de $\mathcal{D}$ sejam “interpretados” como se fossem somente o valor T . Para tal fim é conveniente introduzir um novo conectivo um-ário $\sim$ (denominado “negação forte paraconsistente”) tal que $\sim T_i = F$, $\sim T = F$ e $\sim F = T$. O comportamento de $\sim$, $\wedge$ e $\vee$ pode ser resumido nas seguintes tabelas:

	T	T_i	F
$\sim$	F	F	T

$\vee$	T	T_j	F
T	T	T	T
T_i	T	T	T
F	T	T	F

$\wedge$	T	T_j	F
T	T	T	F
T_i	T	T	F
F	F	F	F

com $1 \leq i, j \leq n$.

O problema em relação a $\sim$, $\wedge$ e $\vee$ consiste em saber se eles podem ser obtidos a partir de $\neg$ e $\rightarrow$. Com efeito (cf.[Que98]), vemos que se definimos os seguintes conectivos lógicos:

$$\sim\alpha := \neg(\neg\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$\alpha \wedge \beta := \neg(\alpha \rightarrow \sim\beta)$$

$$\alpha \vee \beta := \sim\alpha \rightarrow \beta$$

então as operações em $\mathcal{T}$ associadas a esses conectivos verificam as condições das tabelas precedentes.

Um outro conectivo usual definido a partir de $\rightarrow$ e $\neg$ é o conectivo um-ário ($^\circ$) de “bom comportamento” (em relação ao princípio de não contradição). A função associada a este conectivo tem a propriedade de atribuir o valor T àquelas fórmulas α em que princípio de não contradição é válido. Sua tabela é dada por

	T	T_i	F
$^\circ$	T	F	T

 para $1 \leq i \leq n$.

e pode ser definida a partir de $\rightarrow$ e de $\neg$ como:

$$\alpha^\circ := \neg(\alpha \wedge \neg\alpha), \text{ tendo particular importância na construção de axiomáticas para } P^n.$$

É conveniente destacar que, em relação ao aspecto sintático dos cálculos da hierarquia $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, provaremos que pode ser fornecida uma axiomática *geral* para todos os cálculos de tal hierarquia. Devido ao fato de a problemática da axiomática ser lateral em relação às Semânticas de Sociedades, tal resultado será provado no Apêndice final desta dissertação.

Observações 3.2.1

Segundo a definição das funções $\neg$ e $\rightarrow$ é conveniente destacar certos fatos a serem utilizados na seção seguinte. Estes são:

- Todo valor de $\mathcal{T}$, após n aplicações da operação $\neg$, somente pode ser T ou F .
- Para toda fórmula α , se $v(\alpha) = T_i$, então $\underbrace{\neg\neg\cdots\neg}_{j \text{ vezes}}\alpha = T_{i-j}$ quando $j \leq i$
- Para toda fórmula α vale que, se $v(\alpha) \subseteq \{T, F\}$, então vale o seguinte: $\underbrace{\neg\neg\cdots\neg}_{k \text{ vezes}}\alpha = v(\alpha)$ se e somente se k é um número par. E, se k é um número ímpar, $v(\alpha) = \sim v(\underbrace{\neg\neg\cdots\neg}_{k \text{ vezes}}\alpha)$. $\square$

3.3 Semântica de Sociedades para $\{P^n\}_{n \in N}$

Lembrando que nos dois primeiros capítulos definimos uma Semântica de Sociedades para os cálculos P^1 e P^2 , é o nosso objetivo definir de forma geral uma tal Semântica de Sociedades para os diversos cálculos P^n . Para poder defini-la com maior nível de formalização introduzimos a notação seguinte:

Notação 3.3.1

Denotamos por $\neg^k p$ a fórmula $\underbrace{\neg\neg\cdots\neg}_{k \text{ vezes}}p$, onde p é fórmula atômica; $\neg^0 p$ é p . Além

disso, definimos a função $\mathbf{Par}(n, k)$ para todo par de números naturais n e k como:

$\mathbf{Par}(n, k) = 1$ se e somente se $n - k$ é divisível por 2 (i.e: se tanto n como k são pares, ou tanto n como k são ímpares). $\mathbf{Par}(n, k) = 0$ caso contrário.

Denotamos também por $\mathcal{D}'$ ao conjunto $\mathcal{D} - \{T\}$, isto é: $\mathcal{D}' = \{T_1, \dots, T_n\}$ para cada cálculo P^n . $\square$

Agora temos condições suficientes para caracterizar Semânticas de Sociedades para todos os cálculos P^n .

Definição 3.3.2 Para cada $n \geq 0$, definimos a Semântica de Sociedades S^+_{n+1} (veja Definição 1.3.3) como:

$S^+_{n+1} = \langle P^n, W \rangle$, em que:

$W = \langle \mathcal{F}_i, S_i \rangle_{0 \leq i \leq n+1}$,

$\mathcal{F}_i = \{\neg^i p : p \in \mathcal{V}\}$

$S_i = \begin{cases} \{R \in \wp(\mathbf{T}) : R \cap (K^1_i \cup K^2_i) \neq \emptyset\} & \text{se } i \text{ é par} \\ \{R \in \wp(\mathbf{T}) : R \cap (K^1_i \cup K^2_i \cup \{F\}) \neq \emptyset\} & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$

onde:

$K^1_i = \{T_j : j < i \text{ e } \mathbf{Par}(i, j) = 1\}$

$K^2_i = \{T_r : i \leq r \leq n\}$

para $1 \leq i \leq n+1$. $\square$

Observação 3.3.3

Na definição precedente, os conjuntos S_i podem ser expressados da seguinte forma, mais explícita (embora mais inconveniente para as provas dos próximos resultados referentes a Semântica de Sociedades):

$S_0 = \{R : R \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\};$

$S_1 = \{R : R \cap (\{F\} \cup \mathcal{D}') \neq \emptyset\};$ e finalmente

$S_i = \begin{cases} \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \cap \{T, T_2, T_4, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots, T_n\} \neq \emptyset\} & \text{se } i \text{ é par} \\ \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \cap \{F, T_1, T_3, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots, T_n\} \neq \emptyset\} & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$

para $2 \leq i \leq n+1$. $\square$

Proposição 3.3.4 *Se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, então, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$.*

Demonstração: A prova desta proposição será por indução na complexidade de α .

CASO 1: Suponha que α é atômica. Logo, se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, temos que $R_\alpha \notin S_0$. Isto é, $R_\alpha = \{F\} \subseteq \mathcal{D}' \cup \{F\}$. Logo, $R_\alpha \in S_1$, e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$.

CASO 2: α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$. Logo $\neg\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$, e portanto $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = -(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = -0 = 1$.

CASO 3: α é da forma $\neg\beta$. Dividimos a prova em três subcasos:

3.1) Seja α da forma $\neg^m\gamma$, com γ atômica, $1 \leq m \leq n+1$. Se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^m\gamma) = 0$, então $R_\gamma \notin S_m$. Portanto, temos as seguintes possibilidades:

(*) $R_\gamma \cap (\{T_j : j < m; \mathbf{Par}(m, j) = 1\} \cup \{T_k : m \leq k\}) = \emptyset$ (com m par), ou

(**) $R_\gamma \cap (\{T_j : j < m; \mathbf{Par}(m, j) = 1\} \cup \{T_k : m \leq k\} \cup \{F\}) = \emptyset$ (com m ímpar).

Se valer (*), então $R_\gamma \subseteq \{F\} \cup \{T_j : j < m, \mathbf{Par}(j, m) = 0\}$, sendo m par. Logo $R_\gamma \in S_{m+1}$, e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{m+1}\gamma) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$.

Se valer (**), por considerações análogas, temos que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$.

3.2) Seja α da forma $\neg^m\gamma$, com γ atômica, $n+1 < m$. Logo $\alpha \notin \mathcal{F}_i$, para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Portanto, se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, vale que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$, pela Definição 1.3.3.

3.3) Seja α da forma $\neg^k\beta$, sendo $1 \leq k$ e β uma implicação. Logo, $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i , e assim, por considerações análogas às do subcaso 3.2), se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, então $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$. $\square$

Proposição 3.3.5 *Se $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, então $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^2\alpha) = 0$.*

Demonstração:

CASO A: Se $\alpha = \neg^k\gamma$, com γ atômica, e $0 \leq k \leq n-1$. Para este caso é suficiente considerar a construção dos conjuntos K^1_i , e K^2_i .

CASO B: $\alpha \in \mathcal{F}_n$. Logo, Pela Proposição 3.3.4, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$. E, como $\neg\neg\alpha$ não pertence a nenhum $\mathcal{F}_i$, pela definição de aceitação para fórmulas complexas, vale que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 0$.

CASO C: Suponha $\alpha \in \mathcal{F}_{n+1}$. Logo, $\neg\alpha$ e $\neg\neg\alpha$ não pertencem a nenhum conjunto

$\mathcal{F}_i$. Pela Definição 3.5.1 para fórmulas complexas, vale que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 0$.

CASO D: $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Logo, α e $\neg\neg\alpha$ são fórmulas complexas, e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$. $\square$

Lema 3.3.6 : *Para toda Sociedade $\mathcal{A}$ de Agentes P^n existe uma valoração $v_{\mathcal{A}}$ do cálculo P^{n+1} tal que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ para toda fórmula α .*

Demonstração: Dada a sociedade $\mathcal{A}$, construímos a valoração $v_{\mathcal{A}}$ da maneira seguinte: para toda fórmula atômica p , definimos:

- $v_{\mathcal{A}}(p) = F$ sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(p) = 0$
- $v_{\mathcal{A}}(p) = T (=T_0)$ sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(p) = 1$, mas $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0$
- $v_{\mathcal{A}}(p) = T_i$ sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^j p) = 1$, para $0 \leq j \leq i$, mas $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{i+1} p) = 0$, com $1 \leq i \leq n$.
- $v_{\mathcal{A}}(p) = T_{n+1}$ sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^j p) = 1$, para $0 \leq j \leq n+1$.

Para toda fórmula que não seja atômica, definimos o valor de $v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ segundo as tabelas de verdade de P^{n+1} . Provaremos por indução na complexidade da fórmula α que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$.

CASO A: α é uma fórmula atômica: Trivial, da definição de $v_{\mathcal{A}}$.

CASO B: α é da forma $(\beta \rightarrow \gamma)$. Logo, $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$, e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = \neg(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$, sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$, ou $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$, se e somente se (Hipótese de Indução) $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ ou $v_{\mathcal{A}}(\gamma) \in \mathcal{D}$, se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$).

CASO C: α é da forma $\neg\beta$. Dividimos a prova nos seguintes sub-casos:

Subcaso C.1: Suponha que α é da forma $\neg^k\gamma$, sendo γ uma fórmula atômica, e $1 \leq k \leq n+1$. Logo, provaremos o enunciado por dupla implicação:

I) Suponhamos que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$. Logo, as seguintes possibilidades podem acontecer:

(*) $v(\alpha) = T$, ou (**) $v(\alpha) = T_j$, com $1 \leq j \leq n+1-k$ ²

Se valer (*), então temos duas possibilidades:

a): $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T$ (e, portanto, k é par), e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\gamma) = 0$. Da Proposição 3.3.5 $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{k-1}\gamma) = 0$ (pois $\mathbf{Par}(k-1, 1) = 1$), e agora pela Proposição 3.3.4 vale $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

b): $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T_m$, com $\mathbf{Par}(k, m) = 1$ e $m < k$. Logo, pela definição de $v_{\mathcal{A}}$, temos que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{m+1}\gamma) = 0$, e portanto vale que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{k-1}\gamma) = 0$, da Proposição 3.3.5. Logo, pela Proposição 3.3.4, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

c): $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T_m$, com $m = k$. Logo $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ trivialmente, da definição de $v_{\mathcal{A}}$. Se valer (**), então, $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T_{j+k}$, com $j+k \leq n+1$ (ver Observações 3.2.1). Logo, da definição de $v_{\mathcal{A}}$, temos que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\gamma) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg\gamma) = \dots = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{j+k}\gamma) = 1$. E, portanto, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

II) Suponhamos que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\alpha) = (S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = 1$. Logo $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T_m$ com $k \leq m \leq n+1$ (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$). E como $v_{\mathcal{A}}$ é uma valoração do cálculo P^{n+1} , $v_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = T_{m-k} \in \mathcal{D}$.

Subcaso C.2: α é da forma $\neg^k\gamma$, com $n+1 < k$. Logo, $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Temos assim que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = 1$ sse $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}}(\neg^{k-1}\gamma) = 0$, sse $v_{\mathcal{A}}(\neg^{k-1}\gamma) = F$, sse $v_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = T$.

Subcaso C.3: α é da forma $\neg^k(\beta \rightarrow \gamma)$. Logo $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i , e logo o resultado procurado é válido por considerações análogas às do Subcaso C.2. Isto conclui a demonstração. $\square$

Lema 3.3.7 *Dada uma valoração v do cálculo P^{n+1} existe uma sociedade $\mathcal{A}_v$ de agentes P^n tal que: $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha) \in \mathcal{D}$.*

Demonstração:

Seja v uma valoração do cálculo P^{n+1} e consideremos os conjuntos X_k , ($0 \leq k \leq n+2$)

²Com efeito: se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T_j$, com $1 \leq j$, então $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T_r$, com $1 \leq r \leq n+1$. Se valer $k \geq r$, então $v_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = T \neq T_j$, portanto necessariamente temos que $k < r$ e assim $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = v_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = T_{r-k}$, (sendo portanto $j = r - k$) com $1 \leq r - k \leq n+1 - k$.

(lembrando que $T_0 = T$):

$$\begin{aligned} X_k &= \{p \in \mathcal{V} : v(p) = T_k\}, \text{ com } 0 \leq k \leq n+1; \\ X_{n+2} &= \{p \in \mathcal{V} : v(p) = F\}. \end{aligned}$$

Como sempre, $\mathcal{V}$ denota o conjunto das fórmulas atômicas de $\mathbb{L}$. Observe que, para toda $p \in \mathcal{V}$, existe um único $0 \leq k \leq n+2$ tal que $p \in X_k$. Construiremos agora uma sociedade

$$\mathcal{A}_v = \{Ag_0, Ag_1, \dots, Ag_n, Ag_{n+2}\}$$

com $n+2$ agentes P^n , e onde os agentes são definidos para cada fórmula atômica p por:

$$Ag_i(p) = \begin{cases} F & \text{se } p \in X_{n+2} \\ T_j & \text{se } p \in X_j \ (0 \leq j \leq n, \ j \neq i) \\ T_i & \text{se } p \in X_i \cup X_{n+1} \end{cases}$$

quando $0 \leq i \leq n$, e

$$Ag_{n+2}(p) = \begin{cases} F & \text{se } p \in X_{n+1} \cup X_{n+2} \\ T_j & \text{se } p \in X_j \ (0 \leq j \leq n) \end{cases}$$

Para fórmulas α não atômicas estendemos os valores de $Ag_i(\alpha)$ homomorficamente, segundo as tabelas de verdade de P^n .

Com esta definição pode ser demonstrado, por indução na complexidade da fórmula α , que

$$(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1 \text{ se e somente se } v(\alpha) \in \mathcal{D}$$

CASO A: α é uma fórmula atômica. Logo, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 0$ se e somente se $R_\alpha = \{F\}$, se e somente se para todo $Ag_i \in \mathcal{A}$ vale que $Ag_i(\alpha) = F$, sse $\alpha \in X_{n+2}$, se e somente se $v(\alpha) = F$.

CASO B: Seja α da forma $\beta \rightarrow \gamma$. A demonstração é análoga à feita para o mesmo subcaso no lema anterior.

CASO C: Seja α da forma $\neg\beta$. Logo, como no lema anterior, dividimos a prova nos seguintes subcasos:

Subcaso C.1: Seja α da forma $\neg\beta$, com $\alpha \in \mathcal{F}_i$, para algum i . Logo, α é da forma $\neg^k\gamma$, com $1 \leq k \leq n+1$. Logo, provaremos o enunciado do lema por implicação dupla:

C.1.I): Suponhamos que $v(\alpha) = v(\neg^k\gamma) \in \mathcal{D}$. Logo, como v é valoração de P^{n+1} , podem acontecer os seguintes fatos:

- a) $v(\gamma) = T_r$, sendo $k \leq r \leq n+1$, pelas Observações 3.2.1
- b) $v(\gamma) = T_j$, sendo $j < k$, e $\mathbf{Par}(k, j) = 1$.
- c) $v(\gamma) = F$.

Se valer a), consideremos agora: a.1) Se $r \leq n$, então $Ag_i(\gamma) = T_r$, para todo i . Logo $R_\gamma \subseteq K^2_r$. E como $k \leq r$ vale que $R_\gamma \in K^2_k$ ³. E assim $R_\gamma \subseteq S_k$ e portanto $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$

a.2) Se $r = n+1$. Logo, como $v(\gamma) = T_r$, pela construção de $\mathcal{A}_v$, vale que $Ag_0(\gamma) = T$, e $Ag_{n+1}(\gamma) = F$. Logo, $R_\gamma \cap \{T_j : j \leq k \text{ e } \mathbf{Par}(k, j) = 1\} \neq \emptyset$ quando k é par (por A_0), mas também $R_\gamma \cap \{F\} \neq \emptyset$ (por A_{n+2}) quando k é ímpar. Logo, vale que $R_\gamma \in S_k$ independentemente da paridade de k , e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

Se valer b), então $Ag_i(\gamma) = T_j$ para todo i , pela definição de $\mathcal{A}_v$. Isto é, $R_\gamma = \{T_j\}$. E como $\mathbf{Par}(k, j) = 1$, e $j < k$ temos que $R_\gamma \in S_k$ sempre, segundo a caracterização dos conjuntos S_i da Definição 3.3.2. Logo, $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

Se valer c) notemos primeiramente que k deve ser ímpar, pelas características de v . Por outro lado, $Ag_i(\gamma) = F$ sempre (pela definição de $\mathcal{A}_v$), e assim $R_\gamma = \{F\} \in S_j$ para todo j ímpar, da definição dos conjuntos S_i . Em particular, $R_\gamma \in S_k$, e assim $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

C.1.II): Suponhamos agora que $(S^+_{n+1})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$. Logo $R_\gamma \in S_k$, com $1 \leq k \leq n+1$. Consideremos as seguintes possibilidades para k : a). Se k é par, então existe um agente Ag_i tal que $Ag_i(\gamma) \in \{T, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots, T_n\}$ (ver Observação 3.3.3). Suponhamos que:

a.1): $\gamma \in X_0 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{k-1}$. Logo $v(\gamma) = T_j$, com $0 \leq j < k$, e $\mathbf{Par}(k, j) = 1$. Logo,

³É fácil ver da definição dos conjuntos K^2_i que, se $s \leq m$, então $K^2_m \subseteq K^2_s$.

$v(\neg^j \gamma) = T$, e assim $v(\neg^k \gamma) = T$.

a.2) Se $\gamma \in X_k \cup X_{k+1} \cup \dots \cup X_{n+1}$. Logo, $v(\gamma) = T_r$ com $k \leq r$. Logo, sempre vale que $v(\neg^k \gamma) \in \mathcal{D}$.

b). Suponhamos agora que k é ímpar. Logo, $R_\gamma \cap \{F, T_1, T_3, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots, T_n\} \neq \emptyset$. Assim, existe $Ag_i \in \mathcal{A}$ tal que $Ag_i(\gamma) \in \{F, T_1, T_3, \dots, T_k, \dots, T_n\}$. Consideremos agora as seguintes possibilidades:

b.1 $Ag_i(\gamma) \in \{T_j : j < k \text{ e } \mathbf{Par}(k, j) = 1\}$.

b.2 Se $Ag_i(\gamma) \in \{T_r : k \leq r \leq n\}$.

b.3 $Ag_i(\gamma) = F$.

Se valer b.1 e b.2, repetindo a prova feita para os subcasos a.1 e a.2 respectivamente, temos que $v(\alpha) \in \mathcal{D}$. Se valer b.3, temos que (*) $v(\gamma) = F$ ou (**) $v(\gamma) = T_{n+1}$, e nos dois casos vale que $v(\alpha) = v(\neg^k \gamma) \in \mathcal{D}$, considerando para (*) que k é ímpar, e para (**) que $n + 1 - k \geq 0$.

Subcaso C.2: α é da forma $\neg^k \beta$, com $\alpha \notin \mathcal{F}_i$, para todo $1 \leq i \leq n + 1$. Este subcaso é demonstrado de forma similar à do lema anterior. $\square$

Teorema 3.3.8 : *A lógica da Semântica S_{n+1}^- é P^{n+1} , para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: : Imediata, como consequência dos Lemas 3.3.6 e 3.3.7. $\square$.

Notar que esta construção constitui uma generalização dos Teoremas 1.2.12 e 2.1.9 mencionados nos Capítulos 1 e 2 respectivamente, mostrando assim que toda sociedade de Agentes P^n pode ser simulada por uma sociedade com **no máximo** $n + 2$ agentes P^n .

Exemplo 3.3.9

Para compreender melhor a construção e motivação das definições implícitas nos resultados provados é conveniente considerar o seguinte exemplo, onde construiremos uma Semântica de Sociedades S_5^+ a partir de agentes P^4 . Dita semântica terá a mesma lógica que P^5 :

A): Definição de S^+_5 :

S^+_5 é definida por: $S^+_5 = \langle P^4, W \rangle$ onde:

$W = \{(\mathcal{F}_i, S_i)\}_{0 \leq i \leq 5}$ tal que: $\mathcal{F}_i = \{\neg^i p : p \text{ é atômica}\}$ e:

$S_i = \{R : R \cap K_i \neq \emptyset\}$ (para cada $i \leq 5$) sendo os conjuntos K_i os seguintes:

$K_0 = \mathcal{D}$, $K_1 = \{F, T_1, T_2, T_3, T_4\} = \mathcal{D}' \cup \{F\}$, $K_2 = \{T, T_2, T_3, T_4\}$, $K_3 = \{F, T_1, T_3, T_4\}$,
 $K_4 = \{T, T_2, T_4\}$, $K_5 = \{F, T_1, T_3\}$.

As motivações por trás da definição dos conjuntos S_i são as seguintes: em primeiro lugar, notar que os conjuntos K_i são formados por aqueles valores de $\mathcal{T}_4$ tais que, quando substituem as fórmulas atômicas nos conjuntos $\mathcal{F}_i$ e são negados i vezes, o resultado produz um valor designado. Assim por exemplo, na definição de S_2 utilizamos o conjunto $K_2 = \{T, T_2, T_3, T_4\}$ pois $\neg^2 T = T$; $\neg^2 T_2 = T$; $\neg^2 T_3 = T_1$ e por último $\neg^2 T_4 = T_2$, todos valores designados de P^4 .

Por outro lado, notar que solicitamos que os conjuntos $R \in S_i$ sejam tais que $R \cap K_i \neq \emptyset$. Esta condição é permissiva o suficiente para possibilitar que, mesmo com $i \neq j$, possa acontecer que $S^+_5(\neg^i p) = S^+_5(\neg^j p) = 1$, estabelecendo assim o caráter paraconsistente de S^+_5 .

B): Definição de $v_{\mathcal{A}}$ em P^5 a partir de uma sociedade $\mathcal{A}$ de agentes P^4 :

Definimos $v_{\mathcal{A}}$ como segue (aqui $p \in \mathcal{V}$):

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F \text{ sse } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(p) = 0$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T \text{ sse } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(p) = 1 \text{ e } (S^+_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0$$

$$v_{\mathcal{A}}(\neg p) = T_1 \text{ sse } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(p) = 1, (S^+_5)_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1 \text{ e } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(\neg^2 p) = 0$$

$\vdots$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T_4 \text{ sse } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(p) = \dots = (S^+_5)_{\mathcal{A}}(\neg^4 p) = 1 \text{ e } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(\neg^5 p) = 0$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T_5 \text{ sse } (S^+_5)_{\mathcal{A}}(p) = \dots = (S^+_5)_{\mathcal{A}}(\neg^5 p) = 1.$$

Notar que o “novo” valor de verdade T_4 aparece desde que podemos aceitar *todas* as fórmulas $\neg^i p$, com $i \leq 4$, segundo a construção feita em A).

C): Definição de uma sociedade $\mathcal{A}_v$ de agentes P^4 a partir de uma valoração P^5 :

Dada uma valoração v de P^5 , a sociedade $\mathcal{A}_v$ é $\mathcal{A}_v = \{Ag_0, Ag_1, Ag_2, Ag_3, Ag_4, Ag_6\}$ (perceber que “apagamos” o agente Ag_5 correspondente a T_5), onde:

$$Ag_0(p) = T \text{ se } p \in v^{-1}\{T_0, T_5\}$$

$$Ag_0(p) = T_i \text{ se } p \in v^{-1}\{T_i\} \text{ com } 1 \leq i \leq 4$$

$$Ag_0(p) = F \text{ se } p \in v^{-1}\{F\}.$$

Os outros agentes Ag_j são definidos segundo a mesma idéia (aplicada em Ag_0) de tornar irrelevante o valor T_5 para a aceitação em $\mathcal{A}_v$ das diferentes fórmulas da linguagem de P^4 . $\square$

3.4 A hierarquia $\{I^n\}_{n \in N}$ de cálculos paracompletos

A motivação central para a construção do cálculo paracompleto I^1 foi definir um sistema dual a P^1 no seguinte sentido: o princípio da Lógica Clássica que não devia valer necessariamente em I^1 era o princípio do terceiro excluído: $\neg\alpha \vee \alpha$. Por outra parte, conservava-se a idéia (presente em P^1) de que toda fórmula não atômica validaria tal princípio. O cálculo I^1 foi definido em [SC95], e foi provado também que, da mesma forma que em P^1 , I^1 era maximal em relação a CPC .

Todas estas propriedades que relacionam a P^1 e I^1 podem ser estendidas de forma natural, construindo uma hierarquia $\{I^n\}_{n \in N}$, dual à hierarquia $\{P^n\}_{n \in N}$. Para tal fim, o mais natural é caracterizar os diferentes cálculos I^n de forma matricial. Com efeito, já sabemos que I^1 admite semântica matricial:

$$I^1 = \langle \{T, F_1, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T\} \rangle$$

onde as funções $\rightarrow$ e $\neg$ são definidas como no primeiro capítulo. ⁴

⁴Semânticas algébricas alternativas para I^1 podem-se encontrar em [Fei0?] e no próprio [SC95].

Por outro lado, podemos imaginar uma hierarquia de lógicas para completas verificando ⁵:

1) $I^0 = CPC$.

2) Nos cálculos da hierarquia I^n o princípio de terceiro excluído não deve valer de forma geral.

3) Toda fórmula válida de I^m também é fórmula válida de I^n , quando n é menor que m . A recíproca não é válida.

Aqui, de forma análoga à hierarquia P^n , consideramos dignas de estudo as propriedades de maximalidade dos cálculos de esta possível hierarquia de lógicas para completas, a qual definiremos a seguir.

Para construir uma hierarquia que verifique o antes estipulado, definimos a matriz associada a cada cálculo I^n por:

$I^n = \langle \{T, F_1, \dots, F_n, F\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{T\} \rangle$ onde $\rightarrow$ e $\neg$ são definidos por ⁶:

	T	F_i	F
$\neg$	F	F_{i-1}	T

$\rightarrow$	T	F_j	F
T	T	F	F
F_i	T	T	T
F	T	T	T

com $1 \leq i, j \leq n$.

Notar que em I^n podemos definir os conectivos secundários – (negação forte para completa), $\wedge$, $\vee$ e $(*)$ (bom comportamento em relação à lei do terceiro excluído) cujas funções associadas têm as seguintes tabelas indicando seus valores possíveis:

⁵Em [SC95] foi sugerida por primeira vez a construção da hierarquia I^n . Porém, a matriz de I^2 foi definida de forma diferente à de [CLM99], base da hierarquia definida nesta dissertação.

⁶Na hierarquia I^n , $F_0 := F$.

	T	F_i	F
$-$	F	T	T

	T	F_i	F
$*$	T	F	T

$\vee$	T	F_j	F
T	T	T	T
F_i	T	F	F
F	T	F	F

$\wedge$	T	F_j	F
T	T	F	F
F_i	F	F	F
F	F	F	F

para $1 \leq i, j \leq n$.

Com efeito, definimos:

$$\neg \alpha := \alpha \rightarrow \neg \alpha$$

$$\alpha \vee \beta := \neg \alpha \rightarrow \beta$$

$$\alpha \wedge \beta := \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$$

$$\alpha^* := \neg \alpha \vee \alpha$$

e é imediato que as funções associadas a esses conectivos têm o seu comportamento representado pelas tabelas precedentes.

Observações 3.4.1

Algumas das propriedades das matrizes de I^n são:

- Todo valor de $\mathcal{T}$, após de n aplicações de $\neg$, muda para T ou F .
- Para toda fórmula α , se $v(\alpha) = F_i$, então $v(\neg^j \alpha) = F_{i-j}$ quando $j \leq i$
- Para toda fórmula α , se $v(\alpha) = T$, ou $v(\alpha) = F$, então vale o seguinte: $v(\neg^k \alpha) = v(\alpha)$ se e somente se k é um número par.
- Para toda fórmula α , se $v(\neg^n \alpha) = T$, então $v(\alpha) \neq F_n$ (fato a ser utilizado na próxima seção).
- Se $v(\alpha) = T$, com $\alpha = \neg^k \gamma$, então $v(\gamma) = F_p$, com $\mathbf{Par}(p, k) = 0$. $\square$

Finalizaremos esta seção ressaltando que os cálculos da hierarquia $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ têm uma axiomática de tipo Hilbert (vide o Apêndice no final desta dissertação) a qual é correta e completa para cada cálculo da hierarquia. Dada tal axiomática será possível estudar de forma mais profunda a relação entre os cálculos I^n e I^{n+1} em relação à maximalidade, mas esta ainda é uma questão sem resposta, e não será tratada nesta dissertação.

3.5 Uma Semântica de Sociedades para $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Lembrando que nos dois primeiros capítulos definimos uma Semântica de Sociedades para os cálculos I^1 e I^2 , é o nosso objetivo definir de forma geral uma tal Semântica de Sociedades para os diversos cálculos I^n . Para poder defini-la com maior nível de formalização introduzimos a notação seguinte:

Definição 3.5.1 *Para cada $n \geq 0$, definimos a Semântica de Sociedades S_{n+1}^- (veja Definição 1.3.3) como:*

$S_{n+1}^- = \langle I^n, W \rangle$, em que:

$W = \langle \mathcal{F}_i, S_i \rangle_{0 \leq i \leq n+1}$,

$\mathcal{F}_i = \{\neg^i p : p \in \mathcal{V}\}$, e os conjuntos S_i estão definidos por:

$$S_i = \begin{cases} \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq M_i\} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq M_i \cup \{T\}\} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

com $M_i = \{F_j : j < i, \mathbf{Par}(j, i) = 0\}$

para $0 \leq i \leq n+1$. $\square$

Observação 3.5.2

Uma forma mais explícita de definir os conjuntos S_i é a seguinte:

$$S_0 = \{\{T\}\};$$

$$S_1 = \{\{F\}\}; \text{ e finalmente}$$

$$S_i = \begin{cases} \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq \{T, F_1, F_3, \dots, F_{i-1}\}\} & \text{se } i \text{ é par} \\ \{R \in \wp(\mathcal{T}) : R \subseteq \{F, F_2, F_4, \dots, F_{i-1}\}\} & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

para $2 \leq i \leq n+1$. $\square$

Proposição 3.5.3 *Seja k tal que $0 \leq k \leq n-1$. Logo, se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k \alpha) = 1$ com α atômica, então $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{k+2} \alpha) = 1$.*

Demonstração: Trivial, considerando que $\neg^k \alpha \in \mathcal{F}_i$, $\neg^{k+2} \alpha \in \mathcal{F}_{i+2}$ e que, pela Definição 3.5.1, $S_k \subseteq S_{k+2}$, quando $0 \leq k \leq n-1$. $\square$

Proposição 3.5.4 : *Sejam $\alpha = \neg^k \gamma$, e $\beta = \neg^m \gamma$, com γ qualquer fórmula, tal que $\text{Par}(k, m) = 0$. Logo, se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$.*

Demonstração: Notemos primeiramente que o caso em que $\gamma \neq \neg^i p$, com $1 \leq i \leq n+1$ e p atômica é trivial, pois α, β seriam assim fórmulas tais que não pertenceriam a nenhum $\mathcal{F}_i$, com $0 \leq i \leq n+1$. Consideramos, portanto, que $\gamma = \neg^i p$, com $0 \leq i \leq n+1$. Sem perda de generalidade, podemos provar o resultado para $i = 0$. Isto é, para γ atômica.

PARTE A: Suponhamos que $m \leq k$. Logo, dividimos a prova nos seguintes casos:
CASO 1: $n+1 < m$. Logo $\alpha \notin \mathcal{F}_i$, $\beta \notin \mathcal{F}_i$, para todo $0 \leq i \leq n+1$. Logo, pela definição de (S_{n+1}^-) para fórmulas que não estejam em nenhum $\mathcal{F}_i$, verifica-se o enunciado.

CASO 2: $k \leq n+1$. Logo, $\alpha \in \mathcal{F}_k$, para algum $0 \leq k \leq n+1$, e $\beta \in \mathcal{F}_m$ para algum $0 \leq m \leq n+1$. E, pela construção dos conjuntos S_i , é obvio que, se $R_\gamma \in S_k$,

nunca pode acontecer que $R_\gamma \in S_m$, pois $\mathbf{Par}(k, m) = 0$.

CASO 3: Quando $m \leq n + 1 < k$. Consideremos agora os seguintes subcasos:

SUBCASO 3.1: $\mathbf{Par}(k, n + 1) = 1$. Logo, se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ então deve valer (definição de aceitação para fórmulas complexas) que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{n+1}\gamma) = 1$. E como $\mathbf{Par}(m, n + 1) = 0$, então, pelo CASO 1, temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$.

SUBCASO 3.2: $\mathbf{Par}(k, n + 1) = 0$. Então, pela definição de aceitação para fórmulas complexas, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{n+1}\gamma) = 0$. E agora, pela forma contrapositiva da Proposição 3.5.3, temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$.

PARTE B: $k < m$.

Os casos quando $m \leq n + 1$ e quando $n + 1 < k$ são análogos aos casos 1 e 2 da Parte A. Provemos então que o enunciado vale quando $k \leq n + 1 < m$.

SUBCASO 1: Se $\mathbf{Par}(k, n + 1) = 1$. Pela Proposição 3.5.3, temos que, se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = 1$ então $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{n+1}\gamma) = 1$, e portanto, como β é uma fórmula complexa tal que $\mathbf{Par}(n + 1, m) = 0$, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^m\gamma) = (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$.

SUBCASO 2: Se $\mathbf{Par}(k, n + 1) = 0$. Logo, (pela construção dos conjuntos S_i na Definição 3.5.1), se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{n+1}\gamma) = 0$. E como $\beta = \neg^m\gamma$ é uma fórmula que não pertence a nenhum $\mathcal{F}_i$, com $0 \leq i \leq n + 1$, e $\mathbf{Par}(n + 1, m) = 1$, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k\gamma) = 0$, e isso conclui a demonstração. $\square$

Proposição 3.5.5 *Para toda α , se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 1$.*

Demonstração:

CASO A: Se $\alpha = \neg^k\gamma$, com γ atômica, e $0 \leq k \leq n + 1$. Este caso é consequência imediata da Proposição 3.5.3.

CASO B: $\alpha \in \mathcal{F}_n$. Logo, pela Proposição 3.5.4, $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 0$. E, como $\neg\neg\alpha$ não pertence a nenhum $\mathcal{F}_i$, pela definição de aceitação para fórmulas complexas, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 1$.

CASO C: Suponha $\alpha \in \mathcal{F}_{n+1}$. Logo, $\neg\alpha$ e $\neg\neg\alpha$ não pertencem a $\mathcal{F}_i$, para todo con-

junto $\mathcal{F}_i$. Pela Definição 3.5.1 para fórmulas complexas, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 1$.

CASO D: $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Logo, α e $\neg\neg\alpha$ são fórmulas complexas, e assim $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 1$. Este último caso finaliza a demonstração. $\square$

Proposição 3.5.6 *Se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k\alpha) = 1$ se e somente se k é um número par.*

Demonstração: Suponhamos que k é par. Logo, pela Proposição 3.5.5 e **Par**($k, 0$) = 1, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k\alpha) = 1$. Por outro lado, se k é ímpar, pela Proposição 3.5.4 vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^k\alpha) = 0$. $\square$

Com as proposições anteriores podemos agora demonstrar que S_{n+1}^- é uma Semântica de Sociedades para o cálculo I^{n+1} .

Lema 3.5.7 *Para toda Sociedade $\mathcal{A}$ de Agentes I^n existe uma valoração $v_{\mathcal{A}}$ do cálculo I^{n+1} tal que para toda fórmula α vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.*

Demonstração: Dada a sociedade $\mathcal{A}$, construímos a valoração $v_{\mathcal{A}}$ da maneira seguinte: para toda fórmula atômica p , definimos

- $v_{\mathcal{A}}(p) = T$ sse $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(p) = 1$
- $v_{\mathcal{A}}(p) = F$ sse $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(p) = 0$, mas $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$
- $v_{\mathcal{A}}(p) = F_i$ sse $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{i+1}p) = 1$, mas $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^j p) = 0$, para $0 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$
- $v_{\mathcal{A}}(p) = F_{n+1}$ sse $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^j p) = 0$, para $0 \leq j \leq n+1$.

Para toda fórmula α que não seja atômica, definimos o valor de $v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ segundo as regras do cálculo I^{n+1} . Provaremos por indução na complexidade da fórmula α que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.

CASO A: α é uma fórmula atômica. Trivial, da definição de $v_{\mathcal{A}}$.

CASO B: α é da forma $(\beta \rightarrow \gamma)$. Logo, $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n+1$, e assim $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = -(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$, sse $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$, ou $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$, se e somente se (Hipótese de Indução) $v_{\mathcal{A}}(\beta) \neq T$ ou $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T$, se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\beta \rightarrow \gamma) = 1$ (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$).

CASO C: α é da forma $\neg\beta$. Dividimos a prova nos seguintes sub-casos:

Subcaso C.1: $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para nenhum i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Pela definição de aceitação para fórmulas complexas, $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ se e somente se $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$, se e somente se (Hipótese de Indução) $v_{\mathcal{A}}(\beta) \neq T$. Se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ (devido ao fato que β é uma fórmula complexa ou $\beta \in \mathcal{F}_{n+1}$), ⁷ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$).

Subcaso C.2: Quando $\alpha \in \mathcal{F}_i$, com $1 \leq i \leq n+1$. Logo, α é da forma $\neg^i\gamma$, com γ atômica. Provaremos por implicação dupla que:

$(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.

C.2.I: Suponhamos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^i\gamma) = 1$. Pela Proposição 3.5.4, $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{i-1}\gamma) = 0$. Logo, o conjunto $K = \{t \in \mathbb{N} : t \leq i, \text{ e } (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{t-1}\gamma) = 0, \text{ mas } (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^t\gamma) = 1\} \neq \emptyset$. Seja t_0 o primeiro elemento de K . Pela definição de $v_{\mathcal{A}}$, $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = F_{t_0-1}$. Assim, $v_{\mathcal{A}}(\neg^{t_0}\gamma) = T$. Por outro lado, aplicando a Proposição 3.5.6 com $\alpha' = \neg^{t_0}\gamma$, e $k = i - t_0$ obtemos que k é par, e portanto $\mathbf{Par}(t_0, i) = 1$. Logo, $v_{\mathcal{A}}(\neg^{t_0}\gamma) = v_{\mathcal{A}}(\neg^i\gamma) = v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, pelas propriedades de $v_{\mathcal{A}}$.

⁷Lembrar que, em qualquer cálculo I^t , após t negações, o único valor não designado que pode ter uma fórmula é o próprio valor F .

C.2.II: Suponhamos que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$. Logo, dado que $v_{\mathcal{A}}$ é uma valoração de I^{n+1} , somente podemos ter um destes três casos:

a) $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = T$. Logo, i é um número par. Por outro lado, da definição de $v_{\mathcal{A}}$, vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$. Da Proposição 3.5.5 temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

b) $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = F$. Logo i é um número ímpar. Novamente pela definição de $v_{\mathcal{A}}$ temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\gamma) = 0$, mas $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg\gamma) = 1$. E como $\mathbf{Par}(i, 1) = 1$, aplicando a Proposição 3.5.6 vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

c) $v_{\mathcal{A}}(\gamma) = F_k$ com $\mathbf{Par}(k+1, i) = 1$ e $k+1 \leq i$ (ver Observação 3.4.1). Da definição de $v_{\mathcal{A}}$, temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^{k+1}\gamma) = 1$. Aplicando novamente a Proposição 3.5.6, temos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\neg^i\gamma) = (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$. $\square$

Lema 3.5.8 *Dada uma valoração v do cálculo I^{n+1} existe uma sociedade A_v de agentes I^n tal que: $(S_{n+1}^-)_{A_v}(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha) = T$.*

Demonstração: Seja v valoração do cálculo I^{n+1} e consideremos os conjuntos X_k , com $0 \leq k \leq n+2$ (lembrando que $F_0 = F$):

$$\begin{aligned} X_k &= \{p \in \mathcal{V} : v(p) = F_k\}, \text{ com } 0 \leq k \leq n+1; \\ X_{n+2} &= \{p \in \mathcal{V} : v(p) = T\}. \end{aligned}$$

Observe que, para toda $p \in \mathcal{V}$, existe um único $0 \leq k \leq n+2$ tal que $p \in X_k$. Construiremos agora uma sociedade

$$\mathcal{A}_v = \{Ag_0, Ag_1, \dots, Ag_n, Ag_{n+2}\}$$

com $n+2$ agentes I^n , e onde os agentes são definidos para cada fórmula atômica p por:

$$Ag_i(p) = \begin{cases} T & \text{se } p \in X_{n+2} \\ F_j & \text{se } p \in X_j \text{ (} 0 \leq j \leq n \text{ } j \neq i \text{)} \\ F_i & \text{se } p \in X_i \cup X_{n+1} \end{cases}$$

quando $0 \leq i \leq n$, e

$$Ag_{n+2}(p) = \begin{cases} T & \text{se } p \in X_{n+1} \cup X_{n+2} \\ F_j & \text{se } p \in X_j (0 \leq j \leq n) \end{cases}$$

Para fórmulas α não atômicas estendemos os valores de $Ag_i(\alpha)$ homomorficamente, segundo as tabelas de verdade de I^n .

Com esta definição pode ser demonstrado, por indução na complexidade da fórmula α , que

$$(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1 \text{ se e somente se } v(\alpha) = T.$$

CASO A: α é uma fórmula atômica. Logo $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ se e somente se $R_\alpha = \{T\}$, se e somente se para todo $Ag_i \in \mathcal{A}_v$ vale que $Ag_i(\alpha) = T$, se e somente se (pela construção dos Ag_i), $v(\alpha) = T$.

CASO B: α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$. Este caso é demonstrado de forma análoga ao lema anterior.

CASO C: α é da forma $\neg^k \beta$. Temos novamente dois subcasos:

Subcaso C.1: $\alpha \notin \mathcal{F}_i$ para todo i com $0 \leq i \leq n+1$. Prova análoga ao subcaso respectivo no lema anterior.

Subcaso C.2: $\alpha \in \mathcal{F}_i$, para algum i tal que $0 \leq i \leq n+1$. Ou seja, α é da forma $\neg^i \gamma$, com γ atômica. Provaremos o enunciado do lema por implicação dupla:

C.2.I: Suponhamos que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$. Logo $R_\gamma \in S_i$. Isto é:

(*) $R_\gamma \subseteq M_i$ quando i é ímpar, ou

(**) $R_\gamma \subseteq M_i \cup \{T\}$ quando i é par, sendo M_i :

$$M_i = \{F_k : k < i, \mathbf{Par}(k, i) = 0\} (\subseteq \mathcal{T}_{I^n}).$$

Se valer (*), temos que $v(\gamma) = F_t \in \{F_k : k < i, \mathbf{Par}(k, i) = 0\}$, (considerando os elementos deste último conjunto como valores de verdade de I^{n+1}). Com efeito: pela construção dos agentes Ag_j , os únicos valores inicialmente possíveis para $v(\gamma)$ pertencem a $\{F_k : k < i, \mathbf{Par}(k, i) = 0\} \cup \{F_{n+1}\}$. Mas, se valer que $v(\gamma) = F_{n+1}$, então $Ag_1(\gamma) = T$, contradizendo (*). Temos portanto, que $v(\neg^i \gamma) = F$, e assim

$v(\neg^{t+1}\gamma) = T$, sendo $t + 1 \leq k$ e $\mathbf{Par}(t + 1, i) = 1$. Considerando a Observação 3.4.1 temos que $v(\alpha) = T$.

Se valer $(**)$ temos que $v(\gamma) \in \{F_k : k < i, \mathbf{Par}(k, i) = 0\} \cup \{T\}$. Argumentando da mesma forma que em $(*)$ temos que, se $v(\gamma) = F_t$ então $v(\alpha) = T$. E, se $v(\gamma) = T$, como i é par, pela Observação 3.2.1, $v(\alpha) = T$ novamente.

C.2.II: suponha que $v(\alpha) = v(\neg^i\gamma) = T$. Logo, por propriedades da valoração I^{n+1} v , temos que:

a) Se i é ímpar, então $v(\gamma) \in \{F, F_2, \dots, F_{i-1}\}$ e b) Se i é par, vale que $v(\gamma) \in \{T\} \cup \{F_1, F_3, \dots, F_{i-1}\}$.⁸

Suponhamos que vale a). Logo, pela construção da Sociedade $\mathcal{A}_v$, para todo agente $Ag_j \in \mathcal{A}_v$ vale que $Ag_i(\gamma) \in \{F, F_2, F_4, \dots, F_{i-1}\} = M_i$. Isto é, $R_\gamma \in S_i$. Pela Definição 3.5.1 temos assim que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = (S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\neg^i\gamma) = 1$.

Suponhamos agora que vale b). Por considerações análogas a a), temos que $v(\gamma) \in M_i \cup \{T\}$. Se $v(\gamma) \in M_i$ procedemos da mesma forma que em a), e assim $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$. Se valer que $v(\gamma) = T$, como i é par, aplicando a Proposição 3.5.6 vale que $(S_{n+1}^-)_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ novamente, e desta forma concluímos a prova do lema. $\square$.

Teorema 3.5.9 *Para todo $n \geq 0$, S_{n+1}^- é uma Semântica de Sociedades para o cálculo I^{n+1} .*

Demonstração: : Considerar os Lemas 3.5.7 e 3.5.8. $\square$

Exemplo 3.5.10

Daremos a seguir um exemplo da construção de uma Semântica de Sociedades S_{n+1}^- a partir de agentes I^n , construindo uma Semântica S_4^- a partir de sociedades de agentes I^3 . As idéias básicas da construção de S_4^- são similares às ilustradas no Exemplo 3.3.9.

A): Construção da Sociedade S_4^- de agentes I^3

⁸Notar que, se $i \leq k \leq n + 1$, então $\neg^i F_k = F_{k-i}$. Logo, $v(\gamma) \neq F_k$ se $v(\alpha) = T$.

$S^-_4 = \langle I^3, W \rangle$ com:
 $W = \{(\mathcal{F}_i, S_i)\}_{1 \leq i \leq 4}$ onde
 $\mathcal{F}_i = \{\neg^i p : p \in \mathcal{V}\}$ e
 $S_i = \{R \subseteq K_i\}$, com
 $K_0 = \{T\}$; $K_1 = \{F\}$; $K_2 = \{T, F_1\}$; $K_3 = \{F, F_2\}$; $K_4 = \{T, F_2, F_4\}$.

As definições dos conjuntos K_i subjazem no mesmo princípio do exemplo para Sociedades S^+_{n+1} de agentes paraconsistentes, da seção anterior. Além disso, para valer que $R \in S_i$ exigimos que $R \subseteq K_i$ (condição que leva à possibilidade de rejeição simultânea, por uma mesma sociedade $\mathcal{A}$, de fórmulas $\neg^j p$ e $\neg^k p$, com $k \neq j$).

B): Construção da valoração $v_{\mathcal{A}}$, dada uma sociedade $\mathcal{A}$ de agentes I^3

$v_{\mathcal{A}}(p)$ (para toda variável proposicional p) é definida por:

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = 1$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = 0 \text{ e } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F_1 \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0 \text{ e } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^2 p) = 1$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F_2 \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^2 p) = 0 \text{ e } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^3 p) = 1$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F_3 \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^2 p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^3 p) = 0$$

$$\text{e } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^4 p) = 1$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F_4 \text{ sse } (S^-_4)_{\mathcal{A}}(p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^2 p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^3 p) = (S^-_4)_{\mathcal{A}}(\neg^4 p) = 0$$

A construção de $v_{\mathcal{A}}$ torna possível a “criação” do valor F_4 , desde que permite rejeição simultânea de diversas fórmulas $\neg^i p$.

C): Construção da sociedade $\mathcal{A}_v$ de agentes I^3 , dada uma valoração v de I^4

$\mathcal{A}_v = \{Ag_0, Ag_1, Ag_2, Ag_3, Ag_5\}$ (perceber novamente que eliminamos o agente Ag_4 correspondiente a F_4), onde:

$$Ag_0(p) = T \text{ se } p \in v^{-1}\{T\}$$

$$Ag_0(p) = F_i \text{ se } p \in v^{-1}\{F_i\} \text{ com } 1 \leq i \leq 3$$

$$Ag_0(p) = F \text{ se } p \in v^{-1}\{F, F_4\}.$$

Os outros agentes de $\mathcal{A}$ definem-se segundo o mesmo método. Notar que esta construção de $\mathcal{A}_v$ é em totalmente similar à construção de Sociedades de agentes P^n . Isto ocorre devido ao fato de ser interesse primordial das sociedades $\mathcal{A}_v$ eliminar a relevância do valor F_{n+1} (F_4 neste exemplo) para a aceitação de qualquer fórmula por parte de $\mathcal{A}_v$. $\square$

Os resultados precedentes têm mostrado aplicações da Semântica de Sociedades em sua definição mais próxima à construção inicial aparecida em [CLM99]. No capítulo seguinte discutiremos a abrangência de tal definição, e possíveis generalizações da mesma, para os casos em que a Definição 1.3.3 não possa dar conta de certas lógicas n -valentes diferentes daquelas das hierarquias $\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Capítulo 4

Generalizações das Semânticas de Sociedades

4.1 A lógica dos agentes

Nos capítulos anteriores foi exemplificado o mecanismo de construção de novas lógicas pelo método de Semântica de Sociedades, a partir de “instruções” tais que as lógicas resultantes fossem mais complexas que as lógicas dos agentes que as conformam. Nesta seção mostraremos, usando novamente a hierarquia I^n , que é possível proceder de maneira inversa. Isto é, dar ordens para que a *lógica resultante* seja mais simples que do que a *lógica formadora* (a lógica dos agentes).

Começaremos observando que uma valoração S_A atribui um valor 0 ou 1 às fórmulas de acordo com a satisfação ou não de certas condições. Se todas as condições que ocorrem na definição de S_A são exaustivas, mas não exclusivas, teremos um comportamento paraconsistente nas bivalorações S_A , que será herdado portanto pela Semântica de Sociedades. Por outro lado, se as condições são exclusivas mas não exaustivas, teremos um comportamento para completo nas bivalorações S_A , que será transferido para a Semântica de Sociedades.

Vemos assim que, nesta concepção de Semântica de Sociedades, a única informação fornecida pelos agentes é com relação aos valores associados a certa classe de fórmulas, mas a lógica gerada pela Sociedade é a lógica decorrente da definição das valorações S_A , e não a lógica interna dos agentes.

Consideremos, a seguir, os casos P^1 e I^1 .

Sabemos que numa Semântica de Sociedades Biassertivas Abertas (cuja lógica é P^1) valem os seguintes critérios de aceitação de fórmulas:

$$S^+ \models_{\mathcal{A}} p \text{ se existir um Agente clássico tal que } Ag(p) = T$$

$$S^+ \models_{\mathcal{A}} \neg p \text{ se existir um Agente clássico tal que } Ag(p) = F$$

Notamos assim que estas condições podem acontecer ao mesmo tempo. Porém, não pode dar-se o caso em que nenhuma das condições seja satisfeita. Isto é, a “metalógica” da sociedade é paraconsistente, mas não pode ser paracompleta. Logo, são precisamente estas condições as que fazem com que a Semântica de Sociedades Biassertivas Abertas seja P^1 , fato demonstrado no Teorema 1.2.16.

Da mesma forma, no caso das Sociedades Biassertivas Fechadas temos as seguintes condições que as regem:

$$S^- \models_{\mathcal{A}} p \text{ sse para todo Agente clássico vale que } Ag(p) = T$$

$$S^- \models_{\mathcal{A}} \neg p \text{ sse para todo Agente clássico vale que } Ag(p) = F.$$

Obviamente vemos que, pelas características da Sociedade, não pode acontecer que tanto uma fórmula de tipo p como a sua negação $\neg p$ sejam aceitas, mas pode ocorrer que nenhuma das duas fórmulas seja aceita. E esta condição somente é válida para fórmulas atômicas, pelo que o caráter paracompleto de tipo I^1 da Sociedade é imediato.

Uma possível consideração a ser feita portanto é: para obter uma Semântica de Sociedades que se comporte de uma maneira específica, devemos prover a Sociedade que definirá a Semântica S com as mesmas propriedades metalógicas na caracterização da aceitação para diferentes classes de fórmulas $\mathcal{F}_i$. Como veremos a seguir, é possível, modificando as diferentes instruções, obter lógicas paraconsistentes, paracompletas ou mesmo clássicas, a partir de Sociedades de agentes de tipo I^1 .

4.2 Exemplos de aplicação

Consideremos o cálculo I^1 e definamos diferentes Semânticas de Sociedades com a seguinte idéia: devem ser definidas condições de aceitação para fórmulas de tipo p e de tipo $\neg p$. Por outro lado, para definir a aceitação das fórmulas p ou $\neg p$, consideraremos três tipos de procedimentos:

1) Analisar a existência ou não de um agente da sociedade $\mathcal{A}$ que verifique certas condições, ou exigir que as condições pedidas sejam verificadas por todos os agentes da Sociedade I^1 .

2) Analisar se a fórmula observada tem valores designados (neste caso $\mathcal{D} = \{T\}$) para os agentes observados, ou não.

3) Analisar fórmulas de tipo p ou de tipo $\neg p$.

Combinando estas possibilidades temos $2^3 = 8$ *instruções* para aceitar fórmulas. Elas são:

- (I1) Para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$, vale que $Ag(p) = T$
- (I2) Para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$, vale que $Ag(\neg p) = T$
- (I3) Para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$, vale que $Ag(p) \neq T$
- (I4) Para todo agente $Ag \in \mathcal{A}$, vale que $Ag(\neg p) \neq T$
- (I5) Existe um agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(p) = T$
- (I6) Existe um agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(\neg p) = T$
- (I7) Existe um agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(p) \neq T$
- (I8) Existe um agente $Ag \in \mathcal{A}$ tal que $Ag(\neg p) \neq T$.

Para os oito critérios de aceitação, resta somente decidir se são aplicáveis a fórmulas de tipo p ou de tipo $\neg p$. Esta decisão na verdade não faz parte exatamente da problemática da Semântica de Sociedades, mas do tipo de processamento de informação que se deseja modelar. Observamos que as cláusulas (I1), (I4), (I5) e (I8) possuem uma natureza de certa forma similar (pois, se estivéssemos tratando de um mesmo agente clássico, todas estas reduzir-se-iam a (I1)). Dessa forma, consideramos as instruções mencionadas acima como adequadas para decidir a aceitação da fórmula

de tipo p . Por razões análogas, consideramos que as instruções (I2), (I3), (I6) e (I7) são apropriadas para decidir a aceitação de fórmulas de tipo $\neg p$.¹

Logo, combinando os quatro critérios para cada classe de fórmulas podemos ter em total 16 lógicas. As mesmas (indexadas pelos números das instruções que as definem, e já expressas com a formalização apresentada na Definição 1.3.3), aparecem na lista seguinte:

$$\begin{aligned} S_{1,2} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{\{T\}\} \\ S_{1,2} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{\{F\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,6} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{\{T\}\} \\ S_{1,6} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F\} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,3} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{\{T\}\} \\ S_{1,3} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \subseteq \{F, F_1\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,7} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{\{T\}\} \\ S_{1,7} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F, F_1\} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{5,2} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T\} \neq \emptyset\} \\ S_{5,2} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{\{F\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{5,6} &\models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T\} \neq \emptyset\} \\ S_{5,6} &\models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F\} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$S_{5,3} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T\} \neq \emptyset\}$$

¹Observemos que a condição (I8) para a aceitação de fórmulas de tipo p é bastante fraca. Análoga observação pode ser feita para a condição (I7) para a aceitação de fórmulas de tipo $\neg p$. Ambas as condições determinam uma Semântica que, continuando com a nomenclatura de [CLM 99] chamamos de “ultra - aberta”.

$$S_{5,3} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \subseteq \{F, F_1\}\}$$

$$S_{5,7} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{5,7} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{4,2} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \subseteq \{T, F_1\}\}$$

$$S_{4,2} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{\{F\}\}$$

$$S_{4,6} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \subseteq \{T, F_1\}\}$$

$$S_{4,6} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{4,3} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \subseteq \{T, F_1\}\}$$

$$S_{4,3} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \subseteq \{F, F_1\}\}$$

$$S_{4,7} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \subseteq \{T, F_1\}\}$$

$$S_{4,7} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,2} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,2} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{\{F\}\}$$

$$S_{8,6} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,6} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,7} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,7} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,3} \models p \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset\}$$

$$S_{8,3} \models \neg p \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \subseteq \{F, F_1\}\}$$

Analisemos agora as características lógicas destas Semânticas de Sociedades: primeiro, devemos observar que não estamos definindo critérios específicos de aceitação para fórmulas de tipo $\neg\neg p$ ou de complexidade maior. Por outro lado, a definição por recursão para fórmulas complexas é simplesmente a clássica. Inferimos portanto que as lógicas associadas às semânticas definidas acima só podem ser de quatro classes: I^0 ($= P^0 = CPC$); I^1 ; P^1 ; I^1P^1 (estas últimas seriam Lógicas Paracompletas e Paraconsistentes ao mesmo tempo, e teriam, portanto, quatro valores de verdade; analisaremos este tipo de lógicas na Seção 4.3).

Com efeito, podemos observar que encontramos cinco lógicas de tipo I^1 , cinco lógicas de tipo P^1 , quatro lógicas clássicas e duas lógicas de tipo I^1P^1 associadas às diferentes semânticas já vistas. De fato, vale que:

- As Semânticas $S_{1,2}$, $S_{1,6}$, $S_{1,3}$, $S_{5,2}$ e $S_{4,2}$ têm Lógica I^1 ;
- As Semânticas $S_{5,7}$, $S_{4,7}$, $S_{8,6}$, $S_{8,3}$ e $S_{8,7}$ têm Lógica P^1 ;
- As Semânticas $S_{1,7}$, $S_{5,3}$, $S_{4,6}$ e $S_{8,2}$ têm Lógica CPC ;
- Finalmente, as Semânticas $S_{5,6}$ e $S_{4,3}$ têm Lógica I^1P^1 .

A explicação do parágrafo precedente é quase óbvia: a Semântica $S_{1,2}$, pela própria construção, permite que existam fórmulas atômicas p tais que, nem p nem $\neg p$ podem ser aceitas pela Sociedade (aquelas fórmulas com $v(p) = F_1$). Por outro lado, nunca pode acontecer que $S_{1,2}$ aceite p e $\neg p$ simultaneamente pois os conjuntos S_0 e S_1 são disjuntos. Análogas considerações podem ser feitas para as outras Semânticas. Estes resultados podem ser demonstrados formalmente:

Teorema 4.2.1 *A Lógica da Semântica $S_{8,7}$ é P^1 .*

Demonstração: Lembremos que, segundo a lista anterior, a Semântica $S_{8,7}$ vem definida por:

$$\begin{aligned} (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(p)=1 & \text{ sse } R_p \in S_0 = \{R : R \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset\} \\ (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\neg p)=1 & \text{ sse } R_p \in S_1 = \{R : R \cap \{F, F_1\} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Demonstraremos este teorema seguindo a técnica usual.

Parte I) Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de agentes I^1 . Definimos a valoração $v_{\mathcal{A}}$ para P^1 como segue: para toda fórmula atômica p , estipulamos que

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T \text{ se e somente se } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(p) = 1, \text{ e } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0.$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = T_1 \text{ se e somente se } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(p) = 1, \text{ e } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1.$$

$$v_{\mathcal{A}}(p) = F \text{ se e somente se } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(p) = 0, \text{ e } (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1.$$

A extensão de $v_{\mathcal{A}}$ a $\mathbb{L}$ é feita de acordo com as tabelas de verdade de P^1 . Provaremos por indução na complexidade de α que

$$(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1 \text{ se e somente se } v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}. \quad (*)$$

I.1) α é atômica. Logo, $(*)$ vale pela definição de $v_{\mathcal{A}}$.

I.2) α é da forma $\neg\beta$ com β atômica. Então:

$v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $(\alpha$ não atômica) $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\beta) = T_1$ ou $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ se e somente se (ver a definição de $v_{\mathcal{A}}$) $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\neg\beta) = (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

I.3) α é da forma $\neg\beta$ com β não atômica. Logo vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ se e somente se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ se e somente se $(\beta$ não atômica) $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$, se e somente se (Hipótese de Indução) temos que $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$, se e somente se $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

I.4) α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$. Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ se e somente se $(v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$ ou $v_{\mathcal{A}}(\gamma) \in \mathcal{D})$ se e somente se (por Hipótese de Indução) $((S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$ ou $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1)$, se e somente se $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = -(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup (S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$.

Parte II) Seja v uma valoração P^1 . Consideremos os conjuntos

$$X = \{p : v(p) = T\}$$

$$Y = \{p : v(p) = T_1\}$$

$$Z = \{p : v(p) = F\}.$$

Construímos então uma sociedade $\mathcal{A} = \{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$ com três agentes I^1 definidos, para toda fórmula atômica p , por:

$$Ag_1(p) = \begin{cases} T & \text{se } p \in X \\ F_1 & \text{se } p \in Y \\ F & \text{se } p \in Z \end{cases}$$

$$Ag_2(p) = \begin{cases} T & \text{se } p \in X \cup Y \\ F & \text{se } p \in Z \end{cases}$$

$$Ag_3(p) = \begin{cases} F_1 & \text{se } p \in X \\ F & \text{se } p \in Y \cup Z \end{cases}$$

Provaremos por indução na complexidade da fórmula α que $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha)=1$ se e somente se $v(\alpha) \in \mathcal{D}$.

II.1) Se α é atômica, temos:

II.1.A) Se $v(\alpha) \in \mathcal{D}$, então $\alpha \in X \cup Y$. Logo por Ag_2 temos que $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ (ver definição de $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}$).

II.2.B) Se $(S_{8,7})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então $R_p \cap \{T, F_1\} \neq \emptyset$. Logo alguma das seguintes possibilidades deve valer:

$Ag_1(p) \in \{T, F_1\}$. Isto é, $p \in X \cup Y$. Logo $v(p) \in \mathcal{D}$.

$Ag_2(p) \in \{T, F_1\}$. Assim, $p \in X \cup Y$, e portanto $v(p) \in \mathcal{D}$.

$Ag_3(p) \in \{T, F_1\}$. Logo, $p \in X$. Novamente, $v(p) \in \mathcal{D}$.

II.3) α é da forma $\neg\beta$, com β não atômica.

II.4) α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$.

Os dois últimos casos provam-se de forma análoga a I.3) e I.4), por Hipótese de Indução e pelo fato de terem sido provados II.1) e II.2). Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$.

4.3 Os cálculos $I^n P^k$

Para poder demonstrar o próximo teorema definiremos uma “hierarquia combinada” dos cálculos já estudados, que é a hierarquia $I^n P^k$.

Considerado em termos intuitivos, um cálculo $I^n P^k$ simplesmente consiste em adjuntar o cálculo I^n ao cálculo P^k de forma tal que a negação dos valores intermediários de verdade e falsidade (T_i e F_j respectivamente) sejam valores cada vez mais próximos aos valores T e F . Por outro lado, nenhum valor intermediário de verdade pode ter contato com um valor intermediário de falsidade a partir de negações, e vice-versa.

Com respeito à implicação, ela não pode distinguir graus de falsidade nem de verdade distintos dos “clássicos”.

A notação matricial do cálculo $I^n P^k$ é:

$$I^n P^k = \langle \{T, T_1, T_2, \dots, T_k, F, F_1, \dots, F_n\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{T, T_1, \dots, T_k\} \rangle.$$

As funções associadas aos conectivos de $I^n P^k$ são definidas pelas seguintes tabelas:

	F	T_i	F_r	F
$\neg$	T	T_{i-1}	F_{r-1}	T

$\rightarrow$	T	T_j	F_s	F
T	T	T	F	F
T_i	T	T	F	F
F_r	T	T	T	T
F	T	T	T	T

Com $1 \leq i, j \leq k$; $1 \leq r, s \leq n$.

Observação 4.3.1 A hierarquia proposta $I^n P^k$ é uma contribuição original desta dissertação ². Não se conhecem dela quaisquer propriedades de maximalidade. A

²Na verdade, já existem antecedentes de lógicas paraconsistentes e paracompletas ao mesmo tempo. A. Loparic e N. da Costa sugeriram um cálculo tetravalente (denominado β^0) que teria

definição de uma axiomática correta e completa para estes cálculos é um tema que merece estudos posteriores. Mesmo assim, provaremos que é possível fornecer uma axiomática no estilo Rosser-Turquette para os cálculos $I^n P^k$. Esta hierarquia somente é mencionada aqui com o objetivo de melhor expressar o próximo teorema. Porém é a nossa intenção estudá-la em forma mais detalhada (ver último capítulo). $\square$

Teorema 4.3.2 *A Lógica da Semântica $S_{4,3}$ é $I^1 P^1$.*

Demonstração: Provaremos, como usualmente, que, dada uma sociedade $\mathcal{A}$ de agentes I^1 , existe uma valoração $v_{\mathcal{A}}$ para $I^1 P^1$ tal que $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$. E reciprocamente, que, dada uma valoração v para $I^1 P^1$, existe uma sociedade $\mathcal{A}_v$ de agentes I^1 tal que $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha) \in \mathcal{D}$.

Parte I) Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de Agentes I^1 . Definimos uma valoração

$$v_{\mathcal{A}} : \mathbb{L} \longrightarrow \{F, F_1, T_1, T\}$$

através das seguintes atribuições para cada fórmula atômica p :

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{A}}(p) &= T \text{ sse } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(p) = 1 \text{ e } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0 \\ v_{\mathcal{A}}(p) &= T_1 \text{ sse } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(p) = 1 \text{ e } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1 \\ v_{\mathcal{A}}(p) &= F_1 \text{ sse } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(p) = 0 \text{ e } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0 \\ v_{\mathcal{A}}(p) &= F \text{ sse } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(p) = 0 \text{ e } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1 \end{aligned}$$

Utilizando as técnicas usuais provaremos, por indução sobre a complexidade de α , que $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$.

CASO 1: α é atômica. Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$).

CASO 2: α é da forma $\neg\beta$, com β atômica. Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse (α não é atômica) $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ sse $[v_{\mathcal{A}}(\beta) = F \text{ ou } v_{\mathcal{A}}(\beta) = T_1]$ sse (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\neg\beta) = (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$.

CASO 3: α é da forma $\neg\beta$, com β não atômica. Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ sse (β não atômica) $v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$, sse (Hipótese de Indução) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$ sse (definição de satisfatibilidade para fórmulas complexas) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.

as propriedades de $I^1 P^1$ (cf. [LdC86], [Que98]). Mesmo assim, o fato acima mencionado não tem sido provado ainda.

CASO 4: α é da forma $\beta \rightarrow \gamma$. Temos que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse (α é uma implicação) vale que $[v_{\mathcal{A}}(\beta) \notin \mathcal{D} \text{ ou } v_{\mathcal{A}}(\gamma) \in \mathcal{D}]$ sse (Hipótese de Indução) temos que $[(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\beta) = 0 \text{ ou } (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1]$ sse $(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\alpha) = -(S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup (S_{4,3})_{\mathcal{A}}(\gamma) = 1$. Este último caso conclui a primeira parte da demonstração do teorema.

Parte II) Seja v uma valoração $I^1 P^1$. Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} X &= \{p : p \in \mathcal{V}, \text{ e } v(p) = T\}; \\ Y &= \{p : p \in \mathcal{V}, \text{ e } v(p) = T_1\}; \\ Z &= \{p : p \in \mathcal{V}, \text{ e } v(p) = F\}; \\ W &= \{p : p \in \mathcal{V}, \text{ e } v(p) = F_1\}. \end{aligned}$$

Definimos agora a sociedade $\mathcal{A}_v = \{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$ de agentes I^1 tais que:

$$Ag_1(p) = \begin{cases} T & \text{sse } p \in X \\ F_1 & \text{se } p \in Y \\ F & \text{sse } p \in Z \cup W \end{cases}$$

$$Ag_2(p) = \begin{cases} T & \text{sse } p \in X \\ F_1 & \text{sse } p \in Y \cup Z \\ F & \text{sse } p \in W \end{cases}$$

$$Ag_3(p) = \begin{cases} T & \text{sse } p \in X \cup Z \\ F_1 & \text{sse } p \in Y \\ F & \text{sse } p \in Z \cup W \end{cases}$$

Demonstraremos, por indução na complexidade da fórmula α , que $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ sse $v(\alpha) \in \mathcal{D}$.

CASO 1: α é atômica: Logo, $v(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\alpha) = T_1$ sse $\alpha \in X$ ou $\alpha \in Y$, sse (pela construção dos agentes de $\mathcal{A}_v$) $R_\alpha \subseteq \{T, F_1\}$ sse (pela definição de satisfatibilidade em $S_{4,3}$) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(p) = 1$.

CASO 2: α é da forma $\neg\beta$, com β atômica. Dado que nenhuma fórmula que não seja atômica pode ter valores intermediários, então

$$\begin{aligned} &v(\alpha) \in \mathcal{D} \text{ sse } v(\alpha) \in \{T, T_1\} \text{ sse } v(\alpha) = T \text{ sse} \\ &(v(\beta) = F \text{ ou } v(\beta) = T_1) \text{ sse } (\beta \in W \text{ ou } \beta \in Y) \text{ sse} \\ &(Ag_i(p) = F \text{ ou } Ag_i(p) = F_1) \text{ para todo Agente } Ag_i \in \mathcal{A}, \text{ sse} \\ &R_p \subseteq \{F, F_1\}, \text{ sse (pela definição de satisfatibilidade em } S_{4,3}) \\ &(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\neg\beta) = (S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

CASO 3: α tem a forma $\neg\beta$, com β não atômica. Logo, $v(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse $v(\alpha) = T$ sse (β não atômica) $v(\beta) = F$ sse (β não atômica) $v(\beta) = F$ ou $v(\beta) = F_1$, sse (Hipótese de Indução) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\beta) = 0$ sse $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

CASO 4: α tem a forma $\beta \rightarrow \gamma$. Logo, $v(\alpha) \in \mathcal{D}$ sse (α é não atômica) $v(\alpha) = T$ sse $v(\beta) \notin \mathcal{D}$ ou $v(\gamma) \in \mathcal{D}$ sse (Hipótese de Indução) $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\beta) = 0$, ou $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\gamma) = 1$ sse $(S_{4,3})_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

Isto finaliza a demonstração do teorema. $\square$

Observações 4.3.3

1) A técnica para demonstrar as características das outras quatorze lógicas é a mesma das duas últimas demonstrações. Na verdade, estas demonstrações somente põem em evidência como passar de uma valoração bivalente (mas não verofuncional) para uma valoração de tipo I^1 e vice-versa, conforme observado na Seção 1.4.

2) Neste ponto, é importante atender à seguinte questão: por um lado, parece ser que, mesmo considerando sempre um mesmo tipo de sociedade (no exemplo, de agentes I^1), é possível construir diversas lógicas, simplesmente traduzindo as propriedades conjuntistas das condições de aceitação das diferentes fórmulas a lógicas n -valentes. Isto sugeriria que os agentes, então, não teriam nenhuma função importante, e que a caracterização da lógica da Semântica de Sociedades seria verdadeiramente feita pelo

conjunto de instruções. Uma possível resposta a este fato é que, mesmo com a consideração prévia, em geral é muito mais claro construir uma Semântica de Sociedades para uma Lógica complexa a partir da especificação da Lógica dos Agentes e dando instruções de aceitação mais simples.

3) Uma nova consideração referente à definição de Agentes como valorações: A primeira vista, parece ser que a única informação que se extrai dos agentes é a do valor $Ag(p)$ quando p é uma fórmula atômica. Assim, perde-se muita informação que poderia ser valiosa para combinar lógicas. Com as definições atuais, bastaria definir um agente como uma função que atribui diversos valores somente às variáveis proposicionais. É interessante notar que essa definição seria suficiente para os casos já estudados mas, com total certeza, contraproducente para uma aplicação mais ampla da Semântica de Sociedades. $\square$

As considerações anteriores sugerem que, para obter um aproveitamento muito maior da Semântica de Sociedades, é preciso estender a formalização para casos mais complexos. Enunciaremos na próxima seção diversas possibilidades na extensão da definição da Semântica de Sociedades suscetíveis de estudo futuro.

4.4 Aceitação para fórmulas complexas

Segundo a Definição 1.3.3, na caracterização da aceitação de fórmulas complexas (tais como $\alpha \rightarrow \beta$, ou $\neg^k p$, com $k > n$) dos cálculos I^n e P^n , sempre tem-se definido a mesma considerando homomorfismos booleanos. Isto é: para todas as fórmulas não pertencentes a nenhuma classe $\mathcal{F}_i$ de fórmulas, define-se:

$$S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = -S_{\mathcal{A}}(\alpha)$$

$$S_{\mathcal{A}}(\alpha \vee \beta) = S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\beta)$$

$$S_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\beta)$$

$$S_{\mathcal{A}}(\alpha \rightarrow \beta) = -S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\beta).$$

A questão óbvia é se, com outra forma de aceitação para fórmulas complexas, diferente daquela dos homomorfismos booleanos, poderiam ser caracterizadas outras lógicas. A resposta é afirmativa: consideremos a lógica L_3 de Łukasiewicz, que tem a seguinte notação matricial:

$$\langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{1\} \rangle.$$

Nesta lógica, as operações de implicação e negação são definidas por:

	1	$\frac{1}{2}$	0
$\neg$	0	$\frac{1}{2}$	1

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

J. Marcos, em [Mar0?], mostra que a Lógica L_3 pode ser caracterizada a partir de uma Semântica de Sociedades de Agentes Clássicos, mas em que a extensão dos critérios de aceitação é diferente daquela dos usuais homomorfismos booleanos para fórmulas que não sejam literais, isto é, fórmulas que não sejam da forma p nem $\neg p$, com p atômica. Esse resultado é apresentado a seguir.³

Definição 4.4.1 (J.Marcos, 200?) *Considere a Semântica de Sociedades*

$$S = \langle CPC, \{S_0, S_1\} \rangle$$

³A notação foi modificada, para que a mesma coincida com a notação introduzida nesta dissertação.

onde para toda sociedade $\mathcal{A}$ de agentes clássicos, e para toda fórmula α que não seja literal, tem-se:

- $(L_3 - 1): S_{\mathcal{A}}(p) = 1$ se e somente se $R_p \in S_0 = \{\{T\}\}$
- $(L_3 - 2): S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$ se e somente se $R_p \in S_1 = \{\{F\}\}$
- $(L_3 - 3): S_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = S_{\mathcal{A}}(\alpha)$
- $(L_3 - 4): S_{\mathcal{A}}(\alpha \rightarrow \beta) = S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup \neg[S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\beta) \sqcup S_{\mathcal{A}}(\neg\beta)]$
- $(L_3 - 5): S_{\mathcal{A}}(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\neg\beta). \quad \square$

Teorema 4.4.2 (J.Marcos, 200?) *O cálculo L_3 pode ser caracterizado pela Semântica de Sociedades da Definição 4.4.1.*

Uma possível formalização para os casos nos quais as funções bivalentes não têm extensão por homomorfismos booleanos usuais, mas esta extensão é expressável por meio de funções $H : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$ com H dependente dos valores $S_{\mathcal{A}}(\alpha)$ quando $\alpha \in \mathcal{F}_i$, poderia ser formalizada da maneira seguinte:

Definição 4.4.3 (Semântica de Sociedades com extensão não Booleana) *Uma Semântica de Sociedades é uma terna*

$$S = \langle \mathcal{L}, \langle \mathcal{F}_i, S_i \rangle_{i=0 \dots m-1}, \langle \mathcal{F}_j, H_j \rangle_{j=m \dots n} \rangle$$

onde:

- $\mathcal{L}$ é um cálculo proposicional.
- $\bigcup_{k=1 \dots n} \mathcal{F}_k = \mathbb{L}$; $\mathcal{F}_k \neq \emptyset$; $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ se $k \neq j$, $1 \leq k, j \leq n$, com $\mathbb{L}$ o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$.
- Para todo $0 \leq i \leq m-1$, o conjunto S_i define-se como na Definição 1.3.3.
- Para todo $m \leq j \leq n$, H_j é uma função $H_j : \mathcal{F}_j \rightarrow \{0, 1\}$.

As definições de satisfabilidade modificam-se como segue:

- $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ para $\alpha \in \mathcal{F}_i$ se e somente se $R_p \in S_i$;

- $S_A(\alpha) = 1$ para $\alpha \in \mathcal{F}_j$ se e somente se $H_j(\alpha) = 1$.

A definição de validade e de relação de conseqüência em S são as mesmas que na Definição 1.3.3. $\square$

A definição da Semântica de Sociedades para a Lógica $\mathbb{L}_3$ e seu posterior teorema surgem na verdade em [Mar0?] como corolário da apresentação de um método construtivo que permite obter bivalorações não homomórficas a partir de valorações homomórficas, dentro do contexto da Tese de Suszko. Dado que, como já se notou no Capítulo 1, uma sociedade não é outra coisa que uma bivaloração definida a partir de um conjunto de valorações, julgamos conveniente reproduzir dito algoritmo nesta dissertação, com as modificações de notação convenientes, pois a construção de Sociedades a partir de bivalorações surge de forma relativamente natural.

O algoritmo para construir bivalorações para uma lógica $\mathcal{L}$ parte da suposição de que já temos valorações para ela. Por outro lado consideraremos uma função $h : \mathcal{T} \rightarrow \{N, D\}$ tal que para todo valor $A \in \mathcal{T}$, $h(A) = D$ se A é um valor distinguido, e $h(A) = N$ caso contrário. Com esta base, procedemos da seguinte forma (considerando os símbolos $A, B, X_1, X_2, \dots$ e Y como variáveis no conjunto $\mathcal{T}$ de valores de verdade):

1) Achar uma função $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tal que f , definida a partir das funções em $\mathcal{T}$ associadas aos conectivos de $\mathbb{L}$, tal que seja *discriminante por iterações*. Isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

(a) para todo $A, B \in \mathcal{T}$, se $A \neq B$, então $\overline{f(A)} \neq \overline{f(B)}$, em que $\overline{f(A)}$ é definida por $(h(A), h(f(A)), \dots, h(f^{n-1}(A)))$.

(b) Existe $t < n$ tal que $f^n(A) = f^t(A)$ para todo $A \in \mathcal{T}$.

2) Logo, podemos identificar a cada valor $A \in \mathcal{T}$ com $\overline{f(A)}$, e construir tabelas de verdade com a nova nomenclatura ⁴.

⁴Portanto, uma função k -ária associada ao conectivo $\#$ de $\mathbb{L}$, aplicada à k -upla $(X_1, \dots, X_k)$ de valores de $\mathcal{T}$, tal que $\#(X_1, \dots, X_k) = Y$, pode ser identificada com a n -upla $\overline{f(Y)}$ de valores de $\{D, N\}$.

3) Para definir a quantidade e características das condições S_i construímos n conjuntos $\mathcal{F}_i$ como: $\mathcal{F}_i = \{f^i(p) : p \text{ é atômica}\}$ ⁵, e os conjuntos S_i são definidos segundo as propriedades de f .

4) Para construir as funções H_j de extensão, primeiramente definimos o conjunto $\mathcal{F}_n = \{f^n(p)\}$, e H_n é definida como $H_n(f^{n-t}(\alpha)) = S_{\mathcal{A}}(\alpha)$.

5) Definimos *no máximo* $n.k$ conjuntos novos $\mathcal{F}_j$. Isto é, $n+1 \leq j \leq n.k+1$, onde k é a cardinalidade do conjunto de conectivos de $\mathbb{L}$. Estes conjuntos serão denotados por $\mathcal{F}_{\#,r}$, com $\#$ um conectivo e $0 \leq r \leq n-1$, e são definidos por:

$\mathcal{F}_{\#,r} = \{f^r(\#(\phi_1, \dots, \phi_s))\}$ (com $\phi_1, \dots, \phi_s \in \mathbb{L}$), sendo s a aridade do conectivo $\#$.

6) As funções H_j de extensão para os conjuntos $\mathcal{F}_j$ definidas em 5) (agora denotadas como $H_{\#,r}$) dependerão daqueles valores de $\mathcal{T}$ tais que $\pi_r(\#(X_1, \dots, X_s)) = D$, com π_r a r -ésima projeção aplicada à n -upla $\overline{f(Y)}$, com $Y = \#(X_1, \dots, X_s)$.

Para ilustrar o algoritmo acima descrito, e para dar uma Semântica de Sociedades a uma lógica trivalente bem conhecida, aplicaremos dito método à lógica B_3 de Bochvar no seguinte exemplo.

Exemplo 4.4.4

Veremos a seguir como é possível fornecer uma Semântica de Sociedades para B_3 cuja notação matricial é:

$$B_3 = \{\{T, I, F\}, \{\neg, \wedge\}, \{T\}\}$$

onde as funções $\wedge$ e $\neg$ são definidas pelas seguintes tabelas ⁶ (cf. [Res93]):

	T	I	F
$\neg$	F	I	T

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

⁵Notar que podemos identificar a função f entre valores de verdade com um conectivo um-ário (possivelmente novo) entre fórmulas de $\mathbb{L}$, definido a partir dos conectivos primitivos de $\mathbb{L}$, devido ao fato de f ser definida a partir das funções em $\mathcal{T}$ associadas aos conectivos de $\mathbb{L}$.

⁶Em B_3 o valor I significa “paradoxal” ou “sem sentido”.

1) Com as tabelas de B_3 vemos que uma função discriminante por iterações pode ser a própria $\neg$, pois associa a cada valor de $\mathcal{T}$ uma 2-upla. Com efeito:

$$\overline{f_T} = (D, N)$$

$$\overline{f_I} = (N, N)$$

$$\overline{f_F} = (N, D)$$

Além disso, notar que $f^2(A) = A (= f^0(A))$ para qualquer $A \in \mathcal{T}$. Daqui, assumimos $n = 2, t = 0$.

2) Logo, as tabelas das funções $\neg$ e $\wedge$ podem ser expressas como:

	(D, N)	(N, N)	(N, D)
$\neg$	(N, D)	(N, N)	(D, N)

$\wedge$	(D, N)	(N, N)	(N, D)
(D, N)	(D, N)	(N, N)	(N, D)
(N, N)	(N, N)	(N, N)	(N, N)
(N, D)	(N, D)	(N, N)	(N, D)

3) Os conjuntos iniciais são $\mathcal{F}_0 = \mathcal{V}$ e $\mathcal{F}_1 = \{\neg p : p \in \mathcal{V}\}$.

Ora, para definir S_0 e S_1 vemos que:

a) o valor (D, D) não representa $\overline{f_A}$ para nenhum $A \in \mathcal{T}$. Isto é: sabemos que, aplicando f a qualquer valor distinguido, nunca obteremos um valor não distinguido. Dado que $f = \neg$, este fato na verdade enuncia o princípio de não contradição aplicado ao conjunto $\{N, D\}$.

b) Por outro lado, dado que $\overline{f_I}$ e $\overline{f_F}$ têm o mesmo valor na primeira componente, implicitamente estamos violando o princípio do terceiro excluído para $\{N, D\}$.

De a) e b) as condições iniciais devem ser as mesmas que as condições iniciais para a Semântica de Sociedades da Lógica I^1 , a qual pode ser expressa a partir de agentes clássicos. Com efeito, por a) temos que, se alguma valoração v de B_3 atribuisse a qualquer fórmula $p \in \mathcal{V}$ um valor distinguido, então não poderia dar a $\neg p$

um valor não distinguido, de forma análoga à lógica I^1 . Similarmente, por **b)**, vemos que pode acontecer que tanto uma fórmula p como uma fórmula $\neg p$ (com $p \in \mathcal{V}$) possam tomar valores não distinguidos a partir de valorações B_3 , fato que também acontece com as valorações de I^1 .

Pelas considerações prévias, definimos:

$$S_0 = \{\{T\}\}, S_1 = \{\{F\}\}^7$$

4) Como $\neg^2(A) = A$, definimos $\mathcal{F}_2 = \{\neg^2\alpha : \alpha \in \mathbb{L}\}$, e H_2 é definida como:
 $H_2(\neg^{2-0}\alpha) = H_2(\neg^2\alpha) = S_{\mathcal{A}}(\alpha)$.

5) Deveríamos considerar agora aos conjuntos $\mathcal{F}_{\neg,0}$, $\mathcal{F}_{\neg,1}$, $\mathcal{F}_{\wedge,0}$ e $\mathcal{F}_{\wedge,1}$, mas $\mathcal{F}_{\neg,0}$ e $\mathcal{F}_{\neg,1}$ já foram definidos. Consideraremos portanto somente aos conjuntos

$$\mathcal{F}_3 (= \mathcal{F}_{\wedge,0}) = \{(\alpha \wedge \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{L}\} \text{ e}$$

$$\mathcal{F}_4 (= \mathcal{F}_{\wedge,1}) = \{\neg(\alpha \wedge \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{L}\}.$$

6) Para definir as funções de extensão H_3 e H_4 vejamos as tabelas construídas em 2). Devemos considerar em quais valores $\pi_1(A \wedge B) = D$ para poder definir H_3 , e proceder de forma análoga com π_2 para definir H_4 . Vemos assim que $\pi_1(\overline{f_A} \wedge \overline{f_B}) = D$ se e somente se $A = B = T$. Logo, H_3 é definida por $H_3 = S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\beta)$. Analogamente, $\pi_2(\neg(\overline{f_A} \wedge \overline{f_B})) = D$ se e somente se vale que

$(\pi_1(\overline{f_A}) = D \text{ e } \pi_2(\overline{f_B}) = D)$ ou $(\pi_2(\overline{f_A}) = D \text{ e } \pi_1(\overline{f_B}) = D)$ ou $(\pi_2(\overline{f_A}) = D \text{ e } \pi_2(\overline{f_B}) = D)$. Portanto, a definição de H_4 é:

$$H_4 = (S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\neg\beta)) \sqcup (S_{\mathcal{A}}(\neg\beta) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\alpha)) \sqcup (S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\neg\beta)). \quad \square$$

Expressando formalmente as conclusões obtidas da aplicação do método proposto, obtemos a seguinte Semântica de Sociedades, a qual provaremos ser adequada para a lógica B_3 de Bochvar:

⁷Por essa mesma razão, na construção da Semântica de Sociedades para L_3 utilizamos os mesmos conjuntos iniciais que em I^1 (ver [Mar0?]).

Definição 4.4.5 A semântica de Sociedades SB3 é definida por:

$SB3 = \langle CPC, \{F_i, S_i\}_{i=0,1}, \{F_j, H_j\}_{2 \leq j \leq 4} \rangle$ com:

$\mathcal{F}_0 = \mathcal{V}; S_0 = \{\{T\}\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\neg p : p \in \mathcal{V}\}; S_1 = \{\{F\}\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\neg^2 \alpha : \alpha \in \mathbb{L}\}; H_2(\neg \neg \alpha) = S_{\mathcal{A}}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}_2$

$\mathcal{F}_3 = \{(\alpha \wedge \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{L}\}; H_3(\alpha \wedge \beta) = S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\beta)$, para toda fórmula $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}_3$;

$\mathcal{F}_4 = \{\neg(\alpha \wedge \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{L}\};$

$H_4(\neg(\alpha \wedge \beta)) = (S_{\mathcal{A}}(\alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\neg \beta)) \sqcup (S_{\mathcal{A}}(\neg \beta) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\alpha)) \sqcup (S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) \sqcap S_{\mathcal{A}}(\neg \beta))$, para toda fórmula $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}_4$.

Proposição 4.4.6 Dada uma sociedade $S_{\mathcal{A}}$ de SB3, para toda fórmula α vale o seguinte: Se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então $S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = 0$

Demonstração: Imediata, pela definição de SB3. $\square$

Teorema 4.4.7 A Semântica de Sociedades SB3 é uma semântica adequada para o cálculo B_3 de Bochvar.

Demonstração:

Parte I) Seja $\mathcal{A}$ uma sociedade de SB3. Construimos a seguinte valoração de B_3 , definida como uma função $v_{\mathcal{A}}$ tal que, para toda fórmula α :

- $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ ⁸
- $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = F$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$ e $S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = 1$
- $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = I$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = 0$.

Claramente, $v(\alpha) = T$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$. Devemos provar portanto que v é valoração de B_3 . Isto é:

1) $v_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = \neg v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ para qualquer valor de $v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ e

⁸Da Proposição 4.4.6 temos que, se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, então $S_{\mathcal{A}}(\neg \alpha) = 0$.

2) $v_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = v_{\mathcal{A}}(\alpha) \wedge v_{\mathcal{A}}(\beta)$, para quaisquer valores $v_{\mathcal{A}}(\alpha)$ e $v_{\mathcal{A}}(\beta)$ ⁹.

1.1) Suponhamos que $v_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = T$. Logo $S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$ e $S_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 0$. Logo, por H_2 temos que $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$. E como $S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 1$, vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = F$ e portanto temos que $\neg v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$.

1.2) Se $v_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = I$, então $S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 0$ e $S_{\mathcal{A}}(\neg\neg\alpha) = 0$. Por H_2 novamente vale que $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, e assim vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = I$, e como $I = \neg I$ vale o postulado.

1.3) Se $v_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = F$, considerando novamente H_2 temos que $\neg v_{\mathcal{A}}(\alpha) = v_{\mathcal{A}}(\neg\alpha)$.

2.1) Suponhamos agora que $v_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = T$. Logo, vale que $S_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = 1$. Por H_3 temos que: $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ e $S_{\mathcal{A}}(\beta) = 1$. Assim, $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, e $v_{\mathcal{A}}(\beta) = T$. Da definição da função $\wedge$ vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \wedge v_{\mathcal{A}}(\beta) = T$.

2.2) Se $v_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = I$, vale que $S_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = 0$, e que $S_{\mathcal{A}}(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 0$. Novamente, por H_3 e H_4 vemos que vale:

($S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$ ou $S_{\mathcal{A}}(\beta) = 0$) e ($S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 0$ e $S_{\mathcal{A}}(\neg\beta) = 0$). Distribuindo convenientemente, temos alguma destas possibilidades:

* $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = S_{\mathcal{A}}(\neg\beta) = 0$

** $S_{\mathcal{A}}(\beta) = S_{\mathcal{A}}(\neg\beta) = S_{\mathcal{A}}(\neg\alpha) = 0$

Se valer * temos (pela definição de $v_{\mathcal{A}}$) que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = I$. Se valer ** temos de forma análoga que $v_{\mathcal{A}}(\beta) = I$. E nos dois casos vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \wedge v_{\mathcal{A}}(\beta) = I$.

2.3) Podemos ver também que quando $v_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta) = F$, vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) \wedge v_{\mathcal{A}}(\beta) = F$, aplicando novamente H_3 .

Parte II) Seja v uma valoração do cálculo B_3 . Definimos a seguinte sociedade $\mathcal{A}_v = \{Ag_1, Ag_2\}$ de agentes clássicos:

- $Ag_1(p) = T$ se e somente se $v(p) = T$
- $Ag_2(p) = T$ se e somente se $v(p) \in \{T, I\}$

⁹Notar que não diferenciamos os conectivos $\wedge$ e $\neg$ das suas funções associadas. Notar também que a idéia da construção de $v_{\mathcal{A}}$ é oposta às construções já feitas nesta dissertação. Por outro lado, é a construção usual nas provas de [CLM99].

para cada fórmula atômica p .

Estendemos homomorficamente as valorações Ag_i , segundo os padrões do *CPC*, para obter os diferentes valores $Ag_i(\alpha)$ quando α não é atômica. Provaremos agora que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ se e somente se $v(\alpha) = T$, por indução na complexidade de α :

Caso 1: α é atômica. Trivial.

Caso 2: α é da forma $\neg\beta$. Logo:

2.a): Se β é atômica, então $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = S_{\mathcal{A}_v}(\neg\beta) = 1$ se e somente se (da definição de S_1 presente na Definição 4.4.3) vale que $Ag_i(\beta) = F$ para todo agente Ag_i . Se e somente se (da construção de $\mathcal{A}_v$) vale que $v(\beta) = F$, se e somente se $v(\alpha) = T$.

2.b) Se β é da forma $\neg\gamma$, então $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = S_{\mathcal{A}_v}(\neg\neg\gamma) = 1$ se e somente se (por H_2), $S_{\mathcal{A}_v}(\gamma) = 1$. Se e somente se (por H.I) vale que $v(\gamma) = T$, se e somente se $v(\alpha) = T$.

2.c) Se β é da forma $\gamma \wedge \delta$, então:

Se $v(\alpha) = T$ então $v(\gamma \wedge \delta) = v(\gamma) \wedge v(\delta) = F$. Logo, deve valer algum dos casos seguintes:

(*) $v(\gamma) = T$ e $v(\delta) = F$

(**) $v(\gamma) = F$ e $v(\delta) = T$

(***) $v(\gamma) = v(\delta) = F$. Se valer (*) temos também que $v(\neg\gamma) = F$ (pelas propriedades de v). Logo, por (H.I), temos que $S_{\mathcal{A}_v}(\neg\gamma) = S_{\mathcal{A}_v}(\delta) = 1$, e assim (por H_4), temos que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$. Raciocinando de forma similar para os casos (**) e (***) temos sempre que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$.

Para provar que, se $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ então $v(\alpha) = T$, argumentamos de forma análoga, e assim concluímos a prova deste subcaso.

Caso 3: α é da forma $\beta \wedge \gamma$. Logo, vale que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ se e somente se (por H_3), $S_{\mathcal{A}_v}(\beta) = 1$ e $S_{\mathcal{A}_v}(\gamma) = 1$, se e somente se (H.I) $v(\beta) = T$ e $v(\gamma) = T$, se e somente se (v é valoração de B_3) $v(\beta \wedge \gamma) = T$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Observemos que com a formalização da Definição 4.4.3 ainda estamos trabalhando com agentes entendidos como valorações, as quais pertencem a uma mesma lógica de base. Veremos a seguir uma formalização que nos permitirá trabalhar com agentes de diferentes lógicas, e discutiremos uma possível aplicação para esta definição de Semântica de Sociedades.

4.5 Agentes com diferentes lógicas

Os Teoremas 4.4.2 e 4.4.7 indicam, conforme mencionado anteriormente, que numa formalização geral da Semântica de Sociedades devemos incluir a expressão das funções que estendem a aceitação para fórmulas complexas. Porém, ainda estamos trabalhando com Sociedades em que as Lógicas dos Agentes é a mesma. Nesta seção daremos uma definição que possa dar conta dos casos em que desejamos trabalhar com sociedades mixtas. *A priori* uma definição para este último caso parece simples. Porém, a nossa definição a seguir tentará também servir de marco possível para o caso em que seja preciso fazer uso dos agentes como valorações, e não já como simples conjuntos de valores de verdade (questão que foi levantada no Capítulo 2). A razão é que estes dois casos estão conectados, de certa maneira: consideremos, por exemplo, um critério de aceitação para uma certa fórmula α não atômica, expressado através de algumas propriedades dos agentes. Devido ao fato de estes serem vero-funcionais (por ser valorações), em geral é possível definir tais critérios a partir de $R_p = \{Ag_i(p)\}$.

Porém, suponhamos que cada agente pertence a uma lógica diferente, onde todas as lógicas consideradas tenham uma linguagem e, mais ainda, um conjunto de valores de verdade comum. Uma forma possível de diferenciar a qual lógica pertence cada agente seria considerar, na definição de S_A , a aceitação de uma fórmula α em termos de $Ag(\beta)$, com β uma fórmula relacionada de certa forma com α ¹⁰. Em certo sentido, para poder diferenciar valorações de diferentes lógicas, deveríamos proceder calculando $Ag(\neg^k \alpha)$, de forma similar à feita quando calculamos $h(f^k(A))$, para poder distinguir diferentes valores de verdade de um conjunto $\mathcal{T}$ dado, como mostramos no método por iterações da seção anterior.

Exemplo 4.5.1

Consideremos uma Sociedade que consista de Agentes P^1 e de Agentes I^1 , onde para abreviar a notação se define:

¹⁰A impressão inicial é que β deveria ser uma subfórmula de α , mas nesse caso não teríamos poder expressivo para expressar aceitação para fórmulas atômicas, como veremos nos exemplos seguintes.

$$\begin{aligned}
T &= 1; \\
F &= 0; \\
F_1 &= T_1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que desejamos que uma certa fórmula α verifique o seguinte:

$$S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1 \text{ sse existe um agente } Ag \text{ de } P^1 \text{ tal que } Ag(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Este critério pode ser expresso sem mencionar na condição a lógica dos agentes envolvidos:

$$S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1 \text{ sse existe um agente } Ag \text{ tal que } Ag(p) = \frac{1}{2} \text{ e } Ag(\neg p) = 1.$$

Dessa forma, é univocamente expressado o requerimento de que $Ag(p)$ seja P^1 . $\square$

As considerações precedentes motivam mais uma definição de Semântica de Sociedades, a qual julgamos conveniente o suficiente para dar conta de Semânticas de Sociedades para lógicas n -valentes em geral ¹¹.

Definição 4.5.2 (Semântica de Sociedades Geral) *Uma Semântica se Sociedades S é uma terna*

$$S = \langle \{(\mathcal{L}_i, E_i)\}_{i \in I}, \{(\mathcal{F}_j, D_j, S_j)\}_{j \in J}, \{(\mathcal{F}_k, H_k)\}_{k \in K} \rangle$$

onde cada conjunto componente de S tem as seguintes características:

- $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de lógicas proposicionais que possuem linguagem comum e admitem Semântica Matricial. Denotaremos ao conjunto de valores de verdade de cada lógica $\mathcal{L}_i$ por $\mathcal{T}_i$. No caso em que os conjuntos $\mathcal{T}_i$ sejam os mesmos para todas as lógicas $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{T}_i$ será chamado simplesmente de $\mathcal{T}$.
- Os conjuntos E_i são conjuntos de pares ordenados: $E_i = \{(\beta_{q_i}, T_{q_i})\}_{q_i \in Q}$ onde β_{q_i} é uma fórmula, e $T_{q_i} \in \cup_{i \in I} \mathcal{T}_i$.
- Cada conjunto $\mathcal{F}_j$ é um conjunto de fórmulas (chamado conjunto inicial) fechado por substituição de fórmulas atômicas.

¹¹Em **Considerações finais** discutiremos a possibilidade de definir Semânticas de Sociedades para lógicas que admitam Semântica não matricial.

- D_j , para cada $j \in J$ é um subconjunto $D_j \subseteq \Pi_{i \in I} \wp(\mathcal{A})$ (com $\mathcal{A}$ qualquer conjunto não vazio de valorações de $\cup_{i \in I} \mathcal{L}_i$, que será denominado Sociedade).
- $S_j \subseteq \Pi_{i \in I} \wp(\mathcal{T}_i)$. Cada S_j é chamado de condição inicial.
- $\mathcal{F}_k$ é um conjunto de fórmulas (chamado conjunto por extensão).
- H_k é uma função booleana cujos argumentos serão fórmulas α de $\mathbb{L}$ e em que H_k dependerá dos valores da bivaloração $S_{\mathcal{A}}(\beta_z)$ (definida a seguir), sendo as diferentes fórmulas β_z fórmulas associadas a α . As funções H_k são chamadas de funções de extensão de S .
- $(\cup_{j \in J} \mathcal{F}_j) \cup (\cup_{k \in K} \mathcal{F}_k) = \mathbb{L}$ (a linguagem comum a todas as lógicas $\mathcal{L}_i$); $\mathcal{F}_r \cap \mathcal{F}_s = \emptyset$ quando $r \neq s$, com $r, s \in J \cup K$.

A partir de $\mathcal{A}$ definimos os seguintes conjuntos:

- $\overline{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i^1 \cup \mathcal{A}_i^2$ com $\mathcal{A}_i^1 = \{Ag_m \in \mathcal{A} : Ag_m(\beta_{q_i}) = T_{q_i}\}$, para todo par $(\beta_{q_i}, T_{q_i}) \in E_i\}$, e $\mathcal{A}_i^2 = \mathcal{A} - \cup_{i \in I} \mathcal{A}_i^1$
- Definimos também, para cada fórmula α de $\mathbb{L}$, o conjunto $\overline{R^i_\alpha} = \{Ag_m(\alpha) : Ag_m \in \overline{\mathcal{A}}_i\}$

Neste contexto, definimos a aceitação de qualquer fórmula α de $\mathbb{L}$ como uma função $S_{\mathcal{A}} : \mathbb{L} \rightarrow 2$ definida da maneira seguinte:

- se $\alpha \in \mathcal{F}_j$ para algum $j \in J$, então $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ se e somente se:
 - 1) $\overline{\mathcal{A}}_i \in \pi_i(D_j)$ para todo $i \in I$
 - 2) $\overline{R^i_p} \in \pi(S_j)$ para todo $i \in I$
- Se $\alpha \in \mathcal{F}_k$ para algum $k \in K$, então $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ sse $H_k(\alpha) = 1$.

As noções de validade e de consequência semântica são as usuais, aplicadas às bivalorações $S_{\mathcal{A}}$. $\square$

Observações 4.5.3

A introdução dos conjuntos E_i , $\overline{\mathcal{A}}_i$, D_j e $\overline{R_p^i}$ é devida ao fato de que precisamos ter suficiente poder expressivo para o caso em que o conjunto de valores de verdade para toda lógica seja o mesmo. Em particular:

- Os conjuntos E_i simplesmente indicam quais condições deveriam ter os agentes Ag_m (dos quais não conhecemos ainda a lógica subjacente) para ser considerados como valorações de uma lógica $\mathcal{L}_i$ determinada. Ou seja: Ag_m será visto como um agente de certa lógica $\mathcal{L}_i$ se e somente se $Ag_m(\beta_{q_i}) = T_{q_i}$.
- Neste contexto, os conjuntos $\overline{\mathcal{A}}_i$ são somente os conjuntos de agentes de $\mathcal{A}$ que pertencem à Lógica $\mathcal{L}_i$ ¹².
- Por outro lado, os conjuntos $\pi_i(D_j)$ indicam quais condições gerais deve ter *cada conjunto* $\overline{\mathcal{A}}_i$, para poder considerar a aceitação de uma fórmula $\alpha \in \mathcal{F}_j$ ¹³.
- Finalmente, os conjuntos $\overline{R_p^i}$ são as imagens de $Ag_m(p)$ de todos os agentes que pertencem a certa lógica $\mathcal{L}_i$. $\square$

Em geral, uma vez “particionada” a Sociedade $\mathcal{A}$ em “sub-sociedades” $\overline{\mathcal{A}}_i$, a aceitação para uma fórmula α é decidida por duas condições. A primeira condição (expressa por meio dos conjuntos D_j) estuda a distribuição interna da sociedade $\mathcal{A}$. A segunda estuda o comportamento de α em cada conjunto $\overline{\mathcal{A}}_i$. Mas, como dentro de cada $\mathcal{A}_i$, já é conhecido o comportamento de cada agente, somente precisamos considerar conjuntos $\overline{R_p^i}$ em vez de $\overline{R_\alpha^i}$, dado que cada lógica $\mathcal{L}_i$ é vero-funcional.

¹²Notar que poderia acontecer que nenhum agente Ag de $\mathcal{A}$ verifique os requisitos expressos pelas condições dadas nos conjuntos E_i . Esse caso ocorre, na verdade, quando Ag pode ser considerado como pertencente a qualquer lógica $\mathcal{L}_i$ sem inconvenientes, fato expresso na definição dos conjuntos $\mathcal{A}_i^2$. Portanto, os conjuntos $\overline{\mathcal{A}}_i$ não precisam ser disjuntos.

¹³Desta forma estamos permitindo que a aceitação de uma fórmula α por parte de uma sociedade $\mathcal{A}$ determinada, não estaria baseada somente nos valores $Ag_m(\alpha)$, com $Ag_m \in \mathcal{A}$, senão na própria configuração interna de $\mathcal{A}$.

Portanto, o verdadeiro “uso” da idéia dos agentes como valorações está implícito na definição dos conjuntos E_i . Todas estas considerações serão ilustradas de forma concreta no exemplo seguinte.

Exemplo 4.5.4

Desejamos construir uma Semântica de Sociedades a partir de agentes P^1 e I^1 com conjunto de valores $\mathcal{T}$ comum, como foi indicado no Exemplo 4.5.1 tal que: $S_{\mathcal{A}}(p) = 1$ (com p atômica) se existe um agente Ag_m da Lógica P^1 tal que $Ag_m(p) = \frac{1}{2}$ (neste caso entendido como T_1).

$S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$ se e somente se *todos os agentes Ag_m da sociedade $\mathcal{A}$ pertencem à Lógica I^1* e, além disso, $Ag_m(p) = \frac{1}{2}$.

Por outro lado as funções de extensão são definidas como na Lógica $SB3$ da Definição 4.4.5. Logo, formalmente, a Semântica de Sociedades que explicita as condições acima solicitadas é expressa formalmente da seguinte maneira:

$$S = \langle \{(P^1, E_{P^1}), (I^1, E_{I^1})\}, \{(\mathcal{F}_0, D_0, S_0), (\mathcal{F}_1, D_1, S_1)\}, \{(\mathcal{F}_2, H_2), (\mathcal{F}_3, H_3), (\mathcal{F}_4, H_4)\} \rangle$$

Onde temos:

- $E_{P^1} = \{(p, \frac{1}{2}), (\neg p, 1) : p \in \mathcal{V}\}$; $E_{I^1} = \{(p, \frac{1}{2}), (\neg p, 0) : p \in \mathcal{V}\}$.
- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{V}$; $\mathcal{F}_1 = \{\neg p : p \in \mathcal{V}\}$
- $D_0 = \{(D_{P^1,0}, D_{I^1,0}) : D_{P^1,0} \neq \emptyset\}$; $D_1 = \{D = (D_{P^1,1}, D_{I^1,1}) : D_{I^1,1} = \mathcal{A}\}$
- $S_0 = \{(\overline{R_{P^1,0}}, \overline{R_{I^1,0}}) : \overline{R_{P^1,0}} \cap \{\frac{1}{2}\} \neq \emptyset\}$; $S_1 = \{(\overline{R_{P^1,1}}, \overline{R_{I^1,1}}) : \overline{R_{I^1,1}} = \{\frac{1}{2}\}\}$
- O conjunto $\{(\mathcal{F}_2, H_2), (\mathcal{F}_3, H_3), (\mathcal{F}_4, H_4)\}$ tem a mesma definição que na Definição 4.4.5

Vemos que S tem efetivamente as características que precisamos. Pois, se $Ag_m(p) = \frac{1}{2}$ e $Ag_m(\neg p) = 0$ então necessariamente Ag_m é um agente P^1 (daí a definição de E_{P^1}). A definição de E_{I^1} é motivada por um raciocínio análogo. Por outro lado, da

definição de S_0 temos que $S_{\mathcal{A}}(p) = 1$ se e somente se existe um agente Ag_m da Lógica P^1 (fato expresso pelo conjunto $\pi_1(D) = D_{P^1,0}$) tal que $Ag_m(p) = \frac{1}{2}$, (aqui aplicamos a definição do conjunto $\pi_1(R) = \overline{R_{P^1,1}}$). Analogamente, D_1 e S_1 expressam nossas condições para aceitar fórmulas atômicas negadas. $\square$

Uma pergunta a fazermos para este exemplo particular é qual é a Lógica adequada para a Semântica S . A resposta é dada no seguinte teorema:

Teorema 4.5.5 *A Lógica de S é B_3 .*

Demonstração:

Parte 1: Seja v uma valoração B_3 . Definimos uma Sociedade

$\mathcal{A}_v = \{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$ a partir de v como:

$$\begin{aligned} \text{Se } v(p) = T \text{ então } Ag_1(p) = Ag_2(p) = Ag_3(p) &= \frac{1}{2} \\ &\text{e } Ag_1(\neg p) = Ag_2(\neg p) = 1 \text{ e } Ag_3(\neg p) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } v(p) = I \text{ então } Ag_1(p) = Ag_2(p) &= \frac{1}{2} \text{ e } Ag_3(p) = 1 \\ &\text{e } Ag_1(\neg p) = Ag_2(\neg p) = 0 \text{ e } Ag_3(\neg p) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } v(p) = F \text{ então } Ag_1(p) = Ag_2(p) = Ag_3(p) &= \frac{1}{2} \\ &\text{e } Ag_1(\neg p) = Ag_2(\neg p) = Ag_3(\neg p) = 0. \end{aligned}$$

Estendemos cada agente segundo os padrões clássicos (notar que, como as valorações das Lógicas I^1 e P^1 são definidas segundo as mesmas regras para aquelas fórmulas não literais, esta extensão carece de ambigüidade).

Provaremos agora que $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ se e somente se $v(\alpha) = T$ para toda fórmula α . Dado que H_2 , H_3 e H_4 são definidas da mesma forma que na Definição 4.4.5, temos que provar a afirmação somente para o caso em que α é literal:

Caso 1: Suponhamos que α é atômica. Logo, se $v(\alpha) = T$ então $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} = \{Ag_1, Ag_2\}$ e $\overline{\mathcal{A}_{I^1}} = \{Ag_3\}$. Logo $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} \neq \emptyset$, e portanto $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} \in \pi_1(D_0)$. Além disso, $\overline{R_{\alpha}^{P^1}} = \{\frac{1}{2}\} \in \pi_1(S_0)$. Da Definição 4.5.2, $S_{\mathcal{A}_v}(p) = 1$.

Reciprocamente, se $S_{\mathcal{A}_v}(p) = 1$ somente pode valer (dadas as definições dos agentes Ag_i) que $v(p) = T$. Com efeito: se $v(p) = F$, então $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} = \emptyset$, e portanto

$\overline{\mathcal{A}_{P^1}} \notin \pi_1(D_0)$. E, se $v(p) = I$, então $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} = \{Ag_3\}$ ¹⁴ e assim $\overline{R_\alpha^{P^1}} = \{0\} \notin \pi_1(S_0)$.

Caso 2: Seja $\alpha = \neg p$, com p atômica. Logo temos:

a) Se $v(\alpha) = T$, então $v(p) = F$. Da definição de $\mathcal{A}_v$ motivada por $v(p)$ temos que $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} = \emptyset$. Assim vale que $\overline{\mathcal{A}_{I^1}} \in \pi_2(D_1)$. Por outro lado, $\overline{R_p^{I^1}} = \{\frac{1}{2}\}$. Isto é, $R = (\overline{R_{P^1,0}}, \overline{R_{I^1,0}}) \in S_1$. Logo $S_{\mathcal{A}_v}(\neg p) = S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$ da Definição 4.5.2

b) Se $S_{\mathcal{A}_v}(\alpha) = 1$, então vale que $\overline{\mathcal{A}_{I^1}} = \mathcal{A}_v$ e que $\overline{R_p^{I^1}} = \{\frac{1}{2}\}$. Portanto deve valer necessariamente (ver a construção de $\mathcal{A}_v$) que $v(p) = F$, e assim $v(\alpha) = T$.

Parte 2: Seja agora uma sociedade $\mathcal{A}$ de S ; construímos $v_{\mathcal{A}}$ como uma valoração do cálculo B_3 definido para cada fórmula atômica p como:

$v_{\mathcal{A}}(p) = T$ quando $S_{\mathcal{A}}(p) = 1$;

$v_{\mathcal{A}}(p) = F$ quando $S_{\mathcal{A}}(p) = 0$ mas $S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$;

$v_{\mathcal{A}}(p) = I$ quando $S_{\mathcal{A}}(p) = 0$ e $S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 0$.

Estendemos $v_{\mathcal{A}}$ segundo as regras do cálculo B_3 . Provemos que para todo literal α vale que $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ se e somente se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$ (para as fórmulas α não literais a prova é análoga à feita no Teorema 4.4.7):

Caso 1: Se α é atômica: vale pela definição de $v_{\mathcal{A}}$.

Caso 2: Se α é da forma $\neg p$ com p atômica. Logo, se $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$, então $v_{\mathcal{A}}(p) = F$. Isto é: $S_{\mathcal{A}}(p) = 0$ mas $S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$. Ou seja, $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$. Reciprocamente, se $S_{\mathcal{A}}(\alpha) = 1$, então da definição de S vale que

* $\overline{\mathcal{A}_{I^1}} = \mathcal{A}$, e ** $\overline{R_p^{I^1}} = \{\frac{1}{2}\}$. De * temos que $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} = \emptyset$. Logo $\overline{\mathcal{A}_{P^1}} \notin \pi_1(D_0)$. Logo, $S_{\mathcal{A}}(p) = 0$. E como tínhamos que $S_{\mathcal{A}}(\neg p) = 1$, então da definição de $v_{\mathcal{A}}$ vale que $v_{\mathcal{A}}(p) = F$. Logo $v_{\mathcal{A}}(\alpha) = T$ e isto conclui a demonstração. $\square$

Mostramos assim o funcionamento da Definição 4.5.2 junto com as suas técnicas de demonstração. Ainda quando generalizações maiores serão discutidas nas considerações finais desta dissertação, acreditamos que boa parte do estudo inicial da Semântica de Sociedades para Lógicas n -valentes foi desenvolvida.

¹⁴Notar que, além disso, $Ag_3 \in \overline{\mathcal{A}_{I^1}}$.

Considerações finais

Finalizaremos nosso estudo relativo à Semântica de Sociedades discutindo alguns pontos que possam esclarecer conceitos planteados até agora. Além disso, tentaremos levantar questões que consideramos de suficiente relevância para ser analisadas com profundidade no futuro, além de indicar problemas em aberto que foram produto da pesquisa desenvolvida ao longo desta dissertação.

5.1 Agentes com lógicas de semântica não matricial

Evidentemente, um caso de Semântica de Sociedades que não analisamos é quando cada lógica componente admite semântica não matricial. Esta é uma questão extremamente interessante porque estenderia a Semântica de Sociedades para ser aplicada a outro tipo de lógicas tais como a Lógica Linear, ou certos cálculos relevantistas que têm demonstrado não possuir uma semântica decidível (como o são as semânticas matriciais finitas) (cf.[Dun86]). Uma possível solução para este problema (discutida aqui coloquialmente) seria expressar os critérios de aceitação em termos da linguagem de Teoria de Modelos, definindo cada critério de aceitação em função dos elementos das estruturas semânticas que interpretam as diferentes fórmulas. Isto é, cada sociedade não seria já um conjunto de valorações senão um conjunto de interpretações (definidas nas diferentes lógicas $\mathcal{L}_i$). Mesmo assim, a sociedade continuaria sendo uma bivaloração, pois simplesmente aceita ou rejeita uma fórmula α determinada.

Por outro lado, é possível levantar a seguinte questão: faz sentido combinar Lógicas a partir de Agentes tão “problemáticos” como aqueles que não possuem algum critério de decidibilidade?

Mesmo assim, esta última questão não diz respeito aos interesses de uma boa descrição do mecanismo da Semântica de Sociedades.

5.2 Relação com a Semântica de Traduções Possíveis

Uma outra semântica obtida a partir da combinações entre lógicas é a Semântica de Traduções Possíveis. Tal semântica foi definida por W.Carnielli (ver [Car90]) com o nome de semântica não determinística, e posteriormente estudada em [Mar99] (ver também [Car99]). Devido a que esta semântica tem certo tipo de relação com a Semântica de Sociedades, julgamos conveniente discutir as características de tal relação.

Brevemente, definimos uma Semântica de Traduções Possíveis **TP** para certo cálculo $\mathcal{L}$, como um par $\mathbf{TP} = \langle \{R_t\}_{t \in |T|}, T \rangle$ onde cada R_t é uma lógica em que se tem definida a relação de consequência semântica $\models^t$, e T é um conjunto de funções $*_t$ denominadas “funções de tradução” $*_t : \mathbb{L} \longrightarrow R_t$.

Definimos, a partir de **TP** a relação de consequência $\models_{\mathcal{L}}$ por meio do seguinte processo:

1) Definimos em $\mathcal{L}$, para cada $t \in |T|$ a relação de consequência “local” $\models^t_{\mathcal{L}}$ entre conjuntos $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbb{L}$ por:

$$\Gamma \models^t_{\mathcal{L}} \alpha \text{ sse } *_t(\Gamma) \models^t *_t(\alpha)$$

(Isto é, forçamos que $*_t$ seja uma tradução conservativa entre $\mathcal{L}$ e R_t).

2) A relação $\models_{\mathcal{L}}$ é definida por

$$\Gamma \models_{\mathcal{L}} \alpha \text{ sse } \Gamma \models^t_{\mathcal{L}} \alpha \text{ para todo } *_t \in T$$

A Semântica de Traduções Possíveis foi aplicada para fornecer semânticas alternativas adequadas para as formulações axiomáticas dos cálculos paraconsistentes C_n de Da Costa ¹. Consideramos importante notar que a “estratégia” para que uma semântica de traduções possíveis **TP** seja adequada para certa axiomática consiste em escolher convenientemente as lógicas R_t e as funções de tradução $*_t$ ².

Inicialmente vemos que a Semântica de Traduções Possíveis tem certas semelhanças com a Semântica de Sociedades, entre as quais destacamos:

- 1) As lógicas R_t não interagem entre elas, fato já mencionado entre as lógicas $\mathcal{L}_i$ das semânticas de Sociedades.
- 2) Os dois tipos de Combinações entre Lógicas aqui comparados são, na verdade, combinações entre *semânticas* das diferentes lógicas componentes, não combinando a estrutura lingüística de ditas lógicas.

Porém, estas duas semânticas têm algumas diferenças técnicas e, sobretudo, conceituais que discutiremos a seguir:

Primeiramente, notemos que a relação de consequência $\models_{\mathcal{L}}$ da “definição padrão” da Semântica de Traduções Possíveis considera $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \alpha$ válido se $\Gamma \models_{\mathcal{L}}^t \alpha$ para *todo* t . Neste sentido, a Semântica de Sociedades tem inicialmente mais liberdade para quantificar os agentes que aceitam determinada fórmula α . Notar que é perfeitamente possível modificar a definição de Semântica de Traduções Possíveis para abranger este caso.

Por outro lado, a Semântica de Sociedades não utiliza funções de tradução $*_t$, e portanto precisa que as linguagens de cada lógica $\mathcal{L}_i$ componente sejam as mesmas que a linguagem da lógica $\mathcal{L}$, cuja semântica é a Semântica de Sociedades determinada pelo conjunto $\{\mathcal{L}_i\}$. Este fato é devido a que, como temos mencionado antes, a motivação básica da Semântica de Sociedades é construir *bivalorações* em $\mathcal{L}$. Tal conceito não é operativo a partir das funções de tradução entre lógicas, as quais ressaltam principalmente a idéia de operador de consequência semântica.

¹Tais cálculos possuem uma semântica de “quase-matrizes”.

²Nesse sentido, a Semântica de Sociedades é diferente, pois também precisa escolher adequadamente de que forma cada sociedade $\mathcal{A}$ valida α .

Com a discussão precedente estamos sugerindo implicitamente a principal diferença entre a Semântica de Sociedades e a Semântica de Traduções Possíveis, a qual jaz na construção da relação de consequência para a semântica combinada S : assim como na semântica de Sociedades n -valentes construímos bivalorações S_A **a partir de combinações de valorações** e posteriormente definimos $\models_S$ (segundo a forma usual) já dentro da semântica S , na semântica de Traduções Possíveis procedemos de forma oposta. As valorações (no caso em que as lógicas R_t sejam polivalentes) são definidas segundo os critérios de cada lógica R_t sem nenhum tipo de combinação e, uma vez determinadas as relações de consequência $\models_t$, definimos $\models_S$ **combinando relações de consequência**³. Este interessante fato sugere alguns problemas relativos à comparação entre estas duas semânticas, entre os quais indicamos dois que consideramos de certa importância:

- Dar condições tais que a combinação de valorações (e posterior definição de relação de consequência dentro de uma lógica $\mathcal{L}$) coincida com a definição de várias relações de consequência diferentes e posterior combinação das mesmas.
- Comparar as relações destas duas semânticas com a Semântica de Kripke para lógicas modais (como já mencionamos no Capítulo 1, num nível simples é possível traduzir a Semântica de Sociedades a Semântica de Kripke, e consideramos que com uma definição conveniente também seja possível “modalizar” a Semântica de Traduções Possíveis). Julgamos esta comparação dos aspectos modais de cada uma destas semânticas potencialmente frutífera pelo fato de que estaríamos diferenciando, dentro da Semântica de Mundos Possíveis, as noções de aceitação de uma fórmula e de consequência válida.

³Na verdade, poderíamos considerar a Semântica de Sociedades como um caso particular da Semântica de Traduções Possíveis, em que cada agente Ag de certa lógica $\mathcal{L}_i$ poder-se-ia entender como uma função de tradução $Ag : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{I}_i$, fato já sugerido em [Mar99]. Porém, esta inclusão é artificial demais, considerando por exemplo que deveríamos particionar o conjunto de Lógicas em subconjuntos diferentes, quando trabalhamos com agentes de lógicas distintas.

5.3 As sociedades entendidas como bivalorações

Como mencionamos repetidamente no percurso desta dissertação, podemos entender cada sociedade $\mathcal{A}$ definida numa semântica de sociedades determinada como uma bivaloração. Dado que o processo para determinar o valor $S_{\mathcal{A}}(\alpha)$ tem certo tipo de recursão implícita (no sentido em que definimos condições iniciais e de extensão na Definição 4.5.2), consideramos suscetíveis de estudo futuro as características recursivas das bivalorações em geral e daquelas obtidas a partir de Semânticas de Sociedades em particular. Sobre este ponto, lembremos que duas características fundamentais das semânticas em geral são os princípios de bivalência e de composicionalidade. As lógicas n -valentes em geral verificam este último princípio (dado que as suas valorações são homomorfismos). E, com relação à bivalência, têm elas também uma forma de expressar tal princípio, a partir da introdução do conjunto $\mathcal{D}$ de valores distinguidos.

Em contrapartida, semânticas construídas a partir de bivalorações (tal como pede a Tese de Suszko) têm a desvantagem de perder, de forma geral, o princípio de composicionalidade. Mas, se as bivalorações fossem definidas recursivamente recuperariam, até certo ponto, o princípio acima mencionado.

Finalizaremos esta discussão de problemas suscetíveis de ser estudados indicando alguns tópicos de caráter técnico referentes ao estudo da hierarquia $I^n P^k$, apresentada no Capítulo 4. Ditas questões são:

- Achar uma axiomática geral que seja apta para qualquer cálculo da hierarquia.
- Estudar de forma geral o problema da maximalidade entre os seguintes pares de cálculos da hierarquia: I^n e I^{n+1} ; P^n e P^{n+1} e $I^n P^k$ e $I^{n+1} P^{k+1}$
- Analisar a existência dum cálculo limite para a hierarquia $\{I^n P^k\}_{n,k \in \mathbb{N}}$, e também de limites para diferentes sub-hierarquias.
- Estudar a algebrização dos diferentes cálculos $I^n P^k$.

Apêndice I

Axiomáticas para I^n , P^k e $I^n P^k$

I.1 Uma axiomática sugerida para a hierarquia P^n

Existem na literatura três axiomáticas dadas para o cálculo P^1 . A primeira delas foi definida por A.M. Sette em [Set73] e tem os seguintes axiomas e regras de inferência:

Definição I.1.1 *A axiomática P1 é definida por:*

Axiomas:

$$A1) \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$$

$$A2) (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$$

$$A3) (\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \neg \neg \psi) \rightarrow \phi)$$

$$A4) \neg(\phi \rightarrow \neg \neg \phi) \rightarrow \phi$$

$$A5) (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \neg(\phi \rightarrow \psi)$$

Regras de inferência.

$$\text{Modus Ponens (MP): } \frac{\phi, \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}. \quad \square$$

Em [Mar99], J. Marcos provou que o axioma A4) era demonstrável a partir dos outros quatro axiomas, dando assim a segunda axiomática para P^1 . E, no mesmo trabalho, deu uma axiomática (que chamaremos P1) para o cálculo P^1 , dada em função de qualquer cálculo da hierarquia paraconsistente C_n^b , além de estudar de

forma exaustiva o comportamento da negação em relação aos conectivos $\rightarrow$, $\vee$ e $\wedge$. Além disso, conjecturou a possível definição de uma hierarquia P^n de cálculos paraconsistentes (fato que já comentamos no Capítulo 3), supondo também que todos eles teriam uma axiomatização baseada em $P1$.

Apresentamos aqui a axiomatização definida por J.Marcos, construída a partir de C_1^b :

Definição I.1.2 (Axiomática $\mathcal{C}_\omega$) A axiomática $\mathcal{C}_\omega$ é definida por:

Axiomas

- A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- A2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- A6) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- A7) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- A8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
- A9) $\alpha \vee \neg \alpha$
- A10) $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Regras de Inferência

Modus Ponens (MP): $\frac{\phi, \phi \rightarrow \psi}{\psi}.$ $\square$

Definição I.1.3 (Axiomática do Cálculo C_1^b) Os axiomas de C_1^b são os mesmos axiomas de $\mathcal{C}_\omega$, com o agregado de:

- $A9^{(1)}$ $\beta^{(1)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha))$
- $A9^{[1]}$ $\beta^{[1]} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha))$
- $A10^{(1)}$ $(\alpha^{(1)} \wedge \beta^{(1)}) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta)^{(1)} \wedge (\alpha \vee \beta)^{(1)} \wedge (\alpha \rightarrow \beta)^{(1)})$ ¹

¹Como veremos, $\alpha^{(1)}$ não é outra coisa que $\alpha^\circ = \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$.

Definição I.1.4 (Axiomática do cálculo P^1) *Uma outra axiomática para o cálculo P^1 (a qual denominaremos $P1$) é obtida dos axiomas para o cálculos C_1^b adicionando os seguintes axiomas:*

$$A11) (\alpha \wedge \beta)^{(1)} \wedge (\alpha \vee \beta)^{(1)} \wedge (\alpha \rightarrow \beta)^{(1)}$$

$$A12) (\neg \alpha)^{(1)}$$

Nas definições anteriores, os operadores $\alpha^{(n)}$ e $\alpha^{[n]}$ são definidos de forma recursiva da seguinte forma:

$$\alpha^\circ := \neg(\alpha \wedge \neg \alpha);$$

$$\alpha^\square := \neg(\neg \alpha \wedge \alpha)$$

$$\alpha^n = \begin{cases} \alpha^0 & = \alpha \\ \alpha^{n+1} & = (\alpha^n)^\circ \end{cases}$$

$$\alpha^n = \begin{cases} \alpha^0 & = \alpha \\ \alpha^{n+1} & = (\alpha^n)^\square \end{cases}$$

$$\alpha^{(n)} = \begin{cases} \alpha^{(0)} & = \alpha \\ \alpha^{(1)} & = \alpha^1 \\ \alpha^{(n+1)} & = \alpha^{(n)} \wedge \alpha^{n+1} \end{cases}$$

$$\alpha^{[n]} = \begin{cases} \alpha^{[0]} & = \alpha \\ \alpha^{[1]} & = \alpha^1 \\ \alpha^{[n+1]} & = \alpha^{[n]} \wedge \alpha^{n+1} \end{cases}$$

I.2 Uma axiomática correta e completa para P^n

Nesta seção definiremos um sistema axiomático geral, denominado Pn , e provaremos que ele constitui uma axiomatização correta e completa dos cálculos P^n , com $n \in \mathbb{N}$. O sistema mencionado é baseado no sistema $P1$ de J. Marcos.

Definição I.2.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o sistema axiomático Pn da maneira seguinte*

Axiomas.

$$A1) \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$$

$$A2) (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$$

$$A3) \phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$$

$$A4) (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$$

$$A5) (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$A6) \phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$$

$$A7) \psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$$

$$A8) (\phi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta))$$

$$A9) \phi \vee \neg \phi$$

$$A10) \neg \neg \phi \rightarrow \phi$$

$$A11) \psi^\circ \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \phi))$$

$$A12) (\phi \wedge \psi)^\circ \wedge (\phi \vee \psi)^\circ \wedge (\phi \rightarrow \psi)^\circ$$

$$A13) (\neg^n \phi)^\circ$$

Regras de inferência.

$$\text{Modus Ponens (MP): } \frac{\phi, \phi \rightarrow \psi}{\psi}. \quad \square$$

Observações I.2.2

O seguinte objetivo é provar a correção e completude de Pn com relação à semântica de tabelas de verdade de P^n já descrita para cada n . No resto da seção, o símbolo $\vdash$ será utilizado para denotar a relação de inferência (sintática) em Pn . $\square$

Teorema I.2.3 [Teorema da Correção] Para cada $n \in \mathbb{N}$ o sistema Pn é correto com relação a P^n , isto é: se ϕ é demonstrável em Pn , então ϕ é uma tautologia de P^n .

Demonstração: A verificação de que cada axioma de Pn é uma tautologia de P^n é computacional. Por outro lado, a regra MP preserva tautologias de Pn . Isto conclui a demonstração. $\square$

Antes de provar o teorema da completude de Pn com relação a P^n precisamos demonstrar previamente os seguintes resultados:

Proposição I.2.4 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, na axiomática Pn vale o Teorema da dedução. Isto é: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

Demonstração: O resultado vale por aplicações sucessivas dos axiomas A1 e A2, considerando que a única regra de inferência é o *Modus Ponens*, os quais são comuns a todas as axiomáticas Pn (ver [Men64], onde é realizada uma demonstração detalhada para CPC , a qual pode ser adaptada facilmente para C_1^b , núcleo comum a todas as axiomáticas Pn). $\square$

Proposição I.2.5 *As seguintes propriedades valem no sistema axiomático Pn :*

- (1) $\vdash \psi \rightarrow \psi$ (*Reflexividade.*)
- (2) $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \phi \rightarrow \theta$ (*Transitividade.*)
- (3) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \vdash \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \theta)$ (*Permutação.*)

Demonstração: Este resultado também se demonstra a partir dos axiomas A1 e A2 e a aplicação do MP. $\square$

Proposição I.2.6 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:*

- 1) $\vdash \phi^\circ \rightarrow (\phi \rightarrow \neg \neg \phi)$
- 2) $\vdash \phi^\circ \rightarrow (\neg \phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$
- 3) $\psi^\circ \vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$
- 4) $\vdash \phi^\circ \rightarrow (\neg \phi)^\circ$
- 5) $\vdash \psi^\circ \rightarrow (\phi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg (\phi \rightarrow \psi)))$
- 6) $\vdash (\phi^\circ)^\circ$

Demonstração:

1) Consideremos a seguinte prova em Pn :

- 1) (ϕ°) [Hip.]
- 2) ϕ [Hip.]
- 3) $\neg\phi \rightarrow \phi$ [2), A1), MP]
- 4) $\neg\phi \rightarrow \neg\phi$ [Prop.I.2.5(1)]
- 5) $\neg\neg\phi$ [1), 3), 4), A11)]

2)

- 1) (ϕ°) [Hip.]
- 2) $\neg\phi$ [Hip.]
- 3) ϕ [Hip.]
- 4) $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ [2), A1), MP]
- 5) $\neg\psi \rightarrow \phi$ [3), A1), MP]
- 6) $\neg\neg\psi$ [1), 4), 5), A11)]
- 7) ψ [6), A10)]

3)

- 1) (ϕ°) [Hip.]
- 2) $\phi \rightarrow \psi$ [Hip.]
- 3) $\neg\psi$ [Hip.]
- 4) $\phi \rightarrow \neg\psi$ [3), A1), MP]
- 5) $\neg\phi$ [1), 2), 4), A11), MP]

4) Notar que temos que provar que $\neg(\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi)$ é teorema. Seja a seguinte prova:

- 1) (ϕ°) [Hip.]
- 2) $(\phi \wedge \neg\phi)^\circ$ [A12), A4)]
- 3) $(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi) \rightarrow \neg\phi$ [A5)]
- 4) $(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi) \rightarrow \neg\neg\phi$ [A6)]
- 5) $(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi) \rightarrow \phi$ [4), A10), Prop. I.2.5(2)]
- 6) $(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi) \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)$ [5), 3), A3), Prop. I.2.4]
- 7) $\neg(\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi)$ [2, 6), item 3)]
- 8) $\neg(\neg\phi \wedge \neg\neg\phi)$ [1), 7), MP]

5)

- 1) (ψ°) [Hip.]
- 2) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ [Prop. I.2.5(1)]
- 3) $\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ [2), Prop. I.2.5(3)]
- 4) $\psi^\circ \rightarrow (((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)))$ [item 3)]
- 5) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi))$ [1), 4), MP]
- 6) $\phi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi))$ [3), 5), Prop. I.2.5(2)]

6)

- 1) $(\phi^\circ \wedge \neg\phi^\circ)^\circ$ [A12), A4), A5)]
- 2) $(\neg(\phi^\circ \wedge \neg\phi^\circ))^\circ$ [1), item 4)]

Como a fórmula α° é na verdade $(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$, o passo 2) é o resultado que procuramos, e desta forma concluímos a prova da Proposição. $\square$

Observação I.2.7

A partir dos resultados demonstrados no Lema I.2.6 é possível provar a completude de P^n com relação a Pn , quando $n \geq 2$. Quando $n = 0$ a completude é imediata. Com efeito: uma axiomática correta e completa para $P^0 = CPC$ é dada em [Men64]:

$A1'$: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;

$A2'$: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$ e

$A3'$: $(\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$.

Mas $A1' = A1$; $A2' = A2$) e $A3'$ é consequência da combinação dos axiomas $A13$), $A11$) e $A10$), nessa ordem.

Por outro lado, quando $n = 1$ o resultado já foi provado em [Mar99]. $\square$

Para demonstrar a completude geral de P^n com relação a Pn , quando $n \geq 2$, usamos a técnica clássica introduzida por L. Kálmar (cf. [Men64]). Mas, para facilitar a compreensão da prova, dividimos a mesma em três lemas. Os dois primeiros têm um caráter técnico, e o último fornece a prova da Completude Geral propriamente dita.

Lema I.2.8 *Seja ϕ uma fórmula de P^n , e $q_1, \dots, q_m$ suas componentes atômicas. Para cada valoração v e cada fórmula q_i , com $1 \leq i \leq m$, definimos o conjunto Q_i de fórmulas associadas da seguinte maneira:*

Se $v(q_i) = T_1$, $Q_i := \{(q_i \wedge \neg q_i), (\neg q_i)^\circ\}$

Se $v(q_i) = T_2$, $Q_i := \{(q_i \wedge \neg q_i), (\neg q_i \wedge \neg^2 q_i), (\neg^2 q_i)^\circ\}$

:

Se $v(q_i) = T_{n-1}$, $Q_i := \{(q_i \wedge \neg q_i), (\neg q_i \wedge \neg^2 q_i), \dots, (\neg^{n-2} q_i \wedge \neg^{n-1} q_i), (\neg^{n-1} q_i)^\circ\}$

Se $v(q_i) = T_n$, $Q_i := \{(q_i \wedge \neg q_i), (\neg q_i \wedge \neg^2 q_i), \dots, (\neg^{n-1} q_i \wedge \neg^n q_i), (\neg^n q_i)^\circ\}$

Se $v(q_i) = F$, $Q_i := \{\neg q_i, q_i^\circ\}$

Se $v(q_i) = T$, $Q_i := \{q_i, q_i^\circ\}$

Por outra parte, dada v , definimos a fórmula ϕ' associada a ϕ como:

Se $v(\phi) = T_j$ então $\phi' = \phi \wedge \neg \phi$ com $1 \leq j \leq n$

Se $v(\phi) = F$ então $\phi' = \neg \phi$

Se $v(\phi) = T$ então $\phi' = \phi$

Seja $\Delta_\phi = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$. Logo, em Pn sempre vale $\Delta_\phi \vdash \phi'$.²

²Implicitamente, este lema estabelece uma forma de construir $(n+2)^m$ deduções sintáticas

Demonstração: Esta proposição demonstrar-se-á por indução sobre a complexidade da fórmula ϕ . Dividimos a demonstração nos seguintes casos:

CASO 1: ϕ é uma fórmula atômica.

Logo, $\phi = q_1$. Notar que, se $v(\phi) = T$ ou $v(\phi) = F$, então $\phi' \in Q_\phi$. E se $v(\phi) = T_i$, vale que $\phi' = \phi \wedge \neg\phi \in Q_\phi$. Portanto, $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

CASO 2: Quando ϕ é da forma $\neg\psi$. Temos então:

Subcaso 2.1): Quando $v(\psi) = T$. Logo, $v(\phi) = F$ e portanto, devemos provar que $\Delta_\phi \vdash \neg\phi (= \neg\neg\psi)$. Para provar esta afirmação será suficiente demonstrar

$$\Delta_\phi \vdash \psi^\circ \quad (*)$$

Pois, se valer (*), da Proposição I.2.6(1), teremos $\Delta_\phi \vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$. E como por (H.I) e $\Delta_\psi \subseteq \Delta_\phi$ ³ temos $\Delta_\phi \vdash \psi$, aplicando MP conseguiremos provar $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Para provar (*) temos as seguintes possibilidades:

2.1.1): ψ é uma fórmula atômica. Logo, obtemos $\psi^\circ \in Q_\psi$ (pois $v(\psi) = T$). Logo, vale (*) trivialmente.

2.1.2): ψ é da forma $\alpha\#\beta$, sendo $\#$ uma operação binária. Por A12) temos que $\vdash (\alpha\#\beta)^\circ$.

2.1.3): ψ é da forma $\neg^t\theta$, sendo θ uma fórmula da forma $(\alpha\#\beta)$, com $\#$ uma operação binária. Logo, notar que $\vdash (\alpha\#\beta)^\circ$ por A12). E, pelo Lema I.2.6(4) (t vezes), temos que vale $\vdash \psi^\circ$.

2.1.4): ψ é da forma $\neg^k\theta$, com $k \leq n$ e θ atômica. Analisemos agora os diferentes valores possíveis para $v(\theta)$:

2.1.4.1): $v(\theta) = F$. Logo, $\Delta_\psi \vdash \theta^\circ$, e assim, pelo Lema I.2.6(4), (aplicado k vezes), vale (*).

2.1.4.2): $v(\theta) = T$. Demonstração análoga ao subcaso 2.1.4.1)

2.1.4.3): $v(\theta) = T_t$ (com $1 \leq t \leq n$). Temos, portanto, que $t \leq k$ (pois se $t > k$, então $v(\psi) = v(\neg^k\theta) = \neg^k T_t = T_{t-k}$, o que contradiz que $v(\psi) = T$). Além disso, notar

válidas para Pn dada qualquer fórmula ϕ com m variáveis proposicionais (neste caso, o número $n + 2$ indica a quantidade de valores de verdade de cada cálculo P^n).

³Em geral, nesta demonstração não explicitaremos o fato de que, se ψ é sub-fórmula de ϕ , sempre vale que $\Delta_\psi \subseteq \Delta_\phi$.

que $(\neg^t \theta)^\circ \in Q_\theta \subseteq \Delta_\psi \subseteq \Delta_\phi$. E como $t \leq k$, temos novamente do Lema I.2.6(4) que $\Delta_\phi \vdash (\psi)^\circ$. Com isso, temos provado (*) para todas as possibilidades, e assim este subcaso é demonstrado.

Subcaso 2.2: $v(\psi) = F$. Logo, pela (H.I), temos que $\Delta_\psi \vdash \psi' (= \neg\psi = \phi')$.

Subcaso 2.3: $v(\psi) = T_1$. logo, $v(\phi) = T$, e assim, $\phi' = \phi = \neg\psi$. Como por (H.I) $\Delta_\phi \vdash \psi' (= (\psi \wedge \neg\psi))$, por A5) temos que $\Delta_\phi \vdash \neg\psi (= \phi')$.

Subcaso 2.4: $v(\psi) = T_k$, com $2 \leq k \leq n$. Logo, $v(\phi) = T_{k-1}$. Portanto, $\phi' = \phi \wedge \neg\phi$. Notar que como $v(\psi) = T_k$, então ψ é da forma $\neg^p \theta$, com θ atômica, e $v(\theta) = T_{p+k}$ (sendo $p+k \leq n$).

Vemos assim que $Q_\theta = (\theta \wedge \neg\theta), (\neg\theta \wedge \neg\neg\theta), \dots, (\neg^{p+k-1}\theta \wedge \neg^{p+k}\theta), (\neg^{p+k}\theta)^\circ\} \subseteq \Delta_\psi$. Em particular, temos que $(\neg^{p+1}\theta \wedge \neg^{p+2}\theta) \in \Delta_\psi$, pois $2 \leq k$. Assim, por A5), temos que $\Delta_\phi \vdash \neg^{p+2}\theta$. Ou seja, $\Delta_\phi \vdash \neg\neg\psi$. E, lembrando que por (H.I) e A5) já tínhamos $\Delta_\phi \vdash \neg\psi$, aplicando agora A3) temos que $\Delta_\phi \vdash \neg\psi \wedge \neg\neg\psi$. Isto é, $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

CASO 3: ϕ é da forma $\psi \rightarrow \theta$. Agora temos os seguintes subcasos ⁴ :

Subcaso 3.1: $v(\psi) = F$. Logo $v(\phi) = T$, e assim $\phi' = \psi \rightarrow \theta$. Neste ponto é preciso demonstrar que vale

$$\Delta_\psi \vdash (\psi)^\circ \quad (**)$$

Com efeito, se valer (**), da Proposição I.2.6(2) valerá $\Delta_\phi \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$. E como por (H.I) temos que $\Delta_\phi \vdash \neg\psi$, por M.P teremos $\Delta_\phi \vdash \phi'$. Consideremos portanto os subcasos seguintes:

3.1.1) ψ é uma fórmula atômica. Logo $(\psi)^\circ \in Q_\psi$, e portanto $\Delta_\phi \vdash (\psi)^\circ$.

3.1.2.) $\psi = \phi \# \theta$, com $\#$ uma operação binária.

3.1.3) $\psi = \neg^k(\alpha \# \beta)$, com $1 \leq k$.

Estes dois subcasos são provados de forma análoga aos subcasos 2.1.2 e 2.1.3

3.1.4) $\psi = \neg^k \theta$ com θ atômica e $1 \leq k$. Analisemos agora os diferentes valores possíveis para $v(\theta)$:

3.1.4.1) $v(\theta) = F$. Logo, $\Delta_\psi \vdash \theta^\circ$, pois $\theta^\circ \in Q_\theta$. Pela Proposição I.2.6(4) vale (**).

⁴Os três primeiros subcasos compreendem todas as possibilidades para que $v(\phi) = T$. O último é referido ao caso em que $v(\phi) = F$.

3.1.4.2) $v(\theta) = T$. Análogo ao subcaso anterior.

3.1.4.3): $v(\theta) = T_t$ (com $1 \leq t \leq n$). Temos, portanto, que $\Delta_\phi \vdash (\neg^t \theta)^\circ$, e como por considerações análogas ao Subcaso 2.1.4.3 vale que $t < k$, da Proposição I.2.6(4), vale $\Delta_\phi \vdash \psi^\circ$. Provamos portanto $(**)$ para todas as possibilidades, e concluímos assim a prova do Subcaso 3.1.

Subcaso 3.2: $v(\theta) = T$. Logo, $\phi' = \psi \rightarrow \theta$. Por (H.I) temos que $\Delta_\theta \vdash \theta$, e como, por A1) vale $\vdash \theta \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$, temos portanto que $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 3.3: $v(\theta) = T_k$, com $1 \leq k \leq n$. Por (H.I) e A10) vale que $\Delta_\theta \vdash (\theta \wedge \neg \theta)$. Logo, por A4), temos que $\Delta_\phi \vdash \theta$. Logo, por A1), vale que $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 3.4: $v(\psi) \in \mathcal{D}$, e $v(\theta) = F$. Logo, $v(\phi) = F$, e assim $\phi' = \neg(\psi \rightarrow \theta)$. Como $v(\theta) = F$, sempre temos $\Delta_\phi \vdash \theta^\circ$. Com efeito, a demonstração é análoga a $(**)$ do subcaso 3.1. Além disso, por (H.I) (e, no caso em que $v(\psi) \neq T$, aplicando A4)) temos que $\Delta_\phi \vdash \psi$ e $\Delta_\phi \vdash \neg \theta$. Por outro lado, do Lema I.2.6(5) vale que $\vdash \theta^\circ \rightarrow \psi \rightarrow (\neg \theta \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \theta))$, e assim temos que $\Delta_\phi \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$ ($= \phi'$). $\square$

Lema I.2.9 *Seja Δ um conjunto de fórmulas de P^n , q_1 uma fórmula de P^n e θ uma fórmula de P^n . Suponha que valem os seguintes fatos:*

- 1) $\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), (\neg q_1)^\circ \vdash \theta$
- 2) $\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), (\neg q_1 \wedge \neg \neg q_1), (\neg^2 q_1)^\circ \vdash \theta$
- $\vdots$
- n - 2)** $\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-3} q_1 \wedge \neg^{n-2} q_1), (\neg^{n-2} q_1)^\circ \vdash \theta$
- n - 1)** $\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1), (\neg^{n-1} q_1)^\circ \vdash \theta$
- n)** $\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1), (\neg^n q_1)^\circ \vdash \theta$
- n + 1)** $\Delta, q_1^\circ, q_1 \vdash \theta$
- n + 2)** $\Delta, q_1^\circ, \neg q_1 \vdash \theta$

Então vale que $\Delta \vdash \theta$.

Demonstração: Suponhamos que temos as premissas do Lema. Da informação precedente, utilizaremos **1)** ... **n)** para provar que

$$\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1) \vdash \theta \quad (*)$$

Com efeito, sabemos que, por A13), vale:

$$\mathbf{a}) \vdash (\neg^n q_1)^\circ$$

Considerando **n)**, **a)** e aplicando o Teorema da Dedução e transitividade, temos

$$\mathbf{b}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1), (\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1) \vdash \theta$$

Comparemos **b)** com **n - 1)**: Aplicando Teorema da Dedução em cada caso temos:

$$\mathbf{c.1}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1) \vdash \neg(\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1) \rightarrow \theta$$

$$\mathbf{c.2}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, \neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1 \vdash (\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1) \rightarrow \theta$$

Aplicando A8) a **c.1)** e **c.2)** temos

$$\mathbf{d}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1) \vdash ((\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1) \vee \neg(\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1)) \rightarrow \theta$$

Agora, por A9) (lei do terceiro excluído) temos que:

$$\mathbf{e}) \vdash (\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1) \vee \neg(\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1)$$

Logo, pelo Teorema da Dedução e transitividade, temos que vale:

$$\mathbf{f}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1) \vdash \theta$$

O procedimento aplicado de **a)** a **f)** pode ser resumido assim: considerando um conjunto qualquer de fórmulas Σ e uma fórmula qualquer α do cálculo P^n então, partindo das seguintes suposições:

$$(1) \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \theta \text{ e}$$

$$(2) \Sigma \vdash \neg \alpha \rightarrow \theta$$

é possível obter $\Sigma \vdash \theta$.

Agora comparamos **f)** com **n - 2)**, e vemos que temos as condições dadas para aplicar o procedimento mencionado, e obter assim:

$$\mathbf{g}) \Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-3} q_1 \wedge \neg^{n-2} q_1) \vdash \theta$$

Assim, repetindo o processo antes explicitado, e aplicando em ordem decrescente os resultados **n - 2)** ... **2)**, chegamos a:

$$\mathbf{h}) \Delta, q_1 \wedge \neg q_1, \neg q_1 \wedge \neg \neg q_1 \vdash \theta.$$

Finalmente, como por **1**) temos

$\Delta, (q_1 \wedge \neg q_1), (\neg q_1 \wedge \neg \neg q_1) \vdash \theta$, então aplicando novamente o mesmo raciocínio já utilizado chegamos a demonstrar (*).

Por outro lado, de **n + 1**), e **n + 2**), e aplicando o mesmo procedimento que nos casos anteriores (desta vez, para eliminar as fórmulas q_1 e $\neg q_1$) chegamos a provar

$$\Delta, \neg(q_1 \wedge \neg q_1) \vdash \theta \quad (**)$$

Finalmente, comparando (*) e (**) provamos

$$\Delta \vdash \theta \quad \square$$

Teorema I.2.10 (Completeness para P^n , $2 \leq n$) *Se θ é tautologia do cálculo P^n (com $2 \leq n$), então θ é teorema da axiomática Pn .*

Demonstração: Seja θ uma tautologia de P^n , e sejam $q_1 \dots q_m$ suas componentes atômicas. Consideremos $n + 2$ valorações de P^n tais que:

- I** $v_i(q_1) = T_i$ com $1 \leq i \leq n$
- II** $v_{n+1}(q_1) = F$
- III** $v_{n+2}(q_1) = T$
- IV** $v_i(q_k) = v_j(q_k)$ com $1 \leq i, j \leq n + 2$; $2 \leq k \leq m$

Definimos agora, para cada componente atômica q_i (com $1 \leq i \leq m$) e qualquer valoração v_r (com $1 \leq r \leq n + 2$), o conjunto Q^r_i , como o conjunto Q_i de fórmulas associadas a q_i dada a valoração v_r , segundo a definição introduzida no Lema I.2.8.

Logo, por **IV** e a notação acima indicada, temos que $Q^r_k = Q^s_k$, para qualquer par de valorações $\{v_r, v_s\}$, com $1 \leq r, s \leq n + 2$, e para todo k tal que $2 \leq k \leq n$. Podemos denotar portanto o conjunto $Q^r_2 \cup \dots \cup Q^r_m$ por Γ_1 , sem risco de confusão.

Por outro lado, como θ é tautologia, para qualquer valoração v de P^n , temos que $v(\theta) = T$. Considerando as condições do Lema I.2.8, e as valorações definidas em **I**),

II) e III) temos que valem os seguintes fatos:

- 1) $\Gamma_1, (q_1 \wedge \neg q_1), (\neg q_1)^\circ \vdash \theta$
- 2) $\Gamma_1, (q_1 \wedge \neg q_1), (\neg q_1 \wedge \neg \neg q_1), (\neg^2 q_1)^\circ \vdash \theta$
- $\vdots$
- n - 2)** $\Gamma_1, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-3} q_1 \wedge \neg^{n-2} q_1), (\neg^{n-2} q_1)^\circ \vdash \theta$
- n - 1)** $\Gamma_1, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-2} q_1 \wedge \neg^{n-1} q_1), (\neg^{n-1} q_1)^\circ \vdash \theta$
- n)** $\Gamma_1, (q_1 \wedge \neg q_1), \dots, (\neg^{n-1} q_1 \wedge \neg^n q_1), (\neg^n q_1)^\circ \vdash \theta$

- n + 1)** $\Gamma_1, q_1^\circ, q_1 \vdash \theta$
- n + 2)** $\Gamma_1, q_1^\circ, \neg q_1 \vdash \theta$

Mas estas são, precisamente, as condições para obter (aplicando o Lema I.2.9) $\Gamma_1 \vdash \theta$. Ou seja, em Pn provamos $Q^r_2 \cup \dots \cup Q^r_m \vdash \theta$, onde os conjuntos Q^r_j (com $2 \leq j \leq m$) são os conjuntos de fórmulas associadas (segundo o Lema I.2.9) às variáveis q_j pelas valorações v_r , sendo $v_r(q_j)$ um valor arbitrário **(1)**.

Consideremos agora o conjunto Q^r_2 , que será denotado agora por Q^A_2 , sendo o valor $A = v_r(q_2)$. Como devido a **(1)** não existem restrições sobre o valor de verdade A , na verdade o procedimento efetuado acima para obter $\Gamma_1 \vdash \theta$ pode ser realizado $n + 2$ vezes em total (tantas vezes como valores de verdade $A \in \mathcal{T}_{P^n}$). Assim, modificando $v_r(q_2)$ em cada caso, mas fixando o valor das valorações v_r aplicadas a cada q_j , com $3 \leq j \leq m$, chegamos sempre a $Q^A_2 \cup Q^r_3 \dots \cup Q^r_m \vdash \theta$.

Ou seja, podemos chegar aos $n + 2$ fatos seguintes (denotando por Γ_2 o conjunto $Q^r_3 \cup \dots \cup Q^r_m$, e escrevendo os diferentes conjuntos Q^A_2 segundo as definições do Lema I.2.8): ⁵

⁵Notar que aplicamos $n + 2$ vezes o Lema I.2.9. Ou seja, utilizamos até agora $(n + 2)^2$ valorações de P^n .

- 1) $\Gamma_2, (q_2 \wedge \neg q_2), (\neg q_2)^\circ \vdash \theta$
- 2) $\Gamma_2, (q_2 \wedge \neg q_2), (\neg q_2 \wedge \neg \neg q_2), (\neg^2 q_2)^\circ \vdash \theta$
- $\vdots$
- $\mathbf{n} - 2$) $\Gamma_2, (q_2 \wedge \neg q_2), \dots, (\neg^{n-3} q_2 \wedge \neg^{n-2} q_2), (\neg^{n-2} q_2)^\circ \vdash \theta$
- $\mathbf{n} - 1$) $\Gamma_2, (q_2 \wedge \neg q_2), \dots, (\neg^{n-2} q_2 \wedge \neg^{n-1} q_2), (\neg^{n-1} q_2)^\circ \vdash \theta$
- $\mathbf{n}$) $\Gamma_2, (q_2 \wedge \neg q_2), \dots, (\neg^{n-1} q_2 \wedge \neg^n q_2), (\neg^n q_2)^\circ \vdash \theta$

- $\mathbf{n} + 1$) $\Gamma_2, q_2^\circ, q_2 \vdash \theta$
- $\mathbf{n} + 2$) $\Gamma_2, q_2^\circ, \neg q_2 \vdash \theta$

Esses fatos são suficientes para obter, aplicando novamente o Lema I.2.9, $\Gamma_2 \vdash \theta$. Ou seja, $Q^r_3 \cup \dots \cup Q^r_m \vdash \theta$, onde $v_r(q_j)$ é um valor arbitrário para $3 \leq j \leq m$. Agora, para “eliminar” os conjuntos Q^r_3 devemos proceder da mesma forma que no realizado acima.

Em geral, aplicando $(n+2)^k$ valorações, podemos eliminar os diferentes conjuntos $Q^r_1, \dots, Q^r_k$, obtendo sempre, por sucessivas aplicações do Lema I.2.9, o seguinte fato:

$$Q^r_{k+1} \cup \dots \cup Q^r_m \vdash \theta$$

Mas, no caso em que finalmente $k = m$, chegamos a

- 1) $(q_m \wedge \neg q_m), (\neg q_m)^\circ \vdash \theta$
- 2) $(q_m \wedge \neg q_m), (\neg q_m \wedge \neg \neg q_m), (\neg^2 q_m)^\circ \vdash \theta$
- $\vdots$
- $\mathbf{n} - 2$) $(q_m \wedge \neg q_m), \dots, (\neg^{n-3} q_m \wedge \neg^{n-2} q_m), (\neg^{n-2} q_m)^\circ \vdash \theta$
- $\mathbf{n} - 1$) $(q_m \wedge \neg q_m), \dots, (\neg^{n-2} q_m \wedge \neg^{n-1} q_m), (\neg^{n-1} q_m)^\circ \vdash \theta$
- $\mathbf{n}$) $(q_m \wedge \neg q_m), \dots, (\neg^{n-1} q_m \wedge \neg^n q_m), (\neg^n q_m)^\circ \vdash \theta$

- $\mathbf{n} + 1$) $q_m^\circ, q_m \vdash \theta$
- $\mathbf{n} + 2$) $q_m^\circ, \neg q_m \vdash \theta$

Aplicando pela última vez o Lema I.2.9 chegamos finalmente a $\vdash \theta$, concluindo assim a demonstração do Teorema. $\square$

Lema I.2.11 *A axiomática $P1$ é correta e completa para P^1 .*

Demonstração: A prova deste fato é devida a J. Marcos (ver[Mar99]) $\square$.⁶

Teorema I.2.12 (Completude geral para o cálculo P^n) *Para todo n tal que $0 \leq n$ vale que a axiomática geral Pn é completa para os cálculos P^n .*

Demonstração: Imediata, da Observação I.2.7 e os Lemas I.2.10 e I.2.11. $\square$

I.3 Uma axiomática correta e completa para I^n

Mostraremos agora que uma axiomática geral para todos os cálculos da hierarquia I^n pode ser obtida a partir da axiomática geral Pn , modificando convenientemente alguns axiomas. É bom lembrar que, neste caso, a fórmula ϕ^* indica o “bom comportamento” da fórmula ϕ em relação à lei do terceiro excluído. Isto é, ϕ^* é uma abreviatura para a fórmula $(\neg\phi \vee \phi)$. Lembrar também que os conectivos $\vee$ e $\wedge$ são obtidos a partir de $\rightarrow$ e $\neg$ como foi indicado no Capítulo 3.

Definição I.3.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o sistema axiomático In da maneira seguinte*
Axiomas.

- A1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
- A2) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
- A3) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$
- A4) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$
- A5) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- A6) $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$

⁶A prova do lema também é baseada na clássica demonstração de Kálmar. Porém, os lemas análogos aos Lemas I.2.8 e I.2.9 têm leves diferenças com os aqui apresentados. Por outro lado, o Lema I.2.9 desta dissertação não pode ser generalizado ao caso $n = 1$, pois não seria possível “eliminar” a fórmula $(\neg q_1)^\circ$ de **1**), sendo este fato o motivo da inclusão do presente Lema de forma separada.

- A7) $\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
 A8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
 A9) $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$
 A10) $\phi \rightarrow \neg\neg\phi$
 A11) $\phi^* \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi)$
 A12) $(\phi \wedge \psi)^* \wedge (\phi \vee \psi)^* \wedge (\phi \rightarrow \psi)^*$
 A13) $(\neg^n \phi)^*$

Regras de inferência.

$$\text{Modus Ponens (MP): } \frac{\phi, \phi \rightarrow \psi}{\psi}. \quad \square$$

Observação I.3.2

Notar que, em relação à axiomática Pn , os axiomas modificados são somente aqueles que contêm fórmulas negadas. Isto é: A9) - A13). Em particular, A9) e A10) especificam que a lei de não contradição é válida em todos os cálculos da hierarquia. E, de A11) a A13) especifica-se em quais casos podemos operar com a lei de terceiro excluído. Notar também que, ainda quando A12) e A13) são expressos de forma similar aos axiomas respectivos da hierarquia Pn , obviamente seu significado é o dual, pois os conectivos de bom comportamento expressam leis diferentes para cada uma das hierarquias. $\square$

Provaremos a seguir a correção e completude para todos os cálculos da hierarquia I^n . Notemos que em muitos aspectos esta prova tem uma estrutura similar à completude da hierarquia P^n . Em geral limitar-nos-emos a reproduzir em forma total somente aqueles resultados que são obtidos a partir de raciocínios diferentes aos da seção anterior. Mesmo assim, todos os resultados que sejam precisos para atingir nosso objetivo serão enunciados.

Teorema I.3.3 (Teorema da Correção para In) *A axiomática dada na Definição I.3.1 é correta em relação às tabelas de verdade do cálculo I^n , para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Da mesma forma que no Teorema I.2.3, podemos verificar que cada axioma de In é uma tautologia de I^n . E, novamente, a regra MP preserva tautologias de In . $\square$

Proposição I.3.4 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, na axiomática In vale o Teorema da dedução. Isto é: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

Demonstração: De forma análoga à Proposição I.2.4. $\square$

Proposição I.3.5 *As seguintes propriedades valem no sistema axiomático In :*

- (1) $\vdash \psi \rightarrow \psi$ (Reflexividade.)
- (2) $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \phi \rightarrow \theta$ (Transitividade.)
- (3) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \vdash \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \theta)$ (Permutação.)

Demonstração: Este resultado também se demonstra de forma similar ao resultado respectivo para a axiomática Pn . $\square$

Lema I.3.6 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ valem as seguintes propriedades na axiomática In :*

- 1) $\phi \vee \psi \vdash \neg \phi \rightarrow \psi$
- 2) $\vdash \phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow \psi)$
- 3) $\phi^* \vdash \neg \neg \phi \rightarrow \phi$
- 4) $\phi^* \vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$
- 5) $\phi^* \vdash (\neg \phi)^*$
- 6) $\phi^* \vdash (\neg \phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \phi)$
- 7) $\phi^* \vdash \neg(\phi \vee \psi) \rightarrow \neg \phi$
- 8) $\neg(\phi^*) \vdash \phi \rightarrow \psi$
- 9) $\vdash (\psi^*)^*$

Demonstração:

1) Lembrar que, pela definição do conectivo $\vee$, $\phi \vee \psi$ é somente a abreviatura da fórmula $(\phi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \psi$. Logo, consideremos a seguinte demonstração:

- 1) $(\phi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \psi$ [Hip.]
- 2) $\neg \phi$ [Hip.]
- 3) $\phi \rightarrow \neg \phi$ [A1), 2)]
- 4) ψ [1), 3), MP]

E o enunciado é finalmente demonstrado a partir do Lema I.3.4.

2)

- 1) ϕ [Hip.]
- 2) $\phi \vee \psi$ [1), A6)]
- 3) $\neg \phi \rightarrow \psi$ [Item 1), 2)]

3) Considere a seguinte prova:

- 1) $\neg \phi \vee \phi$ [Hip.]
- 2) $\neg \neg \phi \rightarrow \phi$ [Item 1), 1)]

4)

- 1) ϕ^* [Hip.]
- 2) $\phi \rightarrow \psi$ [Hip.]
- 3) $\neg \psi$ [Hip.]
- 4) $\phi \rightarrow \neg \psi$ [3), A1)]
- 5) $\neg \phi$ [1), 2), 4), A11)]

5) Notar que $(\neg \phi)^*$ é uma abreviatura para a fórmula $(\neg \neg \phi \rightarrow \neg \neg \neg \phi) \rightarrow \neg \phi$. Logo, temos:

- 1) ϕ^* [Hip.]
- 2) $\neg\neg\phi \rightarrow \neg\neg\neg\phi$ [Hip.]
- 3) $\phi \rightarrow \neg\neg\phi$ [A10)]
- 4) $\phi \rightarrow \neg\neg\neg\phi$ [2), 3), Prop. I.3.5(2)]
- 5) $\neg\phi$ [1), 3), 4), A11)]
- 6) $\phi^* \rightarrow (\neg\phi)^*$ [1), 2), 5), Lema I.3.4]

6) Consideremos a seguinte prova em *In*:

- 1) ϕ^* [Hip.]
- 2) $\neg\phi \rightarrow \psi$ [Hip.]
- 3) $\neg\phi \rightarrow \neg\psi$ [Hip.]
- 4) $(\neg\phi)^*$ [1), Item **5)**]
- 5) $\neg\neg\phi$ [2), 3), 4), A11)]
- 6) ϕ [1), Item **3)**]

7)

- 1) ϕ^* [Hip.]
- 2) $(\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)) \rightarrow (\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\phi)$ [Item **4)**, 1)]
- 3) $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$ [A6)]
- 4) $\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\phi$ [2), 3)]

8) Consideremos a seguinte prova em *In*:

- 1) $\neg(\phi^*)$ [Hip.]
- 2) ϕ [Hip.]
- 3) ϕ^* [2), A7)]
- 4) $\phi^* \rightarrow (\neg(\phi^*) \rightarrow \psi)$ [Item **2)**]
- 5) ψ [1), 3), 4)]

9) Imediato por A12), A4) e A5), considerando que ϕ^* é uma abreviatura para $(\neg\phi \vee \phi)$. E com este último resultado concluímos a demonstração do Lema. $\square$

A partir dos resultados demonstrados no Lema I.3.6 é possível demonstrar a completude de I^n com relação a In . Porém, é preciso demonstrar de formas diferentes para o caso $n = 1$ e o caso geral para $n \geq 2$ (o caso $n = 0$ é trivial) ⁷:

Teorema I.3.7 (Sette - Carnielli) *A seguinte axiomática é correta e completa para I^1 :*

A_{SC1} : $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

A_{SC2} : $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$

A_{SC3} : $(\neg\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\phi)$

A_{SC4} : $\neg\neg(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$

Onde a única regra de inferência é MP.

Demonstração: Vide [SC95]. $\square$

Teorema I.3.8 (Completude para I^1) *$I1$ é completa com relação a I^1 .*

Demonstração: Pelo Teorema I.3.7 somente precisamos provar que as fórmulas A_{SC1} ... A_{SC4} são teoremas da axiomática $I1$. Mas A_{SC1} e A_{SC2} coincidem com A1) e A2) da Definição I.3.1. Por outro lado, em $I1$ vale, por A13), que $\vdash (\neg\phi)^*$. Logo, aplicando o Lema I.3.6(6) e a Prop. I.3.5(2) temos $\vdash (\neg\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\phi)$. Ou seja, A_{SC3} . E finalmente, como por A12) e A5) temos $\vdash (\phi \rightarrow \psi)^*$, pelo Lema I.3.6(3) vale $\vdash \neg\neg(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$. Isto é, A_{SC4} também é teorema de $I1$. $\square$

Lema I.3.9 *Seja ϕ uma fórmula de I^n , e $q_1, \dots, q_m$ suas componentes atômicas. Para cada valoração v e cada fórmula q_i , com $1 \leq i \leq m$, definimos o conjunto Q_i de fórmulas associadas da seguinte maneira:*

⁷Com efeito: uma axiomática correta e completa para $I^0 = CPC$ é dada (cf.[Men64]) por $A1'$: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$; $A2'$: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$ e $A3'$: $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$. Neste caso, $A1' = A1$; $A2' = A2$ e $A3'$ é consequência da combinação do Lema I.3.6.6 e A13).

$Se\ v(q_i) = F_1 \quad \text{então} \quad Q_i = \{\neg(q_i^*), (\neg q_i)^*\}$
 $Se\ v(q_i) = F_2 \quad \text{então} \quad Q_i = \{\neg(q_i^*), \neg((\neg q_i)^*), (\neg^2 q_i)^*\}$
 $\vdots$
 $Se\ v(q_i) = F_{n-1} \quad \text{então} \quad Q_i = \{\neg(q_i^*), \neg((\neg q_i)^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_i)^*), (\neg^{n-1} q_i)^*\}$
 $Se\ v(q_i) = F_n \quad \text{então} \quad Q_i = \{\neg(q_i^*), \neg((\neg q_i)^*), \dots, \neg((\neg^{n-1} q_i)^*), (\neg^n q_i)^*\}$
 $Se\ v(q_i) = F \quad \text{então} \quad Q_i = \{\neg q_i, q_i^*\}$
 $Se\ v(q_i) = T \quad \text{então} \quad Q_i = \{q_i, q_i^*\}$

Por outro lado, dada v , definimos a fórmula ϕ' associada a ϕ como:

$Se\ v(\phi) = F_j \quad \text{então} \quad \phi' = \neg^{j+1}\phi \quad \text{com } 1 \leq j \leq n$

$Se\ v(\phi) = F \quad \text{então} \quad \phi' = \neg\phi$

$Se\ v(\phi) = T \quad \text{então} \quad \phi' = \phi$

Seja $\Delta_\phi = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$. Logo, em In sempre vale $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Demonstração: Por indução na complexidade da fórmula ϕ :

CASO 1: Quando ϕ é atômica. Logo, se $v(\phi) = T$ ou $v(\phi) = F$, então $\phi' \in \Delta_\phi$. Por outro lado, se $v(\phi) = F_j$ com $1 \leq j \leq n$, temos que $\Delta_\phi \vdash (\neg^j \phi)^*$, e também $\Delta_\phi \vdash \neg((\neg^{j-1} \phi)^*)$, ou seja $\Delta_\phi \vdash \neg(\neg^j \phi \vee \neg^{j-1} \phi)$. Pelo Lema I.3.6(7), temos que $\Delta_\phi \vdash \neg^{j+1} \phi$.

CASO 2: ϕ é da forma $\neg\psi$. Logo, temos os seguintes subcasos:

Subcaso 2.1: Suponhamos que $v(\psi) = F$. Logo $v(\phi) = T$, e assim $\phi' = \neg\psi$. Logo, por (H.I), $\Delta_\psi \vdash \phi'$ e assim $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 2.2: Suponhamos que $v(\psi) = T$. Logo $v(\phi) = F$, e portanto $\phi' = \neg\neg\psi$. Por (H.I) temos que $\Delta_\psi \vdash \psi$ e logo, por A10) (e $\Delta_\psi \subseteq \Delta_\phi$) vale que $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 2.3: Seja $v(\psi) = F_j$, com $1 \leq j \leq n$. Logo $v(\phi) = F_{j-1}$. Temos portanto que $\phi' = \neg^j \phi = \neg^{j+1} \psi (= \psi')$. Logo, por (H.I), temos $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

CASO 3: ϕ é da forma $\psi \rightarrow \theta$. Logo, analisamos os subcasos seguintes:

Subcaso 3.1: Suponhamos $v(\psi) = F$. Logo $v(\phi) = T$, e assim $\phi' = \psi \rightarrow \theta$. Como pelo Lema I.3.6(2) temos $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ e por (H.I) vale que $\Delta_\psi \vdash \neg\psi$, aplicando MP obtemos $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 3.2: Quando $v(\psi) = F_j$, com $1 \leq j \leq n$. Logo $v(\phi) = T$, e portanto neste caso $\phi' = \psi \rightarrow \theta$. Para provar $\Delta_\phi \vdash \phi'$ primeiramente provaremos:

$$\Delta_\phi \vdash \neg(\psi^*) \quad (\mathbf{a})$$

Com efeito, como $v(\psi) = F_j$, temos que ψ somente pode ter a forma $\neg^k \beta$, com $k \geq 0$ e β atômica. Logo $v(\beta) = F_{j+k}$, com $j+k \leq n$. Portanto, temos que $Q_\beta = \{\neg(\beta^*), \neg((\neg\beta)^*), \dots, \neg((\neg^{j+k-1}\beta)^*), (\neg^{j+k}\beta)^*\}$. Mas como $j \geq 1$ temos que $\neg((\neg^k\beta)^*) \in Q_\beta$. Portanto $\Delta_\phi \vdash \neg(\psi^*)$, validando **(a)**. Considerando **(a)** e o Lema I.3.6(8), provamos assim que $\Delta_\phi \vdash \phi'$.

Subcaso 3.3: Se $v(\theta) = T$. Novamente temos que $\phi' = \psi \rightarrow \theta$. Como por (H.I) $\Delta_\theta \vdash \theta$, obtemos $\Delta_\phi \vdash \phi'$, por A1).

Subcaso 3.4: Se $v(\psi) = T$ e $v(\theta) = F_j$, com $1 \leq j \leq n$. Logo $\phi' = \neg(\psi \rightarrow \theta)$.

Como $v(\theta) = F_j$, considerando a prova de **(a)** no Subcaso 3.2, temos novamente que $\Delta_\phi \vdash \neg(\theta^*)$. Além disso, por (H.I) vale

$$\Delta_\phi \vdash \psi \quad (\mathbf{b})$$

Consideremos agora a seguinte prova em In :

- 1) $\Delta_\phi \vdash \neg(\theta^*)$ [(a)]
- 2) $\Delta_\phi \vdash \psi$ [(b)]
- 3) $\vdash (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ [Prop. I.3.5(1)]
- 4) $\vdash \psi \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta)$ [Prop. I.3.5(3), 3]
- 5) $\Delta_\phi \vdash (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta$ [2), 4), MP]
- 6) $\vdash \theta \rightarrow \theta^*$ [A7)]
- 7) $\Delta_\phi \vdash (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta^*$ [5), 6), Prop. I.3.5(2)]
- 8) $\vdash (\psi \rightarrow \theta)^*$ [A12), A5)]
- 9) $\Delta_\phi \vdash \neg(\theta^*) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \theta)$ [7), 8), Lema I.3.6(4)]
- 10) $\Delta_\phi \vdash \phi'$ [1), 9)]

Subcaso 3.5: Se $v(\psi) = T$ e $v(\theta) = F$. Logo, novamente, $\phi' = \neg(\psi \rightarrow \theta)$. Consideremos para este caso a seguinte prova em In :

- 1) $\Delta_\phi \vdash \psi$ [(H.I)]
- 2) $\vdash (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ [Prop. I.3.5(1)]
- 3) $\vdash \psi \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta)$ [Prop. I.3.5(3), 2)]
- 4) $\Delta_\phi \vdash (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta$ [1), 3), MP]
- 5) $\vdash (\psi \rightarrow \theta)^*$ [A12), A5)]
- 6) $\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ [5), Lema I.3.6(3)]
- 7) $\Delta_\phi \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \theta$ [4), 6), Prop. I.3.5(2)]
- 8) $\Delta_\phi \vdash \neg\theta$ [(H.I)]
- 9) $\Delta_\phi \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \neg\theta$ [8), A1)]
- 10) $\vdash (\neg(\psi \rightarrow \theta))^*$ [5), Lema I.3.6(5)]
- 11) $\Delta_\phi \vdash \phi'$ [10), 7), 9), Lema I.3.6(6)]

Com a análise deste último caso, o lema é finalmente demonstrado. $\square$

Proposição I.3.10 *Se θ é uma tautologia do cálculo I^n , então vale que $\vdash \theta^*$.*

Demonstração: Trivial, pois pelas tabelas de verdade de I^n , θ é da forma $\neg^k(\phi \# \psi)$ com $k \geq 0$ é $\#$ um conectivo binário. Logo, aplicando A12) e (no caso em que $k \geq 1$) o Lema I.3.6(5) k vezes, vale o resultado. $\square$

Lema I.3.11 *Seja $\Delta \cup \{q_1\}$ um conjunto de fórmulas de I^n , e θ uma tautologia de I^n . Suponha que valem os seguintes fatos:*

- 1) $\Delta, \neg(q_1^*), (\neg q_1)^* \vdash \theta$
- 2) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), (\neg^2 q_1)^* \vdash \theta$
- $\vdots$
- $\mathbf{n} - 1$) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*), (\neg^{n-1} q_1)^* \vdash \theta$
- $\mathbf{n}$) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), \dots, \neg((\neg^{n-1} q_1)^*), (\neg^n q_1)^* \vdash \theta$
- $\mathbf{n} + 1$) $\Delta, \neg q_1, q_1^* \vdash \theta$
- $\mathbf{n} + 2$) $\Delta, q_1, q_1^* \vdash \theta$

Então vale que $\Delta \vdash \theta$.

Demonstração: Assumamos as premissas acima indicadas, e provemos $\Delta \vdash \theta$. Com efeito:

Por A13) e **n**) temos que vale **n'**) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), \dots, \neg((\neg^{n-1} q_1)^*), \vdash \theta$

Comparando agora **n'**) e **n - 1**), e aplicando o Lema I.3.4 temos que vale:

a) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg((\neg^{n-1} q_1)^*) \rightarrow \theta$

b) $\Delta, \neg(q_1^*), \neg((\neg q_1)^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash (\neg^{n-1} q_1)^* \rightarrow \theta$

Por outro lado sabemos que vale

c) $\vdash ((\neg^{n-1} q_1)^*)^*$

do Lema I.3.6(9). E do Lema I.3.6(5) e de **c**) vale:

d) $\vdash (\neg((\neg^{n-1} q_1)^*))^*$

A partir de **d**) e **c**) podemos aplicar a Proposição I.3.6(4) em **a**) e **b**) respectivamente, e assim vale:

e) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg\theta \rightarrow \neg\neg((\neg^{n-1} q_1)^*)$

f) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg\theta \rightarrow \neg((\neg^{n-1} q_1)^*)$

Logo, de **e**) e **f**), e aplicando A3), Teorema da Dedução e transitividade temos

g) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg\theta \rightarrow [\neg((\neg^{n-1} q_1)^*) \wedge \neg\neg((\neg^{n-1} q_1)^*)]$

Por outro lado, da Proposição I.3.10 e do Lema I.3.6(5) vale $\vdash (\neg\theta)^*$, e assim, aplicando novamente o Lema I.3.6(4) temos

h) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg[\neg((\neg^{n-1} q_1)^*) \wedge \neg\neg((\neg^{n-1} q_1)^*)] \rightarrow \neg\neg\theta$

Como na conclusão da dedução **h**), o antecedente é somente uma instanciação do axioma esquema A9), podemos obter portanto

i) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \neg\neg\theta$

E novamente da Proposição I.3.10 (aplicando agora o Lema I.3.6(3)) obtemos

j) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-2} q_1)^*) \vdash \theta$

O procedimento aplicado de **a**) a **j**) pode resumir-se assim: considerando um conjunto qualquer de fórmulas Σ e uma fórmula qualquer α do cálculo I^n então, partindo das seguintes assunções:

- (1) $\Sigma \vdash \alpha^*$,
- (2) $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \theta$ e
- (3) $\Sigma \vdash \neg \alpha \rightarrow \theta$

(e utilizando o fato de que θ é tautologia) é possível obter $\Sigma \vdash \theta$. Agora, podemos comparar **j)** com o fato **n-2)**. E, procedendo de forma análoga aos passos **a),...,j)**, podemos chegar a

k) $\Delta, \neg(q_1^*), \dots, \neg((\neg^{n-3}q_1)^*) \vdash \theta$.

Podemos aplicar este procedimento novamente, considerando os fatos **1)** ... **n-3)** em ordem decrescente. Temos assim:

$$\Delta, \neg(q_1^*) \vdash \theta \quad (A)$$

Por outro lado, considerando os fatos **n+1)** e **n+2)** e o Lema I.3.4 temos $\Delta, q_1^* \vdash \neg q_1 \rightarrow \theta$ e também $\Delta, q_1^* \vdash q_1 \rightarrow \theta$. Considerando que q_1^* é hipótese das duas conseqüências acima indicadas, podemos aplicar o mesmo procedimento que o utilizado de **a)** a **k)** ⁸. Temos assim

$$\Delta, q_1^* \vdash \theta \quad (B)$$

Comparando (A) e (B), e aplicando o mesmo procedimento já utilizado, conjuntamente com o Lema I.3.6(9) chegamos finalmente a $\Delta \vdash \theta$. $\square$

Teorema I.3.12 (Completeness para I^n , $2 \leq n$) *Se θ é tautologia do cálculo I^n (com $2 \leq n$), então θ é teorema da axiomática I_n .*

Demonstração: Podemos aplicar exatamente o mesmo argumento que para a prova do Teorema I.2.10, a partir dos Lemas I.3.9 e I.3.11, simplesmente modificando os conjuntos Q_i associados a cada valor $v(q_i)$. $\square$

Teorema I.3.13 (Completeness geral) *I_n é completa e correta para I^n , com $n \in \mathbb{N}$.*

⁸É preciso considerar q_1^* como hipótese para poder aplicar o Lema I.3.6(4) nas fórmulas $q_1 \rightarrow \theta$ e $\neg q_1 \rightarrow \theta$.

Demonstração: Considerar Teoremas I.3.3, I.3.8 e I.3.12. $\square$

Observações I.3.14

- Notar que na prova do Teorema I.3.12 é preciso considerar $(n + 2)^m$ valorações de I^n no total, para poder demonstrar o Teorema I.3.12. Isto é, as valorações utilizadas fazem variar a totalidade de valores de $\mathcal{T}_{I^n}$ nas fórmulas atômicas de θ de todas as formas possíveis.
- Da mesma forma que para a hierarquia P^n , o procedimento aplicado no Teorema I.3.11 não pode ser generalizado para o caso $n = 1$, sendo por tal motivo necessários os Lemas I.3.7 e I.3.8.
- Notar que, assim como na axiomática P^n , não estudamos a independência dos axiomas de I^n . Por outro lado, a axiomática dada na Definição I.3.1 tem a vantagem de ser intuitiva o suficiente para expressar as propriedades gerais dos cálculos I^n . $\square$

I.4 Axiomática Rosser-Turquette para $I^n P^k$

Finalizaremos a análise axiomática das hierarquias P^n , I^n e $I^n P^k$ com uma nota referente a uma axiomatização alternativa possível para as hierarquias mencionadas.

É possível definir para certos cálculos n -valentes uma axiomática de tipo Hilbert de forma geral, denominada Axiomática Rosser-Turquette (cf.[Got01]). Textualmente, o resultado é enunciado como segue:

Teorema I.4.1 (Rosser-Turquette) *Seja $\mathcal{L}$ um cálculo com representação matricial m -valente com $m \geq 2$, em que seus valores $X \in \mathcal{T}$ serão denotados por $T_1, T_2, \dots, T_m$. Suponhamos que em $\mathcal{L}$ é possível definir os seguintes conectivos (não*

necessariamente primitivos) verificando as suas funções associadas (com X e Y como variáveis no conjunto $\mathcal{T}$ de valores de verdade) as propriedades expressas a seguir⁹ :

- Um conectivo $\rightarrow_L$ tal que $X \rightarrow_L Y \notin \mathcal{D}$ somente quando $X \in \mathcal{D}$ e $Y \notin \mathcal{D}$.
- Para cada $X \in \mathcal{T}$ existe uma função 1-ária J_X tal que $J_X(X) \in \mathcal{D}$, e $J_X(Y) \notin \mathcal{D}$, quando $X \neq Y$.

Logo, uma axiomática correta e completa para $\mathcal{L}$ é dada pelo seguinte conjunto de axiomas esquemas, sendo a única regra de inferência o Modus Ponens:

$$A1) \phi \rightarrow_L (\psi \rightarrow_L \phi)$$

$$A2) (\phi \rightarrow_L (\psi \rightarrow_L \theta)) \rightarrow_L (\psi \rightarrow_L (\phi \rightarrow_L \theta))$$

$$A3) (\phi \rightarrow_L \psi) \rightarrow_L ((\psi \rightarrow_L \theta) \rightarrow_L (\phi \rightarrow_L \theta))$$

$$A4_X) (J_X(\phi) \rightarrow_L (J_X(\phi) \rightarrow_L \psi)) \rightarrow_L (J_X(\phi) \rightarrow_L \psi), \text{ para cada } X \in \mathcal{T}$$

$$A5) (J_{T_m}(\phi) \rightarrow_L \psi) \rightarrow_L ((J_{T_{m-1}}(\phi) \rightarrow_L \psi) \rightarrow_L (\dots ((J_{T_1}(\phi) \rightarrow_L \psi) \rightarrow_L \psi) \dots))$$

$$A6_X) J_X(\alpha), \text{ quando } \alpha \text{ é uma constante da linguagem, e } X \text{ é o valor que denota } \alpha \text{ em } \mathcal{T}.$$

$$A7_X) J_X(\phi) \rightarrow_L \phi \text{ para todo } X \in \mathcal{D}.$$

$$A8_X) (J_{X_1}(\phi_1) \rightarrow_L (J_{X_2}(\phi_2) \rightarrow_L \dots (J_{X_m}(\phi_m) \rightarrow_L J_{X_t}(\#(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)))) \dots) \text{ para todo conectivo } m\text{-ário } \#, \text{ e valendo em } \mathcal{T} \text{ que } \#(X_1, \dots, X_m) = X_t.$$

Demonstração: Pode-se encontrar uma prova deste teorema em [Got01] $\square$

Teorema I.4.2 *Existe uma axiomática Rosser-Turquette para todo cálculo da Hierarquia $\{I_n P_k\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ (E portanto para as Sub-Hierarquias I^n e P^k).*

Demonstração: Seja o cálculo $I^n P^k$. Precisamos achar um conectivo que tenha as propriedades de $\rightarrow_L$. Obviamente esse conectivo é a implicação $\rightarrow$ do cálculo $I^n P^k$. Por outro lado, para cada um dos valores $F, F_1, \dots, F_n$ e $T, T_1, \dots, T_k$ precisamos definir um conectivo associado. Tal conectivo é definido da seguinte forma:

⁹Lembrar que usamos os mesmos símbolos para denotar os conectivos definidos em $\mathbb{L}$ e as suas funções associadas.

- $J_F(\phi) := \neg\phi \wedge (\phi)^*$
- $J_{F_i}(\phi) := \neg(\phi^*) \wedge \neg((\neg\phi)^*) \wedge \dots \wedge \neg((\neg^{i-1}\phi)^*) \wedge (\neg^i\phi)^*$ Para $1 \leq i \leq n$
- $J_T(\phi) := \phi \wedge (\phi)^\circ$
- $J_{T_j}(\phi) := \neg(\phi^\circ) \wedge \neg((\neg\phi)^\circ) \wedge \dots \wedge \neg((\neg^{j-1}\phi)^\circ) \wedge (\neg^j\phi)^\circ$ Para $1 \leq j \leq k$.

Das tabelas de verdade de $I^n P^k$ temos que as funções associadas aos conectivos acima definidos verificam as premissas do teorema anterior, e portanto é possível axiomatizar $I^n P^k$. $\square$

Observação I.4.3

Como é fácil ver, devido ao fato de que o conjunto de axiomas sugeridos é variável segundo a cardinalidade do conjunto de valores de verdade de um cálculo $I^n P^k$ dado, a axiomática encontrada é pouco operativa. Mesmo assim o resultado implícito que achamos interessante dentro desta última demonstração é o fato de ser possível caracterizar cada valor de verdade de $I^n P^k$ de forma unívoca a partir de conectivos da linguagem $\mathbb{L}$ do cálculo antes mencionado. Um problema interessante que propomos é achar uma axiomática de tipo Hilbert *com um número de axiomas fixo para todos os cálculos da Hierarquia*. $\square$

Bibliografia

- [BdR97a)] P. BLACKBURN, M. DE RIJKE, Why Combine Logics?, in *Combining Logics 1*, D.M. Gabbay, F.Pirri (eds.), *Studia Logica*, v.59, n.1, p 5-27,1997.
- [BdR97b)] P. BLACKBURN, M. DE RIJKE, Zooming in, zooming out, *Journal of Logic, Language and Information*, v.6 n.1, p.5-31, 1997.
- [Car90] W.A.CARNIELLI, Many Valued Logics and Plausible Reasoning. in *International Congress on Many-Valued Logics 20 (Proceedings)*, IEEE Computer Society, Charlotte University, North Carolina, p.328-35, 1990.
- [Car99] W.A. CARNIELLI, Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics. in *Frontiers in Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Marcel Dekker, p. 149-63, 1999.
- [CLM99] W.A. CARNIELLI, M. LIMA MARQUES, Society Semantics and Multiple-Valued Logics, *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, W.Carnielli, I.D'Ottaviano eds. in *Contemporary Mathematics*, vol. 235, American Mathematical Society, p. 33-52, 1999.
- [dCB] N.C.A DA COSTA, J.Y. BÉZIAU, Théorie de la valuation, *Logique & Analyse*, v.146. p 95 -117, 1994.
- [Dun86] J.M. DUNN, Relevance Logic and Entailment, *In Handbook of Philosophical Logic* (vol.III), D.M. Gabbay and F. Guenther, eds. Reidel Publ.Co, 1986.

- [Fei0?] H.A. FEITOSA, An approach to semantics for the Intuitionistic System I^1 (Versão preliminar), 200?.
- [Gab96] D.GABBAY, Fibred Semantic and the weaving of logics. Part 1: Modal and Intuitionistic Logics, *The Journal of Symbolic Logic*, v.61, n.1, p.1057-1120, 1996.
- [Got01] S. GOTWALD, A Treatise on Many-valued Logics, Research Studies Press, Ltd., 2001.
- [GP97] D. GABBAY, F. PIRRI, Introdução a *Combining Logics 1*, D.M. Gabbay, F.Pirri (eds.), *Studia Logica*, v.59, n.1, p 1-4,1997.
- [Jaś48] S. JAŚKOWSKI, Propositional calculus for contradictory deductive systems, *Studia Logica*, v.24, p. 143-157,1969. Tradução ao inglês do artigo original em polonês publicado em 1948.
- [LdC86] A. LOPARIC, N.C.A DA COSTA, Paraconsistency, paracompleteness and induction, *Logique et Analyse*, v.113, p. 73 -80, 1986.
- [LMS90] R. LEWIN, I. MIKENBERG, M.G.SCHWARZE, Algebrization of paraconsistent logic P^1 , *The Journal of Non-Classical Logic*, v.7, p. 145-155, 1990.
- [Mar99] J. MARCOS, Semânticas de Traduções Possíveis, Dissertação de Mestrado, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brasil, 1999.
- [Mar0?] J. MARCOS, Many Values, Many Semantics (Versão preliminar), 200?.
- [Men64] E. MENDELSON, Introduction to Mathematical Logic, 2a. ed. Van Nostrand Company, 1964.

- [Que98] G.QUEIROZ, Sobre a dualidade entre Intuicionismo e Paraconsistência, Tese de Doutorado IFCH-Unicamp, 1998.
- [RB79] N. RESCHER, R. BRANDOM, The Logic of Inconsistency, Basil-Blackwell, 1979.
- [Res93] N. RESCHER, Many-Valued Logic, 2a. ed. Gregg Revivals, 1993.
- [SC95] A.M. SETTE, W.A. CARNIELLI, Maximal Weakly-Intuitionistic Logics, *Studia Logica*, v.55. p 181-203., 1995.
- [Set73] A. M. SETTE, On the Propositional Calculus P^1 , *Mathematica Japonicae*, v. 18. p. 173 - 180, 1973.
- [SSC98] A. SERNADAS, C. SERNADAS, C. CALEIRO, Fibring of Logics as a Categorical Construction. Technical report, Departamento de Matemática, IST Lisboa, 1998.
- [Tsu98] M. TSUJI, Many-Valued Logics and Suszko's Thesis Revisited, *Studia Logica*, v.60. p 299-309, 1998.
- [Wój84] R.WÓJCICKI, Lectures on Propositional Calculi, Ossolineum, The Publishing house of the Polish Academy of Sciences, 1984.
- [ZSS0?] A. ZANARDO, A. SERNADAS, C. SERNADAS, Completeness preservation, a aparecer no *Journal of Symbolic Logic*.