Wagner de Campos Sanz

UMA INVESTIGAÇÃO ACERCA DAS REGRAS PARA A NEGAÇÃO E O ABSURDO EM DEDUÇÃO NATURAL

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em
28 / 07 / 2006

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Prof. Dr. Rodolfo Ertola Biraben

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves

Profª. Drª. Geiza Maria Hamazaki da Silva

Prof. Dr. Marcelo Finger

Profª. Drª. Itala L´Offredo D´Otaviano

Julho/2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Sanz, Wagner de Campos
Sa59i Uma investigação acerca das regras para a negação e o absurdo em dedução natural / Wagner de Campos Sanz. - Campinas, SP : [s. n.], 2006.

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica. 2. Teoria das demonstrações. 3. Negação (Lógica). 4. Dedução natural. I. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. II.Título.

(mfbm/ifch)

Palavras chaves em inglês (keywords) :
Deductive logic
Proof theory
Negation (Logic)
Deduction (Logic)

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Doutorado em Filosofia

Banca examinadora:
Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (orientador)
Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Prof. Dr. Rodolfo Ertola Biraben
Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves
Profª. Drª. Geiza Maria Hamazaki da Silva
Prof. Dr. Marcelo Finger (suplente)
Profª. Drª. Ítala L'Offredo D'Otaviano (suplente)

Data da defesa:
28/07/2006

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Abel Lassalle Casanave, a Luiz Carlos Pereira, a Javier Legris, a Jorge Molina e a José Seoane com os quais discuti amplamente os temas desta tese. Suas opiniões, sugestões e críticas foram de valor inestimável. De modo geral, agradeço aos demais participantes dos Colóquios Cone-Sul de Filosofia das Ciências Formais. Também quero lembrar o proveito que tirei de algumas trocas de idéias com Daniel Alves e Rodolfo Ertola

Em segundo lugar quero agradecer ao meu orientador Marcelo Coniglio pelas sugestões e apoio para o desenvolvimento da pesquisa, bem como aos demais professores e funcionários do CLE e do IFCH. Ressaltamos em particular o papel de destaque que teve a biblioteca do CLE para realização das nossas investigações, em especial Eliana Marquetis.

Em terceiro lugar gostaria de agradecer o apoio e incentivo recebido dos colegas da UFG, assim como o incentivo que nos aportam os alunos com suas inquietações e sua capacidade de nos obrigar a reelaborar nossas concepções, em particular: meus monitores de lógica na UFG, Alexandre, Ricardo, Wellington, Marcondes, Stefano, Cristina, Alessandro, Toni, Renata, Paulo, Patrícia e Renato; e à aluna Helena, pela suas questões incisivas. Somos gratos à prof[a] Belkiss Mendonça[†], que nos franqueou acesso ao material bibliográfico do prof. Simão Mendonça[†]. Na pessoa de todos eles agradeço ao povo acolhedor de Goiás.

Em quarto lugar agradeço de coração à minha esposa Helena Reis e a sua mãe Yolanda Reis que me deram imensurável apoio, constante e cotidiano. Se Deus existe, ele sabe o quanto lhes devo.

Na esperança de ter acertado mais do que errado
E de que o balanço seja suficiente para honrá-los,
Dedico este trabalho
Às minhas filhas Ana e Camila,
Aos meus pais Wilson e Romilda
E à minha esposa Helena.

Sumário

Resumo **13**

Abstract **13**

Introdução **15**

Capítulo I O Conceito de Dedução e o Problema da Negação **35**

1. Os Conceitos de Prova, Argumento e Conseqüência Dedutiva **39**

1.1. Os Intuicionistas e os Sistemas de Dedução Natural 43

1.2. Dificuldades na Posição Intuicionista 50

1.3. Uma Proposta Alternativa para Interpretar os Sistemas de Dedução Natural 60

1.4. A Definição Formal do Conceito de Conseqüência Dedutiva 70

2. Acerca da Negação **73**

2.1. Regra de Introdução para a Negação 73

2.1.1. Outras Propostas Elucidatórias Relacionadas 81

2.1.2. Negação versus Conseqüência Dedutiva 85

2.1.3. Observações acerca do Cálculo de Seqüentes 86

2.2. Regra de Introdução para a Proposição Absurda 90

2.3. Observações quanto aos Parâmetros Proposicionais 97

2.4. Existem Provas Canônicas da Negação? 98

2.5. Refutabilidade e Absurdidade 100

2.5.1. Curry e o Conceito de Negação 101

3. Considerações Finais **111**

Capítulo II Sistemas Lógicos de Dedução Natural – Parte I **113**

1. Sistemas Minimais sem Dedução Indireta **115**

1.1. O Sistema Minimal $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ 115

1.2. O Sistema Minimal 116
1.2.1. O que Podemos Representar com o Sistema Minimal 116
1.3. O Sistema Minimal para Preservação da Falsidade 121
1.4. Regras de Dedução Natural e Sintaxe 127
1.5. Rejeição e Refutabilidade 128
1.6. Faria Sentido Adicionar a Negação aos Sistemas Minimais? 130
1.7. Tautologicidade Minimal no Sistema para Preservação da Falsidade 135
1.8. A Dualidade entre Implicação e Desimplicação 137
1.9. Sistema Minimal para a Falsidade com Implicação 141
1.10. Convergência entre as Duas Noções de Refutabilidade acima Definidas 142

2. Sistemas Minimais com Dedução Indireta 144
2.1. Sistema Peirce para $\{\wedge,\rightarrow,\forall\}$ 156
2.2. Sistema Peirce para $\{\wedge,\rightarrow,\forall\}$ com Regra Peirce Básica 158
2.3. Que Sentido Faria a Negação no Sistema Peirce? 160
2.4. O Sistema para a Refutabilidade de López-Escobar 163

3. Considerações Finais 169

Capítulo III Sistemas Lógicos de Dedução Natural – Parte II 171

1. Sistemas Intuicionistas 171
1.1. Observações acerca do Absurdo 174
1.2. Observações acerca da Regra de Introdução do Absurdo 180
1.3. Faria Sentido um Sistema Intuicionista para a Preservação da Falsidade? 180
1.4. Tradução de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{M}$ 185
1.5. Observações acerca da Equivalência das Regras Indiretas 186

2. Sistemas Clássicos 186
2.1. Observações sobre o Sistema Clássico para a Preservação da Falsidade 194
2.2. Sistema Clássico para $\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}$, ... 196
2.3. Sistema Clássico para $\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}$ com Regra cm Básica 198
2.4. Sistema Clássico para $\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}$ 200
2.5. Tradução de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{P}$ 202
2.6. Observações acerca das Regras de Dedução Indireta 203
2.7. O Problema da Desimplicação 204

3. Outros Sistemas Construtivos 206
3.1. Até onde a Dedução Indireta é Construtivamente Admissível? 206
3.2. O Sistema $\mathcal{J}cm'$ 208
3.3. Os Sistemas $\mathcal{J}cm_o$, $\mathcal{J}cm_o^-$, $\mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$ 214

4. As Regras Extralógicas de uma Teoria e o Uso de Suposições 217

5. Considerações Finais 229

Capítulo IV Forma Normal, Reduções, Permutações e Simplificações 239

1. Da Utilidade dos Rodeios 239

2. O Problema da Harmonia entre as Introduções e as Eliminações 241
2.1. Observação acerca da Validade das Regras de Introdução-Eliminação 247

3. Rodeios 248
3.1. Pares Operacionais Imediatos 248
3.1.1. Observação sobre o Descarte de Suposições 251
3.1.2. Observações acerca dos Parâmetros 252
3.2. Par Operacional Imediato para $\perp$ 252
3.2.1. O Princípio de Inversão e a Falta de Regra de Introdução de Absurdo 256
3.2.2. O Princípio de Harmonia para o Absurdo 260
3.2.3. A Regra de Eliminação do Absurdo e o Princípio de Inversão 261
3.3. Pares Permutativos de Eliminações 264
3.4. Par Permutativo Imediato para Consequentia Mirabilis 269
3.5. Como Justificar a Permutação sobre Consequentia Mirabilis? 274
3.6. Da Permutabilidade Geral das Regras de Dedução Indireta 277
3.6.1. Observação sobre o Conteúdo Computacional das Provas Clássicas 287

4. Pares/Unidades Multiplicativas x Não-Multiplicativas 288

5. Redução 289

6. Convenção e Notação 289

7. Forma Normal 290
7.1. IE-Forma para Derivações Puras 291
7.2. IE-Forma e Consistência 293
7.3. Propriedade da Subfórmula 299

7.4. Unicidade da Forma Normal 299

8. Outros Tipos de Rodeios 302

8.1. Simplificações sobre as Derivações 302

8.1.1. Rejeitando as Simplificações para e$\vee$ e e$\exists$ 302

8.1.2. Rejeitando as Simplificações para i$\bot$ 306

8.1.3. Acerca da Simplificação Envolvendo E$\bot$ 306

8.1.4. Simplificações Acolhidas 307

8.1.4.1. Pares de Regras Simplificáveis 308

8.1.4.2. Unidades Simplificáveis 315

8.2. Acerca dos Critérios de Admissibilidade para Simplificações 317

9. Rodeios e Forma Normal 318

9.1. Propriedades das Operações Não-Multiplicativas 319

9.2. O Valor Redutivo dos Novos RDs 320

10. Considerações Finais 323

Capítulo V O Processo de Normalização 327

1. Esquemas Genéricos para as Operações sobre as Derivações 327

2. Definições de Normalização e Confluência 331

3. Exemplos de Sistemas Sem Normalização 333

4. Hauptsatz para LJ* 335

5. Normalização Fraca para Dedução Natural 338

5.1. Normalização Fraca com Cota Para $\mathcal{G}cm'$ 340

5.2. Normalização Fraca com Consequentia Mirabilis Não-Restringida 352

6. Finitude de Toda Cadeia de Redução via Propriedade da Validade Forte 359

7. Confluência 371

8. Definição da Pior Seqüência 394

9. Considerações Finais 395

Capítulo VI Cotas e Operação de Expansão Sobre Derivações 397

1. Operação de Expansão 397

1.1. Pares Não-Imediatos e a Forma Normal Expansiva 397

1.1.1. Forma Normal Expansiva para C' 402
1.1.2. Novas Operações sobre as Derivações em C' 404
1.1.2.1. Uniformização 404
1.1.2.2. Operação de Expansão 410
1.2. Normalização e Confluência Para Multiplicação com Cota 414
1.2.1. Normalização Fraca com Cota para as FNEs 415
1.2.2. Church-Rosser e Finitude para a Multiplicação 419
1.2.3. A Estrutura da Prova de Normalização Forte para a Multiplicação 424
1.2.4. Valor de Indução 424

2. Conseqüências da Operação de Expansão 425
2.1. Normalização Forte para C' 425
2.2. Cotas para a FN e para a Seqüência de Redução 430
2.3. Cotas no Fragmento $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ 431
2.3.1. O Processo de Cotação 438
2.3.2. Melhoria nas Cotas 439
2.4. Cota sem Valor no Sistema C'? 441

3. Considerações Finais 450

Capítulo VII Conclusão 451

Apêndice - Conceitos Básicos de Dedução Natural 461

1. A Proposição e a sua Forma 462
1.1. Símbolos 463
1.2. Fórmulas 464

2. Observação quanto à Representação das Fórmulas 468
2.1.1. Observações acerca da Árvore de Construção de uma Fórmula 468
2.1.2. Observação acerca dos Parâmetros 469
2.1.3. Observação acerca do Papel dos Quantificadores em uma Fórmula 470
2.1.4. Observação acerca da Identidade Sintática entre Fórmulas 471
2.1.5. Observação acerca das Definições Explícitas 471
2.2. Operadores Lógicos Definidos 471
2.3. Notações 471

3. Derivações 472

3.1. Derivações e Regras Lógicas para Dedução Natural 474
3.2. Caracterização das Regras Lógicas 476
3.2.1. Observações quanto à Natureza da Validade de uma Regra 480
1.1.1.1. A Harmonia das Eliminações com respeito às Introduções 483
3.2.2. Mais Observações quanto à Operação de Substituição Sintática 487
3.2.3. Observações acerca da Semântica dos Operadores Lógicos 488
3.3. Regras Não-Contempladas no Quadro Anterior.....490
3.3.1. A Regra de Eliminação do Absurdo.....490
3.3.2. Regras de Dedução Indireta.....490
3.4. Árvores de Derivação.....491
3.4.1. Observações sobre o Descarte de Suposições 497
3.4.2. Observações quanto aos Parâmetros Individuais 499
3.4.3. Observações quanto à Identidade das Derivações.....502
3.5. Notações 503

Bibliografia Referida.....505

Bibliografia Adicional 511

Índice Remissivo 513

Resumo

O objetivo desta tese é o de propor uma elucidação da negação e do absurdo no âmbito dos sistemas de dedução natural para as lógicas intuicionista e clássica. Nossa investigação pode ser vista como um desenvolvimento de uma proposta apresentada por Russell há mais de cem anos e a qual ele parece ter abandonado posteriormente. Focaremos a atenção, em primeiro lugar, sobre a negação e, depois, como conseqüência das propostas para a negação, sobre a constante de absurdo. Nosso ponto de partida é, na verdade, um problema de natureza conceitual. Questionaremos a correção e a adequação da análise da negação e do absurdo atualmente predominante no meio-ambiente de dedução natural de estilo gentzeniano. O questionamento dessas análises adota como ponto focal o conceito de hipótese. O conceito de hipótese é uma noção central para os sistemas de dedução natural e a nossa proposta de análise desse conceito servirá de esteio para a formulação das propostas elucidatórias para a negação e o absurdo dentro dos sistemas de dedução natural.

Abstract

The purpose of this thesis is to present an elucidation of negation and absurd for intuitionist and classical logics in the range of natural deduction systems. Our study could be seen as a development of a proposal presented by Russell over a hundred years ago, which he presumably abandoned later on. First, we will focus on negation and then on the absurd constant, as a consequence of the claims we are making for negation. As a matter of fact, our starting point is a problem of a conceptual nature. We will question the correctness and the adequacy of the analysis of negation and absurd, prevailing nowadays in the Gentzen-style natural deduction circle. The concept of hypothesis is the focus point in questioning these analyses. The concept of hypothesis is a central notion for natural deduction systems and the purpose of our analysis of this concept is to support the formulation of elucidative propositions for negation and absurd in natural deduction systems.

Introdução

O objetivo geral desta tese é o de propor uma elucidação da negação e do absurdo no âmbito dos sistemas de dedução natural para as lógicas intuicionista e clássica, bem como alguns de seus subsistemas. Nossa investigação pode ser vista como um desenvolvimento de uma proposta apresentada por Russell há mais cem anos, que ele parece ter abandonado posteriormente. Focaremos a atenção, em primeiro lugar, sobre a negação e, depois, como conseqüência das propostas para a negação, sobre a constante de absurdo. É imensa a quantidade de bibliografia que trata desse mesmo assunto, inclusive em dedução natural, e, dessa forma, não teremos como tratá-lo exaustivamente. As reflexões aqui contidas farão referência sobretudo àqueles materiais que, de algum modo, envolvem dedução natural. Nosso ponto de partida é, na verdade, um problema de natureza conceitual. Questionaremos a correção e a adequação da análise da negação e do absurdo atualmente predominante no meio-ambiente de dedução natural de estilo gentzeniano.

Nessa introdução faremos uma breve apresentação de natureza metodológica envolvendo o processo de elucidação conceitual e a relevância desse processo para os temas que nos que propusemos tratar.

A posição interpretativa dominante no meio-ambiente de dedução natural de estilo gentzeniano nutre certa simpatia pelas teses intuicionistas e por isso nós a designaremos de intuicionismo natural. Pretendemos examinar criticamente suas propostas no decorrer da tese.

Muitos são os autores que poderíamos classificar de intuicionistas naturais. Entre esses, com certeza, incluiríamos Prawitz, Martin-Löf e Dummett[1]. Basicamente, segundo esse ponto de vista, as derivações seriam constructos que elucidariam o conceito de prova, em particular o conceito de prova construtiva. Mas, embora essa interpretação possa hoje parecer natural, é discutível que ela estivesse presente nas formulações originais de Gentzen [Gen35] ou de

[1] O próprio Prawitz indica o mesmo trio no prefácio à edição Dover de [Pra65], pág. viii.

Jaskowski [Jas34]. De nossa parte, queremos apresentar uma interpretação alternativa àquela dos intuicionistas naturais, embora mantendo uma parcela importante do seu aparato conceitual e de seus resultados. A necessidade de um novo ponto de vista surgiu quando passamos a acreditar na possibilidade de uma elucidação da negação e do absurdo distinta daquela por eles sugerida.

Nossa proposta elucidatória adotará outra concepção do papel que as derivações em dedução natural desempenham na análise dos princípios lógicos. Para nós, as derivações em dedução natural são mais bem interpretadas como uma tentativa de esclarecer o conceito de conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais[2] envolvendo constantes lógicas. Ou ainda, desde outra perspectiva, as regras de dedução seriam regras que estabeleceriam ou fixariam uma extensão a qualquer relação de conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais elementares. Nessa caracterização das constantes lógicas por meio das regras de dedução, o único conceito usado é o conceito de conseqüência dedutiva. A relação de conseqüência dedutiva que temos em mente é distinta da relação de conseqüência semântica tarskiana [Tar36], embora a relação de conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais implique uma relação de conseqüência tarskiana.

Entendemos que, primariamente, a relação de conseqüência dedutiva vigora entre proposições e formas proposicionais. A relação vigorará entre as asserções somente de forma derivada, na medida em que o conteúdo de uma asserção é uma proposição. Assim, desde o nosso ponto de vista, as regras de dedução natural não devem ser interpretadas como regras inferenciais, ou seja, regras que envolvem asserções. A razão é que achamos difícil considerar como regras de inferência aquelas regras cujas condições de aplicabilidade fazem referência relevante ao uso de hipóteses. Se não fizermos uma distinção entre as regras de dedução e as regras de inferência, o que em nossa opinião ocorreria no intuicionismo natural, acabaríamos por gestar uma interpretação do conceito de hipótese que parece ser criticável sob vários aspectos. Considere-se, por exemplo, que, em um argumento que envolva um raciocínio por absurdo, a hipótese será finalmente rejeitada. Desse modo, seria preciso fazer um malabarismo sofisticado para assimilar aquela suposição a uma asserção. Por isso, o exame do conceito de suposição tomará uma parcela importante da nossa investigação.

A elucidação da negação e do absurdo, presente na maior parte da literatura de dedução natural para as lógicas intuicionista e clássica, apresenta regras de eliminação para essas constantes lógicas, mas ou não apresenta regras de introdução ou, quando apresenta, o faz de

[2] Para um esclarecimento acerca da forma como os conceitos de proposição e forma proposicional estão sendo usados nesta tese ver o Apêndice.

modo que a constante já ocorre nas condições de aplicabilidade da regra. Porém, um dos princípios elementares que as elucidações via dedução natural devem respeitar é o de que a parte nuclear do uso dedutivo das constantes lógicas deve ser explicitada por meio de uma díade de regras: regras de introdução e regras de eliminação. Um segundo princípio é o de que a descrição do uso da constante não pode estar condicionada por uma compreensão prévia da mesma. No entanto, é questionável que esses princípios tenham sido seguidos à risca na literatura.

De modo a poder aquilatar a tarefa que estamos nos propondo, talvez não seja demasiado lembrar a opinião de um professor importante para a nossa formação, A. Raggio [Rag88]:

> *Como é bem conhecido, a tese de Gentzen começa construindo um sistema de dedução natural para a teoria da quantificação. Pareceria impossível que uma aproximação entre a lógica sistemática e certos fatos psicológicos pudesse ter qualquer relevância teórica. No entanto por meio do seu sistema de dedução natural Gentzen mostrou que os conectivos – exceto a negação – e os quantificadores podem ser analisados por regras de introdução e eliminação de tal modo que os as últimas são o inverso das primeiras. ... de modo a prevenir e clarificar certas dificuldades conectadas com a negação, Gentzen, na segunda parte de sua tese, desenvolveu um novo sistema: a lógica de seqüências. Nesse segundo sistema as regras naturais de eliminação tornam-se regras de introdução no antecedente. Nesse novo sistema a negação deixa de ser problemática "como que por mágica".*[3]

Assim, se Raggio estava correto, a formulação de regras de introdução e de eliminação para a negação em dedução natural é um problema para o qual o admirável Gentzen não pôde encontrar solução satisfatória em termos de dedução natural. Isso nos leva a crer que esse problema seja digno de atenção e respeito e que uma investigação sobre esse tema seja altamente desejável.

As regras em díades introdução-eliminação propiciam um esclarecimento para o núcleo do significado dedutivo das constantes, caso certas condições sejam cumpridas. Para que o esclarecimento seja efetivo, a condição principal a ser preenchida é a de que as regras só poderiam fazer referência a uma outra constante qualquer caso o uso dedutivo dessa constante já estivesse claramente estabelecido. Desse modo, deveria haver um conjunto mínimo de constantes cujas regras não fariam nenhuma referência a outras. A isso podemos chamar de propriedade de independência. Da propriedade de independência seguir-se-ia a propriedade da completa

---

[3] *As is well known, Gentzen´s thesis begins building a system of natural deduction for quantification theory. It seems impossible that an approximation of systematic logic to psychological facts could have any theoretical relevance. Nevertheless by means of this system of natural deduction Gentzen showed that the connectives – except negation – and the quantifiers can be analyzed by introduction and elimination rules in such a way that the latter are the inverses of the former. ... in order to prevent and clarify certain difficulties connected with negation, Gentzen, in the second part of his thesis, developed a new system: the logic of sequences. In this second system the natural rules of elimination become rules of introduction in the antecedent. In this new system negation loses "as by magic" all its problems.*

separabilidade para as constantes lógicas básicas. A elucidação do uso dedutivo dessas constantes, por meio de regras de introdução e de eliminação independentes, seria, assim, similar a uma definição explícita.

Nossa proposta elucidatória para a negação e o absurdo compreende a redução das duas a um denominador comum. A nosso ver, a condição para estabelecer que a negação de uma proposição ou forma proposicional é conseqüência dedutiva de uma lista de hipóteses, ou que o absurdo é conseqüência dedutiva de uma lista de hipóteses, requer a percepção de que a situação correspondente à lista de hipóteses é impossível. A constatação de que a situação que putativamente corresponderia à lista de hipóteses é uma situação impossível é, na verdade, uma constatação de que a própria lista de hipóteses não é realizável, ou seja, de que não há situação de fato sob a qual todas as hipóteses sejam verdadeiras. Um meio de representar essa noção dentro do sistema, a noção de irrealizabilidade de uma lista de hipóteses, será a de mostrar que, sob a suposição da sua realizabilidade, qualquer proposição seria realizável. Do modo como vemos a questão, temos, agora, como conseqüência positiva do emprego desse conceito de impossibilidade, a faculdade de aplicar distinções mais finas sobre o conjunto das situações que consideraríamos como situações suficientes para a introdução de uma negação ou do absurdo. Não só situações de contradição em que a lista de hipóteses contém uma proposição, ou forma proposicional, e sua negação serão consideradas como situações suficientes para introduzir a negação, mas também situações de contrariedade, situações que, a nosso ver, são formas elementares da constituição do que entendemos pelo conceito de incompatibilidade. Os termos *contradição* e *contrariedade* estão sendo aqui empregados em um sentido que se origina em Aristotételes[4]. Lembramos que esses dois conceitos não se confundem na lógica aristotélica. Quando alguém diz que um conjunto de sentenças é contraditório porque nenhum modelo o satisfaz, está justamente apagando a distinção entre contrariedade e contraditoriedade. Parece-nos melhor dizer que o conjunto das sentenças é incompatível, quando isso ocorre, ao invés de dizer que ele é contraditório. Desse modo, o conceito de contradição ficaria reservado para um uso mais específico. Contraditórias são certos pares de proposições que corresponderiam a A e $\sim A$. Uma conseqüência relevante de tratar a negação e o absurdo dessa forma está no fato de poder reconduzir o conceito de impossibilidade ao conceito de conseqüência dedutiva. Mas, segundo nosso ponto de vista, como essa é justamente a noção objeto de elucidação dos sistemas de dedução natural, então a negação e o absurdo devem poder ser elucidados completamente em

[4] Acerca desses dois conceitos ver [Bla69].

termos de regras de dedução natural. Ao menos será possível fazer essa recondução se certas condições forem aceitas. Esperamos esclarecê-las no decorrer da investigação.

As regras de eliminação da negação e do absurdo na lógica clássica e na lógica intuicionista são concebidas de tal modo que ambas incorporam o princípio de *ex falso quodlibet*. A validade desse princípio tem sido historicamente debatida. Para um número não desprezível de estudiosos, esse princípio necessita de algum tipo de justificação. Queremos, no decorrer da tese, aduzir um argumento em suporte da sua validade dentro de determinados contextos. O argumento a ser aduzido funcionaria sobretudo para aqueles contextos em que os sistemas de lógica são pensados em estreita conexão com a formalização das teorias matemáticas. Na verdade, queremos mostrar que a validade do princípio está estreitamente relacionada à aceitação ou rejeição de uma determinada proposta elucidatória para o uso da negação e do absurdo dentro de um determinado contexto. O esteio da proposta estará dado justamente por uma regra de introdução para cada uma das constantes, no caso a negação e o absurdo, e esse é um dos pontos importantes da nossa tese.

A estrutura da justificativa é, em linhas gerais, a seguinte. A aceitabilidade do princípio de *ex falso quodlibet* decorrerá da aceitabilidade da regra de eliminação da negação ou do absurdo e a aceitabilidade dessas regras decorrerá da aceitação das respectivas regras de introdução. Basicamente, isso se dará naqueles contextos em que for importante preservar a homogeneidade da estrutura da prova das proposições que sejam instância de uma mesma forma válida. Contudo, admitimos, sempre restará a possibilidade de rejeitar as regras de introdução que iremos propor, inclusive por razões pragmáticas. Como a forma pela qual estamos interpretando a negação está considerando o âmbito de formalização das teorias matemáticas, é admissível que, sob outros usos, tais regras sejam inapropriadas. Em todo caso, aquele que venha a rejeitar essas regras tem a liberdade de propor outras, embora também tenha o ônus de explicá-las e justificá-las.

Além do princípio de *ex falso quodlibet*, há uma classe de princípios que aparece constantemente associada ao uso da negação e do absurdo na lógica clássica, mas que é rejeitada dentro da lógica intuicionista. Essa classe de princípios é o que podemos chamar de classe dos princípios de dedução indireta. Desde o ponto de vista da elucidação que estamos propondo, esses princípios estenderiam o conceito de conseqüência dedutiva. A diferença entre a lógica intuicionista e a lógica clássica repousa exatamente sobre a ausência/presença desses princípios. Nós nos proporemos, no decorrer da investigação, a determinar qual forma de regra de dedução indireta seria a mais adequada para definir a lógica clássica a partir da intuicionista e qual forma de regra seria minimamente necessária e suficiente para incorporar esses princípios a um sistema.

Aliás, uma idéia que também é considerada uma noção central dos sistemas de dedução natural é a de que o conjunto de regras a partir do qual esclarecemos as conexões lógicas entre as proposições/formas proposicionais está constituído de regras que são as mais elementares possíveis. Sob esse aspecto, veremos que existem boas razões para questionar a forma usual de definir a lógica clássica nos sistemas de dedução natural comumente encontrados na literatura, pois a regra empregada, a assim chamada regra de absurdo clássico, envolve eliminação do absurdo e dedução indireta ao mesmo tempo, mescladas em uma mesma regra.

Do nosso ponto de vista, os princípios de dedução indireta não tratariam especificamente de nenhuma constante lógica, embora a constante proposicional de implicação seja a constante mais intimamente afetada ao introduzirmos a regra. A razão para isso parece ser a de que essa constante corresponde à expressão lingüística de conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais. Assim, aquilo que uma regra de dedução indireta expressaria é mais ou menos o seguinte: se da suposição de que uma determinada fórmula tem uma conseqüência segue-se a própria fórmula como conseqüência, então essa fórmula já era estritamente conseqüência das demais hipóteses envolvidas. Em certo sentido, essa extensão do conceito de conseqüência dedutiva transforma situações de conseqüência dedutiva negativa em situações de conseqüência dedutiva positiva. Os princípios de dedução indireta, ao serem incorporados a um sistema de dedução natural, produziriam uma extensão do conceito de conseqüência dedutiva, caracterizado dentro do sistema. Mas, assim, justamente pelo fato de que o núcleo de significação das constantes lógicas estava esclarecido por meio de regras de dedução, de introdução e eliminação, aparecerá uma nova franja de significado dedutivo para essas constantes, resultante da modificação sobre o conceito de conseqüência dedutiva. Logo, para que a formulação usual da lógica clássica em dedução natural seja considerada admissível, deveríamos ou romper com o princípio estrito de que a elucidação das conexões lógicas se dá unicamente por meio de díades, admitindo uma terceira forma de regras de dedução natural, ou romper com a restrição de que essas regras devem ser totalmente independentes. A segunda ruptura possui certos atrativos, pois algumas constantes lógicas podem ser definidas explicitamente no sistema intuicionista e, para elas, a propriedade de independência falha. Às vezes, falha na regra de introdução; outras vezes, na regra de eliminação. Todavia, sobre esse assunto ainda é preciso efetuar investigações mais aprofundadas que aquelas que desenvolveremos em nossa tese.

Temos usado nos parágrafos acima dois termos fortemente carregados de significado e deveríamos adotar a precaução de melhor explicitar o significado dos conceitos envolvidos. São eles os conceitos de *princípio lógico* e de *elucidação*.

Com respeito ao primeiro, os princípios lógicos geralmente são entendidos como sentenças logicamente verdadeiras e fundamentais. Porém, o nosso uso da expressão *princípio lógico* não será exatamente esse. Consideraremos que cada princípio lógico corresponde, na verdade, a uma regra de dedução correta e, mais ainda, a uma regra que podemos chamar de elementar ou primitiva. Grosso modo, há duas formas sob as quais os princípios são encarados como sentenças válidas: um ponto de vista que podemos chamar de ontologizante e um ponto de vista que podemos chamar analítico. Segundo o ponto de vista ontologizante, os princípios lógicos são sentenças verdadeiras que apresentam certas características essenciais do mundo. Segundo o analítico, os princípios são sentenças vazias de conteúdo informativo sobre o mundo. Todavia, nós acreditamos que há uma outra forma de conceituar os princípios lógicos. Ela consiste em dizer que, de algum modo, os princípios lógicos são inerentes à atividade racional. Eles corresponderiam a certas operações ou ações fundamentais que fazem parte da atividade racional humana. Por atividade racional entendemos a arte de argumentar, de justificar, de pesar pontos de vistas e decidir. Para nós, os sistemas de dedução natural têm uma conexão íntima com essa segunda interpretação, pois neles a atividade do sujeito racional parece ser a fonte primária dos elementos que estariam sendo elucidados pelas regras do sistema. No caso ontologizante, a atividade do sujeito racional é considerada praticamente irrelevante e a elucidação dos princípios lógicos consiste em desvelar como se dá a relação de conseqüência lógica. Em outros termos, nesse caso, a única atividade subjetiva que interviria seria a apreensão dos princípios através do olho da mente, que desse modo buscaria descobrir em um mundo supra-sensível as verdades eternas. No caso analítico puro, procura-se evitar qualquer compromisso ontológico, apelando para a linguagem como uma espécie de fato primordial. Aliás, desde nossa modesta perspectiva, a sensação é de que, de algum modo, a visão ontologizante se coaduna bem com o conceito de conseqüência semântica tarskiano [Tar36], embora também possa ser pensado sob o ponto de vista que estamos chamando de analítico.

Quanto ao termo *elucidação*, por ele entendemos uma atividade de esclarecimento conceitual. Os sistemas de dedução natural seriam, desde essa perspectiva, o resultado de um esforço elucidatório. O objeto de elucidação nesse caso seria uma certa idealização da atividade de argumentação racional[5]. Assim, considerando que uma idealização da atividade de argumentação racional será a fonte para a nossa atividade elucidatória dos princípios lógicos, seria provavelmente mais adequado pensar tais princípios como certas operações que, quando efetuadas, nos levariam a construir um argumento dedutivamente correto e, eventualmente,

[5] Ver [Seo02].

epistemologicamente útil. Mas, se uma certa idealização da atividade de argumentação está sendo considerada como o ponto de partida original para uma elucidação da propriedade de conseqüência dedutiva, é de se esperar que, ao procurarmos esclarecer a trama das conexões lógicas, tenhamos de levar em conta a forma na qual essa trama está realizada na atividade de argumentar. Os componentes principais de um argumento são asserções e eles comportam certas conexões intrínsecas. Pois bem, a atividade de esclarecer que conexões seriam conexões adequadas é uma atividade elucidatória. Justamente, entendemos que os sistemas de dedução natural servem para tornar claras essas conexões que chamamos de lógicas. Ou seja, com esses sistemas procuramos tornar claro como e quando há uma relação de conseqüência dedutiva entre os componentes de uma argumentação. Para elucidar as conexões lógicas presentes na argumentação, precisamos de uma pré-análise dos caracteres que consideramos essenciais à argumentação conclusiva.

Idealmente, um argumento correto deveria ter duas características importantes. Em primeiro lugar, a verdade das premissas deveria ser condição suficiente para a verdade da conclusão. Em segundo lugar, é preciso ainda que o argumento esteja dotado de certa capacidade de mostrar que a verdade efetivamente se transmite das premissas para a conclusão e, por conseguinte, o argumento deve ter certas características que propiciem ao interlocutor ver que a transmissão se dá. Alguns interlocutores precisam de argumentos mais detalhados, outros nem tanto. Porém, o que não é possível é oferecer as asserções das premissas e a asserção da conclusão sem nenhuma mediação, sobretudo nos casos em que a maioria dos interlocutores teria dificuldades de ver onde está a conexão entre as premissas e a conclusão.

Há que se notar também que as práticas argumentativas, em particular no âmbito da matemática, resultam historicamente de uma atividade reflexiva. Assim, aquilo que estamos chamando de elucidação é, na verdade, uma elucidação sobre elucidações. Aliás, um fato que parece confirmar esse ponto de vista é o de que historicamente existiu, e provavelmente sempre existirá, algum desacordo no interior da comunidade acerca de quais práticas são justificáveis ou não, aceitáveis ou não. Se isso é correto, parece-nos inclusive razoável que a elucidação do conceito de conseqüência dedutiva procure levar essas querelas em conta e procure representá-las da forma mais simples possível. Uma das querelas importantes se dá entre construtivistas e clássicos e envolve a aceitabilidade de métodos de demonstração indireta. Assim, parece-nos interessante e razoável que a elucidação mostre onde se localizam as diferenças entre os pontos de vista de forma articulada e puntual. Acreditamos que, sob esse aspecto, os sistemas de dedução natural parecem ter sido bastante bem sucedidos.

Notamos que, nos sistemas de dedução natural, a representação das hipóteses é um componente primitivo constitutivo dos constructos elucidatórios e é justamente por representar as hipóteses de forma primitiva que certas diferenças conceituais entre clássicos e intuicionistas podem vir à tona de modo mais claro. Na verdade, a maior parte da diferença conceitual entre eles radica em aceitar certas formas de descarte de hipóteses. É isso justamente o que nos propiciam as regras de dedução indireta. Mas o conceito de hipótese é importante ainda por outra razão. Desde o nosso ponto de vista, uma elucidação adequada da negação e do absurdo também exige um esclarecimento satisfatório do conceito de hipótese.

De modo geral, fizemos acima uma descrição inicial dos temas que investigaremos nesta tese. Passamos, a seguir, a detalhar como e onde tais temas estarão sendo tratados.

Dissemos que, do nosso ponto de vista, os sistemas de dedução natural envolvem uma elucidação do conceito de conseqüência dedutiva. A apresentação introdutória dessa elucidação, bem como a formalização de conceitos e expressões que são empregados na tese, se encontra no Apêndice. À medida que o objetivo de uma tese é apresentar uma investigação, pareceu-nos mais adequado pospor essa parte propedêutica de modo a subtrair ao leitor informado o aborrecimento de passar por várias definições cujo conteúdo é em sua maior parte de conhecimento geral e, quando não o for, pode ser acessado de forma independente, sempre que houver necessidade. É por essa razão que incluímos um índice remissivo ao final do trabalho. Todavia, como nossa interpretação dos sistemas de dedução natural difere um pouco das interpretações correntes, o Apêndice conterá algum material que julgamos ser original. Vários dos conceitos lá presentes são conceitos que, de uma forma ou de outra, estão presentes em [Pra65]. Algumas vezes, eles recebem certas adaptações originadas pelos propósitos que temos em mente. A nosso ver, a diferença mais relevante com respeito às definições propedêuticas contidas na literatura está na forma de apresentação das regras de dedução. Por essa razão, pareceu-nos também adequado dissertar brevemente sobre o que entendemos pelo princípio de harmonia para as regras de introdução e de eliminação, da forma como as estamos caracterizando no Apêndice. Até onde nosso conhecimento alcança, não haveria na literatura uma formulação com o mesmo nível de detalhe dessa que estamos propondo. No entanto, o tema da harmonia foi discutido, entre outros, por Belnap [Bel62] e por Dummett [Dum91].

Fizemos a inclusão de um índice remissivo em nosso trabalho para facilitar a busca pela definição de termos e conceitos e para tornar facultativa a leitura do Apêndice. No entanto, a tese também poderá ser lida começando do Apêndice para depois prosseguir aos demais capítulos na ordem usual.

O Capítulo I tem o objetivo de apresentar a proposta de uma elucidação para a negação e para o absurdo por meio de regras de dedução natural de introdução e de eliminação. Mas, antes que isso seja feito, examinaremos a forma pela qual os sistemas de dedução natural são normalmente interpretados, sobretudo pelos intuicionistas naturais, que os vêem como devotados a elucidar o conceito de prova. Veremos que o conceito de hipótese desempenha um papel chave em nossa exposição e pretendemos oferecer uma crítica a concepção que aparece amiúde entre intuicionista.

Para os intuicionistas naturais, as regras de introdução destacam-se das demais à medida que elas capturariam uma noção de prova considerada como a noção mais fundamental. Quando usadas nesse tipo de regras, as hipóteses funcionariam como suposição da posse de uma prova. Em oposição a essa concepção, nós avançaremos a tese de que os sistemas de dedução natural podem ou devem ser interpretados como sistemas que elucidariam o conceito de conseqüência dedutiva e, doravante, já não saberíamos mais dizer qual tipo de regra mereceria algum tipo de primazia. As regras de introdução parecem boas candidatas, como querem em geral os intuicionistas. Todavia, como pretendemos defender, para compreender quais situações permitiriam introduzir uma negação, precisamos usar e compreender as regras de eliminação. O fato é que a negação, diferentemente das demais constantes lógicas, parece requerer que nos seja dada uma refutação como base para a sua introdução, e a própria noção de refutação parece depender de modo relevante das regras de eliminação. Assim, torna-se essencial buscar outra forma de conceber a natureza da atividade elucidatória inerente à formulação dos sistemas de dedução natural. A revisão que estamos propondo nos levará a uma concepção do conceito de hipótese distinta da concepção intuicionista. Uma hipótese ou suposição será para nós apenas o ponto de partida da tessitura de uma cadeia de conseqüências dedutivas. A elucidação da negação e do absurdo por meio de regras de introdução e eliminação parece se adequar melhor à noção de hipótese que estaremos propondo.

O ponto de vista que estaremos defendendo tem conseqüências que não podem ser desprezadas. Uma delas é de que a diferença entre os sistemas de dedução natural e de seqüentes tenderia a resumir-se a uma diferença de perspectiva. Enquanto os sistemas de dedução natural serviriam para mostrar a relação de conseqüência dedutiva, os sistemas de seqüentes poderiam ser interpretados como sistemas assercionais envolvendo a relação de conseqüência dedutiva aplicada não às proposições, mas a certos termos ou listas de termos nomeando as proposições. Desse modo, cada regra assercional operacional simplesmente refletiria uma regra em dedução natural. Aliás, uma idéia similar a essa pode ser encontrada em Prawitz no Apêndice de [Pra65].

Ele relaciona os dois sistemas dizendo que o sistema de seqüentes seria uma espécie de metacálculo para a relação de dedutibilidade presente nos sistemas de dedução natural. Se entendermos que um metacálculo é simplesmente a forma assercional de apresentação da relação de dedutibilidade, então as duas interpretações convergiriam. Entretanto, notamos, aquele autor não tinha propriamente uma solução de interpretação para a relação entre as regras de dedução natural envolvendo a negação e as respectivas regras de seqüentes. Uma proposta de resposta a esse problema será feita ao longo dos três primeiros capítulos da nossa investigação.

Encerraremos o Capítulo I fazendo uma análise das noções de refutabilidade e de absurdidade presentes em Curry no VI capítulo de [Cur63]. Em nossa investigação, adotamos de modo amplo certas idéias de Curry a respeito da negação e do absurdo, embora lhes façamos alguns reparos. Em particular, pretendemos mostrar que, com as regras de introdução e eliminação que estamos propondo, estaremos aptos a definir os mesmos conceitos de refutabilidade e de absurdo que Curry havia definido.

Com o Capítulo II pretendemos dar continuidade ao exame do conceito de refutabilidade ao qual chegamos com as regras para a negação e o absurdo. Este capítulo contém uma exposição dos sistemas de dedução natural nos quais a regra de eliminação para a negação e o absurdo não contempla o princípio de *ex falso quodlibet*. Da mesma forma como freqüentemente ocorre na literatura, chamaremos esses sistemas de sistemas minimais. Eles estarão divididos em dois grupos: aqueles em que nenhum princípio de dedução indireta está presente; aqueles onde acrescentamos um princípio de dedução indireta, no caso a chamada regra *Peirce*. Temos boas razões para crer que a noção de refutabilidade simples de Curry é representável por meio das regras de introdução e eliminação da negação e do absurdo nos primeiros. Porém, esses sistemas minimais com regras de introdução e eliminação do absurdo acabam por ter uma característica indesejável, cuja correção exigiria o acréscimo do princípio de *ex falso quodlibet*.

A bem da verdade, apresentaremos ainda uma segunda forma de definir a noção de refutabilidade dentro de um sistema minimal. Pretendemos mostrar que é possível formular um sistema de dedução natural para a preservação da falsidade. Esse sistema permitiria representar uma noção de refutabilidade um pouco distinta da noção de refutabilidade simples representável no sistema minimal para preservação da verdade. Veremos que essas duas noções só poderão ser consideradas idênticas quando admitimos a validade de um princípio de dedução indireta.

A seguir, apresentaremos os sistemas minimais com dedução indireta, procurando investigar as propriedades da regra *Peirce* em isolamento do princípio de *ex falso quodlibet*. Em

particular, estaremos mostrando que certas simplificações muito similares àquelas que Prawitz aplicava ao sistema clássico em [Pra65], reduzindo as aplicações da regra de absurdo clássico ao caso atômico, também podem ser aplicadas aos sistemas que contêm a regra *Peirce*. Procuraremos, nessa etapa, dar sustentação à tese de que a regra *Peirce* deve ser considerada como uma extensão ao conceito de dedutibilidade representável no sistema. Mas essa perspectiva só fará algum sentido se adotarmos outra interpretação da noção de hipótese, uma interpretação diferente daquela que adotam os intuicionistas naturais. Como resultado dessa nova postura, acreditamos que uma parte relevante das objeções intuicionistas às regras de dedução indireta deveria ser repensada, basicamente porque não mais faria sentido pedir garantias da demonstrabilidade de uma hipótese descartada, como os intuicionistas estão tentados a fazer em geral. Isso não significa que, em nossa proposta de interpretação, estejamos simplesmente aceitando que a regra *Peirce* ou as regras de dedução indireta sejam consideradas inquestionáveis. Se o papel de um argumento é o de efetivamente mostrar a conexão dedutiva entre as premissas e a conclusão, ao usar uma regra de dedução indireta estaríamos subvertendo aquilo que anteriormente entendíamos ser a apresentação da conexão dedutiva. Veremos o porquê disso no decorrer da investigação.

Ao final do segundo capítulo, discutiremos ainda a formulação de um sistema refutacional apresentado em 1972 por López-Escobar, em cálculo de seqüentes, cujo objetivo é o de capturar a noção de falsidade construtiva de Nelson. A nosso ver, existe um elo entre esse cálculo e o sistema para preservação da falsidade que estamos definindo nesse capítulo. Também veremos que o cálculo para a falsidade que estaremos propondo difere bem pouco de um sistema de dedução natural que Tamminga [Tam94] havia proposto para capturar o conceito de rejeitabilidade. Uma das diferenças é a presença/ausência das regras para o operador de desimplicação. Essa diferença é de extremo interesse para nós, pois, ao considerar as regras para esse operador, obteremos dois resultados relevantes. Um deles é o de que o famoso princípio de inversão parece estar aquém do princípio de harmonia. Essa conclusão segue-se da análise que fazemos do tratamento que Bowen [Bow71] deu à constante que estamos presentemente chamando de desimplicação. É com base nesse tratamento que focalizaremos o problema da harmonia entre as regras de introdução e eliminação no capítulo IV. O outro resultado diz respeito ao problema da cidadania lógica do conceito de preservação da falsidade. Temos razões para crer que a preservação da verdade e a preservação da falsidade são conceitos estruturalmente idênticos e, por isso, estariam dotados de igual grado de cidadania lógica, o que seria claramente visualizável sobre os sistemas de dedução natural.

O Capítulo III continua com a apresentação dos sistemas de dedução natural, mas os sistemas passam a incorporar o princípio de *ex falso quodlibet*. Começamos o capítulo por uma definição de um sistema equivalente ao sistema intuicionista. Em seguida, consideramos um sistema equivalente ao sistema clássico. Em ambos os casos, com regras de introdução e eliminação da negação e do absurdo. Para definir o sistema clássico a partir do sistema intuicionista, poderíamos simplesmente acrescentar a regra *Peirce*, como fizemos no caso dos sistemas minimais. Todavia, como veremos, para obter a lógica clássica, já será suficiente acrescentar um princípio de dedução indireta mais fraco, o princípio que chamamos de *consequentia mirabilis*, ou ainda um princípio equivalente, o princípio de *terceiro excluído* (formulado como uma regra de dedução). O princípio de *consequentia mirabilis* é caso particular de *Peirce*, seja a negação tomada como primitiva ou como definida. Já a derivação contrária exige o princípio de *ex falso quodlibet*.

Assim como fizemos com a regra *Peirce*, mostraremos que a regra *consequentia mirabilis* permite definir subsistemas da lógica clássica que são suficientemente fortes para representar todas as relações de dedutibilidade clássicas (via tradução de constantes). Destacamos, sobretudo, o sistema que chamaremos de C', no qual a regra *consequentia mirabilis* estará restringida às conclusões básicas[6]. Esse sistema é, na verdade, uma reformulação de um sistema que Prawitz também chamava de C', em [Pra65]. A reformulação procura preservar a relação de dedutibilidade do sistema original de Prawitz, mas, ao mesmo tempo, estende as díades de introdução e eliminação para todas as constantes lógicas, mais precisamente para a constante de absurdo. Um outro subsistema da lógica clássica, que também será apresentado nessa forma de díades para todas as constantes e que desperta interesse por outras razões, é o sistema sobre as constantes $\{\vee, \rightarrow, \exists, \bot\}$. Mostraremos, no quarto capítulo, que, nesse sistema, a cada derivação corresponderá uma outra a partir das mesmas hipóteses e com a mesma conclusão tal que haverá, no máximo, uma só aplicação de *consequentia mirabilis* como última regra da derivação

Logo após o exame desses subsistemas da lógica clássica, apresentaremos alguns sistemas que admitem uma leitura intuicionista, embora incorporem, em alguma medida, uma regra de dedução indireta. Já em 1971, Prawitz [Pra71] havia apontado a possibilidade de dar uma interpretação construtiva a C'. Nós procuraremos estender essa interpretação para sistemas mais compreensivos, que admitam todo o leque usual de constantes lógicas intuicionistas: $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \bot\}$.

---

[6] Chamamos de básica aquelas fórmulas que não contêm constantes lógicas de primeira ordem.

Após fazermos a apresentação dos sistemas lógicos de dedução natural com regras de introdução para a negação e o absurdo, mas também com regras de dedução indireta, apresenta-se uma questão à qual não podemos negar nossa atenção. Ela envolve as proposições simples. Se as regras de introdução para o absurdo e para a negação requerem a constatação dedutiva da impossibilidade de uma situação, deveríamos nos perguntar o que significaria dizer que uma proposição simples é impossível. Um sistema de dedução natural que só envolva regras para constantes lógicas só nos permitiria deduzir que uma situação é impossível caso tivéssemos partido de uma lista de hipóteses da qual fosse possível deduzir uma proposição e sua negação. Mas, além dessa, certamente deve haver uma noção de impossibilidade envolvendo proposições simples. Em nossa opinião, essa é a noção de impossibilidade realmente fundamental. Assim, será preciso representar a impossibilidade de uma proposição simples ou a impossibilidade de uma lista de proposições simples de algum modo e tal que, posteriormente, possamos aplicar uma introdução da negação. Como veremos, isso será feito com base em regras de dedução que, de algum modo, incorporam um princípio de *ex falso quodlibet* para proposições simples dentro de uma base teórica. Nossa última tarefa nesse terceiro capítulo será a de mostrar como poderíamos definir a aritmética dos números naturais incorporando uma regra de dedução para proposições simples sem usar constantes lógicas: uma regra que seja da natureza de um *ex falso quodlibet*. Também será preciso mostrar por quais razões um princípio dessa natureza poderia ser considerado válido ou admissível na base de uma teoria, em particular na base da aritmética dos números naturais. Como teremos ocasião de ver, essa discussão nos levará novamente a examinar a noção de hipótese.

O capítulo será fechado com uma série de considerações gerais acerca do uso de hipóteses nas derivações, acerca da natureza dos sistemas de dedução natural e acerca do processo elucidatório do qual esses sistemas seriam as resultantes. Finalizaremos com uma breve consideração acerca de uma hierarquia para a validade/admissibilidade das regras de dedução/inferência.

Nos três primeiros capítulos, portanto, nossa investigação tem um caráter eminentemente conceitual. Nossa intenção é a de propor uma forma de conceber os sistemas de dedução natural diferente daquela pela qual os intuicionistas naturais os concebem. Em primeiro lugar, assumiremos que a construção de um sistema de dedução natural é o resultado de um processo elucidatório para o conceito de conseqüência dedutiva. Assumiremos também que a elucidação do referido conceito toma por base uma certa compreensão intuitiva e idealizada da práxis argumentativa. Desde o nosso ponto de vista, essa práxis deve ser tomada como primitiva e a

noção de prova deve ser considerada como uma especialização da noção de argumento. Para nós, é essa práxis que mostra que as hipóteses são usadas de modo tal que não faz sentido considerá-las parte do conjunto de asserções que compõem a argumentação. Em geral, as hipóteses constituem simplesmente um ponto de partida para desenvolver uma cadeia de conseqüências. Essa concepção do conceito de hipótese será empregada na proposta de elucidação da negação e do absurdo em termos de regras de dedução natural. A proposição absurda, em particular, será encarada como um constructo ideal que nos permitirá dividir as condições para introdução da negação em duas partes distintas, conforme veremos no primeiro capítulo.

Nos capítulos restantes, procuraremos desenvolver uma parte da maquinaria de procedimentos e teoremas usualmente associada aos sistemas de dedução natural. Ou seja, do quarto capítulo em diante, nos ocuparemos da existência de formas normais, da sua unicidade e da finitude dos processos de obtenção da forma normal. Contudo, ao cuidar da prova dessas propriedades, não estaremos preocupados em justificar a validade das regras de eliminação a partir das regras de introdução, não pelo menos da mesma forma que tem sido feito pelo intuicionismo natural. Nele as regras de introdução são vistas como formas básicas canônicas de construção de provas, sendo a validade das regras de eliminação apenas uma conseqüência da validade das regras de introdução. O caso é que a introdução da negação parece requerer o conceito de refutabilidade e a definição desse conceito, por sua vez, requer o uso das regras de eliminação. Só seria possível manter o conceito de prova canônica como conceito primitivo se admitíssemos que a negação é uma operação cuja elucidação só poderá ser feita depois de havermos elucidado as demais constantes lógicas. Todavia, esse ponto de vista colocaria a compreensão da negação na dependência da compreensão de outras operações, contrário ao que usualmente tem sido assumido em dedução natural. Assim, como nossa tarefa é diferente da tarefa que os intuicionistas naturais se propõem, a demonstração da propriedade de normalização já não terá para nós a mesma importância que para eles. Contudo, a prova dessas propriedades ainda guardará outro tipo de relevância, à medida que a noção de forma normal parece ser um bom esteio para provar uma série de resultados importantes. A consistência do sistema é um deles. Além disso, a forma normal das derivações ofereceria um critério para a definição da noção de identidade para derivações.

O Capítulo IV estará dedicado a investigar o chamado princípio de inversão e as operações de eliminação de rodeios de introdução-eliminação fundadas sobre esse princípio. Temos razões para crer que o princípio de inversão corresponde apenas a uma parcela da propriedade de harmonia que deve vigorar entre as regras de introdução e eliminação. A noção de

harmonia com a qual estaremos trabalhando é apresentada no Apêndice. No quarto capítulo, fazemos uma breve discussão acerca da relação do princípio de inversão e do princípio de harmonia. A análise do problema tem início com a tentativa de interpretar o *dito* gentzeniano de que as eliminações seriam como que conseqüência das introduções e que estas seriam como que a definição das constantes lógicas. Ao cabo da análise, daremos forma final às críticas que dirigimos ao modo pelo qual o princípio de inversão tem sido aplicado pelos intuicionistas naturais à constante de absurdo. Finalizamos a argumentação com a demonstração da validade do princípio de harmonia para as regras de introdução e eliminação para o absurdo.

No quarto capítulo, também examinaremos outros tipos de operações sobre as derivações, sendo as operações de permutação as mais importantes. A permutação é uma operação essencial para obter formas normais com a propriedade da subfórmula no âmbito do sistema intuicionista de dedução natural. Outro tipo de operação essencial será a operação de eliminação de rodeios para aqueles casos em que uma ocorrência de fórmula é premissa maior de uma regra de eliminação e, ao mesmo tempo, conclusão de uma dedução indireta. Obviamente, esse tipo de rodeio só surge nos sistemas que comportam uma regra de dedução indireta. *A priori*, esse tipo de operação pode não parecer com uma permutação. Lembra, talvez, mais uma operação de eliminação de rodeios de introdução-eliminação. Entretanto, temos fortes razões para crer que, nesses casos, também está envolvida uma permutação. Se isso for correto, a admissibilidade da operação envolvendo dedução indireta poderia compartilhar a mesma justificação empregada para admitir as permutações no sistema intuicionista. Por essa razão, as permutações passam a tomar grande parte da nossa atenção nesse capítulo. Inclusive, dedicaremos uma parcela de nossa exposição a expor como a operação de permutação envolvendo regras de dedução indireta constitui o esteio de uma série de propriedades bem conhecidas na literatura. Referimo-nos aos resultados formulados por Kolmogorov em [Kol25], Glivenko em [Gli29], Prawitz & Malmnas em [Pra68], Seldin [Sel89] etc, nos quais, via de regra, as derivações clássicas estão correlacionadas a certas derivações em sistemas mais elementares. O procedimento consiste em apresentar várias situações onde é possível obter uma prova clássica contendo uma única aplicação de dedução indireta como último passo dedutivo na prova.

Finalmente, ainda no quarto capítulo, investigaremos uma série de operações sobre derivações, geralmente agrupadas sob o nome de simplificações. Algumas das simplificações que aparecem na literatura serão rejeitadas. Todavia, constataremos a necessidade de aplicar outras simplificações envolvendo regra de dedução indireta, mais especificamente envolvendo *consequentia mirabilis*. Aliás, uma das razões importantes para não termos empregado a regra

Peirce na definição do sistema clássico deve-se ao fato de que sob essa forma de dedução indireta, nem todas as operações que aplicamos sobre *consequentia mirabilis* podem ser aplicadas sobre *Peirce*, ao menos isso não será possível se desejamos preservar a unicidade da forma normal.

Consideramos de suma relevância a tarefa de justificar a admissibilidade das operações sobre as derivações. A remoção dos rodeios de introdução-eliminação e as permutações de eliminações parecem ambas bem justificadas. Contudo, ainda restará o problema de justificar as simplificações adotadas em vista das provas dos teoremas de normalização. Em alguns casos, não divisamos justificativas mais possantes. No entanto, sempre adotaremos um critério mínimo. Para nós, a perda da propriedade de unicidade da forma normal constituirá uma boa razão para rejeitar uma operação, o que não significa que estejamos assumindo que o contrário seja razão suficiente para aceitá-la.

O Capítulo V estará dedicado a apresentar teoremas de normalização e de confluência para os sistemas definidos nos capítulos II e III. É preciso notar que, diferentemente da literatura, nos sistemas a serem definidos, todas as constantes lógicas empregadas estarão sendo dadas por díades de introdução e eliminação, em particular a constante de absurdo. Além disso, como regra de dedução indireta, estaremos usando a regra *consequentia mirabilis.* Começaremos o capítulo com uma rápida apresentação do *Hauptsatz* para um sistema de sequentes variante do sistema *LJ* de Gentzen. Essa prova já seria uma primeira garantia da adequação da elucidação da negação que estamos propondo. Em seguida tratamos dos sistemas de dedução natural. Começamos com a apresentação do teorema de normalização fraca, com cota para o comprimento da derivação em forma normal, para o sistema $\mathcal{J}cm'$. Notamos que o sistema intuicionista $\mathcal{J}$ e o sistema C' são subsistemas de $\mathcal{J}cm'$. Apresentaremos uma estratégia de normalização - a assim chamada estratégia das críticas – que servirá de base para a cotação do resultado final. A estratégia a ser definida é uma extensão da estratégia empregada por Pereira em [Per82]. A seguir, estenderemos a prova de normalização fraca para o sistema clássico C, mas, infelizmente, perderemos a possibilidade de dar cotas ao comprimento da forma normal. Mais adiante, demonstraremos a finitude de toda cadeia de redução para o sistema $\mathcal{J}$, adaptando e estendendo uma técnica que Prawitz havia usado em [Pra71] para o sistema intuicionista.

A demonstração de finitude de toda cadeia para o sistema $\mathcal{J}$ tem um significado especial que vai além do mero enunciado do teorema. A prova original de Prawitz é tida como uma prova de natureza semântica, pois é com base em uma propriedade das derivações que somos levados a

concluir pela finitude de todas as cadeias de redução. A propriedade em questão é a chamada *validade forte* e, segundo o autor, essa propriedade é derivável de uma interpretação das regras de introdução e eliminação segundo a qual a validade das regras de introdução é "canônica" e a validade das regras de eliminação seria derivada da validade das regras de introdução. Porém, justamente, em nossa prova usamos a mesma técnica de Prawitz só que levando em conta uma regra de introdução para a constante de absurdo. Ou seja, ao que parece, a propriedade de validade forte funcionaria bem para as regras de introdução e eliminação do absurdo na forma como as estamos propondo nesta tese.

Logo a seguir, apresentaremos uma prova de natureza combinatória, mostrando a confluência local para o sistema clássico C, definido com introdução e eliminação de absurdo e com *consequentia mirabilis*. Além disso, como praticamente todos os sistemas definidos são subsistemas de C, a prova também valerá para esses casos. Em particular, depois de haver mostrado confluência local, poderemos mostrar confluência geral e unicidade da formal normal para a nossa formulação do sistema intuicionista, o sistema $\mathcal{I}$, tomando por base a confluência local e a finitude de toda cadeia de normalização mostradas anteriormente.

Os capítulos V e VI estão dedicados à apresentação e prova dos metateoremas de dedução natural. O que há de intrinsecamente belo nesses teoremas é o fato de que, em geral, um teorema válido para um sistema será também válido para os subsistemas que, de algum modo, mantenham com ele certa similaridade estrutural. Isso ocorre, por exemplo, com os sistemas para preservação da verdade e para preservação da falsidade. Todavia, há que notar um caráter desagradável nesses metateoremas. Raramente suas provas são de tamanho razoável. Demonstrá-los e compreender a sua demonstração exige, em geral, um esforço de monta. Infelizmente, não parece haver outro remédio a não ser buscar provas que sejam mais enxutas e, ao mesmo tempo, compreensíveis e informativas, o que nem sempre é fácil de obter. Com efeito, embora tenhamos nos esforçado para dar provas com aquelas características, estamos longe de havê-lo feito. Há que salientar que, ao buscar cotar o processo de normalização, as provas dos lemas e teoremas tornam-se muito mais complexas.

Nos capítulos iniciais, freqüentemente formulamos uma propriedade e a sua prova de forma intuitiva sem maiores cerimônias, já que uma narrativa intuitiva poderia ser mais informativa. Ao apresentar as provas dos teoremas de confluência e normalização mantivemos o princípio de buscar a intuição da relação entre os objetos formais envolvidos. Dito dessa forma, isso poderia parecer uma heresia, já que o tratamento formal da lógica no século XX esteve orientado, em grande parte, a livrar as provas dos contrabandos introduzidos pela intuição.

Ocorre que provas demasiado longas, em geral, acabam por ser pouco compreensíveis. Provas demasiadamente formalizadas são, em geral, demasiado longas. Confessamos que, apesar de nossos esforços em contrário, as provas apresentadas ainda serão bastante longas. Como dissemos, as demonstrações envolvendo propriedades dos sistemas de dedução natural costumam ser complexas. Todavia, procuramos, na medida do possível, manter um certo nível de intuitividade nas provas, inclusive como forma de permitir que algum ajuste possa vir a ser feito. No limite, a aprovação/desaprovação de uma proposta de demonstração depende da comunidade e, embora a intuição se equivoque (razão por que construímos provas), também nos parece que as melhores provas são aquelas que nos permitem construir uma boa intuição da propriedade que está sendo demonstrada. Nesse sentido, uma exposição excessivamente formal corre o risco de perder sua valia.

O Capítulo VI trata unicamente do sistema clássico que chamamos de sistema C'. Novamente, notamos que nossa definição para o sistema envolve regras de introdução e de eliminação para o absurdo, além de *consequentia mirabilis* restringida às conclusões básicas. Nesse capítulo, demonstramos a finitude de toda cadeia de normalização para esse sistema, aplicando uma idéia para a prova de normalização apresentada por Alves em [Alv99] que, por seu turno, é um desenvolvimento de uma idéia de Massi apresentada em [Mas90]. A prova que apresentaremos é uma adaptação da prova apresentada no I Encontro de Dedução Natural em 2001 [San01]. Contudo, a presente prova leva em conta a formulação do sistema C' com regras de introdução e eliminação do absurdo mais *consequentia mirabilis*. O cerne da prova consiste, basicamente, em estender o conjunto de operações que aplicamos sobre as derivações. Com base nessas novas operações, demonstramos a finitude de toda cadeia de redução e a unicidade da forma normal. As novas operações são a homogeneização de derivações e a multiplicação de derivações. Como, para tais operações, também vale a propriedade de finitude e a propriedade de unicidade do resultado, elas fornecerão o esteio para a demonstração de normalização forte com cota para C'. O passo a seguir consiste em fazer algumas comparações do resultado obtido com outros resultados da literatura que também envolvam a demonstração de cota e de finitude da cadeia de normalização. Destacamos, em particular, a comparação de cotas que fazemos com o trabalho de Beckmann [Bec01]. Finalmente, apresentamos um novo resultado de cotas para o comprimento da forma normal das derivações de C', mas tal que a cota só depende de uma única variável: o comprimento da derivação original. Esse resultado é obtido adaptando idéias similares desenvolvidas por Orevkov para o cálculo de seqüentes [Ore91].

Antes de passar ao texto propriamente dito, queremos propor duas convenções, uma delas acerca de como representar expressões que sejam variação sintática de outras expressões. Expressões serão seqüências finitas de símbolos. Dadas expressões quaisquer ε_1, ε_2 e ε_3, a expressão resultante de substituir na expressão ε_1 cada uma das distintas ocorrências da expressão ε_2 pela expressão ε_3, haja ou não ocorrências de ε_2, será representada por $\varepsilon_1[\varepsilon_2/\varepsilon_3]$. Diremos que esse tipo de substituição é uma **substituição homogênea**. Eventualmente, será necessário o acréscimo de parênteses para indicar, sem ambigüidades, sobre qual expressão deve ser efetuada a substituição sintática. Por exemplo, na expressão complexa $\varepsilon_4(\varepsilon_1[\varepsilon_2/\varepsilon_3])\varepsilon_5$, a substituição deve ser feita em cima da expressão ε_1 unicamente, substituindo todas as ocorrências de ε_2, dentro de ε_1, por ε_3, sem alteração dos contextos ε_4 e ε_5. Essa operação de substituição será usada como uma forma prática de descrever certas particularidades dos sistemas de dedução natural. A outra das convenções é uma forma de apresentar certas definições e propriedades evitando repetições desnecessárias. Quando tivermos um texto da forma $T_1\ T_2\ [\![T_3]\!]\ T_4$ onde T_1, T_2, T_3 e T_4 são textos quaisquer, duas leituras distintas poderão ser feitas sobre a seqüência de expressões: uma leitura é $T_1\ T_2\ T_4$; a outra leitura é $T_1\ T_3\ T_4$. Essa estratégia já era empregada por Prawitz em [Pra65].

Capítulo I O Conceito de Dedução e o Problema da Negação

A investigação que levaremos a cabo nesta tese estará focada principalmente sobre dois tipos de princípios lógicos: o primeiro tipo é aquele caracterizado pelas regras genericamente rotuladas como regras de dedução indireta, principalmente a assim chamada **consequentia mirabilis**; o segundo tipo é aquele que envolve as conseqüências de uma contradição ou, mais amplamente, de uma falsidade: os princípios de **ex contradictione quodlibet** e **ex falso quodlibet**. A exploração desses dois tipos de princípios por meio das regras de dedução natural constituirá, na sua globalidade, o exame daquilo que podemos entender pelo conceito de negação, seja do ponto de vista intuicionista[7], seja do ponto de vista clássico. Basicamente, em dedução natural, as distintas operações lógicas são elucidadas por meio de dois tipos de regras ou princípios, as chamadas regras de introdução e as chamadas regras de eliminação. A diferença entre a lógica clássica e a lógica intuicionista reflete-se sobre esta dicotomia introdução-eliminação e a eventual necessidade de estendê-la com regras de dedução indireta.

Neste capítulo, faremos uma proposta de elucidação do conceito de negação, tomando por base o conceito de dedução e sob o pano de fundo metodológico dos sistemas de dedução natural. Antes de propor essa elucidação, será preciso fazer um exame da natureza dos objetos aos quais supostamente as derivações em dedução natural deveriam corresponder como constructos. Salientamos que uma resposta bastante freqüente a esse problema, principalmente da parte dos assim chamados intuicionistas, é a de que as provas seriam exatamente os objetos que estariam sendo esclarecidos (p. ex., [Pra74], pág. 68). Nós procuraremos dar sustentação a uma outra tese alternativa. A necessidade de sustentar outra alternativa é motivada em parte pela necessidade de considerar um quadro metodológico que contemple as chamadas regras de dedução indireta. No

[7] Essencialmente, o ponto de vista intuicionista não aceita a validade irrestrita dos princípios de dedução indireta, como, por exemplo, o princípio de terceiro excluído. Eles não seriam aplicáveis a situações em que estivesse sendo considerada uma pluralidade infinita. Notamos também que Brouwer, pai do intuicionismo, havia sido reticente com respeito à formulação de um sistema lógico intuicionista. Todavia, a formulação de Heyting para a lógica intuicionista parece ter sido amplamente aceita como a forma mais adequada de capturar a lógica subjacente ao intuicionismo conforme [Man98], pág. 276-277.

entanto, acreditamos que a alternativa que proporemos pode ser sustentada de modo independente da intenção de contemplar as regras indiretas. Acreditamos também que essa alternativa tem seus méritos próprios, redundando em uma concepção do conceito de suposição que difere daquela concepção que faz parte do arcabouço intuicionista. Assim, por essa razão, o conceito de suposição será objeto de exame neste e nos capítulos subseqüentes.

Desde o nosso ponto de vista, há um processo elucidatório mais sofisticado por trás da formulação dos sistemas de dedução natural em comparação com aquele por trás dos sistemas logísticos. No caso de dedução natural, o conceito de suposição entra como um conceito primitivo. Em essência, a alternativa que estaremos defendendo é aquela que interpreta as derivações como constructos elucidatórios para a relação de conseqüência dedutiva, que, por sua vez, permitiria um esclarecimento daquilo que usualmente chamamos de argumento válido. Só depois de realizada essa tarefa, poderemos avançar uma proposta de esclarecimento parcial para o conceito de prova. A condição necessária para que uma elucidação do conceito de conseqüência dedutiva seja considerada adequada é obviamente a preservação da verdade[8].

Considere o seguinte exemplo de uma comunicação possível entre um professor e um aluno: "- *Caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido; o que é impossível. Logo, CAMESTRES não pode ser inválido (é válido).*"[9]. Parece-nos indubitável que existe aqui um argumento envolvendo temas formais. O argumento conteria ao menos as seguintes asserções: *(i)* "*caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido*"; *(ii)* "*CAMESTRES não pode ser inválido (é válido)*". À primeira das asserções nós usualmente chamaríamos de **premissa** do argumento; à última, de **conclusão** do argumento.

A justificação de uma asserção é feita, freqüentemente, por meio de um argumento. A asserção de conclusão é o objeto da justificação. De fato, parece razoável dizer que não poderia existir argumento se não houvesse asserção. Nesse sentido, entendemos que qualquer conceituação que seja feita do ato de **asserção/afirmação** deverá contemplar a idéia de que esse ato é um ato de compromisso, compromisso com a verdade[10] de um certo conteúdo, sendo esse

---

[8] Ver Apêndice acerca da validade das regras.

[9] O silogismo CELARENT da primeira figura é da forma: *XeY, YaZ; portanto XeZ.* O silogismo CAMESTRES da segunda figura é da forma: *YaX, YeZ; portanto XeZ*, onde a fórmula *PaS* significa *P pertence a todo S* e a fórmula *PeS* significa *P não pertence a nenhum S*.

[10] Em geral, aquele que assere de modo livre não pode normalmente se negar a apresentar justificativas para sua asserção, poderá, no máximo, mostrar razões do por que não pode dar uma justificativa. O dever de não poder deixar de dar justificativas só faria sentido se aquele que assere tivesse assumido um compromisso, ou seja, só faria sentido se aquele que assere criasse para si mesmo uma obrigação. O interessante acerca desta idéia de ato de compromisso é que, aparentemente, ela nos permite resolver o problema do ator posto por Frege. A diferença entre a asserção de um ator e a asserção da personagem representada pelo ator corresponderia a uma diferença entre as "entidades" que fazem o compromisso. Se o ator assere, é ele quem faz o compromisso. Se o personagem assere, é o personagem

conteúdo freqüentemente designado na literatura pelo nome de **proposição**[11]. Para nossos propósitos, assumiremos essa caracterização parcial sem a preocupação de oferecer uma defesa especial desse ponto de vista, o que nos levaria muito além do que pretendemos. Não obstante, faremos considerações no sentido de aduzir alguma plausibilidade a essa posição.

Adotando o ponto de vista de que a asserção de uma proposição envolve um compromisso, talvez se torne possível compreender melhor a ligação entre uma asserção e um argumento, entre uma asserção e a sua justificação. No exemplo acima, teremos um exemplo de argumentação se concordarmos em admitir que o objetivo de dar um argumento é simplesmente o de justificar a asserção de uma conclusão, tomando por base, como ponto de partida, as asserções das premissas. Contudo, caso venhamos a concordar que, no exemplo acima, temos um argumento, já não será tão simples dizer que ali exista uma prova, pois, entre outras coisas, um dos enunciados envolve o uso de um verbo no subjuntivo e de um verbo no futuro do pretérito. Além disso, se tivéssemos a intenção de produzir uma prova, poderíamos provar diretamente a validade de CAMESTRES, partindo da validade de CELARENT. Todavia, uma situação em que o referido discurso poderia ser empregado de modo adequado é aquela na qual, por exemplo, um aluno tenha erroneamente afirmado que CAMESTRES é inválido.

Os sistemas lógicos em geral podem ser interpretados como sistemas cujo objetivo é o de elucidar a estrutura de certas formas de argumentação que incluem também o argumento acima exemplificado. De forma alternativa, também podem ser entendidos como sistemas cujo objetivo é o de elucidar a estrutura das provas ou verificações mediatas. Parece-nos que a segunda alternativa é mais estreita e, se isso for correto e essa alternativa for adotada, então a estrutura dedutiva de certos argumentos escaparia à elucidação por meio de sistemas lógicos.

Nós acreditamos que os sistemas de dedução natural deveriam, programaticamente, ser pensados como uma forma de esclarecer as conexões lógicas subjacentes aos argumentos dedutivos em geral e, em particular, gostaríamos de examinar como, através dos sistemas de dedução natural, poderíamos elucidar o significado da expressão "isto é impossível", freqüentemente empregada na argumentação, conforme o exemplo do diálogo entre o professor e

---

quem faz o compromisso. Em geral, não temos dificuldades em perceber essa diferença, embora, às vezes, aconteça de algumas pessoas confundirem ator e personagem. Não é raro que senhoras idosas confundam o canastrão da novela com o canastrão da vida real.

[11] A formulação dos conceitos de *asserção* e de *proposição* que provavelmente mais amplamente influenciou os lógicos do século XX é aquela que Russell e Whitehead apresentam em *Principia Mathematica* [Whi10], v.I págs. 8 e 9 e pág. 96. Embora o mais comum seja usar o termo *proposição* de modo tal que as proposições sempre tenham um valor de verdade definido, não estaremos assumindo essa significação quando fizermos uso deste termo. Assim, sob esse uso, um exemplo de proposição que não teria valor de verdade seria: o atual rei da França é careca. Neste caso não há nenhum objeto que corresponda à descrição definida que ocorre no sujeito da frase. Ou seja, ao contrário do que propunha Russell, preferimos assumir que essa proposição não tem valor de verdade.

o aluno. O uso da negação nos sistemas lógicos parece estar estreitamente vinculado ao uso desta expressão de impossibilidade.

Sabemos que, nos sistemas dedutivos, dedução natural em particular, a lógica clássica pode ser definida a partir da lógica intuicionista, pelo acréscimo de um único princípio de dedução indireta. Será também um dos objetivos desta tese considerar, dentre uma gama de distintas formulações dos princípios de dedução indireta, qual seria o melhor candidato para caracterizar a lógica clássica, qual dentre eles seria o mais simples ou, ainda, qual seria o princípio dedutivamente mais fraco. Ao que parece, o melhor candidato ao posto é um princípio que envolve o conceito de negação. Por essa razão, entre outras, um esclarecimento prévio do papel da negação em uma argumentação será de suma relevância.

Nossa proposta de exame da lógica clássica via sistemas de dedução natural enfatizará, inicialmente, o conceito de negação e, posteriormente, o conceito de absurdo. Na verdade, nosso trabalho pode ser interpretado como um esforço elucidatório que irá estender e adaptar certas propostas avançadas por Russell há mais de cem anos.

Em 1903, Russell ([Rus03], pág. 17) definia a lógica clássica empregando o princípio que estaremos chamando de princípio *Peirce* e que ele chamava de **princípio de redução**[12]:

> *Se p implica p e q implica q, então "'p implica q' implica p" implica p. Esse é chamado de princípio da redução; ele tem menos auto-evidência do que os princípios prévios, mas é equivalente a muitas proposições que são auto-evidentes.*[13]

Esse princípio é um princípio de dedução indireta. Porém, de forma muito mais interessante para os nossos objetivos nesta tese, é a formulação que Russell propôs para o conceito de negação, (ibid. pág. 18):

> *... não-p <u>é equivalente</u> à asserção de que p implica todas as proposições, ou seja, que "r implica r" implica "p implica r" qualquer que seja r.*[14]

O objetivo principal deste capítulo pode ser visto como a tarefa de formular uma interpretação da última passagem por meio de regras de dedução natural, buscando efetuar uma elucidação da operação lógica de negação via regras. Parte do problema de interpretar a passagem

---

[12] Ver mais alguns detalhes acerca da regra *P* no Apêndice.

[13] *If p implies p and q implies q, then "'p implies q' implies p" implies p. This is called the principle of reduction; it has less self-evidence than the previous principles, but is equivalent to many propositions that are self-evident.*

[14] *... not-p <u>is equivalent</u> to the assertion that p implies all propositions, i.e. that "r implies r" implies "p implies r" whatever r may be.* Até onde pudemos determinar, Russell teria sido um dos primeiros a propor a definição da negação nesses termos, embora, em sua obra posterior, essa idéia pareça ter sido abandonada.

consistirá, justamente, em decidir como interpretar as expressões que sublinhamos na segunda citação.

1. Os Conceitos de Prova, Argumento e Conseqüência Dedutiva

Os sistemas de dedução natural foram historicamente propostos por Jaskowski [Jas34] e Gentzen [Gen35] com o objetivo geral de elucidar o conceito de prova matemática. O mesmo pode ser dito dos sistemas logísticos-axiomáticos de estilo hilbertiano. Todavia, os sistemas de dedução natural distinguem-se dos sistemas axiomáticos por certas características peculiares que examinaremos a seguir. Antes, contudo, é preciso notar que existem diferenças relevantes entre as elucidações em dedução natural propostas por Jaskowski e por Gentzen. Por exemplo, o primeiro representa as provas de forma linear, o que não ocorre com Gentzen. Outro exemplo: Gentzen contempla a inter-relação entre distintos sistemas, ele formula primeiro o sistema intuicionista e mostra como obter a lógica clássica, adicionando o princípio de terceiro excluído.

Uma diferença maior entre os sistemas de dedução natural e os sistemas logísticos-axiomáticos – historicamente os primeiros a serem propostos – está no número de regras de dedução. Nos sistemas logísticos-axiomáticos, esse número está reduzido a um mínimo indispensável. Os princípios lógicos são formulados por meio de expressões pensadas como verdades lógicas básicas, os axiomas lógicos. A formulação dos sistemas logísticos visava efetuar uma elucidação das provas matemáticas, embora o resultado final tenha quedado a uma grande distância das provas reais, segundo Gentzen ([Gen35], pág. 68):

> *1. Meu ponto de partida foi este: A formalização da dedução lógica, especialmente como ela tinha sido desenvolvida por Frege, Russell, e Hilbert, queda distante das formas de dedução usadas na prática nas provas matemáticas ...*[15]

E outra não é a opinião de Jaskowski. O desenvolvimento do seu sistema de dedução natural ou, mais precisamente, do seu *método de suposições* parece ter sido fortemente influenciado pela opinião que ele herdou de Lukasiewicz acerca das provas e da sua representação dentro dos sistemas formais ([Jas34], pág. 232):

> *Em 1926 o professor J. Lukasiewicz chamou a atenção para o fato de que os matemáticos nas suas provas não apelam às teses da teoria da dedução, mas fazem uso de outros métodos de raciocínio. O principal meio empregado no seu método é aquele das suposições arbitrárias.*[16]

---

[15] *1. My starting point was this: The formalization of logical deduction, especially as it has been developed by Frege, Russell, and Hilbert, is rather far removed from the forms of deduction used in practice in mathematical proof ...*

[16] *In 1926 Professor J. Lukasiewicz called attention to the fact that mathematicians in their proofs do not appeal to the theses of the theory of deduction, but make use of other methods of reasoning. The chief means employed in their method is that of an arbitrary supposition.*

Um dos aspectos sob os quais os sistemas de dedução natural diferem de modo importante dos sistemas logísticos-axiomáticos está no uso das suposições, uso que está refletido de forma direta nas regras dos sistemas de dedução natural. Os sistemas logísticos ou não contemplam de forma primitiva o uso de suposições ou, muitas vezes, quando o fazem, divergem de forma importante daquilo que seria a prática de raciocinar a partir de suposições. Além disso, a representação dos passos imediatos de uma prova nos sistemas logísticos é morosa e dista muito do que seriam suas congêneres intuitivas justamente por causa da forma como as suposições são representadas.

Por exemplo, a conjunção é freqüentemente caracterizada nos sistemas logísticos por meio dos seguintes esquemas de axioma: $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$; $A \wedge B \rightarrow A$ e $A \wedge B \rightarrow B$. Desse modo, para que possamos concluir uma proposição da forma $A \wedge B$, faz-se necessário realizar dois passos dedutivos via *modus ponens*, a partir das premissas A e B, usando o primeiro axioma. Em um sistema de dedução natural, essa passagem se daria por meio de um único passo dedutivo. Assim, por meio dessas observações, talvez possamos entender o que Gentzen quis dizer quando afirmou ([Gen35], pág. 74) que queria propor um formalismo que refletisse tão apuradamente quanto possível o raciocínio lógico nas provas matemáticas.

É interessante fazer, neste ponto, um parêntese. Jaskowski, em seu sistema, marca cada suposição com a letra S e somente as fórmulas demonstradas não dependerão de nenhuma fórmula marcada com essa letra. Além disso, ele emprega um segundo tipo de suposições que podemos chamar de **pressuposição referencial**. A introdução desse tipo de pressuposição deve-se ao cuidado que Jaskowski procurou ter com o uso das chamadas **variáveis reais**. Historicamente, desde os *Principia Mathematica* pelo menos, uma variável aparente é aquela que está ligada a um quantificador[17], ao passo que uma variável real corresponde àquilo que é freqüentemente chamado de parâmetro individual[18] nos textos de dedução natural ([Pra65], pág. 14). Acerca das variáveis reais, diz Jaskowski ([Jas34], pág. 235):

> *Símbolos de variáveis que não são variáveis aparentes não merecem o nome de variável de modo nenhum. Nós lidamos com tais termos assim como lidamos com as constantes, embora ele não seja nem um termo primitivo nem um termo definido. Ele é uma constante cujo significado, embora indefinido, permanece inalterado através de todo o processo de raciocínio. Na prática, nós freqüentemente introduzimos tais constantes indefinidas no curso de uma prova.*[19]

---

[17] Nesse caso, a leitura da expressão usualmente não menciona a variável, por exemplo: todo cão é mamífero.

[18] Nesse caso, ao ler a expressão, mencionamos a variável, por exemplo: $a+b=b+a$. Para maiores detalhes sobre o conceito de parâmetro, ver o Apêndice.

[19] *Symbols of variables which are not apparent variables do not merit the name of variable at all. We deal with such a term as with a given constant, though it is neither a primitive term nor a defined one. It is a constant the meaning of which, although undefined, remains unaltered through the whole process of reasoning. In practice, we often introduce such undefined constants in the course of a proof.*

As constantes indefinidas de Jaskowski, que doravante estaremos chamando de parâmetros individuais, desempenham o papel do que freqüentemente chamamos de objeto genérico, conceito do qual procuramos fazer uma breve análise no Apêndice. Acreditamos que a passagem citada contém uma tese interessante, se for interpretada de modo estrito. Ela implicará que qualquer concepção da noção de prova deverá admitir que o uso de objetos genéricos é um fato primordial, constitutivo da própria noção de prova. Se essa interpretação é correta, então tal característica deveria estar refletida em qualquer sistema de dedução natural, se as derivações de fato forem constructos que visam a elucidação das provas. Notamos, finalmente, que, no sistema proposto por Jaskowski, qualquer tese do cálculo de predicados que venha a ser demonstrada dentro do sistema jamais terá variáveis reais, embora essas variáveis possam ser usadas no desenrolar da prova.

O que faz Jaskowski? Ele introduz as variáveis reais em uma dedução por meio de uma suposição: *suponha que o termo* τ *refere*[20]. Desse modo, um parâmetro individual/variável real poderá ser conteúdo de uma suposição e, para derivar um resultado qualquer sobre o parâmetro individual *a*, será preciso fazer a suposição de que *a* refere. Em geral, esse tipo de suposição será descartada por uma $i\forall$, de forma similar aos descartes efetuados pela regra $i\rightarrow$. Assim, por exemplo, $a=b\rightarrow a=b$ não poderia ser considerada uma tese provada no sistema de Jakowski, quando *a* e *b* são parâmetros individuais, pois, embora exista uma derivação daquela expressão por meio de $i\rightarrow$, a fórmula ainda dependeria de outras duas suposições abertas: a de que *a* refere e a de que *b* refere. Em compensação, haveria uma prova da fórmula $\forall x\,\forall y(x=y\rightarrow x=y)$, onde as duas suposições teriam sido descartadas por duas instâncias de $i\forall$.

Jaskowski diz que, ao evitar o uso de variáveis reais, ele estava simplesmente buscando fazer com que as teses demonstradas pudessem ser aplicadas a qualquer domínio de indivíduos, inclusive o domínio nulo. Ele nota que a fórmula $\forall xA[a/x]\rightarrow\sim\forall y\sim A[a/y]$[21] e a fórmula $\forall xA[a/x]\rightarrow\exists yA[a/y]$ são falsas para o domínio nulo, considerada a interpretação usual dos quantificadores. Assim, Jaskowski procurou projetar um sistema no qual as fórmulas fossem consideradas deriváveis sob uma suposição: a suposição de que o que fosse posto no lugar de *a* referiria. Para isso, a regra de $e\forall$ deveria ser formulada de forma mais restritiva. Ela só poderia ser aplicada sob a premissa de que o termo τ refira. É como se a regra $e\forall$ no sistema de estilo gentzeniano fosse formulada da seguinte forma:

---

[20] Lembramos que, segundo a definição do conceito de termo, os parâmetros individuais são termos.

[21] A expressão [a/x] representa a substituição sintática das ocorrências do parâmetro individual *a* pela variável individual *x* sobre a fórmula *A*.

$$\frac{\forall xA[a/x] \quad \tau}{A[a/\tau]}\ e\forall$$

Figura I-1[22]

De modo correspondente, a regra $i\forall$ deveria agora ser formulada do seguinte modo, com "descarte de pressuposição referencial":

$$\frac{\begin{array}{c}[a]^i \\ \nabla \\ A\end{array}}{\forall xA[a/x]}\ i\forall^i$$

Figura I-2[23]

Mas, além da restrição usual de que o parâmetro *a* não deve ocorrer em nenhuma fórmula da qual a fórmula *A* dependa, será preciso exigir que os descartes de pressuposição sejam aplicados somente sobre aquelas pressuposições de referencialidade que envolvam o parâmetro próprio da instância de $i\forall$[24]. Modificações similares também deveriam ser adicionadas às regras para o quantificador existencial.

Em resumo, no sistema de Jaskowski, a fórmula $\forall xA[a/x] \rightarrow \exists yA[a/y]$ não será demonstrável, já que não haveria como descartar a pressuposição de referencialidade:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall xA[a/x]]^1 \quad b}{A[a/b]}\ e\forall \qquad b}{\exists yA[a/y]}\ i\exists}{\forall xA[a/x]\rightarrow\exists yA[a/y]}\ i\rightarrow^1$$

Figura I-3

Retornando agora ao tópico da diferença entre sistemas logísticos e os sistemas de dedução natural, notamos que essas duas formas distintas de formular os princípios lógicos refletiriam uma diferença de concepções acerca da natureza dos próprios princípios. Por um lado, a lógica pode ser pensada como uma teoria composta de enunciados necessariamente verdadeiros, as chamadas verdades lógicas. Por outro lado, a lógica pode ser pensada como uma teoria que investiga deduções corretas. Nesse último caso, ela apenas propiciaria esclarecimentos acerca da atividade racional argumentativa. Naturalmente, o conceito do que é um princípio ganha

---

[22] Ao acrescentarmos τ como premissa, estamos indicando que paira uma suposição de referencialidade sobre τ.

[23] O símbolo ∇ está sendo usado para representar uma árvore de derivação. Para maiores detalhes, ver o Apêndice. O descarte do parâmetro *a* é o descarte da suposição de referencialidade de *a*.

[24] Desse modo, se a aplicação de $i\forall$ for imprópria, ou seja, se a conclusão for da forma $\forall xA[a/x]$ e não houver parâmetro *a* na premissa imediata, então não poderá haver descarte da pressuposição de referencialidade sobre *a*.

conotações diferentes numa e noutra proposta. Desde o nosso ponto de vista, os sistemas de dedução natural correspondem a uma abordagem cuja natureza é essencialmente do segundo tipo.

A constatação que recém fizemos nos envolve em um problema. Como dissemos, o objeto de partida das investigações desenvolvidas em dedução natural foram, historicamente, as provas. Todavia, acreditamos, do fato de que as provas matemáticas tenham sido o objeto focal das investigações em dedução natural não decorre que as derivações dos sistemas de dedução natural tenham de ser interpretadas direta e primariamente como constructos elucidatórios para as provas. Com efeito, nesta tese nós interpretaremos os sistemas de dedução natural como constructos elucidatórios para o conceito de conseqüência dedutiva ou conexão dedutiva. Segundo essa interpretação, as provas seriam elucidadas apenas de um modo derivado, a partir da elucidação do conceito de conseqüência dedutiva.

1.1. Os Intuicionistas e os Sistemas de Dedução Natural

Os sistemas de dedução natural voltaram a ser novamente bastante investigados a partir dos anos 60, mas de modo freqüentemente associado às teses intuicionistas/construtivistas. Examinaremos brevemente que interpretações recebem as regras dos sistemas de dedução natural nessa ótica. Designaremos como **intuicionistas naturais** aqueles autores que tratam dos sistemas de dedução natural adotando um ponto de vista que se filia ao intuicionismo. Em comum, todos rejeitam os princípios de dedução indireta como meio adequado de prova. Tais princípios de dedução indireta são a regra de cancelamento da dupla negação, o terceiro excluído, a regra *consequentia mirabilis* e o princípio de redução de Russell. Entre os intuicionistas naturais certamente incluímos Dummett, Martin-Löf e Prawitz. Incluímos Heyting também, na medida em que ele é o pai da lógica intuicionista. Para uma amostra do que seriam os pontos de vista dos intuicionistas naturais arrolamos, dentre muitas possibilidades, o seguinte material bibliográfico: [Dum91], [Mar96] e [Pra74].

Como já dissemos, nesta tese assumiremos que uma asserção é um ato de compromisso com a verdade de um conteúdo proposicional[25]. Embora a noção de asserção seja uma noção de conceituação complexa, acreditamos que a simplicidade do ponto de vista expressado nos permitirá fazer uma série de considerações acerca da relação entre as regras de dedução e as asserções e, em particular, nos permitirá analisar o ponto de vista intuicionista. Contudo, antes, seria adequado fazermos uma brevíssima incursão histórica sobre o conceito de asserção.

---

[25] Um autor que adota uma perspectiva similar é Brandom [Bra98].

Provavelmente, a mais forte influência sobre a tradição lógica do século XX tenha sido aquela cristalizada em *Principia Mathematica*. Nele as asserções são apresentadas como os objetos sobre os quais são feitas as inferências ([Whi10], pág. 9):

> *Inferência. O processo de inferência é como se segue: uma proposição "p" é asserida, e uma proposição "p implica q" é asserida, e então em seqüência a proposição "q" é asserida. Aceitar a inferência é acreditar que se as duas primeiras asserções não estão erradas, a asserção final não está errada..*[26]

Esse conceito de asserção presente em *Principia Mathematica* seria oriundo da concepção fregeana acerca dos julgamentos, na opinião de Martin-Löf ([Mar96], Iª conferência). Segundo ele, ao traduzir a palavra *julgamento* do alemão para o inglês, Russell teria preferido, por uma série de razões, usar o termo *asserção*.

Frege, na sua *Begriffsschrift* [Fre79], havia introduzido o símbolo $\vdash$ aplicado na frente de uma proposição ou conteúdo judicativo *p* para significar a afirmação de *p*. O símbolo $\vdash$ seria um composto de dois traços. O traço horizontal, chamado traço de conteúdo, era usado para representar o conteúdo judicativo, e o traço vertical, chamado traço judicativo ou traço afirmativo, para representar uma atitude com respeito ao conteúdo judicativo: a atitude de que esse conteúdo expressa um fato ([Fre79], págs. 11-13). É interessante notar que Frege fará, claramente, em seus escritos posteriores, uma distinção tripla ([Fre18I], pág. 15). Ele distinguirá a apreensão do pensamento - o pensar (equivalente à proposição); o reconhecimento da verdade do pensamento - o julgar; e a manifestação deste juízo - o asserir. Em particular acerca do papel da lógica dirá que a tarefa da lógica consiste em formular leis pelas quais um juízo é justificado por meio de outros, independentemente de eles serem em si mesmos verdadeiros ([Fre69], pág. 96).

Os intuicionistas, desde Heyting pelo menos, adotam um ponto de vista, acerca da natureza da relação entre as inferências e as asserções, que é uma variante daquela que encontramos em *Principia Mathematica*. Aliás, segundo consta, Heyting formulou a lógica intuicionista a partir de um exame dos *Principia Mathematica*, rejeitando aqueles princípios que não fossem adequados ao ponto de vista intuicionista, conforme Mancosu ([Man98], pág. 281). Se essa foi efetivamente a estratégia empregada, existe alguma probabilidade de que o conceito de asserção intuicionista seja um descendente direto do conceito de asserção que aparece em *Principia Mathematica*. Naturalmente, a concepção que os intuicionistas têm acerca da verdade e

---

[26] *Inference. The process of inference is as follows: a proposition "p" is asserted, and a proposition "p implies q" is asserted, and then as a sequel the proposition "q" is asserted. The trust in inference is the belief that if the two former assertions are not in error, the final assertion is not in error.*

da justificativa de uma asserção difere da concepção que um lógico clássico admitiria. Como veremos, para os intuicionistas, as asserções só poderão ser entendidas como um ato de compromisso com a verdade na medida em que a verdade é entendida como consistindo da posse de uma prova.

Intuicionisticamente, uma asserção matemática afirmaria o fato de que uma certa construção matemática, uma prova, foi efetuada ([Hey56], pág. 3). Já em um de seus primeiros escritos sobre a lógica intuicionista, Heyting relacionava os conceitos de asserção e proposição da seguinte forma ([Hey30], pág. 307):

> *Uma proposição p ... expressa um problema, ou melhor ainda, uma certa expectativa, qual pode ser preenchida ou desapontada. A asserção de p tem, na lógica clássica, o significado "p é verdadeiro"; essa "asserção clássica" designa um fato transcendente da natureza que não se conforma com as idéias intuicionistas. ... Ninguém escapa dessa crítica trocando, como o sr. Levy, "p é verdadeiro" por "p is demonstrável", já que essa última sentença, sendo equivalente a "existe uma prova de p", implica novamente a idéia de uma existência transcendente. Para satisfazer as demandas intuicionistas, a asserção deve ser a observação de um fato empírico, isso é, da realização de uma expectativa expressada pela proposição p. Aqui, então, está a asserção brouweriana de p: Sabe-se como provar p. ... A palavra "provar" deve ser tomada no sentido de "provar por construção".... Queremos observar mais uma vez, na lógica clássica como na lógica intuicionista, a asserção de uma proposição não é ela mesma uma proposição, mas a observação de um fato. Na lógica clássica é um fato transcendente; na lógica intuicionista é um fato empírico.*[27]

Da forma como interpretamos Heyting, a observação intuicionista do fato empírico relacionado a uma proposição *p* asserida consistiria, para proposições matemáticas, exatamente em construir (no espaço e) no tempo uma prova da proposição *p*.[28]

Suponhamos, a seguir, que a natureza das asserções seja realmente a de ser um ato de compromisso com outros falantes, um compromisso de estar dizendo a verdade ou, pelo menos,

---

[27] *A proposition p ...expresses a problem, or better yet, a certain expectation, which can be fulfilled or disappointed. The assertion of p has, in classical logic, the meaning "p is true"; this "classical assertion" designates a transcendent fact of nature that does not conform with the intuitionistic ideas. ... One does not escape from this criticism by replacing, with Mr. Levy, "p is true" by "p is provable", since this last sentence, being equivalent to "there exists a proof of p", implies again the idea of transcendent existence. To satisfy intuitionistic demands, the assertion must be the observation of an empirical fact, that is, of the realization of the expectation expressed by the proposition p. Here, then, is the Brouwerian assertion of p: It is know how to prove p. ... The words "to prove" must be taken in the sense of "to prove by construction".... Let us remark once more that, in classical logic as in intuitionistic logic, the assertion of a proposition is not itself a proposition, but the observation of a fact. In classical logic it is a transcendent fact; in intuitionistic logic it is an empirical fact.*

[28] Talvez a referência ao espaço colocada entre parênteses não corresponda exatamente à posição intuicionista, pois as construções são consideradas como construções mentais (embora, por outro lado, seja difícil pensar que uma mente não esteja circunscrita a uma certa região espacial). Todavia, aqueles que não acreditam em telepatia dificilmente poderiam aceitar que os seres humanos trocariam construções mentais sem fazer interferir pelo menos um traço espacial destas construções, por exemplo, desenhos em uma folha de papel. Assim, talvez a referência ao espaço não seja de todo imprópria, pois a justificação de uma asserção a outrem requereria a apresentação dos traços de uma prova.

um compromisso de apresentar justificativas desde que o pedido de justificativas seja razoável[29]. Desse ponto de vista, dificilmente poderíamos considerar que a observação de um fato fosse um ato dessa natureza, pois observação e compromisso são dois atos humanos distintos. Entretanto, não se poderia negar que, intuitivamente, uma asserção verdadeiramente correta requereria que um fato realmente tivesse sido observado, pois, só assim, aquele que assere estaria, em princípio, de posse da faculdade de justificar sua asserção, de cumprir o compromisso assumido de estar dizendo a verdade. Se uma asserção envolve um compromisso de estar apresentando um fato, esse compromisso só não será um ato falhado caso o fato tenha sido realmente observado de antemão. No que tange às asserções matemáticas (os teoremas), o compromisso com a verdade só poderia ser sustentado frente a um interlocutor que demandasse justificativas caso o proponente estivesse de posse de uma prova. Aliás, usualmente, no âmbito da matemática, uma asserção nem sequer seria considerada caso já não viesse automaticamente acompanhada de uma prova. Assim, se nossas suposições são plausíveis, teríamos desse modo uma explicação de como e por que poderia haver surgido a tese intuicionista acerca da natureza das asserções.

Como dizíamos, a asserção de uma proposição, do ponto de vista intuicionista, está intimamente ligada à posse de uma prova ou construção. Isso explica por que, usualmente, os autores de tendências intuicionistas interpretam as regras de raciocínio como regras para a asserção de uma conclusão ou para a construção de uma prova[30] (p. ex. [God70] pág. 101 ou [Pra77] pág. 26). Essa interpretação da origem àquilo que se convencionou chamar de interpretação BHK (por Brouwer-Heyting-Kolmogorov) das constantes lógicas[31]. Do ponto de vista dos intuicionistas naturais, em particular, as regras de introdução seriam na verdade uma forma de explicitar o significado das constantes lógicas presentes em uma asserção e estariam em correspondência com essa interpretação BHK, como veremos em breve.

Desde a perspectiva intuicionista, a elucidação das operações lógicas por meio das regras tomaria um viés epistemológico, a elucidação das operações consistiria basicamente da apresentação de um sistema que mostrasse como é obtida a prova de uma asserção que contém uma determinada constante como símbolo principal. Em outros termos, a elucidação consistiria da apresentação de um sistema mostrando como se verificam/justificam as asserções; particularmente, como se verificam/justificam as asserções logicamente complexas a partir da verificação/justificação das asserções mais simples. Creio que, nesse sentido, podemos dizer que

---

[29] Em certas situações, um pedido de justificativas da asserção pode não ser razoável, como no caso de pedir justificativas a alguém que afirma estar em iminente perigo de vida.
[30] Embora isso não seja exclusividade dos lógicos intuicionistas.
[31] Ver, por exemplo, [Bri04] acerca da interpretação construtiva da lógica.

as regras seriam vistas como regras que preservariam a prova/provabilidade, já que a posse da verdade para os intuicionistas é equivalente à posse de uma prova.[32]

Todavia, diferentemente dos intuicionistas, assumiremos nesta tese que um dos conceitos chaves da lógica é o conceito de **argumento válido**. Ou ainda, assumiremos que esse conceito deve ser considerado mais básico que o conceito de prova. Da forma como o vemos, em geral, por meio de um argumento, ofereceríamos a justificativa de uma asserção, chamada de **conclusão**, tomando como ponto de partida outras asserções, chamadas de **premissas**. Tradicionalmente, considera-se que um argumento válido a partir de um certo rol premissas está associado a uma certa seqüência de sentenças em que cada uma das sentenças é ou uma dessas premissas ou segue-se logicamente das sentenças precedentes. Em seguida, como um conceito derivado, é possível definir o conceito de prova como um tipo peculiar de argumento. Assim, se o objetivo de um argumento for o de justificar uma afirmativa, as provas poderiam ser definidas como certos argumentos dedutivos válidos cuja justificação atinge um grau máximo de certeza. Idealmente, uma prova intitularia qualquer pessoa a fazer uma asserção, a efetuar o compromisso de estar dizendo a verdade. Uma prova seria simplesmente um argumento válido cujas premissas são elas mesmas provadas ou pelo menos intuitivamente evidentes. Dito de outro modo, uma prova seria um argumento válido cuja conclusão não dependeria de nenhuma asserção que já não seja evidente ou que já não tenha sido provada.

Mas há uma outra forma de interpretar a relação entre os argumentos e as provas, uma forma que inverte exatamente a ordem das prioridades. Segundo este ponto de vista, argumentos válidos também poderiam ser pensados como certos procedimentos que permitiriam transformar as provas das premissas em uma prova da conclusão. Essa seria, grosso modo, a interpretação em geral favorecida pelos intuicionistas naturais, por exemplo, Prawitz ([Pra77], pág. 26).

Os intuicionistas naturais não parecem dispostos a aceitar a armadura conceitual em que a primazia caberia aos argumentos. Até onde podemos ver, isso se deveria ao fato de eles considerarem problemática a forma, corrente na literatura, de caracterizar como e quando uma sentença segue-se de outra. Prawitz, por exemplo, expressa sua inconformidade do seguinte modo ([Pra78], págs. 25 e 26):

> *Uma teoria do significado muito influente é a platônica, a qual identifica o significado de uma sentença com as suas condições de verdade: a semântica se torna aqui essencialmente constituída por uma teoria da verdade, a qual é tomada como sendo antecedente a questão de como nós chegamos a conhecer as verdades (questões de prova). Essa perspectiva está freqüentemente conectada com a idéia de que quando as noções de verdade e verdade lógica são arranjadas dessa forma, uma prova (a partir de hipóteses), ou mais geralmente, um*

[32] Cf. citação de Heyting mais acima.

> *argumento válido (a partir de hipóteses) pode ser entendido como uma seqüência de sentenças onde cada sentença (é ou uma hipótese ou) segue-se logicamente das sentenças precedentes. Essa última idéia é obviamente insustentável (embora pareça ser encorajada por muitos livros-texto de lógica). É verdade que a questão de se alguma coisa é uma prova deve depender do significado das sentenças envolvidas. E obviamente um argumento válido deve preservar a verdade. Mas a preservação da verdade claramente não é uma condição suficiente para a validade; ninguém iria considerar, por exemplo, os axiomas de Peano seguidos do último teorema de Fermat como uma prova, mesmo se de fato esse teorema segue-se daqueles axiomas. Como todo examinador salienta, não é suficiente que ocorra de os passos da prova sigam os precedentes, deve também ocorrer que seja visto que eles seguem....*[33]

Assim, em resumo, aquilo que pareceu criticável a Prawitz é exatamente a aplicação da noção tradicional de conseqüência semântica tarskiana, empregada para dizer quando uma sentença segue-se da outra sem, ao mesmo tempo, fazer ver como isso se dá. Tendemos a concordar com a crítica de Prawitz quando ela visa basicamente o alcance do papel elucidatório que teria o conceito de conseqüência semântica tarskiana. Mas isso não significa que a posição que dá o centro da cena ao conceito de argumento válido não possa de algum modo ser mantida, apesar da crítica. Aliás, parece-nos que boa parte do problema está no significado que atribuímos ao conceito de argumento. Esse conceito envolve originalmente a atividade de um sujeito em comunidade com outros e é razoável entender que, por esta razão, em certas situações, a atividade de argumentação tem um papel epistemológico relevante.

Em decorrência dessa crítica e assumindo que o conceito de prova seja o conceito primitivo, alguma vez Prawitz buscou uma definição para o conceito de argumento válido que estivesse intrinsecamente conectado ao conceito de prova, mais precisamente ao conceito de prova canônica ([Pra78], p. 33):

> *Inferências que dão surgimento aos argumentos canônicos do modo descrito acima são chamadas introduções. Em outras palavras, uma introdução é uma inferência tal que o resultado de aplicá-la a certas provas das premissas é, assim como estão, uma condição suficiente para asserir a conclusão. Uma inferência que não produz por si mesma uma condição suficiente para asserir a conclusão*

---

[33] *A most influential theory of meaning is the Platonistic one, which identifies the meaning of a sentence with its truth-conditions: semantics becomes here essentially constituted by a theory of truth, which is taken to be prior to questions of how we get to know the truths (e.g. questions of proofs). This view is often connected with the idea that when the notions of truth and logical truth are settled in this way, a proof (from some hypotheses), or more generally, a valid argument (from hypotheses) can be understood as a sequence of sentences where each sentence (is either an hypothesis or) follows logically from the preceding sentences. The latter idea is obviously untenable (although it seems to be encouraged by many textbooks of logic). It is true that the question whether something is a proof must depend on the meaning of the sentences involved. And obviously a valid argument must preserve truth. But the preservance of truth is clearly not a sufficient condition for validity; nobody would consider e.g. Peano's axioms followed by Fermat's last theorem as a proof, even if in fact Fermat's last theorem follows from these axioms. As every examiner stresses, it is not enough that the steps of a proof happen to follow from the preceding ones, it must also be seen that they follow....*

> *desse modo mas que é correta em virtude de um método para transformar provas das premissas em uma prova da conclusão é chamada de eliminação.*[34]

Aqui, basicamente, os argumentos são tratados como construções que transformariam uma prova em outra. Ora, como já vimos, parece fazer parte do método intuicionista substituir o conceito de posse da prova naqueles lugares onde normalmente empregaríamos o conceito de verdade. Assim, argumentos já não seriam mais preservadores da verdade, mas qualquer coisa como transformadores de prova. Aliás, reparamos que, no entanto, o conceito de preservação da provabilidade não serve aos intuicionistas, à medida que uma afirmação de provabilidade pode ser interpretada como uma afirmação de existência de uma prova e a existência poderia ser interpretada de um ponto de vista clássico, o que o intuicionista não quer.

Embora as passagens acima tenham sido feitas há quase trinta anos, idéias similares constituem, ainda hoje, o cerne da compreensão da relação entre provas e asserções para autores que também poderíamos filiar ao intuicionismo natural, ainda que possam subsistir algumas divergências entre as concepções. Por exemplo, em Negri & Von Plato ([Neg01], pág. 3) as inferências são caracterizadas do seguinte modo:

> *(b)* **Regras de inferência***: Regras de inferência são da forma: "Se é o caso que A e B, então é o caso que C." Assim elas não atuam sobre proposições, mas sobre* **asserções***. Nós obtemos uma asserção de uma proposição A adicionando algo a ela, a saber, um modo assertivo tal como "é o caso que A." Frege usava o signo de asserção ⊢A para indicar isso mas usualmente a distinção entre proposições e asserções é deixada implícita.*[35]

Queremos destacar que aquilo que os autores consideram ser a asserção de uma proposição *A* foi representado na citação pela expressão *é o caso que A*. Como vimos, segundo eles, as regras atuariam sobre as asserções e, portanto, teriam a seguinte forma: *se é o caso que A e [é o caso que] B, então é o caso que C*. Como, desde esse ponto de vista, as asserções seriam os objetos relacionados por uma inferência, a condição imediata para a asserção de uma proposição estará intimamente relacionada às regras de introdução em dedução natural, só que no caso deles ao invés do conceito de prova canônica eles usam a expressão *prova direta* ([Neg01], págs. 5 e 6):

---

[34] *Inferences which give rise to canonical arguments in the way described above are called introductions. In other words, an introduction is an inference such that the result of applying it to given proofs of the premises is, as it stands, a sufficient condition for asserting the conclusion. An inference which does not in itself produce a sufficient condition for asserting the conclusion in this way but which is correct only in virtue of a method for transforming proofs of the premises to a proof of the conclusion is called an elimination.* Mesmo posteriormente Prawitz ainda parece perseguir um caminho similar a esse, [Pra85].

[35] *(b)* **Rules of inference***: Rules of inference are of the form: "If it is the case that A and B, then it is the case that C." Thus they do not act on propositions, but on* **assertions***. We obtain an assertion from a proposition A by adding something to it, namely, an assertive mood such as "it is the case that A." Frege used the assertion sign ⊢A to indicate this but usually the distinction between propositions and assertions is left implicit.*

> *A dedução natural incorpora o significado operacional ou computacional dos conectivos lógicos e quantificadores. As explicações do significado são dadas em termos das bases imediatas para a asserção de uma proposição da forma correspondente. Pode haver outras bases menos diretas, mas elas devem ser redutíveis as primeiras para que uma semântica operacional coerente seja possível. As "condições BHK" (por Brouwer-Heyting-Kolmogorov), que dão as explicações das operações da lógica proposicional em termos da demonstrabilidade direta de proposições, podem ser postas como se segue:*
> *1. Uma prova direta da proposição $A \wedge B$ consiste da prova das proposições A e B.*
> *2. Uma prova direta da proposição $A \vee B$ consiste de uma prova da proposição A ou da prova da proposição B.*
> *3. Uma prova direta da proposição $A \rightarrow B$ consiste de uma prova da proposição B a partir da assunção de que há uma prova da proposição A.*
> *4. Uma prova direta da proposição $\perp$ é impossível.*
> *No terceiro caso está sendo assumido unicamente que há uma prova de A.*[36]

Contudo, não vemos por que essa seria a única forma de compreender as regras de dedução natural. Estamos, particularmente, mais propensos a defender que as regras devem ser compreendidas numa forma em que o emprego do modo subjuntivo seja importante, como a seguir: *seria ⟦será⟧ o caso que C, quando fosse ⟦for⟧ o caso que A e também fosse ⟦for⟧ o caso que B*. Com efeito, esse nos parece ser um ponto crucial. Na forma com verbos no subjuntivo, não existe compromisso com a verdade das expressões que compõem a regra. Obviamente, não estamos querendo dizer que as regras não preservam a verdade. Ao contrário, elas preservariam a verdade sempre que as expressões envolvidas fossem sentenças com um valor de verdade determinado. O que queremos dizer é que, a partir de nossa formulação, não vemos porque considerar que os objetos sobre os quais uma regra atuaria tenham de ser única e necessariamente asserções. As expressões *fosse ⟦for⟧ o caso que A* e *fosse ⟦for⟧ o caso que B* dificilmente poderiam ser entendidas como asserções, em um sentido mais estrito.

1.2. Dificuldades na Posição Intuicionista

De modo geral, para os intuicionistas naturais, as regras de dedução natural e, em particular, as regras de introdução são pensadas como uma forma de apresentar a chamada

---

[36] *Natural deduction embodies the operational or computational meaning of the logical connectives and quantifiers. The meaning explanations are given in terms of the* ***immediate grounds*** *for asserting a proposition of corresponding form. There can be other, less direct grounds, but these should be reducible to the former for a coherent operational semantics to be possible. The "BHK-conditions" (for Brouwer-Heyting-Kolmogorov), which give the explanations of logical operations of propositional logic in terms of* ***direct provability*** *of propositions, can be put as follows:*
1. A direct proof of the proposition $A \wedge B$ consists of proofs of the propositions A and B.
2. A direct proof of the proposition $A \vee B$ consists of a proof of the proposition A or a proof of the proposition B.
3.A direct proof of the proposition $A \rightarrow B$ consists of a proof of the proposition B from the assumption that there is a proof of the proposition A.
4. A direct proof of the proposition $\perp$ is impossible.
In the third case it is only assumed that there is a proof of A.

interpretação BHK das constantes lógicas, como acabamos de ver na citação. Parece-nos que essa interpretação pode ser questionada em alguns pontos.

Se assumíssemos que as regras de dedução natural representam, de forma estrita, o conceito de prova, é difícil ver sob qual justificativa seria preciso manter, em algumas das regras, restrições às suposições das quais dependeriam a⟦s⟧ premissa⟦s⟧ imediata⟦s⟧ da regra.[37] Na definição de um conceito estrito de prova as suposições poderiam ser dispensadas, pois, a princípio, uma prova não deve depender de algo que não seja uma asserção legítima, a menos que os conceitos de *suposição* e de *premissa* fossem considerados conceitos equivalentes.

Outra questão que nos ocorre diz respeito à definição do conceito estrito de prova. Como uma asserção significa, segundo os intuicionistas, o compromisso com o fato da posse da prova, então, parece-nos, que o símbolo de asserção deveria ser empregado diretamente para falar da posse de uma prova. Assim, segundo esta observação, a regra de introdução da conjunção deveria ser formulada da seguinte forma:

caso $\vdash A_1$ *e* $\vdash A_2$*, então* $\vdash A_1 \wedge A_2$

De forma extensa, essa expressão deveria ser lida do seguinte modo: *para estar de posse de uma prova de* $A_1 \wedge A_2$ *é suficiente estar de posse de uma prova de* A_1 *e de uma prova de* A_2. Além disso, como não há outra cláusula da mesma natureza para a fórmula $A_1 \wedge A_2$,, a cláusula acima será considerada necessária no sentido de que só haverá uma forma direta de provar $A_1 \wedge A_2$. Mas, adotando esse tipo de formulação, logo se apresentaria o problema de saber como formular a cláusula para a implicação. Provavelmente, seríamos obrigados a formular a regra da seguinte forma:

caso $\vdash A_1 \Rightarrow \vdash A_2$*, então* $\vdash A_1 \rightarrow A_2$

Ocorre que o símbolo $\Rightarrow$ já não poderia mais ser interpretado como uma prova pura e simples. Aliás, essa é provavelmente a razão pela qual, na interpretação BHK, diz-se que a condição para asserir $A_1 \rightarrow A_2$ é justamente a posse de um procedimento ou construção que nos levaria da prova de A_1 à prova de A_2. Esse procedimento estaria sendo representado na cláusula pelo símbolo $\Rightarrow$. Mas, deveríamos nos perguntar: qual a natureza desse procedimento? Se esse procedimento não fosse ele mesmo uma prova, então a definição do conceito de prova dependeria de um conceito ainda mais primitivo? Dependeria do conceito de procedimento ou, eventualmente, do conceito

---

[37] Principalmente os casos de $i\forall$ e $e\exists$. Ver regras na Figura A - 6 do Apêndice. Notamos também que Prawitz [Pra65] diferenciava as regras em duas categorias: as regras de inferência (próprias) e as regras de inferência impróprias. A essas últimas ele também chamava de regras de dedução. Nesse grupo estão incluídas as duas regras mencionadas.

de construção? Se quiséssemos dizer que, na verdade, esse procedimento também é uma prova, incorreríamos no problema de saber o que vem a ser o uso de uma suposição ou hipótese em uma prova estrita. Mais ainda, seria preciso explicar o que significa supor $\vdash A_1$.

Considere-se que a estrutura abaixo seja a estrutura da regra de $i\rightarrow$:

$$\begin{array}{l} [\vdash A]^j \\ \quad | \\ \vdash B \\ \hline \quad\quad {}^j\, i\rightarrow \\ \vdash A\rightarrow B \end{array}$$

Figura I-4[38]

Dado que, da perspectiva do intuicionismo, a asserção e a posse da prova estão conceitualmente conectadas, se repararmos na citação de Negri & Von Plato, veremos que a conclusão $A\rightarrow B$ de uma $i\rightarrow$ será asserida/provada ($\vdash A\rightarrow B$) quando a premissa imediata B é asserida/provada ($\vdash B$) sob uma suposição: sob a pressuposição da posse da prova de A. Mas, até onde vemos, para que essa pressuposição faça sentido, é preciso admitir que A está sendo asserida. Dito de outro modo, a proposição A deveria estar sendo asserida, embora sua prova esteja sendo (pre) suposta, pois, de outro modo, se A não estivesse sendo asserida, a passagem da suposição A à asserção de B transformaria algo que não é asserido (A) em algo que é asserido (B) e não poderíamos ver como exatamente se daria essa passagem. De duas uma: ou as proposições A e B ambas não estão sendo asseridas; ou ambas estão sendo asseridas e, assim, deveríamos concluir que é perfeitamente possível asserir uma proposição A sem estar de posse da sua prova.

Considerando agora o caso das restrições de aplicabilidade para as regras de introdução, na formulação das cláusulas para os quantificadores, se uma noção estrita de prova fosse empregada, deveríamos concluir que não haveria mais necessidade de uma restrição especial sobre a aplicabilidade da regra $i\forall$. Lembramos que, nessa regra, o parâmetro individual próprio da regra não pode ocorrer em nenhuma suposição aberta da qual a premissa imediata de $i\forall$ dependa. Todavia, temos a impressão que, se a premissa imediata A estivesse sendo asserida na dependência de uma lista de suposições Γ, as suposições também deveriam estar sendo asseridas e suas provas sendo supostas. Nesse caso, talvez, já pudéssemos considerar a asserção das suposições como garantia suficiente para aplicar $i\forall$ e obter $\forall xA[a/x]$. Ou seja, talvez a cláusula pudesse ter sido formulada sem restrições sobre o parâmetro individual, do seguinte modo:

caso $\vdash A$, *então* $\vdash \forall xA[a/x]$

---

[38] Ver [Neg01], pág. 4.

Ilustramos o problema lembrando a formulação de Mendelson ([Men79], págs. 59-63) para a regra de generalização. Ele define a lógica de primeira ordem usando a seguinte regra de inferência:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x A[a/x]}\ \text{Gen}$$

Figura I-5

Contudo, como ele mesmo observa, ao definir o sistema usando uma regra dessa natureza, o teorema da dedução já não seria mais imediatamente válido. Isso, desde o ponto de vista dos sistemas de dedução natural, significaria que a regra $i\rightarrow$ já não seria mais válida! O que ocorre é que a regra acima poder ser considerada uma regra de inferência correta, mas ela não pode ser considerada uma regra de dedução correta, pois a premissa imediata deve ser asserida[39]. Quando a aplicação da regra estiver restringida às premissas que sejam teoremas de uma teoria de primeira ordem, ela será uma inferência correta. Entretanto, usualmente, não consideraríamos correto aplicar a regra se a premissa imediata fosse simplesmente uma hipótese ou suposição.

Mas, se se trata de caracterizar o conceito de prova, nos perguntamos por que os intuicionistas também não poderiam simplesmente formular uma regra similar à regra de Mendelson, se for verdade que na concepção intuicionista qualquer que seja a suposição usada para inferir a premissa imediata *A* da regra envolveria no máximo a suposição da posse de uma prova e a respectiva asserção de uma proposição, conforme a citação anterior de Negri & Von Plato. A impressão que temos é a de que a adição de uma prova qualquer sobre as suposições acabaria finalmente por fechar todos os parâmetros das suposições e a restrição sobre o parâmetro individual perderia seu sentido.

A questão pode ser respondida, como veremos a seguir, mas não estamos seguros de que a resposta que ofereceremos corresponde à posição intuicionista.

A nosso ver, parte do problema encontra-se na concepção do conceito intuicionista de suposição. Retomando o problema da implicação, sob as condições BHK, a definição do conceito de prova requer uma construção que leve da prova de *A* à prova de *B*, para que seja possível provar $A\rightarrow B$. Mas, na verdade, o tipo mais comum de construção que leva de uma prova a outra é o que costumamos chamar de dedução e não está estabelecido *a priori* que uma dedução seja o mesmo que uma prova. Intuitivamente, quando desejamos provar uma implicação, costumamos lançar uma suposição que será descartada ao fim da seqüência dedutiva. Contudo, parece-nos que, para alguns intuicionistas ao menos, o conceito do que é uma suposição é um conceito que

[39] Para uma distinção entre regra de dedução e regra de inferência ver o Apêndice.

difere do que muitas pessoas costumam entender por isso. Para um intuicionista, a suposição de *A* parece ser, mais do que a suposição da provabilidade de *A*. Talvez seja equivalente a suposição da posse da prova de *A*. Da forma como o vemos, essa posição apareceria em alguns autores, como Martin-Löf.

Notamos que Martin-Löf ao buscar esclarecer o conceito de prova nos anos oitenta, adotou um conceito de prova híbrido. Conjecturamos que ele pretendia, desse modo, encaixar o conceito de *suposição* sob o conceito de *prova*. A caracterização dos conceitos de *suposição* e de *prova hipotética* aparecem na citação abaixo (cf. [Mar96] III conferência):

> *A palavra grega ύπόθεσιζ hipótese, foi traduzida em latim suppositio, suposição, e ambas significam o mesmo que assunção. Agora, qual é a regra para fazer assunções, de modo geral? É simples. Sempre que você tem um julgamento no sentido em que eu estou usando a palavra, isto é, um julgamento no sentido de uma instância de uma forma de julgamento, então foi estabelecido o que você deve conhecer de modo a ter o direito de fazê-lo. E isso significa que faz perfeito sentido assumi-lo, o que é o mesmo que assumir que você o conhece, o que, por outro lado, é o mesmo que assumir que você o provou. Porquê é o mesmo que assumir que você o conhece? Por causa da convenção constante tácita de que a força epistêmica, Eu conheço ..., está lá, mesmo se ela não foi explicitada. Assim, quando você assume algo, o que você faz é assumir que você o conhece, isso é, que você o provou. E, para repetir, a regra para fazer assunções é simplesmente essa: sempre que você tem um julgamento, no sentido de uma instância de uma forma de julgamento, você pode assumi-lo. Isso da surgimento à noção de julgamento hipotético e à noção de prova hipotética, ou prova sob hipóteses.*[40]

Como vemos, além de adotar o conceito de prova hipotética, Martin-Löf também identifica os conceitos de suposição, hipótese e assunção[41]. No entanto, essa identificação nos parece questionável. Poderíamos até admitir que assumir uma proposição, ou *julgamento*, que é o termo que ele usa, é o mesmo que assumir que ela é verdadeira, o que, segundo a compreensão intuicionista, equivaleria a assumir a posse de uma prova da proposição. Porém, se identificamos o ato de supor com o ato de assumir, parece-nos que, em seguida, deveríamos considerar que o ato de supor equivale ao ato de supor a posse de uma prova. Mas isso é estranho. Por exemplo, é possível supor (contrafactualmente) que π seja racional. Contudo, já não vemos muito bem por

---

[40] *The Gr. ύπόθεσιζ hypothesis, was translated into Lat. suppositio, supposition, and they both mean the same as assumption. Now, what is the rule for making assumptions, quite generally? It is simple. Whenever you have a judgment in the sense that I am using the word, that is, a judgment in the sense of an instance of a form of judgment, then it has been laid down what you must know in order to have the right to make it. And that means that it makes perfectly good sense to assume it, which is the same as to assume that you know it, which, in turn, is the same as to assume that you have proved it. Why is it the same to assume it as to assume that you know it? Because of the constant tacit convention that the epistemic force, I know ..., is there, even if it is not made explicit. Thus, when you assume something, what you do is that you assume that you know it, that is, that you have proved it. And, to repeat, the rule for making assumptions is simply this: whenever you have a judgment, in the sense of an instance of a form of judgment, you may assume it. That gives rise to the notion of hypothetical judgment and the notion of hypothetical proof, or proof under hypotheses.*

[41] Usaremos o termo *assunção* para traduzir *assumption*.

que isto seria exatamente o mesmo que supor que conhecemos que π é racional ou, ainda, supor que temos a posse da prova da racionalidade de π. Segundo Martin-Löf, dada a identificação entre assumir e supor, os atos de supor *p* e de supor que conhecemos *p* seriam atos idênticos. Veja que podemos supor que está chovendo lá fora, assim como podemos supor que conhecemos/sabemos que está chovendo lá fora, mas essas suposições são de natureza distinta. Esse ponto é delicado e, de certo modo, esse problema continuará sendo objeto de nossa atenção nos próximos capítulos.

Todavia, Matin-Löf parece reconhecer a necessidade de empregar um outro conceito distinto do conceito de *prova estrita* dentro do arcabouço intuicionista, um conceito que permita tratar as suposições. Da forma como o interpretamos, esse seria o papel do conceito de prova hipotética (cf. [Mar96] III conferência):

> *Agora, de modo geral, uma prova de um julgamento hipotético, ou conseqüência lógica, é nada mais que uma prova hipotética da tese, ou conseqüente, a partir das hipóteses, ou antecedentes. A noção de prova hipotética, por sua vez, a qual é uma noção primitiva, é explicada dizendo que ela é uma prova a qual, quando suplementada com provas das hipóteses, ou antecedentes, torna-se uma prova da tese, ou conseqüente. Assim a noção de prova categórica precede a noção de prova hipotética, ou inferência, na ordem de prioridade conceitual.*[42]

Não obstante, a tese expressada, além de não ser muito clara, nos parece problemática. A tal prioridade conceitual nos parece de fato bem obscura. De um lado, para explicar o que é a prova de uma implicação, é preciso lançar mão do conceito de prova hipotética, mas, de outro, o conceito de *prova* (estrita) tem precedência conceitual sobre o conceito de *prova hipotética*. Preferiríamos, particularmente, dizer que aquilo que Martin-Löf chama de prova hipotética é, na verdade, uma dedução. Deduções têm o poder de transformar as provas das premissas em prova da conclusão. Mas deduções não são provas, embora possam estar presentes numa prova.

Na interpretação proposta por Martin-Löf (cf. [Mar96] III conferência), a regra $i\rightarrow$ requereria como condição de asseribilidade da conclusão $A \rightarrow B$ uma prova hipotética levando da asserção de *A* até a asserção de *B*[43]. Ou seja, se usássemos o símbolo $\vdash$ para representar as provas hipotéticas, à esquerda dele poderíamos, ou até deveríamos, listar as proposições assumidas.

---

[42] *Now, quite generally, a proof of a hypothetical judgement, or logical consequence, is nothing but a hypothetical proof of the thesis, or consequent, from the hypotheses, or antecedents. The notion of hypothetical proof, in turn, which is a primitive notion, is explained by saying that it is a proof which, when supplemented by proofs of the hypotheses, or antecedents, becomes a proof of the thesis, or consequent. Thus the notion of categorical proof precedes the notion of hypothetical proof, or inference, in the order of conceptual priority.*

[43] Essa nos parece ser a forma adequada de interpretar a formulação da regra $i\rightarrow$ formulada da seguinte forma na mesma conferência: teremos $A \rightarrow B$ *true*, quando obtemos *B true* da suposição *A true*. É também preciso levar em conta que, para este autor, nesta mesma conferência, os julgamentos *A true* e *(A true) is provable* são logicamente equivalentes no sentido de inter-inferíveis.

Assim, a noção de **prova hipotética** formulada de modo clausal com listas de proposições assumidas Γ e Δ seria:

(i) caso $\Gamma \vdash A_1$ *e* $\Delta \vdash A_2$*, então* $\Gamma,\Delta \vdash A_1 \wedge A_2$

(ii) caso $\Gamma, A_1 \vdash A_2$*, então* $\Gamma \vdash A_1 \rightarrow A_2$

(iii) caso $\Gamma \vdash A$*, então* $\Gamma \vdash \forall x A[a/x]$

(iv) caso $\Gamma \vdash A_1$ *ou* $\Gamma \vdash A_2$*, então* $\Gamma \vdash A_1 \vee A_2$

(v) caso $\Gamma \vdash A$*, então* $\Gamma \vdash \exists x A[a/x]$

Ainda assim, parece-nos, restariam algumas questões importantes a serem examinadas. Primeiro, o que significaria, mais precisamente, dizer que uma prova está sendo suposta? Poderíamos supor uma prova que sabemos não existir? Segundo, no caso da cláusula *(iii)*, já que estaríamos supondo a posse da prova de todas as fórmulas de Γ, existiria a necessidade de fazer uma restrição sobre o parâmetro a?

Não negamos que existam formas de aplicar o conceito de prova hipotética às provas reais. De fato, poderíamos dizer que a proposição assumida está sendo asserida porque temos a posse da prova, mas, por alguma razão, não queremos ou não podemos exibi-la por enquanto. Existe material histórico apresentando situações de prova que se encaixam nessa descrição. Todavia, o que nos parece duvidoso é que todos os argumentos de natureza dedutiva possam ser pensados neste quadro interpretativo.

A nosso ver, um axioma pode ser assumido, porém é muito difícil aceitar que os axiomas possam ser provados, ao menos não no mesmo sentido em que os teoremas o são. A interpretação de que as suposições são certas asserções nas quais a prova está sendo suposta aplica-se de forma justa a um caso especial do emprego de lemas no decorrer da prova de um teorema. Ao provar axiomaticamente um teorema, não se requer que o lema empregado seja acompanhado da sua respectiva prova. Inclusive, algumas vezes, os lemas empregados são tais que a sua prova é suposta e a prova do teorema prossegue sem que esta suposição tenha sido comprovada. Historicamente, isso parece ter sido o caso na geometria. Heath diz que ([Hea21], pág. 373):

> *A palavra lema (λημμα) simplesmente significa alguma coisa assumida. Arquimedes a usa naquilo que agora é conhecido como Axioma de Arquimedes, ...; mas ela é mais comumente usada com uma proposição subsidiária requerendo prova, a qual, no entanto, é conveniente assumir no local onde ela é necessária de modo a que o argumento não seja interrompido ou estupidamente estendido. Tal lema poderia ter sido provado antecipadamente, mas a prova é*

> *freqüentemente posposta até o fim, sendo a assunção marcada como algo que deve ser provado posteriormente...*[44]

Temos a impressão de que a noção de prova intuicionista dependeria da noção mais primitiva de prova hipotética ou, quem sabe, até do conceito de procedimento/construção. Nesse caso, o conceito estrito de prova seria apenas um conceito derivado. Mas, se é para adotar o conceito de *prova hipotética*, não vemos por que simplesmente não manter a prática usual de empregar o conceito de *dedução* em seu lugar. É o que procuraremos fazer a seguir, na próxima secção. Mas, antes disso, voltemos mais uma vez nossa atenção ao conceito de asserção.

Com respeito ao conceito de asserção intuicionista, outra dificuldade interpretativa parece surgir. Para os intuicionistas, mas também para vários não-intuicionistas, deve haver alguma forma de asserir formas proposicionais.[45] A seguinte passagem de Heyting parece comprovar isso ([Hey56], págs. 98 e 99):

> *Uma fórmula lógica com variáveis proposicionais, digamos $\mathcal{U}(p,q,...)$, pode ser asserida, se e somente se $\mathcal{U}(p,q...)$ pode ser asserida para proposições arbitrárias $p,q,...$; isso é se nós possuímos um método de construção que por especialização gera a construção requerida por $\mathcal{U}(p,q...)$.*[46]

Todavia, o uso corrente da linguagem não nos permitiria asserir uma expressão que contenha uma variável livre ou parâmetro[47]. Considere-se que, para aqueles que acreditam na existência de Deus, bem pode ser verdade que Deus ame todas as coisas. Nem por isso as expressões "*Deus ama fulano*"[48], "*Deus ama a*" e "$B \rightarrow$*Deus ama todas as coisas*" poderiam ser asseridas.

Embora, Heyting seja consistente com a definição que havia dado para as asserções, ou seja, a de que as asserções são um compromisso com o fato de que uma construção foi efetuada, é estranho considerar que uma forma proposicional como $A \rightarrow (A \vee B)$ possa ser asserida se não sabemos o que é A e o que é B. A menos que a palavra *asserção* ganhe um novo significado no âmbito da lógica ou no âmbito do intuicionismo, parece-nos difícil aceitar a asserção de formas

---

[44] *The word lemma ($\lambda\eta\mu\mu\alpha$) simply means something assumed. Archimedes uses it of what is now know as the Axiom of Archimedes, ...; but it is more commonly used of a subsidiary proposition requiring proof, which, however, it is convenient to assume in the place where it is wanted in order that the argument may not be interrupted or unduly lengthened. Such a lemma might be proved in advance, but the proof was often postponed till the end, the assumption being marked as something to be afterwards proved...*

[45] O conceito de forma proposicional que estamos empregando está caracterizado no Apêndice.

[46] *A logical formula with propositional variables, say $\mathcal{U}(p,q,...)$, can be asserted, if and only if $\mathcal{U}(p,q...)$ can be asserted for arbitrary propositions $p,q,...$; that is if we possess a method of construction which by specialization yields the construction demanded by $\mathcal{U}(p,q...)$.*

[47] Aliás, parece-nos haver alguma ligação desse fato com o uso da pressuposição de referencialidade no sistema de Jaskowski.

[48] Desde nossa perspectiva a expressão "fulano" comporta-se como um parâmetro individual para pessoas na linguagem ordinária.

proposicionais. Contudo, mesmo que admitíssemos esse novo significado isso implicaria que a compreensão do conceito de inferência tornou-se mais delicada. A compreensão do que é uma regra de inferência dependeria de compreender previamente o que é uma asserção, já que regras de inferência envolvem asserções. Mas, de outro lado, uma asserção logicamente complexa só seria compreendida se conhecêssemos como a provamos por inferência.

Naturalmente, os lógicos, e os intuicionistas em particular, têm o direito de definir o conceito de *asserção* como bem lhes aprouver. Somente deveriam deixar claro que o seu uso difere daquele que podemos chamar de uso ordinário da palavra. Segundo podemos perceber, no caso dos intuicionistas, a inovação se originaria, em parte, do emprego do conceito de prova ou de construção no lugar do conceito de verdade, na definição do que entendemos por asserção. Embora, intuitivamente, possamos entender que, por meio de um ato de asserção, fazemos um compromisso de estar apresentando a verdade, se a verdade fosse algo que dependesse inteiramente da posse de uma prova, como o é para os intuicionistas, então o passo seguinte consistiria em dizer que uma asserção é um ato de compromisso de ter a posse de uma prova ou construção. Entretanto, desse modo, o uso da palavra asserção só faria sentido no âmbito das proposições matemáticas, pois, na linguagem cotidiana, a relação entre a verdade e a provabilidade de uma proposição não é tão direta. Não obstante, é preciso notar que Heyting mantêm-se sempre estritamente coerente, já que diz explicitamente que seu interesse na lógica está restrito ao âmbito das proposições matemáticas ([Hey56], pág. 97).

Porém, evidentemente, do fato de que Heyting queira se limitar ao âmbito da matemática não se segue que tenhamos de seguir suas pegadas. Inclusive, parece-nos, não deveríamos segui-lo se quisermos adotar uma perspectiva da lógica que nos permita aplicá-la para elucidar certos argumentos como aquele do professor, apresentado anteriormente. O exemplo parece ser dedutivamente correto e para ele o funcionamento do conceito de asserção intuicionista parece ser mais problemático. Trataremos de um exemplo dessa ordem na próxima secção.

Antes de fechar essa secção examinemos uma última questão. Considere-se a seguinte fórmula (forma proposicional): $A \rightarrow (A \vee B)$, onde A e B são parâmetros proposicionais[49]. Esta fórmula é intuicionisticamente válida e, portanto, seguindo a citação acima, ela poderia ser asserida. Mas, o que seria entendido intuicionisticamente como sendo a sua prova? Ora, a prova desta forma proposicional consistiria de uma construção que terminaria na conclusão $A \vee B$ e que iniciaria assumindo A.

[49] Parâmetros proposicionais são o mesmo que variáveis proposicionais. Para maiores detalhes ver o Apêndice.

O problema agora está em saber o que significa dizer que a forma proposicional *A* está sendo assumida. Se isso quer dizer que esta fórmula está sendo asserida e que sua prova está sendo suposta, teríamos um problema na medida em que não está garantido que a sua asserção seja correta, pois *A* pode não ser válida. Lembremos que, segundo a formulação de Heyting, uma forma proposicional só poderia ser asserida se, para qualquer substituição arbitrária dos parâmetros, obtivéssemos uma prova da proposição resultante.

A nosso ver, restaria uma forma consistente de interpretar a assunção intuicionista de *A*. Ela consistira em dizer que: *caso haja uma construção que prove uma expressão da forma A, então teríamos uma construção que provaria uma expressão da forma* $A \vee B$.[50] Mas, essa interpretação do ato de suposição seria deveras interessante. O próprio antecedente do condicional em itálico envolveria uma suposição. Mais ainda, todos os indícios são de que a oração antecedente do condicional em itálico não estaria sendo asserida, inclusive porque o verbo está no subjuntivo. A oração antecedente do condicional estaria aventando uma possibilidade e, ao que parece, seu papel seria somente o de identificar uma virtual situação. Não vemos como entender que o seu papel seria o de um compromisso.

A solução que acabamos de avançar teria o mérito de poder responder a questão que lançamos anteriormente acerca da restrição sobre o parâmetro individual próprio da regra $i\forall$. Considere que tenhamos uma dedução intuicionisticamente admissível para $A \Vdash B$, tal que o parâmetro individual *a* ocorre em *A* e em *B*. Se considerássemos que a dedução parte da asserção de *A* (ou seja, que a assunção de *A* envolveria a asserção de *A* e a suposição da posse da prova de *A*), então a adjunção de uma prova sobre *A* permitiria que adicionássemos um novo passo inferencial ao fim da dedução, em que *B* seria a premissa imediata e $\forall xB[a/x]$ a conclusão. A prova de *A* não deixaria nenhum parâmetro individual aberto. Desse modo, a restrição sobre os parâmetros individuais inerente a regra de $i\forall$ não faria nenhum sentido. Porém, se interpretarmos a assunção de *A* da forma como sugerimos no parágrafo anterior, a restrição faria todo sentido. Considere que tenhamos, na verdade, uma prova da asserção $A[a/t]$, mas não uma prova de *A*. Ora, nesse caso, aquele último passo de $i\forall$ já não poderia ser aplicado, depois que compuséssemos a prova de $A[a/t]$ com a dedução $A \Vdash B$. Obteríamos uma prova de $B[a/t]$ sobre a qual não estaria garantido que poderíamos aplicar $i\forall$.

[50] Usamos o termo expressão aqui para dar a mais ampla generalidade à interpretação. Uma expressão pode estar por uma proposição concreta, mas, eventualmente, também pode estar por si mesma e ser concebida como uma forma proposicional.

Assim, como vemos, a restrição sobre os parâmetros visaria garantir a correção de um passo de introdução de universal quando as provas fossem substituídas no lugar das assunções, desde que as assunções fossem interpretadas daquele modo especial apresentado acima.

1.3. Uma Proposta Alternativa para Interpretar os Sistemas de Dedução Natural

Temos dito que os sistemas de dedução natural são constructos elucidatórios e nos parece que Gentzen poderia muito bem compartilhar dessa idéia, segundo as passagens que destacamos anteriormente. Acreditamos também que Prawitz não seria de opinião diferente, ao menos se adotarmos uma determinada análise do significado da palavra *codificação* presente na passagem abaixo[51], ([Pra78], pág. 25):

> *Um sistema formal tem ser olhado, eu penso, como a codificação de uma prática dedutiva já existente, e para estar apto a discutir se uma codificação é adequada, deve ser significativo falar de provas não só de um modo relativo a um sistema já dado.*[52]

Aliás, o próprio Prawitz parece entender dessa forma os esforços teóricos de Gentzen (cf. [Pra65], prefácio à edição Dover, pág. vii):

> *O principal objetivo científico de Gentzen como ele mesmo o formulou lá em 1932 era o de contribuir ao programa de Hilbert. Parte de seus grandes resultados àquele respeito, que mudaram a teoria da prova e que têm tido uma influência duradoura na área, dependiam de certos insigths acerca da estrutura das provas. Para mim, esses insigths são ao menos tão interessantes quanto as suas contribuições ao programa de Hilbert. Eles consistem antes de tudo de uma análise lógica específica das provas informais que resultou nos sistemas de dedução natural.*[53]

Entendemos que os sistemas de dedução natural são constructos elucidatórios erigidos com o objetivo geral de elucidar o conceito de prova matemática. Isso não significa que as derivações possam ou devam ser interpretadas como constructos elucidatórios imediatos para o conceito de prova.

---

[51] A análise a que nos referimos consiste em notar que o processo de elucidação conceitual está composto de pelo menos duas fases: a primeira, consiste de uma análise das condições de adequação, extraídas do conceito intuitivo (ou pré-formal); a segunda, a formulação do conceito formal, ou de uma codificação, que cumpra com os critérios de adequação elencados na fase anterior. Para maiores detalhes ver [Seo02].

[52] *A formal system has to be looked upon, I think, as a codification of an already existing deductive practice, and to be able to discuss whether a codification is adequate, it must be meaningful to speak about proofs not only relative to an already given system.*

[53] *Gentzen´s chief scientific aim as he formulated it himself as early as 1932 was to contribute to Hilbert´s program. Part of his great achievement in that respect, which changed proof theory and has had a lasting influence on the field, depended on general insigths concerning the structure of proofs. To my mind, the se insigths are at least as interesting as his contributions to Hilbert´s program. They consisted first of all in a specific logical analysis of informal proofs that resulted in the systems of natural deduction.* Sublinhado nosso.

Acerca da relação entre o conceito de prova e o conceito de argumento, acreditamos também que o ponto de vista tradicional, presente em vários manuais de lógica, pode ser mantido em alguma medida, apesar da crítica de Prawitz dirigida à relação de conseqüência semântica tarskiana. O ponto de vista que adotaremos consistirá em interpretar os sistemas de dedução natural não como elucidação direta do conceito de prova ou do conceito de argumento, mas como elucidação do conceito de conseqüência dedutiva. Esse conceito, por sua vez, não pode ser confundido com o conceito de conseqüência semântica. Com base nessa elucidação, será possível esclarecer, ainda que parcialmente, o conceito de argumento válido e o conceito de prova.

Voltemos ao exemplo do início do capítulo, envolvendo a enunciação do professor: "-*Caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido; o que é impossível. Logo, CAMESTRES não pode ser inválido (é válido)*". Nós o consideramos um argumento, pois ele envolve asserções, tal que uma delas é uma conclusão. A identificação é feita com base na colocação do termo *logo*.

Assim como todo argumento, esse argumento está constituído de asserções. A asserção "*caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido*" é uma premissa. A asserção "*CAMESTRES não pode ser inválido*" é a conclusão. Nos dois casos, o verbo principal aparece conjugado no modo indicativo. Interessa considerar qual poderia ser a justificativa para a asserção da premissa condicional "*caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido*".[54]

Ao que parece, para alguns intuicionistas, pelo menos[55], a prova direta de uma implicação requereria uma construção levando da asserção do antecedente à asserção do conseqüente da implicação. Como, via de regra, as asserções envolvem a posse de uma prova, a construção deveria, então, transformar uma prova do antecedente em uma prova do conseqüente. Ora, se os condicionais forem tratados da mesma forma, as mesmas condições se aplicarão.

Importa notar o fato de que, na asserção condicional em tela, usamos correta e adequadamente como antecedente uma oração que não pode, de forma alguma, ser considerada asserida: "*CAMESTRES fosse inválido*". O uso do pretérito subjuntivo nesse caso indica uma suposição contrafactual. Justamente, se alguma informação tivesse sido apresentada, essa informação seria a de que é falso que *CAMESTRES* seja inválido. De fato, algumas vezes, ocorre de os alunos iniciantes extraírem essa conseqüência do pretérito subjuntivo e seu engano é um

---

[54] Basicamente, usando *CELARENT* e conversão, demonstramos a validade de *CAMESTRES*: *YeZ* converte a *ZeY*; temos *ZeX* por *CELARENT* de *YaX* e *ZeY*; finalmente, *ZeX* converte a *XeZ*, ou seja, obtemos *CAMESTRES*. Se considerarmos que a conversão é intuitivamente válida, então da invalidade de *CAMESTRES* seguiria a invalidade de *CELARENT*.

[55] Ver nota 38.

fato revelador, pois a confusão se dá entre o ato de supor a oração e o ato de informar ou asserir exatamente o contrário do que está sendo suposto.

De nosso ponto de vista, os sistemas de dedução natural são o resultado de uma elucidação do conceito de argumento válido. Como o exemplo anterior parece efetivamente conter um argumento de estrutura válida, para que o aluno aceite a conclusão definitivamente, só faltaria uma justificação da premissa asserida: "*caso CAMESTRES fosse inválido, então CELARENT seria inválido*". Essa justificação partiria da hipótese da invalidade de *CAMESTRES*, concluindo a seguir a invalidade de *CELARENT*.

Todavia, parece-nos, a interpretação intuicionista dos sistemas de dedução natural tenderia a inviabilizar a justificação da asserção condicional, à medida que, para eles, as regras de inferência relacionariam asserções e, assim, tanto a hipótese de que *CAMESTRES* seja inválido quanto a conclusão da invalidade de *CELARENT* deveriam ter sido asseridas. Se a asserção de uma implicação requer uma prova hipotética levando da asserção do antecedente à asserção do conseqüente, seríamos levados a concluir que, para o condicional contrafactual do exemplo, não poderia haver uma prova hipotética, pois seu antecedente sequer estaria sendo asserido.

Parece impossível interpretar o uso de uma oração subjuntiva como uma forma de asserção. A observação ganha mais gravidade se notarmos que o uso de orações subjuntivas é uma constante na construção das provas matemáticas. Em geral, quando começamos a prova de um teorema, costumamos utilizar a expressão *seja o tal e tal ...* e, nesse caso, há certamente um uso do subjuntivo para identificar *o tal e tal*, para convidar alguém a apreciar *o tal e tal*, mas não para asserir algo sobre *o tal e tal*. Consideremos, por exemplo, como começa a prova da *PROPOSIÇÃO I* da geometria euclidiana, segundo a tradução de Heath, ([Hea25vI], pág. 241): *Let AB be the given finite straight line.* Em português ficaria assim: *Seja AB a (uma) linha reta finita dada*. Ou seja, usamos o subjuntivo na tradução, pois, se usássemos o indicativo, teríamos a seguinte oração estranha: *AB é a linha reta finita dada*. Se a segunda tradução fosse a correta, a demonstração da proposição pareceria perder seu caráter de generalidade. Mas a idéia é que a construção deveria valer para qualquer linha reta *AB* dada. Notamos, para finalizar, que se a nossa tradução é correta, não seria só na primeira proposição da geometria euclidiana que apareceria o subjuntivo. Apareceria também na segunda, na terceira etc.[56]

---

[56] Outra tradução possível seria: *considere uma linha AB qualquer*. Griss [Gri50], pág. 108, propôs, como forma de poder afastar a idéia de suposição, essa releitura da sentença hipotética. Todavia, essa última frase continua fazendo uso de um verbo que não está no modo indicativo – que é o modo usualmente empregado para asserir. Lemos na oração em itálico um convite com verbo no modo subjuntivo, não uma asserção.

Que os condicionais contrafactuais, em geral, sejam excluídos do âmbito da matemática é algo que se deve ao fato de que o interesse que os matemáticos têm pelas provas está na possibilidade de ampliar o estoque de conhecimento matemático, de ampliar o estoque de teoremas asseridos. Entretanto, apesar desses condicionais dificilmente permitirem um incremento nesse estoque, do ponto de vista da construção da argumentação o seu exame poderia ser bastante relevante. Afinal, eles demandariam apenas que se fizesse uso de construções verbais subjuntivas, que já são moeda corrente nas provas matemáticas.

Um exemplo de asserção condicional contrafactual de natureza matemática é o seguinte: "caso π fosse um número racional, então π seria um número algébrico".[57] Essa asserção pode facilmente ser provada e não nos parece que o raciocínio envolvido contenha qualquer passo de natureza lógica que não possa ser elucidado por meio das regras de dedução natural. Aliás, provavelmente, o último passo dedutivo seria uma introdução da implicação sobre a suposição da racionalidade de π. Ora, embora seja possível supor (contrafactualmente) a posse da prova da racionalidade de π, não vemos como seria possível considerar que, nesse caso, a oração "π fosse um número racional" esteja sendo asserida. Ao contrário, nossa intuição lingüística nos diz que ela não poderia estar sendo asserida e, inclusive, o mais usual seria interpretar essa oração como uma informação de que, na verdade, π não é um número racional.

A prova da asserção de que todo número racional é algébrico seria mais ou menos da forma a seguir:

Seja b um número racional. Logo, deveria haver dois números c e d tal que b=c/d. Como todo número algébrico é da forma $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$, *para* $a_0\neq0$, *onde os* a_i*´s são inteiros e n é um inteiro positivo, e como db-c=0, onde x=b, concluiríamos que b seria algébrico. Portanto, caso b seja racional, então b seria também algébrico.*

Como a última sentença não depende de nenhuma suposição, pois *b* não ocorreria em nenhuma suposição não descartada, poderíamos afirmar de forma categórica que *todo número racional é algébrico*. Nessa sentença, o uso do verbo *ser* no presente do indicativo e na terceira pessoa do singular indica uma asserção. Mas essa asserção só se tornou possível porque a conclusão condicional anterior não dependia de nenhuma suposição e, por isso mesmo, pôde ser transformada em uma asserção categórica universal, usando o verbo no indicativo.

---

[57] Lembramos aos leitores que a irracionalidade de π foi demonstrada por Lambert em 1761. A não-algebricidade de π foi demonstrada por Lindemman em 1882, e essa última demonstração implica que não pode haver quadratura do círculo com os métodos usuais da geometria. Para maiores informações, ver Boyer [Boy74], pág. 340 e pág. 407. O exemplo nos foi sugerido pelo prof. J.Molina.

Como vimos, alguns intuicionistas parecem compreender as suposições como asserções ou julgamentos, em que a suposição recairia, na verdade, sobre a posse da prova. Tomando por base a citação anterior de Martin-Löf, o ato de assumir uma proposição e o ato de supor uma proposição estariam sendo identificados. Porém, é duvidoso que o ato de assumir uma proposição seja equivalente ao ato de supor que ela está provada. Também parece duvidoso que a suposição de uma proposição possa ser entendida como o ato de assumir uma proposição no sentido intuicionista.

É completamente compreensível que, às vezes, uma suposição seja usada de tal modo que recaia sobre a existência ou a posse de uma prova. Esse seria o caso, por exemplo, se disséssemos: "*Suponha que foi provado que todo número par é a soma de dois primos*". Contudo, há casos em que, ao fazermos explicitamente uma suposição, como em "*suponha que* π *fosse racional*", não estamos nem de longe afirmando ou asserindo que π é racional, muito menos supondo que existe uma prova de que π é racional. Inclusive, em várias situações, partimos de uma suposição que será posteriormente refutada e, nesse caso, precisaríamos de um malabarismo extravagante para dizer que a hipótese refutada estava sendo asserida. A diferença pode ser crucial se considerarmos que a crítica maior que os intuicionistas dirigem aos clássicos pode ser resumida sobre a discussão da validade das regras de dedução indireta, as quais, sob o nosso ponto de vista envolvem, essencialmente, descarte de hipóteses. Trataremos desse tema nos próximos capítulos.

O conceito do que é uma suposição afetará a concepção que desenvolveremos acerca da negação e da impossibilidade. Acreditamos que não faria sentido conceptualizar as provas por impossibilidade ou por absurdo como situações nas quais a suposição consiste de uma asserção seguida da suposição da posse da prova. Aliás, parece que estamos em boa companhia nesse quesito, pois temos indícios de que, em alguns momentos, Frege também sustentou uma opinião similar ([Fre79], pág. 13):

> *Em uma prova indireta nós dizemos, por exemplo, "Suponha que os segmentos de linha AB e CD não são iguais". Aqui o conteúdo que os segmentos de linha AB e CD não são iguais, contém uma negação; mas esse conteúdo, embora ele possa se tornar um julgamento, não está sendo avançado como um julgamento, no entanto.*[58]

Do nosso ponto de vista, a melhor forma de perceber a diferença entre o ato de assumir uma proposição (no sentido intuicionista) e o ato de supor uma proposição estaria na observação

---

[58] *In an indirect proof we say, for example, "Suppose that the line segments AB and CD are not equal". Here the content, that the line segments AB and CD are not equal, contains a negation; but this content, though it can become a judgment, is nevertheless not advanced as a judgment.*

dos casos contrafactuais. Infelizmente, na matemática, a ocorrência de proposições contrafactuais está quase que banida, dada a natureza do tema. Assim, se o exemplo que empregamos for adequado, o uso do subjuntivo na expressão "*caso π fosse racional*" indicaria uma suposição, mas não indicaria que estamos asserindo a racionalidade de π e, conseqüentemente, também não indicaria que estamos supondo a posse da prova da racionalidade de π. Ao contrário, é provável que parte considerável dos falantes diga que, nesse caso, o uso do subjuntivo "*fosse*" informa que π não é racional, e, dessa forma, haveria uma tendência a inferir que existe uma prova de que π não é racional.

Retornando ao problema de determinar qual conceito estaria sendo primariamente elucidado com os constructos de dedução natural, parece-nos deveríamos ensaiar um reexame da natureza das regras lógicas. Com base no fato de que, aparentemente, podemos raciocinar sobre proposições formuladas de forma subjuntiva, uma primeira modificação a adotar com respeito a uma certa parte da tradição lógica do século XX é a de que as regras de inferência sobre asserções podem ser melhor compreendidas como regras derivadas das regras de dedução. Essas últimas seriam regras que relacionariam outro tipo de objetos, os quais teriam, todavia, uma relação intima com as asserções. No raciocínio examinado nos parágrafos anteriores, algumas das deduções tomaram como ponto de partida certas informações que não tinham sido asseridas, visto que seu verbo principal estava no modo subjuntivo. Assim, como subsistem relações lógicas entre orações, mesmo quando elas não estão sendo asseridas, só nos restaria concluir que as relações lógicas envolveriam, na verdade, os conteúdos assercionais. Envolveriam conteúdos proposicionais que, em outras ocasiões, poderiam vir a ser asseridos. A segunda diferença diria respeito ao conceito de suposição.

Se observarmos nossos comportamentos lingüísticos, notaremos que, freqüentemente, costumamos enunciar que algo **se segue** de algo, por exemplo: "*que π seja algébrico segue-se de que π seja racional*". Outro exemplo onde enunciaríamos que algo se segue de algo, é o seguinte: "*que um número a seja algébrico se segue de que a seja racional*". Ou seja, neste último exemplo, ao que parece, a relação envolveria duas formas proposicionais. Lembrando que Frege usava o traço horizontal para representar o conteúdo de uma asserção, sem o ato de asserção, a afirmação acerca de π equivaleria à seguinte expressão: (-π é algébrico) **segue-se de** (-π é racional). Segundo entendemos, é exatamente um conceito de **conseqüência dedutiva** entre proposições o que estaria sendo formulado em expressões como essa. Por essa razão, diremos que

o conceito imediatamente elucidado por meio das derivações nos sistemas de dedução natural é o conceito de **conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais**.[59]

O fato de dizer que a relação de conseqüência dedutiva também se aplica de modo geral às formas proposicionais é uma conseqüência de haver admitido um uso algébrico dos parâmetros predicacionais nesta tese, conforme a discussão que fazemos no Apêndice. Se fosse um uso conteudístico, talvez pudéssemos limitar a relação de conseqüência dedutiva ao conceito de proposição. Estamos chamando de **uso conteudístico dos parâmetros** aquele no qual um parâmetro só pode ser substituído por expressões que não contenham parâmetros. Já o **uso algébrico** admite a substituição de um parâmetro por expressões que contenham parâmetros. Em nossa opinião, a formulação das regras para a quantificação em dedução natural só seria razoável se admitíssemos um uso algébrico dos parâmetros individuais. Por essa razão, nos parece, seria incoerente limitar o uso dos parâmetros predicacionais a um uso conteudístico.

É interessante notar que Frege também fez, a respeito da relação de conseqüência dedutiva, considerações similares à que estamos advogando ([Fre79], pág. 11):

> *Por exemplo, suponha que ⊢A está pelo julgamento "Pólos magnéticos opostos atraem um ao outro"; então –A não expressará esse julgamento; ele serve para produzir no leitor a mera idéia da atração mútua dos pólos magnéticos opostos, digamos de modo a derivar conseqüências disso e testar por meio dessas se o pensamento é correto.*[60]

Nesta tese, queremos organizar o arcabouço terminológico-conceitual de tal modo que um **argumento** seja concebido, de modo compatível com o uso vulgar do termo, como um discurso complexo por meio do qual buscamos justificar ou defender uma **asserção** ou **afirmação**, dita **conclusão**, partindo de um **rol de asserções**, ditas **premissas**. O caso prototípico de uso de um argumento é aquele no qual temos o objetivo de gerar convicção em outrem. O rol de justificativas contido no argumento poderá, em certos casos limites, ser considerado diretamente verdadeiro de modo intuitivo, como no caso dos axiomas, ou poderá ser considerado verdadeiro de modo mediato, demandando uma argumentação posterior. Porém, e esse ponto é sumamente importante, se a asserção defendida por meio de um argumento fizer parte do rol de justificativas oferecido, de saída o argumento será considerado inadequado. Aliás, é inconcebível que uma

---

[59] Negri & Von Plato, [Neg01], cap. 8, pág. 171, dão uma definição algo similar, no seguinte sentido. Quando eles dizem que as regras não atuam sobre fórmulas ou sobre asserções mas sobre derivações, se pelo termo "derivações" entendermos que ele significa o mesmo que "conseqüência dedutiva", não haveria diferença significativa entre as concepções, exceto na forma que eles adotam para conceber o absurdo.

[60] *For example, let ⊢A stand for the judgment "Opposite magnetic poles attract each other"; then -A will not express this judgment; it is to produce in the reader merely the idea of the mutual attraction of opposite magnetic poles, say in order to derive consequences from it and to test by means of these whether the thought is correct.* Sublinhado nosso.

asserção possa servir como justificativa para si mesma, mesmo que a asserção seja a asserção de um axioma. É inconcebível que um argumento contenha uma única asserção. Nenhuma pessoa ao ser instado a justificar uma asserção estaria dando uma resposta satisfatória se resolvesse simplesmente repetir a asserção. Por outro lado, nada parece obstar à afirmação de que uma proposição seja considerada conseqüência lógica de si mesma.

Há um ponto de diferenciação importante entre os conceitos de argumento e de conseqüência dedutiva. Já que é possível em uma derivação que uma fórmula seja, ao mesmo tempo, conclusão e suposição aberta, então as derivações só poderiam representar o conceito de conseqüência dedutiva. Elas não poderiam representar o conceito de argumento, na medida em que não faz sentido que um argumento tenha uma única sentença fazendo o papel de premissa e de conclusão.

Consideraremos que um **ato de asserção** pode ser/estar **bem-fundamentado** ou **mal-fundamentado**, dependendo das razões ou evidências que o indivíduo que assere oferece em suporte à asserção. Também importará considerar se a estrutura do argumento usado para fundamentar a asserção é adequada ou não. Grosso modo, haverá dois tipos de evidências para suportar uma asserção: as imediatas e as mediatas. Os argumentos ofereceriam sempre evidências mediatas. Em particular, um argumento será considerado válido quando, a partir de asserções bem-fundamentadas, ele efetivamente possa servir de garantia da boa-fundamentação (mediata) da conclusão.

Dado que o objetivo prototípico de um argumento é o de gerar convicção, devemos requerer que o argumento efetivamente **mostre** que há uma relação de dependência entre as premissas e a conclusão como forma de gerar essa convicção. Basicamente, só será possível ver esta relação de dependência se ela for mostrada, em algum sentido. Essa relação de dependência só estará claramente estabelecida ao **mostrar** como **a proposição de conclusão segue-se das proposições premissas**. Em outros termos, um **argumento dedutivo válido** deve **mostrar** a relação de **conseqüência dedutiva** entre as proposições subjacentes às asserções das premissas e a proposição subjacente à asserção da conclusão. Um **argumento indutivo**, por exemplo, também estará composto por asserções. No entanto, nesse caso, a relação de conseqüência dedutiva se daria de forma inversa, da conclusão para cada uma das premissas. Cada uma das premissas será conseqüência dedutiva da conclusão. Essa, parece-nos, é uma forma elegante de caracterizar a diferença entre os dois tipos de argumentos.

Assumiremos que as **provas** são **argumentos dedutivamente válidos** de um tipo particular tal que **todas as premissas já são apoiadas por evidências,** sejam essas evidências imediatas ou mediatas, intuitivas ou discursivas (provadas).[61]

Sob esse arcabouço, algo que considerávamos fosse uma prova, ou seja, algo que tivesse sido erradamente provado, deixaria completamente de ser considerado uma prova após a descoberta do erro, mas jamais deixaria de ser um argumento. Seria um argumento falho, é bem verdade, mas ainda assim a construção lingüística por trás da "ex-prova" deveria ser tal que poderíamos identificar que sentenças jogariam o papel de premissas e que sentença jogaria o papel de conclusão do argumento, não importa o erro. Em geral, a conclusão de um argumento vem indicada pelos termos *portanto*, *logo* etc. O argumento será falho ou porque alguma das premissas não estava provada ou porque não havia de fato a pretendida relação de conseqüência dedutiva entre algumas das proposições que constituíam a argumentação.

Entendemos que um argumento direto deve **mostrar** a relação de conseqüência entre as premissas e a conclusão, e, dessa forma, a relação de conseqüência semântica tarskiana por si só não poderia ser considerada base suficiente para oferecer um argumento. Como vimos anteriormente, Prawitz considera importante que possamos **ver** a relação de conseqüência entre premissas e conclusão. Mas só poderemos ver esta relação se ela for mostrada no sentido forte da palavra **mostrar**. Em outros termos, nossa proposta de definição do conceito de argumento parece cumprir com o requisito exigido por Prawitz, à medida que, segundo a elucidação que estamos propondo, um argumento como tal deve **mostrar** a relação de conseqüência dedutiva entre as proposições/formas proposicionais. Contudo, é preciso observar, o jogo de mostrar e ver sempre poderá ser desenvolvido em diferentes níveis, dependendo do grau de conhecimento e capacidade intelectual dos interlocutores na argumentação. Uma argumentação envolvendo dois professores de matemática tende a ser diferente de uma argumentação envolvendo um professor e um aluno. No entanto, retomando o exemplo de Prawitz, mesmo que o teorema de Fermat fosse, de fato, conseqüência semântica dos axiomas de Peano, jamais poderíamos considerar o encadeamento das respectivas asserções-premissa com a asserção-conclusão como um argumento bem-sucedido, quaisquer que sejam as pessoas envolvidas na argumentação. Seria humanamente impossível **ver** como se daria essa relação de conseqüência dedutiva nesse encadeamento, pois ela sequer estaria sendo **mostrada**.

Concluindo, nossa proposta é a de que, em termos da atividade elucidatória, o conceito de conseqüência dedutiva seja tomado como primário e os conceitos de argumento válido e de prova

---

[61] Um argumento que **não contenha premissas** poderá ser considerado uma prova.

como secundário e terciário, respectivamente, definidos a partir do conceito primário. As derivações nos sistemas de dedução natural refletiriam basicamente as deduções intuitivas, mas admitiriam, adicionalmente, que estas deduções fossem também tratadas de forma esquemática. As derivações em dedução natural **mostrariam** como se dá a relação de conseqüência dedutiva entre as proposições/formas proposicionais.

Assumiremos que uma **suposição** ou **hipótese** oferece simplesmente um ponto de partida para o desenvolvimento de um raciocínio ou dedução. Dado que nos sistemas de dedução natural as suposições assumem um caráter primário, é importante observar que nossa interpretação das derivações em dedução natural tende a ser distinta da intuicionista. Prototipicamente uma suposição não envolveria uma asserção. Consideramos que não faz sentido asserir uma suposição, embora às vezes faça sentido supor a prova de uma asserção.

Da proposta que fizemos decorre certa diferenciação com respeito ao conceito de implicação usualmente assumido pelos lógicos. A interpretação da implicação como um condicional material segundo os moldes da tabela de verdade para a lógica clássica será uma forma não-construtiva de definir a implicação. Essa forma só poderá ser assumida como conseqüência da regra de introdução da implicação quando a essa regra juntarmos, adicionalmente, um princípio de dedução indireta. Consideramos que as regras de introdução e eliminação da implicação elucidam de modo completo o núcleo do significado do conceito de implicação ou condicional, embora, no caso clássico, algo mais seja acrescentado. Do nosso ponto de vista, o condicional seria apenas uma forma de lidar lingüisticamente com a relação de conseqüência dedutiva. Por isso, a correção do condicional dependeria, em todos os casos, da correção de uma dedução.

Nossa definição da implicação diferirá da definição que Heyting pareceu em algum momento favorecer ([Hey56], pág. 102)[62] e da definição construtiva que emprega Curry ([Cur63], pág. 97). Até onde podemos ver as duas convergem. Para Curry, a implicação $A \rightarrow B$ será verdadeira quando existe um processo efetivo para obter uma prova de que B vale, a partir de uma prova de que A vale, entendendo que isso também inclui a situação na qual o processo efetivo mostra que não pode haver prova de que A valha. Consideramos essa segunda parte completamente estranha à compreensão da implicação. Na verdade, nos parece melhor considerá-la como conseqüência do princípio de *ex falso quodlibet*.

[62] A citação será apresentada logo adiante.

1.4. A Definição Formal do Conceito de Conseqüência Dedutiva

A seguir, definiremos formalmente o conceito de conseqüência dedutiva de modo exatamente paralelo à definição das derivações em dedução natural. Para a definição das derivações em dedução natural, reenviamos o leitor ao Apêndice.

Comecemos observando que a base da definição do conceito de derivação está dada pelas derivações simples, onde uma única ocorrência de fórmula é ocorrência topo e ocorrência final da derivação, ao mesmo tempo. Esse tipo de derivação estará correlacionado às suposições. Uma única ocorrência de fórmula será uma derivação onde a ocorrência topo é uma suposição ou ponto de partida e ela é idêntica à ocorrência de conseqüência (ou conclusão). Em outros termos, faz sentido dizer que uma proposição é conseqüência dedutiva de si mesma. Já dissemos que não vemos nenhum sentido em dizer que uma única ocorrência de fórmula é um argumento onde assumimos uma proposição que ao mesmo tempo é a conclusão do argumento. Assim, consideraremos que as derivações simples são constructos que representam uma situação de conseqüência dedutiva elementar.

Definição I-1 - Definimos o conceito (a relação) de **conseqüência dedutiva** *($\Vdash$) como a seguir, onde $\Gamma,\Delta,\Delta_1,\Delta_2$ estão sendo aqui considerados como conjuntos finitos de fórmulas (eventualmente vazios):*

(i) $\Gamma\cup\{A\}\Vdash A$.

(ii) caso $\Gamma\Vdash A_1$ e $\Delta\Vdash A_2$, então $\Gamma\cup\Delta\Vdash A_1\wedge A_2$.

(iii) caso $\Gamma\cup\{A_1\}\Vdash A_2$, então $\Gamma\Vdash A_1\rightarrow A_2$.

(iv) caso $\Gamma\Vdash A$ e o parâmetro a não ocorre nas fórmulas de Γ, então $\Gamma\Vdash \forall xA[a/x]$.

(v) caso $\Gamma\Vdash A_1$ ou $\Gamma\Vdash A_2$, então $\Gamma\Vdash A_1\vee A_2$.

(vi) caso $\Gamma\Vdash A[a/\tau]$, então $\Gamma\Vdash \exists xA[a/x]$.

(ix) caso $\Gamma\Vdash A_1\wedge A_2$, então $\Gamma\Vdash A_1$ e $\Gamma\Vdash A_2$.

(x) caso $\Gamma\Vdash A_1$ e $\Delta\Vdash A_1\rightarrow A_2$, então $\Gamma\cup\Delta\Vdash A_2$.

(xi) caso $\Gamma\Vdash \forall xA[a/x]$, então $\Gamma\Vdash A[a/\tau]$, onde τ é um termo.

(xii) caso $\Gamma\Vdash A_1\vee A_2$, $\Delta_1,A_1\Vdash C$ e $\Delta_2,A_2\Vdash C$, então $\Gamma\cup\Delta_1\cup\Delta_2\Vdash C$.

(xiii) caso $\Gamma\Vdash \exists xA[a/x]$ e $\Delta\cup\{A\}\Vdash C$ tal que o parâmetro a não ocorre nas fórmulas de Δ e não ocorre em C, então $\Gamma\cup\Delta\Vdash C$.

O conceito de conseqüência dedutiva foi definido na dependência do conceito de **conjunto finito** e da operação de **união de conjuntos**. Porém, poderíamos tê-lo definido empregando uma lista de suposições, com algumas alterações adicionais.

A cláusula *(i)* representa o fato de que uma proposição é conseqüência dedutiva de si mesma e, além disso, o fato de que uma proposição será dedutível de um conjunto de proposições quando ela for dedutível de um de seus subconjuntos. Sob esse aspecto, haveria uma diferença com respeito às regras de dedução natural. Essa diferença surgiria, segundo nossa opinião, da diferença que há entre mostrar (dedução natural) e enunciar (cláusulas de conseqüência dedutiva). Com respeito às demais cláusulas, não é difícil perceber que *(ii)-(vi)* correspondem às regras de introdução, assim como *(ix)-(xiii)* correspondem às regras de eliminação. Note-se que há um espaço na numeração para a introdução posterior de cláusulas envolvendo a negação.

O símbolo ∇ será usado para representar uma derivação em dedução natural e consideramos que ele representa o ato de **mostrar** a relação de conseqüência dedutiva, ao passo que o símbolo $\Vdash$ estará sendo usado para **falar** da relação de conseqüência dedutiva. A definição acima é também uma forma de apresentar o conteúdo das regras de dedução natural, com a diferença de que nesse caso haveria uma menção explícita à relação de conseqüência dedutiva. Cada expressão da forma $\Gamma \Vdash A$ pode ser asserida, ou seja, $\vdash (\Gamma \Vdash A)$.

Para qualquer derivação em dedução natural, não é difícil ver que, se temos $\Gamma \Vdash A$ e $\Delta \cup \{A\} \Vdash B$, então teremos $\Gamma \cup \Delta \Vdash B$ por composição de derivações, desde que tenhamos alguns cuidados com os parâmetros. Infelizmente, isso não é tão facilmente visualizável na definição clausal acima. Ou seja, essa propriedade requereria uma prova, que nos dispensaremos de apresentar, baseados na intuitividade do caso das derivações de dedução natural.[63]

Quanto às regras de dedução indireta, trataremos delas, com mais detalhes, no capítulo seguinte. Inicialmente, basta notar que a **regra *P*** a seguir é uma regra de dedução indireta[64]:

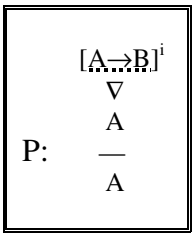


Figura I-6[65]

[63] Essa propriedade corresponde à regra de corte do cálculo de seqüentes. Curry apresenta a prova da validade dessa regra. Ele o chama de *teorema da eliminação*, cf. [Cur63] págs. 22, 188, 208-213, 250, 265-267, 329, 363, 368.
[64] Ver o Apêndice.

Nos sistemas em que uma regra dessa natureza tenha sido admitida, o conceito de conseqüência dedutiva deverá ter um caráter distinto, representado por uma cláusula adicional:

(xvi) caso $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\} \vdash A$, *então* $\Gamma \vdash A$.

Com essa cláusula, a relação de conseqüência poderia ser estabelecida de forma indireta, o que também afetaria o conceito de argumento. Se, efetivamente, um argumento consiste em justificar a asserção de uma conclusão a partir das asserções das premissas, mostrando como se dá a relação de conseqüência dedutiva entre as premissas e a conclusão, torna-se mais problemático determinar o que estaria sendo mostrado quando a cláusula *(xvi)* fosse empregada. *A priori*, uma interpretação razoável seria a de dizer que, com essa regra, ao mostrar que A decorre de $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$, então A deveria decorrer só de Γ, embora não tenha sido mostrado como isso se dá. A justificativa para essa ilação é a de que não seria possível mostrar que A decorre de $A \rightarrow B$, exceto no caso em que a fórmula A já seja, ela mesma, válida. Seja como for, após a adição dessa cláusula, só poderíamos dizer que os argumentos mostram a relação de conseqüência dedutiva se modificarmos o sentido que normalmente atribuímos a palavra *mostrar*.

Acerca da disputa sobre a validade ou a invalidade da regra P, queremos primeiro destacar o fato de que a fórmula $A \rightarrow B$ é uma suposição no sentido mais usual da palavra. Ou seja, a leitura que fazemos da regra não é a leitura que um intuicionista faria. Para ele, a regra implicaria que, se houvesse uma prova hipotética de A a partir de $A \rightarrow B$, então haveria uma prova de A. Mas essa leitura torna a regra indefensável. Podemos concordar que, se a prova hipotética fosse pensada como uma construção que transforma uma prova de $A \rightarrow B$ em uma prova de A, realmente seria difícil ver por que isso constituiria uma prova de A. Porém, se $A \rightarrow B$ for interpretada como uma suposição no sentido usual da palavra, então a regra informaria que A tem de ser conseqüência dedutiva de Γ caso tenhamos mostrado que ela se segue de Γ e da suposição de que A implica uma outra sentença qualquer. Essa interpretação mostra por que é relevante considerar um outro arcabouço conceitual para as regras de dedução natural, diferente do intuicionista. Parece-nos que, com este outro arcabouço, que foi justificado de forma independente, podemos dar algum sentido às regras de dedução indireta.

Como vimos, o conceito de conseqüência dedutiva foi definido por meio das cláusulas como uma relação e não como um predicado. Porém, em casos especiais, as derivações em dedução natural podem ter uma conclusão que não depende de nenhuma suposição. Nessas

---

[65] Notamos que a suposição $A \rightarrow B$ aparece sublinhada com um pontilhado. Com isso, pretendemos representar a possibilidade de que várias ocorrências topo distintas sejam descartadas pela regra. Para maiores detalhes, ver o Apêndice.

situações, pareceria não haver uma verdadeira relação de conseqüência dedutiva, pois um dos elementos da relação estaria faltando. Todavia, dado que, em geral, para qualquer relação de conseqüência $\Delta \Vdash A$ sempre será possível obter $\Gamma \Vdash A$ tal que $\Gamma \supseteq \Delta$, segundo a cláusula *(i)*, então, quando $\Vdash A$, diremos que a proposição ou forma proposicional *A* é **conseqüência dedutiva de qualquer conjunto finito de formas proposicionais/proposições**, ou ainda que ela é **conseqüência dedutiva de forma absoluta**, ou também que *A* é **uma proposição/forma proposicional necessária**.

2. Acerca da Negação

Da forma como definimos o conceito de conseqüência dedutiva, precisaríamos ainda considerar outra operação lógica usual não contemplada em nossa apresentação no Apêndice. Faltaria tratar da negação, o que nos propomos a fazer doravante.

2.1. Regra de Introdução para a Negação

A condição para concluir ou, às vezes, para asserir uma proposição negada parece freqüentemente estar dada pela constatação de uma impossibilidade. É essa ligação entre a noção de impossibilidade e de negação que exploraremos a seguir.

Uma das primeiras concepções que nos propomos a examinar a seguir é a concepção formulada por Heyting ([Hey56], págs. 18 e 19):

> *Estritamente falando, nós devemos bem distinguir o uso do "não" na matemática daquelas explicações envolvendo-o e que não são matemáticas, e que são expressadas em linguagem ordinária. Nas asserções matemáticas nenhuma ambigüidade pode surgir: o "não" tem sempre um significado estrito. "A proposição p não é verdadeira", ou "a proposição p é falsa" significa "Se nós supomos a verdade de p, nós somos levados a uma contradição".*[66]

Ora, como uma contradição é algo que muitos de nós classificaríamos como impossível, talvez o ponto de vista defendido por Heyting ofereça uma solução para a elucidação do uso do conceito de impossibilidade e, por conseqüência, para compreender o uso da constatação de impossibilidade naquele exemplo anterior envolvendo *CAMESTRES*. Todavia, parte do problema está em saber como conceituar o termo *contradição*.

---

[66] *Strictly speaking, we must well distinguish the use of "not" in mathematics from that in explanations which are not mathematical, but which are expressed in ordinary language. In mathematical assertions no ambiguity can arise: "not" has always the strict meaning. "The proposition p is not true", or "the proposition p is false" means "If we suppose the truth of p, we are led to a contradiction".*

Se fizermos uso da conceituação que é no fundo de origem aristotélica acerca dos opostos contraditórios e usarmos a negação para representá-la, então as fórmulas *A* e *~A* representariam simplesmente duas proposições opostas contraditórias. Assim, se consideramos que a contradição é uma condição suficiente para obter a negação de uma proposição, poderíamos expressar isso sinteticamente pela regra a seguir:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma,[A]^{j} & \Delta,[A]^{j}\\ \nabla & \nabla\\ B & \sim B\end{array}}{\sim A}\ j$$

Figura I-7

Chamaremos essa regra de dedução de **reductio ad contradictione** ou, simplesmente, **reductio**.

Provavelmente é algo similar ao que está sendo capturado nessa regra que Heyting tinha em mente, pois, da suposição *A*, somos levados a um par de sentenças contraditórias entre si. O significado de *~A*, segundo Heyting, seria exatamente este. Ou seja, na regra estariam representadas as condições suficientes para concluir que *~A*. Contudo, infelizmente, essa regra não pode ser considerada uma regra de introdução independente. Não pode ser considerada uma explicação independente do significado da negação, pois a negação já ocorre nas condições de aplicabilidade da regra, na premissa imediata *~B*, envolvida no conceito de contradição.

Assim, se era isso o que pretendia Heyting, sua conceptualização sofreria de um problema relativo à conceptualização da noção de contradição. Usualmente, representamos por *~A* a proposição contraditória de *A*, ou, ainda, a negação proposicional de *A* significa o oposto contraditório de *A*. De passagem, observamos que tampouco ajudaria considerar que as contradições têm a forma $A \wedge \sim A$[67], já que, por eliminação da conjunção, obteríamos as condições para aplicar *reductio*. Assim, a partir da caracterização aristotélica de oposição contraditória, se entendemos que a negação expressaria essa oposição, o próprio conceito de negação seria parte essencial da definição do conceito de contradição e, por essa razão, não seria possível utilizar o conceito de contradição em uma regra de introdução da negação que seja independente. Em outros termos, para concluir a contraditória de uma fórmula já precisaríamos compreender o que é uma contradição e o que é a noção de oposto contraditório[68].

---

[67] Também de forma mais ampla, há o costume de chamar de contradição qualquer formulação que permita deduzir uma fórmula e sua negação. Alguns autores, eventualmente, preferem empregar o termo **antilogia** para descrever esta situação.

[68] No limite, se o requisito de independência não tivesse nenhumas relevância, poderíamos usar uma regra muito mais simples para estabelecer sob que condição concluímos *~A*: muito simples, a de que tenhamos *~A*!

Parece-nos plausível que Heyting tenha considerado *reductio* como a forma elementar de introduzir uma negação. Isso explicaria por que ele considerava o conceito de contradição como um conceito primitivo ([Hey56], pág. 98):

> *Eu penso que a contradição deve ser tomada como uma noção primitiva. Parece bem difícil reduzi-la à noções mais simples, e é sempre fácil reconhecer uma contradição como tal.*[69]

A nosso ver, essa concepção de Heyting acerca das contradições torna-se a única forma de sustentar a factibilidade da sua explicação para a negação. Infelizmente, se essa era sua intenção, a explicação está longe de ser clara e satisfatória.

Talvez haja nisso um problema de falta de clareza conceitual envolvendo as caracterizações dos conceitos de contradição e de impossibilidade. Ao representar o oposto contraditório de A por $\sim A$, tudo o que podemos exigir das regras de dedução natural é que elas nos esclareçam sob que condições poderíamos concluir $\sim A$. A explicitação das condições sob as quais é lícito introduzir a constante lógica de negação não poderia depender da noção de contradição ou de auto-contradição, na medida em que a negação representa justamente a idéia de oposto contraditório.

Os intuicionistas naturais, como Prawitz [Pra71] e Martin-Löf [Mar96], por exemplo, têm adotado o conceito de absurdo ao invés do conceito de contradição e desse modo podem evitar o problema apontado. A escolha tem seus méritos. Se definirmos como contrárias àquelas fórmulas que não podem ser ambas corretas, ao mesmo tempo, por exemplo $a=b$ e $a>b$,[70] qualquer situação em que de uma suposição A pudéssemos derivar esse par de contrárias seria uma situação impossível, ou ainda, seria uma situação absurda. Desse modo, como a suposição de A nos leva a um absurdo, poderíamos concluir pela negação de A. Talvez alguns objetassem que de $a=b$ já poderíamos concluir $\sim a>b$, ou vice-versa, e assim acabaríamos por obter um par de contraditórias. Ocorre que, justamente, sob a definição estreita de opostas contraditórias que apresentamos mais acima, para obter um par de contraditórias usando a regra da Figura I-7, seria preciso que já dispuséssemos da dedução de algum outro par de contraditórias, sob a mesma suposição A, para obter $\sim a>b$. Desse modo a idéia de absurdo/impossível parece ser mais primitiva. A seguir, proporemos uma forma de caracterizar as condições para introduzir uma negação que explorará exatamente esse conceito de impossibilidade.

---

[69] *I think that contradiction must be taken as a primitive notion. It seems very difficult to reduce it to simpler notions, and it is always easy to recognize a contradiction as such.*

[70] Outro exemplo seria: "João está com 38º de febre" e "João está com 39º de febre".

Um princípio freqüentemente associado à negação é o princípio que podemos chamar de **ex contradictione quodlibet**. Em forma de regra de dedução, ele pode ser apresentado como a derivação a seguir, onde *B* é uma fórmula qualquer:

$$\begin{array}{cc} \Gamma & \Delta \\ \nabla & \nabla \\ A & \sim A \\ \hline & B \end{array}$$

Figura I-8[71]

Do ponto de vista da divisão das regras de dedução natural em regras de introdução e regras de eliminação, essa seria uma regra de eliminação da negação formalmente perfeita, à medida que o símbolo lógico só ocorre de modo necessário na premissa maior e dado que as premissas e a conclusão não fazem menção a nenhuma outra constante lógica essencial. Naturalmente, numa situação como essa, diríamos que existe uma contradição entre as duas premissas imediatas da regra.

Historicamente, a validade dessa regra tem sido questionada. Aliás, provavelmente por essa razão, o Pseudo-Escoto ofereceu uma defesa da sua validade, conforme expusemos de modo breve no Apêndice, Figura A - 2. Uma tal argumentação seria desnecessária se esse princípio fosse de fato indubitável. Com efeito, não terá sido o Pseudo-Escoto o único a se preocupar com a sua validade. A razão patente da dúvida está na dificuldade em responder à pergunta óbvia de por que duas proposições *A* e *B,* que poderiam sequer estar conectadas do ponto de vista do seu significado, estariam conectadas como asserções ou como conseqüência dedutiva uma da outra. Consideraremos, nesta tese, que faz sentido problematizar a validade dessa regra e, explicitamente, o faremos.

Notamos que a regra está intimamente ligada ao princípio chamado *ex falso quodlibet*. Acerca da validade desse princípio, a resposta encontrada amiúde é aquela que afirma que o fato de a premissa ser falsa garantiria que a regra não deixaria de preservar a verdade, que ela não poderia não preservar a verdade. Num sentido, isso pode ser entendido como uma extensão do conceito de preservação da verdade, já que, a partir do fato de que não haveria como não preservar a verdade, acabamos concluindo que haveria preservação. Assim, sob esse argumento, a validade do *ex falso quodlibet* dependeria de uma justificativa que envolve uma dedução indireta: de *não haveria como não preservar* concluiríamos que *preserva*. Mas essa resposta é

[71] Como as subderivações das premissas imediatas não têm nenhum papel relevante nessa regra de dedução, poderíamos simplesmente suprimi-las da representação. As regras de dedução natural nesta tese estão sendo consideradas primariamente como regras de dedução e não como regras de inferência e por isso representamos aquelas derivações. Para maiores informações, ver o Apêndice.

incômoda, ela aparenta fazer apelo a um princípio considerado questionável pelos construtivistas. Acreditamos haver forma melhor de argumentar pela validade do princípio.

O intuicionismo em geral e Heyting em particular consideram válido o princípio de *ex contradictione quodlibet*. Formulado como axioma, ele tem a seguinte forma: $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$. Acerca da validade desse axioma, referido como *axioma X*, Heyting diz ([Hey56], pág. 102):

> *O axioma X pode não parecer intuitivamente claro. Mas de fato, ele adiciona precisão à definição da implicação. Você lembra que $p \rightarrow q$ pode ser asserido unicamente se nós possuímos uma construção a qual, juntada à construção de p, provaria q. Agora suponha que $\vdash \sim p$, isso é, que nós tenhamos deduzido uma contradição da suposição de que p tivesse sido levado a cabo. Então, em um certo sentido, isso pode ser considerado como uma construção, a qual, juntada a uma prova de p (que não pode existir) conduz a uma prova de q. Eu irei interpretar a implicação nesse sentido mais amplo.*[72]

A justificativa de Heyting é de difícil compreensão. Além dos problemas já apontados a respeito do conceito de contradição e da conexão de significado entre *p* e *q*, perguntaríamos de onde surgiria a certeza de que a inexistência de uma prova de *p* nos daria uma construção que prova *q*. Parece-nos que, nesse caso, o autor poderia estar incorrendo em um círculo. Efetivamente, ele parece estar dizendo que o axioma seria válido se admitíssemos como procedimento de raciocínio legítimo o princípio *ex impossibile quodlibet*, já que, se temos uma prova de $\sim p$, admitiríamos intuitivamente que uma prova de *p* é impossível ou que a asserção de *p* é impossível. Contudo, parece-nos, é exatamente esse princípio que estaria sendo questionado quando o princípio de *ex contradictione quodlibet* é criticado, ou seja, a questão subjacente à dúvida acerca da validade do princípio pode ser formulada do seguinte modo: por que do impossível seguiria qualquer coisa?

Se retornamos às intuições heurísticas que expressávamos antes de oferecer as regras de dedução natural, talvez encontrássemos uma regra de introdução que correspondesse ao princípio de *ex contradictione quodlibet*, que fosse independente e que constituísse uma redução da negação a noções mais primitivas. Um princípio basilar dos sistemas de dedução natural é o de que as informações que seguem de uma dada constante lógica já deveriam estar todas contempladas naquelas situações em que fosse lícito empregar ou introduzir a referida constante lógica. Assim, tomando *ex contradictione quodlibet* como regra de eliminação, por um raciocínio reverso, a única situação que permitiria extrair todas as informações *B* que extraímos da

---

[72] *Axiom X may not seem intuitively clear. As a matter of fact, it adds to the precision of the definition of implication. You remember that $p \rightarrow q$ can be asserted only if we possess a construction which, joined to the construction p, would prove q. Now suppose that $\vdash \sim p$, that is, we have deduced a contradiction from the supposition that p were carried out. Then, in a sense, this can be considered as a construction, which, joined to a proof of p (which cannot exist) leads to a proof of q. I shall interpret the implication in this wider sense.*

proposição ~*A*, no contexto em que está dada a proposição *A*, tem de ser uma situação na qual essas informações *B* se seguem de *A*, quaisquer que elas sejam. Isso nos conduz imediatamente à proposta russelliana, rapidamente mencionada ao início deste capítulo.

A proposta russelliana de 1903 para elucidação da negação explicita o que deveríamos entender pela negação da seguinte forma: *não-p é equivalente à asserção que p implica todas proposições, isto é, que "r implica r" implica "p implica r" qualquer que r possa ser.* Se, em primeiro lugar, deixarmos de lado o conceito de asserção, conforme nossa proposta acima, e considerarmos unicamente as proposições; se, adicionalmente, abandonarmos a expressão "*r* implica *r*", que, no caso de Russell, é usada para garantir que o objeto *r* seja uma proposição; e se, finalmente, entendermos que o termo *equivalente* significa algo muito próximo de uma equivalência definicional, então a reformulação da proposta de Russell seria: ~*p* equivale (quase de maneira definicional) a $p \rightarrow r$, para qualquer *r*. Agora, se recordamos que a condição para introduzir uma implicação $p \rightarrow r$ é a de que *r* seja conseqüência dedutiva de *p*, então a regra para introduzir ~*p* requereria como condição que qualquer *r* fosse conseqüência dedutiva de *p*. Porém, obviamente, a descrição de Russell contém uma quantificação, dado que, na verdade, a negação de *p* significa que *p* implicaria **qualquer coisa**. Como veremos a seguir, há uma forma de tratar a negação em dedução natural sem empregar propriamente a quantificação sobre proposições e mantendo ainda o espírito da solução de Russell.

A negação é introduzida pela seguinte regra, sem empregar nenhuma quantificação:

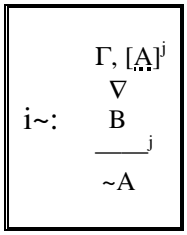


Figura I-9

Porém, essa regra só funcionará à medida que certas restrições de aplicabilidade sejam observadas. Em primeiro lugar, *B* deve ser um parâmetro proposicional. Em segundo, *B* não pode ocorrer nem em Γ nem em *A*, assumindo que qualquer pressuposição aberta ou é *A* ou está em Γ. Ou ainda, para evitar o uso da negação na formulação da restrição, *B* deve ser um parâmetro proposicional diferente de todos os parâmetros proposicionais que ocorrem em Γ e em *A*. A essa regra da Figura I-9 chamaremos de regra de **introdução da negação** (***i~***) e ela constitui nossa proposta de elucidação da negação por meio das regras de dedução natural. A regra de *ex contradictione quodlibet* será a regra de eliminação da negação correspondente. Mas a regra para eliminar a negação poderá, em princípio, ser usada em versões diferentes, dependendo das

restrições que fazemos sobre a fórmula *B* da conclusão. A regra na qual não fazemos nenhuma restrição à fórmula *B*, como aquela da Figura I-8, será chamada de **grande eliminação da negação** (***E*~**). A outra versão, na qual a fórmula *B* estará restringida às fórmulas básicas[73], será chamada simplesmente de **eliminação da negação** (***e*~**). A segunda forma é **caso particular** da primeira forma:

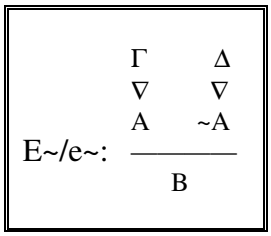


Figura I-10

O par de regras *i*~ e *ex contradictione quodlibet* constitui uma elucidação *à la Russell* para a negação, pois, caso se cumpram as condições para introduzir a negação de *A*, teremos a derivação de um parâmetro proposicional *B* tal que *B* não ocorre em *Γ* e não ocorre em *A*:

Γ, A
∇
B

Figura I-11

Numa situação como essa, *a priori*, todas as ocorrências do parâmetro proposicional *B* dentro da derivação poderiam ser substituídas livremente por uma fórmula *C* qualquer, já que, pela restrição sobre o parâmetro *B*, não há nenhuma ocorrência desse parâmetro nas suposições da derivação. Essa substituição resultaria na seguinte derivação:

Γ, A
∇ [B/C]
C

Figura I-12

Mas, justamente, desse modo, qualquer fórmula *C* seria derivável a partir de *Γ* e de *A*. Em particular, se *Γ* fosse vazio, qualquer fórmula *C* seria derivável somente de *A*.

Queremos notar que, se estivéssemos usando o conceito de assunção que usam os intuicionistas, seria um pouco mais difícil aceitar a correção da regra de introdução da negação. Sob a interpretação intuicionista, uma regra dessa natureza implicaria que a posse de um procedimento para transformar a prova de uma proposição *A* na prova de um parâmetro proposicional qualquer seria a condição suficiente e necessária para obter uma prova de ~*A*. Só que, nesse caso, não poderia haver prova de *A*, se o sistema de regras fosse consistente. Porém,

[73] Fórmula de valor zero, ou seja, aquela cujo número de constantes lógicas é zero.

para nós, é estranho considerar que uma suposição *A* esteja ao mesmo tempo sendo asserida. Ao contrário, se admitíssemos que, ao lançar uma hipótese, fazemos um convite a que se considere uma proposição como verdadeira − o que poderia ser feito para qualquer proposição, independente de saber se ela é verdadeira ou não −, parece-nos já não haveria mais nada estranho na regra.

As regras de *i~* e *E~/e~* serão objeto de análise nos próximos capítulos. Veremos, por exemplo, que não perdemos poder dedutivo ao restringir a regra às conclusões básicas. Na verdade, todo sistema lógico de primeira ordem que admitir o princípio de *ex contradictione quodlibet* será definido usando a regra restrita às conclusões básicas.

Apesar de não podermos aceitar a regra de *reductio* como uma regra de introdução para a negação, essa regra poderá ser considerada válida na medida em que pudermos derivá-la das regras de introdução e eliminação da negação, conforme o esquema abaixo, onde *C* é um parâmetro proposicional que não ocorre em *Γ,Δ,A*. Além disso, a regra *reductio* também permitiria derivar a regra de introdução da negação, embora não permita derivar a regra de eliminação:

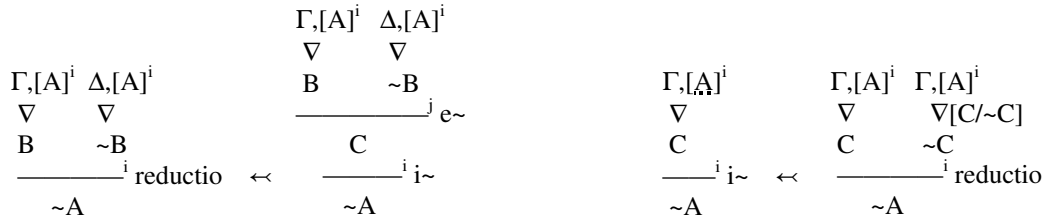


Figura I-13

Assim, justamente pelo fato de a regra *reductio* não ser independente, para derivá-la precisamos usar introdução e eliminação ao mesmo tempo.

Retornando ao caso do argumento envolvendo *CAMESTRES*, a elucidação de como chegamos a uma conclusão com negação poderia ser feita por meio das regras de introdução da negação e eliminação da negação. A conclusão "*CAMESTRES não pode ser inválido*" é obtida do fato de que um certo conjunto de proposições é tal que ele é impossível. Supondo que um conjunto de proposições descreve uma virtual situação, uma forma de representar o fato de que essa situação é impossível poderia consistir da demonstração de que qualquer proposição decorre daquele conjunto de proposições, ou também que daquele conjunto de proposições segue-se dedutivamente um parâmetro proposicional.[74]

[74] Essas duas opções não são exatamente equivalentes, como veremos no próximo capítulo.

No caso do argumento envolvendo *CAMESTRES*, o conjunto de proposições que descreve uma situação impossível seria aquele que consiste da proposição tomada como suposição − qual seja, a de que *CAMESTRES* seria inválido − mais duas asserções − quais sejam, as de que *CELARENT* não é inválida e a de que se *CAMESTRES* fosse inválida, então *CELARENT* seria. A proposição que será negada ou rejeitada é aquela que foi tomada como suposição. Parece-nos que faz mais sentido dizer que uma suposição mostrou-se falsa/incorreta, do que dizer que uma proposição assumida era falsa. Assim, finalmente, por uma introdução da negação, decorrerá a conclusão de que *CAMESTRES* não pode ser inválida ou que ela não é inválida. Ou seja, a não invalidade de *CAMESTRES* pode ser justificada a partir da asserção do condicional contrafactual.

2.1.1. Outras Propostas Elucidatórias Relacionadas

Como já dissemos anteriormente, Russell, em 1903, tinha um esboço de compreensão da negação similar àquela que estamos adotando. Em datas posteriores, também encontramos idéias similares em outros autores. Um deles é Henkin [Hen49] que, em uma apresentação do cálculo proposicional na forma axiomática, propõe-se a oferecer um conjunto de axiomas a partir do qual todas as tautologias podem ser derivadas. Os três axiomas desse cálculo só empregam a constante lógica de implicação. Além deles, o sistema conta com a regra *modus ponens*. Os dois primeiros axiomas são aqueles que permitem obter o teorema da dedução: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ e $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$. O terceiro axioma corresponderia, em dedução natural, a uma regra de dedução indireta: $(A \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow C)$. A regra aparecerá no próximo capítulo e será chamada de **regra de alternativa excluída**.

A noção de negação empregada por Henkin guarda alguma similaridade com a noção de negação que oferecemos acima. Ele a apresenta no lema às páginas 43 e 44 de [Hen49] e, sobretudo, no Teorema 2, à pág. 47. Na pág. 47, o autor define uma fórmula *A* como consistente quando, para nenhuma variável (proposicional) *x* que não esteja em *A*, tenha-se que $A \vdash x$.[75] Prossegue dizendo que podemos concluir que *A* é satisfatível se e somente se *A* for consistente. No caso, por satisfatibilidade de uma fórmula entende-se a existência de uma linha da tabela de verdade com o valor V. Porém, como a noção de satisfatibilidade pode ser estendida para conjuntos de fórmulas Γ, quando todas as fórmulas desse conjunto forem simultaneamente satisfatíveis, decorrerá que Γ é satisfatível se e somente se não for o caso que $\Gamma \vdash x$, o que é exatamente o conteúdo do Teorema 2 do referido artigo.

---

[75] A mesma definição de consistência já pode ser encontrada na tese de doutorado de Post [Pos21], págs. 264-289.

Não obstante, é importante notar que o autor introduzirá a negação no meio da prova do Teorema 2 por meio de uma definição, fazendo apelo ao conceito de função proposicional que não seja *T-função*[76]. Embora essa seja uma idéia engenhosa, não nos parece que a proposta permita elucidar de forma clara o que devemos entender pela negação, além do fato de que, no fim das contas, será a definição da tabela de verdade que estará por trás da definição. Suponhamos que tivéssemos representado a operação proposicional "nem...nem..." por |. Como sabemos, a negação pode ser definida a partir dessa operação e essa operação não é uma *T-função*. Todavia, a negação de *A* poderia ser uma abreviação para *A|A*, mas também poderia ser uma abreviação para *((A|A)|(A|A))|((A|A)|(A|A))* etc. Desse modo, há uma ambigüidade na definição de negação empregada na prova do teorema, embora as fórmulas da seqüência anterior sejam todas logicamente equivalentes à negação de *A*. O problema é que haveria uma infinidade de fórmulas que poderiam ser lidas como a negação de *A*.

A nosso ver, a nota de rodapé 3, na pág. 44, do artigo de Henkin é interessante de ser mencionada. Nela o autor diz textualmente:

> *Prof. Church aponta que o uso de uma fbf arbitrária C como essa [no lema] pode ser considerada como tendo surgido da prova de Kalmár pela primeira vez expressando a negação em termos de implicação e falsidade ... O uso das variáveis proposicionais para expressar a falsidade [por seu turno] foi primeiramente levada a cabo por Wajsberg no seu Metalogische Beiträge, Wiadomości matematyczne, vol. 53 (1936), pp. 131-168. ...* [77]

Assim, a idéia de usar variáveis proposicionais para representar a negação já teria sido empregada por Wajsberg em 1936, segundo Henkin, próximo da publicação dos trabalhos de Gentzen sobre dedução natural [Gen35].[78] Em outro artigo, que não aquele citado por Henkin, Wajsberg [Waj37] apresenta uma idéia similar a essa do uso de variáveis proposicionais dentro do cálculo proposicional para substituir a negação. O autor demonstra certos teoremas tratando de transformações sobre funções proposicionais, em particular um teorema segundo o qual para um conjunto *X* de proposições a proposição *~p* pode ser trocada por uma proposição logicamente equivalente *φ(p)* tal que o conjunto das conseqüências de *X* que não continham negação

---

[76] Uma função é uma *T-função* quando, na primeira linha da tabela de verdade, em que todas as variáveis recebem o valor V, a função também resulta V.

[77] *Prof. Church points out that the use of an arbitrary wff C in this way [como no lema] may be considered as arising from Kalmár's proof by first expressing negation in terms of implication and falsehood ... The use of propositional variables to express falsehood [por seu turno] was first undertaken by Wajsberg in his Metalogische Beiträge, Wiadomości matematyczne, vol. 53 (1936), pp. 131-168. ...* O sublinhado e o texto entre colchetes são de nossa autoria.

[78] Até o presente, não conseguimos obter uma cópia do artigo de Wajsberg. Pode haver algum problema na referência dada por Henkin. Encontramos dois artigos com o mesmo título publicados na mesma revista, o n. 43 de 1937 às págs. 1-38 e o n. 47 de 1939 às págs. 119-139, conforme tradução de McCall [McC67].

continuará sendo obtido, para isso $\phi(p)$ não pode conter variáveis que ocorram nas proposições de *X*, com exceção de *p*.

Ainda com respeito aos antecedentes da solução que estamos propondo para a negação, olhando para o artigo inaugural de Jaskowski [Jas34], fica bastante claro que, com um ou dois pequenos passos a mais, ele já poderia ter chegado às mesmas conclusões que chegamos acerca da negação. Nesse artigo, ele apresenta a chamada *teoria estendida da dedução* que consiste em dotar o cálculo proposicional de quantificação. Notamos que ele só considerou duas constantes lógicas no seu cálculo proposicional: a implicação e a negação. Além disso, também observou que duas proposições especiais poderiam ser dadas por definição explícita: $u \equiv \forall p(p)$ e $t \equiv \sim u$. Ou seja, a proposição *u* é uma contradição, ou antinomia, e *t* é uma tautologia. Acerca dessas proposições, ele observou que as duas seguintes fórmulas expressariam respectivamente "*que a proposição falsa u implica qualquer coisa*" e "*a proposição verdadeira t é implicada por qualquer coisa*" ([Jas34], pág. 253): $\forall p(u \rightarrow p)$ e $\forall p(p \rightarrow t)$. Assim, faltou muito pouco para que ele tivesse adicionado, em 1934, uma definição da tautologia na forma $t \equiv u \rightarrow u$, dispensando, desse modo, o uso da negação no seu sistema. Não é difícil perceber que nossa proposta para elucidação da negação poderia, ao invés, ter sido dada por meio do quantificador proposicional universal. Também é claro que, se Jaskowski tivesse usado a livre substitutibilidade dos parâmetros proposicionais no lugar do quantificador proposicional, ele teria reduzido o número de constantes lógicas do seu cálculo proposicional de dedução natural a *1* (uma): a implicação.

Na literatura, encontramos uma outra tentativa de elucidação da negação efetuada por Tennant ([Ten99], págs. 199-221), para uma lógica intuicionista relevante, e que guarda alguma semelhança com a nossa proposta. Tennant introduz uma novidade radical na representação das regras lógicas. Sua regra de introdução para a negação requer que um **beco sem-saída** tenha sido deduzido a partir de um certo conjunto de suposições, incluindo a suposição *A*:

$$\begin{array}{c} \Gamma,\ [A]^{j} \\ \nabla \\ \vdots \\ \hline \quad\quad j \\ \sim A \end{array}$$

Figura I-14

O beco sem-saída está representado pela barra, na figura acima, imediatamente abaixo da derivação subsidiária[79]. O quadrado sobre a suposição *A* indicaria que a suposição deveria ter sido usada de forma relevante e, para nossos propósitos, não precisamos fixar nossa atenção

[79] Chamamos *derivação subsidiária* aquela derivação que ocorre como condição de aplicação de uma regra de dedução. Ver o Apêndice.

sobre o seu uso. Tipicamente, haverá um beco sem-saída quando houver uma situação de incompatibilidade entre as suposições. O beco sem-saída é indicado pela falta de conclusão na regra. Por exemplo, como há incompatibilidade entre as fórmulas $a=b$ e $a>b$, poderíamos dar uma regra para essas fórmulas básicas com o seguinte beco sem-saída:

$$\frac{a=b \quad a<b}{\quad}$$

Figura I-15

Outra situação típica de beco sem-saída é aquela de uma contradição entre duas premissas:

$$\frac{A \quad \sim A}{\quad}$$

Figura I-16

A regra acima corresponderia a uma eliminação da negação.

Adotando a solução de Tennant, seria preciso multiplicar várias das regras de dedução natural, dado que uma derivação poderá ter, doravante, dois tipos de "conclusões": fórmulas de conclusão e *becos sem-saída*. A eliminação da disjunção, por exemplo, requererá quatro regras distintas para ser apresentada, dependendo das combinações possíveis de fórmulas e *becos sem-saída* como premissas menores da regra de eliminação. Parece evidente que a solução de Tennant consiste em transladar para dedução natural o *modus operandi* utilizado normalmente no cálculo de seqüentes.

Ainda que a proposta de Tennant guarde interesse, duas críticas maiores lhe podem ser dirigidas. Em primeiro lugar, tradicionalmente, consideramos ou que as inferências lógicas se dariam entre asserções ou que as deduções envolveriam certos conteúdos oracionais de modo que deveria haver ao menos uma conclusão em cada regra. Para que violemos essa tradição plurimilenar, remontando a Aristóteles, deveríamos requerer boas razões. Segundo, o sistema acaba por tornar-se mais complexo com o aumento do número de regras e as novas regras deveriam ser justificadas. Abaixo, exemplificamos um dos quatro casos de regras de eliminação para a disjunção que o sistema passaria a conter:

$$\frac{\begin{array}{ccc} & [A]^i & [B]^i \\ & \nabla & \nabla \\ A \vee B & — & C \end{array}}{C}\ i\ e\vee^T$$

Figura I-17

A solução que propusemos para a negação, via regra de introdução, é importante observar, nem violaria a referida tradição, nem exigiria um aumento no número de regras destinadas a elucidar as deduções lógicas.

2.1.2. Negação *versus* Conseqüência Dedutiva

Dado que a linguagem de fórmulas com a qual estamos trabalhando contempla expressões que representam proposições/formas proposicionais e dado também que consideramos os parâmetros proposicionais como expressões admissíveis, qualquer situação na qual um parâmetro proposicional seja conseqüência dedutiva de um conjunto de suposições constituiria algo que, intuitivamente, chamaríamos de situação impossível ou de situação absurda. Não faz sentido admitir que, num sistema formal minimamente adequado, possamos deduzir um parâmetro proposicional a partir de um conjunto finito de informações coerentes, justamente porque esses parâmetros contêm o maior grau de indeterminação quanto à estrutura de informação que eles representam. Num sentido bem preciso, qualquer proposição é uma instância de um parâmetro proposicional.[80] Ou ainda, como toda forma proposicional de alguma complexidade contém uma informação comum a todas as proposições, que sejam instância dessa mesma forma, e dado que os parâmetros proposicionais são as formas proposicionais mais gerais, então eles veicularão uma informação comum a todas as proposições, no caso, nenhuma informação específica.

Mais formalmente, diremos que uma proposição/forma proposicional A é **incompatível** com as suposições Γ quando um parâmetro proposicional for conseqüência dedutiva de $\Gamma \cup \{A\}$. Conseqüentemente, se uma proposição/forma proposicional A é incompatível com as suposições Γ, então $\sim A$ é conseqüência dedutiva de Γ. Isso também incluiria o caso onde Γ ela mesma é internamente incompatível, o que acarretaria que qualquer fórmula negada seja considerada conseqüência dedutiva de Γ[81]. Nos casos em que Γ for vazio, diremos que A é **absolutamente incompatível**, ou seja, que A é incompatível com qualquer conjunto de suposições. Finalmente, poderíamos definir o conceito de impossibilidade para conjuntos de proposições/formas proposicionais dizendo que $\Gamma \cup \{A\}$ é **impossível** quando A é incompatível com Γ. Dessa forma, uma proposição A será **impossível** de modo absoluto quando A é absolutamente incompatível[82] Ao definir a negação, usamos implicitamente esse conceito de incompatibilidade, recém-caracterizado.

Para incluir formalmente a operação de negação na definição de conseqüência dedutiva, devemos adicionar à definição as cláusulas a seguir:

---

[80] Para maiores informações sobre o conceito de instância de um esquema, ver o Apêndice.
[81] Sempre que não haja nenhuma restrição relevantista quanto ao uso de suposições.
[82] Essa noção de incompatibilidade é antiga e já está de algum modo presente em Aristóteles com a noção de oposição contrária. Ela é apresentada tanto nas *Categorias* quanto no *Da Interpretação*. Também outros autores fazem referência ao tema da incompatibilidade, por exemplo, Vasilev, segundo da Costa [Cos79], pág. 128.

(vii) caso $\Gamma \cup \{A\} \Vdash B$, onde B é um parâmetro proposicional que não ocorre nas fórmulas de Γ e também não ocorre em A, então $\Gamma \Vdash \sim A$.

(xiv) caso $\Gamma \Vdash \sim A$ e $\Delta \Vdash A$, então $\Gamma \cup \Delta \Vdash B$.

Em outros termos, com essas cláusulas estaríamos mostrando que a elucidação da negação só requereria usar como conceito primitivo o conceito de conseqüência dedutiva, assumindo, é bem verdade, que esse conceito se aplica não só às proposições, mas também às formas proposicionais. Isso é essencial na medida em que, na cláusula de introdução da negação, a fórmula *B* deve ser um parâmetro proposicional.

2.1.3. Observações acerca do Cálculo de Seqüentes

A definição do conceito de conseqüência dedutiva, incluindo as cláusulas para a negação, poderia ter sido apresentada de modo ligeiramente diferente. Na definição oferecida, o conceito de conseqüência dedutiva estende-se sempre à direita, ou ainda, no caso das regras de dedução natural, estende-se para baixo. Além disso, à esquerda do símbolo de conseqüência dedutiva fizemos apelo a uma noção conjuntista. Porém, também seria possível definir o conceito de conseqüência dedutiva por extensão simultânea à esquerda e à direita, ou, em termos de dedução natural, para baixo e para cima na derivação. Para baixo, seriam as regras de introdução; para cima, as regras de eliminação.

As cláusulas desse novo tipo de definição mantêm as cláusulas de introdução praticamente idênticas à formulação original, ao passo que as cláusulas de eliminação sofrem uma alteração: elas passam a atuar do lado esquerdo. Adicionalmente, na definição a seguir, passaremos a tratar as suposições como listas finitas e não mais como conjuntos finitos.

Definição I-2 (alternativa) - Definimos o conceito (relação) de **conseqüência dedutiva** *($\Vdash$) como a seguir, onde Γ e Δ são listas finitas de fórmulas separadas por vírgulas (eventualmente vazias):*

(i) $A \Vdash A$.

(ii) caso $\Gamma \Vdash A_1$ e $\Delta \Vdash A_2$, então $\Gamma,\Delta \Vdash A_1 \wedge A_2$.

(iii) caso $\Gamma,A_1 \Vdash A_2$, então $\Gamma \Vdash A_1 \rightarrow A_2$.

(iv) caso $\Gamma \Vdash A$ e o parâmetro a não ocorre na lista de fórmulas Γ, então $\Gamma \Vdash \forall x A[a/x]$.

(v) caso $\Gamma \Vdash A_1$ ou $\Gamma \Vdash A_2$, então $\Gamma \Vdash A_1 \vee A_2$.

(vi) caso $\Gamma \Vdash A[a/\tau]$, então $\Gamma \Vdash \exists x A[a/x]$.

(vii) caso $\Gamma,A \Vdash B$, onde B é um parâmetro proposicional que não ocorre na lista de fórmulas Γ e também não ocorre em A, então $\Gamma \Vdash \sim A$.

(ix) caso $\Gamma,A_1 \Vdash B$ ou $\Gamma,A_2 \Vdash B$, então $\Gamma,A_1 \wedge A_2 \Vdash B$.

(x) caso $\Gamma \Vdash A_1$ e $\Delta,A_2 \Vdash B$, então $\Gamma,\Delta,A_1 \rightarrow A_2 \Vdash B$.

(xi) caso $\Gamma,A[a/\tau] \Vdash B$, então $\Gamma, \forall x A[a/x] \Vdash B$.

(xii) caso $\Gamma_1,A_1 \Vdash C$ e $\Gamma_2,A_2 \Vdash C$, então $\Gamma_1,\Gamma_2,A_1 \vee A_2, \Vdash C$.

(xiii) caso $\Gamma,A \Vdash C$ tal que o parâmetro a não ocorre em Γ e não ocorre em C, então $\Gamma,\exists x A[a/x] \Vdash C$.

(xiv) caso $\Gamma \Vdash A$, então $\Gamma,\sim A \Vdash B$.

A cláusula *(i)* é a cláusula básica e a diferença para a cláusula que havia sido dada anteriormente será coberta por outra cláusula a ser apresentada a seguir. As cláusulas *(ii)* a *(vii)* são chamadas de regras de introdução à direita e as cláusulas de *(ix)* à *(xiv)* são as regras de introdução à esquerda. As de introdução à direita correspondem, intuitivamente, à adição de um passo de dedução de introdução ao fim de uma derivação de dedução natural; as de introdução à esquerda correspondem à adição de um passo de dedução de eliminação sobre o topo da derivação de dedução natural ([Pra65], pág. 91).

Para tratar formalmente as listas de fórmulas que ocorrem à esquerda do símbolo $\Vdash$, necessitamos de três novas regras ou cláusulas.

Em primeiro lugar, deveríamos oferecer uma regra de troca de posições entre fórmulas adjacentes, como a seguir, notando que Γ_1 e/ou Γ_2 poderiam eventualmente ser vazias:

(troca) caso $\Gamma_1,A,B,\Gamma_2 \Vdash C$, então $\Gamma_1,B,A,\Gamma_2 \Vdash C$

Há uma interpretação intuitiva para essa regra. Ela nos informaria que a ordem em que são listadas as suposições é irrelevante para determinar a relação de conseqüência dedutiva.

Em segundo lugar, como em dedução natural nos casos em que descartamos suposições o número de ocorrências descartadas é arbitrário, precisaríamos admitir uma forma de estender o descarte de várias ocorrências da lista em um único ato. Por exemplo, no caso da implicação, uma só aplicação da cláusula de introdução à direita de $\Vdash$ deveria ser o suficiente. Isso poderia ser alcançado se a seguinte regra de contração de ocorrências adjacentes estivesse à disposição:

(contração) caso $\Gamma,A,A,\Delta \Vdash C$, então $\Gamma,A \Vdash C$

Intuitivamente, a interpretação mais natural para essa regra seria a de que a relação de conseqüência dedutiva não é afetada pelo número de vezes que uma mesma suposição é usada.

Finalmente, em terceiro lugar, para dizer que uma proposição será conseqüência dedutiva de um conjunto de suposições maior, caso ela já seja de um subconjunto próprio, acrescentamos a regra de enfraquecimento a seguir:

(enfraquecimento) caso $\Gamma \Vdash C$, *então* $\Gamma, A \Vdash C$

Notamos que a última cláusula complementa aquilo que havíamos perdido em poder dedutivo na cláusula *(i)* da Definição I-2 com respeito à cláusula *(i)* da Definição I-1.

Desse modo, a definição de conseqüência dedutiva envolvendo listas de suposições é praticamente idêntica à definição do **cálculo de seqüentes intuicionista**, já que ocorre uma única fórmula do lado direito do símbolo $\Vdash$ ([Gen35], págs. 83-85). A diferença principal dessa definição para com o cálculo de seqüentes intuicionista está nas duas regras de introdução da negação à esquerda e à direita, por um lado, e na ausência da regra de corte, por outro.

A regra de corte pode ser formulada da seguinte forma:

(corte) caso $\Gamma \Vdash A$ *e* $\Delta, A \Vdash B$, *então* $\Gamma, \Delta \Vdash B$.

Fazendo um paralelo com as derivações de dedução natural, essa regra corresponde composicionalidade de derivações em dedução natural. A validade dessa regra pode ser perfeitamente provada, embora não venhamos a nos ocupar dessa prova.

Confessamos que a presente secção foi inspirada sobretudo em Curry ([Cur63], cap. 5). Este autor define o cálculo de seqüentes de forma similar àquela acima (embora sua definição não contemple regras de negação idênticas às nossas) e apresenta a validade da regra de corte como derivada da definição dos demais seqüentes ([Cur63], s. 5D2). Curry assume que a noção de seqüente representa uma noção de dedutibilidade. No caso de Curry, a validade daquilo que estamos chamando de regra de corte, e que ele chama de regra de eliminação, será apresentada como uma decorrência da definição do sistema. Em outros termos, a adição da regra de corte não viria a alterar o conjunto de seqüentes demonstráveis já definido previamente. Acerca desse ponto, é também interessante notar que Negri & Von Plato ([Neg01], caps. 2 e 3) adotam uma

apresentação do cálculo de seqüentes em que a admissibilidade das regras estruturais - troca, contração, enfraquecimento e corte - é sempre apresentada depois da definição básica do sistema.

Com respeito às cláusulas para a negação, poderíamos adicionar uma pequena modificação na definição do conceito de conseqüência dedutiva de modo que agora as cláusulas da definição do conceito sejam exatamente idênticas ao sistema de seqüentes intuicionista. Previamente, seria preciso, no entanto, admitir que podemos dar uma interpretação razoável para aqueles seqüentes nos quais não ocorre nenhuma fórmula à direita do símbolo ⊩. Usualmente, na literatura, a começar por Gentzen, interpreta-se uma situação dessa natureza como uma situação na qual o absurdo teria sido demonstrado a partir das hipóteses. A seguinte reformulação das cláusulas para a negação resultaria ser idêntica às regras para a negação no cálculo de seqüentes intuicionista:

(vii') caso Γ,A⊩ , então Γ⊩~A.

(xiv') casoΓ⊩A, então Γ,~A⊩.[83]

Todavia, para que pudéssemos derivar a cláusula *(xiv)* anterior a partir das novas cláusulas, seria ainda preciso adicionar uma regra de enfraquecimento à direita, como a seguir:

(enfraquecimento) caso Γ⊩, então Γ⊩B.[84]

Com essa regra, o conteúdo das cláusulas *(vii)* e *(xiv)* originais está contemplado nas novas cláusulas acima. A cláusula de enfraquecimento tem uma interpretação que a liga diretamente à forma pela qual apresentamos as regras de dedução natural para a negação. Essa cláusula de enfraquecimento equivaleria à possibilidade de substituir a ocorrência de um parâmetro proposicional por uma fórmula qualquer em uma derivação, exatamente de acordo com aquilo que ilustrávamos na Figura I-12. Assim, é o uso da cláusula de enfraquecimento à direita que nos permite tratar a negação com as cláusulas *(vii´)* e *(xiv´)*, mantendo as relações de dedutibilidade que tínhamos anteriormente com as antigas cláusulas.

Resumindo, as regras do cálculo de seqüentes com uma única ocorrência de fórmula à direita do símbolo ⊩ diferem de forma circunstancial do sistema de regras de dedução natural com regras de introdução e eliminação para a negação, segundo a elucidação proposta. Tanto as

---

[83] Muito provavelmente, a intuição de Tennant na proposta dos *becos sem-saída* deriva do fato de que, nessas cláusulas, admite-se que não haja nenhuma fórmula à direita do seqüente.

[84] Sem essa cláusula não obteríamos o sistema intuicionista.

derivações de dedução natural quanto os seqüentes podem ser interpretados como constructos elucidatórios para o conceito de conseqüência dedutiva.

A diferença, acreditamos, se encontra no fato de que a relação de conseqüência dedutiva aparece explicitamente representada como relação no cálculo de seqüentes. Desse modo, as regras de seqüentes podem ser vistas como regras cuja‖s‖ premissa‖s‖ imediata‖s‖ e cuja conclusão são asserções de relação, a relação de conseqüência dedutiva. Já em dedução natural, estaríamos tão somente mostrando a relação de conseqüência dedutiva, de modo tal que o uso do símbolo ∇ não deveria ser entendido como um termo lingüístico para expressar a relação de conseqüência dedutiva, mas como um símbolo para mostrar/representar essa relação. Nesse sentido, a outra forma de apresentar um sistema de dedução natural ([Gen36] págs. 151-153) que também usa seqüentes, mas onde todas as regras atuam à direita, ou seja, aquele sistema onde as constantes são trabalhadas do lado direito, seria também uma forma de relacionar asserções cuja relação principal é uma relação de conseqüência dedutiva expressada pelo símbolo de seqüente. A diferença desse caso para o cálculo de seqüentes está no fato de que aqui todas as regras atuam basicamente à direita do símbolo (com exceção dos descartes de hipóteses).

2.2. Regra de Introdução para a Proposição Absurda

A proposta de elucidação da negação acima difere das tentativas de elucidação da negação contidas no intuicionismo em geral e no intuicionismo natural em particular. O intuicionismo natural, tendo, primeiramente, feito uma diferenciação entre provas diretas/canônicas e indiretas/não-canônicas e, em segundo lugar, evitado o uso do conceito de contradição, procurará dar uma elucidação da negação que dependerá do conceito de impossibilidade ou do conceito de absurdo, o que, por sua vez, é representado como uma proposição.

O que fazem os intuicionistas naturais? Eles substituem o conceito de contradição pelo conceito de absurdo ou de **proposição absurda** como uma interpretação para a constatação de impossibilidade. Desse modo, a partir da proposição absurda, a negação passa a ser definida como: $\sim A \equiv_{df} A \rightarrow \bot$. O absurdo é assim tratado como uma constante lógica como as demais. Por isso mesmo, acreditamos, seu comportamento deveria ser/estar elucidado por meio de regras de dedução.

Como já vimos na citação de Negri & Von Plato, por exemplo, para os intuicionistas naturais a proposição absurda será definida como aquela da qual não há nenhuma prova direta/canônica ou da qual uma prova direta é impossível. No que se segue, procuraremos analisar essa perspectiva.

Parece-nos criticável a proposta de definir a proposição $\perp$ como *aquela proposição da qual não há nenhuma prova canônica*, ou ainda *da qual uma prova direta é impossível*. Em primeiro lugar, se quiséssemos admitir esse tipo de definição, deveríamos mostrar como esse fato pode ser evidenciado por meio das regras de dedução natural. A formalidade das regras de dedução natural serve de garantia a que nenhum conteúdo semântico entre desavisadamente de contrabando na elucidação proposta. Assim, é preciso questionar como poderíamos apresentar formalmente o fato de que não pode haver nenhuma prova de $\perp$, quando a formulação sintática é usada de modo a não deixar conteúdos semânticos encobertos. A resposta tradicional a essa questão tem sido a de que o caso de $\perp$ é um caso limite, para o qual não haveria regra de introdução, já que não existe prova canônica de $\perp$. Como, do ponto de vista intuicionista, as regras de introdução determinam o que é uma prova canônica ou uma prova direta de uma asserção para uma determinada constante lógica e como não pode haver prova do absurdo, então não haveria, segundo os intuicionistas naturais, uma regra de introdução para o absurdo. Assim, o próprio "silêncio sintático" tem sido tomado como regra de introdução para essa proposição.

Todavia, o fato de assumir que não existe nenhuma regra de introdução porque não existem provas do absurdo parece introduzir um elemento ontológico-existencial na concepção das regras. Já que não existiriam provas, não poderiam existir descrições de como o absurdo seria provado. Porém, traçando um paralelo com os animais fantásticos, isso seria o mesmo que dizer que já que não existem unicórnios, também não poderíamos descrever quais características teriam esses animais se existissem, o que é falso. Certamente, ninguém tem o direito de caracterizar um unicórnio como bípede, mas estará correto ao caracterizá-lo como um quadrúpede. Além disso, embora um grifo seja intensionalmente um quadrúpede, grifos e unicórnios são intensionalmente coisas diferentes.

Além dessa questão, há um segundo problema. Devemos perguntar, adicionalmente, como poderíamos garantir a unicidade do significado da proposição $\perp$ ao defini-la como *aquela proposição da qual não há prova direta/canônica*. Segundo os intuicionistas, as provas diretas/canônicas de uma proposição devem ter uma conexão íntima com o significado da proposição. Provas diretas para proposições de significados distintos deveriam ser distintas entre si. A questão que se apresenta é: poderíamos admitir que a proposição absurda fosse confundida com outras proposições? Num sentido intuitivo, não existem provas diretas de quaisquer proposições que tenham sido demonstradas como falsas. Como então poderíamos saber que, ao apontar para *aquela proposição da qual não há prova direta/canônica*, estaríamos apontando para uma única proposição?

Se as regras de introdução ou a ausência delas determinam semanticamente o significado das proposições, então, provavelmente, deveríamos identificar de um modo forte todas as proposições falseáveis, já que para todas elas não existirão provas e a fortiori não existirão provas diretas/canônicas. Assim, se pudéssemos considerar que todas têm o mesmo significado, elas deveriam ser consideradas interderiváveis e, portanto, talvez, pudéssemos aceitar a unicidade da expressão *aquela proposição da qual não existe prova direta/canônica*. Porém, se as considerássemos interderiváveis, a demonstração da falsidade de uma deveria servir de demonstração da falsidade da outra. Ora, a partir de proposições falseáveis distintas entre si não há, usualmente, como empregar a demonstração da falsidade de uma dessas proposições para demonstrar a falsidade de outra. Proposições falsas devem poder ser distinguidas quanto ao seu significado e, da mesma forma, deveríamos poder distinguir os critérios para determinar o que seria uma prova ou uma refutação de cada uma delas. Por exemplo, não vemos por que, de forma geral e abstrata, a prova da falsidade de "π *é um número algébrico*" seria uma prova da falsidade de "$\sqrt{2}$ *é um número racional*". Por outro lado, se não pudéssemos fazer essa identificação entre as proposições falseáveis, não vemos por quê $\perp$ deveria ser considerada uma proposição definida pelo fato de que dela não existem provas diretas.

Parece-nos que cada proposição significativa deve ter associado um critério de identidade que permita distinguir o que seria sua putativa prova[85], nem que seja de modo parcial. Se uma proposição é falsa, ou foi demonstrada como falsa, o conjunto de suas provas será claramente vazio. Nem por isso estaria assegurado que proposições falsas distintas teriam os mesmos critérios de identificação para suas putativas provas. Assim, em resumo, parece-nos que há, no mínimo, um problema de unicidade na expressão *aquela proposição da qual não há prova direta/canônica*.[86]

Para toda proposição significativa que não tenha sido nem provada, nem refutada − por exemplo, a proposição de que todo número par é a soma de dois primos − deveríamos ter de antemão critérios que permitissem identificar se algo é ou não é uma prova dessa proposição. De outra forma, jamais poderíamos provar nem refutar nada. Os critérios nos dariam o que podemos chamar de critérios canônicos para a seleção/rejeição de uma estrutura candidata ao posto de

---

[85] Os dicionários Houaiss e Aurélio da Língua Portuguesa dão o significado de *atribuir falsamente* ao verbete *putativo*. Segundo o Houaiss, esse termo vem do latim *putativus,a,um* : *imaginário*. Ao usar a expressão *putativa prova*, estaremos nos referindo às entidades que, se existirem, cairão sob os critérios que definem o que seria a prova de uma determinada proposição. A idéia é que os critérios dão uma descrição intensional do objeto e é possível que essa descrição não seja aplicável a nenhum objeto. Assim, nosso uso diverge parcialmente dos usos descritos por Houaiss e Aurélio.

[86] Observe-se de passagem que, se esta expressão é considerada uma definição da proposição absurda, nela faz-se uso da negação e, desta forma, a compreensão do absurdo já pressuporia uma certa compreensão da negação.

prova dessa proposição. Ocorre que, da forma como os intuicionistas naturais entendem esses critérios, eles podem ser confundidos com a existência da própria prova (canônica), no caso das proposições que podem ser demonstradas. Ou seja, ao invés de tomá-los como simples critérios, temos a impressão de que os intuicionistas estão, na verdade, descrevendo uma ontologia de provas. Assim, desse ponto de vista, é compreensível que um intuicionista natural pense estar definindo uma proposição falsa ao dizer que o conjunto das suas provas canônicas é vazio. Porém, como todas as proposições falsas não são demonstráveis e, *a fortiori*, o seu conjunto de provas canônicas é vazio, se tomássemos como definição de uma proposição a inexistência de provas canônicas, então todas as proposições falsas significariam a mesma coisa ou, pelo menos, não poderíamos distinguir os seus respectivos usos/significados.

Ao que parece, podemos perfeitamente distinguir os diferentes usos de proposições distintas e que sejam ao mesmo tempo demonstradamente falsas. Consideremos as proposições "π *é um número racional*" e "π *é um número algébrico*". Embora as duas envolvam, por assim dizer, o mesmo objeto π, seu significado é distinto, embora sejam ambas demonstradamente falsas. Aliás, dado que a cada uma dessas proposições está associado um significado, independente de saber se elas são falsas ou não, temos certeza de que a primeira implica a segunda, pois todo número racional é algébrico, ao passo que a segunda não implica imediatamente a primeira. Ou seja, não é imediatamente verdade que todo número algébrico seja racional. Só poderíamos dizer que a segunda implica a primeira, se usássemos como princípio de inferência válido o princípio de *ex falso quodlibet*. Lembramos que esse princípio é objeto de investigação da nossa tese e está sob julgamento. Contudo, é preciso notar, ao dizer que a primeira proposição implica a segunda, estamos fazendo uma afirmação cuja justificativa independe da validade do princípio, pois efetivamente existe uma construção que mostra essa implicação, como vimos.

Se $\bot$ é tratada como uma constante lógica proposicional e os sistemas de dedução natural descrevem completamente o comportamento dessas constantes por meio de regras de introdução e de eliminação, parece-nos deveria haver uma regra de introdução correspondente para essa constante. Aparentemente, Dummett é da mesma opinião, pois oferece uma regra infinitária de introdução para $\bot$ ([Dum91], pág. 295):

> *É usual não impor nenhuma regra de introdução sobre '$\bot$'; a motivação para isso seria presumivelmente o princípio de consistência, desde que se, para alguma sentença A, ambos ela e* $\ulcorner\neg A\urcorner$ *são asseriveis, então* $\bot$ *também seria, e reversamente. A partir de nossa discussão prévia, no entanto, é claro que a regra de introdução apropriada é*

$$\frac{\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3\ \ldots}{\bot}$$

onde os $\boldsymbol{B}_i$ *são como antes.*
A constante sentencial $\bot$ *não é mais problemática do que o quantificador universal: ela é simplesmente a conjunção de todas as sentenças atômicas.*[87]

Contudo, a regra oferecida contrasta fortemente com as demais regras de dedução natural, pois, em nenhum outro caso, a condição de aplicabilidade da regra contém uma infinidade de premissas. Pior ainda, levando em conta que as premissas da regra são todas atômicas/básicas, se consideramos uma linguagem formal rudimentar, em que não existam parâmetros, em que todos os termos sejam ou zero ou sucessor de um termo (0, $0'$, $0''$, ...), em que por definição todas as proposições básicas tenham a forma $\tau=\tau$ (onde τ é um termo), em que exista unicamente um axioma $0=0$ e a regra $\tau=\tau/\tau'=\tau'$, então, nessa linguagem, $\bot$ poderia ser inferido aplicando a regra de Dummett. A proposição $\bot$ corresponderia, segundo as palavras do autor, à conjunção infinita $0=0\wedge 0'=0'\wedge\ldots$. Porém, essa conjunção infinita será verdadeira, se os termos forem interpretados da forma usual como números naturais. Isto não corresponde ao conceito de absurdo. O exemplo usado para contra-argumentar pode ser questionado quanto a forma sob a qual as fórmulas básicas foram definidas. Todavia, nesse caso, seria preciso mostrar porque não disporíamos de liberdade para definir a linguagem da forma como o fizemos.

Na verdade, é possível apresentar uma regra de introdução para $\bot$ mais adequada que aquela de Dummett, oferecendo, ao mesmo tempo, um critério de identificação para as putativas provas de $\bot$. Como sabemos, a negação pode ser introduzida como um símbolo lógico não-primitivo por meio do absurdo: $\sim A \equiv_{df} A\rightarrow\bot$. A partir dessa definição, podemos subdividir as regras de introdução da negação e eliminação da negação que oferecemos anteriormente de modo a obter regras específicas para $\bot$:

---

[87] *It is usual to impose no introduction rule on '⊥'; the motivation for this is presumably the principle of consistency, since if, for some sentence A, both it and* $\ulcorner\neg A\urcorner$ *are assertable, then so will* $\bot$ *be, and conversely. From our previous discussion, however, it is plain that the appropriate introduction rule is*

$$\frac{\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3\ \ldots}{\bot}$$

where the $\boldsymbol{B}_i$ *are as before.*
The constant sentence $\bot$ *is no more problematic than the universal quantifier: it is simply the conjunction of all atomic sentences.*

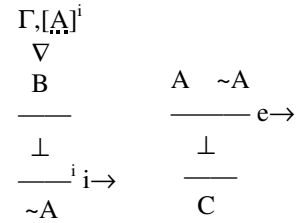


Figura I-18

Assim, se *B* é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ e não ocorre em *A*, as regras de **introdução de absurdo** (***i⊥***) e **grande eliminação de absurdo** (***E⊥***) seriam como abaixo:

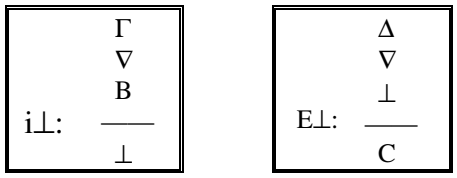


Figura I-19[88]

Observamos adicionalmente que, na literatura, a regra de eliminação do absurdo é freqüentemente representada como $\bot_i$, que se lê *regra de absurdo intuicionista*.

A regra *i⊥* acima pode ser derivada da regra de Dummett, mas a regra de Dummett não pode ser derivada de *i⊥*. Se tivéssemos a dedução de um parâmetro proposicional *A* a partir de um conjunto Γ de suposições, tal que *A* não ocorra em Γ, então derivaríamos *i⊥* usando a regra de Dummett da seguinte forma:

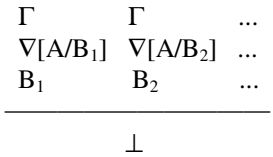


Figura I-20

De modo formal, a seguir deveríamos adicionar as cláusulas para definir o conceito de conseqüência dedutiva para a proposição $\bot$ na Definição I-2. Logo, as cláusulas para a negação poderiam ser removidas dessa definição e, assim, a negação passaria a ser considerada um símbolo definido. As cláusulas seriam as seguintes:

(vii) caso $\Pi \vdash B$, onde B é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, então $\Pi \vdash \bot$.

(xiv) caso $\Pi \vdash \bot$, então $\Pi \vdash C$.

---

[88] A regra *i⊥* é estruturalmente similar àquela usualmente considerada como uma introdução do absurdo em segunda ordem feita com base na regra de introdução de universal. Na regra de eliminação, a subderivação subsidiária da premissa imediata poderia ser dipensada.

Do nosso ponto de vista, $\perp$ é um artifício útil que permite uma elucidação econômica da negação e do conceito de impossibilidade. Dizemos que ele é um artifício, pois sua postulação permite separar duas componentes em cada uma das regras de introdução e eliminação para a negação, como acima. Vemos que uma dessas componentes subentendida na negação corresponde a uma implicação, conforme a Figura I-18. Isso pode ser muito esclarecedor se consideramos que, freqüentemente, a diferença entre a lógica intuicionista e a lógica clássica é apresentada em termos da validade/invalidade de certas regras envolvendo a negação. Uma forma de identificar mais precisamente a diferença entre a lógica clássica e o intuicionismo consistiria em notar que a diferença radica na aceitabilidade de uma regra que envolve a implicação, no caso a regra de dedução indireta *P*, ou seja, o axioma de redução de Russell. Esse tema será mais explorado nos próximos capítulos.

Agora que estamos de posse das regras de introdução e de eliminação para a proposição $\perp$, se adotássemos uma postura similar à de Hilbert, poderíamos dizer que $\perp$ é um elemento ideal, uma proposição ideal que não encontramos propriamente entre as proposições usuais da matemática ou alhures, mas uma forma de criação teórica que nos permite elucidar, de modo elegante e simples, a relação de conseqüência dedutiva em certos passos atômicos/elementares. Nesse sentido, dizer que $\perp$ é uma proposição parece-nos um compromisso ontológico da mesma natureza que o compromisso com a existência do número $\sqrt{-1}$. Por outro lado, parece impossível sustentar que $\perp$ seja considerada uma sentença ou oração. Ao menos, se assim o considerássemos, teríamos que revogar todas as gramáticas do mundo, já que essa oração não tem nem sujeito nem predicado.

Claro está que não é razoável admitir duas formas distintas e desconexas de regras de introdução para a proposição $\perp$. Em nossa opinião, nossa proposta apresenta algumas vantagens sobre a proposta que considera $\perp$ como aquela proposição da qual não existe prova canônica. De fato, inclusive, quem adotar nosso ponto de vista estará apto a mostrar, mais adiante, que não pode existir prova de $\perp$, tomando por base unicamente a regra de introdução para o absurdo e, assim, *a fortiori*, demonstrar que tampouco pode existir prova canônica de $\perp$, o que quer que isso signifique. Em outras palavras, o que vários dos intuicionistas naturais tomam como uma definição de $\perp$ pode ser demonstrado a partir da definição do uso dedutivo de $\perp$ por meio das regras de introdução e eliminação dadas acima.

Como última observação, notamos que Prawitz ([Pra65], págs. 58 e 59) já havia observado que $\perp$ é fracamente definível por meio de um parâmetro proposicional. Um operador lógico é considerado **fracamente definível** quando, para uma fórmula *A*, existe uma

transformação resultando noutra fórmula A^*, tal que A^* não contém este operador e tal que A é demonstrável se e somente se A^* é demonstrável. Um operador será **fortemente definível** quando as duas fórmulas forem interderiváveis. Outrossim, ele nota que o operador $\bot$ é fortemente definível em segunda ordem ([Pra65], pág. 67). Acreditamos que nossa proposta de definição dos usos dedutivos de $\bot$ explicitam por que ele é fracamente definível em primeira ordem e fortemente definível em segunda ordem.

2.3. Observações quanto aos Parâmetros Proposicionais

De forma similar ao caso de $i\forall$, as regras $i\sim$ e $i\bot$ fecharão as ocorrências do parâmetro proposicional B na subderivação subsidiária, quando B for a premissa imediata da regra, nas Figura I-9 e Figura I-19. Diremos que ***B* é um parâmetro próprio** de uma instância de $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$ em uma derivação π se B é a pM[89] dessa instância em π. Diremos que as ocorrências de um parâmetro proposicional B em uma derivação são **ocorrências fechadas** quando B for parâmetro próprio de uma instância de $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$ na derivação. Para que uma ocorrência de um parâmetro proposicional seja considerada **aberta**, é necessário que a ocorrência não seja fechada. Fechar as ocorrências de um parâmetro significa o mesmo que restringir as substituições que sobre elas podem ser feitas. Se as ocorrências de um parâmetro forem **abertas** em uma derivação, esse parâmetro poderá ser substituído livremente por qualquer fórmula da linguagem. No contexto de uma derivação, a substitutibilidade/instanciabilidade dos parâmetros proposicionais só se aplica às ocorrências abertas dos parâmetros. Derivações que contenham ocorrências abertas de parâmetros proposicionais não corresponderão a nenhuma dedução concreta, pois os constituintes da derivação serão formas proposicionais. Essas derivações poderão ser instanciadas em outras derivações pela substituição dos parâmetros proposicionais por proposições, de forma que a derivação resultante venha a ser uma dedução concreta.

Um parâmetro proposicional B cujas ocorrências em uma derivação são todas fechadas será dito **puro** quando houver uma única instância de $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$ da qual o parâmetro é próprio e todas as ocorrências de B na derivação estejam na subderivação subsidiária dessa instância. Caso contrário, diremos que o parâmetro fechado é **impuro**. Observamos que, por razões óbvias, não

[89] Doravante, usaremos a expressão *pM* para dizer que uma ocorrência é a premissa maior de uma regra e *pm* para a premissa menor. Ver Apêndice.

são admissíveis aplicações de $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$ onde a premissa imediata não contenha o parâmetro proposicional próprio.

Há um procedimento que permite transformar qualquer derivação com parâmetros proposicionais impuros em outra derivação tal que todos seus parâmetros fechados sejam puros. O procedimento consiste em tomar uma instância de $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$ mais acima na derivação cujo parâmetro próprio B seja impuro. A seguir, serão substituídas todas as ocorrências do parâmetro B, contidas na subderivação subsidiária de $i\sim$, por um parâmetro novo que não ocorre na derivação. A repetição paulatina desse processo conduzirá a uma derivação em que todos os parâmetros próprios são puros. Como, para aplicar a regra $i\sim \llbracket i\bot \rrbracket$, é exigido que o parâmetro não ocorra nas suposições abertas da subderivação subsidiária, a substituição proposta não afetará nenhuma suposição aberta da derivação.

Para os sistemas lógicos a serem futuramente definidos, o requisito fundamental de correção formal a ser exigido será o de que jamais ocorra uma situação como aquela denotada pela condição de aplicabilidade da regra $i\bot$ e tal que, ao mesmo tempo, o conjunto Γ seja vazio. Em outros termos, que jamais tenhamos uma prova de um parâmetro proposicional. Se isso ocorresse, então toda e qualquer fórmula seria demonstrável, pois bastaria substituir o parâmetro proposicional pela fórmula no referido esquema de demonstração.

2.4. Existem Provas Canônicas da Negação?

Embora estejamos assumindo que as derivações em dedução natural elucidam o conceito de conseqüência dedutiva, não significa que o conceito intuicionista de prova canônica ou prova direta tenha que ser descartado.

Para nós, o intuicionismo natural ofereceria uma descrição razoável das provas construtivas no âmbito dos sistemas axiomáticos matemáticos por duas razões principais. Além do fato de que as regras de dedução correspondem bastante bem às práticas de construção em passos imediatos de provas axiomáticas, também a concepção intuicionista acerca das suposições, ou mais precisamente das proposições assumidas, pode ser posta em reta correspondência a certos elementos do arcabouço axiomático, como já vimos.

Um aspecto central do conceito de prova canônica ou de prova direta é o de que seria, em princípio, possível provar qualquer proposição positiva (sem negação), empregando os axiomas ou regras envolvendo proposições básicas seguidas unicamente, se for o caso, de uma seqüência de regras de introdução de constantes lógicas. As regras de eliminação seriam, em tese,

dispensáveis, pois, para toda proposição matemática correta, sempre haveria uma prova que não empregaria regras de eliminação. Vimos acima como essas cláusulas poderiam ser apresentadas, ainda que, no caso da implicação, a condição de introdução fosse uma prova hipotética. Baseado no fato de que as regras de introdução são tais que o valor da conclusão é maior do que o valor da‖s‖ premissa‖s‖ imediata‖s‖[90], as regras de introdução podem ser usadas para propor uma definição indutiva do conceito prova.

Porém, visto que uma prova canônica só contém regras lógicas se elas são regras de introdução, é difícil evitar perguntar o que exatamente ocorreria quando a negação ou o absurdo fosse definido por meio de uma regra de introdução, como aquelas acima apresentadas. O fato é que, em ambas, é requerida uma prova de um parâmetro proposicional. Ou seja, a premissa imediata da regra de introdução seria uma fórmula básica. No caso da negação, em particular, como as condições para a introdução da negação requerem uma dedução hipotética do parâmetro proposicional, a dedução só não conteria regras de eliminação caso a hipótese empregada fosse uma fórmula básica. Assim, seria difícil admitir que a prova da negação de uma fórmula de valor maior que zero fosse uma prova canônica, pois muito provavelmente ela conteria regras de eliminação.

Consideremos a demonstração de *~(0=1∧~0=1)*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[0=1\wedge\sim 0=1]^{1}}{0=1}\,e\wedge e \qquad \dfrac{[0=1\wedge\sim 0=1]^{1}}{\sim 0=1}\,e\wedge d}{C}\,e\sim}{\sim(0=1\wedge\sim 0=1)}\,^{1}\,i\sim$$

Figura I-21

Temos uma dedução do parâmetro proposicional *C* a partir da suposição *0=1∧~0=1*. É difícil imaginar que houvesse outra demonstração da fórmula *~(0=1∧~0=1)* que pudesse ser feita só com o emprego das regras de introdução. De fato, as regras de eliminação na figura acima parecem essenciais à demonstração. Por outro lado, mesmo se supuséssemos que a negação não fosse tomada como primitiva, isto é, que ela fosse, na verdade, definida por meio do absurdo, a introdução da negação ainda requereria a presença de regras de eliminação na demonstração:

[90] Estes colchetes especiais estão sendo usados para indicar uma leitura alternativa.

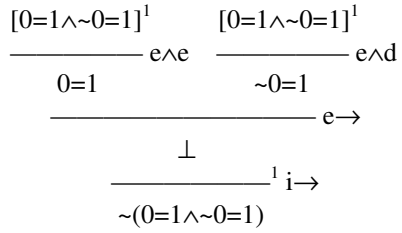


Figura I-22

De forma aparentada ao caso da Figura I-21, na Figura I-22 a condição imediata para a introduzir/concluir uma negação é a de que uma premissa de valor *1* (um), o $\perp$, tenha sido deduzida. Aqui aparece uma diferença importante entre duas alternativas de interpretação para as derivações: que elas sejam consideradas representantes de provas ou de deduções. Obviamente, o desejável é que, em geral, não existam provas estritas seja de um parâmetro proposicional, seja do absurdo. Mas, por outro lado, não vemos por que não poderia haver formas de deduzir, a partir de alguma hipótese, um parâmetro proposicional ou o absurdo.

Por essas razões, parece difícil defender a tese de que uma prova canônica de uma negação da forma $\sim A$ dependeria de uma prova canônica envolvendo a subfórmula imediata A. De fato, a condição requerida para a prova de uma proposição negativa é antes uma **refutação** da própria proposição A, o que pode obrigar-nos a usar regras de eliminação. Em outros termos, é como se, ao querer manter o conceito de prova canônica, fôssemos obrigados a admitir junto um conceito de refutação, o qual, por sua vez, requereria o uso das regras de eliminação na sua definição.[91]

2.5. Refutabilidade e Absurdidade

Se tivéssemos que definir indutivamente um conceito de refutação estrita, representando-o pelo símbolo $\dashv$, o faríamos muito provavelmente através das seguintes cláusulas (sem considerar as cláusulas para a negação):

(i) $\dashv A_1 \wedge A_2$ *caso* $\dashv A_1$ *ou* $\dashv A_2$;

(ii) $\dashv A_1 \rightarrow A_2$ *caso* $\vdash A_1$ *e* $\dashv A_2$;

(iii) $\dashv \forall x A[a/x]$ *caso* $\dashv A[a/\tau]$ *para algum termo* τ;

(iv) $\dashv A_1 \vee A_2$ *caso* $\dashv A_1$ *e* $\dashv A_2$;

(v) $\dashv \exists x A[a/x]$ *caso* $\dashv A$.

---

[91] D. Alves observa que o problema das provas canônicas aplica-se também aos casos onde provamos tautologias como $(A \wedge B) \rightarrow A$, pois obrigatoriamente devemos empregar uma regra de eliminação.

Porém, essa definição de refutabilidade requereria que usássemos como conceito concomitante, ou talvez mais primitivo, o conceito de prova ou de provabilidade, já que, na cláusula *(ii)*, ele se faz necessário. No entanto, se admitíssemos uma definição do conceito de refutabilidade no qual pudéssemos fazer uso de hipóteses, parece-nos poderíamos oferecer uma definição inobjetável (as expressões da forma $\Gamma \dashv\Vdash A$ a seguir devem deve ser lidas como "*A* seja/será refutável se supusermos Γ"):

Definição I-3 - Sejam Γ e Δ listas finitas de fórmulas, definimos a noção de **refutabilidade condicional** *($\dashv\Vdash$) da seguinte forma:*

(i) caso $\Gamma \dashv\Vdash A_1$ ou $\Gamma \dashv\Vdash A_2$, então $\Gamma \dashv\Vdash A_1 \curlywedge A_2$;

(ii) caso $\Gamma \dashv\Vdash A_2$, então $\Gamma, A_1 \dashv\Vdash A_1 \rightarrow A_2$;

(iii) caso $\Gamma \dashv\Vdash A[a/\tau]$, então $\Gamma \dashv\Vdash \forall x A[a/x]$;

(iv) caso $\Gamma \dashv\Vdash A_1$ e $\Delta \dashv\Vdash A_2$, então $\Gamma, \Delta \dashv\Vdash A_1 \curlyvee A_2$;

(v) caso $\Gamma \dashv\Vdash A$ e o parâmetro a não ocorre em Γ, então $\Gamma \dashv\Vdash \exists x A[a/x]$.

Uma outra forma pela qual poderíamos designar esse conceito recém-definido seria o de **rejeitabilidade sob suposição**. Infelizmente, nenhuma das duas formas parece muito elegante.

A noção de refutabilidade é trabalhada por vários autores, dentre os quais destacaremos dois, que examinaremos mais detidamente nesta tese: López-Escobar [Lop72] e Curry ([Cur63], cap. 6). A seguir passamos a examinar as propostas de Curry [Cur63] relativas à negação e ao conceito de refutabilidade, com *insights* valiosos para dedução natural.

2.5.1. Curry e o Conceito de Negação

No sexto capítulo de seu livro, depois de haver introduzido, nos capítulos anteriores, os demais conectivos proposicionais, Curry passa a considerar a negação. Sua investigação dos operadores lógicos é de natureza construtiva, segundo suas palavras ([Cur63], págs. 245 e 246). Isso implica que seu exame seja feito de modo separado, em contraste com a abordagem mais tradicional baseada sobre as tabelas de verdade, onde não há essa separação. Segundo o autor, essa abordagem tradicional trataria todos os operadores lógicos proposicionais no mesmo nível ou, talvez, a negação fosse mesmo considerada mais primitiva, visto que ela é unária e as demais operações são binárias.

Para investigar a negação, Curry faz uso dos sistemas de seqüentes no lugar dos sistemas de dedução natural, embora, nos capítulos precedentes, as demais constantes proposicionais tenham sido apresentadas com regras de dedução natural, em primeiro lugar. Os sistemas de seqüentes para os demais conectivos lógicos foram introduzidos somente após o exame dessas

regras. A diferença para o caso da negação deve-se, segundo o autor, à própria natureza da negação, que seria uma operação distinta das demais ([Cur63], s. 5A3).

Em sua análise preliminar da negação, Curry propõe como primeiro problema saber o que significaria a negação de uma sentença de uma teoria. Como, para ele, negar uma sentença corresponderia a dizer que a sentença é falsa e dado que dizemos que uma sentença de uma teoria dedutiva é verdadeira no caso em que dela haja uma demonstração de acordo com os postulados da teoria, poderia parecer natural dizer que uma sentença é falsa quando tal demonstração não existe. Esta noção de falsidade é denominada por Curry de **não-demonstrabilidade**. Porém, nota ele, esta noção não é construtivamente aceitável, pois não seria invariante sob as extensões da teoria. Uma extensão poderia tornar demonstrável uma sentença que antes era não-demonstrável.

Curry desconsidera aquela primeira possibilidade e passa em seguida a examinar dois tipos de noções que corresponderiam, segundo ele, às intuições associadas à negação. Ele as chamará de **absurdidade** e **refutabilidade**. A primeira seria extensão da segunda.

Uma sentença seria **absurda** relativa a uma teoria ou sistema quando, ao assumir a sua demonstrabilidade, o sistema torna-se trivial. O sistema está sendo considerado **trivial** quando todas as fórmulas são demonstráveis. A outra noção, de **refutabilidade**, será definida a partir de uma base constituída pelas sentenças que ele chama de **contra-axiomas**. Mas, além dos contra-axiomas, outras sentenças serão consideradas refutáveis, na dependência da relação de conseqüência dedutiva[92]. Ou seja, dada uma fórmula *A* qualquer, ela será **refutável** também quando houver uma fórmula *B* que se siga dedutivamente de *A* e tal que *B* seja refutável. Como teremos ocasião de mostrar, essa definição indutiva está subentendida nas cláusulas de refutabilidade condicional que demos mais acima.[93]

Se a falsidade for interpretada como refutabilidade, então asserir ~*A* equivaleria a asserir que *A* é refutável, como nota o autor, e por isso $\dashv\!\vdash A \Leftrightarrow \vdash\!\sim A$, onde $\dashv\!\vdash A$ pode ser lida como *A* é refutável. Assim, torna-se viável uma redução do número de conceitos primitivos, na medida em que o conceito de conseqüência dedutiva seria suficiente para determinar quais fórmulas não-básicas seriam consideradas refutáveis.

A primeira proposta de interpretação da negação que o autor aborda por meio dos sistemas de seqüentes é justamente a da refutabilidade. Usando o símbolo $\Vdash$, se os contra-axiomas

---

[92] Curry emprega o símbolo $\Vdash$ para representar os seqüentes. Ele interpreta esse símbolo como um representante para o conceito de dedutibilidade, ou, para usar os termos que propusemos acima, para o conceito de conseqüência dedutiva.

[93] Naturalmente, nesse caso, as regras de eliminação desempenham um papel importante, pois, se de uma fórmula de valor maior que zero concluímos, por meio de uma cadeia de regras de eliminação, um determinado contra-axioma de valor zero, então é porque a fórmula inicial seria refutável, nos termos de Curry.

de uma teoria fossem $F_1,F_2,...,F_n$, então formalmente os expressaríamos como $\vdash\sim F_i$. Em seguida, a regra para gerar refutabilidade poderia ser expressada da seguinte forma:

$$\frac{A\vdash B \quad \vdash\sim B}{\vdash\sim A}$$

Figura I-23

Essa regra é **caso particular** de *reductio*, a qual, muitas vezes, é tida como uma regra de introdução da negação. Em forma de regra para seqüentes, ela pode ser apresentada como a seguir:

$$\frac{\Gamma,A\vdash B \quad \Gamma,A\vdash\sim B}{\Gamma\vdash\sim A}$$

Figura I-24

A diferença entre a formulação de *reductio* na Figura I-24 e na Figura I-7 é irrelevante no contexto: numa o símbolo ∇ representa o fato de que tenha sido mostrada a dedução; e na outra, o símbolo $\vdash$ representa a relação de dedutibilidade entre as proposições. Curry proporá como regra geradora para a definição da refutabilidade exatamente a regra da Figura I-24 ([Cur63], pág. 258), pois ele observa que qualquer inferência da forma abaixo

$$\frac{\Gamma,A\vdash B \quad \vdash\sim B}{\Gamma\vdash\sim A}$$

Figura I-25

poderia ser efetuada com a regra da Figura I-24, já que o cálculo de seqüentes admite a introdução de fórmulas arbitrárias do lado esquerdo do símbolo $\vdash$, por enfraquecimento. Ou seja, é possível obter o seqüente premissa $\Gamma,A\vdash\sim B$, a partir do seqüente premissa $\vdash\sim B$.

Contudo, há que observar, na inferência da Figura I-25 o seqüente premissa esquerdo e o seqüente conclusão contêm ambos uma referência às suposições Γ e, assim, a regra da Figura I-23, que retrataria de forma mais justa as intuições elucidatórias de Curry, seria apenas um caso particular da regra da Figura I-25. É certo que, na medida em que o conceito de conseqüência dedutiva é pensado de forma generalizada, não haveria maior problema em adotar a regra da Figura I-24. Porém, registramos que, afinal, a noção de refutabilidade que o autor oferece acaba por receber uma outra interpretação (!), levemente distinta daquela que havia sido intuitiva e heuristicamente proposta, pois também passaria a fazer sentido dizer que uma fórmula é condicionalmente refutável, ou seja, que ela é refutável sob um conjunto de suposições Γ, o que

não havia sido notado antes. Desse modo, a definição de Curry resultará em cláusulas equivalentes à Definição I-3 que demos acima.

A regra da Figura I-24 pode ser simplificada quando a fórmula B é um dos F_i's:

$$\frac{\Gamma, A \Vdash F_i}{\Gamma \Vdash \sim A}$$

Figura I-26

Segundo Curry, ela poderia ser decomposta nas duas seguintes, chamadas F^* (algo como introdução da falsidade à direita) e N^* (algo como introdução de negação à direita):

$$\frac{\Gamma \Vdash F_i}{\Gamma \Vdash \mathcal{F}}\ F^* \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash \mathcal{F}}{\Gamma \Vdash \sim A}\ N^*$$

Figura I-27

O símbolo $\mathcal{F}$ nas regras acima poderia ser entendido, segundo o autor, como uma sentença que informaria que algum contra-axioma foi demonstrado. Assim, $\mathcal{F}$ seria uma nova primitiva. Na verdade, como já sabemos, $\mathcal{F}$ funciona da mesma forma que $\bot$.

Ao ler o texto de Curry, a impressão que fica é a de que o recurso ao símbolo $\mathcal{F}$ lhe permite definir a negação de forma independente e, desse modo, N^* poderia ser considerada uma regra de validade universal ([Cur63], pág. 259). Porém, se esse fosse o caso, o símbolo $\mathcal{F}$ seria uma constante lógica *sui generis*, pois dela não teríamos uma explicação em termos de introdução e eliminação, o que nos faria questionar se efetivamente a análise de Curry é construtiva, como ele pretendia. Com efeito, ou bem todas as constantes lógicas podem ser elucidadas sob esse paradigma, ou o paradigma é irrelevante para a elucidação das constantes lógicas, ou $\mathcal{F}$ não é uma constante lógica. Em outros termos, a forma pela qual ele propõe que se defina a negação dependeria do significado do símbolo $\mathcal{F}$, o qual dependeria dos contra-axiomas específicos da teoria, segundo a regra F^*. Não que a idéia subjacente não seja, em alguma medida, adequada, mas a forma de apresentar a proposição $\mathcal{F}$ acaba por fazer o significado de $\mathcal{F}$ depender inteiramente da teoria que está sendo formalizada. Assim, o mesmo símbolo $\mathcal{F}$, em duas teorias diferentes, deveria ter significados diferentes, pois os contra-axiomas de uma e outra seriam diferentes.

A seguir, o autor observa que, quando a negação de uma fórmula for definida como $\sim A \equiv A \rightarrow \mathcal{F}$, a regra N^* seria nada mais que um caso particular da regra de introdução da implicação à direita de $\Vdash$. Por conseguinte, já que a negação está sendo examinada com o cálculo

de seqüentes, deveria haver uma regra **N* de introdução da negação à esquerda de ⊩, obtida com base na regra de introdução de implicação à esquerda de ⊩, tal que ela seria derivável levando em conta que Γ,$\mathcal{F}$⊩$\mathcal{F}$ é válido, conforme a seguinte ilustração:

$$\begin{array}{ccccc} \text{*P} & & & & \text{*N} \\ \dfrac{\Gamma \Vdash A \quad \Gamma, B \Vdash C}{\Gamma, A \to B \Vdash C} & \rightsquigarrow & \dfrac{\Gamma \Vdash A \quad \Gamma, \mathcal{F} \Vdash \mathcal{F}}{\Gamma, \sim A \Vdash \mathcal{F}} & \rightsquigarrow & \dfrac{\Gamma \Vdash A}{\Gamma, \sim A \Vdash \mathcal{F}} \end{array}$$

Figura I-28

Segundo Curry, a **refutabilidade simples** ou ainda a **negação minimal** seriam definidas por meio da regra *F** junto com a definição da negação como implicação de $\mathcal{F}$. Alternativamente, também seria possível caracterizar a refutabilidade simples a partir das regras *F**, *N** e **N*.[94]

Retomando a crítica que fazíamos, aquilo que nos parece duvidoso na forma de apresentar a refutabilidade é a proposta de uso do símbolo $\mathcal{F}$. É difícil evitar a impressão de que $\mathcal{F}$ representaria um determinado papel semântico não claramente elucidado no sistema. Se ele não fosse um símbolo lógico, não haveria necessidade de apresentá-lo por meio de regras de introdução ou de eliminação. Nesse caso, ou ele seria uma constante extralógica ou seria uma espécie de parâmetro proposicional. Nesse último caso, com certeza, ele não seria um parâmetro proposicional normal, na medida em que não pode ser substituído livremente por outras proposições. Só poderia ser substituído por contra-axiomas e, assim, na verdade, seria uma espécie de parâmetro para proposições falsas. Por outro lado, considerá-lo como constante proposicional extralógica nos parece estranho, pois seu significado variaria de teoria para teoria, sem contar o fato de que não saberíamos exatamente que proposição extralógica ela seria, já que ela não tem sujeito nem predicado. Na verdade, originalmente, esse símbolo foi proposto como uma constante individual, um nome para o objeto *o falso*, *à la* Frege-Church, e esse ponto de vista é questionável[95].

Uma forma diferente de representar aquilo que Curry chama de refutabilidade simples consistiria em empregar os parâmetros proposicionais conforme nossas propostas de elucidação da negação via regras de dedução natural acima. Para indicar que uma fórmula básica *F* seria um contra-axioma, poderíamos apresentá-la na forma *F*⊩*C*, onde *C* é um parâmetro proposicional. Ou seja, poderíamos ler *F*⊩*C* como "*F é refutável*"[96]. Além disso, como a refutabilidade simples

---

[94] O autor chama o sistema de seqüentes que contém essas regras de sistema LM ou sistema de Johanson [Cur63], pág. 259.
[95] Ver [Sim79], às págs. 142 e ss.
[96] Poderíamos também lê-la como *F é impossível*, coerentemente com o que dissemos antes.

de uma fórmula *A* qualquer é obtida mostrando que *B* é conseqüência dedutiva de *A* (*A*⊩*B*) quando *B* é ela mesma refutável (*B*⊩*C*), então, usando a idéia acima, a refutabilidade de *A* (*A*⊩*C*) seria resultante da composição das duas relações de conseqüência dedutiva (*A*⊩*B* e *B*⊩*C*). Adotando essa representação dos contra-axiomas, o operador de negação pode, inclusive, ser dispensado.

Assim, se ao definir a refutabilidade simples empregássemos, como conceito primitivo, somente o conceito de conseqüência dedutiva, obteríamos uma razoável simplificação do arcabouço conceitual. Daria, inclusive, para manter o símbolo $\mathcal{F}$, formulando regras de introdução e de eliminação para $\mathcal{F}$ em seqüentes, como abaixo, onde *B* e *C* devem ser parâmetros proposicionais e *B* não deve ocorrer em Γ:

$$\frac{\Gamma \Vdash B}{\Gamma \Vdash \mathcal{F}}\ \mathcal{F}* \qquad \frac{\Gamma \Vdash \mathcal{F}}{\Gamma \Vdash C}\ *\mathcal{F}$$

Figura I-29

Claro, tais regras são, na verdade, uma formulação levemente distinta das mesmas cláusulas de definição do conceito de conseqüência dedutiva para o absurdo, que apresentamos acima. Do ponto de vista de dedução natural, a negação minimal de Curry poderia ser entendida como resultante de uma restrição sobre a regra $e\bot$, cuja conclusão deveria ser um parâmetro proposicional, já que $*\mathcal{F}$ tem essa restrição. Trataremos dessa alternativa com mais detalhes no próximo capítulo.

A seguir, com base na noção de refutabilidade simples, Curry apresenta uma nova noção de negação, adicionando a seguinte regra:

$$\frac{Fj \qquad \Gamma \Vdash \mathcal{F}}{\Gamma \Vdash A}$$

Figura I-30

Quando *A* é uma fórmula qualquer, essa regra é o tradicional princípio de *ex falso quodlibet*. Ela é uma regra de eliminação do símbolo $\mathcal{F}$, embora, *a priori*, pela sua forma, fosse difícil julgar isso. Essa regra é idêntica à cláusula *(xiv)* da definição do conceito de conseqüência dedutiva para a constante de absurdo[97] e essa cláusula corresponde à regra de eliminação do

[97] Definição I-2 estendida na secção 2.2

absurdo em dedução natural. Curry chamará de **absurdidade simples** ou **negação intuicionista** a noção resultante da extensão da refutabilidade simples pela adição dessa regra. Em dedução natural, obteríamos aquilo que Curry está chamando de negação intuicionista usando a regra *E⊥*, admitindo, assim, que qualquer fórmula possa ser conclusão da regra de eliminação.[98] Relembramos que, do ponto de vista intuicionista, uma fórmula é refutável se da sua asserção deduzimos ou provamos um absurdo ou uma contradição.

Do nosso ponto de vista, com a adição da regra *Fj* ganharíamos alguma informação adicional acerca do significado da primitiva $\mathcal{F}$, pois pelo menos saberíamos que conseqüências podem ser extraídas da "proposição". Ainda não poderíamos dizer que $\mathcal{F}$ seria um símbolo lógico perfeito, pois, embora exista uma regra de eliminação de $\mathcal{F}$, não existiria uma regra de introdução, dado que *F**, na Figura I-27, cumpre um papel de introdução idiossincrático a uma teoria específica. Justamente por essa razão, o significado de $\mathcal{F}$ permanece dependente do contexto teórico específico em que ele é empregado. É como se as regras de introdução fossem regras extralógicas, explicitadas na parcela envolvendo as proposições básicas da teoria, e a regra de eliminação fosse explicitada na parcela puramente lógica da teoria.

Além dessas duas noções, negação minimal e negação intuicionista, o autor completa o quadro com as noções de **negação estrita**, **refutabilidade clássica** e **negação clássica**. Não trataremos desses conceitos agora, reservando espaço para apresentá-los no próximo capítulo, quando mostraremos como podemos lidar com eles usando as regras de dedução natural.

Após o exame das regras de seqüentes para a negação, Curry faz a viagem de volta e oferece regras de dedução natural que correspondem às regras de seqüentes para a negação. Essas regras são basicamente as mesmas que Gentzen havia oferecido em 1935 ([Gen35], pág. 77). O único acréscimo é o das regras para introduzir $\mathcal{F}$, ou seja, as regras que definiriam quais seriam os contra-axiomas (as regras *Fi*):

Ni	Ne	Fi	Nj
$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \nabla \\ \mathcal{F}\end{array}}{\sim A}\,i$	$\dfrac{A \quad \sim A}{\mathcal{F}}$	$\dfrac{F_i}{\mathcal{F}}$	$\dfrac{\mathcal{F}}{B}$

Figura I-31

[98] Como veremos, já seria suficiente usar a regra de *e⊥*.

Em nossa apresentação, procuramos evitar, num primeiro momento, o uso do símbolo para a falsidade ou absurdo. Só depois de haver elucidado a negação, passamos a considerar este símbolo e a oferecer uma elucidação dele. Num certo sentido, Curry também teve preocupações de natureza similar, pois ele considerou como evitar o símbolo no cálculo de seqüentes.

Para definir a negação a partir de uma lista de contra-axiomas sem empregar $\mathcal{F}$, bastaria usar seqüentes vazios à direita, como é tradicional. Assim, se a fórmula F fosse um contra-axioma, poderíamos representá-lo assim: $F\Vdash$. Em seguida, como também vimos, dado que é possível formular regras de introdução da negação à esquerda e à direita do símbolo $\Vdash$ para o cálculo de seqüentes, estaria demonstrado que podemos tratar da negação sem o símbolo $\mathcal{F}$. O problema está agora em traduzir esse tratamento para as regras de dedução natural.

Curry havia tomado o sistema de seqüentes como ponto de partida para a elucidação da negação e, ao buscar oferecer regras de dedução natural que não empregassem o símbolo $\mathcal{F}$, ele fatalmente iria se deparar com o problema de representar o seqüente vazio à direita em dedução natural. Sua solução consistia em substituir o símbolo para falsidade pela negação de algum teorema. Isso faz sentido, pois Curry considera que a negação representa a refutabilidade e, assim, a negação de um teorema tem de ser uma fórmula refutável. De fato, ele mostra que $\Gamma\Vdash$ e $\Gamma\Vdash\sim T$ são seqüentes equivalentes, quando T é demonstrável. Mostra também que $\Gamma\Vdash$ e $\Gamma\Vdash\mathcal{F}$ são equivalentes. Dessa forma, $\mathcal{F}$ poderia ser substituído por $\sim T$, ou seja, poderia ser substituído por $\sim(A\rightarrow A)$, por exemplo.

Adotando essa perspectiva, o papel das regras de dedução natural *Ne* e *Ni* na Figura I-31 acima, onde $\mathcal{F}$ tenha sido substituído por $\sim(A\rightarrow A)$, poderia ser compensado e resumido pela regra ***Nm*** de Curry:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}B & \begin{array}{c}[A]\\ \nabla \\ \sim B\end{array}\end{array}}{\sim A}\ Nm$$

Figura I-32

A regra *Nm* parece-se com uma regra de introdução da negação no estilo de *reductio ad contradictione* e, de fato, *Nm* é caso particular de *reductio ad contradictione*. Além disso, a regra *reductio* é também derivável de *Nm*, desde que, é claro, dispuséssemos de $i\rightarrow$ e $e\rightarrow$:

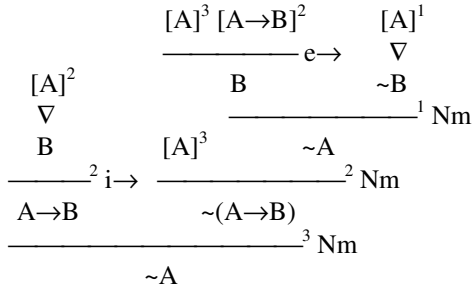


Figura I-33

Uma outra forma de ler a regra *Nm* consiste em observar que, segundo ela, o fato de *~B* ser conseqüência dedutiva de *A* é condição suficiente para dizer que *~A* é conseqüência dedutiva de *B* e, desse modo, ela seria também uma das formas da contraposição para o conceito de conseqüência dedutiva.

Como observação colateral, notamos que, além de *Nm*, outra forma de regra poderia ser interpretada como uma representação da contraposição:

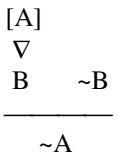


Figura I-34

Esse esquema corresponde ao esquema usado por Curry para definir a noção de refutabilidade simples, representada pela operação de negação dentro do sistema. A regra poderia ser lida como: "*se B for conseqüência dedutiva de A e se B for refutável, concluiremos que A é refutável*". No que diz respeito à relação desse esquema com o esquema *Nm*, *Nm* é uma regra estritamente mais forte, pois o esquema da Figura I-34 não permite derivar *Nm*, embora *Nm* permita derivá-lo, desde que possamos usar $i\rightarrow$ e $e\rightarrow$:

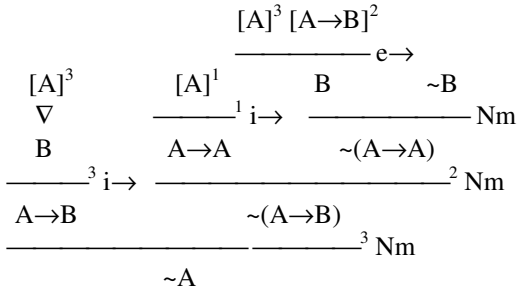


Figura I-35

Também seria possível fazer uma reformulação das regras de dedução natural na Figura I-31. A primeira modificação consistira em usar a fórmula $\sim F_i$ como axioma, ao invés de usar a

regra *Fi*; a segunda, que a regra *Nj* tenha *~T* como premissa imediata. Ou seja, *Nj* seria diretamente a regra que representaria a absurdidade. Desse modo, a refutabilidade poderia ser representada pelo uso da negação. Ela dependeria só dos contra-axiomas, ou axiomas da forma $\sim F_i$, e da regra *Nm*.

Entretanto, há um aspecto problemático nessa última proposta de Curry relativa a *Nm*. As regras *Ni* e *Ne* só serão deriváveis da regra *Nm* quando houver sentenças demonstráveis no sistema. Para que um sistema contenha sentenças demonstráveis, ou ele contém axiomas, ou contém a regra de introdução da implicação. Sem nenhuma delas, não haverá teoremas no sistema e as regras *Ne* e *Ni* já não serão deriváveis de *Nm*.

Diferentemente da regra *Nm*, nossa proposta de elucidação da negação e do absurdo, via regras de introdução e de eliminação, não sofre deste problema. Além disso, para o tratamento da negação, ela admite que, ao invés de ficarmos restritos a uma situação em que, a cada vez, uma única proposição/forma proposicional seja considerada como contra-axioma, todo um complexo de proposições ou formas proposicionais possa ser considerado como impossível ou incompatível, embora nenhuma das proposições/formas proposicionais isoladamente seja um contra-axioma. Lembramos que uma virtual situação Γ, onde Γ é uma lista de fórmulas, será considerada impossível quando dela deduzirmos um parâmetro proposicional que não ocorre nas proposições de Γ. Por exemplo, é impossível que $a=b$ e $a<b$ ao mesmo tempo. Contudo, se seguíssemos as propostas iniciais de Curry para dar uma definição indutiva do conceito de refutabilidade, não teríamos como representar essa incompatibilidade por meio dos contra-axiomas, a não ser que já empregássemos a conjunção na formulação do contra-axioma: $(a=b \wedge a<b)\Vdash$ ou $\Vdash\sim(a=b \wedge a<b)$. Mas, nesse caso, o caráter indutivo da definição do conceito de refutabilidade estaria perdido.

Na verdade, a solução do problema apontado já está ao alcance de Curry com o uso do símbolo $\Vdash$ do cálculo de seqüentes, na medida em que o conceito de impossibilidade poderia ser representado como no exemplo a seguir: $a=b,a<b\Vdash$. Ou seja, embora Curry não tenha empregado, em sua exposição preliminar da negação, o conceito de impossibilidade de uma lista de proposições básicas, preferindo empregar o conceito de contra-axioma, que é demasiadamente estreito, o uso que ele faz dos seqüentes já lhe facultaria representar essas situações impossíveis de que falamos.

Consideramos que uma situação impossível constitui a condição essencial para efetuar uma introdução da negação ou do absurdo. Uma situação impossível é uma situação à qual não corresponde nenhum fato. Em particular, é bastante natural que, sob esta perspectiva, a constante

de absurdo seja interpretada como uma espécie de símbolo de pontuação, que significaria *chegamos ao impossível*.

Os *insights* de Curry são valiosos e, de forma geral, podemos tirar proveito das elucidações que ele propõe. Contudo, acreditamos que o procedimento de Curry de elucidar a negação usando primeiro cálculo de seqüentes e depois dedução natural, invertendo a ordem que ele até então havia seguido para as demais constantes lógicas, não é um procedimento que possa ser considerado necessário. Não só é possível diretamente dar uma caracterização da negação por meio de regras de dedução natural, segundo a dicotomia introduções-eliminações, como fizemos acima, mas também é possível representar os diferentes conceitos de negação que Curry propõe, levando em conta basicamente essas regras, ajuntando-lhes, no máximo, uma regra de dedução indireta. Essa será a nossa tarefa nos dois próximos capítulos.

3. Considerações Finais

No presente capítulo apresentamos uma proposta de elucidação para a negação e o absurdo no âmbito dos sistemas de dedução natural empregando regras de introdução e de eliminação.

O capítulo contém uma discussão acerca dos sistemas de dedução natural e de quais seriam, ao nosso ver, suas características principais, bem como um exame das posições interpretativas relacionadas a eles por aqueles que genericamente chamamos de intuicionistas naturais. Avançamos uma proposta interpretativa alternativa para esses sistemas segundo a qual os objetos alvo da elucidação seriam as relações de conseqüência dedutiva. Desde esse ponto de vista, procuramos analisar as diferenças entre os sistemas dedução natural e de seqüentes como mera diferença de apresentação. Ambos fariam, ao nosso ver, uma apresentação do conceito de conseqüência dedutiva, tal que o cálculo de seqüentes constituiria uma apresentação assercional e os sistemas de dedução natural uma apresentação representacional.

Finalizamos o capítulo com o exame das propostas de Curry para a elucidação da negação, já que esse autor trata do tema com profundidade, fazendo uso dos sistemas de seqüentes e de dedução natural.

Capítulo II Sistemas Lógicos de Dedução Natural – Parte I

Neste e no próximo capítulo, apresentaremos os sistemas de dedução natural usualmente chamados de **Minimal**, **Intuicionista** e **Clássico**. Também apresentaremos algumas de suas variantes. Iniciaremos com o **Sistema Minimal** e variantes. Em seguida, apresentaremos uma série de sistemas envolvendo regras de dedução indireta e que não têm ainda a mesma potência dedutiva da lógica clássica. No próximo capítulo, introduziremos aquela que nos parece ser a forma adequada de apresentar o **Sistema Intuicionista** em dedução natural. Depois, passaremos à apresentação e análise de algumas formas distintas de definir o **Sistema Clássico** com o conjunto completo de operadores lógicos mais dedução indireta. Finda essa exposição, passaremos a considerar alguns sistemas que podem ser classificados como construtiveis, extensões da lógica intuicionista. A extensão será obtida pela adjunção de formas restritas de dedução indireta. Nossa tese é a de que é possível argumentar pela admissibilidade dos sistemas estendidos de um ponto de vista construtivo, ao menos na mesma medida em que um argumento similar é sustentado para uma formulação especial da lógica clássica feita por Prawitz ([Pra71], págs. 242-245). Finalmente, faremos algumas considerações acerca das regras básicas de uma teoria, preocupando-nos, em especial, com os conceitos de provabilidade e refutabilidade.

Dada a extensão do material, dividiremos a apresentação dos sistemas adotando o seguinte critério: neste capítulo, tratamos dos sistemas que não envolvem o princípio de *ex falso quodlibet*; no próximo, trataremos dos sistemas que envolvem alguma forma de *ex falso quodlibet*.

No capítulo anterior, fizemos uma análise com algum detalhe das regras para a negação. Neste e no próximo, a definição dos sistemas procurará evidenciar, adicionalmente, tanto o papel das regras de dedução indireta na definição dos sistemas quanto o papel do conceito de absurdidade. A regra *P*, que já apresentamos rapidamente, é uma dessas regras. Ao examinar as regras de dedução indireta, poderemos completar a investigação elucidatória no tocante aos usos da negação que já havíamos começado a fazer no capítulo anterior com as regras de introdução e eliminação.

Para dois sistemas de dedução natural $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ quaisquer, diremos que o sistema $\mathcal{A}$ é **subsistema** do sistema $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) se e somente se toda regra do sistema $\mathcal{A}$ é também uma regra do sistema $\mathcal{B}$, ou caso particular de uma regra de $\mathcal{B}$. Uma regra é **caso particular** de outra caso ela seja instância da outra, mas não vice-versa[99]. Seguir-se-ia que toda derivação de $\mathcal{A}$ seria derivação de $\mathcal{B}$, caso $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Diremos que uma regra é **derivável** em um sistema $\mathcal{A}$ quando existe, no sistema $\mathcal{A}$, uma derivação que assuma unicamente as condições de aplicabilidade da regra em questão e cuja conclusão seja exatamente a conclusão dessa regra. Diremos também que uma fórmula é **derivável** em um sistema $\mathcal{A}$, a partir de um conjunto de fórmulas Γ, quando essa fórmula é conseqüência dedutiva das suposições em Γ. Diremos que uma fórmula é **demonstrável** em um sistema $\mathcal{A}$ quando ela é derivável e não é preciso nenhuma suposição para derivá-la, ou ainda, costuma-se dizer, quando ela é derivável a partir do conjunto vazio de fórmulas. Diremos que o sistema $\mathcal{A}$ é **derivável** no sistema $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$) se e somente se toda regra do sistema $\mathcal{A}$ é derivável em $\mathcal{B}$. Caso isso ocorra, a cada derivação de $\mathcal{A}$ haverá uma derivação correlata em $\mathcal{B}$. Além disso, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Em ambos os casos, se uma derivação π do sistema $\mathcal{A}$ tem conclusão A e conjunto de suposições abertas Γ, então existe uma derivação π' em $\mathcal{B}$ que tem a mesma conclusão A e o mesmo conjunto de suposições abertas Γ. Diremos que um sistema $\mathcal{A}$ é a **extensão dedutiva** de um sistema $\mathcal{B}$ quando qualquer fórmula derivável em $\mathcal{B}$ a partir de Γ também é derivável em $\mathcal{A}$ a partir de Γ.

Um conjunto de fórmulas Γ será **trivial** com respeito a um sistema $\mathcal{A}$ quando toda e qualquer fórmula for derivável a partir do conjunto de fórmulas Γ em $\mathcal{A}$. Quando qualquer conjunto de fórmulas Γ for trivial com respeito a um sistema de regras $\mathcal{A}$, diremos que o sistema $\mathcal{A}$ é **trivial**. Em particular, se qualquer fórmula for demonstrável com respeito a um determinado sistema de regras, então esse sistema de regras será **trivial**. Naturalmente, o requisito formal de adequação mínima para os nossos sistemas é o de que eles não sejam triviais. Os sistemas estão projetados de modo a estabelecer uma distinção entre proposições corretas e proposições incorretas. Um sistema em que todas elas sejam demonstráveis é, desde esse ponto de vista, inútil.

Em geral, quando comparamos dois sistemas lógicos, procuramos determinar o que ocorre com a relação de dedutibilidade *vis-à-vis* à sua congênere do outro sistema. Sob o ponto de vista

---

[99] Para um esclarecimento acerca da noção de instância, ver o Apêndice.

de dedução natural, essa relação é examinada com maior riqueza de detalhes, pois passamos também a considerar conceitos mais finos envolvendo as próprias derivações. Com respeito à dedutibilidade dentro de um sistema, dados dois sistemas distintos $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, diríamos que o sistema $\mathcal{S}_2$ preservaria a dedutibilidade do sistema $\mathcal{S}_1$ se ele fosse extensão dedutiva de $\mathcal{S}_1$. Poderíamos dizer, nesse caso, que a **dedutibilidade** em $\mathcal{S}_2$ compreende a dedutibilidade em $\mathcal{S}_1$ ($\mathcal{S}_1 \measuredangle \mathcal{S}_2$). A relação entre as noções de subsistema, derivabilidade entre sistemas e dedutibilidade entre sistemas é dada da seguinte forma: $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1 \measuredangle \mathcal{S}_2$.

Diremos que um sistema $\mathcal{S}_2$ é uma **extensão conservativa** do sistema $\mathcal{S}_1$ quando, para qualquer conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{A\}$ do sistema $\mathcal{S}_1$, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_2} A$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_1} A$. O conceito é muito importante e duas das conseqüências que decorrem da conservatividade são a preservação da não-trivialidade e a "preservação" da incompletude entre os sistemas – $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}_2} A$ e $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}_2} \sim A$, caso $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}_1} A$ e $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}_1} \sim A$.

1. Sistemas Minimais sem Dedução Indireta

Os sistemas chamados minimais não contêm o princípio de *ex falso quodlibet* e, embora vários sistemas também tenham essa característica, selecionaremos somente alguns, sobretudo aqueles que propiciam a discussão dos conceitos de rejeitabilidade, refutabilidade, provabilidade e conseqüência dedutiva.

1.1. O Sistema Minimal $\mathcal{M}_{\rightarrow}$

O **Sistema Minimal para a Implicação** ($\mathcal{M}_{\rightarrow}$) só contém as regras de introdução e eliminação para o operador lógico de implicação. O interesse desse sistema reside no fato de que a cada derivação corresponde um único λ-termo no assim chamado *λ-cálculo com tipos simples*. Com efeito, as derivações podem ser vistas como árvores de construção dos λ-termos desse sistema. Essa interpretação constitui uma parcela do que se costuma chamar de isomorfismo Curry-Howard[100].

Notamos também que o sistema resultante da adição da regra *Nm* a $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ corresponderia, grosso modo, ao sistema que, historicamente, Kolmogorov ([Kol25], págs. 419-421) propunha

[100] Para maiores detalhes, ver [How69]

como elucidação para uma lógica segundo os princípios intuicionistas de Brouwer, já que a regra *Nm* é equivalente em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ à regra *reductio ad contradictione*.[101]

1.2. O Sistema Minimal

O **Sistema Minimal** ($\mathcal{M}$) é formado pelas regras $i\wedge$, $e\wedge$, $i\vee$, $e\vee$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$, $e\forall$, $i\exists$ e $e\exists$.[102] Se assumirmos que as regras de introdução e de eliminação definem o uso de certa constante lógica em um sistema, então no presente sistema o símbolo $\bot$ não poderia ser entendido como uma constante lógica, pois faltariam as regras de seu uso. Assim sob aquela suposição, o absurdo estaria indefinido neste sistema. O mesmo ocorreria com a negação[103].

1.2.1. O que Podemos Representar com o Sistema Minimal

As derivações do sistema minimal podem, *a priori*, ser interpretadas de distintas formas. No capítulo anterior, examinamos a interpretação intuicionista segundo a qual as derivações representariam provas ou, eventualmente, provas hipotéticas. Propusemos uma interpretação alternativa em que as derivações seriam uma forma de mostrar a relação de conseqüência dedutiva entre proposições/formas proposicionais. Para nós, uma derivação mostrando $\Gamma\Vdash A$ seria uma forma de mostrar que A é conseqüência dedutiva de Γ. Além disso, caso A também fosse um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, poderíamos dizer que a virtual situação Γ é impossível ou, ainda, que as proposições ou formas proposicionais contidas em Γ são incompatíveis.

No capítulo anterior, definimos o conceito de refutabilidade condicional e vimos que ele corresponde, em linhas gerais, ao conceito de refutabilidade simples de Curry. A expressão *refutabilidade condicional* pode parecer, à primeira vista, um pouco estranha. Todavia, há razões para propor a qualificação de "*condicional*", pois uma parcela significativa dos lógicos estaria

---

[101] Contudo, historicamente, não foi essa a proposta que prevaleceu como elucidação da lógica intuicionista.

[102] Na literatura, usualmente, o sistema minimal contempla também regras para a negação. Eventualmente, a negação pode vir definida a partir da constante de absurdo, sem que existam regras específicas para essa constante. Troelstra e Schwichtenberg definem a lógica minimal com as mesmas regras que demos acima e adicionam a seguinte observação ([Tro96], pág. 31): "*Note that* $\bot$ *has not been mentioned in any of the above rules. In fact it behaves in minimal logic as an arbitrary unprovable propositional constant.*". Assim, seguindo o exemplo desses autores, decidimos nomear esse sistema como sistema minimal. A seguir faremos algumas variações sobre ele. Observamos de passagem que a descrição de Troelstra & Schwichtenberg cai sob a crítica de Curry que observa que a noção de negação como não-demonstrabilidade é indesejável, pois não é construtivamente aceitável. Ver Capítulo I2.5.1.

[103] Mesmo se considerássemos que a definição da negação faz parte do sistema – $\sim A \equiv_{df} A\rightarrow\bot$ –, a constante estaria incompletamente definida, já que $\bot$ está indefinido.

predisposta a entender que *ser refutável* é o mesmo que *ser demonstradamente falso*, identificação que gostaríamos de evitar.

Mostramos, a seguir, que as cláusulas da Definição I-3 para refutabilidade condicional correspondem a certas derivações em dedução natural, quando representamos o conceito de refutabilidade condicional por meio da noção de impossibilidade via uso de parâmetros proposicionais.

Caso as proposições de um conjunto de suposições Γ sejam incompatíveis entre si, ou seja, caso a situação Γ seja impossível, diremos que ***B* é condicionalmente refutável sob Δ**, quando $\Gamma=\Delta\cup\{B\}$. Essa definição nos permite mostrar que cada uma das cláusulas da definição de refutabilidade condicional − Definição I-3 − corresponderia a um esquema de derivação. Nos esquemas a seguir, C é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, não ocorre em Δ, não ocorre em A_1 nem em A_2. Além disso, o parâmetro a não ocorre em C nem em Γ:

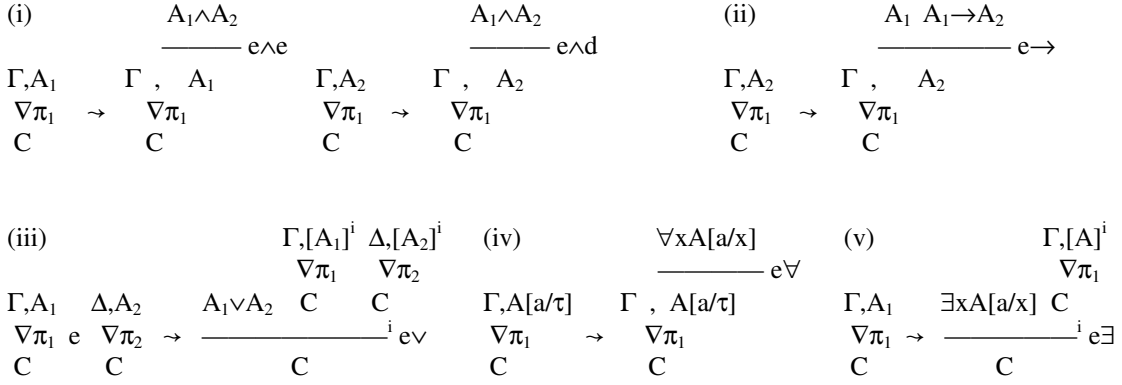


Figura II-1

A definição clausal da refutabilidade condicional corresponderia, desse modo, ao emprego das regras de eliminação de dedução natural no topo de uma derivação tal que a *pM* faça parte das ocorrências topo da nova derivação.

Entretanto, existe a possibilidade de que a nossa interpretação seja rejeitada e que se assuma que a Definição I-3 seria, na verdade, a definição de uma noção primitiva de refutabilidade. Nesse caso, as cláusulas deveriam ser interpretadas como uma apresentação das condições para "introduzir" a refutabilidade de uma fórmula mais complexa a partir da refutabilidade de fórmulas mais simples. Sob essa hipótese, o passo seguinte necessariamente deveria ser o de aplicar o paradigma de Gentzen ([Gen35], pág. 80):

> *As introduções representas, como se fossem, as 'definições' do símbolos envolvidos, e as eliminações não são mais, no fim das contas, do que as conseqüências dessas definições.*[104]

[104] *The introductions represent, as it were, the 'definitions' of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis, than the consequences of theses definitions.*

Infelizmente, não será possível formular cláusulas de eliminação da forma como o paradigma de Gentzen requereria. Como vemos abaixo, as cláusulas *(vii)* e *(viii)* mostram que a noção de refutabilidade condicional (ou hipotética) não poderia ser considerada uma noção primitiva, à medida que outra noção seria requerida na formulação das cláusulas de eliminação. A formulação adequada das cláusulas requereria a noção de conseqüência dedutiva ou a noção de prova hipotética:

(vi) caso $\Gamma \dashv A_1 \wedge A_2$, *então* $\Gamma, A_1 \dashv A_2$

caso $\Gamma \dashv A_1 \wedge A_2$, *então* $\Gamma, A_2 \dashv A_1$;

(vii) caso $\Gamma \dashv A_1 \rightarrow A_2$ *e* $\Delta, A_1, D \Vdash A_2$ *então* $\Gamma, \Delta \dashv D$;

(viii) caso $\Gamma \dashv \forall x A[a/x]$ *e* $\Delta, D \Vdash A$ *tal que o parâmetro a não ocorre em* Δ *e não ocorre em D, então* $\Gamma, \Delta \dashv D$;

(ix) caso $\Gamma \dashv A_1 \vee A_2$, *então* $\Gamma \dashv A_1$;

caso $\Gamma \dashv A_1 \vee A_2$, *então* $\Gamma \dashv A_2$;

(x) caso $\Gamma \dashv \exists x A[a/x]$, *então* $\Gamma \dashv A[a/\tau]$.[105]

Mas as cláusulas acima são corretas, se as olharmos como uma leitura das derivações em dedução natural. Podemos mostrar que, para cada uma delas, existe um esquema de dedução natural que a representa, conforme o quadro abaixo, onde C é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, não ocorre em Δ, não ocorre em A_1 nem em A_2. Além disso, o parâmetro a não ocorre em C nem em Γ:

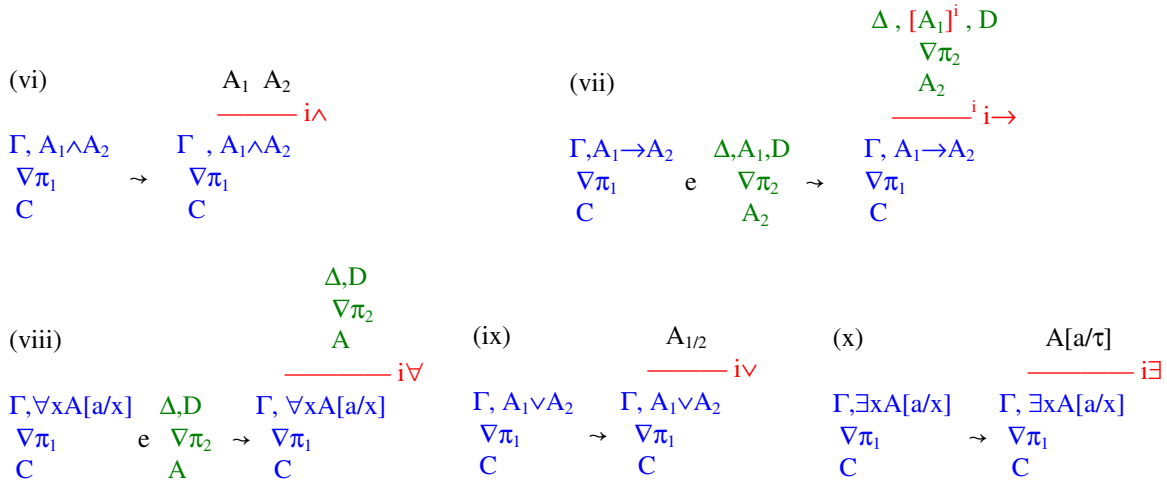


Figura II-2

[105] Uma expressão da forma $\Gamma \dashv$ significará que um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ foi derivado de Γ.

Basicamente, cada cláusula corresponderia ao emprego de uma regra de introdução no topo da derivação. Contudo, em duas situações precisaríamos contar com a derivabilidade de uma conclusão a partir de hipóteses, para poder aplicar a regra de introdução no topo (aquelas situações em que a subderivação está marcada em verde).[106]

Se, como parece ser o caso, a tentativa de tratar a noção de refutabilidade condicional como uma noção primitiva não funciona, uma última conjectura poderia ser examinada, aquela que corresponde à possibilidade de definir os conceitos de prova/provabilidade estrita e de refutação/refutabilidade estrita como conceitos de igual nível, tal que suas definições sejam feitas de modo concomitante. O interesse em examinar uma possibilidade como essa reside também na expectativa de que, talvez assim, não haja necessidade de considerar derivações subsidiárias nas regras para as constantes lógicas e, em particular, ao procurar elucidar as conexões lógicas entre proposições/formas proposicionais, talvez seja possível desconsiderar o conceito de hipótese como conceito primitivo. Aliás, caso isso seja possível, os sistemas de dedução natural deveriam ser considerados como uma variante irrelevante dos sistemas logístico-axiomáticos.

Uma definição concomitante dos conceitos estritos de provabilidade e de refutabilidade provavelmente seria efetuada da seguinte forma:

Provabilidade	*Refutabilidade*
(i) caso $\vdash A_1$ *e* $\vdash A_2$*, então* $\vdash A_1 \wedge A_2$*;*	*(i.i) caso* $\dashv A_1$*, então* $\dashv A_1 \wedge A_2$*;*
	caso $\dashv A_2$*, então* $\dashv A_1 \wedge A_2$*;*
(ii) caso $\dashv A_1$*, então* $\vdash A_1 \rightarrow A_2$*;*	*(ii) caso* $\vdash A_1$ *e* $\dashv A_2$*, então* $\dashv A_1 \rightarrow A_2$*;*
caso $\vdash A_2$*, então* $\vdash A_1 \rightarrow A_2$*;*	
(iii) caso $\vdash A$*, então* $\vdash \forall x A[a/x]$*;*	*(iii) caso* $\dashv A[a/\tau]$*, então* $\dashv \forall x A[a/x]$*;*
(iv) caso $\vdash A_1$*, então* $\vdash A_1 \vee A_2$*;*	*(iv) caso* $\dashv A_1$ *e* $\dashv A_2$*, então* $\dashv A_1 \vee A_2$*;*
caso $\vdash A_2$*, então* $\vdash A_1 \vee A_2$*;*	
(v) caso $\vdash A$*, então* $\vdash \exists x A[a/x]$*.*	*(v) caso* $\dashv A$*, então* $\dashv \exists x A[a/x]$*.*

Notamos que essas cláusulas proposicionais funcionam de modo muito similar às linhas das tabelas de verdade, quando lemos os símbolos $\vdash$ e $\dashv$ como verdade e falsidade, respectivamente. Por outro lado, muitas vezes, mas nem sempre, as cláusulas de provabilidade acima podem ser lidas como regras de preservação da verdade, e as regras de refutabilidade

[106] Do nosso ponto de vista, isso ocorre porque as regras de introdução devem ser entendidas como regras de dedução e não como regras de inferência. Para uma apresentação desses dois conceitos, ver o Apêndice.

podem ser lidas como regras de preservação da falsidade. Obviamente, essa leitura não é aplicável às cláusulas para a implicação, pois, na cláusula *(ii)* para a refutabilidade, é preciso que uma premissa seja falsa e a outra verdadeira.

É preciso notar que existe um problema de adequação com as cláusulas para a implicação dadas acima. Elas só refletiriam todas as condições que consideraríamos suficientes para obter a provabilidade ou a refutabilidade de $A_1 \rightarrow A_2$ caso fosse válido o princípio de que toda fórmula é provável ou refutável. Mas esse é, evidentemente, um tipo de compromisso que não podemos assumir, porque os parâmetros nesta tese estão sendo usados de modo algébrico. Existem fórmulas que não são refutáveis, nem prováveis, por exemplo, $a=b$. Também, de modo geral, vários construtivistas não assumiriam a validade irrestrita deste *tertium non datur*.

Caso a definição binária para a provabilidade e a refutabilidade não fosse considerada problemática, o passo seguinte seria, novamente, o de aplicar o mesmo princípio gentzeniano buscando determinar quais seriam as cláusulas de eliminação convenientes àquelas introduções. Contudo, elas não poderiam ser oferecidas de forma adequada, na medida em que seríamos compelidos a adotar cláusulas como aquelas a seguir. Repare que nos depararíamos com dois problemas (um quando temos que lidar com uma fórmula existencial provável e outro quando temos que lidar com uma fórmula universal refutável):

Provabilidade	*Refutabilidade*
(i) caso $\vdash A_1 \wedge A_2$, *então* $\vdash A_1$;	*(i) caso* $\dashv A_1 \wedge A_2$ *e* $\vdash A_1$, *então* $\dashv A_2$;
caso $\vdash A_1 \wedge A_2$, *então* $\vdash A_2$;	*caso* $\dashv A_1 \wedge A_2$ *e* $\vdash A_2$, *então* $\dashv A_1$;
(ii) caso $\vdash A_1 \rightarrow A_2$ *e* $\vdash A_1$, *então* $\vdash A_2$;	*(ii) caso* $\dashv A_1 \rightarrow A_2$, *então* $\vdash A_1$;
	caso $\dashv A_1 \rightarrow A_2$, *então* $\dashv A_2$;
(iii) caso $\vdash \forall x A[a/x]$, *então* $\vdash A[a/\tau]$;	*(iii) caso* $\dashv \forall x A[a/x]$, *então* ***???***;
(iv) caso $\vdash A_1 \vee A_2$ *e* $\dashv A_1$, *então* $\vdash A_2$;	*(iv) caso* $\dashv A_1 \vee A_2$, *então* $\dashv A_1$;
caso $\vdash A_1 \vee A_2$ *e* $\dashv A_2$, *então* $\vdash A_1$;	*caso* $\dashv A_1 \vee A_2$, *então* $\dashv A_2$;
(v) caso $\vdash \exists x A[a/x]$, *então* ***???***.	*(v) caso* $\dashv \exists x A[a/x]$, *então* $\dashv A$

Essas considerações sobre os conceitos de provabilidade e refutabilidade nos levam a concluir que numa investigação de natureza construtiva, em que o comportamento das constantes lógicas é analisado separadamente, tais conceitos não podem ser tomados como um binômio primitivo por, pelo menos, duas razões. Uma delas diz respeito à dificuldade de formular regras de eliminação para aquelas situações em que temos $\vdash \exists x A[a/x]$ e $\dashv \forall x A[a/x]$. A outra consiste em

observar que o conjunto total de cláusulas só descreveria completamente o comportamento das constantes lógicas sob uma suposição extremamente forte: a de que todas as proposições são, *tertium non datur*, prováveis ou refutáveis.

A segunda objeção relatada no parágrafo anterior é inescapável quando assumimos o uso algébrico dos parâmetros proposicionais. Se o uso dos parâmetros fosse conteudístico, seria mais difícil ver como funcionaria a objeção, por falta de um exemplo que tenha a obviedade do exemplo anterior, ou seja, da fórmula $a=b$. Contudo, notamos que, para certos sistemas de regras, que além de consistentes sejam suficientemente poderosos para apresentar a aritmética dos números naturais, uma certa proposição G não será provável, nem refutável. Desse modo, não teríamos como aplicar as cláusulas *(ii)* para introdução de provabilidade e de refutabilidade para as fórmulas $(\bot\rightarrow\bot)\rightarrow G$ e $G\rightarrow\bot$, por exemplo.

Se, de fato, a definição concomitante for impraticável, isso talvez seja um indício de que o conceito de hipótese é um conceito essencial à elucidação dos princípios lógicos e, por essa razão, haveria alguma razoabilidade na definição do conceito de refutabilidade condicional.

Assim, concluímos que há justificativas para aceitar o ponto de vista de que os sistemas minimais de dedução natural representam o conceito de conseqüência dedutiva, mas também permitem representar o conceito de refutabilidade condicional, já que essa noção de refutabilidade pode ser definida em termos do conceito de conseqüência dedutiva.

1.3. O Sistema Minimal para Preservação da Falsidade

Se a preservação da verdade pode ser vista como um critério de adequação da elucidação do conceito de conseqüência dedutiva, o qual nos permite esclarecer quais deduções podemos julgar válidas, seria razoável cogitar da possibilidade de examinar outra relação entre proposições cujo critério de adequação seja o critério contrário, o critério de **preservação da falsidade**. Inicialmente, não vemos por que excluir esse aspecto do âmbito da investigação lógica[107]. Faz sentido dizer que, a partir de um conjunto de proposições falsas, podemos deduzir a falsidade de uma outra proposição. Ou ainda, adotando uma posição um pouco mais próxima do construtivismo, faz sentido pensar que, a partir de um conjunto de proposições refutáveis/refutadas, podemos refutar uma outra proposição. Talvez possamos chamar isso de

[107] Nosso ponto de partida para a presente investigação foi uma sugestão de R. Ertola, apresentada no XIII EBL, de leitura invertida das regras de inferência de dedução natural como preservação da falsidade. Observamos também que Almeida [Alm04] considera relevante o exame da preservação da falsidade, e nota que é raro que os lógicos concedam cidadania à noção de preservação da falsidade.

preservação da refutabilidade/refutação, o que constituiria uma segunda forma de entender o conceito de refutação.

O **Sistema Minimal para a Falsidade** ($\mathcal{M}_f$) é definido abaixo[108]:

Introduções	$\dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \vee A_2}\, i\vee^f$	$\dfrac{\Gamma,\ [\underline{A_1}]^i \quad \nabla \quad A_2}{A_1 \nleftrightarrow A_2}\, {}^i i\nleftrightarrow$	* $\dfrac{\Gamma \quad \nabla \quad A}{\exists x A[a/x]}\, i\exists^f$
	$\dfrac{A_1}{A_1 \wedge A_2}\, i\vee^f e \qquad \dfrac{A_2}{A_1 \wedge A_2}\, i\wedge^f d$		$\dfrac{A[a/\tau]}{\forall x A[a/x]}\, i\forall^f$
Eliminações	$\dfrac{A_1 \vee A_2}{A_1}\, e\vee^f e \qquad \dfrac{A_1 \vee A_2}{A_2}\, e\vee^f d$	$\dfrac{A_1 \quad A_1 \nleftrightarrow A_2}{A_2}\, e\nleftrightarrow$	$\dfrac{\exists x A[a/x]}{A[a/\tau]}\, e\exists^f$
	$\dfrac{A_1 \wedge A_2 \quad \begin{matrix}\Delta_1,\ [\underline{A_1}]^i \\ \nabla \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta_2,\ [\underline{A_2}]^i \\ \nabla \\ C\end{matrix}}{C}\, {}^i e\wedge^f$		* $\dfrac{\forall x A[a/x] \quad \begin{matrix}\Delta,\ [\underline{A}]^i \\ \nabla \\ C\end{matrix}}{C}\, {}^i e\forall^f$

Figura II-3

As regras nesse sistema devem ser lidas de modo idêntico àquele que usaríamos para tratar de preservação da verdade, ou seja, grosso modo, diríamos que há preservação da falsidade caso a conclusão seja necessariamente falsa se todas as premissas imediatas forem falsas e/ou as derivações subsidiárias preservarem a falsidade[109]. No presente sistema, as suposições funcionam como suposição de falsidade. A regra $i\exists^f$ tem uma restrição de aplicabilidade que é a de que o

---

[108] Sistemas que guardam similaridade ao presente sistema podem ser encontrados em [Tam94] e [Tam99]. Todavia, nos dois casos, a formulação do sistema de dedução natural só contempla a parcela proposicional. Além disso, nenhum deles tem regras para a operação $\nleftrightarrow$. Em [Tam94], o sistema de dedução natural não é de estilo gentzeniano. Em [Tam99], os autores reúnem num mesmo sistema as regras para a preservação da falsidade e da verdade. Adiante, também trataremos deste tema em correlação com um artigo de López-Escobar [Lop72] acerca da noção de refutabilidade.

[109] Neste contexto, dizer que existiria preservação da falsidade das suposições para a premissa imediata da regra significaria dizer que caso as suposições fossem todas falsas estaria necessariamente garantido que a premissa imediata também seria falsa. Todavia, notamos que do mesmo modo que é problemático falar em preservação da verdade para $i\forall$, conforme o Apêndice, também será problemático falar em preservação da falsidade para $i\exists$.

parâmetro a não ocorra em Γ. A regra $e\forall^{f}$ tem uma restrição de aplicabilidade que é a de que o parâmetro a não ocorra em Γ e não ocorra em C. Nesse sistema, por enquanto, não há regras de introdução e eliminação para a implicação. Há regras de introdução e eliminação para outro operador correlato. A fórmula $A_1 \nleftarrow A_2$ será lida como: $\boldsymbol{A_1}$ **indecorre de** $\boldsymbol{A_2}$.[110] Chamaremos este operador de **desimplicação**. Esta regra indica que poderíamos concluir pela falsidade $A_1 \nleftarrow A_2$ caso houvesse preservação da falsidade de Γ, A_1 para A_2.

É ainda interessante notar que, do ponto de vista da sua estrutura sintática, as regras do sistema minimal usual simplesmente trocaram de lugar. Trocam de lugar a conjunção e a disjunção, por um lado, o existencial e o universal, por outro. Também é interessante notar que as regras de introdução e eliminação para a implicação ($\rightarrow$) e para a desimplicação ($\nleftarrow$) são estruturalmente idênticas. Desse modo, qualquer propriedade do sistema minimal que dependa unicamente da estrutura das derivações poderá ser estendido ao sistema minimal para a falsidade[111].

Uma forma de compreender para qual tipo de situação esse sistema representaria um papel elucidatório consistiria em notar que, a partir dele, podemos tratar das relações lógicas entre contrafactuais. Ou seja, se A fosse derivado de Γ e todas as proposições de Γ fossem contrafactuais, então A seria um contrafactual nesse sistema[112]. Repare que o sistema minimal que preserva a verdade não consegue representar adequadamente essa relação lógica entre contrafactuais. Da afirmação falsa de que Bizet foi compatriota de Verdi concluir-se-ia, por introdução da disjunção inclusiva em $\mathcal{M}$, que Bizet foi compatriota de Verdi e/ou[113] Bizet foi compatriota de Zola. Porém, essa conclusão não é falsa, pois, de fato, ele foi compatriota de Zola. Na lógica para a preservação da falsidade, por outro lado, a partir da mesma premissa obteríamos de modo logicamente impecável que Bizet foi compatriota de Verdi e Bizet compatriota de Zola, o que, como vemos, é falso.

Se assumíssemos que a verdade e a falsidade não são noções inefáveis, mas noções que correspondem diretamente à posse de uma prova ou de uma refutação, respectivamente, como parece ser o caso dos intuicionistas, nós poderíamos interpretar as regras do sistema minimal estrito como regras que preservam a provabilidade e as regras do sistema minimal para a falsidade como regras que preservam a refutabilidade. Esse movimento relativo à falsidade seria

---

[110] Obviamente, a palavra *indecorre* é um neologismo. Outra forma de ler a proposição consiste em dizer que A_1 *não decorre de* A_2.

[111] Pensamos aqui, sobretudo, nos teoremas de normalização e confluência. Para maiores detalhes, ver o Capítulo V.

[112] Observe que um condicional contrafactual é um condicional cuja proposição antecedente é falsa, o que não significa que o próprio condicional seja falso.

[113] Lembramos que a expressão *e/ou* corresponde a uma disjunção inclusiva.

similar ao movimento que os intuicionistas naturais fazem com respeito ao conceito de prova. Da mesma forma que o intuicionista entendia que a verdade dependia da posse de uma prova, poderíamos cogitar uma interpretação associada ao sistema minimal para a falsidade segundo a qual a falsidade dependeria da posse de uma refutação. Logo, se as regras que preservam a verdade são regras que levam da posse de uma prova à posse de outra prova, as regras para a preservação da falsidade talvez pudessem ser entendidas como regras que levam da posse de uma refutação à posse de outra refutação. Isso nos permitiria sugerir que as regras de introdução desse sistema definiriam o conceito de **refutação canônica/direta**, do mesmo modo que um intuicionista diria que as regras de introdução do sistema para preservação da verdade definem a noção de prova canônica/direta.

Contudo, notamos, o sistema minimal para a falsidade provavelmente só contaria com a completa anuência dos intuicionistas na sua parte proposicional, pois a validade da dedução representada pela regra de $e\forall^f$ seria por eles questionada. A rejeição não deixaria de ser surpreendente na medida em que a regra é estruturalmente idêntica à regra de $e\exists$, a qual, por seu turno, os intuicionistas parecem dispostos a aceitar, quando interpretam o sistema minimal como um sistema para a construção de provas. Teremos ocasião de examinar esse problema em breve.

Da mesma forma que as regras para o conceito de conseqüência dedutiva podem ser dadas de modo uniforme[114], podemos também formular as regras do sistema minimal para a falsidade de forma homogênea:

Introduções	$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Gamma\\ \nabla & \nabla\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \vee A_2}\ i\vee^f$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\underline{A_1}]^i\\ \nabla\\ A_2\end{array}}{A_1 \leftarrow\!\!\!\vee A_2}\ ^i i\leftarrow\!\!\!\vee$	* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A\end{array}}{\exists x A[a/x]}\ i\exists^f$
	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A_1\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\ i\wedge^f e$ $\quad$ $\dfrac{\begin{array}{c}\Delta\\ \nabla\\ A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\ i\wedge^f d$		$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A[a/\tau]\end{array}}{\forall x A[a/x]}\ i\forall^f$

[114] Conforme a forma de apresentação empregada no Apêndice.

Eliminações	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A_1 \vee A_2\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \nabla\\ A_1\end{array}}{A_1}\ e\vee^f e \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A_1 \vee A_2\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \nabla\\ A_2\end{array}}{A_2}\ e\vee^f d$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ A_1\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \nabla\\ A_1 \leftrightarrow\!\!\!\!- A_2\end{array}}{A_2}\ e\leftrightarrow\!\!\!\!-$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \exists x A[a/x]\end{array}}{A[a/\tau]}\ e\exists^f$
	$\dfrac{\begin{array}{ccc}\Gamma & \Delta_1\ ,\ [\underline{A_1}]^i & \Delta_2\ ,\ [\underline{A_2}]^i\\ \nabla & \nabla & \nabla\\ A_1 \wedge A_2 & C & C\end{array}}{C}\ i\ e\wedge^f$		$\dfrac{\begin{array}{ccc} & * & \\ \Gamma & \Delta\ ,\ [\underline{A}]^i & \\ \nabla & \nabla & \\ \forall x A[a/x] & C & \end{array}}{C}\ i\ e\forall^f$

Figura II-4

No contexto deste sistema minimal para a falsidade, uma derivação de *A* a partir de Γ não significará que *A* é conseqüência dedutiva de Γ. Significará que *A* é **condicionalmente refutável** a partir de Γ. Todavia, agora as suposições serão suposição de falsidade. Isso não quer dizer que não haja uma relação de conseqüência dedutiva no sistema. Haverá uma que é diferente daquela para os sistemas de preservação da verdade. A relação se dará "de baixo para cima", de *A* para Γ.

Como já vimos em Curry, a definição da noção de refutabilidade simples repousava sobre o conceito de conseqüência dedutiva e, para que uma fórmula *A* seja refutável, seria preciso mostrar que outra fórmula *B*, que já sabemos ser refutável, fosse conseqüência dedutiva de *A*. Assim, analisando as regras de preservação da falsidade acima, verificaremos que deve haver uma relação de conseqüência dedutiva inversa entre as suposições e a conclusão de uma derivação.

As cláusulas de definição do conceito de conseqüência dedutiva para a formulação do sistema de regras de dedução natural na Figura II-4 seriam como abaixo, onde $\Gamma,\Delta,\Delta_1,\Delta_2$ são listas de fórmulas, mas, eventualmente, também poderiam ser interpretadas como conjuntos finitos de fórmulas:

(i) $A \Vdash A$;

(ii) caso $A_1 \Vdash \Gamma$ *e* $A_2 \Vdash \Delta$, *então* $A_1 \vee A_2 \Vdash \Gamma,\Delta$;

(iii) caso $A_2 \Vdash \Gamma, A_1$, *então* $A_1 \leftrightarrow\!\!\!\!- A_2 \Vdash \Gamma$;

(iv) caso $A \Vdash \Gamma$ *e o parâmetro a não ocorre na lista de fórmulas* Γ, *então* $\exists x A[a/x] \Vdash \Gamma$;

(v) caso $A_1 \Vdash \Gamma$ *ou* $A_2 \Vdash \Gamma$ *então* $A_1 \wedge A_2 \Vdash \Gamma$;

(vi) caso $A[a/\tau] \Vdash \Gamma$, *então* $\forall x A[a/x] \Vdash \Gamma$;

(ix) caso $A_1 \vee A_2 \Vdash \Gamma$*, então* $A_1 \Vdash \Gamma$*;*

caso $A_1 \vee A_2 \Vdash \Gamma$*, então* $A_2 \Vdash \Gamma$*;*

(x) caso $A_1 \Vdash \Gamma$ *e* $A_1 \leftarrow\!\!\!\vdash A_2 \Vdash \Delta$*, então* $A_2 \Vdash \Gamma, \Delta$*;*

(xi) caso $\exists x A[a/x] \Vdash \Gamma$*, então* $A[a/\tau] \Vdash \Gamma$*;*

(xii) caso $A_1 \wedge A_2, \Vdash \Gamma$*,* $C \Vdash \Delta_1, A_1$ *e* $C \Vdash \Delta_2, A_2$*, então* $C \Vdash \Gamma, \Delta_1, \Delta_2$*;*

(xiii) caso $\forall x A[a/x] \Vdash \Gamma$ *e* $C \Vdash \Delta, A$ *tal que o parâmetro a não ocorre em* Δ *e não ocorre em C, então* $C \Vdash \Gamma, \Delta$*.*

Notamos que o espaço na numeração deve-se ao fato de que, em breve, adicionaremos duas cláusulas novas, as cláusulas *(vii)* e *(viii)*.

Analisando as cláusulas acima, vemos que, de *(ii)* a *(vi)*, com exceção da cláusula *(iii)*, temos praticamente as mesmas cláusulas de introdução de constantes lógicas à esquerda do símbolo $\Vdash$ que já tínhamos apresentado no primeiro capítulo. A diferença está no número de ocorrências de fórmulas admitidas em cada lado do símbolo $\Vdash$. Com respeito à cláusula *(iii)*, seu operador, em geral, não é examinado no âmbito do cálculo de seqüentes. Mas, observando mais atentamente, podemos ver que a regra de introdução à esquerda para $\leftarrow\!\!\!\vdash$ é similar à regra de introdução à direita para $\rightarrow$ e vice-versa: a regra de introdução à direita para $\leftarrow\!\!\!\vdash$ é similar à regra de introdução à esquerda para $\rightarrow$.

As cláusulas *(ix)* a *(xiii)* correspondem às regras de eliminação do sistema para a falsidade e, do mesmo modo que no capítulo anterior, elas podem ser apresentadas como uma introdução, só que, desta vez, por simetria, elas funcionariam como uma introdução à direita do símbolo $\Vdash$ (ou seja, de novo, as regras de eliminação seriam vistas como regras que estendem a derivação de conseqüência dedutiva no topo):

(ix') caso $C \Vdash \Gamma, A_1$ *então* $C \Vdash \Gamma, A_1 \vee A_2$*;*

caso $C \Vdash \Gamma, A_2$ *então* $C \Vdash \Gamma, A_1 \vee A_2$*;*

(x') caso $C \Vdash \Gamma, A_2$ *e* $A_1 \Vdash \Delta$ *então* $C \Vdash \Gamma, \Delta, A_1 \leftarrow\!\!\!\vdash A_2$*;*

(xi') caso $C \Vdash \Gamma, A[a/\tau]$*, então* $C \Vdash \Gamma, \exists x A[a/x]$*;*

(xii') caso $C \Vdash \Gamma, A_1$ *e* $C \Vdash \Delta, A_2$*, então* $C \Vdash \Gamma, \Delta, A_1 \wedge A_2$*;*

(xiii') caso $C \Vdash \Gamma, A$ *tal que o parâmetro a não ocorre em* Γ *e não ocorre em C, então* $C \Vdash \Gamma, \forall x A[a/x]$*.*

Com respeito às cláusulas *(ix')* até *(xiii')*, com exceção da cláusula *(x')*[115], elas são praticamente idênticas às cláusulas de introdução da constante lógica à direita do símbolo $\nVdash$, dadas no capítulo anterior. A diferença novamente estaria no fato de haver uma única ocorrência de fórmula à direita do símbolo e várias à esquerda, naquele caso.

Essas simetrias sugerem que os sistemas minimais para preservação da falsidade e da verdade poderiam ser amalgamados em um único sistema de seqüentes, admitindo listas múltiplas dos dois lados do símbolo $\nVdash$. As únicas constantes lógicas para as quais isso ainda seria um pouco problemático, mas não muito, seriam as constantes $\rightarrow$ e $\nleftarrow$.

Finalmente, de modo curioso, o sistema minimal para a falsidade também permitiria a representação de um conceito que poderíamos chamar de **demonstrabilidade condicional** correlato do conceito de refutabilidade condicional sobre o sistema minimal. Assim, caso *B* seja um parâmetro proposicional que não ocorre em *A* e *B* seja derivável de Γ,A neste sistema, poderemos dizer que *A* é demonstrável sob as condições Γ.

1.4. Regras de Dedução Natural e Sintaxe

A partir dessa breve análise do sistema minimal para a falsidade, podemos buscar esclarecer um problema relativo à interpretação dos sistemas de dedução natural. Qualquer tese sintaxista radical, segundo a qual a semântica das constantes lógicas estaria explicitada de modo exaustivo pelas regras de introdução e eliminação do sistema de dedução natural, deve ser rechaçada. Não há diferença entre as regras para a conjunção/disjunção, quantificador universal/quantificador existencial e implicação/desimplicação nos sistemas minimal e minimal para a falsidade. Como as regras são estruturalmente idênticas uma a uma, para saber qual constante lógica está sendo caracterizada pelas regras seria preciso saber, antes, o que é que, supostamente, o sistema de regras estaria elucidando, ou seja, seria preciso saber qual critério de adequação estaria sendo aplicado: a preservação da verdade ou a preservação da falsidade. Mas tal informação não é sintática e não pode ser dada sintaticamente. Essa informação, de fato, não faz parte do sistema, mas serve de critério de adequação para o sistema, critério de adequação aplicado à elucidação das relações lógicas em cada caso.

Aliás, o fato de, sintaticamente, termos o mesmo sistema para a demonstrabilidade e para a refutabilidade nos leva a concluir que não podemos distinguir, com base na sintaxe, a refutabilidade da demonstrabilidade. Conseqüentemente, também não podemos distinguir,

---

[115] A cláusula *(x´)* trata de uma nova constante lógica.

sintaticamente, a verdade da falsidade, já que um subconjunto próprio da primeira não pode ser distinguido de um subconjunto próprio da segunda. Assim, não será de admirar que o conceito de verdade não possa ser representado em uma linguagem sintaticamente bem-determinada. Se a lógica de primeira ordem for apresentada de forma sintaticamente bem-determinada, então não será possível distinguir a verdade da falsidade dentro de uma teoria matemática qualquer, assumindo que a sua formulação deve incorporar, no mínimo, a lógica de primeira ordem.

Há algum tempo, Prior [Pri60] se pronunciou contra a idéia de que as regras de introdução e de eliminação fossem consideradas como uma definição dedutiva das constantes lógicas. Seu argumento consistia em mostrar uma regra de introdução e uma regra de eliminação para "uma constante fictícia" . Contudo, segundo os críticos de Prior, essa constante seria problemática, pois para ela não valeria a propriedade de conservatividade [Bel62][116]. Entretanto, tendo em mente o sistema recém-definido, parece-nos que uma objeção relacionada à objeção de Prior poderia ser apresentada nas seguintes bases: regras de introdução e de eliminação de constantes lógicas não podem por si só definir semanticamente uma constante lógica, pois uma parte importante do significado da constante dependeria de saber se as regras estão sendo consideradas como regras que preservam a verdade ou se são regras que preservam a falsidade. Os critérios seriam critérios de adequação aplicáveis aos sistemas de regras e, portanto, exteriores às próprias regras.

1.5. Rejeição e Refutabilidade

Após apresentar o sistema para preservação da falsidade, é preciso retomar algumas distinções importantes. O conceito de rejeição é encontrado com alguma freqüência e deveríamos ter claro qual a sua correlação com o conceito de refutação. Um exemplo particularmente interessante do uso desse conceito está em [Tam94]. Tamminga emprega o conceito de rejeição como contrapartida do conceito de asserção, de modo tal que o que não é asserível é considerado rejeitável. É com base nesta conceituação que o autor ofereceu um sistema de dedução natural para a rejeitabilidade. O interessante é que seu sistema guarda grande similaridade com o sistema para preservação da falsidade acima, embora em [Tam94] o sistema seja de natureza proposicional. Na verdade, Tamminga principia seu artigo com uma análise histórica do conceito de rejeição e da sua origem em Brentano e Lukasiewicz. Ele utiliza, sobretudo, o suporte conceitual desse último para tratar do conceito.

---

[116] Também é preciso considerar a propriedade de unicidade. Acerca desses mesmos temas, ver também [Dum91], pág. 246.

De modo geral, é razoável admitir que, após exame, consideremos que uma proposição é rejeitável. Contudo, é um problema filosófico relevante saber se de fato faz sentido sustentar a existência de um ato de rejeição separado e distinto do ato de asserção. Lembramos que Frege [Fre18II], por exemplo, se opõe a admitir a existência desse ato autônomo.

Lukasiewicz, no entanto, mantinha uma correlação estreita entre os conceitos de asserção e rejeição ([Luk51], pág. 94):

> *Dos dois atos intelectuais, asserir uma proposição e rejeitá-la, unicamente a primeira foi levada em consideração na lógica formal moderna. Gottlob Frege introduziu na lógica a idéia de asserção, e o signo da asserção (⊢), aceitado posteriormente pelos autores do Principia Mathematica. A idéia de rejeição, no entanto, tanto quanto eu sei, foi negligenciada até os dias de hoje.*
> *Nós asserimos proposições verdadeiras e rejeitamos as falsas. Somente as proposições verdadeiras podem ser asseridas, pois seria um erro asserir uma proposição que não era verdadeira. Uma propriedade análoga não pode ser afirmada da rejeição: não só as proposições falsas têm de ser rejeitadas. É verdade, naturalmente, que toda proposição é verdadeira ou falsa, mas existem expressões proposicionais que não são nem verdadeiras nem falsas. Deste tipo são as chamadas funções proposicionais, isso é, expressões contendo variáveis livres que se tornam verdadeiras para alguns valores, e falsa para outros. Tome, por exemplo, p, a variável proposicional: ela não é nem verdadeira nem falsa, porque para p/1 ela se torna verdadeira, e para p/0 ela se torna falsa. Agora, de duas proposições contraditórias, α e $N\alpha$, uma deve ser verdadeira e a outra falsa, uma portanto deve ser asserida e a outra rejeitada. Mas nenhuma de duas funções proposicionais contraditórias, p e Np, pode ser asserida, porque nenhuma delas é verdadeira: ambas têm de ser rejeitadas.*[117]

Se a rejeição for entendida como equivalente à não-asseribilidade e também considerarmos que, ao asserir uma fórmula, estaríamos de posse de uma prova, então a noção de rejeitabilidade seria equivalente à indemonstrabilidade. Todavia, lembramos que, desde o nosso ponto de vista, é questionável que faça sentido asserir uma fórmula como $a=a$, embora ela possa ser considerada uma fórmula correta. Além disso, nós preferimos, como Frege, não postular um ato de rejeição, que, a nosso ver, se fosse postulado, deveria estar restringido às proposições, assim como, em nossa opinião, as asserções devem estar. Eles não seriam aplicáveis às formas

---

[117] *Of the two intellectual acts, to assert a proposition and to reject it, only the first has been taken into account in modern formal logic. Gottlob Frege introduced into logic the idea of assertion, and the sign of assertion (⊢), accepted afterwards by the authors of Principia Mathematica. The idea of rejection, however, so far as I know, has been neglected up to present day.*
We assert true propositions and reject false ones. Only true propositions can be asserted, for it would be an error to assert a proposition that was not true. An analogous property cannot be asserted of rejection: it is not only false propositions that have to be rejected. It is true, of course, that every proposition is either true or false, but there exist propositional expressions that are neither true nor false. Of this kind are the so-called propositional functions, i.e. expressions containing free variables and becoming true for some of their values, and false for others. Take, for instance, p, the propositional variable: it is neither true nor false, because for p/1 it becomes true, and for p/0 it becomes false. Now, of two contradictory propositions, α and $N\alpha$ one must be true and the other false, one therefore must be asserted and the other rejected. But neither of the two contradictory propositional functions, p and Np, can be asserted, because neither of them is true: they both have to be rejected

proposicionais. Adicionalmente, se o conceito de rejeitabilidade fosse equivalente ao de não-demonstrabilidade, qualquer extensão de um sistema lógico alteraria esse conceito, como Curry já havia notado.

De modo geral, distinguiremos em dois grupos as fórmulas indemonstráveis de um sistema para preservação da verdade. O grupo daquelas para as quais existe ao menos uma interpretação que as faria falsas e aquelas para as quais qualquer interpretação as faria falsas. No primeiro caso, teríamos as fórmulas indemonstráveis em sentido amplo, no segundo, as fórmulas logicamente indemonstráveis, ou ainda as refutáveis *tout court*. O segundo grupo é parte do primeiro e o complemento pode ser chamado de grupo das fórmulas contingentemente indemonstráveis. Com um sistema para preservação da falsidade poderíamos tratar de modo elegante os dois grupos: as indemonstráveis e as refutáveis. Uma fórmula seria refutável *tout court* se ela tivesse sido derivada a partir do conjunto vazio de premissas, dentro do sistema para preservação da falsidade em questão. Uma fórmula proposicional seria indemonstrável se ela fosse derivável de uma lista de suposições que contém unicamente parâmetros proposicionais e/ou negações de parâmetros proposicionais, mas não contêm um parâmetro e sua negação. Para listas deste tipo, sempre haverá ao menos uma interpretação que faça todos elementos da lista falsos. Como sabemos, não será possível dar uma caracterização para todas as fórmulas indemonstráveis de primeira ordem.

Basicamente, o que mudaria, do ponto de vista da definição do conceito de indemonstrabilidade e do conceito de refutabilidade *tout court*, são as expressões que consideraríamos como axiomas. Os contra-axiomas de Curry são fórmulas refutáveis *tout court*. Por outro lado, seria possível considerar um sistema com fórmulas iniciais simplesmente indemonstráveis que sejam todas falsas em alguma interpretação[118].

1.6. Faria Sentido Adicionar a Negação aos Sistemas Minimais?

Freqüentemente, o sistema minimal de dedução natural é caracterizado como um sistema sem regras explícitas para a negação (por exemplo, ([Pra65], pág. 21, e [Neg01], pág. 12). No máximo, a negação seria considerada por meio de uma definição explícita usando o absurdo, embora a própria proposição absurdo não seja tratada por meio de regras. Outras vezes, são

---

[118] Caicedo [Cai78] apresenta um sistema axiomático para provar as fórmulas não-tautológicas do cálculo proposicional clássico, um sistema que gere todas as fórmulas indemonstráveis. Embora, por enquanto, não tenhamos ainda introduzido regras para a implicação, o conjunto de fórmulas obtidas nesse sistema será derivável no sistema de preservação da falsidade a partir de uma lista consistindo, unicamente, de parâmetros proposicionais e negações de parâmetros proposicionais.

usadas regras para a negação em uma forma muito fraca ([Cur63], págs. 260-261 e pág. 280). O sistema com essa versão fraca da negação, sem o absurdo, é obtido pela adição da regra *Nm* de Curry ao sistema $\mathcal{M}$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[A] & \\ \nabla & \\ B & \sim B\end{array}}{\sim A}$$

Figura II-5

O emprego do símbolo de negação assemelhar-se-ia, nesse caso, a um predicado aplicado sobre fórmulas, embora não fique claro qual seria o seu significado. De todo modo, caso haja axiomas da forma *~A* em que *A* seja básica, a regra permitiria que a negação fosse estendida a outras fórmulas de valor maior que zero. O problema, então, se resumiria a entender o que significaria a negação de uma fórmula básica. A essa noção de negação definida a partir da regra *Nm* podemos chamar de **negação minimal**.

Uma outra forma alternativa de obter um sistema equivalente consistiria em adicionar regras de introdução e eliminação da negação onde a constante $\perp$ fosse empregada:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \nabla \\ \perp\end{array}}{\sim A} \qquad \dfrac{A \quad \sim A}{\perp}$$

Figura II-6

Na verdade, tais regras seriam um caso particular das regras de introdução e eliminação da implicação quando a negação é definida a partir de $\perp$. Ainda aqui, o significado da negação permaneceria nebuloso, na medida em que continuaríamos sem saber que interpretação atribuir ao símbolo $\perp$, pois não há nenhuma regra explicitando o comportamento de $\perp$.

Anteriormente, ao examinarmos as propostas de Curry, havíamos criticado o uso da constante de falsidade/absurdo nesse tipo de regras. A constante empregada parece-se com uma constante lógica, mas, desde o ponto de vista dos sistemas de dedução natural, se não temos nenhuma elucidação do seu comportamento, via regras de introdução e de eliminação, então não é claro por que poderíamos considerá-la uma constante lógica. Eventualmente, como Curry com os contra-axiomas, poderíamos dar-lhe algum significado por meio de regras em que a premissa fosse uma fórmula básica e a conclusão fosse a constante $\perp$. Porém, nesse caso, a constante $\perp$ variaria de significado de uma teoria para outra. Assim, por causa da falta de uma descrição ampla e geral do comportamento deste símbolo, somos obrigados a concluir que, na melhor das

hipóteses, ele funciona como um parâmetro especial, um parâmetro no lugar do qual substituiríamos somente fórmulas falsas, como *0=1*, por exemplo.

Nesse ponto, aduziremos um argumento contra a sugestão de alguns intuicionistas naturais, por exemplo, Negri & Von Plato ([Neg01], pág. 8), de considerar o símbolo $\bot$ como uma constante lógica da qual não pode haver regra de introdução, ou seja, considerá-la uma constante para a qual uma regra de introdução é impossível, na medida em que não poderia haver prova do absurdo.

Ocorre que, no sistema $\mathcal{M}$, não temos nem regra de introdução para $\bot$, nem regra de eliminação. Em outros termos, em $\mathcal{M}$ "já existe a ausência de uma regra de introdução para o absurdo" e, desse modo, poderíamos pensar, a constante estaria definida nele, já que não haveria nenhuma prova dela. Alguns intuicionistas entendem que o caso da constante $\bot$ é um caso limite, para o qual não há regra de introdução porque não existem provas desta proposição. Mas, se esse fosse o caso, o sistema $\mathcal{M}$ teria de ser um sistema "capenga", à medida que, sem maiores explicações, a regra de $e\bot$ teria sido amputada quando seu uso já estava perfeitamente justificado pela falta de regra de introdução, ou seja, pela presença da "ausência" de regra de introdução, pois uma prova de $\bot$ é impossível nesse sistema. Ou seja, o mesmo argumento empregado para justificar $e\bot$ na lógica intuicionista valeria para $\mathcal{M}$.[119]

Vimos acima que podemos representar um conceito similar ao conceito de refutabilidade simples de Curry em $\mathcal{M}$ – o conceito de refutabilidade condicional – e, dessa forma, talvez possamos formular as condições para aplicar uma regra de introdução da negação minimal no sistema. Um modo pelo qual obteríamos a representação dessa noção de negação consistiria em acrescentar regras de introdução e eliminação como aquelas que propusemos no capítulo anterior. Mas, desta vez, restringiríamos a regra de eliminação. A restrição sobre a eliminação da negação é a de que a sua conclusão deve ser sempre um parâmetro proposicional. Chamaremos essa versão da regra como: **eliminação restringida da negação (*e*$\sim_r$)**. A regra de introdução permaneceria a mesma. A restrição adicional sobre a regra de eliminação da negação implica que o princípio de *ex falso quodlibet* não é válido no sistema.

Essa restrição sobre a conclusão da regra de eliminação obrigar-nos-ia a considerar o parâmetro de conclusão de $e\sim_r$ como um parâmetro que não pode ser substituído livremente por outras fórmulas, pois uma substituição poderia transformar uma derivação correta em outra derivação incorreta. Infelizmente, isso traz conseqüências indesejáveis. Por exemplo, quando *C* é

[119] Para uma discussão desse argumento ver Capítulo IV3.2.1.

um parâmetro proposicional, a fórmula $(A \wedge \sim A) \rightarrow C$ seria demonstrável conforme a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge \sim A]^1}{A}\, e\wedge \quad \dfrac{[A \wedge \sim A]^1}{\sim A}\, e\wedge}{C}\, e\sim_r}{(A \wedge \sim A) \rightarrow C}\, {}^1\, i\rightarrow$$

Figura II-7[120]

Contudo, nem todas as instâncias substitucionais da tautologia seriam demonstráveis. Por exemplo, $(A \wedge \sim A) \rightarrow (B \wedge \sim B)$ não será demonstrável neste sistema, na medida em que, para prová-la, a regra de eliminação deveria embutir o princípio de *ex falso quodlibet* (o que ocorre só com *E*~):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge \sim A]^1}{A}\, e\wedge \quad \dfrac{[A \wedge \sim A]^1}{\sim A}\, e\wedge}{B \wedge \sim B}\, E\sim}{(A \wedge \sim A) \rightarrow (B \wedge \sim B)}\, {}^1\, i\rightarrow$$

Figura II-8

Assim, no sistema lógico com a regra $e\sim_r$ já não haverá mais livre substituição de parâmetros proposicionais. Desse modo, os teoremas perdem o seu caráter esquemático. O resultado de uma substituição de parâmetro proposicional não seria ele mesmo um teorema.[121]

Portanto, desde o ponto de vista que estamos adotando − e que envolve uma concepção peculiar do tipo de expressões que estamos admitindo na linguagem, pois contempla o uso algébrico das variáveis -, para que possamos retornar a uma forma mais próxima do uso habitual do procedimento de livre substitutibilidade de parâmetros proposicionais em um teorema ou em uma derivação, seria preciso admitir a validade do princípio de *ex falso quodlibet*.[122] Se isso não

---

[120] Essa derivação também mostra que o sistema obtido não é equivalente ao sistema minimal, embora toda derivação no sistema minimal possa ser reconstruída no presente sistema.

[121] Notamos que a substituição de parâmetros proposicionais por fórmulas também gera problemas com os parâmetros individuais, mesmo naqueles sistemas em que não existe regra para negação. Com efeito, num sistema em que tenhamos derivado $\Gamma \vdash \forall x B[b/x]$, se A for um parâmetro proposicional que ocorre em Γ, então o resultado da substituição de todas as ocorrências de A, na derivação, por uma fórmula C qualquer, tal que C contenha uma ocorrência do parâmetro individual b, será uma derivação incorreta, caso a última instância de regra da derivação seja uma $i\forall$ sobre o parâmetro próprio b.

[122] Há uma passagem em que Kolmogorov [Kol25], pág. 419, diz que o axioma de *ex falso quodlibet* só é usado em apresentações simbólicas da lógica dos julgamentos e que ela não tem fundamento intuitivo. Se interpretarmos que a apresentação formal significa tão somente o uso de variáveis para representar proposições, acreditamos que a

for propriamente uma justificação da validade do princípio, com certeza é um indício forte da sua utilidade, no caso de querermos explicitar o comportamento dedutivo da negação por meio de regras de introdução e de eliminação.

Não obstante, o fato de que a livre substitutibilidade falha no sistema não implica que ele seja um sistema inútil. Ele não será, na medida em que as regras para a negação minimal nos permitem, por exemplo, plasmar o conteúdo da regra *Nm*, só que, desta vez, usando introdução e eliminação da negação. Na verdade, essas regras de introdução e eliminação permitiriam representar uma espécie de constatação de impossibilidade que seria usada para representar a regra *Nm*. Finalmente, se de fato quiséssemos manter a livre substitutibilidade dos parâmetros proposicionais, o melhor seria usar a regra *Nm* e não usar regras de introdução e de eliminação para a negação.

A negação minimal poderia também ter sido definida por meio do absurdo. Assim, ao invés de adicionar as regras para a negação, adicionaríamos as regras de introdução e eliminação do absurdo e, em seguida, empregaríamos a definição usual da negação. Para manter a coerência, a regra de eliminação do absurdo deveria concluir somente parâmetros proposicionais. Designaremos essa versão da regra como **eliminação de absurdo minimal** ($e\bot_r$).

O sistema com regras para o absurdo é equivalente ao sistema com regras para a negação. Toda derivação num sistema com negação minimal pode ser traduzida em uma derivação substituindo a negação de uma fórmula pela sua definição em termos de implicação e absurdo minimal. A tradução contrária poderia ser feita seguindo uma sugestão de Curry. Ela consistiria da substituição de $\bot$ pela negação de uma fórmula demonstrável no sistema. Assim, supondo que é π uma derivação em que ocorre $\bot$ e supondo que D é um parâmetro proposicional que não ocorre na derivação, substituímos todas as ocorrências de $\bot$ por $\sim(D\rightarrow D)$ (toda aplicação de $i\bot$ transforma-se em aplicação de $i\sim$)[123]:

$$\begin{array}{lcl} \Gamma & & \Gamma\,[\bot/\sim(D\rightarrow D)] \\ \nabla\,\pi_1 & & \nabla\,\pi_1[\bot/\sim(D\rightarrow D)] \\ C & & C \\ \dfrac{}{\bot}\,i\bot & \rightarrow & \dfrac{}{\sim(D\rightarrow D)}\,i\sim \end{array}$$

Figura II-9

As aplicações de $e\bot_r$, por sua vez, devem ser substituídas segundo o esquema:

---

passagem que acabamos de concluir poderia servir como explicação do que pretendida dizer Kolmogorov. Entretanto, é claramente incorreto dizer que esse princípio surgiu ou só foi usado a partir da apresentação formal da lógica contemporânea, como Kolmogorov também disse no mesmo texto. O princípio já era conhecido muito tempo antes do advento da lógica simbólica.

[123] Com descarte vácuo.

$$\begin{array}{l} \nabla\ \pi_2 \\ \bot \\ \hline C \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{[D]^i}{\nabla\ \pi_2}\ i\!\rightarrow \qquad \nabla\ \pi_2\ [\bot/\sim(D\rightarrow D)]}{D\rightarrow D \qquad\qquad \sim(D\rightarrow D)}\ e\!\sim_r}{C}$$

Figura II-10

As cláusulas de definição do conceito de conseqüência dedutiva para o absurdo ficariam como a seguir:

(vii) caso $\Gamma \Vdash B$, onde B é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, então $\Gamma \Vdash \bot$.

(xiv) caso $\Gamma \Vdash \bot$, se C é um parâmetro proposicional, então $\Gamma \Vdash C$

1.7. Tautologicidade Minimal no Sistema para Preservação da Falsidade

Já que parece ser possível adicionar a constante de absurdo ao sistema minimal por meio de regras, também deveria ser possível adicionar um símbolo correlato no sistema minimal para a falsidade. A introdução desse símbolo correlato nos levaria imediatamente a perceber, de forma um pouco surpreendente, a viabilidade de representar uma noção de negação dentro do sistema para a falsidade. Aliás, se quiséssemos evitar o uso de uma constante proposicional para o absurdo, poderíamos, inclusive, adicionar as regras de introdução e eliminação da negação minimal, como já havíamos feito no caso do sistema para preservação da verdade.

No sistema para a falsidade, acrescentaremos um novo símbolo proposicional por meio de uma regra de introdução e uma de eliminação, ambas estruturalmente similares a $i\bot$ e $e\bot_r$. Esta nova constante lógica não significaria o absurdo, mas a **tautologicidade minimal** ($\top$). As regras abaixo são as regras de **introdução da tautologicidade** ($i\top$) e **eliminação da tautologicidade** ($e\top_r$), essa última restringida a concluir somente parâmetros proposicionais. Abaixo C e D são parâmetros proposicionais e C não ocorre em Γ:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \nabla \\ C \\ \hline \top \end{array}\ i\top \qquad \begin{array}{l} \top \\ \hline D \end{array}\ e\top_r$$

Figura II-11[124]

Intuitivamente, a regra de introdução nos diz que, em havendo preservação da falsidade de Γ ao parâmetro C neste sistema, seguir-se-ia a falsidade da tautologicidade. A regra de eliminação diria que da falsidade da tautologicidade segue-se a falsidade de qualquer parâmetro

[124] Tamminga [Tam94] apresenta uma regra de eliminação de tautologicidade no sistema de dedução natural para a rejeitabilidade proposicional, embora não apresente regra de introdução.

proposicional.

A seguir, da mesma forma que fizemos no sistema $\mathcal{M}$, definiremos a negação do seguinte modo[125]: $\neg A \equiv A \leftrightarrow \top$. Intuitivamente, $\neg A$ .significa que A não decorre da tautologicidade. Por outro lado, as regras de introdução e eliminação relativas a essa noção de negação no sistema para preservação da falsidade seriam similares às regras do sistema de preservação da verdade. Supondo a consistência dos sistemas, ao demonstrarmos $\sim A$ no sistema para preservação da verdade, isso significaria que A não é verdadeira. Mas se demonstramos $\sim A$ no sistema de preservação da falsidade, isso significará que A não é falsa.

Exemplificamos o uso da negação no sistema para a falsidade com a seguinte refutação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \vee \neg A]^1}{A}\, e\vee^f \quad \dfrac{[A \vee \neg A]^1}{\neg A}\, e\vee^f}{\top}\, e\leftrightarrow}{\neg(A \vee \neg A)}\, {}^1\, i\leftrightarrow$$

Figura II-12

O constructo acima refuta a negação do terceiro excluído, ou seja, refuta $\neg(A \vee \neg A)$.

Tanto no sistema para a preservação da verdade quanto no sistema para preservação da falsidade, a presença da negação permitiria derivar certas regras estruturalmente idênticas às regras *Nm* de Curry e *reductio ad contradictione*, respectivamente. Vemos isso nos esquemas de derivação abaixo, onde C é um parâmetro proposicional que não ocorre em A, em B ou Γ:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]^1 \\ \nabla \\ B \quad \sim/\neg B\end{matrix}}{\top}\, e\rightarrow}{\sim/\neg A}\, {}^1\, i\rightarrow \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[A]^1 \quad \Gamma,[A]^1 \\ \nabla \qquad \nabla \\ D \quad \sim/\neg D\end{matrix}}{\top}\, e\rightarrow}{\sim/\neg A}\, {}^1\, i\rightarrow$$

Figura II-13

As cláusulas relativas ao conceito de conseqüência dedutiva para a tautologicidade minimal ficariam como a seguir:

(vii) caso $B \Vdash \Gamma$, onde B é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ, então $\top \Vdash \Gamma$.

(xiv) caso $\top \Vdash \Gamma$, se C é um parâmetro proposicional, então $C \Vdash \Gamma$.

---

[125] Para distinguí-la da negação no outro sistema, empregamos neste caso o símbolo $\neg$

1.8. A Dualidade entre Implicação e Desimplicação

Nos sistemas minimais em que a negação minimal está representada, ou ainda, em que o absurdo/tautologicidade minimal está representado, poderíamos tentar adicionar, por definição explícita, tanto o operador de implicação (no sistema para preservação da falsidade) quanto o operador de desimplicação (no sistema para preservação da verdade). Uma forma razoável de introduzi-los seria por meio de definição explícita em $\mathcal{M}_f$ e $\mathcal{M}$, respectivamente:

$$A \rightarrow B \equiv_{df} \neg(B \leftarrow\!\!\rightarrow A) \; [\![A \rightarrow B \equiv_{df} (B \leftarrow\!\!\rightarrow A) \leftarrow\!\!\rightarrow \top]\!] \quad \text{e} \quad A \leftarrow\!\!\rightarrow B \equiv_{df} \sim(B \rightarrow A) \; [\![A \leftarrow\!\!\rightarrow B \equiv_{df} (B \rightarrow A) \rightarrow \bot]\!]$$

Alternativamente, se quiséssemos introduzir esses conectivos nos sistemas minimais sem empregar as constantes tautologicidade/absurdo, procurando usar a refutabilidade/demonstrabilidade simples sobre os sistemas minimais, poderíamos estender $\mathcal{M}_f$ e $\mathcal{M}$ de modo a contar com regras de introdução e eliminação de $\rightarrow$ e de $\leftarrow\!\!\rightarrow$, respectivamente, tomando por base as definições acima. Abaixo, C e D são parâmetros proposicionais e C não ocorre em Γ, nem em B nem em A:

	$\mathcal{M}_f$	$\mathcal{M}$
Introduções	$\dfrac{\Gamma,[B \leftarrow\!\!\rightarrow A]^i \quad \nabla \quad C}{A \rightarrow B}\, i\rightarrow^f$	$\dfrac{\Gamma,[B \rightarrow A]^i \quad \nabla \quad C}{A \leftarrow\!\!\rightarrow B}\, i\leftarrow\!\!\rightarrow$
Eliminações	$\dfrac{\Gamma,[B]^i \quad \nabla \quad A \quad A \rightarrow B}{D}\, e\rightarrow^f$	$\dfrac{\Gamma,[B]^i \quad \nabla \quad A \quad A \leftarrow\!\!\rightarrow B}{D}\, e\leftarrow\!\!\rightarrow$

Figura II-14

Como podemos perceber, as regras de introdução acima não são independentes. Todavia, seria possível apresentar regras de introdução com condições um pouco mais abrangentes e que fossem regras completamente independentes, onde C seja um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ:

	$\mathcal{M}_f$	$\mathcal{M}$
Introduções	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \nabla\\ C\end{array} \qquad B}{A\rightarrow B}\ i\rightarrow^f (alt.)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \nabla\\ C\end{array} \qquad B}{A\leftarrow\!\!\rightarrow B}\ i\leftarrow\!\!\rightarrow (alt.)$

Figura II-15

Essas regras são mais abrangentes porque, se se cumprem as condições de introdução de $i\rightarrow^f$ *(alt.)* e de $i\leftarrow\!\!\rightarrow$ *(alt.)*, então, dentro de $\mathcal{M}_f$ e $\mathcal{M}$, respectivamente, se cumpririam as condições de introdução de $i\rightarrow^f$ e de $i\leftarrow\!\!\rightarrow$, mas não vice-versa:

$$\dfrac{B \quad B\leftarrow\!\!\rightarrow A}{\begin{array}{c}A\\ \nabla\\ C\end{array}}\ e\leftarrow\!\!\rightarrow \qquad \dfrac{B \quad B\rightarrow A}{\begin{array}{c}A\\ \nabla\\ C\end{array}}\ e\rightarrow$$

Figura II-16

Como era de se esperar, às regras de introdução da Figura II-15, corresponderão novas regras de eliminação mais fortes. Abaixo, *D* é um parâmetro proposicional:

	$\mathcal{M}_f$	$\mathcal{M}$
Eliminações	$\dfrac{A \quad A\rightarrow B}{D}\ e\rightarrow^f_1 (alt) \qquad \dfrac{A\rightarrow B}{B}\ e\rightarrow^f_2 (alt)$	$\dfrac{A \quad A\leftarrow\!\!\rightarrow B}{D}\ e\leftarrow\!\!\rightarrow_1 (alt) \qquad \dfrac{A\leftarrow\!\!\rightarrow B}{B}\ e\leftarrow\!\!\rightarrow_2 (alt)$

Figura II-17[126]

Que as regras de eliminação são mais fortes podemos perceber a partir do fato de que, de $e\rightarrow^f_1(alt)+e\rightarrow^f_2(alt)$ $[\![e\leftarrow\!\!\rightarrow_1(alt)+e\leftarrow\!\!\rightarrow_2(alt)]\!]$ derivamos $e\rightarrow^f [\![e\leftarrow\!\!\rightarrow]\!]$, mas de $e\rightarrow^f [\![e\leftarrow\!\!\rightarrow]\!]$ só conseguimos derivar $e\rightarrow^f_1(alt)$ $[\![e\leftarrow\!\!\rightarrow_1(alt)]\!]$ e não conseguimos derivar $e\rightarrow^f_2(alt)$ $[\![e\leftarrow\!\!\rightarrow_2(alt)]\!]$:

$$e\rightarrow^f_1(alt)+e\rightarrow^f_2(alt) \rightsquigarrow e\rightarrow^f \qquad\qquad e\rightarrow^f \rightsquigarrow e\rightarrow^f_1(alt)$$

$$\dfrac{\dfrac{A\rightarrow B}{B}\ e\rightarrow^f_2(alt.) \quad \begin{array}{c}\nabla\\ A \quad A\rightarrow B\end{array}}{D}\ e\rightarrow^f_1(alt.) \qquad\qquad \dfrac{A \quad A\rightarrow B}{D}\ e\rightarrow^f$$

Figura II-18[127]

[126] Segundo a regra $e\rightarrow^f_1$ *(alt)* a falsidade concomitante de *A* e de $A\rightarrow B$ é impossível. Ou seja, acarretaria a falsidade de um parâmetro proposicional *D*. Segundo a regra $e\rightarrow^f_2$ *(alt)* a falsidade de $A\rightarrow B$ acarreta a falsidade de *B*. As interpretações para as regras no sistema de preservação da verdade são estruturalmente similares.

Veremos posteriormente que esses dois naipes de regras serão interderiváveis do ponto de vista da lógica clássica. O segundo naipe aproxima-se bastante do conteúdo das tabelas de verdade. Com efeito, segundo as tabelas de verdade para os operadores proposicionais, diríamos que uma implicação é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso, exatamente o que parece dizer a regra de introdução. Simetricamente, uma desimplicação será verdadeira quando o antecedente for verdadeiro e o conseqüente falso.

A seguir, adotando o mesmo procedimento do primeiro capítulo, eliminando a representação do parâmetro proposicional e usando em seu lugar um espaço vazio, mas sem admitir a regra de enfraquecimento do lado direito para o sistema $\mathcal{M}$ e do lado esquerdo para o sistema $\mathcal{M}_f$, poderíamos dar cláusulas de definição do conceito de conseqüência dedutiva para os operadores acima, sem usar os parâmetros proposicionais. As cláusulas explicitando o conceito de conseqüência dedutiva para a implicação no sistema para preservação da falsidade $\mathcal{M}_f$, conforme as regras do primeiro naipe, aquelas da Figura II-14, seriam como abaixo:[128]

(viii)^f *caso* $\Vdash B \leftarrow\!\!\!\vdash A, \Gamma$, *então* $A \rightarrow B \Vdash \Gamma$ $(i\rightarrow^f)$

(xv)^f *caso* $A \Vdash B, \Gamma$, *então* $\Vdash A \rightarrow B, \Gamma$ $(e\rightarrow^f)$

Por seu turno, as cláusulas explicitando o conceito de conseqüência dedutiva para a desimplicação no sistema para preservação da verdade $\mathcal{M}$ seriam como a seguir (regras do primeiro naipe):

(viii)^v *caso* $\Gamma, B \rightarrow A \Vdash$, *então* $\Gamma \Vdash A \leftarrow\!\!\!\vdash B$ $(i\leftarrow\!\!\!\vdash)$

(xv)^v *caso* $B, \Gamma \Vdash A$, *então* $A \leftarrow\!\!\!\vdash B, \Gamma \Vdash$ $(e\leftarrow\!\!\!\vdash)$

Observando as duas cláusulas *(viii)*, dos dois sistemas, poderíamos ficar tentados a substituir a condição de cada uma delas de modo a obter novas cláusulas que representem regras independentes, ou seja, regras cuja condição não faça menção a nenhum símbolo lógico. Por exemplo, se usássemos as regras de introdução no segundo naipe acima, conforme a Figura II-15, as cláusulas correspondentes seriam:

(viii´)^f *caso* $\Vdash A, \Gamma$ *e* $B \Vdash \Gamma$, *então* $A \rightarrow B \Vdash \Gamma$ $(i\rightarrow^f$ *(alt)*$)$

---

[127] As derivações para $\leftarrow\!\!\!\vdash$ são similares.

[128] A numeração das cláusulas segue a numeração usada anteriormente.

(viii´)^{v} *caso* $\Gamma,A\Vdash$ *e* $\Gamma\Vdash B$, *então* $\Gamma\Vdash A\leftrightarrow B$ $(i\leftrightarrow (alt))$

Contudo, embora as condições de cada uma dessas duas cláusulas sejam suficientes para derivar as antigas condições dentro dos sistemas minimais, não é verdade que a partir das antigas condições pudéssemos derivar as condições das cláusulas acima. O exame desse ponto será feito em maior detalhe no Capítulo IV, pois ele nos permite ilustrar um problema relativo à harmonia entre as regras de introdução e eliminação. Por ora, salientamos que Bowen havia proposto a definição de um operador similar à desimplicação, usando cálculo de seqüentes tal que a regra de introdução à esquerda corresponderia à cláusula *(xv)*^{v} para $\leftrightarrow$ no sistema de preservação da verdade e a regra de introdução à direita corresponderia à cláusula *(viii´)*^{v} para $\leftrightarrow$ no sistema de preservação da verdade [Bow71].

Caso estivéssemos definindo os operadores usando as cláusulas *(viii´)* acima, dentro de cada um dos sistemas, a diferença mais relevante entre as definições dos conceitos de conseqüência dedutiva para preservação da verdade e preservação da falsidade − e, portanto, entre os cálculos de seqüentes para preservação da verdade e para preservação da falsidade − seria dada pelo número de fórmulas que admitiríamos de cada lado do sinal $\Vdash$. Isso sugere que poderíamos formular um único cálculo de seqüentes para representar os dois sistemas, ao mesmo tempo, o sistema de preservação da verdade e o de preservação da falsidade. As cláusulas desse cálculo seriam como a seguir:

(seqüente básico) $A\Vdash A$;

($\vee$*e) caso* $\Omega,A_1\Vdash\Gamma$ *e* $\Sigma,A_2\Vdash\Delta$, *então* $\Omega,\Sigma,A_1\vee A_2\Vdash\Gamma,\Delta$;

($\vee$*d) caso* $\Omega\Vdash A_1,\Gamma$ *ou* $\Omega,\Vdash A_2,\Gamma$ *então* $\Omega,\Vdash A_1\vee A_2,\Gamma$;

($\wedge$*e) caso* $\Omega,A_1\Vdash\Gamma$ *ou* $\Omega,A_2\Vdash\Gamma$ *então* $\Omega,A_1\wedge A_2\Vdash\Gamma$;

($\wedge$*d) caso* $\Omega,\Vdash A_1,\Gamma$ *e* $\Sigma\Vdash A_2,\Delta$, *então* $\Omega,\Sigma\Vdash A_1\wedge A_2,\Gamma,\Delta$;

($\rightarrow$*e) caso* $\Omega\Vdash A_1,\Gamma$ *e* $\Sigma,A_2\Vdash\Delta$, *então* $\Omega,\Sigma,A_1\rightarrow A_2\Vdash\Gamma,\Delta$;

($\rightarrow$*d) caso* $\Omega,A_1\Vdash A_2,\Gamma$, *então* $\Omega\Vdash A_1\rightarrow A_2,\Gamma$;

($\leftrightarrow$*e) caso* $\Omega,A_2\Vdash A_1,\Gamma$, *então* $\Omega,A_1\leftrightarrow A_2\Vdash\Gamma$;

($\leftrightarrow$*d) caso* $\Omega,A_1\Vdash\Gamma$ *e* $\Sigma\Vdash A_2,\Delta$, *então* $\Omega,\Sigma\Vdash A\leftrightarrow B,\Gamma,\Delta$;

($\forall$*e) caso* $\Omega,A[a/\tau]\Vdash\Gamma$, *então* Ω, $\forall xA[a/x]\Vdash\Gamma$;

($\forall$*d) caso* $\Omega\Vdash A,\Gamma$ *tal que o parâmetro a não ocorre em* Γ *e não ocorra em* Ω, *então* $\Omega\Vdash\forall xA[a/x],\Gamma$

($\exists e$) caso $\Omega, A \Vdash \Gamma$ e o parâmetro a não ocorre em Γ nem Ω, então $\Omega, \exists x A[a/x] \Vdash \Gamma$;

($\exists d$) caso $\Omega, \Vdash A[a/\tau], \Gamma$, então $\Omega, \Vdash \exists x A[a/x], \Gamma$.

Com exceção das cláusulas para a desimplicação, essas são basicamente as regras operacionais do cálculo de seqüentes clássico para as constantes lógicas de primeira ordem. Entretanto, os contextos Ω, Γ, Σ e Δ estão sendo justapostos, ao passo que, na apresentação das regras operacionais de Gentzen ([Gen35], págs. 84 e 85), eles devem ser idênticos em cada premissa e amalgamados na conclusão. Se, nos sistemas acima, admitíssemos os enfraquecimentos sobre seqüente vazio à direita e sobre seqüente vazio à esquerda, respectivamente, isso equivaleria a admitir o princípio de *ex falso quodlibet* para o sistema de preservação da verdade e do seu correlato *ex vero quodlibet* para o sistema de preservação da falsidade, respectivamente. Esse sistema mereceria um estudo mais cuidadoso, mas não o faremos nesta investigação.

Da mesma forma que apresentamos os seqüentes para as regras de eliminação da Figura II-14, poderíamos apresentar cláusulas definindo a relação de conseqüência dedutiva para as regras de eliminação presentes na Figura II-17:

(xv´)	$\Vdash A_1, A_1 \rightarrow A_2$ (ou *caso* $A_1 \Vdash \Gamma$ *e* $A_1 \rightarrow A_2 \Vdash \Delta$, *então* $\Vdash \Gamma, \Delta$)	$(e \rightarrow^{f}_{1}(alt))$
	$A_2 \Vdash A_1 \rightarrow A_2$ (ou *caso* $A_1 \rightarrow A_2 \Vdash \Gamma$, *então* $A_2 \Vdash \Gamma$)	$(e \rightarrow^{f}_{2}(alt))$
(xv´)	$A_1, A_1 \leftrightarrow A_2 \Vdash$ (ou *caso* $\Gamma \Vdash A_1$ *e* $\Delta \Vdash A_1 \leftrightarrow A_2$, *então* $\Gamma, \Delta \Vdash$)	$(e \leftrightarrow_1 (alt))$
	$A_1 \leftrightarrow A_2 \Vdash A_2$ (ou *caso* $\Gamma \Vdash A_1 \leftrightarrow A_2$, *então* $\Gamma \Vdash A_2$)	$(e \leftrightarrow_2 (alt))$

Chamamos a atenção para o fato de que a regra $e \rightarrow^{f}_{1}(alt.)$ é representada clausalmente por um princípio que podemos chamar de princípio da **alternativa excluída** (em sua primeira formulação) e do qual trataremos a seguir. Chamamos a atenção também para o fato de que a regra $e \rightarrow^{f}_{2}(alt)$ está representada por um princípio relacionado à implicação irrelevante no sistema para preservação da verdade, mais precisamente introdução de implicação irrelevante no topo de uma derivação.

1.9. Sistema Minimal para a Falsidade com Implicação

Vamos chamar de **Sistema Minimal para Preservação da Falsidade com Implicação** ($\mathcal{M}_{fd\rightarrow}$) o sistema resultante da retirada das regras de introdução e eliminação de $\leftrightarrow$ e da adição das regras para implicação sobre $\mathcal{M}_f$. Mais precisamente, definiremos o sistema $\mathcal{M}_{fd\rightarrow}$ com as seguintes regras: $i\vee^{f}$, $e\vee^{f}e$, $e\vee^{f}d$, $i\wedge^{f}e$, $i\wedge^{f}d$, $e\wedge^{f}$, $i\rightarrow^{f}(alt)$, $e\rightarrow^{f}_{1}(alt)$, $e\rightarrow^{f}_{2}(alt)$, $i\forall^{f}$, $e\forall^{f}$, $i\exists^{f}$ e $e\exists^{f}$.

Adiante, faremos uma comparação desse sistema com um sistema proposto por López-Escobar.[129]

1.10. Convergência entre as Duas Noções de Refutabilidade acima Definidas

Acima, definimos uma noção de refutabilidade condicional representada dentro do sistema para preservação da verdade/provabilidade que consistia em mostrar que um determinado parâmetro proposicional *B* se seguia de um determinado conjunto de hipótese Γ,A, tal que *B* não estaria presente em Γ,A. Neste caso, dizíamos que *A* é refutável sob as hipóteses Γ. Por outro lado, também definimos um conceito de refutabilidade representado dentro do sistema para preservação da falsidade/refutabilidade tal que uma fórmula *A* seria considerada refutável a partir de um conjunto Γ de fórmulas refutáveis se derivássemos *A* diretamente de Γ (lembrando que estamos supondo a falsidade/refutabilidade das fórmulas de Γ). Queremos agora investigar as conexões entre as duas noções.

O símbolo $\vdash$ tem se prestado a algumas interpretações diferentes, que distam da sua concepção original como sinal de asserção. Um desses sentidos mais comuns é o de derivabilidade, a qual, em geral, é considerada uma noção sintática. Do nosso ponto de vista, duas leituras distintas poderiam ser empregadas sobre este símbolo, dependendo de que tipo de derivabilidade estamos tratando: derivabilidade em um sistema para a preservação da verdade ou derivabilidade em um sistema para preservação da falsidade.

Normalmente, admitimos a ocorrência de uma multiplicidade de fórmulas do lado esquerdo de $\vdash$, representando, com essa multiplicidade, uma lista de hipóteses, e, do lado direito, uma única fórmula, a conclusão. A razão parece ser a de que as derivações são pensadas como a representação de um argumento e nos argumentos, embora possamos ter várias premissas, sempre temos uma única conclusão. Considerando agora o sistema minimal para preservação da verdade, poderíamos interpretar a expressão $\Gamma\vdash_{\mathcal{M}}A$ de duas maneiras distintas.

(i.V) se todas as fórmulas de Γ forem verdadeiras/demonstráveis, então a fórmula A será verdadeira/demonstrável.

---

[129] Esse sistema pode ser considerado como uma forma de apresentar o conceito de *falsidade construtiva* de Nelson [Nel49]. Na verdade, Nelson não dá regras de dedução, mas a definição *1*, à pág. 17, pode ser interpretada como uma caracterização de regras de introdução. Notamos também que Prawitz formula regras de dedução natural similares às regras do sistema recém-definido, usando, entretanto, o operador de negação, em [Pra65], Apêndice B. Ou seja, o sistema Prawitz é um sistema para preservação da verdade. Talvez não seja demasiado, também, notar que as regras que Prawitz apresenta são uma reformulação das regras que F.Fitch apresentou em seu livro *Symbolic Logic*, de 1952. Segundo Prawitz, a noção capturada por Fitch seria uma extensão da noção de falsidade construtiva de Nelson.

(ii.V) se a fórmula A for falsa/refutável, então pelo menos uma das fórmulas de Γ será falsa/refutável.

A seguir, de modo similar, as interpretações que daríamos à mesma expressão de derivabilidade dentro do sistema minimal de preservação da falsidade/refutabilidade, $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_f} A$, seriam:

(i.F) se todas as fórmulas de Γ forem falsas/refutáveis, então a fórmula A será falsa/refutável.

(ii.F) se a fórmula A for verdadeira/demonstrável, então pelo menos uma das fórmulas de Γ será verdadeira/demonstrável.

Ora, vemos que as cláusulas que tratam da transmissão da verdade em cada um dos sistemas, ou seja, *(i.V)* e *(ii.F)*, são bastante assimétricas entre si, assim como as cláusulas que tratam da preservação da falsidade, *(ii.V)* e *(i.F)*, o são. Podemos dizer que a forma pela qual um sistema representa a transmissão da verdade é bastante distinta da forma pela qual o outro a representa. O mesmo vale para a transmissão da falsidade. Isso, nos parece, indicaria que as duas noções de refutabilidade definidas em cada um dos sistemas são de fato noções distintas. Todavia, não poderemos dizer que sejam irreconciliáveis. Mostraremos por que.

Se admitíssemos uma multiplicidade de fórmulas à direita do símbolo de derivabilidade, as interpretações que deveríamos dar à expressão $\Gamma \vdash \Delta$ para o sistema de preservação da verdade seriam:

(iii.V) se todas as fórmulas de Γ forem verdadeiras/demonstráveis, então pelo menos uma das fórmulas de Δ será verdadeira/demonstrável.

(iv.V) se todas as fórmulas de Δ forem falsas/refutáveis, então pelo menos uma das fórmulas de Γ será falsa/refutável.

As interpretações para o sistema de preservação da falsidade seriam:

(iii.F) se todas as fórmulas de Γ forem falsas/refutáveis, então pelo menos uma das fórmulas de Δ será falsa/refutável.

(iv.F) se todas as fórmulas de Δ forem verdadeiras/demonstráveis, então pelo menos uma das fórmulas de Γ será verdadeira/demonstrável.

A partir das cláusulas para seqüentes múltiplos dos dois lados do símbolo ⊢ apresentadas anteriormente, ao fim da secção 1.8, se houvesse derivabilidade $\Gamma \vdash \Delta$, então, da esquerda para a direita, teríamos uma expressão de derivabilidade no sistema para preservação da verdade e, da

direita para a esquerda, a derivabilidade no sistema para preservação da falsidade. Além disso, as interpretações *(iii.V)* e *(iv.F)* convergiriam, assim como convergiriam as interpretações *(iv.V)* e *(iii.F)*.[130] Logo, se amalgamássemos os dois sistemas, para a verdade e para a falsidade, em um só, poderíamos relacionar as duas noções de refutabilidade definíveis em cada um dos sistemas.

Se uma fórmula A for refutável no sistema para preservação da falsidade, a partir de uma lista de fórmulas refutáveis Γ, então valeria a seguinte relação de derivabilidade (considerando que, da esquerda para a direita, temos a leitura do sistema para preservação da verdade e, da direita para a esquerda, a preservação da falsidade): $A\vdash\Gamma$. Se, além disso, A fosse refutável *tout court* no sistema para preservação da falsidade, então Γ seria vazio. Logo, teríamos $A\vdash$, ou seja, A seria refutável no sistema para preservação da verdade. De outro lado, se A for refutável no sistema para preservação da verdade, a partir de um conjunto de hipóteses Γ, então valeria a seguinte relação de derivabilidade: $\Gamma,A\vdash$. Novamente, se Γ fosse vazio, A seria refutável *tout court*, $A\vdash$, no sistema para preservação da verdade. Conseqüentemente, lendo a relação de derivabilidade da direita para a esquerda, A seria refutável (ou seja derivável) no sistema para preservação da falsidade.

Contudo, é preciso notar, embora não apareça explicitamente, a possibilidade de amalgamar os dois sistemas em um só é resultado de haver admitido uma multiplicidade de fórmulas do lado direito do símbolo. Mas isso equivale a admitir um princípio lógico que não aparece explicitamente nas cláusulas. Esse princípio é um princípio de dedução indireta[131] e, em dedução natural, corresponde à regra *P*. A propriedade de simetria da relação de derivabilidade equivale à admissão de um princípio de dedução indireta.

2. Sistemas Minimais com Dedução Indireta

Podemos formular um sistema com a regra de dedução indireta já examinada brevemente no primeiro capítulo, a saber, a regra *P*, adicionando-a ao sistema $\mathcal{M}$. Chamamos esse sistema de **Sistema Peirce** ($\mathcal{P}$) e suas regras são: $i\wedge$, $e\wedge$, $i\vee$, $e\vee$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$, $e\forall$, $i\exists$ e $e\exists$, por um lado; *P*, por outro. Também será possível empregar uma generalização de *P*, como veremos em breve. Nesse

---

[130] Em *(iii.F)* e *(iv.F)* deveríamos trocar Γ e Δ de lugar.

[131] Uma terceira leitura dos seqüentes é possível. Para um seqüente $\Gamma\vdash_{\mathcal{M}}\Delta$ poderíamos interpretá-lo como a afirmação: *pelo menos uma das fórmulas de* Γ *é falsa/refutável e/ou pelo menos uma das fórmulas de* Δ *é verdadeira/demonstrável*. A leitura só é viável quando as fórmulas recebem uma interpretação.

sistema não existem regras que estabeleçam o uso do símbolo $\perp$ ou do operador de negação. A seguir, apresentamos alguns fatos básicos acerca dessa regra de dedução indireta[132].

Em primeiro lugar, a fórmula ou **axioma de Peirce** é demonstrável usando a regra *P* e a regra é derivável em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ se assumimos como suposição o axioma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\rightarrow B]^1 \quad [(A\rightarrow B)\rightarrow A]^2}{A}\,e\rightarrow}{A}\,1\,P}{((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A}\,2\,i\rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{[A\rightarrow B]^1}{\nabla}}{\dfrac{A}{(A\rightarrow B)\rightarrow A}\,1\,i\rightarrow} \quad \dfrac{((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A}{A}\,e\rightarrow$$

Figura II-19

No sistema $\mathcal{P}$, qualquer fórmula *A* é logicamente equivalente a $(A\rightarrow B)\rightarrow A$, para qualquer *B*. Segundo vimos, Russell definia a lógica clássica empregando o axioma da redutibilidade. Ele nada mais é que o axioma Peirce. Por si só, essa razão já é suficiente para justificar um exame das características dedutivas desse princípio nesta tese.

Em segundo lugar, uma fórmula estruturalmente bastante similar a um terceiro excluído será demonstrável neste sistema:

$$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\vee(A\rightarrow C)}\,i\vee \quad [(A\vee(A\rightarrow C))\rightarrow C]^2}{C}\,e\rightarrow}{A\rightarrow C}\,1\,i\rightarrow}{A\vee(A\rightarrow C)}\,i\vee}{\mathbf{A\vee(A\rightarrow C)}}\,2\,P$$

Figura II-20

Dado que a negação é definida da forma $\sim A\equiv_{df} A\rightarrow\perp$, a fórmula final da derivação acima é similar ao terceiro excluído, só que no lugar do absurdo temos uma fórmula qualquer *C*. Todavia, como não existem regras de introdução e de eliminação para $\perp$ em $\mathcal{P}$, ou seja, como a noção de absurdo não está contemplada nesse sistema, notamos que a derivação acima não estaria exatamente provando o terceiro excluído, mas algo levemente distinto. A regra *P* está intimamente relacionada a uma regra que chamaremos de **regra de alternativa excluída** (***ae***):

[132] Alguns deles também apresentados em [Sel89].

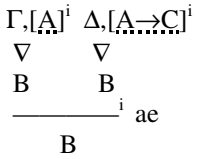


Figura II-21

Essa regra é equivalente à regra *P*. Elas são interderiváveis em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$:

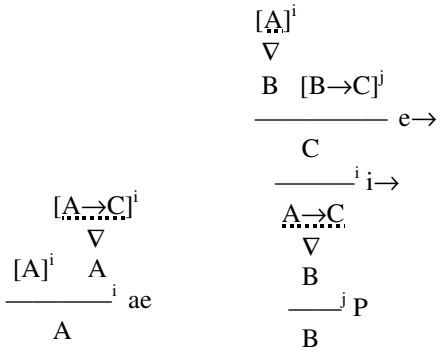


Figura II-22

A regra *ae* lembra uma dedução por casos com base no terceiro excluído ([Leg96], pág. 175). Havíamos visto que a regra de alternativa excluída correspondia a uma parcela das regras de $e\rightarrow$ em um sistema para preservação da falsidade, quando essas regras eram formuladas na sua versão mais forte, aquela que tomava por intuição básica as tabelas de verdade.

Em terceiro lugar, a seguinte regra, que chamaremos de **cancelamento da dupla implicação** (***cdi***), também é interderivável com a regra *P* no sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$:

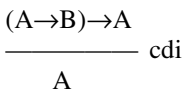


Figura II-23

A demonstração da interderivabilidade é como a seguir:

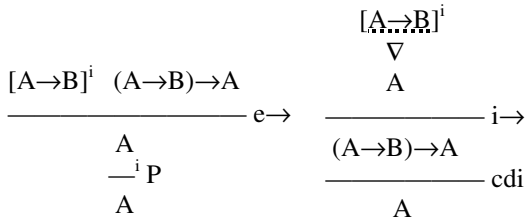


Figura II-24

A regra *cdi* tem alguma similaridade com a conhecida regra de **cancelamento da dupla negação** (***cdn***):

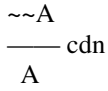


Figura II-25

Porém, as duas regras só serão interderiváveis em um sistema que contenha o princípio de *ex falso quodlibet*. Veremos isso em breve.

Em resumo, adotando nada mais que o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ como esteio, as regras *P*, *ae* e *cdi* são todas equivalentes. São todas elas regras de dedução indireta. Além disso, o único operador lógico que elas contêm é a implicação.

Em quarto lugar, com respeito à forma da regra *P*, uma versão mais potente da mesma regra, que chamaremos de **Peirce generalizada** (***Pg***), pode ser dada como a seguir, para $n \geq 0$:

$$\begin{array}{c} \Gamma,[\underline{A \rightarrow (B_1)}],\ldots,[\underline{A \rightarrow (B_n)}] \\ \vdots \\ A \\ \hline A \end{array}\ {}^{i}\,Pg$$

Figura II-26

Nessa regra, a conclusão *A* dependeria de uma derivação subsidiária que parte das suposições $A \rightarrow (B_1),\ldots,A \rightarrow (B_n)$ onde $B_1,\ldots,B_n$ são fórmulas quaisquer, possivelmente distintas entre si, para $n \geq 0$. Da mesma forma que antes, são admitidas aplicações que não descartem todas as ocorrências topo das formas $A \rightarrow (B_1),\ldots,A \rightarrow (B_n)$. Uma aplicação irrelevante dessa regra ou da regra *P* resultaria ser, evidentemente, uma dedução idêntica. Apesar da regra acima ser uma generalização de *P*, as duas são interderiváveis em $\mathcal{M}$, embora não o sejam em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$. Cada um dos $A \rightarrow B_i$, para $1 \leq i \leq n$, poderia ser obtido da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^{p} \quad A \rightarrow (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)}{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n}\ e\rightarrow}{B_i}\ \text{várias } e\wedge}{A \rightarrow (B_i)}\ {}^{p}\,i\rightarrow$$

Figura II-27

Posteriormente, estaria derivada a regra *Pg* se aplicássemos uma única instância de *P* que descartasse todas as ocorrências da forma $A \rightarrow (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$. Como a regra *P* é caso particular de *Pg*, a volta é trivial[133].

Assim, por causa da interderivabilidade de *P* e *Pg* em um sistema tão básico quanto $\mathcal{M}$, doravante, com o intuito de simplificar a construção das derivações, empregaremos o esquema

[133] D. Alves observa que uma única aplicação de *Pg* corresponderia a uma seqüência de aplicações de *P*. Com efeito, *Pg* poderia ser considerada admissível em $\mathcal{P}$ por essa razão, já que para toda derivação usando *Pg* haveria outra usando somente *P*, com a mesma conclusão e partir das mesmas hipóteses.

abaixo, que chamaremos de **regra Peirce**, para indicar ambiguamente tanto uma aplicação da regra *P* quanto da regra *Pg*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\underline{A\rightarrow\varphi}]^{i}\\ \nabla\\ A\end{array}}{A}\ \text{Peirce}$$

Figura II-28

Segundo esse esquema, estará permitido o descarte de ocorrências topo que tenham a forma $A\rightarrow\varphi$, onde φ pode ser substituída arbitrariamente por qualquer outra fórmula e não é requerido que φ seja substituída de forma homogênea em cada uma das ocorrências topo. Infelizmente, nesse caso, o emprego de um parâmetro proposicional no lugar de φ não funcionaria, já que admitimos que uma mesma aplicação da regra pode descartar ocorrências topo sintaticamente diferentes. A estranha formulação dessa regra se deve ao fato de querermos, de algum modo, capturar um elemento do significado das deduções indiretas que não é imediatamente visível sobre a regra *P*. Para uma expressão formal mais concisa desse conteúdo, estamos fazendo uso de um símbolo que sequer poderia ser considerado uma metavariável.

Em quinto lugar, o sistema definido só contém uma regra que poderia ser rejeitada desde o ponto de vista construtivista, exatamente a regra *Peirce*. Aliás, há muito tempo, conhecemos críticas ao uso de regras de dedução indireta, mais precisamente críticas às chamadas provas por impossibilidade. Elas podem ser encontradas, por exemplo, na Lógica de Port-Royal ([Arn62], págs. 328-329). Como veremos a seguir, o exame do conteúdo dessa regra revela que sua principal característica consiste em permitir que certos tipos especiais de descarte de suposições sejam feitos.

Passemos ao problema da interpretação das regras de dedução indireta.

Uma das possibilidades, tomando por base a regra *ae* da Figura II-21, consistiria em dizer que duas fórmulas da forma A e da forma $A\rightarrow\varphi$ são tais que, para um conjunto qualquer de fórmulas $\Gamma\cup\Delta$, uma daquelas duas fórmulas será conseqüência dedutiva do conjunto $\Gamma\cup\Delta$. Isso implicaria a existência de uma dedução de B a partir de $\Gamma\cup\Delta$. Suponhamos, provisoriamente, que essa fosse a interpretação adequada.

Para continuar, seria preciso agora examinar duas possibilidades diferentes de conceber as fórmulas e o uso dos parâmetros dentro da linguagem: o uso conteudístico e o uso algébrico. Estamos chamando de uso conteudístico aquele em que os parâmetros só podem ser substituídos por outras expressões da mesma categoria semântica, mas que não contenham parâmetros. No uso algébrico, essa restrição não se aplicaria.

Se estivéssemos considerando uma linguagem que fizesse apenas um uso conteudístico dos parâmetros, ou seja, se as fórmulas fossem meros coadjuvantes para representar a forma lógica de uma proposição, então a questão se resumiria a determinar se, para qualquer proposição A, uma das duas seguintes fórmulas seria verdadeira: A ou $A\rightarrow\varphi$.[134] Considerando que toda proposição verdadeira é conseqüência dedutiva de qualquer conjunto de proposições, ao menos uma das duas proposições seria conseqüência dedutiva de $\Gamma\cup\Delta$, se estivesse garantido que ao menos uma das duas seja verdadeira. Se a proposição A tiver um valor de verdade definido, então ela será falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, o problema estará resolvido. Se for falsa, será preciso garantir que $A\rightarrow\varphi$ seja verdadeira. Ora, da forma como estamos interpretando a implicação nesta tese, isso só seria possível se assumíssemos a validade do princípio de *ex falso quodlibet* ou se a interpretação da implicação envolvesse o princípio de que o falso implica qualquer coisa.[135]

Como já dissemos, o princípio de *ex falso quodlibet* está sob julgamento nesta tese e, de qualquer modo, como o sistema $\mathcal{P}$ não contempla este princípio, não poderíamos usá-lo para interpretar a regra de dedução indireta.

Considerando que estivéssemos fazendo um uso algébrico dos parâmetros da linguagem, então com certeza não estaríamos intitulados a sustentar que qualquer uma das duas fórmulas, A ou $A\rightarrow\varphi$, seria conseqüência dedutiva de $\Gamma\cup\Delta$. Lembrando que a expressão $a=b$ está sendo considerada uma fórmula no âmbito desta tese, uma fórmula que expressa uma forma proposicional, não é verdade que $a=b$ ou $a=b\rightarrow\varphi$, para um φ qualquer, sejam conseqüência dedutiva de qualquer conjunto de fórmulas. Não é correto que $1=1\Vdash a=b$, tampouco que $1=1\Vdash a=b\rightarrow a'=b$. De fato, a fórmula $a=b$ não pode ser considerada nem verdadeira nem falsa. Aliás, sequer poderíamos dizer que as duas fórmulas, $a=b$ e $a=b\rightarrow a'=b$, são formalmente corretas ou dizer que elas são formalmente incorretas[136]. Cada uma delas terá instâncias verdadeiras e instâncias falsas.

Como estamos assumindo uma interpretação algébrica dos parâmetros, lembrando que o princípio de *ex falso quodlibet* está sob júdice, não consideraremos admissível dizer que as regras de dedução indireta estabeleceriam que, para uma fórmula qualquer A, ao menos uma das duas, A ou $A\rightarrow\varphi$, poderá ser deduzida diretamente a partir de qualquer conjunto de hipóteses dado. Esse seria o caso se pudéssemos garantir que para um A qualquer ou A é demonstrável ou $A\rightarrow\varphi$ é

---

[134] Na verdade uma lista infinita de fórmulas da forma $A\rightarrow\varphi$.
[135] De todo modo, a partir dessa propriedade, usando a regra de *modus ponens*, teríamos o *ex falso quodlibet*.
[136] Com certeza, ambas são não-demonstráveis.

demonstrável. Mas não podemos.

É preciso, pois, passar a uma outra forma de interpretar as regras de dedução indireta. A forma que nos parece mais adequada, tomando por base a regra *Peirce*, consiste em dizer que A já seria conseqüência dedutiva de Γ, sem que isto signifique que existiria uma derivação direta deste fato, quando A for conseqüência dedutiva das suposições Γ junto com suposições da forma $A \rightarrow \varphi$, para qualquer que seja φ. Desse modo, teríamos uma extensão do conceito de conseqüência dedutiva. De forma correlata, a regra *ae* significaria que uma fórmula será dedutível de Γ,Δ quando for dedutível de Γ,A e dedutível de $\Delta,A \rightarrow \varphi$. Assim, é a nova noção de dedutibilidade que diferiria daquilo que um construtivista chamaria de dedutibilidade direta. Entretanto, seria preciso adotar uma outra interpretação distinta da interpretação construtivista para o conceito de hipótese se quisermos tornar plausível nossa proposta. Pelo menos, é preciso uma interpretação do conceito de hipótese que seja distinta da concepção intuicionista de assunção, que, aliás, já nos parecia problemática.

O problema da validade da regra *Peirce* e de suas equivalentes é de suma importância. Em geral, os construtivistas sentem-se incomodados com tais regras. Os intuicionistas em particular as rejeitam, o que, a nosso ver, deve-se em parte à concepção que eles mantêm sobre o que vem a ser uma hipótese. Diriam eles que, se assumir uma proposição é o mesmo que supor a prova da proposição, a regra *Peirce* só poderia ser considerada construtivamente válida caso a seqüência de passos que leva de $A \rightarrow \varphi$ até A fosse tal que ela transformasse provas de $A \rightarrow \varphi$ em uma prova de A. Porém, por sua vez, as provas de $A \rightarrow \varphi$ deveriam ser seqüências de passos que transformariam uma prova de A em uma prova de φ, qualquer que fosse a fórmula φ envolvida. Mas, supondo a posse dessa última seqüência de passos, não é possível ver como ela poderia ser empregada para obter uma prova de A.

Naturalmente, para que uma regra de dedução indireta possa ser acolhida em um sistema lógico, será preciso considerar um outro arcabouço teórico distinto daquele contido na concepção intuicionista. Do nosso ponto de vista, esse arcabouço existe e nele as suposições serão entendidas de forma distinta. Lembramos que no, capítulo anterior, apresentamos uma concepção do conceito de suposição que é distinta da concepção intuicionista. Também, examinamos o problema de saber que papel elucidatório atribuiríamos às derivações: elucidação de provas ou de conseqüência dedutiva?

Para nós, supor uma proposição não será o mesmo que assumir a proposição. Na regra de dedução indireta *Peirce*, as ocorrências da forma $A \rightarrow \varphi$ não seriam assunções intuicionistas, seriam suposições. De forma intuitiva, a principal diferença estaria no fato de que um ato de

suposição é um ato distinto de um ato de asserção. Quando dizemos a alguém "*suponha que p*", fazemos um convite para tomar *p* como ponto de partida de uma cadeia de raciocínios; por outro lado, quando dizemos "*p*", afirmando/asserindo *p*, estabelecemos um compromisso com a veracidade de *p* – dois atos completamente distintos. Assumir uma proposição, da forma como os intuicionistas entendem esse ato, envolveria um ato de compromisso junto com um ato de convite. Seria um compromisso com a verdade de *p* junto com um convite para supor a posse da prova de *p* ou para supor que a prova de *p* tenha sido dada.

O arcabouço teórico sob o qual a regra *Peirce* poderia ser admitida consistiria em dizer que essa regra explicita uma parcela do conteúdo da noção de conseqüência dedutiva: *uma proposição/forma proposicional A não poderia ser conseqüência dedutiva daquela outra proposição/forma proposicional da forma* $A \rightarrow \varphi$*, qualquer que seja* φ. Aliás, sob essa interpretação, considerando que a refutabilidade simples de uma fórmula pode ser definida como o fato de que dessa fórmula decorre um parâmetro proposicional, então a regra implicaria que uma fórmula não poderia ser conseqüência dedutiva da sua refutabilidade simples. Porém, a regra nos diz mais que isso. Ao admitir que o descarte possa ser efetuado sobre quaisquer fórmulas da forma $A \rightarrow \varphi$, a regra quase diria que uma fórmula não pode ser conseqüência dedutiva da sua absurdidade ou trivialidade, ao menos na medida em que o conjunto de regras empregado na dedução seja consistente. É como se estivéssemos dizendo que todas as suposições da forma $A \rightarrow \varphi$ utilizadas constituiriam, na verdade, uma parcela da afirmação da absurdidade de *A*, ou seja, que *A* implica qualquer coisa[137].

Com a apresentação desses pontos de vista não estamos dizendo que a noção de conseqüência dedutiva resultante de admitir a regra de dedução indireta seja clara e transparente. Com efeito, é a obscuridade da noção de conseqüência, resultante da admissão das regras de dedução indireta, que gera as críticas construtivistas. Consideremos que, desde o arcabouço teórico que foi proposto no primeiro capítulo, se, ao argumentar, devemos mostrar como se dá a relação de conseqüência dedutiva entre premissas e conclusão, seria muito natural perguntar o que estaria sendo mostrado por meio do conceito de conseqüência dedutiva quando o princípio *Peirce* estivesse sendo admitido. As condições de aplicabilidade da regra *Peirce* implicam a impossibilidade de demonstrar $A \rightarrow \varphi$, qualquer que seja φ, quando o conjunto de regras utilizado é consistente e também Γ é consistente. Em outros termos, implica a impossibilidade de mostrar a refutabilidade simples de *A* sob essas suposições, caso contrário teríamos a dedução de um

[137] D. Alves observa que de *A* e $A \rightarrow \varphi$ usando $e\rightarrow$ concluiríamos φ. Logo, $(A \wedge (A \rightarrow \varphi)) \rightarrow \varphi$. Se substituímos $\bot$ no lugar de φ temos o princípio de não-contradição.

parâmetro proposicional a partir de um conjunto Γ consistente.

A regra *Peirce* é uma forma de assumir que aquele tipo de situação capturado pelas condições de aplicabilidade da regra já garante que a conclusão deve ser conseqüência dedutiva das demais suposições que não serão descartadas.

Como já havíamos dado uma definição clausal do conceito de conseqüência dedutiva para a lógica minimal, se quiséssemos que o conceito de conseqüência dedutiva da Definição I-2 viesse a refletir a presença da regra *Peirce*, deveríamos acrescentar a seguinte cláusula:

(xvi) caso $\Gamma, A\rightarrow\varphi\vdash A$, *então* $\Gamma\Vdash A$.[138]

Alguém que considere a regra *Peirce* admissível talvez também pudesse admitir duas novas formulações para as regras de $i\forall$ e $e\exists$. Como a restrição sobre o parâmetro é essencial à correção de ambas regras, elas poderiam ser formuladas de forma menos restritiva:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\ ,\ \underline{A\rightarrow\varphi} \\ \nabla \\ A\end{array}}{\forall xA[a/x]}\ *i\forall* \qquad \frac{\begin{array}{ccc}\Gamma & & \Delta\ ,\ [\underline{A}]^{i}\ ,\ \underline{C\rightarrow\varphi} \\ \nabla & & \nabla \\ \exists xA[a/x] & & C\end{array}}{C}\ {}^{i}\ *e\exists*$$

Figura II-29

Na primeira, exigiríamos que o parâmetro a não ocorresse nas suposições de Γ, ou seja, poderia ocorrer nas suposições da forma $A\rightarrow\varphi$ – e, de fato, ocorrerá se a aplicação da regra de introdução do universal for própria. Na segunda, exigiríamos que o parâmetro a não ocorresse nas suposições de Δ e na fórmula C. Ele poderia ocorrer nas suposições da forma $C\rightarrow\varphi$. Em ambos os casos, evidentemente, torna-se impossível uma interpretação construtiva dos procedimentos dedutivos.

Em sexto lugar, o sistema $\mathcal{P}$ poderia ser formulado com uma modificação das regras de introdução e eliminação do sistema $\mathcal{M}$. Como a premissa imediata e a conclusão da regra *Peirce* são idênticas, poderíamos simplesmente acrescentar, sobre cada uma das regras de introdução e eliminação para cada constante lógica, um descarte de fórmulas topo da forma $A\rightarrow\varphi$, ou seja, um descarte *à la Peirce*. Exemplificamos abaixo com as regras para a conjunção:

---

[138] Usando a apresentação conjuntista da Definição I-1, a cláusula seria da seguinte forma: *se* $\Gamma\cup\{A\rightarrow B:B$ *é uma fórmula qualquer*$\}\vdash A$, *então* $\Gamma\Vdash A$.

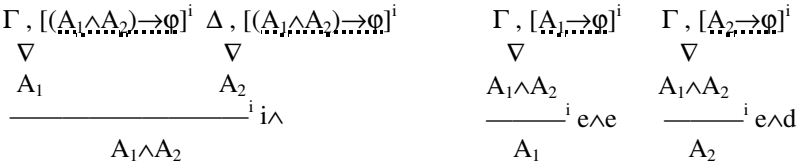


Figura II-30

Essa situação é interessante e a ela faremos referência quando estivermos discutindo a natureza das operações de eliminação de rodeios no quarto capítulo.

Alternativamente, seria possível aplicar os descartes *à la Peirce* somente sobre as regras de eliminação, sem perda de poder dedutivo, pois, desse modo, a regra *Peirce* seria derivável e, assim, obteríamos um sistema onde pelo menos as regras de introdução são independentes[139]:

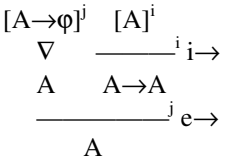


Figura II-31

Antecedentes históricos importantes na apresentação da lógica com axioma ou regra *Peirce* são Russell ([Rus03][140], pág.17), Curry ([Cur63], pág. 182) e Seldin [Sel89]. [141]

Russell oferece o princípio em forma de axioma, que ele denomina **axioma da redução**.

Curry, por sua vez, faz uma apresentação da lógica via dedução natural para o sistema minimal proposicional com a adição da regra *Pk*, regra que acima chamamos de regra *P*. Em outros termos, ele define um sistema equivalente à versão proposicional do nosso sistema $\mathcal{M}$, chamando-o de sistema *TA*, tal que, após o acréscimo da regra *Pk*, o sistema passa a se chamar *TC*. Esse sistema é equivalente à versão proposicional do nosso sistema $\mathcal{P}$. Em seguida, Curry apresenta o cálculo de seqüentes com uma regra equivalente à regra *P*, a que ele chama de regra *Px*. Curry considerará diversas variações possíveis sobre o sistema de seqüentes, por exemplo, um sistema de seqüentes chamado LC_1, cujo sucedente só contém uma ocorrência de fórmula, e um sistema LC_m, cujo sucedente poderá conter mais de uma ocorrência de fórmula. Neste último caso, ele também demonstrará que a regra *Px* é redundante, conforme o corolário 8.3 ([Cur63], pág. 223). Finalmente, é ainda importante observar que Curry formula um teorema de separação

---

[139] Infelizmente, esse último sistema não tem boas propriedades, como veremos no quinto capítulo.

[140] É preciso observar que a formulação de Russel é um pouco mais complexa que a do axioma de Peirce usual. Russell, em 1903, quer garantir também que as variáveis que ocorrem no axioma sejam variáveis para proposições e, para isso, ele formula o axioma da seguinte forma: *If p implies p and q implies q, then "'p implies q' implies p" implies p*. Ele diz que este princípio é equivalente a uma série de outros princípios, mas que ele prefere este porque ele só envolve a implicação.

[141] Também encontramos referências à regra *Peirce* em [Zim01], em [Alv01] e em [Les01].

para o sistema *TC*, conforme o corolário 2.4 ([Cur63], pág. 227). Nesse caso, uma constante lógica © é dita **separável** quando todo teorema, em que © não ocorre, for demonstrável sem o uso das regras que envolvem ©[142]. No sistema *TC*, ou seja, no sistema $\mathcal{P}$ proposicional, qualquer teorema deverá conter ao menos uma ocorrência do símbolo de implicação, pois nenhuma outra regra é capaz, individualmente, de descartar todas as ocorrências topo de uma derivação. Dessa forma, como qualquer teorema terá, ao menos, uma ocorrência de implicação, a implicação será separável, dado que *Pk* poderia ser considerada como uma regra que envolve a implicação. Em resumo, nesse caso, a propriedade de separação não parece significar muito. A regra *Pk* só será aplicada na demonstração de um teorema se esse teorema contém o condicional.

Curry mostra mais do que a redundância da regra *Px*. Ele mostra que os sistemas de seqüentes com uma única fórmula no sucedente, nos quais a regra está presente, equivalem a outro sistema de seqüentes sem essa regra e com uma diferença adicional: a de que o sucedente de um seqüente poderá, neste sistema, conter mais de uma fórmula ([Cur63], teoremas 5D7, 5D8, 6B5, sobretudo 7B5[143]). Em resumo, a regra *Peirce* tem a mesma potência inferencial que a admissão de seqüentes múltiplos à direita. Este nos parece ser um resultado extraordinariamente importante.

Assim, se esse é o papel da regra *Peirce* em um sistema, então poderíamos dizer que, apoiando-nos naquilo que discutimos na secção 1.10, a regra *Peirce* nos permite representar o sistema para preservação da falsidade dentro do sistema para preservação da verdade e vice-versa, conforme a comparação das cláusulas *(iii.V)*, *(iv.V)*, *(iii.F)* e *(iv.F)* da secção 1.10.

Com o intuito de ilustrar a propriedade notada por Curry, consideremos que, no sistema $\mathcal{M}_f$, tenha sido dada uma derivação mostrando a seguinte relação de conseqüência dedutiva: $B \Vdash \Gamma, A$, tal que o parâmetro a não ocorra em B, nem em Γ.[144] Logo, usando a regra $e\forall^f$, obteríamos $B \Vdash \Gamma, \forall x A[a/x]$. Esse caso é interessante, na medida em que há indícios de que os intuicionistas não aceitariam a validade desse tipo de inferência. Assim, se a propriedade enunciada nos parágrafos anteriores é correta, então deve ser possível representar o conceito de conseqüência dedutiva inerente ao sistema $\mathcal{M}_f$ dentro do sistema $\mathcal{P}$ para preservação da verdade, pois, do ponto de vista do sistema $\mathcal{P}$, onde está admitida a regra *Peirce*, não há diferença de expressividade entre o sistema de seqüentes com uma única fórmula no sucedente e o sistema

---

[142] Acerca do problema da separabilidade, ver também Legris [Leg96], que trata do problema da separabilidade para o condicional em relação a regra *Peirce*.

[143] Usamos a forma que Curry utiliza para designar seus teoremas: primeiro, o número do capítulo; depois, a letra da secção; finalmente, o número do teorema.

[144] Lembramos que a relação de conseqüência dedutiva será dada de baixo para cima em $\mathcal{M}_f$.

com múltiplas fórmulas no sucedente. Isso bastará para representar a relação de conseqüência dedutiva de $\mathcal{M}_f$ dentro de $\mathcal{P}$.

Contudo, a relação de conseqüência dedutiva inerente ao sistema $\mathcal{P}$ é tal que, à direita do símbolo $\Vdash$, deve ocorrer uma única fórmula segundo a Definição I-2, contando também, obviamente, com a cláusula recém-adicionada à definição. Assim, para representar o conceito de conseqüência dedutiva inerente ao sistema $\mathcal{M}_f$ dentro do sistema $\mathcal{P}$ seria preciso encontrar uma forma de representar a lista de fórmulas Γ,A por uma única fórmula. Isso será feito adotando a leitura sugerida por Gentzen para os sucedentes do cálculo de seqüentes. A lista de ocorrências de fórmulas no sucedente será tomada como equivalente a uma cadeia de disjunções. Dessa forma, se $\Delta^{\vee}$ representar essa cadeia de disjunções para as fórmulas de Δ, a relação de conseqüência dedutiva do sistema $\mathcal{M}_f$ será representada sobre o sistema $\mathcal{P}$ como $B\Vdash\Delta^{\vee}$, caso $B\Vdash\Delta$ em $\mathcal{M}_f$. No exemplo que estamos examinando, por um raciocínio indutivo, deveríamos mostrar que haveria uma derivação em $\mathcal{P}$ para $B\Vdash\Gamma^{\vee}\vee\forall xA[a/x]$ caso houvesse uma derivação para $B\Vdash\Gamma^{\vee}\vee A$. Assim, suponhamos que π_1 é a derivação de $\mathcal{P}$ tal que $B\Vdash\Gamma^{\vee}\vee A$:

$$\begin{array}{c} B \\ \nabla\pi_1 \\ \Gamma^{\vee}\vee A \end{array}$$

Figura II-32

Mostramos que $B\Vdash\Gamma^{\vee}\vee\forall xA[a/x]$ em $\mathcal{P}$ do seguinte modo (lembrando que a não ocorre em B nem em Γ):

$$\pi\equiv\dfrac{\dfrac{\dfrac{

O uso da regra *Peirce* nesse esquema de demonstração é inescapável. Com certeza, os intuicionistas rejeitariam a inferência $e\forall$.[145]

Resumindo, a regra *Peirce* é o princípio que nos facultaria representar as relações lógicas inerentes a $\mathcal{M}_f$ dentro do sistema para preservação da verdade.

Para fechar as notas relativas à bibliografia, notamos que Seldin [Sel89] considera a possibilidade de definir os sistemas de dedução natural com a regra *P* acima e, alternativamente, com um caso particular de *P* que examinaremos em breve, a regra que chamaremos de *consequentia mirabilis*. Seldin também considera uma série de propriedades dos sistemas de dedução natural definidos com essas regras. Trataremos de algumas das observações de Seldin no decorrer do nosso trabalho.

2.1. Sistema Peirce para $\{\wedge, \rightarrow, \forall\}$

O **Sistema Peirce**$_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}$ ($\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}$) é formado pelas regras: $i\wedge$, $e\wedge$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$ e $e\forall$ e *Peirce*. Claramente $\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}\subset\mathcal{P}$. Nesse sistema, o operador de disjunção é definível e o operador existencial quase poderia ser definido. A forma de definição da disjunção seria como abaixo:

Definição II-1 - $A\vee B\equiv_{df}(A\rightarrow B)\rightarrow B$[146]

Em seguida, teremos uma quase-definição do existencial $\exists xA[a/x]$ com a expressão abaixo, sob a restrição de que a variável *y* não ocorra na fórmula *A*, caso contrário, a expressão nem seria uma fórmula. Adicionalmente, o parâmetro *b* deve ser diferente do parâmetro *a* e ele não deve ocorrer em *A*:

Quase-definição II-1 - $\exists xA[a/x]\equiv_{qdf}\forall y(A[a/y]\rightarrow A[a/b])\rightarrow A[a/b]$

Infelizmente, essa expressão não pode ser tomada como uma definição para o existencial. O problema está no parâmetro *b* que não ocorre do lado esquerdo.

As derivações correspondentes às regras de introdução e de eliminação seriam as

---

[145] Como veremos no quarto capítulo, a derivação estará em forma normal quando a derivação π_1 estiver em forma normal. Isso seria razão suficiente para considerar o uso da dedução indireta como ineliminável. O prof. L.C. Pereira alertou-nos também para o fato de que intuicionisticamente o quantificador universal não é distributivo com respeito à disjunção.

[146] Alternativamente é possível dar uma quase-definição da disjunção da seguinte forma: $A\vee B\equiv_{qdf}((A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C))\rightarrow C$. Chamamos de quase-definição, pois no lugar da fórmula *C* poderíamos ter colocado qualquer outra fórmula e, desse modo, muitas fórmulas distintas corresponderiam a $A\vee B$. Sob uma leitura atenta, podemos ver que a disjunção está sendo caracterizada a partir de sua regra de eliminação. Na primeira definição, está sendo caracterizada a partir da regra de introdução.

seguintes (observamos que haverá um procedimento de transformação que associa a cada derivação em $\mathcal{P}$ proposicional uma derivação em $\mathcal{P}_{\{\wedge,,\rightarrow\}}$):

	Introdução	Eliminação
Disjunção	i∨d $\dfrac{A}{(B\rightarrow A)\rightarrow A}\ i\rightarrow$ i∨e $\dfrac{\dfrac{A \quad [A\rightarrow B]^1}{B}\ e\rightarrow}{(A\rightarrow B)\rightarrow B}\ ^1 i\rightarrow$	$\dfrac{\dfrac{[\underline{A}]^i \quad \nabla\pi_1}{C} \quad [C\rightarrow B]^j}{B}\ e\rightarrow$ $\dfrac{B}{A\rightarrow B}\ ^i i\rightarrow \qquad (A\rightarrow B)\rightarrow B$ $\dfrac{\underline{B} \quad \nabla\pi_2}{C}\ e\rightarrow$ $\dfrac{C}{C}\ ^j$ Peirce
Existencial	$\dfrac{\dfrac{A[a/b] \qquad A[a/b]\rightarrow A[a/b]}{A[a/b]}\ e\rightarrow}{\forall y(A[a/y]\rightarrow A[a/b])\rightarrow A[a/b]}\ ^i i\rightarrow$ $[\forall y(A[a/y]\rightarrow A[a/b])]^i$ e∀	$\dfrac{\dfrac{\Gamma, [\underline{A}]^i \quad \nabla\pi_1}{C} \quad [C\rightarrow \forall y A[a/b]]^j}{\forall y A[a/b]}\ e\rightarrow$ $\dfrac{\forall y A[a/b]}{A[a/b]}\ e\forall$ $\dfrac{A[a/b]}{A\rightarrow A[a/b]}\ ^i i\rightarrow$ $\dfrac{A\rightarrow A[a/b] \qquad \forall y(A\rightarrow(A[a/b]))[a/y] \quad \forall y(A[a/y]\rightarrow A[a/b])\rightarrow A[a/b]}{\Gamma, \underline{A[a/b]}}\ e\rightarrow$ $\nabla\pi_1\ [a/b]$ $\dfrac{C}{C}\ ^j$ Peirce

Figura II-34

A derivação que corresponderia à regra de eliminação do existencial requer a existência de uma derivação subsidiária π_1, com conclusão C a partir das suposições Γ,A. Além disso, exige que o parâmetro a não ocorra em C e não ocorra em Γ, como de praxe. Se uma destas restrições for violada, a estrutura não será uma derivação, pois a aplicação de $i\forall$ seria incorreta. Porém, para que a estrutura seja correta, ainda seria preciso que o parâmetro b não fosse parâmetro próprio de nenhuma regra em π_1. Caso contrário, como a ocorrência $\forall y(A[a/y]\rightarrow A[a/b])\rightarrow A[a/b]$ é uma suposição aberta e contém o parâmetro b, a restrição de

aplicabilidade de alguma regra da qual *b* fosse parâmetro próprio poderia não estar sendo respeitada dentro da ocorrência de π_1 mais abaixo na derivação. Isso mostra por que não podemos definir o existencial de forma perfeita nesse sistema, pois sempre restaria o problema de escolher o parâmetro adequado. Ainda que a escolha sempre possa ser feita, será necessário conhecer de antemão as derivações, para ter certeza de que empregamos um parâmetro novo na fórmula de definição do existencial. No sistema $\mathcal{P}$ completo, podemos demonstrar que $A \vee B \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$, mas não que $\exists x A[a/x] \leftrightarrow (\forall y(A[a/y] \rightarrow A[a/b]) \rightarrow A[a/b])$.

2.2. Sistema Peirce para $\{\wedge, \rightarrow, \forall\}$ com Regra Peirce Básica

Em 1965, Prawitz ([Pra65], págs. 39 e 40) havia mostrado que a regra de absurdo clássico podia ser restringida às conclusões atômicas dentro de um sistema que contivesse regras para $\{\wedge, \rightarrow, \forall\}$, sem perda de poder dedutivo. A seguir, mostraremos que simplificações similares podem igualmente ser aplicadas à regra *Peirce*, mesmo quando o sistema não contempla o princípio de *ex falso quodlibet*.

O **Sistema Peirce Básico** ($\mathcal{P}'$) é obtido por uma restrição sobre a regra *Peirce* a partir do sistema $\mathcal{P}_{\{\wedge, \rightarrow, \forall\}}$. Nesse sistema, as conclusões devem ser básicas. Logo, $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}_{\{\wedge, \rightarrow, \forall\}} \subset \mathcal{P}$. A cada derivação em $\mathcal{P}_{\{\wedge, \rightarrow, \forall\}}$ que não respeita a restrição corresponderá uma outra em $\mathcal{P}'$, a partir de um subconjunto das suposições abertas empregadas e com a mesma conclusão, mas que respeita a restrição. Obtém-se a derivação substituindo-se as instâncias de *Peirce* com conclusão de maior valor tal que, em sua subderivação subsidiária, não haja instâncias *Peirce* ou todas elas tenham conclusão de menor valor:

	Instância	Substituição Imediata
Conjunção	$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{[(A \wedge B) \rightarrow \varphi]^{i}\ n}{\nabla\pi_1}}{\dfrac{A \wedge B}{A \wedge B}\ {}^{i}\,\text{Peirce}}$	$\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^{j}}{A}\,e\wedge \quad \dfrac{[A \rightarrow \varphi]^{j+1}}{\varphi}\,e\rightarrow}{(A \wedge B) \rightarrow \varphi\ n\ \ {}^{j}\,i\rightarrow}}{\nabla\pi_1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^{j+2}}{B}\,e\wedge \quad \dfrac{[B \rightarrow \varphi]^{j+3}}{\varphi}\,e\rightarrow}{(A \wedge B) \rightarrow \varphi\ n\ \ {}^{j+2}\,i\rightarrow}}{\nabla\pi_1}}{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{A}\,e\wedge e \quad \dfrac{A \wedge B}{B}\,e\wedge d}{\dfrac{A}{A}\ {}^{j+1}\,\text{Peirce} \quad \dfrac{B}{B}\ {}^{j+3}\,\text{Peirce}}}{A \wedge B}\,i\wedge$

Universal[147]	$\begin{array}{l}[\underline{\forall xA[a/x]\rightarrow\varphi}]^{i}{}_{n}\\ \nabla\pi_1\\ \pi\equiv\ \dfrac{\forall xA[a/x]}{\forall xA[a/x]}\,i\ \text{Peirce}\end{array}$	$\begin{array}{l}\dfrac{[\forall xA[a/x]]^{j}}{A}\,e\forall \qquad [A\rightarrow\varphi]^{i}\\ \dfrac{\varphi}{\forall xA[a/x]\rightarrow\varphi}\,j\ i\rightarrow{}_{n}\\ \nabla\pi_1\\ \dfrac{\forall xA[a/x]}{A}\,e\forall\\ \dfrac{A}{A}\,i\ \text{Peirce}\\ \pi^{I}\equiv\ \dfrac{A}{\forall xA[a/x]}\,i\forall\end{array}$
Implicação	$\begin{array}{l}[\underline{(A\rightarrow B)\rightarrow\varphi}]^{i}{}_{n}\\ \nabla\pi_1\\ \pi\equiv\ \dfrac{A\rightarrow B}{A\rightarrow B}\,i\ \text{Peirce}\end{array}$	$\begin{array}{l}\dfrac{[A]^{j+1}\quad [A\rightarrow B]^{j}}{B}\,e\rightarrow \qquad [B\rightarrow\varphi]^{i}\\ \dfrac{\varphi}{(A\rightarrow B)\rightarrow\varphi}\,j\ i\rightarrow{}_{n}\\ \nabla\pi_1\\ \dfrac{[A]^{j+1}\quad A\rightarrow B}{B}\,e\rightarrow\\ \dfrac{B}{B}\,i\ \text{Peirce}\\ \pi^{I}\equiv\ \dfrac{B}{A\rightarrow B}\,j{+}1\ i\rightarrow\end{array}$

Figura II-35[148]

O índice de descarte *j* deve ser um índice novo em cada caso e *n* indica o número de ocorrências topo descartadas pela instância *Peirce* de índice *i*.

As mesmas simplificações que Prawitz ([Pra65], cap. III, teorema I) aplicava ao uso da assim chamada regra de absurdo clássico, podem ser efetuadas sobre a regra *Peirce* em um sistema mais fraco do que a lógica clássica. Isso poderia ser um indício de que a regra de absurdo clássico é, na verdade, decomponível em regras mais simples.

---

[147] Estaremos assumindo que o parâmetro individual *a* não ocorre em π_1. Se ocorresse, poderíamos simplesmente empregar outro parâmetro com essa propriedade.

[148] As cores azul e verde servirão, mais tarde, para fazer uma referência mais precisa a determinadas ocorrências e instâncias.

2.3. Que Sentido Faria a Negação no Sistema Peirce?

O sistema $\mathcal{P}$ poderia ser estendido com a inclusão das regras de *i*~ e $e\sim_r$ ou, equivalentemente, com as regras $i\bot$ e $e\bot_r$. Se assim fizéssemos, o princípio de terceiro excluído passaria a ser um teorema:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\vee\sim A}\,i\vee \quad \dfrac{[A]^2}{A\vee\sim A}\,i\vee \quad \dfrac{}{(A\vee\sim A)\rightarrow\sim(A\vee\sim A)}\,e\rightarrow}{\sim(A\vee\sim A)}\,e\sim_r}{C}\,{}^{1}i\sim}{\sim A}\,i\vee}{A\vee\sim A}\,{}^{2}P}{\mathbf{A\vee\sim A}}$$

Figura II-36

Ou seja, para obtermos o terceiro excluído só precisamos de uma regra de dedução indireta e do conceito de negação, naquele sentido de refutabilidade simples.

Porém, curiosamente, o princípio de cancelamento da dupla negação não seria demonstrável nesse sistema. Observamos que a negação neste sistema $\mathcal{P}$ estendido representaria aquela noção de negação que Curry chamava de **refutabilidade clássica** ([Cur63], pág. 261).

Haveria ainda uma outra forma distinta de considerar um sistema minimal com regra de dedução indireta e com tratamento para a negação. Consideremos uma extensão do sistema minimal em que $\bot$ esteja presente por meio das regras $i\bot$ e $e\bot_r$. Dessa forma, como o comportamento da constante de absurdo foi explicitado por meio de regras de introdução e eliminação, poderíamos estender o sistema com uma regra de dedução indireta um pouco diferente da regra *Peirce*. Poderíamos, alternativamente, adicionar a regra que é chamada de **consequentia mirabilis** (***cm***), em que a negação da fórmula *A* equivale a $A\rightarrow\bot$, como de praxe:

$$\dfrac{\dfrac{[A\rightarrow\bot]^i}{\nabla}}{A}\,{}^{i}cm$$

Figura II-37

Essa regra é caso particular da regra *P.* Aliás, ao invés da regra *cm*, poderíamos ter adicionado a **regra de terceiro excluído** (***te***) ou a **regra de cancelamento da dupla implicação com absurdo** (***cdi*$\bot$**):

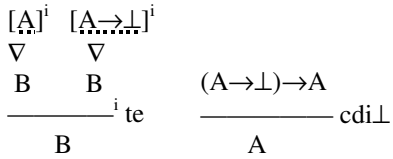


Figura II-38

Essas regras são caso particular de *ae* e *cdi*, respectivamente, cf. Figura II-21 e Figura II-23.

As regras *cm*, *te* e *cdi*$\bot$ são regras equivalentes, o que pode ser demonstrado substituindo $\bot$ no lugar de *C*, na Figura II-22, e $\bot$ no lugar de *B*, na Figura II-24, respectivamente. Mais que isso, tais regras são caso particular das regras *P*, *ae* e *cdi* e não são suficientes para derivar *P*, *ae* e *cdi* dentro da extensão de $\mathcal{M}$ com as regras *i*$\bot$ e *e*$\bot_r$. Em outros termos, *cm*, *te* e *cdi*$\bot$ aparentam ser regras dedutivamente mais fracas que *P*, *ae* e *cdi*. Como veremos, para derivar *P*, *ae* e *cdi* é preciso o princípio de *ex falso quodlibet*

A noção de negação representada por um sistema com a regra *cm* corresponderia à noção de **negação estrita** ou **refutabilidade completa** de Curry ([Cur63], pág. 261). Em particular, se, ao invés de havermos adotado as regras para o absurdo, tivéssemos adotado as regras de introdução e eliminação da negação (na versão restringida), poderíamos formular as regras *cm*, *te* e *cdi*~[149] da seguinte forma:

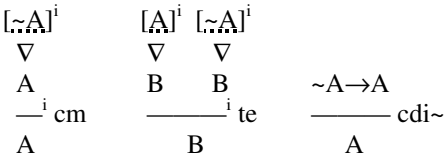


Figura II-39

Essas três formas são também interderiváveis entre si dentro de $\mathcal{M}$ e também são deriváveis das regras *P*, *ae* e *cdi*. Mostramos o caso da derivação de *cm* a partir de *P*:

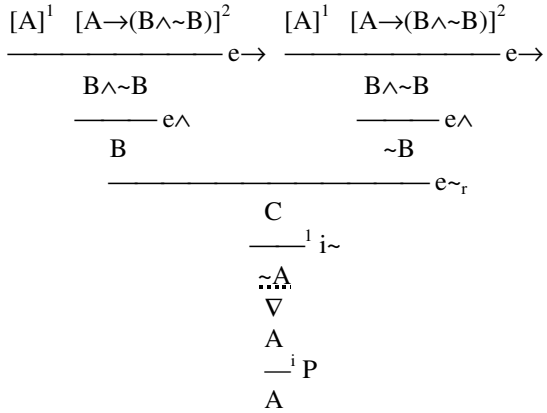


Figura II-40

[149] A correspondente de *cdi*$\bot$.

Chamaremos de **Sistema para a Refutabilidade Completa** ($\mathcal{RC}$) ao sistema formado pela adição das regras $i\bot$, $e\bot_r$ e *cm* ao sistema $\mathcal{M}$.

O fato de que a regra *cm* seja caso particular da regra *Peirce* é extremamente relevante para nós. Num certo sentido, a regra *cm* é uma formulação dedutivamente mais fraca de um princípio de dedução indireta que é suficiente para a definição do sistema de lógica clássica integral. Anteriormente, examinamos uma interpretação para a regra *Peirce* que pode ser afinada para a regra *cm* de forma ainda mais clara. Adotando o sentido mais fraco de refutabilidade, a refutabilidade simples, segundo a regra *cm*, se mostrássemos que uma fórmula *A* é conseqüência de um conjunto de fórmulas Γ mais a suposição de refutabilidade simples de *A*, então *A* já seria conseqüência dedutiva de Γ.

As aplicações da regra *Peirce* só podem ser substituídas por uma aplicação da regra *cm* se o princípio de *ex falso quodlibet* for admitido, ou seja, a noção de refutabilidade internalizada no sistema deveria ser um pouco mais forte e deveria corresponder à noção de absurdidade de Curry. O esquema de derivação abaixo mostra isso:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^i \quad [A\to\bot]^j}{\dfrac{\bot}{\varphi}\,E\bot}\,e\to}{\dfrac{}{A\to\varphi}\,i^{i}\to}$$

$$\dfrac{[A\to\varphi]^j \quad \nabla \quad A}{A}\,Peirce^{j} \qquad\qquad \dfrac{A\to\varphi \quad \nabla \quad A}{A}\,cm^{j}$$

Figura II-41

Assim, efetivamente, *cm* é, dedutivamente falando, mais elementar que *Peirce*.

Com respeito à estrutura formal, consideramos que seria preferível empregar a regra *cm* no lugar de *Peirce*. Lembramos que o símbolo φ poderia ser substituído por qualquer fórmula e mesmo por fórmulas distintas dentro de uma mesma derivação. Mas, em certo sentido, se $A\to\varphi$ é usado como suposição e φ pode ser substituído por qualquer fórmula, isso praticamente equivaleria a supor que *A* é absurdo no sentido de Curry. Ou seja, a suposição seria mais do que uma suposição de que *A* seria "refutável simples". Seria uma suposição de que *A* é absurdo. O uso da proposição $\bot$ permitir-nos-ia representar qualquer uma das duas idéias, bastando adotar as regras de introdução e eliminação adequadas. Em outros termos, se quiséssemos representar refutabilidade simples, não incorporaríamos o princípio de *ex falso quodlibet*; se quiséssemos

representar absurdidade, incorporaríamos. Não obstante, já com a noção de refutabilidade simples temos uma caracterização importante do conteúdo semântico das regras de dedução indireta, na forma da regra *cm*, pois, numa leitura intuitiva da regra, o que ela quer dizer é que uma fórmula não pode ser conseqüência dedutiva da sua refutabilidade simples. Todavia lembramos que esse sistema também sofre do problema da não-substitutividade de parâmetros proposicionais que havíamos visto para o sistema minimal com negação em 1.6.

Se, na derivação de $\Gamma \vdash A$, a instância raiz for *Pg* e esta instância descartar somente ocorrências das fórmulas $A \rightarrow (B_1),...,A \rightarrow (B_n)$, as suposições descartadas seriam, na verdade, equivalentes à refutabilidade simples de A, desde que $B_1,...,B_n$ sejam parâmetros proposicionais que não ocorrem em A. Assim, seria possível obter uma derivação direta de A a partir de Γ, caso esses parâmetros não ocorram em Γ. Em particular, se Γ for vazio, poderemos obter uma prova direta de A. Em qualquer das duas situações, bastaria substituir cada ocorrência dos parâmetros $B_1,...,B_n$ por uma ocorrência da fórmula A na subderivação determinada pela premissa imediata da instância raiz *Pg*. Logo, teríamos uma derivação de A a partir de $\Gamma, A \rightarrow A$, conseqüentemente, uma derivação de $\Gamma \vdash A$ sem a raiz *Pg*.

2.4. O Sistema para a Refutabilidade de López-Escobar

A seguir, consideraremos um sistema que, segundo seu autor, apresenta uma noção construtiva de negação para a qual não valeria, de forma geral, o princípio de *ex falso quodlibet*, embora a regra *cdn* seja considerada válida. Mostraremos que há uma correlação entre um dos conceitos de refutabilidade sobre o qual discorremos e essa outra formulação da noção de refutabilidade.

Em um artigo de 1972, López-Escobar [Lop72] apresenta um sistema que ele argumenta ser um sistema construtivo. Esse sistema usaria a negação para representar o conceito de refutabilidade. Como veremos, o sistema será uma extensão do sistema minimal, com uma regra que "introduz" a dupla negação e uma regra que "elimina" a dupla negação. Como essa regra de "eliminação" é a regra que estamos chamando de regra de cancelamento da dupla negação e como ela envolve um princípio de dedução indireta, parece-nos razoável examinar esse sistema neste ponto da tese. Há que levar em conta que a regra *cdn* é muito utilizada na praxe da argumentação matemática. Porém, em certo sentido, essa regra difere das demais regras de dedução indireta que vimos até aqui. Mesmo na versão formulada com a constante $\bot$, ela não é derivável nem permite derivar nenhuma das regras do trio *ae*, *cdi* e *Peirce* se não tivermos *ex falso quodlibet*.

Para motivar conceitualmente seu ponto de vista, o autor começa por analisar três formas distintas de conceber a negação de uma fórmula *A*:

(i) a de que não há nenhuma construção como seria requerido por A (para provar A);

(ii) a de que a assunção de que existe uma construção que prova A conduz a uma contradição; ou, mais especificamente, a de que existe uma construção χ *tal que se* π *é uma prova de A, então* $\chi(\pi)$ *é uma prova de uma absurdidade;*

(iii) a de que, além do conceito "ser uma construção χ *que prova uma fórmula B", existe também o conceito de "ser uma construção* χ *que refuta uma fórmula C", e, desse modo, o número de conceitos primitivos seria aumentado.*

O autor descarta a primeira via por não ter conteúdo construtivo. Segundo ele, essa via teria sido examinada por Curry em um artigo de 1957. A segunda via corresponde ao ponto de vista intuicionista tradicional, que, segundo ele, apesar de ser frutuoso, teria uma característica desagradável: se aceitamos que nenhuma construção prova um absurdo, então uma construção que prova ~*A* é uma construção que, aplicada a uma construção não-existente (aquela que prova *A*), levaria a uma construção inexistente, a que provaria o absurdo. Em breve voltaremos a examinar essa crítica. Por fim, a terceira alternativa não padeceria do mesmo problema, embora possa padecer de outros e é a via que o autor quer explorar. No que se segue, vamos propor uma exposição em dedução natural do sistema que o autor apresentou usando seqüentes.

Para ele, o fato de que uma construção seja a prova de uma proposição de valor zero é algo que depende da disciplina sob exame e não deve ser objeto de exame em um sistema lógico ([Lop72], pág. 363). Da mesma forma, o fato de que uma construção seja uma refutação de uma proposição de valor zero também dependerá da teoria que estiver sob exame. Assim, como no caso das provas importava determinar como uma proposição composta era provada, agora, sob o novo ponto de vista, importará determinar como uma proposição composta será refutada. Notamos que o sistema minimal para a falsidade que propusemos acima pode ser interpretado exatamente sob essa ótica.

A refutabilidade de uma proposição será indicada pela negação na frente da fórmula mais o sinal de asserção[150] no sistema a ser proposto: $\vdash\sim A$. Chamaremos de **Sistema López-Escobar** ($\mathcal{LE}$) o sistema que contém todas as regras do sistema minimal mais as regras para negação, como a seguir. O uso da negação estará caracterizado por meio de regras de introdução e de

[150] Que será freqüentemente omitido.

eliminação tais que nenhuma delas será independente, pois, nas condições de aplicabilidade, haverá um contexto que conterá ocorrência⟦s⟧ da negação:

Introduções	$\dfrac{\sim A_1 \quad \sim A_2}{\sim(A_1 \vee A_2)}\, i\vee^r$	$\dfrac{A_1 \quad \sim A_2}{\sim(A_1 \to A_2)}\, i \to^r$	* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ \sim A\end{array}}{\sim \exists x A[a/x]}\, i\exists^r$
	$\dfrac{\sim A_1}{\sim(A_1 \wedge A_2)}\, i\wedge e^r \qquad \dfrac{\sim A_2}{\sim(A_1 \wedge A_2)}\, i\wedge d^r$	$\dfrac{A}{\sim\sim A}\, i\sim^{\sim}$	$\dfrac{\sim A[a/\tau]}{\sim \forall x A[a/x]}\, i\forall^r$
Eliminações	$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma\,,\,[\sim A_1]^i\,,\,[\sim A_2]^i & \\ \nabla & \\ \sim(A_1 \vee A_2) & C\end{array}}{C}\, i\vee^r$	$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma\,,\,[A_1]^i\,,\,[\sim A_2]^i & \\ \nabla & \\ \sim(A_1 \to A_2) & C\end{array}}{C}\, i \to^r$	$\dfrac{\sim \exists x A[a/x]}{\sim A[a/\tau]}\, e\exists^r$
	$\dfrac{\begin{array}{ccc}\Delta_1\,,\,[\sim A_1]^i & \Delta_2\,,\,[\sim A_2]^i & \\ \nabla & \nabla & \\ \sim(A_1 \wedge A_2) \quad C & C & \end{array}}{C}\, i\wedge^r$	$\dfrac{\sim\sim A}{A}\, e\sim^{\sim}$	* $\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma\,,\,[\sim A]^i & \\ \nabla & \\ \sim \forall x A[a/x] & C\end{array}}{C}\, i\forall^r$

Figura II-42[151]

É interessante o fato de que, nesse sistema, haja preservação da simetria introduções-eliminações. Mas, ao invés de formular as regras $e\vee^r$ e $e\to^r$ como acima, elas poderiam ter sido formuladas do seguinte modo, respectivamente:

$$\frac{\sim(A_1 \vee A_2)}{\sim A_1}\, i\, e\vee e^r \qquad \frac{\sim(A_1 \vee A_2)}{\sim A_2}\, i\, e\vee d^r \qquad\qquad \frac{\sim(A_1 \to A_2)}{A_1}\, i\, e\to e^r \qquad \frac{\sim(A_1 \to A_2)}{\sim A_2}\, i\, e\to d^r$$

Figura II-43

Interpretando as regras de modo que o descarte de uma ocorrência topo seja facultativo, a interderivabilidade das regras de $e\vee^r$ e $e\to^r$ presentes na Figura II-42 e daquelas presentes na Figura II-43 é demonstrada pelos seguintes esquemas:

---

[151] Na regra $e\wedge^r$, o autor utiliza Γ no lugar de Δ_1 e de Δ_2. Tamminga & Tanaka [Tam99] consideram regras de dedução natural similares às regras i~˜ e e~˜, tomando por base a substituição de ⊣ por ⊢~. As regras de eliminação estão formuladas no formato proposto por Schröder-Heister, [Sch84], pág. 1293.

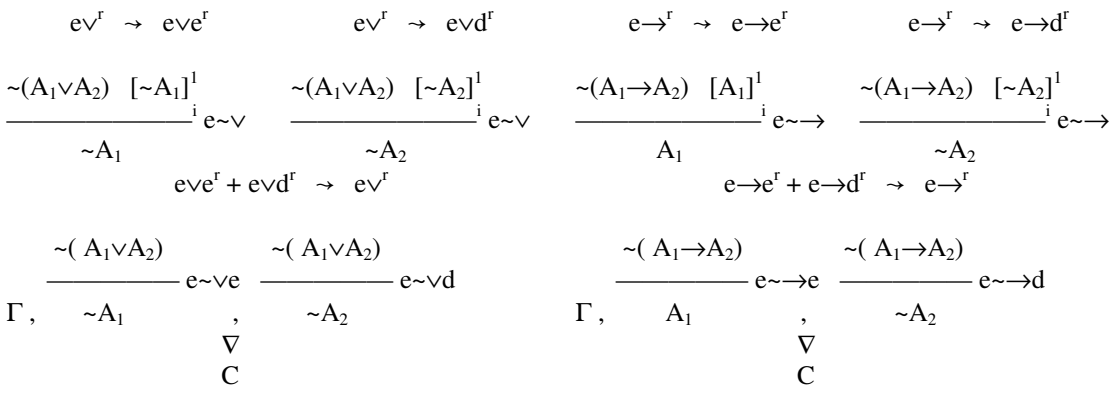


Figura II-44

Se considerássemos agora as regras da Figura II-42 e a substituição usando as regras da Figura II-43, com exceção das regras para a implicação, cada uma delas corresponderia a uma regra do sistema $\mathcal{M}_f$ de preservação da falsidade. Para se dar conta, bastaria retirar as ocorrências de negação. As regras para a implicação, por sua vez, corresponderiam às regras de implicação que apresentamos nas Figura II-15 e Figura II-17.

A justificativa de López-Escobar para a propositura das regras, em particular das regras *i*~˜ e *e*~˜, baseia-se nas seguintes cláusulas envolvendo o conceito de refutabilidade ([Lop72], pág. 364):

(i) Uma construção prova ~A se e somente se ela refuta A (usando o símbolo $\dashv^c$ *para representar que a construção c refuta e o símbolo* $\vdash^c$ *para representar que a construção c prova:* $\vdash^c \sim A \Leftrightarrow \dashv^c A$*).*

(ii) Dada uma construção, consideramos uma questão decidível a de saber se a construção prova ou não a fórmula A ($\vdash^c A$ *ou* $\nvdash^c A$*) e se ela refuta ou não a fórmula A (*$\dashv^c A$ *ou* $\ndashv^c A$*). Poderá ocorrer que a construção não prove e não refute a fórmula (*$\nvdash^c A$ *e* $\ndashv^c A$*). Contudo, não será admitido que uma mesma construção prove e refute a mesma fórmula*[152]*.*

(iii) Se uma construção refuta ~A, ela refuta a refutabilidade de A. Logo, segundo o autor, deveríamos estar aptos a extrair desse fato a informação de que nenhuma construção refutará A. Assim, pelo fato de estarmos assumindo que nenhuma construção pode provar e refutar ao mesmo tempo uma mesma fórmula, pareceria razoável estipular que aquela construção prova A.

A cláusula *(i)* sozinha não nos permite estabelecer as regras *i*~˜ e *e*~˜. Seria preciso que outra cláusula estabelecesse que uma construção prova *A* se e somente se ela refuta *~A* ($\vdash^c A \Leftrightarrow \dashv^c \sim A$), para então, usando a cláusula *(i)*, podermos obter as regras *i*~˜ e *e*~˜. Efetivamente, a formulação da equivalência $\vdash^c A \Leftrightarrow \dashv^c \sim A$ na forma de regras seria como a seguir:

[152] É inaceitável que $\vdash^c A$ e $\dashv^c A$ para uma mesma construção *c*.

$$\frac{\vdash^{c} A}{\dashv^{c} \sim A} \qquad \frac{\dashv^{c} \sim A}{\vdash^{c} A}$$

Figura II-45

Usando a cláusula *(i)* sobre essas duas regras, obteríamos:

$$\frac{\vdash^{c} A}{\vdash^{c} \sim\sim A} \qquad \frac{\vdash^{c} \sim\sim A}{\vdash^{c} A}$$

Figura II-46

Essas regras correspondem exatamente às regras $i\sim^{\sim}$ e $e\sim^{\sim}$, quando omitimos o símbolo $\vdash^{c}$.

Todo o problema está em saber agora por que as regras da Figura II-45 seriam consideradas corretas. A cláusula *(ii)* não nos diz que haverá uma prova ou uma refutação, *tertium non datur*, para cada proposição[153]. Em geral, o *tertium* é um princípio rejeitado pelos construtivistas. Essa cláusula só diz que é decidível se uma dada construção prova ou não, alternativamente, refuta ou não certa proposição. Lembramos que é inclusive possível que uma mesma construção nem refute nem prove uma mesma proposição. Assim, para validar as regras da Figura II-45, restaria o apelo à cláusula *(iii)*. Contudo, também não é claro que, a partir da cláusula *(iii)*, possamos concluir que uma construção prova *A* se e somente se refuta *~A* ($\vdash^{c} A \Leftrightarrow \dashv^{c} \sim A$). O que é claro é que se *~A* é refutável por uma construção ($\dashv^{c} \sim A$), então não poderia haver nenhuma construção que refutasse *A*, sob pena de inconsistência. Se houvesse uma construção qualquer que refutasse *A*, ela seria uma construção que provaria *~A* por *(i)*. Nesse caso, a inconsistência seria a posse de uma construção refutando *~A* e de uma construção provando *~A*. Mas essa é uma noção de consistência mais forte do que aquela que aparece em *(ii)*. Ela corresponde a dizer que não pode haver uma construção-prova e outra construção-refutação da mesma fórmula. Parece-nos que o sentido fraco em *(ii)* é conseqüência do sentido forte, mas não vice-versa. Por outro lado, é perfeitamente admissível que a noção mais forte de consistência seja assumida, mas nem assim obteríamos a equivalência que buscávamos. O resultado que obteríamos seria que a construção que refuta *~A* não pode refutar *A*, pois não podem existir refutações de *A*. Para concluir que a construção que refutava a refutabilidade de *A* também provaria *A*, precisaríamos de um princípio *(ii)* mais forte, garantindo que, toda vez que uma construção prova ou refuta a refutabilidade de uma fórmula, ela refutará ou provará a própria fórmula.

---

[153] Aliás, o que é bastante natural, à medida que, para certas fórmulas da linguagem, como $a=b$, não há demonstração, nem refutação.

Além de o princípio de *ex falso quodlibet* não ser válido no sistema $\mathcal{LE}$, o que era objetivo declarado do autor, também *Nm* e *reductio* não serão deriváveis no sistema:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A_2]^i \\ \nabla \\ A_1 \quad \sim A_1\end{array}}{\sim A_2}\,{}^{i}\,\mathrm{Nm} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}[A_2]^i & [A_2]^i \\ \nabla & \nabla \\ A_1 & \sim A_1\end{array}}{\sim A_2}\,{}^{i}\,\mathrm{reductio}$$

Figura II-47

Se essas regras fossem usadas de forma irrelevante, ou seja, de modo que não houvesse nenhum descarte de ocorrências topo, isso tornaria admissível o *ex falso quodlibet*, primeiro para fórmulas negadas, em seguida, por eliminação da dupla negação, para todas as fórmulas. Lembremo-nos que, da forma como estamos assumindo os descartes nesta tese, qualquer uma das duas regras acima permitiria que concluíssemos a negação de uma fórmula qualquer a partir de premissas contraditórias[154]. Assim, como aquelas regras não são deriváveis, se $\sim(A \wedge \sim A)$ fosse demonstrável, provavelmente deveria sê-lo por meio da regra $i\wedge e^r$ ou da regra $i\wedge d^r$. Isso equivaleria a dizer que a demonstrabilidade do princípio de não-contradição requereria que para todas as fórmulas ou ela ou sua negação fossem demonstráveis. Com efeito, curiosamente, $\sim(A \wedge \sim A)$ e $A \vee \sim A$ são interderiváveis no sistema. Além disso, $\sim(A \wedge \sim A)$ é derivável de $\sim\sim(A \wedge \sim A)$ e, assim, se *cm* fosse válido no sistema, demonstraríamos $\sim(A \wedge \sim A)$.

As seguintes inferências de eliminação da conjunção, que parecem, *prima facie*, intuitivamente corretas, não seriam deriváveis em $\mathcal{LE}$:

$$\dfrac{A_1 \quad \sim(A_1 \wedge A_2)}{\sim A_2} \qquad \dfrac{A_2 \quad \sim(A_1 \wedge A_2)}{\sim A_1}$$

Figura II-48

Se elas fossem deriváveis no sistema $\mathcal{LE}$ o princípio de *ex falso quodlibet* também seria:

$$\dfrac{A_1 \qquad \dfrac{\sim A_1}{\sim(A_1 \wedge \sim\sim A_2)}\,i\wedge^{\sim}}{\dfrac{\sim\sim A_2}{A_2}\,e\sim^{\sim}}$$

Figura II-49

Porém, queremos notar, sob nossa definição de refutabilidade condicional, aquelas duas inferências acima são consideradas corretas.

---

[154] Aliás, esse problema parece ser também o problema visado por Tennant, com a proposta daquele sistema que analisamos anteriormente, pois, nele, os descartes irrelevantes estão proibidos. Por essa razão, não podemos adicionar a regra *i*~ nesse sistema, a menos que essa regra só admita descartes relevantes.

Para transladar as regras de preservação da falsidade em $\mathcal{M}_{fd/\rightarrow}$ para dentro de um sistema para a verdade, usando a negação como meio de representar a falsidade/refutabilidade de uma fórmula, poderíamos fazê-lo usando regras envolvendo o operador de negação como na Figura II-42 do sistema $\mathcal{LE}$. As regras $i\sim^{\sim}$ e $e\sim^{\sim}$ deveriam ser acrescidas de modo que os conceitos de preservação da verdade e preservação da falsidade viessem a estar relacionados. Como já notamos, uma justificação dessas regras requereria as cláusulas: $\vdash\sim A \Leftrightarrow \dashv\sim A$ e $\vdash A \Leftrightarrow \dashv\sim A$.

Observamos, finalmente, que as regras para a implicação dentro do sistema $\mathcal{LE}$ correspondem às regras da Figura II-14, cuja base intuitiva vem das tabelas de verdade. As regras da Figura II-17 ou não poderiam ser refletidas no sistema com $i\sim^{\sim}$ e $e\sim^{\sim}$ ou, se o fossem, acabariam por ter seu poder dedutivo confundido com as regras da Figura II-14.

3. Considerações Finais

No presente capítulo consideramos a definição dos conceitos de conseqüência dedutiva, prova e refutabilidade no âmbito dos sistemas de dedução natural sem o princípio de *ex falso quodlibet*. Dividimos os sistemas em dois grandes grupos: aqueles que contém alguma forma de regra de dedução indireta e aqueles que não contém.

Desde nossa perspectiva, alguns temas tratados no presente capítulo merecem uma menção especial. Em primeiro lugar, mencionamos o fato de que tanto podemos formular sistemas para preservação da verdade como sistemas para preservação da falsidade. Em segundo lugar, mencionamos o fato de que a noção de refutabilidade merece ser tratada de forma independente da noção de prova. Em terceiro lugar, o fato de que *a priori* a definição do conceito de refutabilidade pode levado a cabo tomando como ponto de partida seja noção de preservação da verdade seja a noção de preservação da falsidade, resultando em conceitos que não são equivalentes. Eles só convergem se for admitida a validade de um princípio de dedução indireta. Finalmente, queremos destacar o fato de que a noção refutação construtiva, plasmada por Lopez-Escobar por meio de seqüentes - noção inspirada sobre a noção de refutação construtiva de Nelson -, pode ser formulada por meio de um sistema de preservação da falsidade.

Capítulo III Sistemas Lógicos de Dedução Natural – Parte II

Doravante, os sistemas contemplarão alguma forma de *ex falso quodlibet*.

1. Sistemas Intuicionistas

Definiremos o **Sistema Intuicionista com Absurdo** ($\mathcal{I}$) com as seguintes regras: $i\wedge$, $e\wedge$, $i\vee$, $e\vee$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$, $e\forall$, $i\exists$, $e\exists$, $i\bot$ e $e\bot$. Nesse sistema, a regra de eliminação do absurdo incorpora o princípio de *ex falso quodlibet*. Vimos que, *a priori*, havia dois modos distintos de representar esse princípio: ou pela regra $E\bot$ ou pela regra $e\bot$. Adotaremos a segunda por causa da sua elementariedade. Veremos a seguir que essa forma não perde poder dedutivo em relação à primeira, embora tenha suas idiossincrasias.

Na verdade, se assumimos que $e\bot$ é uma regra válida, haverá um argumento em prol da validade de $E\bot$. Basicamente, qualquer derivação em que fosse empregada a regra $E\bot$ pode ser transformada em uma derivação que só contém instâncias de $e\bot$. Para uma derivação qualquer, o procedimento consiste em escolher uma $E\bot$, cuja conclusão não seja de valor zero e tal que nas subderivações das suas premissas imediatas não haja nenhuma aplicação de $E\bot$ com conclusão de valor maior que zero, substituindo-a:

Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ —— E$\bot$ $A\wedge B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ —— E$\bot$ $A\vee B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ ——— E$\bot$ $A\rightarrow B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ ——— E$\bot$ $\exists xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ ———^{i} E$\bot$ $\forall xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ — E$\bot$ $\bot$ $\nabla\pi_2$
Γ Γ $\nabla\pi_1$ $\nabla\pi_1$ $\bot$ $\bot$ — E$\bot$ — E$\bot$ A B ——— i$\wedge$ $A\wedge B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ — E$\bot$ A —— i$\vee$ $A\vee B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ — E$\bot$ B ——— i$\rightarrow$ $A\rightarrow B$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ — E$\bot$ A ——— i$\exists$ $\exists xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$	* Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ ——— E$\bot$ $A[a/b]$ ——— i$\forall$ $\forall xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$	Γ $\nabla\pi_1$ $\bot$ $\nabla\pi_2$

Figura III-1

A reiteração do processo nos daria o resultado desejado. A transformação para o caso em que a conclusão contém um quantificador universal requer que usemos um parâmetro individual *b* que não ocorra em Γ.

A existência do procedimento nos permite dizer que a regra $E\bot$ é admissível no sistema $\mathcal{G}$ definido com a regra $e\bot$, embora não seja derivável em $\mathcal{G}$. Toda regra derivável será admissível, mas não vice-versa. A regra $E\bot$ não é derivável de $e\bot$, embora $e\bot$ seja derivável de $E\bot$ – de fato, é caso particular de $E\bot$. De modo mais explícito, a existência do procedimento nos permite dizer que, dada uma demonstração de uma fórmula *A* tal que a regra $E\bot$ só seja empregada na raiz da derivação, será possível obter uma demonstração de *A* em $\mathcal{G}$ sem nenhuma aplicação dessa regra $E\bot$.

Embora tenhamos mostrado que não perdemos nada em poder dedutivo, a opção pela regra $e\bot$ apresenta um problema que já tínhamos visto. Por exemplo, podemos demonstrar $(A\wedge\sim A)\rightarrow C$, onde *C* é um parâmetro proposicional, similar à demonstração da Figura II-7. Em geral, costumamos assumir que qualquer substituição de *C* por outra fórmula, $B\wedge\sim B$, por exemplo, deveria resultar noutra fórmula demonstrável. Ocorre que o esquema de dedução empregado para demonstrar $(A\wedge\sim A)\rightarrow C$ não pode ser diretamente usado para demonstrar a fórmula resultante de substituir *C* por outra fórmula de valor maior que zero, pois a regra $e\bot$ não admitiria conclusão de valor maior que zero. Assim, ou interditamos as substituições de fórmulas de valor maior que zero pelos parâmetros predicacionais, ou, se a substituição fosse feita, em seguida deveríamos aplicar o procedimento descrito acima para obter uma derivação em $\mathcal{G}$. No segundo caso, teríamos provas ligeiramente distintas para fórmulas que caem sob a mesma estrutura.

Não obstante, escolhemos adotar a versão $e\bot$, pois a sua simplicidade é atraente. Adicione-se a essa constatação o fato de que $E\bot$ também apresentará dois quebra-cabeças. O primeiro diz respeito ao fato de que seria possível concluir $\bot$ da premissa $\bot$, o que terá implicações para a normalização das derivações; o segundo diz respeito à substituição de parâmetros na derivação, problema esse que só poderemos tratar com mais clareza no próximo capítulo.

De forma similar ao sistema minimal em que a conclusão de $e\sim_r$ ou de $e\bot_r$ deveria ser um parâmetro proposicional, nos sistemas com a regra $e\bot$, não permitiremos a substituição de fórmulas de valor maior que zero no lugar dos parâmetros predicacionais e, em particular, no lugar dos parâmetros proposicionais. Isso não será tão grave na medida em que poderíamos

considerar que qualquer substituição de parâmetros sobre uma estrutura que não seria uma derivação em $\mathcal{I}$, pois em vez de $e\bot$ teríamos aplicações de $E\bot$. Mas, como temos um procedimento para substituir as instâncias de $E\bot$ por $e\bot$, o problema não seria tão pungente, acabaríamos por obter uma derivação em $\mathcal{I}$.

O sistema $\mathcal{I}$ tem estreita correspondência com a **lógica intuicionista de Heyting** [Hey56]. Contudo, os sistemas de dedução natural intuicionistas apresentados na literatura não costumam conter a regra $i\bot$. De fato, o conjunto de regras presente naqueles sistemas é um subconjunto próprio de $\mathcal{I}$ acima. Não obstante, o sistema recém-definido é equivalente a eles, pois, do ponto de vista da derivabilidade, não se apresentam diferenças, como veremos a seguir.

Nossa tese é que o sistema de dedução natural intuicionista deveria contemplar a referida regra, ao menos na medida em que aceitamos outra tese, a tese segundo a qual para explicitar o núcleo duro do comportamento dedutivo das constantes lógicas devemos empregar dois tipos de regras: introduções e eliminações.

Teorema III-1 - Para qualquer derivação π mostrando $\Gamma\vdash_{\mathcal{I}}A$, existe uma derivação π' correspondente mostrando $\Gamma\vdash_{\mathcal{I}}A$ e que não contém instâncias de $i\bot$.

Demonstração. Por indução no número de instâncias de regra de π. Por hipótese de indução (*HI*)[155], para qualquer subderivação subsidiária das premissas da raiz de π, existirá uma subderivação equivalente sem a aplicação da regra. A seguir, o único caso que importa considerar é aquele no qual a raiz de π é uma $i\bot$. Suponhamos que o parâmetro proposicional próprio *A* seja puro na derivação. Nesse caso, faríamos as seguintes transformações:

$$\pi\equiv\ \begin{array}{l}\Gamma\\ \nabla\pi_1\\ A\\ \hline i\bot\\ \bot\end{array}\ \rightsquigarrow\qquad \pi''\equiv\ \begin{array}{l}\Gamma\\ \nabla\pi_1\,[A/\bot]\\ \bot\end{array}$$

Figura III-2

Assim, π'' passaria a não conter ocorrências de $i\bot$. Contudo, por causa da substituição de um parâmetro proposicional pela fórmula $\bot$, eventualmente surgiriam aplicações da regra $e\bot$ com premissa e conclusão $\bot$ em π''. Logo, tais instâncias seriam desnecessárias (e incorretas). Assim, a eliminação dessas instâncias resultaria na derivação desejada. Notamos que o parâmetro *A* não pode ocorrer em Γ e, portanto, não mais ocorrerá em π''. *QED*

---

[155] Por **H**ipótese de **I**ndução.

Do nosso ponto de vista, esse teorema mostra que com respeito a relação de dedutibilidade intuicionista não haveria nada a reprovar à formulação usual sem a regra $i\bot$. Por outro lado, isso não significa que a regra não tenha nenhum papel. Como procuraremos argumentar no próximo capítulo, a validade da regra de $e\bot$ só poderia ser adequadamente defendida se assumirmos a validade da introdução, apoiando-nos no princípio de harmonia. Vimos que é possível prescindir da constante proposicional $\bot$, desde que o operador de negação seja considerado primitivo, acompanhado da regra de introdução e da regra de eliminação da negação restringida às conclusões básicas. Vamos chamar o sistema definido com essas regras para a negação de **Sistema Intuicionista com Negação** ($\mathcal{NJ}$). Não é difícil constatar que o sistema $\mathcal{NJ}$ é equivalente ao sistema $\mathcal{J}$ quando a negação é definida a partir de $\bot$. Efetivamente, cada aplicação de $i\sim$ ou de $e\sim$ pode ser substituída por uma seqüência de $i\bot$-$i\rightarrow$ ou uma seqüência $e\rightarrow$-$e\bot$, respectivamente. Isso mostra que $\mathcal{NJ}$ é representável em $\mathcal{J}$ via definição usual da negação por meio do absurdo. Por outro lado, $\mathcal{J}$ é representável em $\mathcal{NJ}$ da mesma forma que traduzimos as derivações contendo o absurdo em uma derivação contendo negação, conforme as Figura II-9 e Figura II-10 do capítulo anterior. A importância do sistema $\mathcal{NJ}$ está no fato de que as suas constantes lógicas são aquelas usualmente empregadas na práxis matemática e, além disso, a simetria introduções-eliminações é total nesse caso. Nenhuma constante lógica escaparia da dicotomia.

1.1. Observações acerca do Absurdo

Como já dissemos, parece-nos difícil aceitar que a proposição $\bot$ possa ser definida como aquela proposição que não possui prova direta/canônica. Alguns intuicionistas naturais propõem uma identificação muito forte entre o significado de uma proposição e o conjunto de suas provas, mais precisamente entre o significado de uma proposição e o conjunto de suas provas canônicas/diretas. No caso de $\bot$, a referida definição tomaria como critério de identificação, para as provas diretas de $\bot$, uma definição que parece de natureza extensional.

O conjunto de provas diretas/canônicas de $\bot$ seria vazio e, por isso, essa constante lógica seria um caso limite para o qual não haveria uma regra de introdução correspondente em dedução natural. Essa definição só não é completamente extensional porque o conjunto de provas que está sendo referido não é o conjunto de provas total, mas somente o conjunto das provas diretas/canônicas. Uma definição extensional simples, de que $\bot$ é aquela proposição que não pode ser provada, que fizesse referência ao conjunto total de provas, sem nenhuma qualificação

ulterior, seria problemática, pois isso implicaria, automaticamente, a consistência do sistema, por um *fiat*!

Contudo, não nos parece que um construtivista que admita algum tipo de correlação estreita entre o significado de uma proposição e as suas provas tenha que aceitar a definição intuicionista do significado de $\bot$. Ele seria levado a tomar aquela definição como correta, caso entendesse que sua tarefa consiste em descrever estruturalmente as provas atuais de uma proposição, ou seja, caso entendesse estar fazendo uma espécie de ontologia formal-descritiva. Ao fazer ontologia de provas, se uma determinada proposição não fosse demonstrável, simplesmente não haveria o que descrever. Todavia, parece-nos que um construtivista poderia, alternativamente, adotar uma outra perspectiva segundo a qual sua tarefa consistiria em estabelecer critérios intensionais para qualificar quais objetos poderiam ser admitidos como prova de uma proposição, sem que isso represente um compromisso com a existência desses objetos. Seria unicamente uma apresentação de critérios ou condições intensionais de identidade para eles.

Com efeito, acreditamos que considerar as provas de um ponto de vista puramente intensional se faz necessário e, provavelmente, é essa a razão pela qual Prawitz faz a seguinte consideração ([Pra98], pág. 48):

> *Eu estou assim argumentando que mesmo dentro de uma teoria do significado em termos de provas (ou verificações) nós devemos deixar espaço para a possibilidade de manter idéias de provabilidade ou de existência abstrata de provas; seria demasiado estreito restringir nossa conversa àquilo que está provado ou acerca da efetiva existência de provas.*[156]

Consideremos proposições matemáticas que sejam demonstradamente falsas. Para tais proposições, usualmente, podemos dizer o que seria uma putativa[157] prova, mesmo que ela já tenha sido refutada, ou seja, mesmo que não exista nenhuma prova, pois podemos estabelecer, pelo menos até certo ponto, os critérios para identificá-la. De outro modo, como saberíamos que a proposição é falsa ou refutada, se não pudéssemos recorrer à descrição intensional? Com efeito, tomando por base duas proposições falsas distintas entre si, é razoável admitir que aquilo que contaria como a putativa prova de uma delas é diferente daquilo que contaria como a putativa prova da outra, na medida em que os significados das duas proposições sejam distintos. O fato de que ambas sejam demonstradamente falsas não nos permitiria confundir as proposições,

---

[156] *I am thus arguing that even within a theory of meaning in terms of proofs (or verifications) we must make room for the possibility of entertaining ideas of provability or of abstract existence of proofs; it would be too narrow to construe our speech to be only about what is proved or about actual existence of proofs* Sublinhado nosso.

[157] Novamente, falar em provas putativas não é o mesmo que assumir que essas provas existem ou deixam de existir.

tampouco permitiria confundir os respectivos critérios de identificação para as suas putativas provas.

Por exemplo, as proposições "π *é racional*" e "π *é algébrico*" são distintas e ambas demonstradamente falsas. No entanto, suas putativas provas têm de ter critérios de identificação distintos, de outro modo não haveria diferença entre os predicados *ser racional* e *ser algébrico*.

De um ponto de vista bastante natural, e sem usar o princípio de *ex falso quodlibet*, a partir dos critérios que estabelecem o que seria a putativa prova das proposições, nós poderíamos dizer que existe uma construção demonstrando o seguinte condicional: π seria um número algébrico, caso ele fosse racional. Bastará concordarmos que essa asserção é de natureza condicional e que a sua correção ou validade repousa sobre o fato de que todo número racional é algébrico, o que, aliás, pode ser demonstrado por meio de uma construção simples. Para demonstrar esse condicional, não temos necessidade nenhuma de usar o princípio de *ex falso quodlibet*. Outrossim, notamos que a proposição condicional inversa, ou seja, a proposição de que π seria um número racional caso π fosse algébrico, não poderia ser provada da mesma maneira. Somente se usássemos o princípio de *ex falso quodlibet*, poderíamos provar um condicional similar a esse.

Parece-nos que, quando colocamos de lado o princípio, tanto a provabilidade do primeiro condicional quanto a não-provabilidade do segundo condicional nos indicariam algo importante. Como cada proposição componente dos dois condicionais é falsa, então, para cada uma delas, o seu conjunto de provas é vazio e, *a fortiori*, o seu conjunto de provas canônicas/diretas também seria vazio. Mas, fazendo apelo a esses conjuntos vazios, é difícil explicar por que um condicional seria provável e o outro não, quando colocamos de lado o princípio de *ex falso quodlibet*. Na verdade, fazendo apelo aos conjuntos vazios de provas, só poderíamos considerar os dois condicionais como identicamente prováveis se usássemos o referido princípio.

Do nosso ponto de vista, a diferença de significado entre as proposições deve se manifestar como uma diferença de critérios do que seria uma putativa prova de cada uma das proposições. Caso contrário, se não houvesse a diferença, ou não entenderíamos o significado das proposições ou, se o entendêssemos, todas as proposições falsas teriam de ser entendidas da mesma forma, pois, para todas elas, o conjunto de suas provas seria vazio. Assim, quaisquer duas proposições falsas distintas seriam fortemente equivalentes. Todavia, num sentido estrito, as proposições "π *é racional*" e "π *é algébrico*" não são equivalentes. Seus significados diferem. A única forma de demonstrar a equivalência lógica entre essas duas proposições falsas, mas não a

equivalência de significado, consistirá em adotar o princípio de *ex falso quodlibet*, cuja validade está sob júdice neste trabalho.

Antes de haver surgido, em 1761, uma prova da irracionalidade de π, não tínhamos certeza de que π não fosse racional. Mesmo depois disso, até o ano de 1882, não tínhamos certeza de que não fosse algébrico. Assim, qualquer pessoa que tenha pensado sobre a relação das duas proposições – "π *é algébrico*" e "π *é racional*" – antes de 1761 teria raciocinado corretamente se concluísse que a segunda proposição implica a primeira e que não havia, naquele momento, como saber se a primeira também implicaria a segunda. Os princípios de raciocínio que tal pessoa teria empregado não envolveriam o princípio de *ex falso quodlibet*. Porém, já que, a partir de 1882, ambas as proposições podem ser consideradas refutáveis, então, usando o *ex falso quodlibet*, não só a algebricidade de π implicaria a racionalidade de π, mas também a racionalidade de π implicaria a algebricidade de π. Desse modo, a proposição de que a racionalidade de π implica a algebricidade de π teria duas provas essencialmente distintas, uma delas usando o *ex falso quodlibet* e a outra não. Desde o nosso ponto de vista, não faria sentido deixar de considerar que o argumento pré-1761 seja uma prova, só porque passamos a estar de posse de uma prova por *ex falso quodlibet*. Adotar essa solução seria um ato muito estranho, pois equivaleria a considerar o argumento pré-1761 como não-válido. Contudo, não vemos como alguém consideraria razoável que provas futuras venham a alterar a correção ou a validade de provas passadas, sem que nenhum erro específico tenha sido apontado.

Intuitivamente, uma prova futura poderá nos fazer passar de um estágio atual de ignorância a um estágio de não-ignorância. Além disso, no futuro, pode ocorrer de descobrirmos que aquilo que supúnhamos fosse uma prova não o era, pois continha um erro. Contudo, não nos parece razoável dizer que a validade de um raciocínio provando um condicional deva ser rejeitada sem que nenhum erro tenha sido apontado, só porque surgiu uma nova prova mostrando que o antecedente do condicional é falso ou refutável.

Lingüisticamente, marcamos a diferença de acontecimentos envolvendo os condicionais por meio do uso do subjuntivo e dos tempos: π seria algébrico, caso *fosse* racional. O uso do pretérito subjuntivo na proposição anterior indica que sabemos que a proposição usada para expressar a condição é falsa. Historicamente, ela foi demonstrada como falsa em 1761. Aquele que tivesse constatado a correção do condicional correlato antes de 1761, não o expressaria empregando o pretérito do subjuntivo. Ao invés, poderia empregar o presente do subjuntivo: π será algébrico, caso *seja* racional. O uso do presente do subjuntivo indicaria ignorância ou descompromisso com a racionalidade de π. A oração "π *seja racional*" no antecedente do

condicional não envolveria um ato de asserção, mas, no máximo, um de suposição. Por outro lado, devemos admitir que outra forma de enunciação equivalente também poderia ter sido feita, empregando o presente do indicativo. Pareceria-nos gramaticalmente aceitável que o sujeito tivesse dito, na enunciação anterior a 1761: "*se π é racional, então π é algébrico*". Contudo, nesse caso, o uso do presente do indicativo "*é*" no antecedente do condicional dificilmente poderia ser considerado um uso assercional.

Agora, se $\bot$ for considerada uma proposição, mesmo que falsa, não vemos por que também não lhe exigiríamos critérios que permitiriam identificar suas putativas provas. Não parece razoável dizer que ela é a proposição da qual não existem provas diretas ou da qual não existem provas canônicas. De fato, isso poderia ser dito de qualquer proposição demonstradamente falsa e nem por isso estaríamos dispostos a identificar todas as proposições falsas, sequer aceitaríamos dizer que a refutação de uma delas pode ser usada como refutação de qualquer outra.

De certo modo, podemos fazer um paralelo entre o caso da proposição absurda e os casos dos conceitos de quimera e unicórnio. Embora não existam nem quimeras nem unicórnios, jamais confundiríamos uma quimera com um unicórnio, na medida em que temos critérios intensionais distintos para distingui-los. Se quiséssemos definir um novo ser fantástico, pareceria muito estranho dizer simplesmente que ele é um ser não-existente. De fato, essa descrição extensional se aplicaria a todos os seres fantásticos. Se quiséssemos refinar nossa definição, tentando torná-la menos extensional, dizendo que o ser fantástico que estamos definindo é tal que dele não há nenhuma caracterização prototípica, o máximo que conseguiríamos causar em qualquer platéia seria uma sensação de desconforto.

Problema similar, referente aos critérios de identificação da proposição absurda, parece também estar por trás de uma crítica dirigida aos intuicionistas. A crítica visa a definição da negação por meio do absurdo ou da contradição. Até onde sabemos, ela havia sido proposta por López-Escobar ([Lop72], págs. 362 e 363) e reapresentada por Wansing ([Wan99], pág. 226) do seguinte modo:

> *Since ~A is defined as $A \rightarrow \bot$, according to this interpretation, a proof of ~A is a construction that converts every proof of A into a proof of $\bot$. Since there is no (possible) proof of $\bot$, a proof of ~A would convert any proof of A into a non-existing entity. If we assume that the existence of a proof of ~A precludes the existence of a proof of A, then a proof of ~A would convert a non-existent object into a non-existent object.*

Essa crítica pode ser interpretada de diversas formas. Depende do que entenderíamos pelo conceito de construção. Em certo sentido, muitas construções podem nos levar de um conjunto

vazio a outro conjunto vazio, de um conjunto vazio de provas/construções a outro conjunto vazio de provas/construções ([Pra71], pág. 276). De outro ponto de vista, poderíamos também pensar no problema adotando a noção de aplicação, onde *f* será uma aplicação se *f* for um conjunto de domínio *D* e contra-domínio *C* que satisfaz a seguinte propriedade: $\forall x \forall y \forall z((x \in D \wedge y \in C \wedge z \in C \wedge <x,y> \in f \wedge <x,z> \in f) \rightarrow y=z)$ ([Cor93], pág. 122). Se o domínio e o contra-domínio de *f* forem vazios, então *f* será uma aplicação idêntica ao conjunto vazio. Assim, se as construções entre os conjuntos de provas fossem aplicações, então, caso ~*A* fosse demonstrável, haveria uma única aplicação que levaria do conjunto das provas da proposição *A* ao conjunto de provas da proposição absurda: a aplicação conjunto vazio.

A nosso ver, a construção que levaria da prova de uma proposição *A* à prova de outra proposição *B* deveria ser entendida como uma virtual seqüência de atos − passos dedutivos talvez − que transformaria um objeto que cumprisse com os critérios intensionais de identificação do que é uma prova de *A* em outro objeto que cumpriria com os critérios intensionais do que é uma prova de *B*. Formulado dessa forma, não haveria nenhum compromisso com a existência de provas sob um ou outro critério de identificação. Tampouco haveria necessidade de demonstrar que o virtual procedimento é satisfatório, caso ele viesse a estar constituído de passos dedutivos admissíveis. Isso poderia, e deveria, ser constatado quando efetuássemos a construção. Está claro, essa proposta difere de modo importante da proposta intuicionista para dedução natural. Na interpretação que estamos propondo, nem toda construção teria o poder de realizar a transformação requerida. Além disso, uma seqüência vazia de operações só cumpriria esse papel quando as proposições *A* e *B* fossem estritamente a mesma proposição, quando elas tivessem estritamente o mesmo significado. Em outros termos, a construção corresponderia a uma aplicação identidade.

Assim, retornando à crítica expressada na citação, se houvesse critérios de identificação para as provas de $\perp$ e critérios de identificação para as provas de *A*, não haveria problemas em mostrar uma construção ou uma seqüência de atos que nos levariam de uma putativa prova de *A* a uma putativa prova de $\perp$, mesmo quando ambas provas não existissem. Como argumentamos acima, proposições falsas distintas entre si devem ter critérios distintos para identificar o que seriam suas putativa provas. Por essa razão, do ponto de vista que adotamos, seria importante oferecer critérios que permitissem identificar as putativas provas de $\perp$. Com certeza, para todas as proposições significativas que tenham sido refutadas, não existem provas e, por conseqüência, também não existem provas diretas/canônicas. Nem por isso deixariam de existir diferenças nos critérios de identificação do que seriam as putativas provas de proposições falsas distintas.

1.2. Observações acerca da Regra de Introdução do Absurdo

Podemos retomar a regra $i\bot$ e apontar por que preferíamos considerar mais básico o conceito de dedução do que o conceito de prova. A regra $i\bot$ é formulada do seguinte modo:

$$\begin{array}{l}\Gamma\\ \nabla\\ A\\ \hline i\bot\\ \bot\end{array}$$

Figura III-3

É fácil dar sentido a essa regra, se a interpretarmos como uma forma de mostrar em que circunstâncias $\bot$ poderia ser considerada conseqüência dedutiva de um conjunto Γ de hipóteses. Não seria tão simples assim dar-lhe sentido, se entendêssemos que ela define o conceito de prova para $\bot$, pois, intuitivamente, não estamos pré-dispostos a admitir que exista uma prova de $\bot$ (nesse caso Γ teria que ser vazio).

Dado que a leitura que fazemos envolve o conceito de conseqüência dedutiva, também não fará sentido ler o símbolo ∇ como a representação de uma prova. Esse símbolo estaria sendo empregado para representar uma "árvore" de passos dedutivos que nos conduzem de certas hipóteses a uma conclusão. Não estará sendo empregado para representar um procedimento de transformação de provas das hipóteses em prova da conclusão. Uma derivação mostraria como a conclusão foi dedutivamente derivada das hipóteses. Não obstante, em nossa interpretação, sempre que houvesse uma prova de cada uma das hipóteses também haveria uma prova da conclusão. Bastaria "engatar" as provas das hipóteses nos seus devidos lugares e o constructo resultante seria uma prova da conclusão.

1.3. Faria Sentido um Sistema Intuicionista para a Preservação da Falsidade?

Depois que propusemos um sistema minimal para a preservação da falsidade, nos perguntaríamos se haveria um sistema dessa natureza similar ao sistema intuicionista.

Embora existam razões que poderiam sustentar uma resposta afirmativa, isso não significa que os intuicionistas em geral aceitariam o sistema que representamos a seguir como uma codificação adequada da noção de refutabilidade.

Efetivamente, do mesmo modo que, de um ponto de vista puramente sintático, os sistemas minimais proposicionais podiam ser encarados como uma elucidação da preservação da verdade

ou da preservação da falsidade, o sistema $\mathcal{I}$ também poderá ser encarado, adicionalmente, como um sistema para a preservação da falsidade.

Definiremos o **Sistema da Falsidade Construtiva** ($\mathcal{G}_f$) como uma extensão do sistema $\mathcal{M}_f$, adicionando uma regra de introdução da tautologicidade (***i*** $\top$) e a regra de eliminação da tautologicidade restringida às conclusões básicas (***e*** $\top$). As regras desse sistema estão apresentadas no seguinte quadro:

Introduções	$\dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \vee A_2}\, i\vee^f$ 1	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\,,\,[\underline{A_1}]^i \\ \nabla \\ A_2\end{array}}{A_1 \leftarrow\!\!\rightarrow A_2}\, i^i\, i\leftarrow\!\!\rightarrow$ 2	* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A\end{array}}{\exists x A[a/x]}\, i\exists^f$ 3
	$\dfrac{A_1}{A_1 \wedge A_2}\, i\vee^f e \qquad \dfrac{A_2}{A_1 \wedge A_2}\, i\wedge^f d$ 4	* $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ C\end{array}}{\top}\, i\top$ 5	$\dfrac{A[a/\tau]}{\forall x A[a/x]}\, i\forall^f$ 6
Eliminações	$\dfrac{A_1 \vee A_2}{A_1}\, e\vee^f e \qquad \dfrac{A_1 \vee A_2}{A_2}\, e\vee^f d$ 7	$\dfrac{A_1 \quad A_1 \leftarrow\!\!\rightarrow A_2}{A_2}\, e\leftarrow\!\!\rightarrow$ 8	$\dfrac{\exists x A[a/x]}{A[a/\tau]}\, e\forall^f$ 9
	$\dfrac{A_1 \wedge A_2 \quad \begin{array}{c}\Delta_1\,,\,[\underline{A_1}]^i \\ \nabla \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2\,,\,[\underline{A_2}]^i \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}\, i^i\, e\wedge^f$ 10	* $\dfrac{\top}{C}\, e\top$ 11	* $\dfrac{\forall x A[a/x] \quad \begin{array}{c}\Delta\,,\,[\underline{A}]^i \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}\, i^i\, e\forall^f$ 12

Figura III-4[158]

A negação será uma constante definida, mas também poderia ser dada como primitiva se tivéssemos usado as regras $i\neg$ e $e\neg$. Lembramos que a negação pode ser definida como $\neg A \equiv_{df} A \leftarrow\!\!\rightarrow \top$.

No fragmento proposicional do sistema, uma proposição que expressasse a tautologicidade não seria uma proposição da qual poderíamos dar nenhuma refutação. Desse

[158] As regras marcadas com * têm restrições de aplicabilidade.

modo, o problema relativo às provas canônicas de $\bot$ transmitir-se-ia para esse novo ambiente e para a constante $\top$.

Mostramos, a seguir, que haverá uma forma de traduzir todas as regras de introdução em $\mathcal{G}_f$ para dentro do sistema $\mathcal{G}$. Ou seja, todas as "refutações canônicas" dentro de $\mathcal{G}_f$ poderiam ser representadas em $\mathcal{G}$. De fato, é possível fazer mais ainda. Com exceção de uma única regra, a regra de $e\forall^f$, as demais regras de $\mathcal{G}_f$ podem ser derivadas em $\mathcal{G}$, adotando uma tradução que poderíamos chamar de **tradução natural**. Como o sistema $\mathcal{G}_f$ preserva a falsidade e o sistema $\mathcal{G}$ preserva a verdade, se uma fórmula A é derivada de uma lista de fórmulas $F_1,...,F_n$ em $\mathcal{G}_f$, então, considerando a negação como uma forma de representar a falsidade/refutabilidade de uma fórmula, uma boa tradução deveria mostrar como derivar $\sim A$ de $\sim F_1,...,\sim F_n$ em $\mathcal{G}$. Como veremos, essa propriedade não vale para a regra $e\forall^f$.

Abaixo, suporemos que a lista de fórmulas Γ está composta exatamente pelas fórmulas $F_1,...,F_n$ e, desse modo, representaremos a lista $\sim F_1,...,\sim F_n$ como $\sim\Gamma$. Como o sistema $\mathcal{G}$ está formulado com a constante $\bot$, isso significaria que, via tradução, teríamos que derivar $A\rightarrow\bot$ de $F_1\rightarrow\bot,...,F_n\rightarrow\bot$ em $\mathcal{G}$. Por fim, toda sentença da forma $A\leftrightarrow B$ em $\mathcal{G}_f$ deve ser traduzida por $\sim(B\rightarrow A)$ em $\mathcal{G}$, ou seja, por $(B\rightarrow A)\rightarrow\bot$, ao passo que a constante proposicional $\top$ em $\mathcal{G}_f$ pode ser traduzida pela fórmula $\bot\rightarrow\bot$ em $\mathcal{G}$. Reparamos que essa tradução natural induz uma tradução similar, correspondente, de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}_f$.

Tomando por base o quadro da Figura III-4, a derivação de cada uma das regras de $\mathcal{G}_f$, com exceção da última, será como a seguir (introduções de 1 a 6 e eliminações de 7 a 12, as derivações em vermelho correspondem a uma derivação que ocorre na respectiva regra da Figura III-4):

1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_1]^1}\ \sim A_1}{\bot}\ e\to \qquad \dfrac{\dfrac{}{A_2]^1}\ \sim A_2}{\bot}\ e\to}{\dfrac{[A_1\vee A_2]^2 \qquad \bot}{\bot}\ ^{1}\, e\vee}\ ^{2}\, i\to$$

$$\sim(A_1\vee A_2)$$

2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_1]^k}}{A_2\to A_1}\ i\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_2]^i}\quad \dfrac{}{[\sim A_2]^j}}{\bot}\ e\to}{\bot}\ e\bot}{A_1}\ ^{i}\, i\to}{\bot}\ ^{k}\, i\to \qquad \dfrac{}{A_2\to A_1}\quad \dfrac{}{[\sim(A_2\to A_1)]^p}\ e\to}{\sim\Gamma\ ,\ \sim A_1}\qquad \dfrac{\bot}{\sim\sim A_2}\ ^{j}\, i\to}{\nabla}$$

$$\dfrac{\sim A_2 \qquad \sim\sim A_2}{\bot}\ e\to$$

$$\dfrac{\bot}{\sim\sim(A_2\to A_1)}\ ^{p3}\, i\to$$

3

* a não ocorre em Γ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\exists xA[a/x]]^j}\qquad \dfrac{\dfrac{\sim\Gamma}{\nabla}}{[A]^i\ \sim A}\ e\to}{\bot}\ ^{i}\, e\exists}{\bot}\ ^{j}\, i\to}{\sim\exists xA[a/x]}$$

4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_1\wedge A_2]^1}\ e\wedge}{A_1 \qquad \sim A_1}\ e\to}{\bot}\ ^{1}\, i\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_1\wedge A_2]^1}\ e\wedge}{A_2 \qquad \sim A_2}\ e\to}{\bot}\ ^{1}\, i\to$$

$$\sim(A_1\wedge A_2) \qquad\qquad \sim(A_1\wedge A_2)$$

5

* lembrar que C não ocorre em Γ

$$\dfrac{\dfrac{\sim\Gamma}{\nabla}\ [C/\bot\to\bot]}{\sim(\bot\to\bot)}$$

6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\forall xA[a/x]]^1}\ e\forall}{A \qquad \sim A}\ e\to}{\bot}\ ^{1}\, i\to}{\sim\forall xA[a/x]}$$

7

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_1]^i}\ i\vee}{A_1\vee A_2 \qquad \sim(A_1\vee A_2)}\ e\to}{\bot}\ ^{i}\, i\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_2]^i}\ i\vee}{A_1\vee A_2 \qquad \sim(A_1\vee A_2)}\ e\to}{\bot}\ ^{i}\, i\to$$

$$\sim A_1 \qquad\qquad \sim A_2$$

8

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A_2]^j}\quad \dfrac{}{[A_2\to A_1]^i}\ e\to}{A_1 \qquad \sim A_1}\ e\to}{\bot}\ ^{i}\, i\to}{\sim(A_2\to A_1) \qquad \sim\sim(A_2\to A_1)}\ e\to}{\bot}\ ^{j}\, i\to$$

$$\sim A_2$$

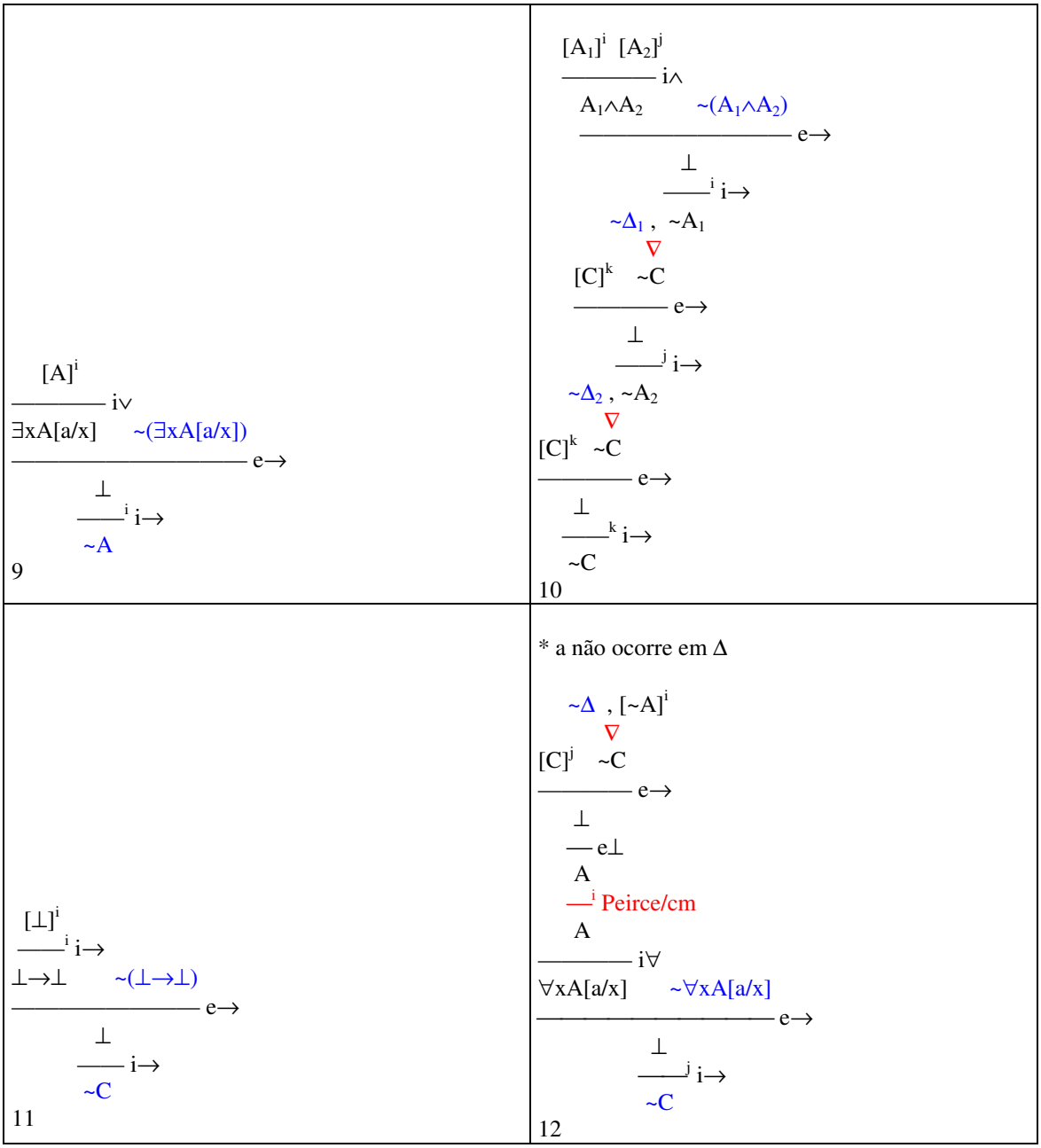


Figura III-5

Somente o esquema de derivação do quadro *12* não pode ser aceito de forma irrestrita pelos intuicionistas, por causa da regra *Peirce/cm*.[159] Lembramos que, se a estrutura resultante contiver instâncias de *e⊥* cuja conclusão não seja de valor zero, será possível obter outra derivação em que

[159] Porém, nesse caso, lembramos que Gentzen [Gen36], págs. 164 e 165, considerava que a regra de eliminação do existencial estaria bem justificada do ponto de vista finitista, desde que não houvesse nenhuma suposição transfinita na derivação subsidiária da regra, pois a regra de introdução do existencial garantiria o sentido finitista da sentença com o quantificador existencial. É interessante questionar se a mesma argumentação poderia ser aplicada no caso da refutabilidade do quantificador universal que é sintaticamente idêntico à provabilidade do existencial no sistema de preservação da verdade.

as instâncias terão conclusão de valor zero, conforme o procedimento que descrevemos acima, na Figura III-1[160].

1.4. Tradução de $\mathcal{J}$ em $\mathcal{M}$

Embora, anteriormente, tenhamos considerado a possibilidade de agregar regras de introdução e eliminação para o absurdo, é no sistema $\mathcal{J}$ que o princípio de *ex falso quodlibet* aparecerá pela primeira vez. Nem todas as fórmulas demonstráveis em $\mathcal{J}$ são demonstráveis em $\mathcal{M}$, como, por exemplo, $\bot\rightarrow A$. Mesmo assim, existe a possibilidade de traduzir as derivações de $\mathcal{J}$ em derivações de $\mathcal{M}$, mantendo uma parcela relevante da estrutura da derivação. O procedimento consiste em traduzir a constante lógica $\bot$ nas derivações de $\mathcal{J}$. Como toda derivação é um constructo finito, ela emprega um número finito de fórmulas básicas distintas. Assim, primeiro transformamos a derivação π numa derivação π' tal que ela não contenha instâncias de $i\bot$, cf. Teorema III-1. Em segundo, supondo que F seja a conjunção de todas as fórmulas básicas que sejam ocorrência de conclusão de uma instância de $e\bot$ em π, e supondo que G é o fecho universal de F, ou seja, $G\equiv\forall x_1,..., \forall x_n F[a_1/x_1,...,a_n/x_n]$, quando $a_1,...,a_n$ são todos os parâmetros que ocorrem em F, então, para obter π'' em $\mathcal{M}$, substituem-se paulatinamente as instâncias de $e\bot$ que estejam mais acima na derivação, conforme o esquema abaixo, onde π_2 será dada por uma seqüência de n instâncias de $e\forall$ seguida de uma seqüência de, no máximo, n instâncias de $e\wedge$:

$\nabla\pi_1$	$\nabla\pi_1[\bot/G]$
$\bot$	G
— $e\bot_r$	$\nabla\pi_2$
C	C
$\nabla\pi_3$	$\nabla\pi_3$

Figura III-6[161]

Depois de substituídas todas as instâncias de $e\bot$, substituem-se pela fórmula G as ocorrências remanescentes de $\bot$.

Intuitivamente, a tradução proposta consiste em substituir a proposição absurdo, cujo significado pode ser entendido como "toda informação", pela informação que seria suficiente para obter, como conseqüência lógica, todas as fórmulas que sejam conclusão de uma eliminação

---

[160] Isso poderia ocorrer se aplicássemos uma transformação como a do quadro *5* acima.

[161] A presente idéia foi comunicada por D. Durante e por mim, em um trabalho conjunto [Alv01], no *I Natural Deduction Meeting*, PUC, Rio de Janeiro, 2001. Naquela ocasião, o prof. Mints observou que Wajsberg já havia obtido resultado similar em 1939.

de absurdo. Assim, em certo sentido, o fecho universal da fórmula representa o conceito de "toda informação" num âmbito restrito.

1.5. Observações acerca da Equivalência das Regras Indiretas

Vimos que, para as duas tríades de regras indiretas equivalentes entre si − por um lado, *Peirce*, *ae* e *cdi*; por outro, *cm*, *te* e *cdi*⊥ −, cada elemento da segunda tríade é caso particular do respectivo elemento na primeira. A diferença entre as tríades está na especificidade de uma determinada proposição. Essas duas tríades só serão interderiváveis sob o princípio de *ex falso quodlibet* na forma da regra *E*⊥, conforme a Figura II-41 do capítulo anterior. Com a versão da regra na forma *e*⊥ em $\mathcal{J}$, as tríades não serão propriamente interderiváveis, mas, com certeza, a qualquer derivação em que seja feita aplicação de uma regra da primeira tríade corresponderá uma outra derivação empregando a versão restringida de *e*⊥ mais a regra correspondente da segunda tríade. Ou seja, àquela aplicação de *E*⊥ na Figura II-41 corresponderia uma derivação intuicionista conforme a Figura III-1.

2. Sistemas Clássicos

O **Sistema Clássico** ($\mathcal{C}$) contém as regras: *i*∧, *e*∧, *i*∨, *e*∨, *i*→, *e*→, *i*∀, *e*∀, *i*∃, *e*∃, *i*⊥, *e*⊥ e *cm* (*consequentia mirabilis*). Para esse sistema também vale o enunciado do Teorema III-1 (obviamente, substituindo $\mathcal{C}$ no lugar de $\mathcal{J}$) e ele seria demonstrado com a mesma prova. Notamos que, no sistema $\mathcal{C}$, poderíamos ter admitido *E*⊥. Contudo, da mesma forma que no sistema $\mathcal{J}$, o sistema com a versão restringida às conclusões básicas não perde poder dedutivo. É interessante notar que, desse modo, para obter o sistema $\mathcal{C}$, basta modificar o sistema $\mathcal{RC}$, dotando-o de uma regra de eliminação do absurdo de maior poder dedutivo, uma versão que contemple o princípio de *ex falso quodlibet*. A adição das regras *i*⊥ e *e*⊥ ao sistema $\mathcal{P}$ resultará num sistema do qual podemos derivar o sistema $\mathcal{C}$. Notamos que, por definição, $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}$.

Assim, se a elucidação dos princípios lógicos deve ser feita separando de forma clara e distinta os papéis das constantes lógicas, entenderemos que uma das melhores elucidações da lógica clássica será aquela que resulta de adicionar um princípio de dedução indireta ao sistema $\mathcal{J}$, mas tal que esse seja, ao mesmo tempo, um dos princípios mais fracos, em termos de potência dedutiva, dentre os princípios de dedução indireta. Esse é exatamente o caso de *cm*. Mas, além dessa, existe ainda uma outra razão para adotar *cm*: o fato de que, nessa regra, a premissa imediata e a conclusão são idênticas.

Usualmente, o sistema clássico é definido, na literatura de dedução natural, a partir da **regra de absurdo clássico** ($\bot_c$):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\,,\,[\sim A]^{i}\\ \nabla\\ \bot\end{array}}{A}\;i\;\bot_c$$

Figura III-7

Essa regra equivale à regra *cdn*, quando a negação é definida a partir da constante $\bot$. Logo, desde o ponto de vista do sistema $\mathcal{M}$, *cdn* e $\bot_c$ são interderiváveis:

$$\dfrac{[\sim A] \quad \sim\sim A}{\dfrac{\bot}{A}\;\bot_c}\;e\rightarrow \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\,,\,[\sim A]^{i}\\ \nabla\\ \bot\end{array}}{\sim\sim A}\;i\rightarrow}{A}\;cdn$$

Figura III-8

A regra $\bot_c$ é derivável a partir da regra $E\bot$ e da regra *cm*:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\sim A]^{i}\\ \nabla\pi_1\\ \bot\end{array}}{A}\;E\bot}{A}\;i\;cm$$

Figura III-9

Do nosso ponto de vista, isso mostraria que a regra pode ser decomposta em duas regras mais elementares. Mas, já que o sistema clássico foi definido com a regra $e\bot$, não poderíamos garantir propriamente a derivabilidade da regra $\bot_c$ em $\mathcal{C}$, apenas a existência de uma derivação da mesma conclusão a partir das mesmas hipóteses, usando unicamente $e\bot$ e *cm*, segundo o procedimento da Figura III-1:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim A]^{i}\\ \nabla\pi_1\\ \bot\\ \nabla\pi_2\\ A\end{array}}{A}\;i\;cm$$

Figura III-10

Ou seja, no sistema clássico acima, podemos validar $\bot_c$, mas não podemos derivar $\bot_c$, pois existirá uma derivação π_2 que mostra $\bot\Vdash A$ e que só usa regras de $\mathcal{I}$. No entanto, o sistema $\mathcal{C}$ é suficiente para derivar todas as verdades da lógica clássica.

Preferimos não usar $\perp_c$ na definição do sistema clássico, dado que essa regra pode ser decomposta em princípios que consideramos mais elementares[162]. A regra $\perp_c$ envolve, ao mesmo tempo, uma dedução indireta e o uso de *ex falso quodlibet*. Inclusive, dela derivamos esses dois princípios. O *ex falso quodlibet* na forma da regra $E\perp$ equivale a uma aplicação irrelevante de $\perp_c$. Por sua vez, a derivação de *cm* a partir de $\perp_c$ só requereria, adicionalmente, as regras de $\mathcal{M}_{\rightarrow}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\rightarrow\perp]^i \quad \nabla\pi_1}{A} \quad \dfrac{[A\rightarrow\perp]^j}{A}\,e\rightarrow}{\perp}}{A}\,{}^{j}\perp_c$$

Figura III-11

Dessa regra também derivamos a regra *Peirce*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^i \quad [\sim A]^j}{\perp}\,e\rightarrow}{B}\perp_c}{A\rightarrow B}\,{}^{i}\,i\rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_1}{A} \quad \dfrac{[\sim A]^j}{A}\,e\rightarrow}{\perp}}{A}\,{}^{j}\perp_c$$

Figura III-12

Do ponto de vista elucidatório, tomar *Peirce* ou *cm* como uma regra mais básica do que $\perp_c$ implicaria admitir que não é, exatamente, o conceito de proposição absurda, representável nesses sistemas, que diferencia mais profundamente os intuicionistas dos clássicos. A diferença dá-se, na verdade, sobre a aceitabilidade de uma regra de dedução indireta que, a nosso ver, implica uma concepção distinta do conceito de conseqüência dedutiva. Além disso, como dissemos, essas regras de dedução indireta só podem fazer algum sentido quando interpretamos as hipóteses de forma diferente daquela que os intuicionistas costumam fazer, caso contrário os clássicos teriam que aquiescer com a crítica intuicionista de que as regras de dedução indireta são inválidas, já que do fato de que A seja deduzido da suposição $A\rightarrow\perp$ não se segue que possamos obter uma prova de $A\rightarrow\perp$. A garantia da existência dessa prova é a única forma sob a qual os

[162] Seldin ([Sel89], pág. 193) já tinha sustentado opinião similar. Ele considerava essa regra mais forte do que o necessário para obter a lógica clássica..

intuicionistas aceitariam a validade da regra *cm*, a validade do descarte da suposição.

Quando definimos o sistema intuicionista acima, oferecemos, como alternativa, o sistema $\mathcal{NJ}$, em que, para cada operador lógico, havia regras de introdução e de eliminação e mais nenhuma outra regra, sendo a negação considerada um operador primitivo. Vamos chamar de $\mathcal{NK}$ o sistema onde a negação é tratada como primitiva, ou seja, onde temos *i*~, *e*~ (restrita às conclusões básicas) e *cm*.

Os dois sistemas, $\mathcal{NJ}$ e $\mathcal{NK}$, sobretudo o último, são elucidações que se aproximam bastante da praxe argumentativa para o âmbito das matemáticas. Elas correspondem, com razoável proximidade, às práticas inferenciais intuitivas que os intuicionistas e os clássicos admitiriam, respectivamente. Existem traços históricos importantes do uso de *consequentia mirabilis* na matemática, na filosofia e na teologia.

Uma exposição histórica e crítica do uso da regra *cm* e da discussão da sua validade pode ser encontrada em Belíssima & Pagli [Bel96][163]. Segundo eles, um dos primeiros autores de que temos provas de haver observado a validade da regra foi Cardano ([Bel96], cap. 1). Além disso, alguns dos primeiros resultados de geometria não-euclidiana foram obtidos por Saccheri no século XVII, ainda que de forma inconsciente, ao tentar usar de forma consciente esse tipo de dedução ([Sac33], prefácio de G.B.Halsted).

Uma apresentação contemporânea, que antecipa a apresentação da lógica clássica usando *consequentia mirabilis*, é, segundo Belíssima & Pagli ([Bel96] cap. 8), a apresentação de Lukasiewicz. Segundo os autores, ele teria empregado para o cálculo proposicional no seu *Elements of Mathematical Logic*, de 1929, os seguintes três axiomas: *(i)* $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$; *(ii)* $(\sim A \to A) \to A$ (*consequentia mirabilis*[164]); *(iii)* $A \to (\sim A \to B)$ (*ex falso quodlibet*). Lukasiewicz teria observado que, dentre os três, somente o segundo não é válido intuicionisticamente e, assim, qualquer teorema que seja válido só para a lógica clássica deverá envolver o uso de *consequentia mirabilis* na demonstração. É notável também que o exame da *consequentia mirabilis* esteja envolvido na questão das lógicas polivalentes, pois a recusa da validade dessa regra equivale a recusar a validade da lei de terceiro excluído, como bem notam Belíssima & Pagli ([Bel96], pág. 163).

Em termos intuitivos, na argumentação matemática, o tipo mais usual de raciocínio que

---

[163] Esse item bibliográfico contém um exame histórico bastante amplo do uso da regra de *consequentia mirabilis* na argumentação teológica, filosófica e matemática. Um dos principais objetivos do livro consiste em examinar em que sentido o uso dessa regra é primordial e não pode ser substituído por outra forma de inferência. Também considera se, de forma conexa, poderíamos falar em evidência direta quando a regra é usada. Nossa opinião particular, como é claro no contexto, é a de que essa regra também é uma regra de dedução indireta. Talvez, a mais básica dentre elas.

[164] Na forma de axioma, também é chamado de Lei de Clavius.

envolveria uma demonstração com dedução indireta é aquele que consiste em supor a negação (contraditória) de uma proposição para derivar dela a própria proposição. A seguir, conclui-se pela proposição, eliminando a dependência da hipótese. Porém, freqüentemente, esse tipo de raciocínio é assimilado a um outro tipo de raciocínio intuicionisticamente admissível, no qual conclui-se pela negação da proposição suposta, quando dessa proposição derivam-se proposições contraditórias. Desde o ponto de vista de dedução natural, tais princípios devem ser distinguidos. O primeiro deles, representado à esquerda na figura abaixo, será elucidado no sistema C por meio do esquema de derivação à direita:

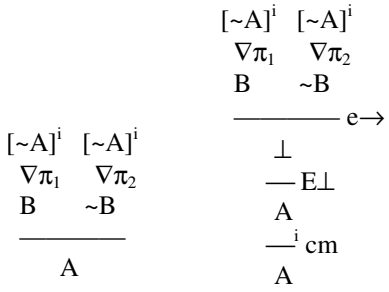


Figura III-13

O segundo princípio, representado à esquerda na figura abaixo, será elucidado, tanto no sistema $\mathcal{J}$ quanto no sistema C, por meio do esquema de derivação à direita:

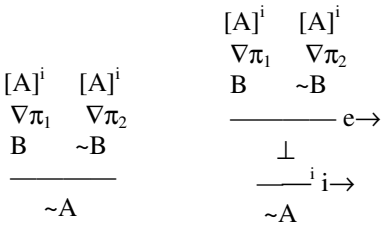


Figura III-14

Historicamente, um dos postulados da geometria euclidiana causava razoável perplexidade, não propriamente quanto à sua validade, mas quanto à sua elementariedade, pela forma complexa de sua enunciação. Inclusive, vários matemáticos chegaram a tentar uma redução desse postulado aos demais. A existência dele chegou a ser considerada uma espécie de mancha sobre a bela obra de Euclides. Aqui entra Saccheri e sua tentativa de demonstrar a postulado das paralelas. Ele procurou mostrar que, ao supor a negação do postulado das paralelas, poderíamos concluir pelo próprio postulado com base numa determinada estrutura argumentativa chamada *consequentia mirabilis* ([Kne62], pág. 351). Nessa estrutura, supõe-se a negação ou a falsidade de uma proposição que se quer provar e, se dessa suposição for possível deduzir

diretamente a própria proposição, conclui-se que ela será efetivamente verdadeira[165]. Desse modo, provavelmente, pensava Saccheri, se fosse possível demonstrar o postulado por *consequentia mirabilis*, qualquer prova de um teorema poderia ser "independizado" desse postulado, na medida em que bastaria acrescentar aquela prova naqueles lugares onde o axioma fosse usado na prova de um teorema principal.

Saccheri não conseguiu demonstrá-lo a partir da sua negação e, hoje, sabemos que, efetivamente, não poderia. Sabemos que, ao postular proposições incompatíveis com o postulado das paralelas - ou seja, proposições que permitam deduzir a negação das paralelas - obteremos outras geometrias. A descoberta dessas outras geometrias acabou por exigir uma reformulação da compreensão que historicamente a humanidade tinha desenvolvido acerca dos sistemas axiomáticos, basicamente, a formulação aristotélica, conforme Raggio [Rag70]. Uma dessas reinterpretações é a de Hilbert, chamada de perspectiva hipotético-dedutiva ([Ber22], pág. 8).

Desde essa mudança conceptual, consideramos que faz todo sentido assumir o axioma das paralelas, tanto quanto faz sentido assumir alguma das formas contrárias do postulado das paralelas, embora, obviamente, não seja possível assumir ambas ao mesmo tempo. Mais interessante é o fato de que, contemporaneamente, ao dizer que assumimos um desses axiomas, já estamos dando por suposto que não pode haver prova do axioma assumido. Isso, parece-nos, torna ainda mais difícil entender o que significaria assumir uma proposição no sentido de supor a posse da prova dessa proposição. Esse conceito de assunção, usado pelos intuicionistas, não parece ser aplicável aos axiomas. Pior ainda, ao que parece, também não faz sentido dizer que o axioma das paralelas está sendo asserido, se o conceito de asserção adotado estiver estritamente ligado à posse de uma prova/construção da proposição correspondente. Tanto o axioma das paralelas quanto alguma das formas contrárias podem ser asseridos, mas não há propriamente uma prova de cada um desses axiomas. Ou ainda, dado que, no caso das paralelas, o axioma e a sua negação fazem sentido, então, segundo o conceito de negação intuicionista, o conjunto das provas para uma delas implicaria que o conjunto de provas da outra deveria ser vazio.[166]

---

[165] A base para essas considerações estaria supostamente dada pelo uso da inferência por *consequentia mirabilis* na prova da proposição 12 do livro IX da geometria euclidiana. Aliás, chamamos a atenção para a formulação dessa proposição, que é interessante. Ela é de natureza condicional e a sua condição aparece formulada com o uso do subjuntivo (o subjuntivo está sublinhado), [Hea25vII], pág. 397: *If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, by however many prime numbers the last is measured, the next to the unit will also be measured by the same.* A prova dela começa da seguinte forma: *Let there be as many numbers as we please, A, B, C, D,* .... Um pouco mais adiante, a apresentação da suposição contrária àquilo que se quer provar é feita do seguinte modo: *For let D be measured by any prime number E; I say that E measures A. For suppose it does not;* ... A última expressão sublinhada não está sendo asserida, está sendo suposta, ou seja supõe-se que *D* não esteja medido por ....

[166] Sundholm [Sun98], nota 27, faz uma observação importante: a de que é preciso distinguir assunções de natureza alética (suponha que *p* é verdadeiro) e assunções de natureza epistemológica (suponha que conhecemos *p*). Desde

Talvez, agora, possamos dizer com maior clareza por qual razão quisemos enfatizar que os sistemas de dedução natural representam o uso de hipóteses de forma primária e por que o conceito intuicionista de hipótese nos pareceu inadequado. As regras de dedução indireta são, caracteristicamente, regras para descartar hipóteses. Portanto, como as regras de dedução indireta dependem do conceito de hipótese e o conceito de assunção intuicionista entra em conflito direto com essas regras, pareceu-nos necessário, pelo menos, viabilizar um arcabouço conceptual alternativo envolvendo os conceitos de dedução, proposição e asserção. Um arcabouço que admitisse outra interpretação para as regras dos sistemas de dedução natural. Contudo, há que salientar, ao propô-lo, procuramos preservar uma série de intuições construtivas. Uma das mais importantes diz respeito à noção de argumento e está relacionada à crítica que Prawitz dirigiu ao conceito de conseqüência lógica tarskiano. Outra diz respeito à separabilidade e independência dos princípios lógicos envolvidos nas distintas operações lógicas via regras de introdução e de eliminação.

Poderíamos ter usado outras formas alternativas de definir a lógica clássica ao invés de usar *cm*. Discorreremos brevemente sobre algumas. Uma forma distinta de definir o sistema clássico consistiria em adicionar o esquema de axioma $A \vee \sim A$ a $\mathcal{J}$. Historicamente, o primeiro sistema de dedução natural proposto por Gentzen foi esse sistema ([Gen35], pág. 81)[167]. É digno de nota que a adição do axioma $A \vee \sim A$ equivalerá à adição da regra de *terceiro excluído* que, como já vimos, é equivalente à *cm*, embora *cm* seja caso particular da regra *te*, mas não vice-versa.

Outra forma distinta, talvez um pouco inusitada, de definir o sistema clássico, consiste em fazer uma variação sobre $\mathcal{J}$, tal que as regras de $i\vee$ e $i\exists$ seriam substituídas pelas seguintes regras:

$$\frac{\begin{array}{c}[\sim A]^i \quad [\sim B]^i \\ \nabla \\ \bot\end{array}}{A \vee B}\, i\vee_\bot \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\sim A[a/\tau]]^i \\ \nabla \\ \bot\end{array}}{\exists x A[a/x]}\, i\exists_\bot$$

Figura III-15

Nesse sistema, qualquer aplicação das regras *Peirce/cm* poderia ser simulada:

---

nosso ponto de vista, essa "noção epistemológica" deveria ser objeto de um exame extenso. O problema que a noção suscita torna-se perceptível no momento de caracterizar a constante lógica de negação.

[167] Obviamente, esse sistema não tinha regra de introdução do absurdo.

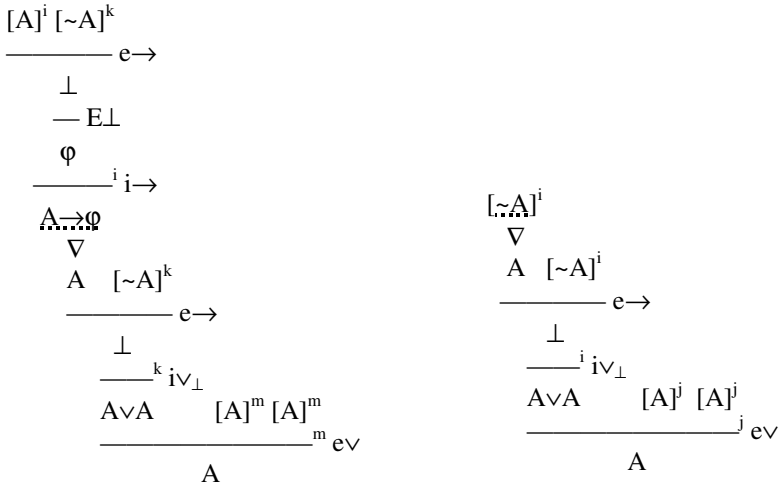


Figura III-16

No sistema com aquelas regras como primitivas, tanto $i\vee e$ $[\![i\vee d]\!]$ quanto $i\exists$ seriam regras derivadas:

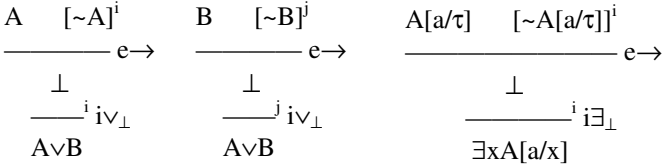


Figura III-17[168]

Outra forma usual de definir a lógica clássica consiste em adicionar *cdn* ao sistema $\mathcal{I}$. Observamos que *cdn* não é caso particular de *cdi* e vice-versa. Também não é caso particular de *cdi*$\perp$ e vice-versa. De fato, *cdi* e *cdn* tornam-se interderiváveis só se admitimos $E\perp$:

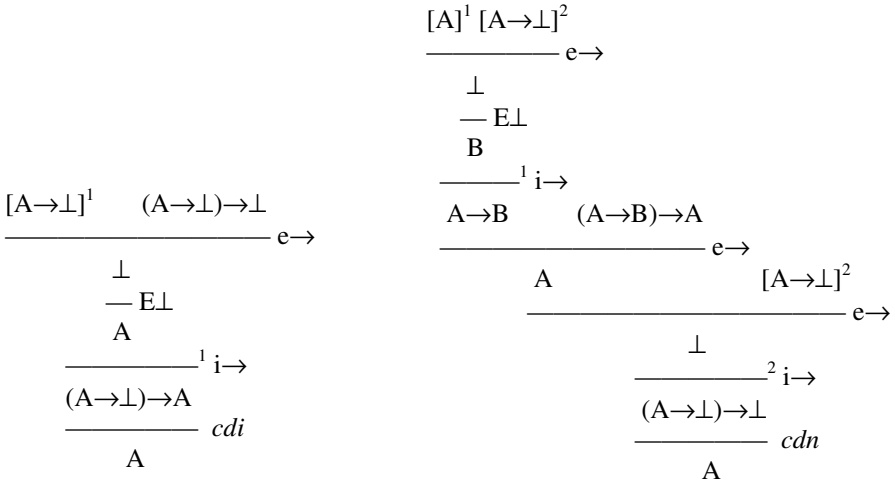


Figura III-18

A regra *cdi*$\perp$ será derivável de *cdn* no sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$:

---

[168] Infelizmente, esse sistema também não tem boas propriedades, como veremos adiante.

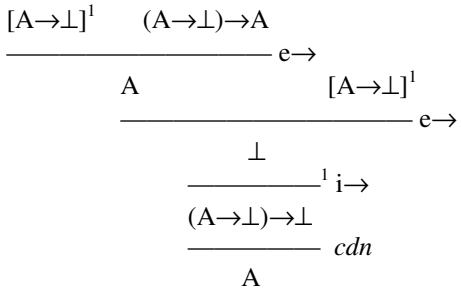


Figura III-19

Quando temos em mente uma elucidação do conceito de conseqüência lógica ou do conceito de dedução do ponto de vista da lógica clássica, a variedade de formas em que o sistema pode ser definido é muito grande. Somos levados naturalmente a perguntar se não haveria critérios ulteriores para a escolha de um tipo de definição que possa ser considerado como o mais adequado. Entendemos que o problema da adequação deve ser respondido, em boa medida, levando em conta os propósitos a que o sistema se destinará. Se o objetivo é, de modo geral, a elucidação de uma determinada praxe demonstrativa, não necessariamente o sistema mais adequado terá que ser aquele que espelha, nos menores detalhes, essa praxe, embora também não possa afastar-se dela demasiadamente. Entendemos que a praxe é, ela mesma, uma resultante histórica, milenar, da reflexão e da normatização de nossos atos argumentativos, sobretudo daqueles no âmbito da matemática. Parece-nos perfeitamente natural que uma sistematização oriunda de uma nova proposta elucidatória venha a se incorporar a ela, renovando-a. Não obstante, acreditamos que existem critérios gerais de escolha e, embora não possamos formulá-los de forma precisa e definitiva, podemos, no entanto, discuti-los, o que faremos nos próximos capítulos. A discussão desses critérios nos levará, por exemplo, a rejeitar o sistema acima em que variamos as regras de $i\vee$ e $i\exists$.

2.1. Observações sobre o Sistema Clássico para a Preservação da Falsidade

Quanto ao problema da preservação da falsidade, haverá um sistema clássico correspondente. Ele será obtido a partir do sistema caracterizado pelas regras na Figura III-4, acrescido de uma forma de regra estruturalmente similar à regra *consequentia mirabilis*, seja na versão onde o símbolo de tautologicidade $\top$ é primitivo, seja na versão em que o símbolo de negação $\neg$ é primitivo:

$$\begin{array}{ll} [A \nleftarrow \top]^i & [\neg A]^i \\ \nabla & \nabla \\ A & A \\ \hline{}^i\,cm & \hline{}^i\,cm \\ A & A \end{array}$$

Figura III-20

Como o sistema clássico contém regra de dedução indireta, a tradução que havíamos examinado para o caso intuicionista funcionaria perfeitamente aqui. Via as definições $A \nleftarrow B \equiv_{df} (B \rightarrow A) \rightarrow \bot$ e $A \rightarrow B \equiv_{df} (B \nleftarrow A) \nleftarrow \top$, a fórmula $A \nleftarrow \top$ corresponderia à fórmula $((\bot \rightarrow \bot) \rightarrow A) \rightarrow \bot$, que é equivalente em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ à $A \rightarrow \bot$. Porém, via tradução natural, como a regra *cm* no sistema para preservação da falsidade significa que se seguiria a falsidade de A, quando da falsidade de $A \nleftarrow \top$ segue-se a falsidade de A, assim, no sistema para preservação da verdade, isso equivalerá à seguinte regra de dedução, também válida no sistema $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{c} [(A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot]^i \\ \nabla \\ A \rightarrow \bot \\ \hline{}^i \\ A \rightarrow \bot \end{array}$$

Figura III-21

De fato, a tradução funcionaria perfeitamente, tanto no sentido de traduzir a lógica clássica para a preservação da falsidade dentro da lógica clássica para a preservação da verdade, como vice-versa. Mais que isso, como já vimos, nesse caso, o sistema para preservação da verdade permite representar o sistema para preservação da falsidade e vice-versa.

O sistema de preservação da falsidade que estamos apresentando já havia sido parcialmente antecipado por Tamminga em [Tam94]. Curiosamente, o conceito que dá origem e que subjaz à sua apresentação das regras de dedução natural é o conceito de rejeição, do qual já tratamos brevemente no capítulo anterior. Preferimos o conceito de preservação da falsidade ou de preservação da refutabilidade. Em seu artigo, Tamminga emprega como regra de dedução indireta uma regra que corresponderia à regra $\bot_c$ do sistema de preservação da verdade, ou seja, emprega algo que seria como uma regra de "tautologicidade clássica". Ele também tem uma regra $e\top$, mas não tem regra $i\top$. Em nosso sistema, as regras para a implicação e a desimplicação podem ser dadas de forma independente, dado o uso que fazemos dos parâmetros proposicionais. No sistema de Tamminga, seria preciso definir a desimplicação usando as outras constantes lógicas. Finalmente, em nosso sistema, temos regras quantificacionais, enquanto, em [Tam94], o sistema é de natureza proposicional.

2.2. Sistema Clássico para $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$,

O **Sistema Clássico para o Fragmento $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$** ($C_{\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}}$) é aquele sistema que contém as regras: $i\wedge$, $e\wedge$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$ e $e\forall$, $i\bot$, $e\bot$ e cm[169]. Logo, $C_{\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}} \subset C$. O fragmento $C_{\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}}$ é completo, pois a disjunção e o existencial podem ser definidos de duas formas distintas, uma delas é aquela que já apresentamos no âmbito de $\mathcal{P}_{\{\wedge, \rightarrow, \forall\}}$. A outra é a que se segue:

Definição III-1 - $(A \vee B) \equiv_{df} \sim(\sim A \wedge \sim B)$[170]*;*

Definição III-2 - $\exists x A[a/x] \equiv_{df} \sim \forall x \sim A[a/x]$.

Dada uma derivação π no sistema C, é possível obter uma derivação π' no sistema $C_{\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}}$ correspondente a π, substituindo as instâncias de introdução da disjunção e do existencial e as respectivas eliminações. Se existem *n* regras desse tipo, então haverá uma seqüência $\pi_1,...,\pi_n$ de estruturas derivacionais, onde $\pi \equiv \pi_1$, tal que π_n não conterá nenhuma instância de introdução ou de eliminação de disjunção e de existencial. A passagem de π_i a π_{i+1}, para $1 \leq i < n$, pode ser efetuada sobre qualquer instância de introdução ou de eliminação, seja de disjunção, seja de existencial, conforme o quadro abaixo:

introdução da disjunção	$\nabla\pi_1$ $A_{1\|2\|}$ ——— $i\vee e\|\|d\|\|$ $A_1 \vee A_2$ $\nabla\pi_2$	$[\sim A_1 \wedge \sim A_2]^i$ $\nabla\pi_1$ ——————— $e\wedge e\|\|d\|\|$ $A_{1\|2\|}$ $\quad \sim A_{1\|2\|}$ ——————— $e\rightarrow$ $\bot$ ———————— $^i i\rightarrow$ $(\sim A_1 \wedge \sim A_2) \rightarrow \bot$ ═══════ $A_1 \vee A_2$ $\nabla\pi_2$

[169] Em [Pra65], o sistema é definido com a regra $\bot_c$ ao invés de $e\bot$ e cm. Adicionalmente, o sistema definido em [Pra65] não contém a regra $i\bot$.

[170] Conforme a nota 146, $A \vee B \equiv_{qdf} ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow C$. Repare-se que, substituindo $\bot$ no lugar de C, obtemos exatamente $(A \vee B) \equiv_{df} \sim(\sim A \wedge \sim B)$.

eliminação da disjunção	$\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \overset{[A_1]^i}{\nabla\pi_2} \quad \overset{[A_2]^i}{\nabla\pi_3}}{\dfrac{A_1 \vee A_2 \quad C \quad C}{C}\, e\vee^{\,i}}$ $\nabla\pi_4$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{[A_1]^i}{\nabla\pi_2}}{C}}{\sim C}\, e\rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\overset{[A_2]^j}{\nabla\pi_3}}{C}}{\sim C}\, e\rightarrow}{\bot}}{\sim A_1}\, i\rightarrow^{\,i} \quad \dfrac{\dfrac{}{\bot}}{\sim A_2}\, i\rightarrow^{\,j} \quad \dfrac{\nabla\pi_1}{A_1 \vee A_2}}{\dfrac{\sim A_1 \wedge \sim A_2 \qquad \sim(\sim A_1 \wedge \sim A_2)}{\bot}\, i\wedge \; e\rightarrow}$ $\dfrac{\bot}{C}\, E\bot$ $\dfrac{C}{C}\, cm^{\,k}$ $\nabla\pi_4$
introdução do existencial	$\dfrac{\nabla\pi_1}{\exists x A[a/x]}\, i\exists$ $\nabla\pi_2$	$\dfrac{\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \overset{[\forall y \sim A[a/y]]^i}{}}{A \qquad \sim A}\, e\forall}{\bot}\, e\rightarrow$ $\dfrac{\bot}{\sim\forall y \sim A[a/y]}\, i\rightarrow^{\,i}$ $\exists x A[a/x]$ $\nabla\pi_2$
eliminação do existencial	$\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \overset{\Gamma,[A]^i}{\nabla\pi_2}}{\dfrac{\exists x A[a/x] \quad C}{C}\, e\exists^{\,i}}$ $\nabla\pi_3$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{[A]^i}{\nabla\pi_2}}{C}}{\sim C}\, e\rightarrow}{\bot}}{\sim A}\, i\rightarrow^{\,i} \quad \dfrac{\nabla\pi_1}{\exists x A[a/x]}}{\dfrac{\forall y \sim A[a/y] \qquad \sim\forall y \sim A[a/y]}{\bot}\, i\forall \; e\rightarrow}$ $\dfrac{\bot}{C}\, E\bot$ $\dfrac{C}{C}\, cm^{\,k}$ $\nabla\pi_3$

Figura III-22

As fórmulas abaixo e acima da linha dupla são equivalentes, conforme Definição III-1 e Definição III-2. Sobre a estrutura derivacional π_n, serão substituídas todas as ocorrências que contenham disjunção ou existencial, segundo as equivalências da Definição III-1 e Definição III-2. Seja π_{n+1} a estrutura derivacional resultante, logo não haverá símbolos de existencial e de

disjunção em π_{n+1}. Restarão algumas linhas de separação duplas com ocorrências de fórmulas sintaticamente idênticas acima e abaixo da linha dupla na estrutura derivacional. Assim, bastará eliminar cada linha dupla junto com uma dessas ocorrências. Se π_{n+2} é o resultado dessa última operação, então essa é a derivação buscada. Finalmente, as instâncias de $E\bot$ podem ser eliminadas por derivações que só empreguem $e\bot$, como já mostramos anteriormente.

Conclui-se que, no sistema C, a disjunção e o existencial podiam ter sido definidos.

2.3. Sistema Clássico para $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$ com Regra *cm* Básica

Com base no sistema para o fragmento $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$, podemos fazer uma restrição ulterior à regra *cm*. A regra *consequentia mirabilis* estará restrita às conclusões básicas (***cm´***) e o sistema clássico resultante será denotado por C'. Notamos que $C' \subset C_{\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}}$.

Em [Pra65], encontramos um sistema similar, estreitamente correlacionado a este, e também chamado da mesma forma. A diferença entre eles está em que aquele sistema é definido com a regra $\bot_c$ restrita às conclusões atômicas, ao passo que, neste, *cm* está restrita às conclusões básicas. Além disso, neste temos as regras $i\bot$ e $e\bot$, mas, naquele, não temos nenhuma das duas, pois $e\bot$ é um caso particular de $\bot_c$. Todavia, dessa forma, a constante lógica $\bot$ não estaria sendo tratada por meio de regras de introdução e de eliminação, como, nos parece, deveriam ser tratadas as constantes lógicas. Claro, a cada derivação do sistema de Prawitz haverá uma derivação correspondente em nosso sistema, já que mostramos como obter nele a regra $\bot_c$. Em sentido inverso, como as aplicações de $i\bot$ são eliminâveis, então a cada derivação do nosso sistema haverá uma correspondente no sistema de Prawitz.

Também podemos definir uma versão da regra *te* restringida às conclusões básicas (***te'***). As regras *cm'* e *te'* são interderiváveis em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ e *cm'* continua sendo caso particular de *te'*, conforme os esquemas a seguir, considerando *A* de valor zero:

$$\dfrac{\dfrac{[A\rightarrow \bot]^i \quad \nabla \quad A}{\dfrac{[A]^i \quad A}{A}\ te'}}{A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^i \quad \nabla \quad A \quad [A\rightarrow\bot]^j}{\bot}\ e\rightarrow}{B\rightarrow\bot}\ {}^{i}\,i\rightarrow \quad \nabla \quad A}{A}\ {}^{j}\,cm'$$

Figura III-23

Há um procedimento de transformação das derivações de $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$ para C'. Suponhamos que seja dada uma derivação π em $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$. Em π, seria aplicável o mesmo procedimento já apresentado no capítulo anterior, quando foi considerada a transformação de uma derivação do sistema $\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}$ para o sistema $\mathcal{P}'$. Suponhamos também que o resultado fosse π'. Poderíamos eliminar as instâncias de *cm* cuja conclusão é $\perp$ em π'. Bastaria aplicar a seguinte substituição:

$$\pi^{V}\equiv \dfrac{\dfrac{[\overset{n}{\overbrace{\perp\rightarrow\perp}}]^{i}}{\nabla\pi_1}\perp}{\perp}\,i\,cm \qquad\qquad \pi^{VI}\equiv \dfrac{\dfrac{[\perp]^{j}}{\perp}\,j\,i\rightarrow}{\overset{n}{\overbrace{\perp\rightarrow\perp}}\quad \nabla\pi_1\quad \perp}$$

Figura III-24

Notamos também que certos procedimentos de transformação similares àqueles aplicados a $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$, com vistas a transformar as derivações em outras que só contenham *cm'*, serão aplicáveis para o caso em que o sistema tenha sido definido com *te* e *te'*.

Acerca da importância do sistema C', Prawitz argumenta que ele seria aceitável de um ponto de vista construtivo. Reproduzimos uma passagem de 1971 sobre essa interpretação construtiva ([Pra71], págs. 244 e 245):

> *As operações dedutivas clássicas são assim analisadas como consistindo das construtivas mais um princípio de prova indireta para sentenças atômicas, que pode ser entendido como formulando uma assunção especial de que as sentenças atômicas são decidíveis. Pode-se duvidar que esta seja a forma adequada de analisar as inferências clássicas, e é verdade que as regras do cálculo clássico de seqüentes ou algumas variantes dele ... estão mais próximas do significado clássico das constantes lógicas. Mas essa possibilidade de analisar as inferências clássicas como um caso especial das construtivas (aplicável às sentenças decidíveis) oferece uma forma de entender construtivamente o raciocínio clássico (o que é o fato essencial por trás das interpretações da lógica clássica na lógica intuicionista de Kolmogoroff (1925) e Gödel (1932); ...) e também explica o sucesso em transladar para a lógica clássica resultados profundos acerca da estrutura das provas, os quais a primeira vista são evidentes somente para as provas construtivas ...*[171]

Essas idéias serão, em breve, re-elaboradas em um quadro ampliado, quando forem tratadas

---

[171] *The classical deductive operations are then analyzed as consisting of the constructive ones plus a principle of indirect proof for atomic sentences, which may be understood as stating as a special assumption that the atomic sentences are decidable. One may doubt that this is the proper way of analyzing classical inferences, and it is true that the rules of the classical calculus of sequents or some variants of it ... are closer to the classical meaning of the logical constants. But this possibility of analyzing classical inferences as a special case of constructive ones (applicable to decidable sentences) provides a way of constructively understanding classical reasoning (which is the essential fact behind Kolmogoroff's (1925) and Gödel's (1932) interpretation of classical logic in intuitionistic logic; ...) and also explains the success in carrying over to classical logic deeper results concerning the structure of proofs, which at first sight are evident only for constructive proofs ...*

certas extensões dos sistemas intuicionistas.

2.4. Sistema Clássico para $\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}$

O **Sistema Clássico para o Fragmento** $\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}$ ($C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}$) contém as regras: $i\vee$, $e\vee$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\exists$, $e\exists$, $i\bot$, $e\bot$ e *cm*. Logo, $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}\subset C$. O fragmento $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}$ é completo, pois a conjunção e o universal podem ser definidos da seguinte forma:

Definição III-3 - $A\wedge B\equiv_{df}\sim(\sim A\vee\sim B)$[172];

Definição III-4 - $\forall xA[\tau/x]\equiv_{df}\sim\exists x\sim A[a/x]$.[173]

Dada uma derivação π no sistema C, é possível obter uma derivação π' correspondente no sistema $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}$ substituindo as aplicações de regra de introdução ou eliminação, seja de conjunção, seja de universal. O procedimento é similar àquele que levava de C a $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$, dessa vez empregando o quadro abaixo:

introdução da conjunção	$\dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_2\\ A & B\end{array}}{A\wedge B}\,i\wedge$ $\nabla\pi_3$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_2\\ A & B\end{array}}{\bot}\,e\rightarrow \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_2\\ A & B\end{array}}{\bot}\,e\rightarrow}{\bot}\,{}^{j}e\vee}{(\sim A\vee\sim B)\rightarrow\bot}\,{}^{i}i\rightarrow}{A\wedge B}$ $\nabla\pi_3$

[172] Alternativamente, também teríamos as seguintes quase-definições: $A\wedge B\equiv_{qdf}(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow C$ e $A\wedge B\equiv_{qdf}((A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C))\rightarrow C$. A primeira delas origina-se de uma leitura da regra de eliminação para a conjunção, como veremos no próximo capítulo; a segunda, de uma leitura da regra de introdução da conjunção. Substituindo $\bot$ no lugar de C na segunda, obtemos exatamente $A\wedge B\equiv_{df}\sim(\sim A\vee\sim B)$.

[173] A quase-definição alternativa é a seguinte: $\forall xA[a/x]\equiv_{qdf}\exists x(A[a/x]\rightarrow C)\rightarrow C$.

eliminação da conjunção	$\nabla\pi_1$ $A_1 \wedge A_2$ $e\wedge e[\![d]\!]$ A_i $\nabla\pi_2$	$\dfrac{\dfrac{[\sim A_i]^k}{\sim A_1 \vee \sim A_2}\, i\vee e[\![d]\!] \quad \dfrac{\nabla\pi_1}{A_1\wedge A_2}}{\dfrac{\bot}{\dfrac{\dfrac{\bot}{A_i}{}^m\, E\bot}{A_i}{}^k\, cm}\, e\to}$ A_i $\nabla\pi_2$
introdução do universal	$\nabla\pi_1$ A $i\forall$ $\forall xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$	$\dfrac{\dfrac{\nabla\pi_1}{A} \quad \dfrac{[\sim A]^j}{\bot}\, e\to}{\dfrac{\bot}{\sim\exists x\sim A[a/x]}{}^i\, i\to}$ $\forall xA[a/x]$ $\nabla\pi_2$
eliminação do universsal	$\nabla\pi_1$ $\forall xA[a/x]$ $e\forall$ $A[a/\tau]$ $\nabla\pi_2$	$\dfrac{\dfrac{[\sim A[a/\tau]]^k}{\exists x\sim A[a/\tau]}\, i\exists \quad \dfrac{\nabla\pi_1}{\forall xA[a/\tau]}}{\dfrac{\dfrac{\bot}{A[a/\tau]}{}^m\, E\bot}{A[a/\tau]}{}^k\, cm}\, e\to$ $A[a/\tau]$ $\nabla\pi_2$

Figura III-25

As fórmulas abaixo e acima da linha dupla são equivalentes, conforme Definição III-3 e Definição III-4. Sobre a estrutura derivacional π_n, serão substituídas todas as ocorrências que contenham disjunção ou existencial segundo as equivalências Definição III-3 e Definição III-4. Se π_{n+1} for a estrutura derivacional resultante, não mais haverá símbolos de universal e de conjunção em π_{n+1}. Restarão algumas linhas de separação duplas com ocorrências de fórmulas sintaticamente idênticas acima e abaixo da linha dupla na estrutura derivacional. Assim, bastará eliminar cada linha dupla junto com uma das ocorrências. Se π_{n+2} for o resultado dessa última operação, essa será a derivação buscada. Por fim, as instâncias de $E\bot$ podem ser substituídas como de praxe.

Assim, no sistema C, tanto a conjunção quanto o universal não precisam ser tomados como primitivos. Podiam ter sido definidos a partir da disjunção e do existencial. Entretanto, nesse sistema, não podemos transformar as aplicações de *cm* em aplicações de *cm´*.

O sistema $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$ é o sistema clássico onde só não estão presentes as regras de introdução e eliminação para o quantificador universal. Conforme as definições das transformações acima, toda derivação em C pode também ser transformada em uma derivação em $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$. Observamos que $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}} \subset C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$.

2.5. Tradução de C em $\mathcal{P}$

Da mesma forma que no caso da tradução do sistema $\mathcal{J}$ para o sistema $\mathcal{M}$, é possível traduzir as derivações do sistema C no sistema $\mathcal{P}$. Em primeiro lugar, é preciso notar que *cm* é caso particular de *Peirce*. Obteremos uma derivação π'' em $\mathcal{P}$ se aplicarmos a uma derivação π de C os mesmos procedimentos que havíamos aplicado anteriormente, na tradução de $\mathcal{J}$ a $\mathcal{M}$. Assim, as instâncias de *cm* se transformariam em instâncias de *Peirce*, na medida em que a proposição $\perp$ não ocorreria em π''.[174]

Teorema III-2 - $\mathcal{J}$ é extensão conservativa de $\mathcal{M}$ e C é extensão conservativa de $\mathcal{P}$.

Demonstração # A única diferença entre os pares de sistemas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{J}$ está na presença das regras de introdução e de eliminação para $\perp$. Por outro lado, a diferença entre os sistemas C e $\mathcal{P}$ envolve, adicionalmente, uma diferença na regra de dedução indireta. Enquanto em $\mathcal{P}$ admitíamos como regra de dedução indireta a regra *Peirce*, em C estamos admitindo um caso particular de *Peirce*, a regra *cm*. Na presença da regra $E\perp$, podemos derivar a regra *Peirce* de *cm*:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^{i} \quad [A\rightarrow\perp]^{j}}{\perp}\,e\rightarrow}{\dfrac{\varphi}{A\rightarrow\varphi}\,i\rightarrow}\,E\perp \qquad \dfrac{\nabla}{A}\,{}^{j}cm$$

Figura III-26

[174] Até onde sabemos, esse resultado não havia sido mostrado por Wajsberg. No *I Natural Deduction Meeting*, já referido anteriormente, na nota 161, J. Seldin disse-nos que Kripke havia observado a tradução embora não a tenha publicado. O resultado foi apresentado por D. Alves e por mim numa comunicação conjunta [Alv01].

Desse modo, como já vimos, o que for derivável em $\mathcal{P}$ será derivável em $\mathcal{C}$, na media em que $E\bot$ é admissível em $\mathcal{C}$. Assim, a diferença mais importante entre os dois pares de sistemas está na presença das regras $i\bot$ e $e\bot$. Como, nos sistemas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{P}$, não estão presentes as regras de introdução e eliminação para $\bot$, essa proposição não pode ser considerada uma constante lógica do sistema. Assim, mostrar a conservatividade consistiria em mostrar que, se π é uma derivação pura em $\mathcal{I}$ ou em $\mathcal{C}$, tal que π demonstra $\Gamma \vdash A$, onde $\bot$ não ocorre nem em Γ nem em A, existirá uma derivação π' nos sistemas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{P}$, respectivamente, demonstrando $\Gamma \vdash A$. Mas isso é exatamente o que nos oferece a tradução recém-discutida, já que essa tradução não afetaria Γ nem A, pois elas não contêm ocorrências de $\bot$. *QED*

2.6. Observações acerca das Regras de Dedução Indireta

Vimos que as regras de dedução indireta envolvem o descarte de uma suposição e, do nosso ponto de vista, isso deve ser conceptualizado como a admissão de uma extensão à definição do conceito de conseqüência dedutiva. A forma da suposição descartada pelas regras de dedução indireta requer a presença do conceito de implicação, que, a nosso ver, não é mais que uma forma de expressão lingüística da relação de decorrência entre proposições ou formas proposicionais.

Embora tanto a regra *cm* quanto a regra *te* pareçam estar formuladas sem fazer uso da implicação, quando a negação é tomada como primitiva, isso não nos permite concluir que a noção de implicação não esteja envolvida. Vimos que a regra de introdução da negação equivale a uma seqüência de aplicação de princípios lógicos distintos e separáveis, que envolveria a aplicação de uma $i\rightarrow$ depois da aplicação de uma $i\bot$. Por sua vez, a suposição usada em uma regra de dedução indireta envolve um conteúdo que contém a descrição de uma situação de decorrência entre proposições. Isso é claro no caso da regra *Peirce*. Fica mais claro no caso da regra *cm* caso consideremos a negação como um símbolo definido.

Assim, em resumo, para nós a diferença entre intuicionistas e clássicos pode ser explicada como uma diferença acerca do conceito de conseqüência dedutiva, e que envolve, de forma crucial, o conceito de suposição. Acerca da diferença entre intuicionistas e clássicos, Legris ([Leg96], pág. 173) observa que:

> *Así pues, el contenido lógico de la ley de Peirce es el mismo que el de los principios para la negación clásica, con lo cual se puede caracterizar a la lógica clásica y puede hacerse recurriendo a uno u otros alternativamente. Como consecuencia, se sigue, en primer lugar, que es imposible conservar en un sistema el condicional intuicionista una vez que se ha introducido la negación clásica y viceversa, no se puede conservar la negación (o el absurdo) intuicionista una vez que se ha introducido el condicional clásico (definido por la ley de Peirce). En segundo lugar parece imposible discernir en cuál de las dos conectivas (si no es en una de las dos simultáneamente) se encuentran las propiedades distintivas de la lógica clásica.*

Como vimos, a diferença entre clássicos e intuicionistas não recairia necessariamente sobre algum conectivo específico. Cairia, segundo nossa elucidação, sobre o conceito de conseqüência dedutiva. Todavia, como a implicação é o conectivo proposicional usado para expressar tal relação, a diferença entre as duas posições acaba por se projetar sobre a implicação, embora, pelas razões aduzidas, também acabe por se projetar sobre a negação, dado que as condições de introdução de uma negação exigem que uma variável proposicional seja conseqüência dedutiva da fórmula que está sendo negada.

2.7. O Problema da Desimplicação

Em um artigo de 1971, Bowen [Bow71] havia ensaiado a definição de uma constante lógica muito similar ao nosso operador proposicional $\leftrightarrow$. Ele mostrava que sua constante não era definível no sistema intuicionista. Bowen a caracterizou usando regras para seqüentes. Todavia, suas regras poderiam ser apresentadas em dedução natural, se fizermos uso dos parâmetros proposicionais:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma,[A]^i & \Gamma \\ \nabla & \nabla \\ C & B\end{array}}{A \leftrightarrow B}\, i\leftrightarrow \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma,[B]^i & \\ \nabla & \\ A & A \leftrightarrow B\end{array}}{D}\, i\leftrightarrow$$

Figura III-27

Acima, *C* tem de ser um parâmetro proposicional que não ocorre em *Γ,A*. Obviamente, também poderíamos ter empregado a constante $\bot$ no lugar de *C* e *D*, embora, nessa situação, a regra de introdução deixasse de ser independente.[175]

No capítulo anterior, oferecemos dois naipes de regras para definir a desimplicação. O primeiro naipe era o seguinte, com *C* e *D* parâmetros proposicionais:

---

[175] Em certo sentido, a regra de eliminação também deixaria de ser independente, pois, se entendêssemos que, para compreender a constante, é preciso saber quais são as conseqüências que dela podemos derivar, então, no caso em que a conclusão envolvesse outra constante lógica, só compreenderíamos as conseqüências da primeira a partir da compreensão de quais seriam as conseqüências da segunda.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[B\to A]^{i}\\ \nabla\\ C\end{array}}{A\leftrightarrow B}\,i\leftrightarrow^{i} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma,[B]^{i} & \\ \nabla & \\ A & A\leftrightarrow B\end{array}}{D}\,i\leftrightarrow^{i}$$

Figura III-28

Percebe-se uma discrepância nítida entre a nossa regra de introdução e a regra de introdução de Bowen. Na verdade, a condição de aplicação da nossa regra de introdução pode ser derivada das condições presentes na regra de Bowen dentro do sistema $\mathcal{M}$. Adicionalmente, a condição esquerda da regra de Bowen é derivável a partir da condição da nossa regra dentro de $\mathcal{M}$. Todavia, a condição direita da regra de Bowen só poderá ser derivada da nossa dentro do sistema C:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ B\quad B\to A\end{array}}{\Gamma\ ,\ A}\,e\to \qquad \dfrac{A}{B\to A}\,i\to \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]^{i}\quad [\sim B]^{j}\\ \hline A\end{array}}{\begin{array}{c}B\to A\\ \nabla\,[C/B]\\ B\\ \hline B\end{array}}\,E\sim\ i\to^{i}\ cm^{j}$$

Figura III-29

Assim, se a nossa definição da desimplicação for a definição adequada, o que parece plausível, na medida em que ela equivale à definição explícita da desimplicação, então a regra de introdução de Bowen, embora apresente condições suficientes para introduzir a desimplicação, conteria condições excessivas. Procuraremos mostrar no capítulo seguinte em que sentido ela é excessiva. Porém, se a regra dele de fato for excessiva e a nossa for adequada, então, pelo fato de que a nossa regra de introdução faz uso essencial de uma constante lógica na formulação das condições de aplicabilidade, seríamos levados a concluir que não é possível definir a desimplicação com uma regra de introdução independente.

Para cumprir nossa promessa do capítulo anterior, mostramos a seguir que o segundo naipe de regras é equivalente ao primeiro do ponto de vista da lógica clássica. O segundo naipe era o seguinte:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^{i}\\ \nabla\\ C\qquad B\end{array}}{A\leftrightarrow B}\,i\leftrightarrow^{i}\ (alt) \qquad \dfrac{A\qquad A\leftrightarrow B}{D}\,e\leftrightarrow_{1}^{i}(alt.) \qquad \dfrac{A\leftrightarrow B}{B}\,e\leftrightarrow_{2}^{i}(alt.)$$

Figura III-30

Não é difícil demonstrar que as condições na regra de introdução acima são equivalentes às condições da regra de Bowen. Por outro lado, como já vimos no capítulo anterior, a regra $e\leftrightarrow_1$*(alt.)* do segundo naipe pode ser derivada da regra $e\leftrightarrow$ do primeiro naipe. Assim, só falta mostrar que a regra $e\leftrightarrow_2$*(alt.)* é derivável de $e\leftrightarrow$ dentro da lógica clássica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^i \quad [\sim B]^j}{\dfrac{}{A}\,E\sim} \qquad \dfrac{}{A\leftrightarrow B}}{C}\,i}{\dfrac{}{\sim\sim B}\,i\sim}}{B}\,cdn$$

Figura III-31

Mostramos que os dois naipes de regras são equivalentes sob a lógica clássica, mas também mostramos por que o operador de Bowen não era definível na lógica intuicionista. Embora a regra de eliminação de Bowen possa ser considerada como uma regra intuicionista adequada para $\leftrightarrow$, a regra de introdução equivale à regra de introdução de $\leftrightarrow$ do segundo naipe, e esse naipe, lembramos, envolve uma intuição oriunda das tabelas de verdade. O mais espantoso, no entanto, é que, para o operador *sui generis* definido por Bowen, vale a assim chamada propriedade de eliminação de corte. Examinaremos esse tema nos próximos capítulos.

3. Outros Sistemas Construtivos

3.1. Até onde a Dedução Indireta é Construtivamente Admissível?

A regra *consequentia mirabilis* não é considerada válida do ponto de vista intuicionista. Contudo, parece-nos, vários de seus casos particulares poderiam ser validados intuicionisticamente. Um primeiro exemplo é aquele no qual a proposição que queremos demonstrar de forma indireta é ela mesma uma negação:

$$\dfrac{\dfrac{[\sim\sim A]}{\nabla}}{\sim A}\,cm$$

Figura III-32

Se, na derivação subsidiária da instância de *cm* acima, não houvesse nenhuma aplicação de regra de dedução indireta, haveria uma dedução intuicionisticamente correta de ~*A* a partir da mesma subderivação:

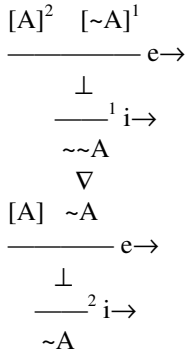


Figura III-33

Assim, a instância de *cm* seria intuicionisticamente validável[176]. A observação desse caso é importante, pois, de certo modo, qualquer tentativa de demonstrar de forma indireta a verdade de uma negação poderia ser encarada como uma espécie de abreviação de uma demonstração que não sofre de nenhuma restrição por parte dos intuicionistas.

A esse respeito, há um exemplo de argumentação que merece nossa atenção, pois existiriam razões *a priori* para suspeitar que sua estrutura seria como aquela da Figura III-32 acima. O exemplo é analisado por Belíssima & Pagli ([Bel96], pág. 157), que o extraíram de Lewis. O argumento é da seguinte natureza: partindo da hipótese em *(i)*, por uma cadeia de inferências chegamos à conclusão *(vi)*. Em seguida, aplicando *consequentia mirabilis*, a hipótese em *(i)* é descartada. Os símbolos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ são empregados como predicados metalingüísticos para verdade e falsidade:

(i) $\mathcal{F}(\sim(A\wedge\sim A))$; *(ii)* $\mathcal{V}(A\wedge\sim A)$; *(iii)* $\mathcal{V}(\sim A)$; *(iv)* $\mathcal{F}(A)$; *(v)* $\mathcal{F}(A\wedge\sim A)$; *(vi)* $\mathcal{V}(\sim(A\wedge\sim A))$

Ou seja, como da hipótese $\mathcal{F}(\sim(A\wedge\sim A))$ decorre $\mathcal{V}(\sim(A\wedge\sim A))$, concluiríamos que, de fato, $\mathcal{V}(\sim(A\wedge\sim A))$, dado que uma forma de interpretar a regra *cm* é justamente a de dizer que uma proposição seria de fato verdadeira, caso chegássemos a sua verdade partindo da hipótese da sua falsidade. A relação com o esquema da Figura III-32 apareceria no momento em que admitíssemos que uma forma adequada de representar $\mathcal{F}$ consistiria, justamente, em usar a negação na frente da fórmula, ao passo que, para representar $\mathcal{V}$, não usaríamos nada. Desse modo, sob esse ângulo, o argumento acima estaria apenas mostrando que, da hipótese $\sim\sim(A\wedge\sim A)$, decorre $\sim(A\wedge\sim A)$ e, por conseguinte, que $\sim(A\wedge\sim A)$ é demonstrável. Segundo a Figura III-33, esse argumento seria admissível para um intuicionista desde que nenhum princípio de demonstração indireta tivesse sido empregado para mostrar que de $\sim\sim(A\wedge\sim A)$ decorre $\sim(A\wedge\sim A)$. Contudo,

[176] Ela é inclusive validável em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, como bem observou D. Alves.

segundo a interpretação proposta, a passagem de *(i)* $\sim\sim(A\wedge\sim A)$ para *(ii)* $A\wedge\sim A$ já conteria um uso da regra *cdn* e, portanto, já envolveria um conteúdo relacionado às regras de dedução indireta.

Belíssima & Pagli observam que Lewis considerava haver uma circularidade no raciocínio. No exemplo, Lewis dizia que haveria um emprego do princípio de contradição na passagem de *(iii)* para *(iv)*, segundo o relato dos autores, e, logo, a demonstração seria circular. O problema que extrai Lewis dessa observação é interessante. Ao que parece, raciocina Lewis que todos os demais casos de aplicação de *consequentia mirabilis* também sejam circulares, no sentido de epistemologicamente circular. Todas as aplicações poderiam até ser logicamente inatacáveis, mas nenhuma delas poderia oferecer uma fundamentação *ex nihil* do princípio demonstrado.

Se esse argumento atribuído a Lewis está dirigido contra a possibilidade de uma fundamentação *ex nihil* do princípio de não-contradição, estaríamos de acordo com o argumento. Contudo, queremos observar que, a partir de certa interpretação, não há por que entender que o passo supostamente indicado por Lewis faria uso do princípio de não-contradição. Simplesmente, se tivéssemos de definir como a verdade e a falsidade se comportam uma em relação à outra, tendo em conta o significado das constantes lógicas, não vemos por que assumir que a passagem de *(iii)* para *(iv)* dependeria do princípio de não-contradição, ou seja, não vemos por que não poderíamos simplesmente dizer que $\mathcal{F}(A)$ segue-se de $\mathcal{V}(\sim A)$ por causa da definição da negação. Para os intuicionistas, essa passagem não é problemática[177]. Mais problemática, nos parece, é a passagem que nem Lewis nem Belíssima & Pagli analisam: a passagem de *(i)* para *(ii)*. Essa passagem envolve uma dedução indireta.

Uma última observação, na dedução acima estão misturadas as regras de preservação da verdade com as regras de preservação da falsidade, o que nos permite exemplificar a utilidade de um sistema que contemple as duas formas de relação lógica.

3.2. O Sistema $\mathcal{J}_{cm'}$

Além do caso envolvendo uma hipótese contendo uma dupla negação, existem outros casos de uso das regras de dedução indireta que admitem uma interpretação construtiva de corte intuicionista. O sistema $\mathcal{J}$ pode ser estendido por certos casos particulares de regras de dedução indireta e essa extensão pode ser defendida. O argumento é da seguinte natureza: baseando-nos

[177] Como, para os intuicionistas, que $\sim A$ seja verdadeiro significa que há uma prova de $\sim A$ e isso significa que, ao assumir A, derivamos uma contradição, logo A tem de ser falso, pois ser falso significa: segue-se um absurdo ou uma contradição ao assumir A.

no fato de que a diferença entre o sistema $\mathcal{J}$ e sua extensão está numa regra de dedução indireta, se pudermos justificar a admissibilidade dessa regra, então haverá um argumento para a admissibilidade do sistema estendido que estará em conformidade com o ponto de vista intuicionista. No fundo, essa é a mesma interpretação proposta por Prawitz, citada anteriormente, envolvendo o sistema $\mathcal{C}'$ ([Pra71], págs. 244 e 245).

Suponhamos que, para uma forma proposicional básica de alguma teoria, tivéssemos um procedimento de decisão. Ou seja, suponhamos que, para uma fórmula de valor zero $P(\tau_1,...,\tau_n)$, onde $\tau_1,...,\tau_n$ são termos quaisquer, tal que $a_1,...,a_m$ sejam todos os parâmetros individuais distintos que ocorrem em $P(\tau_1,...,\tau_n)$, exista um procedimento associado ao predicado P e aos termos $\tau_1,...,\tau_n$ de forma que a substituição de cada um dos parâmetros $a_1,...,a_m$ por constantes $c_1,...,c_m$ da teoria, respectivamente, dê como resultado uma fórmula ou proposição $P(\tau_1,...,\tau_n)[a_1/c_1,...,a_m/c_m]$, a qual poderíamos determinar como verdadeira, ou como falsa, se aplicarmos o procedimento. A existência deste procedimento poderia ser considerada uma forma de validar uma versão restrita de *te*:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[P(\tau_1,...,\tau_n)]^i & [\sim P(\tau_1,...,\tau_n)]^i \\ \nabla & \nabla \\ B & B\end{array}}{B}\ i$$

Figura III-34[178]

Em outros termos, se uma proposição da forma $P(\tau_1,...,\tau_n)$ for decidível e se dela e da sua negação ao mesmo tempo for dedutível uma conseqüência B, então B será dedutível diretamente, pois sempre teremos uma prova de $P(\tau_1,...,\tau_n)$ ou uma prova da sua negação. Em particular, se não houver nenhuma outra hipótese da qual B esteja sendo derivada, então B seria demonstrável. É bem verdade, porém, que o conteúdo informativo da regra adicionada é limitado, pois a regra

---

[178] Outro modo de proceder consistiria em adicionar a seguinte disjunção inclusiva: $P(\tau_1,...,\tau_n)\vee\sim P(\tau_1,...,\tau_n)$. A regra mostrada na figura é, na verdade, oriunda da $e\vee$ para a fórmula $P(\tau_1,...,\tau_n)\vee\sim P(\tau_1,...,\tau_n)$. Porém, o mais adequado é o uso da disjunção exclusiva para expressar a decidibilidade. Se usássemos o símbolo $\oplus$ para representar a disjunção exclusiva, então $A\oplus B\equiv_{df.}(A\vee B)\wedge\sim(A\wedge B)$. Assim, a decidibilidade de $P(\tau_1,...,\tau_n)$ poderia ser expressada pela fórmula $(P(\tau_1,...,\tau_n)\vee\sim P(\tau_1,...,\tau_n))\wedge\sim(P(\tau_1,...,\tau_n)\wedge\sim P(\tau_1,...,\tau_n))$. Em outros termos, o procedimento determinaria que a fórmula $P(\tau_1,...,\tau_n)$ é verdadeira ou que sua negação é verdadeira. No máximo, uma única delas seria verdadeira, pois o procedimento deveria ser consistente. A disjunção inclusiva é, obviamente, inferível a partir da disjunção exclusiva. Consideremos o exemplo do procedimento de decisão le lançar uma moeda para uma forma proposicional $P(\tau_1,...,\tau_n)$. O procedimento sempre decidirá, mas não será uma forma de decisão consistente. Se fosse dada atenção à propriedade de consistência do procedimento de decisão, ainda haveria outro caminho de análise que consistiria em investigar em que medida a introdução do princípio de consistência para sentenças atômicas no âmbito de uma lógica paraconsistente poderia resultar na lógica clássica. Eventualmente, uma lógica paraconsistente poderia também ser pensada como um sistema no qual os procedimentos de decisão atômicos inconsistentes não implicariam trivialização.

nada informaria acerca do próprio procedimento de decisão. Apenas estaria refletindo a existência do procedimento.

A seguir, como *cm* é caso particular de *te*, o seguinte caso particular de *cm* também seria válido no sistema:

$$\begin{array}{c} [\sim P(\tau_1,...,\tau_n)]^i \\ \nabla \\ P(\tau_1,...,\tau_n) \\ \hline P(\tau_1,...,\tau_n) \end{array}\ i$$

Figura III-35

Notemos, entretanto, que a regra da Figura III-34 não é derivável da regra da Figura III-35, pois a decidibilidade das fórmulas de valor zero equivale a uma restrição sobre o valor das fórmulas que podem ser descartadas por *te*, cf. o caso da Figura III-34, ao passo que a restrição às conclusões de valor zero sobre *cm*, cf. o caso da Figura III-35, equivaleria a restringir *te* às conclusões básicas. Porém, esses dois tipos de restrições sobre *te* resultariam regras distintas, não-equivalentes.

Uma observação com respeito a essas regras, pelo fato de estarmos admitindo fórmulas que contenham parâmetros, pode muito bem ocorrer que não haja prova de $P(\tau_1,...,\tau_n)$, nem de $\sim P(\tau_1,...,\tau_n)$. Por exemplo, para a fórmula $a=b$ não existe nem prova nem refutação, embora possa haver um procedimento de decisão, sempre que as operações indicadas pelos termos sejam calculáveis.

Já que estamos falando das fórmulas básicas e de sua decidibilidade, parece-nos adequado refletir um pouco sobre o significado da regra de dedução indireta para fórmulas de valor zero. Tomemos como caso de análise a fórmula $a=b$. Em princípio, para quaisquer números naturais substituídos no lugar de *a* e de *b*, sabemos que há um procedimento de decisão para determinar se a sentença resultante é verdadeira ou falsa. Desse modo, num sistema para os números naturais, seria possível adicionar ou o axioma $a=b \vee \sim a=b$ ou alguma das duas regras abaixo, casos particulares de *te* e *cm*, respectivamente:

$$\begin{array}{cc} [a=b]^i & [\sim a=b]^i \\ \nabla & \nabla \\ B & B \\ \hline B & \end{array}\ i \qquad \begin{array}{c} [\sim a=b]^i \\ \nabla \\ a=b \\ \hline a=b \end{array}\ i$$

Figura III-36

Tais regras não alterariam o conjunto de fórmulas previamente demonstráveis no sistema.

A fórmula $a=b$ não é verdadeira, nem falsa; não é correta, nem errônea. Dependerá de quais termos (ou numerais) são substituídos no lugar dos parâmetros individuais. Em alguns

casos, o resultado da substituição será uma proposição verdadeira; em outros, uma proposição falsa. Nessa perspectiva, não parece adequado interpretar a fórmula $a=b \vee \sim a=b$ como expressando que "a fórmula $a=b$ é verdadeira ou a fórmula $\sim a=b$ é verdadeira". A leitura não seria compatível com uma linguagem que contém fórmulas para representar formas proposicionais, o caso desta tese. Na verdade, é toda a forma proposicional molecular $a=b \vee \sim a=b$ que deveria ser entendida como uma forma correta, na medida em que, para quaisquer números a e b, a sentença resultante da substituição será sempre verdadeira. Porém, ao invés de dizer que $a=b \vee \sim a=b$ é verdadeira, preferimos dizer que ela é correta, justamente porque essa fórmula não representa uma proposição, mas uma forma proposicional. Ordinariamente, consideraríamos descabida a asserção da expressão $a=b \vee \sim a=b$.

Sob essa perspectiva, não faz sentido dizer que a regra *te* da Figura III-36 estaria assumindo que ou há uma demonstração de $a=b$ ou há uma demonstração de $\sim a=b$. Claramente, mantida a opção de considerar $a=b$ como uma fórmula, não haverá uma demonstração da fórmula $a=b$, nem da fórmula $\sim a=b$. Por isso, a interpretação das regras de dedução indireta deve assumir uma postura diferente daquela que normalmente os intuicionistas assumem com respeito às hipóteses, em particular nas regras de dedução indireta. E qual é essa interpretação? Para a regra *te* na Figura III-36, é a interpretação de que a fórmula B já era conseqüência dedutiva das demais suposições (que não aparecem explicitadas na Figura III-36), embora isso não seja mostrado diretamente. No caso de não haver outras hipóteses, significaria simplesmente que ela é conseqüência dedutiva *tout court*, ou seja, demonstrável. Todavia, há que se notar, essa noção de conseqüência dedutiva não é construtiva.

Prosseguindo, se, além de haver um procedimento de decisão para $P(\tau_1,..., \tau_n)$, houvesse um procedimento de decisão para todos os predicados e para todas as operações primitivas da linguagem de uma teoria, então, para cada termo e, conseqüentemente, para cada fórmula básica envolvendo termos e predicados primitivos, haveria um procedimento de decisão. Dessa forma, seria lícito fazer a adição de um esquema ainda mais geral da regra *te* à teoria, tal que, se A fosse uma fórmula básica qualquer, a seguinte regra seria intuicionisticamente admissível:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[A]^i & [\sim A]^i \\ \nabla & \nabla \\ B & B\end{array}}{B}\,i$$

Figura III-37

A adição de *te* na forma acima não acarretaria a validade irrestrita do terceiro excluído para todas as fórmulas, pois do fato que tenhamos $A \vee \sim A$ para algumas fórmulas A não se segue que

poderíamos inferir $\forall xA[b/x] \vee \sim \forall xA[b/x]$, vide o caso de $a=0 \vee \sim a=0$[179].

Do mesmo modo que antes, a validade da regra na Figura III-37 validaria uma versão da regra *cm* em que a conclusão fosse uma fórmula básica qualquer, pois *cm´* é caso particular de *te´*.

Definiremos o sistema $\mathcal{G}_{cm'}$ como aquele que contém as regras: $i\wedge$, $e\wedge$, $i\vee$, $e\vee$, $i\rightarrow$, $e\rightarrow$, $i\forall$, $e\forall$, $i\exists$, $e\exists$, $i\perp$, $e\perp$ e *cm'*. Logo, $C' \subset \mathcal{G}_{cm'}$ e $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{cm'}$. Esse sistema também poderia ser formulado, alternativamente, com a regra *te'*. Outro modo de encarar o sistema $\mathcal{G}_{cm'}$ consistiria em observar que ele pode ser obtido de C' pela adição das regras de introdução e eliminação da disjunção e do existencial.[180]

Sejam A^* e Γ^* o resultado de eliminar a disjunção e o existencial da fórmula A e das fórmulas de Γ via as equivalências nas Definição III-1 e Definição III-2. Assim, se A se segue de Γ em C, haverá uma derivação de A^* a partir de Γ^* no sistema $\mathcal{G}_{cm'}$, dado que $C' \subset \mathcal{G}_{cm'}$, conforme as definições dos conectivos.

Trabalhando abstratamente com o sistema $\mathcal{G}_{cm'}$ e sem considerar a natureza intrínseca dos predicados e operações, qualquer resultado que venha a ser obtido usando $\mathcal{G}_{cm'}$ será construtivamente admissível, desde que os predicados e as operações que ocorrem na derivação sejam decidíveis. Mais precisamente, desde que os predicados e operações que ocorrem em uma fórmula que é conclusão da regra *cm'* sejam decidíveis. É nesse sentido que podemos dizer que $\mathcal{G}_{cm'}$ é uma extensão construtivamente admissível de $\mathcal{G}$.

Nossa argumentação em torno da possibilidade de estender o sistema $\mathcal{G}$ partiu da regra *te* para depois legitimar a validade de *cm*. A razão é que a decidibilidade de uma fórmula básica fica mais claramente representada por *te* do que por *cm*. Todavia, não é o fato de admitir uma versão restrita da regra *te*, em que os descartes ocorrem sobre uma fórmula básica e sua respectiva negação, o que caracteriza essencialmente a extensão efetuada. Na verdade, a restrição de *cm'* às conclusões básicas é equivalente a restringir *te* às conclusões básicas, como já notamos anteriormente. A restrição sobre o valor da fórmula descartada não é uma restrição relevante.

---

[179] Segundo aquela que é chamada conjectura de Goldbach (embora a formulação original de Goldbach seja um pouco diferente), qualquer número par seria igual à soma de dois primos, conforme: http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html. De modo mais simples, dado um determinado número par, podemos decidir efetivamente se existem ou não dois números primos cuja soma dê como resultado esse número, ou seja, $A(a) \vee \sim A(a)$, para um a específico. Daí não se segue que tenhamos um procedimento de decisão que nos permita mostrar que, para qualquer número par, a propriedade é válida ou que isso não é verdade, ou seja, não temos, até a presente data, um procedimento para demonstrar $\forall xA(x) \vee \sim \forall xA(x)$. Com efeito, aquela já não seria mais uma conjectura depois da posse de um tal procedimento.

[180] Um sistema similar é considerado em [Pra73], pág. 247.

Com efeito, uma aplicação da regra *te* descartando fórmulas da forma $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ e $\sim A$ junto com suas respectivas negações será uma aplicação válida se ela já for válida para as fórmulas *A* e *B* e suas respectivas negações. Ou seja, *te* será válida para toda a linguagem do cálculo proposicional caso todos os predicados e operações da linguagem sejam decidíveis. Assim, se *te* for considerado intuicionisticamente válido para todas as fórmulas básicas, então *te* será intuicionisticamente válido para qualquer composto proposicional de fórmulas básicas, conforme os seguintes esquemas dedutivos[181]:

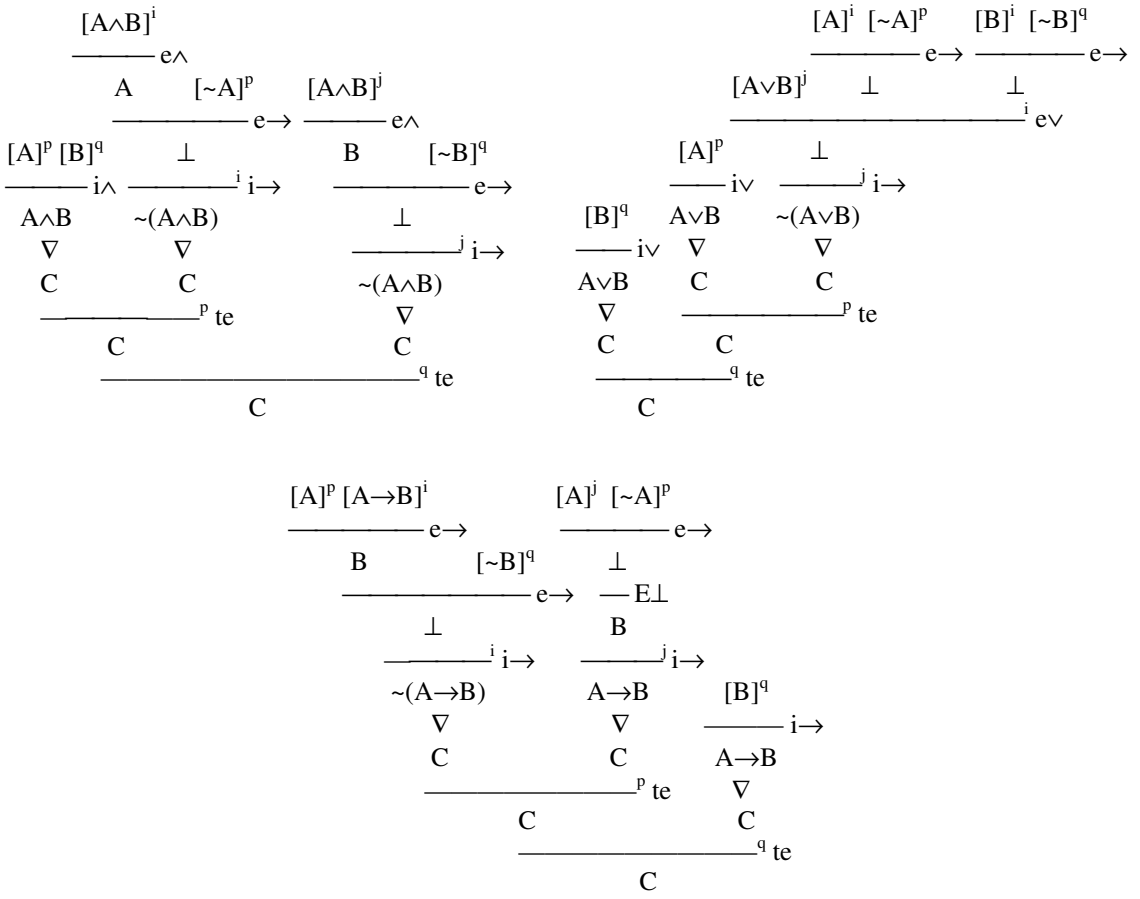


Figura III-38

Ainda com respeito à relação entre *te* e *cm*, admitindo a validade de *cm* para todas as fórmulas do cálculo proposicional, desde que os predicados e as operações que podem ocorrer em uma fórmula sejam decidíveis, poderíamos derivar *te* a partir de *cm*, como abaixo, onde *C* é uma fórmula proposicional qualquer:

[181] Isso também foi observado por Negri & Von Plato [Neg01], págs. 114-115.

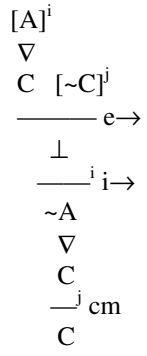


Figura III-39

3.3. Os Sistemas $\mathcal{J}cm_o$, $\mathcal{J}cm_o^-$, $\mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$

O argumento em prol da estendibilidade de $\mathcal{J}$ recém-apresentado é tão geral que ele contém justificativa suficiente para uma extensão posterior do sistema $\mathcal{J}cm'$. Com efeito, o sistema $\mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$ será uma extensão do sistema $\mathcal{J}cm'$, em que a restrição sobre a regra *cm* é enfraquecida e passará a poder ser aplicada sobre quaisquer conclusões em que não ocorram o operador de disjunção, nem o quantificador existencial. Como nas fórmulas básicas não ocorre nenhum dos dois, segue-se que $\mathcal{J}cm' \subset \mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$. Por definição, segue-se também que $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}} \subset \mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$. Por outro lado, se aplicarmos à regra *te* as mesmas restrições, essa versão da regra será interderivável com a versão da regra *cm* presente em $\mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$.

Não podemos deixar de reiterar a observação de que $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$, fragmento substancial da lógica clássica, seria, dessa forma, construtivamente admissível sob determinadas restrições. Essa formulação permitiria compreender melhor, em nossa opinião, as provas de consistência relativa da aritmética dos naturais clássica com respeito à intuicionista, tanto a de Gödel [Göd33] quanto de Gentzen [Gen33]. Nos dois casos, haveria ou poderia haver uma tradução do conjunto completo de conectivos de C sobre o fragmento $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$.[182] Como os predicados e as operações primitivas sobre os naturais são decidíveis, também valeria o princípio de dedução indireta para as fórmulas do sistema de naturais formulado em $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$. A tradução de Gentzen é aquela obtida a partir das equivalências apresentadas nas Definição III-1e Definição III-2 ([Gen33], pág. 61).

O argumento de que falávamos é continuação do argumento desenvolvido para $\mathcal{J}cm'$. Por meio de um argumento indutivo, a aplicabilidade da regra *cm* com a nova restrição estará

[182] No caso particular de Gödel, é sobre o fragmento $C_{\{\wedge,\sim,\forall\}}$, o qual, por sua vez, está contido no fragmento $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$, se tomamos a negação como símbolo definido.

demonstrada pelos esquemas de derivação da Figura III-38, desde que φ seja substituída por $\bot$ e, desse modo, a aplicação da regra *Peirce* seja considerada, na verdade, uma aplicação da regra *cm*, que, afinal de contas, é caso particular de *Peirce*. Assim, a admissibilidade da regra para conclusões das formas $\forall xA[a/x]$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ já está estabelecida pelas derivações daquela figura. Em particular, observamos que a aplicabilidade de *cm* a uma fórmula da forma $A \rightarrow B$ só requer a aplicabilidade de *cm* à fórmula *B*. Essa observação tem como conseqüência que *cm* será sempre aplicável às fórmulas negadas, dado que a negação de uma fórmula pode ser definida como a implicação do absurdo.

Com base nessas observações podemos estender o sistema de modo que outras aplicações de *cm* menos restritas também sejam consideradas admissíveis desde o ponto de vista construtivista. Com efeito, em alguns casos, seria admissível a presença tanto do operador de disjunção quanto do quantificador existencial na conclusão de uma instância de *cm*. Esses operadores seriam admissíveis como ocorrência no antecedente de uma fórmula condicional, conclusão de uma instância de *cm*. Com a definição a seguir, procuramos tornar essa idéia mais precisa.

Definição III-5 - Diremos que uma fórmula A é uma **ortofórmula** *quando:*

(i) A é um composto proposicional[183] *de fórmulas básicas decidíveis cujo valor é maior ou igual a zero;*

(ii) A é da forma $B \rightarrow C$*, B é uma fórmula qualquer e C é uma ortofórmula;*

(iii) A é da forma $B \wedge C$ *e tanto B quanto C são ortofórmulas;*

(iv) A é da forma $\forall xB[b/x]$ *e B é uma ortofórmula.*[184]

Segundo os argumentos acima, o sistema $\mathcal{J}cm_o$ seria admissível, de um ponto de vista construtivo, sempre que as fórmulas de valor zero fossem decidíveis, pois ele é extensão de $\mathcal{J}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$ tal que nele a regra *cm* está restrita às conclusões que sejam ortofórmulas.

Também será possível formular um sistema para o qual não será imposta a restrição de que as fórmulas básicas sejam decidíveis. Como observamos anteriormente, a regra *cm* sempre é admissível do ponto de vista construtivo quando sua conclusão é uma fórmula negada:

---

[183] Ou seja, é obtido de fórmulas básicas usando as constantes $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\bot$.

[184] O conceito recém definido é idêntico ao conceito de *EJ-compatible formulas* definido por Seldin ([Sel89], págs. 204 e 216).

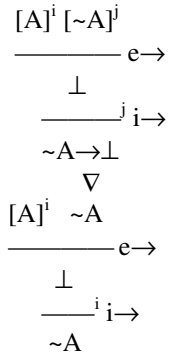


Figura III-40

Definição III-6 - Diremos que uma fórmula A é uma **ortofórmula negativa** *quando:*

(i) A é uma fórmula proposicional construída a partir de fórmulas básicas negadas[185] *e/ou ⊥;*

(ii) A é da forma B∧C e tanto B quanto C são ortofórmulas negativas;

(iii) A é da forma B→C, B é uma fórmula qualquer e C é uma ortofórmula negativa;

(iv) A é da forma ∀xB[b/x] e B é uma ortofórmula negativa.

O sistema $\mathcal{J}cm_o^-$ será o sistema com a regra *cm* restrita às ortofórmulas negativas. Claramente, $\mathcal{J}cm_o^- \subseteq \mathcal{J}$. Além disso, obviamente, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}cm_o^-$. Assim, para qualquer derivação π no sistema C, se π' é a derivação resultante de adicionar uma dupla negação frente a cada constante/parâmetro predicacional em π que seja diferente de $\perp$, então π' será uma derivação em $\mathcal{J}cm_o^-$ e será construtivamente admissível.

Faremos duas observações finais. Primeira, os resultados acima estão intimamente conectados com os resultados de Kolmogorov de 1925 [Kol25] e também estão intimamente conectados com os resultados apresentados por Prawitz & Malmnas em 1968 [Pra68]. Na exposição em questão a lógica clássica é examinada sob um ponto de vista intuicionista, exatamente segundo as linhas de Kolmogorov. Segunda, apesar de ser possível admitir construtivamente o princípio de terceiro excluído para fórmulas básicas, não será possível justificar a admissibilidade desse princípio do ponto de vista construtivo para uma extensão que equivalha à lógica clássica. O problema está nas operações de disjunção e existencial.

---

[185] Se *A* for uma fórmula básica, então a negação de *A* é $A \rightarrow \perp$.

4. As Regras Extralógicas de uma Teoria e o Uso de Suposições

Uma teoria é obtida a partir de um sistema lógico puro pelo acréscimo de **regras extralógicas**. Diremos que temos **um⟦a⟧ sistema ⟦teoria⟧ básico⟦a⟧** $\mathcal{B}$ quando as regras de $\mathcal{B}$ são tais que tanto as premissas imediatas quanto a conclusão da regra são todas de valor zero e, no caso de haver subderivação subsidiária, todas as hipóteses descartadas pela regra também são de valor zero[186]. Regras que não contenham premissas imediatas serão chamadas de **axiomas extralógicos**. O conjunto das regras extralógicas constitui aquilo que é muitas vezes designado como **definição implícita** das constantes individuais, das operações e dos predicados específicos de um âmbito teórico. No conjunto das derivações estritamente extralógicas, também será admitida a ocorrência de parâmetros individuais e parâmetros proposicionais. Os parâmetros individuais são substituíveis por quaisquer termos de $\mathcal{B}$ e os parâmetros proposicionais por quaisquer fórmulas básicas de $\mathcal{B}$ ou por qualquer outro parâmetro proposicional.

Nem sempre será possível formular uma teoria unicamente com regras extralógicas básicas. Nem sempre será possível evitar, nas regras extralógicas do sistema, a referência a fórmulas que contenham operadores lógicos. Dois exemplos disso parecem ser o esquema de separação de Zermelo-Frankel e o esquema de indução para primeira ordem.

Em nossa opinião, o fato de que os sistemas lógicos podem ser apresentados por intermédio de pares simétricos de regras, de introdução e de eliminação, nos permitiria correlacionar a demonstrabilidade/decidibilidade das proposições logicamente complexas àquelas logicamente simples. É como se a definição do que deveria contar como uma expressão que tem um componente lógico devesse sempre ser dada por meio de regras de introdução-eliminação. Por essa razão é que, do ponto de vista construtivista, separaríamos dois componentes distintos em cada problema lógico: aquele cuja resolução envolve as regras de um âmbito teórico específico; e aquele cuja resolução envolve apenas operações lógicas. Desse ponto de vista, a demonstração de uma proposição de valor maior que zero depende e deve estar correlacionada às relações dedutivas que vigoram entre as proposições de um sistema extralógico básico.

Isso explica por que os intuicionistas naturais têm uma tendência a traçar uma distinção entre os distintos tipos de provas que uma proposição pode ter. Desde que saibamos o que é uma

---

[186] Essa forma de conceber as regras extralógicas apresenta uma variação com respeito à literatura, por exemplo, [Sel89] pág. 205 ou, ainda, [Pra71] pág. 262, na medida em que admitimos que tais regras também podem descartar hipóteses. Além disso, é comum considerar o símbolo de igualdade como um símbolo lógico, possibilidade que não rejeitamos, embora também não assumamos. Assumiremos, porém, que suas regras pertencem ao sistema básico.

prova canônica/direta de uma proposição básica - dada pelas regras extralógicas básicas -, o passo seguinte consiste em saber quais são as regras de introdução para as constantes lógicas ([Pra71], págs. 242-243, e [Pra73], págs. 231-235). Como já dissemos, neste trabalho, não compartilhamos da mesma concepção acerca da noção de prova, mas temos simpatia pela tese de que os problemas de decidibilidade/demonstrabilidade podem ser divididos em dois âmbitos: o lógico e o extralógico, esse último relativo e limitado às sentenças de valor zero.

Adotaremos como exemplo privilegiado para análise conceitual as seguintes regras básicas para os números naturais (nomeadas pela expressão que acompanha a regra ao lado):

Igualdade		$\dfrac{}{a=a}\ =_1$	$\dfrac{a=b}{b=a}\ =_2$	$\dfrac{a=b \quad b=c}{a=c}\ =_3$	
Operações	sucessor / antecessor	$\dfrac{a=b}{a'=b'}$ suc	$\dfrac{a'=b'}{a=b}$ ant_1	$\dfrac{a'=0}{a=0}$ ant_2	
	soma / multiplicação	$\dfrac{}{a+0=a}\ +_1$	$\dfrac{}{a+b'=(a+b)'}\ +_2$	$\dfrac{}{a.0=0}\ x_1$	$\dfrac{}{a.b'=(a.b)+a}\ x_2$

Figura III-41

Os símbolos *a*, *b*, *c* e *d* são parâmetros individuais. As regras para igualdade constituem o que podemos chamar de **sistema básico para a igualdade** ($\mathcal{G}$). Se adicionarmos a ele qualquer outro sistema lógico puro $\mathcal{L}$, obteremos um sistema[187] que denotaremos por $\mathcal{L}^{=}$. Quanto às operações, *a'* é a operação sucessor de *a*; *a+b* é a operação soma de *a* e *b*; *a.b* é a operação multiplicação de *a* e *b*. A teoria correspondente ao conjunto completo das regras acima será chamada de **aritmética elementar** ($\mathcal{A}r$). Entre todas as regras, a regra ant_2 aparece com pouca freqüência na literatura, mas aparece ([Cur63], pág. 256). Em breve, dissertaremos sobre ela.

No tocante aos números naturais, além das regras acima também consideramos válido o assim chamado **princípio de indução**. Se o formulamos como uma regra de dedução (***ind***), ele deveria ter a seguinte forma:

[187] Muitos autores os tratam como sistemas lógicos puros e, para tal, só será preciso considerar a constante predicacional de igualdade como uma constante lógica. Não adotaremos essa perspectiva, na medida em que as regras da igualdade acima não estão divididas em regras de introdução e regras de eliminação.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ ,\ [\underline{A[a/b]}]^{i} \\ \nabla \\ A[a/0] \quad A[a/b'] \end{array}}{A[a/\tau]}\ {}^{i}\,\mathrm{ind}$$

Figura III-42

Nessa regra, *a* e *b* são parâmetros individuais tais que *b* não ocorre na fórmula *A* e em nenhuma das suposições Γ das quais *A[a/b']* depende. O termo τ pode ser qualquer termo aritmético e, inclusive, ser (ou conter) um parâmetro individual. O parâmetro proposicional *A* pode, em princípio, ser substituído de modo homogêneo por qualquer fórmula. Diremos também que a regra de indução **fecha** todas as ocorrências do parâmetro individual *b* na subderivação subsidiária e, desse modo, elas não podem ser substituídas livremente. A regra de indução é essencialmente uma descrição, ou resumo, de uma derivação possível. Se tivéssemos uma demonstração π_1 de *A[a/0]* e se tivéssemos uma dedução π_2 que leva de *A[a/b]* até *A[a/b']*, poderíamos obter uma demonstração para qualquer *n* dado, compondo as derivações da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \nabla\ \pi_1 \\ \underline{A[a/0]} \\ \nabla\ \pi_2\ [a/0] \\ \underline{A[a/1]} \\ \nabla\ \pi_2\ [a/1] \\ \underline{A[a/2]} \\ \vdots \\ A[a/n] \end{array}$$

Figura III-43

É claro que, se considerássemos as expressões de modo conteudístico, a regra de indução não poderia admitir que o termo τ contivesse parâmetros individuais. Porém, desde uma interpretação algébrica das expressões, tal emprego não só estará admitido como será considerado natural, já que, afinal, idealmente, todo termo seria uma forma oblíqua de fazer referência direta ou ambígua a um objeto, empregando uma certa estrutura de operações. Todavia, ou garantimos que os termos substituídos no lugar de um parâmetro sempre terão referência, quando substituímos seus parâmetros por números arbitrários, ou admitimos que, em certas situações, a conclusão de uma demonstração seja uma proposição sem valor de verdade. Aliás, essa parece ser uma boa razão para introduzir a pressuposição de referencialidade, como o fez Jaskowski.

A regra de indução apresentada na Figura III-42 só poderá fazer parte das regras básicas caso restrinjamos as fórmulas que podem ser substituídas no lugar do parâmetro *A*. Elas deveriam ser fórmulas de valor zero. A essa nova versão da regra chamaremos de **indução restrita** (***ind*$_r$**). Podemos então dizer que a regra *ind*$_r$ não é uma regra derivável em $\mathscr{A}r$, mas, certamente, ela é

uma regra válida em $\mathscr{A}r$. As linhas acima dão uma justificativa de sua validade. O fato de ela não ser derivável é importante. Se ela fosse derivável, seria ocioso acrescentá-la ao sistema $\mathscr{A}r$. Por isso, a extensão de $\mathscr{A}r$ pela regra ind_r resulta num novo sistema. Doravante, chamaremos de **aritmética indutiva elementar** ($\mathscr{A}r+ind_r$) o sistema $\mathscr{A}r$ estendido com a regra ind_r.

Comparativamente, o sistema para a aritmética dos números naturais apresentado por Kleene ([Kle52], pág. 82) contém axiomas que correspondem a todas as regras do quadro anterior, com exceção da regra ant_2 e da regra ind_r. No lugar de ant_2, o sistema de Kleene contém o seguinte axioma: $\sim a'=0$. Na terminologia de Curry, esse seria um contra-axioma. É importante notar que esse contra-axioma é considerado independente dos outros axiomas, caso contrário ele não teria sido apresentado. Além disso, o sistema de Kleene contém um esquema de axioma de indução que corresponde à regra *ind* da qual a versão ind_r é caso particular.

Da forma como definimos as regras extralógicas básicas, o contra-axioma acima não seria admissível, pois ele contém um símbolo lógico. A solução seria adotar uma regra alternativa que permitisse demonstrá-lo. Se restringirmos a substituição dos parâmetros proposicionais às fórmulas básicas, a seguinte regra básica de absurdo aritmético seria suficiente para esse fim:

$$\frac{a'=0}{A}\ abs$$

Figura III-44

A essa regra chamaremos de **ex falso quodlibet básico** (***abs***). Ela permite demonstrar $\sim a'=0$. Por outro lado, o contra-axioma também permite derivar a regra *abs*:

$$\frac{\dfrac{[a'=0]^1}{A}\ abs}{\sim a'=0}\ ^1 i\sim \qquad \frac{a'=0 \quad \sim a'=0}{A}\ e\sim$$

Figura III-45

O esquema de derivação da regra *abs* revela um fato interessante. Ele mostra que uma aplicação da regra de introdução da negação não pressupõe necessariamente que a negação tenha sido usada anteriormente.

Precisaríamos nos perguntar agora por que a regra *abs* deveria ser considerada válida. Como temos visto, as regras que envolvem o princípio de *ex falso quodlibet* sempre suscitam o problema de saber como justificar a sua validade. Da mesma forma que nas outras vezes, perguntaríamos: por que de premissa‖s‖ falsa‖s‖ obteríamos uma conclusão qualquer?

Nossa tese acerca das regras $e\bot$ e $e\sim$ é que elas estarão justificadas como regras aceitáveis

na medida em que forem contrapartida adequada às regras de introdução para o absurdo e para a negação, respectivamente. Se esse ponto de vista é correto, o problema de justificar a validade do *ex falso quodlibet* estaria completamente resolvido, pois, no máximo, ainda faltaria examinar o problema da validade das regras que fossem da natureza de um *ex falso quodlibet básico*. Entretanto, a justificação de uma regra básica dessa natureza será uma tarefa distinta para cada teoria distinta. Assim, já não caberia à lógica, enquanto disciplina pura, fornecer tal explicação. Procuraremos, a seguir, trazer um pouco de plausibilidade a essa tese, mostrando uma forma de argumentar pela validade de *abs* dentro da aritmética.

A forma de justificar a validade de uma regra que imediatamente nos ocorre consiste em mostrar que ela é derivável de um conjunto de regras consideradas válidas. Nesse caso, se pudéssemos derivar a regra *abs* no sistema $\mathcal{A}r{+}ind_r$, a regra estaria validada. Contudo, convém notar que essa forma de justificativa acabaria por destruir o que ela mesma justifica, pois, se a regra *abs* fosse derivável das demais, a sua adição ao sistema não traria, propriamente, nenhuma informação nova independente das demais regras e, dessa forma, ela seria dispensável. Ou seja, da mesma forma como, às vezes, dizemos que um axioma não é independente, nessa situação a regra não seria independente. Porém, o fato é que ela parece conter informações que as demais regras não contêm, o que também valeria, *mutatis mutandis*, para o axioma $\sim a'=0$. Assim, parece difícil que possamos validá-la derivando-a das demais.

A justificativa da validade da regra *abs* deve ser algo mais delicada e sofisticada. Na verdade, podemos começar notando que, pelo fato de que $\mathcal{A}r{+}ind_r$ só contém um símbolo de predicado, a regra poderia ser considerada válida se mostrássemos que da suposição $a'=0$ segue-se $b=c$, onde b e c são parâmetros proposicionais quaisquer. Ou seja, a validação consistiria, parcialmente, na verificação de que qualquer forma proposicional ou proposição básica colocada no lugar de A poderia ser derivada. Mas, como toda proposição básica deverá certamente conter a relação de igualdade, bastará mostrar que podemos obter qualquer fórmula da forma $b=c$. Assim, para mostrar a validade da regra, será preciso um ato de reconhecimento de que todas as fórmulas poderiam ser provadas.

Uma forma razoável de levar a cabo a tarefa de validação consistiria em exigir que, a partir de qualquer ‖putativa‖ prova da‖s‖ premissa‖s‖, seja possível obter uma prova da conclusão. De certo modo, esse parece ser um critério mais amplo que o critério da derivabilidade das regras, pois toda regra que for derivável também será válida nesse sentido, já que, com certeza, poderemos transformar as provas das premissas em prova da conclusão. O reverso não vale.

Para exemplificar o que seria uma validação segundo o critério da derivabilidade, mostraremos a seguir como derivar a regra que chamaremos de ***absI*** e que é caso particular de *abs*:

$$\dfrac{0'=0}{b=c}\ \text{absI}$$

Figura III-46

Teorema III-3 - A regra absI é válida em $\mathcal{A}r_{+ind_r}$.

Demonstração # Sejam *b,c,d* e *e* quatro parâmetros quaisquer:

$$\dfrac{\dfrac{}{0=0}=_1 \quad \dfrac{\dfrac{[d=0]^2}{d'=0}\,\text{suc} \qquad 0'=0}{d'=0}=_3}{b=0}\,{}^{2}\,\text{ind}_r \qquad \dfrac{\dfrac{}{0=0}=_1 \quad \dfrac{\dfrac{[e=0]^1}{e'=0}\,\text{suc} \qquad 0'=0}{e'=0}=_3}{c=0}\,{}^{1}\,\text{ind}_r$$
$$\dfrac{}{0=c}=_2$$
$$\dfrac{}{b=c}=_3$$

Figura III-47

QED.

Ao mostrar que, a partir de *0´=0*, podemos deduzir qualquer forma proposicional *b=c*, ou seja, ao mostrar a derivabilidade de *absI*, também mostraríamos que a inferência está validada segundo a transformabilidade das provas das premissas na prova da conclusão, pois qualquer putativa prova da premissa *0'=0* poderia ser transformada em uma prova de *b=c*.

Usando o argumento acima de que todas as proposições básicas da aritmética têm a forma *b=c*, a partir do teorema recém-demonstrado, parece-nos razoável dizer que a validade da regra abaixo deve ser acatada:

$$\dfrac{0'=0}{A}$$

Figura III-48

Podemos argumentar pela sua validade, pois ela seria resultante da substituição de *b=c* por *A* sobre a regra da Figura III-46. Para efetuar esse ato de substituição, é preciso que reconheçamos que qualquer proposição básica seria da forma *b=c* e que não perderíamos nada dessa informação ao usar o parâmetro proposicional *A*. Ou seja, o ato será um ato de reconhecimento externo ao próprio sistema. Assim, a adição da regra ao sistema básico equivaleria a um ato autônomo,

independente e exterior ao sistema básico original. Todavia, ainda continuamos com o problema de justificar a validade da regra *abs* que é mais geral do que aquela na Figura III-48.

O exame do problema da validade da regra *abs* oferece-nos uma ocasião privilegiada para examinar e ilustrar as diferentes concepções do conceito de suposição de que já tratamos anteriormente. Temos salientado que os sistemas de dedução natural representam, de modo primário, o uso de suposições em uma dedução e que a concepção intuicionista do que vem a ser uma suposição é uma concepção criticável sob certos aspectos.

Alguns poderiam estar tentados a validar a regra *abs* fazendo apelo ao seguinte argumento: dado que não há prova de $a'=0$, então uma prova de $a'=0$ seria prova de qualquer fórmula $b=c$. Claro, essa forma lembra bastante o meio pelo qual é feita a validação da regra de eliminação da negação e, em particular, como é feita a validação da eliminação do absurdo pelos intuicionistas naturais. Todavia, esse argumento é suspeito. Ele dá a impressão de esconder um uso implícito do princípio de *ex falso quodlibet*. Deixaremos aberta a questão de saber se essa impressão é correta, ou não, até o próximo capítulo.

Segundo os intuicionistas, um condicional poderá ser asserido quando houver um procedimento ou construção que transforme uma prova do antecedente do condicional em uma prova do sucedente do condicional. Se tivéssemos validado intuicionisticamente a implicação $a'=0 \rightarrow b=c$, então, usando a regra $e\rightarrow$, a inferência que tem como premissa o antecedente do condicional e como conclusão o sucedente do condicional seria uma inferência válida. Ou seja, a validação da inferência *abs* requereria somente a posse de um procedimento capaz de transformar provas de $a'=0$ em uma prova de $b=c$ (assumindo a correção da substituição de $b=c$ por A).

Com efeito, existe uma forma de, supondo a posse de uma prova π da fórmula $a'=0$, onde a seja um parâmetro individual, obter uma prova de $b=c$. O procedimento consistira em tomar a prova de $a'=0$ e fazer dela duas cópias: na primeira, substituiríamos o parâmetro individual b no lugar de a; na segunda, substituiríamos c no lugar de a. O resto da construção ficaria como a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{\nabla\pi[a/b]}{b'=0} \qquad \dfrac{\nabla\pi[a/c]}{\dfrac{c'=0}{0=c'}=_2}}{\dfrac{b'=c'}{b=c}\,ant_1}=_3$$

Figura III-49

Logo, se considerássemos essa construção como uma razão suficiente para asserir o condicional $a'=0 \rightarrow b=c$, então a regra *abs* estaria validada usando $e\rightarrow$:

$$\dfrac{a'=0 \quad \overline{a'=0 \rightarrow b=c}}{b=c}\ e\rightarrow$$

Figura III-50

Porém, obviamente, há um erro nas considerações acima. Embora da suposição de existência de uma prova da fórmula $a'=0$ seguiria-se que existem provas de quaisquer fórmulas da forma $\tau'=0$, onde τ é um termo aritmético qualquer, isso não significa que da existência de uma prova para uma fórmula **da forma** $\tau'=0$ seja possível obter uma prova de $a'=0$. São coisas distintas. A suposição de que há uma prova da fórmula $a'=0$ é distinta da suposição de que há uma prova de uma fórmula que tem **a forma** $\tau'=0$. A derivação da Figura III-49 mostra que, de uma prova da fórmula $a'=0$, podemos obter uma prova de $b=c$, mas ela não mostra que, da prova de uma fórmula da forma $\tau'=0$, obteríamos uma prova de $b=c$.

Por exemplo, a inferência abaixo é caso particular de *abs*:

$$\dfrac{0''=0}{b=c}$$

Figura III-51

Entretanto, não é verdade que, a partir de uma putativa prova de $0''=0$, pudéssemos aplicar o procedimento ilustrado na Figura III-49 para obter uma prova de $b=c$, pois não poderíamos efetuar as substituições de parâmetros.

Para evitar o problema que apontamos, ao fazer a suposição sobre a posse da prova, como os intuicionistas parecem em geral inclinados a fazer, a proposta de validação do condicional e/ou da respectiva regra de inferência deveria ter sido feita do seguinte modo: caso tenhamos um procedimento (construção) tal que para quaisquer termos aritméticos a, b e c ele seja capaz de transformar uma prova de uma fórmula **da forma** $a'=0$ na prova de uma fórmula **da forma** $b=c$, então, e somente então, a regra *abs* estaria validada, ou, mais precisamente, o condicional $a'=0 \rightarrow b=c$ estaria validado.

Sob essa interpretação, o procedimento esquemático esboçado na Figura III-49 não poderia provar a validade de *abs*, dado que a suposição da posse da prova π era estreita demais. Ao dar o procedimento, supúnhamos que a prova π era uma prova para a fórmula $a'=0$, mas, na verdade, seria preciso supor que ela era uma prova para uma fórmula (qualquer) **da forma** $a'=0$.

Essas duas formas diferentes de encarar uma suposição sobre uma fórmula permitem revelar uma característica importante do conceito de assunção adotado pelos intuicionistas. Para o conceito de hipótese que estamos adotando, não é preciso nenhum cuidado, na medida em que uma hipótese só pode ser usada como início de uma dedução. Para os intuicionistas, será diferente.

Desde a interpretação que adotamos, e por causa da concepção de linguagem que estamos assumindo, a de que admitimos fórmulas representando formas proposicionais abstratas, sempre que garantirmos que *B* é dedutível a partir de uma suposição *A,* também garantiremos que uma prova da fórmula *A* poderá ser transformada numa prova da fórmula *B* e que a prova de uma instânia de *A* será transformada na prova de uma determinada instância de *B*. Ou seja, garantiremos também que uma prova de uma fórmula **da forma** α poderá ser transformada na prova de uma fórmula **da forma** β, desde que as duas fórmulas sejam resultado de uma substituição homogênea de parâmetros em α e β.

Os intuicionistas entendem que o fato de que *B* segue-se da assunção de *A* consiste da posse de um **procedimento** capaz de transformar uma prova ou construção que prova *A* em uma prova ou construção que prova *B*. Mas, nesse ponto, é importante determinar com precisão o que deve ser entendido pelas expressões "prova ou construção que prova *A*" e "prova ou construção que prova *B*". Uma coisa é falar em prova **da fórmula** *a'=0*, outra coisa é falar em prova **de uma fórmula/proposição da forma** *a'=0.* O procedimento apresentado na Figura III-49 transforma uma prova **da fórmula** *a'=0* em uma prova de *b=c*. Ele não pode transformar uma prova de uma fórmula qualquer **que tenha a forma** *a'=0* em uma prova de *b=c*. Sob a interpretação intuicionista, ao assumir *a'=0* essa fórmula poderá não estar sendo usada por si mesma. Estará sendo usada para representar uma outra proposição (ou, eventualmente, na melhor das hipóteses, uma outra forma proposicional da qual ela é uma forma mais geral).

Levando em conta as observações coligidas, se queremos argumentar pela validade da regra *abs*, precisaremos lançar mão da regra ant_2. Essa regra é caso particular de *abs*. Porém, a regra *abs* não é derivável em $\mathcal{A}r_{+ind_r}$ ou seja, não é derivável de ant_2. Assim, a potência inferencial de ant_2 deve ser, em algum sentido, estritamente menor. Da nossa perspectiva, essas informações são duplamente interessantes. Em primeiro lugar, porque, sendo ant_2 caso particular de *abs*, qualquer justificativa que fosse aceita como uma validação de *abs* teria de ser aceita como uma validação de ant_2. Em segundo lugar, porque, na medida em que *abs* não é derivável em $\mathcal{A}r_{+ind_r}$, o seu acréscimo ao sistema poderia ser considerado como um acréscimo de informação nova e, assim, a regra seria independente das demais, inclusive de ant_2.

A validade de ant_2 é um tema discutível. Porém, é indiscutível que, se alguém não aceita sua validade, deverá também rejeitar a validade de *abs*. Mas, justamente, caso ant_2 seja considerada válida, imediatamente tornar-se-ia possível justificar a validade de *abs* apresentando a idéia geral de uma construção para a transformação de provas.

A tarefa de validação poderia ser considerada cumprida se oferecêssemos um procedimento geral (que não fosse uma simples dedução) para transformar qualquer prova de uma **fórmula da forma** $a'=0$ em uma prova da fórmula $b=c$. O procedimento geral existe.

Suponhamos que temos uma prova π de uma fórmula $\tau'=0$, onde τ é um termo aritmético qualquer. Se τ contém unicamente os parâmetros individuais $d_1,...,d_n$, então, da substituição de todas as suas ocorrências por 0 na prova em π seguidas da aplicação das regras de soma e de multiplicação, resultaria uma prova π' de uma fórmula da forma $0'^{...m...}'=0$, ou seja, uma prova para a fórmula $m=0$, onde teríamos $m\geq 1$. Conseqüentemente, por $m-1$ aplicações de ant_2 obteríamos uma prova π'' de $0'=0$. Finalmente, conforme o Teorema III-3, obteríamos uma prova π''' a partir de π'', provando $b=c$:

$$\pi''' \left\{ \begin{array}{l} \pi'' \left\{ \begin{array}{l} \pi' \left\{ \begin{array}{l} \nabla\pi[d_1/0,...,d_n/0] \\ \tau'=0\ [d_1/0,...,d_n/0] \end{array} \right. \\ \textbf{∇ operações} \end{array} \right. \\ 0'^{...m...}'=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nabla \text{ m vezes } ant_2 \\ 0'=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nabla \text{ derivação da Figura III-47} \\ b=c \end{array} \right.$$

Figura III-52

O último passo do argumento consiste em notar que, desde que é possível provar qualquer fórmula da forma $b=c$ e já que todas as sentenças aritméticas básicas são dessa forma, pareceria adequado considerar isso uma validação para uma fórmula qualquer A. Ou seja, a regra *abs* estaria validada.

O esquema da Figura III-52 mostra mais uma razão pela qual a regra *abs* não pode ser derivada em $\mathcal{A}r_{+ind_r}$. Tomando uma suposição qualquer da forma $\tau'=0$, não está claro, *a priori*, quais operações e em que ordem elas deveriam ser empregadas para resultar em $0'^{...m...}'=0$. Só sabemos que elas podem ser efetuadas. Não sabemos quais nem sua ordem, pois isso variará conforme a estrutura do termo τ. Por essa razão, o procedimento acima não representa uma única dedução, mas toda uma classe de deduções distintas. Logo, a existência do procedimento não poderá ser considerada uma validação do primeiro tipo envolvendo a derivabilidade, já que inúmeras deduções distintas estariam subentendidas no esquema geral. Conseqüentemente, a

adição da regra *abs* ao sistema seria, na verdade, a adição de uma regra independente, cuja validação está dada por uma espécie de meta-argumento.

Voltando ao problema da validade de ant_2, tendemos a justificar essa regra dizendo que, para o caso dos números inteiros positivos, diminuir uma unidade de zero não pode resultar outra coisa que não zero, ou ainda, nada se tira do nada. Essa mesma informação poderia talvez ser representada por meio de uma operação que chamaríamos de **antecessor imediato**. Se a operação de antecessor fosse representada pelo símbolo $^-$, então a seguinte fórmula seria o axioma ant_3 e ele expressaria o fato de que, do nada, nada se tira: $0^- = 0$. Claro, para arredondar o sistema com a nova operação, precisaríamos ainda adicionar novas regras, de modo a relacionar a operação antecessor com a operação sucessor, por exemplo, adicionar os axiomas ant_4 e ant_5 a seguir: $a'^- = a$ e $a^{-\prime} = a$. Em seguida, ao invés de propor como regra primitiva a regra ant_1, deveríamos dar a seguinte regra ant_6:

$$\frac{a=b}{a^- = b^-}\ ant_6$$

Figura III-53

Para demonstrar ant_2 a partir desses novos postulados, usaríamos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a'^- = a}\ ant_4}{a = a'^-} =_2 \quad \dfrac{\dfrac{a'=0}{a'^- = 0^-}\ ant_6 \quad \dfrac{}{0^- = 0}\ ant_3}{a'^- = 0} =_3}{a = 0} =_3$$

Figura III-54

Desses novos postulados, somente o axioma $0^- = 0$ poderia parecer um pouco estranho. Mas consideramos que é praticamente impossível rejeitá-lo. Num certo sentido, ele informaria que não há um número inteiro positivo que esteja aquém de *0*.

A regra ant_2 parece ter um papel extremamente interessante. Ela permite uma definição simplificada do sistema para a aritmética, de modo a evitar introduzir a operação de antecessor. A regra ant_2 também é de caráter mais simples e imediato que a regra *abs*, na medida em que essa última regra faz uma referência ambígüa a qualquer proposição/forma proposicional de valor zero, já que a conclusão é um parâmetro proposicional. Curiosamente, no entanto, como vimos, é possível argumentar pela validade da regra *abs* apenas assumindo a validade de ant_2. Alternativamente, também seria possível argumentar pela validade de *abs*, sem usar ant_2, usando a operação antecessor e o axioma $0^- = 0$. Com isso, consideramos concluída a discussão acerca da validade de *abs*

A condição formal de adequação para um sistema de regras extralógicas de valor zero é que ele não seja trivial. Em outros termos, que não seja possível demonstrar toda fórmula de valor zero a partir de suas regras. Embora não demonstremos, não temos dúvidas de que o sistema $\mathcal{A}r+ind_r$ não é trivial. A garantia, nesse caso, vem da intuitividade das regras, ainda que essa intuitividade às vezes precise ser elaborada por um meta-argumento.

Seja $\mathcal{A}'$ o sistema de regras que obtemos ao substituir ant_2 por *abs* em $\mathcal{A}r$. O sistema constituído de C+$\mathcal{A}'$+*ind* é um sistema equivalente à chamada **Aritmética de Peano** ($\mathcal{AP}$) e o sistema constituído de $\mathcal{I}$+$\mathcal{A}'$+*ind* será equivalente à chamada **Aritmética de Heyting** ($\mathcal{AH}$). Como vimos, do ponto de vista clássico, o sistema C equivale ao sistema $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$. Dado que o predicado e as operações de $\mathcal{A}'$ são decidíveis, então o sistema $\mathcal{I}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$+$\mathcal{A}'$+*ind* é construtivamente admissível. Mas como $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$+$\mathcal{A}'$+*ind* $\subset\mathcal{I}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$+$\mathcal{A}'$+*ind*, então $\mathcal{AP}$ é consistente se $\mathcal{AH}$ for consistente, pois vimos que $\mathcal{I}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$+$\mathcal{A}'$ é intuicionisticamente admissível e, desse modo, se $\mathcal{AH}$ for consistente, também $\mathcal{I}cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$+$\mathcal{A}'$+*ind* será consistente.[188]

Ainda a respeito do tema da consistência, poderíamos relacioná-la de forma muito intuitiva ao conceito de incompletude.

Proposição III-1- Se $\mathcal{G}$ é consistente, então $\mathcal{G}$ é incompleta.

Argumento # Segundo nossa definição da linguagem, *a=b* é uma fórmula, mas ela não pode ser nem provável nem refutável em $\mathcal{G}$. Logo, se $\mathcal{G}$ for consistente, será incompleta[189].

Assim, qualquer teoria consistente que estenda $\mathcal{G}$ conservativamente será também incompleta. Desse modo, a incompletude de qualquer teoria que inclua $\mathcal{G}$ não pode ser uma surpresa. Naturalmente, esse tipo de resultado decorre da forma como estamos concebendo a linguagem nessa tese, pois, segundo essa concepção, haverá fórmulas que representam formas proposicionais.

---

[188] Essa é uma forma um pouco distinta de estabelecer a consistência relativa, o que havia sido feito por Gödel, [Göd33], essencialmente, e por Gentzen [Gen33]. Esse último não chegou a publicar seu artigo, pois Gödel havia se antecipado. Em nosso caso, mostramos que uma teoria qualquer formulada em C sempre pode ser traduzida para $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$. Isso nos permite estabelecer a consistência relativa, quando os predicados e as operações da teoria com que lidamos são decidíveis.

[189] Podemos considerar que uma fórmula básica é refutável quando, ao usá-la como suposição, deduzimos qualquer fórmula básica.

Ainda sobre o tema da consistência, notamos que, sem a regra *abs*, várias fórmulas contendo negação não poderiam ser demonstradas em $\mathcal{AH}$, em particular aquelas cujo operador principal fosse uma negação, quando a negação estiver definida por meio de regras de introdução e eliminação. Porém, se $0'=0$ fosse um teorema (se assumíssemos essa fórmula como axioma, por exemplo) e não tivéssemos a regra *abs*, seria possível demonstrar qualquer fórmula aritmética básica, conforme o Teorema III-3. Para cada fórmula aritmética F, haveria uma demonstração da fórmula F^* correspondente, tal que: $(A \wedge B)^* \equiv A^* \wedge B^*$; $(A \vee B)^* \equiv A^* \vee B^*$; $(A \rightarrow B)^* \equiv A^* \rightarrow B^*$; $(\forall x A)^* \equiv \forall x A^*$; $(\exists x A)^* \equiv \exists x A^*$ e $(\sim A)^* \equiv A^* \rightarrow 0'=0$. Basta considerar que as regras de introdução em $\mathcal{M}$ tomam como premissas imediatas somente fórmulas que são subfórmula da conclusão. Isso mostra que, em certo sentido, a não-trivialidade de um sistema não implica a consistência do sistema, pois sem *abs*, mesmo que o sistema tivesse $i\sim$ e $e\sim$, ele não provaria todas as fórmulas.

5. Considerações Finais

A seguir, colocaremos em perspectiva a atividade de elucidação das deduções lógicas via sistemas de dedução natural a guisa de conclusão parcial das exposições destes três primeiros capítulos.

Nesse capítulo e no anterior, além de examinarmos a definição de vários sistemas lógicos puros, fizemos também um exame minucioso do conceito de refutabilidade e de como ele poderia ser representado dentro dos sistemas. Vimos que a partir de uma caracterização do conceito de conseqüência dedutiva já poderíamos representar o conceito de refutabilidade simples. Vimos que o conceito de refutabilidade simples pode ser internalizado dentro dos sistemas de dedução natural por meio da constante lógica $\bot$ quando seu comportamento está caracterizado pelas regras de introdução de $\bot$ e de eliminação de $\bot$ com conclusão restrita aos parâmetros proposicionais.

Examinamos diferentes tipos de regras de dedução indireta e diferentes tipos de sistemas com essas regras. Em particular, vimos que a lógica clássica pode ser formulada com qualquer uma das seguintes, todas elas equivalentes em $\mathcal{M}$: *te*, *cdi*$\bot$ e *cm*. Já que a definição dessas regras faz uso de forma essencial do símbolo de absurdo ou do símbolo de negação, não é demais lembrar que o sistema deverá conter uma caracterização por meio de regras de introdução e de eliminação para uma das duas constantes.

Além disso, mostramos que o trio de regras acima é caso particular das regras *ae*, *cdi* e *Peirce*, respectivamente, todas também interderiváveis entre si. O último trio tem maior poder dedutivo que o primeiro, pois as suas regras não podem ser derivadas daquelas do primeiro,

dentro de $\mathcal{M}$. Os trios só serão interderiváveis se adotarmos o princípio de *ex falso quodlibet* na forma da regra $E\bot$. Já a regra *cdn* foi considerada à parte das demais, pois, embora ela permita derivar $cdi\bot$ em $\mathcal{M}$, $cdi\bot$ não é caso particular de *cdn*. A regra *cdn* só será equivalente às demais regras de dedução indireta se assumirmos a regra $E\bot$. Aliás, quando a negação é definida por meio do absurdo, *cdn* é exatamente equivalente a $\bot_c$ em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$. Ou seja, as duas são interderiváveis.

Ao procurar determinar de que forma estenderíamos a lógica intuicionista para obter a lógica clássica, apresentaram-se *a priori* duas regras que poderíamos considerar as mais básicas: *cm* ou *te*. Acabamos por considerar *cm* preferível exatamente pelo fato de haver uma ligação mais clara entre a fórmula descartada e a conclusão na regra *cm* do que em *te*. Além disso, *cm* pode ser vista como caso particular de *te*, mas não vice-versa. Todavia, salientamos que essas duas regras são completamente interderiváveis em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, mesmo nas versões com conclusão restringida às fórmulas de valor zero. Outra razão para adotar *cm* reside no fato de que, historicamente, essa regra aparece no contexto da teologia, da filosofia e, principalmente, da matemática, desde pelo menos Cardano. Ou seja, adotamos a regra levando em conta uma tradição que discute o seu emprego e a sua validade, lembrando que a nossa tarefa é também uma tarefa elucidatória acerca dos usos e práticas argumentativas.

Como vimos, Prawitz interpreta os sistemas de dedução natural como sistemas erigidos para a codificação do conceito de prova. Embora não inteiramente em desacordo, preferimos adotar a interpretação segundo a qual seria melhor pensar tais sistemas como elucidação primária do conceito de conseqüência dedutiva e secundária do conceito de argumento dedutivo, já que todo argumento dedutivo deve mostrar a relação de conseqüência dedutiva entre as premissas e a conclusão. Assim, as provas seriam apenas um caso particular dos argumentos dedutivos: aqueles cuja conclusão não depende de nenhuma asserção que não seja considerada, mediata ou imediatamente, evidente.

Para Prawitz, os dois caracteres principais dos sistemas de dedução natural gentezenianos são os seguintes ([Pra71], págs. 243 e 244):

> *As mais notáveis propriedades dos sistemas de dedução natural de Gentzen parecem ser (2.1) a análise das inferências dedutivas em passos atômicos, por meio dos quais o papel dedutivo das diferentes constantes lógicas é separado e (2.2) a descoberta de que esses passos atômicos são de dois tipos, a saber, introduções e eliminações, mantendo uma certa relação de simetria entre eles.*[190]

[190] *The most notewothy properties of Gentzen´s systems of natural deduction seems to be (2.1) the analysis of deductive inferences into atomic steps, by which the deductive role of the different logical constants is separated and*

Em certo sentido, podemos dizer que os nossos esforços elucidatórios assumiram o item (2.1) como ponto programático. O fato de havermos escolhido a regra *cm* para definir a lógica clássica é um reflexo disso. Infelizmente, não é possível seguir o segundo ponto programático à risca. O caso é que, para Prawitz, os passos elementares seriam basicamente de dois tipos − introduções e eliminações − e, por meio desses dois tipos de regras, o papel dedutivo das diferentes constantes lógicas seria apresentado de forma separada. Entretanto, nenhuma formulação da lógica clássica poderá ser encaixada sob esse segundo ponto programático.

Prawitz dá a entender que o segundo ponto programático seria conseqüência do primeiro e, se compreendemos bem a sua posição, isso se daria na medida em que, ao tratar as constantes lógicas de forma separada, não estaria permitido fazer referência a outras constantes lógicas nas condições de aplicabilidade de uma regra de introdução. Também significa, provavelmente, que não nos seria permitido fazer referência a outras constantes na conclusão de uma regra de eliminação. Porém, a regra *cm* não é uma regra de introdução e não parece ser uma regra de eliminação, ao menos a premissa imediata não faz referência a nenhuma constante. De fato, a premissa imediata e a conclusão da regra são idênticas, nenhuma delas fazendo referência estrutural a qualquer constante lógica.

A elucidação da lógica clássica parece, na verdade, exigir um terceiro tipo de regra. Todavia, se admitirmos outro tipo de regra, seremos obrigados a conceber as regras de dedução natural de forma distinta daquela de Prawitz. De nossa parte, estaríamos dispostos a dizer que as regras de introdução e eliminação elucidam o núcleo duro do significado de uma constante, embora, talvez, não possam esgotar toda a carga semântica que poderíamos atribuir a uma constante lógica. A questão-chave é saber que carga semântica poderia ser essa.

Vimos que os sistemas com regra de dedução indireta poderiam ter sido formulados com a simples adição de descartes *à la Peirce* ou *à la mirabilis* sobre as regras de introdução e eliminação, concomitantemente[191]. Com essa adição, manteríamos a dicotomia introduções-eliminações, mas agora as regras de introdução passariam a fazer referência a outras constantes lógicas nas suas condições de aplicabilidade e esse tipo de proposta implicaria tomar uma posição levemente distinta daquela presente na análise dita construtiva das constantes lógicas. Entretanto, observamos que a constante lógica que, obrigatoriamente, apareceria nas condições de aplicabilidade dessas regras é a implicação e, justamente, a implicação é a constante que reflete

---

(2.2) the discovery that these atomic steps are of two kinds, viz. introductions and eliminations, standing in a certain symmetrical relation to each other.

[191] Ou apenas sobre as regras de eliminação, embora, como veremos mais adiante, no quarto capítulo, isso seja problemático.

lingüisticamente a relação de decorrência entre proposições. Além disso, o uso dos descartes *à la Peirce*, ou *à la mirabilis*, exigiria que interpretássemos o conceito de suposição de uma forma distinta daquela que adotam os intuicionistas, inclusive porque a concepção deles parece demasiado estreita, como já argumentamos.

Outro modo de obter a lógica clássica consistiria em adicionar o descarte *à la mirabilis* só sobre a regra de eliminação da negação ou de eliminação do absurdo:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[\sim A]^i & [\sim A]^i \\ \nabla & \nabla \\ B & \sim B\end{array}}{A}\ i\ e\sim \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A\rightarrow\bot]^i \\ \nabla \\ \bot\end{array}}{A}\ e\bot$$

Figura III-55

Essas regras seriam caso particular da regra que chamamos acima de absurdo clássico, já que, aqui, a conclusão seria sempre básica. As regras *e*~ e *e*⊥ estão restritas às conclusões de valor zero e, assim, não obteríamos o sistema C com essas regras, apenas $\mathcal{J}_{cm'}$. Para obter C deveríamos ter usado a regra *E*⊥ ou a regra *E*~.

Acerca do qualificativo "natural" na expressão "dedução natural", Prawitz assume a seguinte posição ([Pra71], pág. 245):

> *A tese de que as operações dedutivas essenciais tenham sido isoladas não deve ser entendida como uma afirmação de que essas operações espelham todas as práticas dedutivas informais, o que seria uma demanda não-razoável em vista do fato de que as práticas informais podem às vezes conter irregularidades lógicas insignificantes. O que é sustentado é que o conteúdo lógico essencial das operações lógicas intuitivas, que podem ser formuladas nas linguagens consideradas, pode ser considerado entendido como composto de inferências atômicas isoladas por Gentzen. É nesse sentido que nós podemos entender a terminologia dedução natural.*
> *No entanto, os sistemas de Gentzen são também naturais no sentido mais superficial de corresponderem bastante bem às práticas informais; em outras palavras, a estrutura das provas informais são freqüentemente bastante bem preservadas quando formalizadas dentro dos sistemas de dedução natural.*[192]

Para Prawitz, o fato de o adjetivo *natural* referir-se às práticas argumentativas usuais não seria o mais importante. Para ele é mais importante isolar certas inferências elementares de cuja composição as práticas lógicas intuitivas poderiam ser elucidadas. Enfatiza o fato de que tais

---

[192] *The claim that the essential deductive operations have been isolated is not to be understood as a claim that these operations mirror all informal deductive practices, which would be an unreasonable demand in view of the fact that informal practices may sometimes contain logically insignificant irregularities. What is claimed is that the essential logical content of intuitive logical operations that can be formulated in the languages considered can be understood as composed of the atomic inferences isolated by Gentzen. It is in this sense that we may understand the terminology natural deduction.*
Neverthless, Gentzen´s systems are also natural in the more superficial sense of corresponding rather well to informal practices; in other words, the strucuture of informal proofs are often preserved rather well when formalized within the systems of natural deduction.

regras podem ser divididas em dois grupos simétricos. Efetivamente, um dos princípios básicos assumidos em dedução natural é o de que a elucidação do papel das constantes lógicas deve ser dada por regras classificáveis nos dois grupos (introduções-eliminações), embora seja discutível que a literatura tenha levado isso à risca. Lembramos que, em geral, não são oferecidas regras para introduzir seja a negação, seja o absurdo.

Nós, além de oferecermos uma regra de introdução para a negação e o absurdo, procuramos também oferecer a possibilidade de elucidar mais detalhadamente a lógica clássica, observando tanto a elementariedade das regras quanto a dicotomia introdução-eliminação, como já dissemos. Se os sistemas são exatamente naturais ou não, essa é uma questão complexa. Assumindo que é correto dizer que os sistemas de dedução natural são o resultado de um processo de elucidação visando o conceito de prova ou de argumento, então o ponto de partida do processo só pode ser uma certa familiaridade com um conceito ou uma prática da qual queremos um esclarecimento mais detalhado e articulado. Devemos admitir que diferentes elucidações podem ser dadas e, talvez, seus méritos e defeitos possam ser examinados comparativamente.

Por exemplo, comparados aos sistemas lógico-axiomáticos de estilo hilbertiano, tomados enquanto elucidação do conceito de prova, os sistemas de dedução natural parecem aproximar-se mais da práxis argumentativa no âmbito da matemática, pois contemplam de forma primária o uso de suposições no raciocínio.[193] O fato de que, freqüentemente, é possível provar o teorema da dedução para a formulação axiomática e, portanto, usar suposições nesses sistemas não constitui contra-argumento à comparação, pois o uso de hipóteses estaria, nesse caso, refletido de forma secundária. Além disso, no caso dos sistemas axiomáticos, a adição de um novo princípio de prova sempre irá requerer uma nova prova do teorema da dedução, problema que inexiste em dedução natural. Notamos que a autorização para o uso das suposições que nos daria o teorema da dedução consiste exatamente em mostrar que a regra de introdução da implicação é admissível no sistema. A nosso ver, essas considerações parecem constituir razão para não desprezar aquilo que Prawitz identifica como o sentido superficial da naturalidade dos sistemas de dedução natural. Além disso, entende-se melhor por que o uso de hipóteses tem sido interpretado, e não só por intuicionistas, como uma forma de asserção. Basicamente, os sistemas axiomáticos são sistemas para representar provas que eventualmente admitem o uso de uma assunção em uma prova, mais particularmente o uso de um lema.

Por outro lado, talvez existam outras razões para não considerar esses sistemas como naturais. A mais forte delas parece ser a de que nossos argumentos informais têm uma estrutura

---

[193] Devo essa observação ao professor J. Seoane.

linear, ao passo que as derivações de dedução natural são apresentadas na forma de árvore. A essa objeção responderíamos que a estrutura em árvore permite compreender melhor a relação de dependência dedutiva que vigora entre as diferentes proposições envolvidas nas operações lógicas. Desse modo, a "não-naturalidade" se justificaria à medida que ganhamos em clareza com o uso das estruturas em árvore.

Acerca da naturalidade, há que se notar também que os operadores lógicos proposicionais não correspondem de modo exato à nossa prática lingüístico-inferencial usual, seja na ótica dos sistemas de dedução natural, seja na ótica dos sistemas lógico-axiomáticos − do qual o histórico problema de interpretação do condicional é um exemplo.[194] Na verdade, as práticas objeto de elucidação são aquelas que encontramos no âmbito da matemática. Essa restrição de âmbito deve ficar sempre clara. Isso evitaria confundir essas elucidações com uma elucidação geral da logicidade subjacente aos usos lingüísticos contidos na comunicação cotidiana. Por outro lado, não significa negar a existência de uma relação entre as práticas argumentativas mais gerais da vida cotidiana com as práticas matemáticas. Afinal, há continuidades entre os dois âmbitos. Em particular, o uso de condicionais contrafactuais aparece eventualmente no âmbito matemático, como procuramos ilustrar anteriormente.

Há que se considerar ainda que qualquer elucidação lógica será, na verdade, uma elucidação de elucidações. Ou seja, as práxis matemática, lógica, e filosófica, muito provavelmente, contêm uma depuração e uma elucidação histórica dos operadores lógicos e das correspondentes práticas inferenciais envolvidas. Consideremos, por exemplo, a história do *ex falso quodlibet* e a defesa da sua validade nas mãos do Pseudo-Escoto.[195] Esse autor argumenta pela validade dessa forma de inferência fazendo referência às regras de $e\wedge$, $i\vee$ e ao assim chamado *silogismo disjuntivo*. Esse último não seria, desde o ponto de vista dos sistemas de dedução natural, uma introdução, nem uma eliminação, e, dessa forma, seria questionável que o Pseudo-Escoto tivesse realmente validado o princípio de *ex falso quodlibet*. Para validá-lo, seria preciso que ou o silogismo disjuntivo já fosse considerado intuitivamente válido ou que ele pudesse ser validado a partir de outras regras mais primitivas, dentre as quais não poderia constar o *ex falso quodlibet*. Mas, da perspectiva de dedução natural, é duvidoso que isso seja possível, justamente porque, em dedução natural, existe um padrão mais ou menos férreo: consideramos que as regras mais primitivas são aquelas envolvendo introdução e eliminação de constantes lógicas.

---

[194] Outra forma de constatar o ponto está em observar que a seqüência de expressões "se...,então..." é intuitivamente interpretada de uma forma mais próxima da equivalência.
[195] Ver [Kne62], págs. 286-287. Ver também o Apêndice.

Em nossa investigação, estamos propondo uma elucidação ulterior das deduções empregando *ex falso quodlibet*. Elas constituiriam nada mais que a aplicação de uma regra de eliminação para a negação ou para o absurdo que permitiria manter a livre substitutibilidade dos parâmetros proposicionais em um teorema lógico. Como vimos, uma versão mais restringida das regras $e\sim$ e $e\bot$, ou seja, as regras $e\sim_r$ e $e\bot_r$ – cujas conclusões devem ser parâmetros proposicionais -, causam problemas à generalidade dos esquemas de teoremas, pois nem toda substituição de parâmetros dentro de um teorema resultará noutro teorema. Não obstante, é possível formular o princípio de *ex falso quodlibet* de modo a não perder nada em poder dedutivo com regras que sejam levemente menos restritas. Nos referimos às versões com conclusões básicas, isto é, $e\sim$ e $e\bot$.

A interpretação que estamos adotando para as regras de dedução natural contém uma variação relevante com respeito à interpretação intuicionista. Enquanto para os intuicionistas assumir uma proposição consiste em asseri-la como verdadeira, ao mesmo tempo supondo a posse da prova, para nós o ato de supor está sendo considerado um ato completamente distinto do ato de asserção. Embora o ato de supor uma proposição seja equivalente ao ato de supor que a proposição é verdadeira, isso não significaria, nesse caso, que a suposição possa ser equiparada à suposição da posse de uma prova da proposição asserida. Com efeito, vimos que podemos supor proposições falsas quando, por exemplo, argumentamos contrafactualmente. Seria estranho que um intuicionista entendesse que a proposição (falsa) estaria sendo asserida e a posse da prova da proposição (falsa) estivesse sendo suposta. De fato, é completamente duvidoso que a proposição (falsa) esteja sendo asserida, pois, justamente, quando fazemos suposições contrafactuais, costumamos usar o verbo no pretérito do subjuntivo e esse tempo verbal não parece ser empregado para fazer asserções. Parece insensato querer fazer um compromisso com a verdade de uma proposição que já sabemos ser falsa, embora, eventualmente, seja interessante tomá-la como hipótese de um raciocínio contrafactual.

A diferença de concepções acerca da natureza das suposições também aparece quando somos levados a considerar as possíveis formas de justificar a validade da regra *abs* para os números naturais. A regra poderia, *a priori*, ser validada mostrando que, da suposição $a'=0$, deduzimos $b=c$. Mas também poderia ser validada a partir da posse de um procedimento que transformaria uma ⟦putativa⟧ prova de uma fórmula **da forma** $a'=0$ na prova de uma fórmula $b=c$. Nesse segundo caso, o procedimento não teria por que ser uma cadeia dedutiva fixa. Se o for, então a validação já seria uma validação do primeiro tipo. O primeiro tipo de validação sempre implicará que a regra validada é não-independente das demais regras. O segundo tipo de

validação não implicaria essa dependência.

O fato de que as fórmulas que estamos considerando contêm parâmetros individuais torna delicada a compreensão do que significaria assumir uma fórmula contendo parâmetros, entendendo que assumir envolve asserir a fórmula e supor a posse da prova. Vimos que Heyting dizia que a asserção de uma fórmula contendo parâmetros poderia ser feita desde que tivéssemos a posse de uma construção geral ou um esquema de prova tal que, para cada caso concreto de substituição dos parâmetros, houvesse uma instância da construção atestando a fórmula instanciada. Por outro lado, quando discutíamos o problema da validade da regra *abs*, vimos que, ao assumir (no sentido intuicionista) uma fórmula contendo parâmetros, somos obrigados não a considerar que temos uma asserção da fórmula *A* e a suposição da sua prova, mas, ao contrário, a considerar que, para uma determinada proposição *B*, que por seu turno é uma instância de *A*, estaríamos supondo a posse de sua prova. Mas, se estamos supondo a posse da prova de *B*, na verdade *B* é que deveria estar sendo asserida. Não faria sentido dizer que a fórmula *A* empregada para iniciar a cadeia dedutiva estaria sendo asserida, já que estaríamos supondo a prova de outra fórmula, a fórmula *B*, que é instância de *A*. Esse nos parece ser o significado da expressão "suponha que temos uma prova de uma fórmula **da forma** *A*" que, até onde vemos, parece ser a única maneira de dar sentido ao uso de uma suposição de natureza intuicionista nos casos envolvendo o problema da validação da regra de absurdo atômico.

Para resumir, a validação de uma regra cuja premissa é α e cuja conclusão é β poderia ser pensada de várias formas distintas. A seguir, listamos quatro alternativas de procedimentos de validação apontando a subordinação existente entre as alternativas.

A priori, poderíamos validar uma regra α–β se:

(i) ao ***supor*** α*,* ***conseguimos derivar*** *ou* ***deduzir*** β *diretamente por meio de regras válidas (por exemplo, a derivação do silogismo disjuntivo no sistema* $\mathbb{C}$*);*

(ii) ao ***supor*** α*, podemos garantir a* ***existência de uma derivação*** *de* β *a partir de* α *(por exemplo, a admissibilidade de E*$\perp$ *no sistema* $\mathcal{I}$*, já que o sistema foi definido com a regra e*$\perp$*);*

(iii) duas alternativas paralelas:

(iii.i) a de que a partir de uma ***putativa prova*** *de uma proposição da forma* α *temos um* ***procedimento*** *que a transforma em uma* ***putativa prova*** *de uma proposição da forma* β *(por exemplo, o que ocorre com a regra abs para a aritmética);*

(iii.ii) a de que sempre que α *for um* ***teorema****, então* β *também será um* ***teorema*** *(por exemplo, o que ocorre com a regra modal de necessitação, mas também com aquele caso de*

regra onde a partir de uma prova de $\sim A \rightarrow (B \vee C)$ *obtemos uma prova de* $(\sim A \rightarrow B) \vee (\sim A \rightarrow C)$*, embora a implicação do primeiro ao segundo não possa ser demonstrada)*[196].

Naturalmente, uma regra validada por *(i)* estará validada por *(ii)* e uma regra validada por *(ii)* estará validada por *(iii.i)* e *(iii.ii)*. Notamos que a relação não funciona em sentido inverso. Além disso, para que *(iii.i)* e *(iii.ii)* sejam considerados equivalentes é preciso assumir que a demonstrabilidade de α equivale à posse de uma prova. Em geral, o conceito de demonstrabilidade só implica a existência de uma prova da qual poderíamos não estar de posse.

[196] Ver o verbete *intuitionistic logic, (4.2 Admissible rules of intuitionistic logic)* da Enciclopédia Stanford de Filosofia, em http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/.

Capítulo IV Forma Normal, Reduções, Permutações e Simplificações

As derivações em cada um dos sistemas definidos nos capítulos anteriores podem ser agrupadas em certas classes de equivalência ou, poderíamos talvez dizer, em certas classes de identidade. A base para determinar essas classes é dada por certas derivações para as quais vale a chamada propriedade da forma normal. As derivações em forma normal despertam interesse basicamente porque, a partir de sua estrutura, podemos extrair delas conclusões importantes, como, por exemplo, a impossibilidade de demonstrar a proposição absurda $\bot$, ou seja, consistência.[197]

A definição do conceito de forma normal será examinada neste capítulo. Também serão examinadas as operações que, quando aplicadas a uma derivação qualquer, podem resultar numa derivação em forma normal.

Se os capítulos anteriores continham, de forma ampla, uma discussão acerca da elucidação do conceito de conseqüência dedutiva e, conseqüentemente, do conceito de argumento dedutivo, neste capítulo trataremos dos critérios de identidade para os constructos elucidatórios, as derivações.

Buscaremos, a seguir, mostrar que tipo de harmonia pode haver entre as eliminações e as introduções. O critério de identidade para derivações emergirá parcialmente da harmonia dessas regras. Em particular, devemos examinar a harmonia das regras que acabamos de propor para o absurdo e a negação. Também não descuidaremos de examinar quais tipos de critérios de identidade poderíamos obter quando levamos em consideração as regras de dedução indireta, já que elas não parecem ser classificáveis como regra de introdução, nem como regra de eliminação.

1. Da Utilidade dos Rodeios

As regras para as constantes lógicas estão basicamente divididas em duas espécies: introduções e eliminações. Da forma como foram definidas as derivações, podem ocorrer certas

[197] Da mesma forma, a impossibilidade de uma prova pura cuja conclusão seja um parâmetro proposicional.

situações nas quais a aplicação de uma regra de introdução venha imediatamente seguida da aplicação de uma regra de eliminação para a mesma constante lógica, tal que a conclusão da introdução é *pM* da eliminação, como no seguinte exemplo:

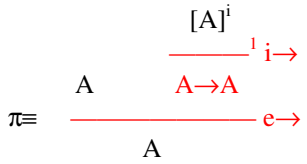


Figura IV-1

Nesses casos, em que há uma espécie de "excursão que volta ao mesmo ponto", diremos que há um **rodeio**[198] na derivação. Os rodeios e as instâncias de regra que lhes dão origem são dispensáveis na derivação. Se cada instância de regra for considerada um ato distinto, então os rodeios constituem seqüências de atos que se anulam e por isso são dispensáveis. Uma ocorrência de fórmula que seja conclusão de uma instância de introdução e, ao mesmo tempo, *pM* de uma instância de eliminação em um rodeio será chamada de **fórmula máxima** (em vermelho, na figura acima).

Levando em conta que os argumentos dedutivamente válidos devem mostrar a relação de conseqüência dedutiva entre premissas e conclusão, argumentar usando rodeios pode não parecer, *a priori*, um modo profícuo de produzir convencimento, pois um argumento com rodeios poderia, no limite, estender-se indefinidamente. Também poderia parecer que a prova de um teorema contendo rodeios fosse uma prova pouco inteligente. Todavia, é difícil evitar os rodeios e, de fato, em certo sentido, eles são essenciais à formulação de uma teoria axiomática.

Duas ou mais derivações unidas por composição podem resultar em rodeios. A composição de uma derivação π_1 sobre uma derivação π_2, tal que a ocorrência final de π_1 é conclusão de uma regra de introdução e a ocorrência topo de π_2 é *pM* de uma regra de eliminação, ambas ocorrências sintaticamente idênticas, resultará numa derivação que contém ao menos um rodeio:

Figura IV-2

Na atividade axiomática, ao provar um teorema com apoio de outros lemas e teoremas já

[198] *Roundabout*.

provados, a demonstração construída dependerá das demonstrações dos lemas e teoremas utilizados. Em princípio, quando o enunciado de um lema ocorre em uma prova principal, o enunciado desse lema sempre pode ser substituído pela sua prova. Mas um mesmo lema pode ser empregado várias vezes durante a demonstração de um teorema. Dessa forma, não é difícil perceber que a substituição do enunciado do lema pela sua respectiva prova tende a "fazer crescer" a prova principal. Tende também a gerar rodeios.

Do ponto de vista axiomático, uma forma de diminuir a complexidade ou o comprimento de uma prova e, conseqüentemente, torná-la humanamente examinável está no uso de rodeios. O uso de lemas representará uma boa economia de espaço e tempo para a demonstração dos teoremas. Parece razoável admitir que as demonstrações de pelo menos alguns teoremas seria inviável, caso não fossem utilizados lemas e teoremas auxiliares.[199] Em outros termos, o nosso "acesso epistêmico" a determinados conhecimentos seria impossível, se as demonstrações não usassem lemas. A substituição da prova de um lema pelo seu respectivo enunciado em uma prova principal acarretaria o crescimento da prova e o surgimento de rodeios.

A forma das derivações sem rodeios, por sua vez, permite-nos demonstrar propriedades à primeira vista não-suspeitadas. Uma dessas propriedades é a consistência do sistema de regras. Inegavelmente, essa conseqüência é de sumo interesse para a lógica.

2. O Problema da Harmonia entre as Introduções e as Eliminações

Tratemos a seguir de um tema espinhoso, mas imbuídos de modéstia. Buscaremos, apenas, alcançar mais clareza sobre um assunto que provoca e continuará provocando muitas dúvidas.

Tradicionalmente, tem sido assumido que a distinção entre regras de introdução e regras de eliminação para constantes lógicas refletiria o que poderia ser considerado, em cada caso, uma definição da constante lógica. Segundo Gentzen, as introduções seriam similares a definições e as eliminações seriam conseqüência dessas definições ([Gen35], págs. 80 e 81):

> *As introduções representam, como se fossem, as 'definições' dos respectivos símbolos, e as eliminações não são mais, no fim das contas, do que conseqüências dessas definições. Esse fato pode ser expressado como se segue: ao eliminar um símbolo, nós podemos usar a fórmula que contém o símbolo terminal com o qual estamos lidando unicamente ´no sentido conferido a ele pela introdução daquele símbolo' ...*

[199] A esse respeito, ver o argumento de Boolos em [Boo84]. Ver também a definição dos rodeios a seguir, mais especificamente dos rodeios que estaremos chamando de multiplicativos. A sua eliminação pode implicar um aumento brutal no comprimento de uma derivação.

> *Ao fazer essas idéias mais precisas deve ser possível mostrar que as E[liminações]-inferências são função única das suas correspondentes I[ntroduções]-inferências, com base em certos requisitos.*[200]

Qual seria exatamente a forma mais adequada de compreender a proposta gentzeniana na primeira parte do extrato acima tem sido motivo de controvérsia. Já vimos, parcialmente, a posição de Prawitz e outros a esse respeito, nos capítulos anteriores. De nossa parte, acreditamos que devemos fazer pelo menos uma breve análise do problema, inclusive porque gostaríamos de, comparativamente, poder dizer algo acerca das regras de dedução indireta nesta tese.

Comecemos por considerar a natureza das definições explícitas. Basicamente, uma definição explícita de um novo termo ou símbolo sempre pressupõe a compreensão de outros termos ou símbolos já conhecidos. A expressão *definiendum* ocorrerá adequadamente somente naqueles contextos onde a expressão *definiens* ocorre adequadamente. O *definiens* sempre pode ser substituído pelo *definiendum*, ou seja, a presença do *definiens* em um contexto é a condição **necessária e suficiente** para a introdução de uma nova expressão por substituição nesse mesmo contexto: o *definiendum*. Como reverso da medalha, a presença do *definiendum* em um contexto contribui com um aporte de informação equivalente ao do *definiens*. Para definições dessa natureza, sempre podemos efetuar a substituição de uma expressão no lugar da outra. Finalmente, é importante observar que o *definiendum* só pode ser "des-substituído" exatamente pelo *definiens* do qual ele havia anteriormente tomado o lugar.

O conjunto das regras de introdução e eliminação para uma constante lógica poderia ser pensado, à primeira vista, de forma comparável àquela das definições explícitas de um termo. A conclusão de uma regra de introdução poderia ser interpretada como o *definiendum* e as respectivas condições de aplicabilidade dessa regra constituiriam o *definiens* (talvez parcial também). Porém, não há forma de assimilar integralmente as regras de introdução às definições explícitas. Uma aplicação de uma introdução não substitui propriamente o *definiens* pelo *definiendum* com a nova constante lógica. Na melhor das hipóteses, a aplicação de uma regra de introdução concatenaria o *definiens* com o *definiendum*, fazendo-nos transitar de uma informação a outra. É esse trânsito que nos daria as cadeias de conseqüência dedutiva, as quais poderiam, eventualmente, ser interpretadas como cadeias definicionais.

---

[200] *The introductions represent, as it were, the 'definitions' of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis, than the consequences of theses definitions. This fact may be expressed as follows: In eliminating a symbol, we may use the formula with whose terminal symbol we are dealing only 'in the sense afforded it by the introduction of that symbol' ...*
By making these ideas more precise it should be possible to display the E[limination]-inferences as unique function of their corresponding I[ntroduction]-inferences, on the basis of certain requirements.

Para interpretar o que significaria dizer que as eliminações são simples conseqüência das introduções e as introduções são propriamente as definições das constantes lógicas, poderíamos usar a analogia com as definições explícitas. Assumindo essa posição, provavelmente diríamos que as eliminações mostram como recuperar a situação do *definiens* correspondente às condições de aplicabilidade da introdução. Desse ponto de vista, seria curioso o fato de que, tradicionalmente, não é dada nenhuma regra de introdução para a constante lógica $\bot$, só regra de eliminação.

Restringindo nosso exame, por enquanto, ao sistema $\mathcal{M}$ e supondo que cada regra de introdução estabeleça uma condição suficiente para o uso de uma constante lógica, uma alternativa possível para interpretar cada regra de eliminação individual consistiria em dizer que tais regras deveriam permitir restaurar as condições sob as quais o operador foi introduzido. Ou seja, uma regra de eliminação permitiria restaurar uma parcela do *definiens*. Em seu conjunto, todas as regras de eliminação para uma constante lógica permitiriam restaurar todo o *definiens*. Uma regra de eliminação, individualmente, poderia não restaurar inteiramente as condições que deram origem à introdução do operador. Esse seria o caso das regras de eliminação da conjunção que, isoladamente, re-estabeleceriam só uma parcela das condições suficientes. Porém, em conjunto, as duas permitiriam restaurar o *definiens* integralmente. Dessa perspectiva, uma regra de introdução apresentaria uma condição suficiente para introduzir um *definiendum*, embora possam existir outras condições e, se esse for o caso, outras regras de introdução deveriam capturar essas outras situações. Assim, devemos assumir que o conjunto das regras de introdução deveria conter todas as condições que sejam consideradas suficientes.

Mas o ponto de vista acima se aplicará bem, talvez, somente à conjunção, à implicação, ao universal e ao absurdo. Para os operadores de disjunção e existencial, é mais difícil sustentar que as regras de eliminação re-estabeleceriam o contexto de introdução. Considerando o sistema $\mathcal{M}$, do fato de saber que há uma dedução de $A \vee B$, em um determinado contexto, não se segue que poderíamos deduzir A ou B, mesmo que uma dessas fórmulas tivesse de fato sido usada para a introdução da disjunção. Efetivamente, nada nos garante que qualquer parcela das condições que permitiriam a introdução da disjunção ou do existencial seja uma conclusão possível da regra de eliminação da disjunção ou do existencial, respectivamente. A analogia com as definições explícitas falha para os operadores cujas regras de introdução representam uma espécie de "perda de informação".

Assim, é preciso usar uma forma mais débil de **interpretação das regras de eliminação**, mas que possa ser aplicada a todo o conjunto das constantes lógicas. A interpretação consistirá

em dizer que as regras de eliminação não representam, necessariamente, a possibilidade de restaurar o contexto de introdução de uma constante lógica, mas que **elas devem acarretar todas e unicamente aquelas conseqüências que já podiam ser comumente extraídas de cada uma das condições suficientes para a introdução da constante** (com a adição eventual de outros contextos correspondendo às subderivações subsidiárias das premissas menores). Lembramos que cada regra de introdução para uma constante lógica constitui uma condição suficiente para a introdução daquela constante. A interpretação proposta seria assim aplicável às regras de eliminação da disjunção e do existencial na forma usual com subderivações subsidiárias. Mas também seria aplicável às regras de eliminação da conjunção, da implicação e do universal. Desse modo, a formulação das regras de eliminação pressuporia que o conjunto das regras de introdução para uma dada constante lógica fosse um conjunto necessário, no sentido de que, qualquer que seja a condição suficiente que permita a introdução da constante, a condição deverá estar representada por uma regra nesse conjunto.

Desde o ponto de vista recém-expressado, as regras de eliminação para a conjunção, a implicação e o universal seriam mais apropriadamente apresentadas da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^i,[B]^i\\ \nabla\\ A\wedge B \quad C\end{array}}{C}\,{}^{i}\,e\wedge(II) \qquad \frac{\begin{array}{c}\quad\quad [B]^i\\ \nabla \quad\quad \nabla\\ A \quad A\rightarrow B \quad C\end{array}}{C}\,{}^{i}\,e\rightarrow(II) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A[a/\tau]]^i\\ \nabla\\ \forall xA[a/x] \quad C\end{array}}{C}\,{}^{i}\,e\forall(II)$$

Figura IV-3[201]

A idéia é que *C* será conseqüência da constante lógica, caso seja conseqüência de certas hipóteses que estão diretamente ligadas as bases suficientes para a introdução da constante lógica. Por sua vez, podemos mostrar que as regras de eliminação usuais para essas três constantes são caso particular das três regras acima, tal que a derivação subsidiária da premissa menor *C* reduz-se a uma única ocorrência de fórmula:

$$\frac{A\wedge B \quad [A]^i}{A}\,{}^{i}\,e\wedge(II) \qquad \frac{A\wedge B \quad [B]^i}{B}\,{}^{i}\,e\wedge(II) \qquad \frac{A \quad A\rightarrow B \quad [B]^i}{B}\,{}^{i}\,e\rightarrow(II) \qquad \frac{\forall xA[a/x] \quad [A[a/\tau]]^i}{A[a/\tau]}\,{}^{i}\,e\forall(II)$$

Figura IV-4

Todavia, as regras de eliminação da conjunção, da implicação e do universal usuais também nos permitem derivar as regras da Figura IV-3:

---

[201] Originalmente, essa forma de regras de eliminação foi proposta por Schröder-Heister, [Sch84], pág. 1293. Diga-se de passagem que, desse modo, as regras ficam mais parecidas com as regras para o cálculo de seqüentes, principalmente o cálculo intuicionista. A esse respeito, também é notável a similaridade entre essas regras e aquelas que oferece J.Dopp [Dop62]. Também López Escobar [Lop99], por um lado, e Negri & Von Plato [Neg01], pág. 166 e ss., por outro, definem as regras de eliminação para dedução natural nesse formato.

$$\frac{A \wedge B}{A}\,e\wedge \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,e\wedge \qquad \frac{\begin{array}{c}\nabla \\ A \quad A \rightarrow B\end{array}}{B}\,e\rightarrow \qquad \frac{\forall x A[a/x]}{A[a/\tau]}\,e\forall$$

$$\begin{array}{c} \nabla \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \nabla \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \nabla \\ C \end{array}$$

Figura IV-5

Assim, não haveria, em princípio, razão para nos desfazer das regras de eliminação tradicionais para essas três constantes.

Assim, segundo a elucidação recém-proposta, a de que as eliminações devem permitir obter aquelas conseqüências que já eram comumente deriváveis das condições de introdução, entre as regras de introdução e de eliminação deveria vigorar certa harmonia. Com efeito, entenderemos por **princípio de harmonia**[202] o requisito de que as regras de eliminação devem preservar as conseqüências que eram comumente deriváveis de cada uma das condições suficientes para a introdução da constante lógica[203], ao mesmo tempo não inventando conseqüências novas.

Entendemos que o tradicional **princípio de inversão**[204] está, de algum modo, relacionado ao princípio de harmonia recém-formulado. Todavia, eles não são idênticos. O princípio de inversão tem sido usado como esteio teórico à operação de eliminabilidade dos rodeios. Prawitz o considera como uma forma de detalhar qual seria intenção de Gentzen ao afirmar que as eliminações são como que conseqüência das introduções ([Pra65], pág. 33, inclusive a nota 1, e [Pra71], págs. 246-248). Em 1965, Prawitz apresentava o princípio de inversão da seguinte forma ([Pra65], pág. 33):

> *Seja α uma aplicação de uma regra de eliminação que tem B como conseqüência. Então, as deduções que satisfazem as condições suficientes para derivar a premissa maior de α, quando combinadas com deduções das premissas menores de α (se houver alguma), já ´contêm´ uma dedução de B; a dedução de pode ser B assim obtida diretamente das deduções dadas sem a adição de α.*[205]

---

[202] Acerca do princípio de harmonia, ver [Bel62] e [Dum91], pág. 246, embora , é preciso notar, nenhum dos dois apresenta uma formulação idêntica à nossa. Tennant também formula um princípio de harmonia em [Ten06]. Todavia, até onde podemos ver, só a primeira parte do seu princípio seria similar à primeira metade da nossa formulação. Para maiores detalhes, ver o Apêndice.

[203] Intuitivamente, isso significaria preservar as informações que sejam comuns a todas e cada uma das condições suficientes para a introdução da constante lógica.

[204] Para uma exposição desse mesmo princípio, ver também [Cur63], págs. 172 e 173, que afirma ter sido Lorenzen o primeiro a formulá-lo.

[205] *Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition for deriving the major premise of α, when combined with deductions of the minor premises of α (if any), already 'contain' a deduction of B; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α.* Fazemos, adicionalmente, duas observações acerca da passagem. A primeira é a de que o que é chamado de condição suficiente está diretamente correlacionado às condições de aplicabilidade de uma regra de introdução. A segunda é que, nesse texto de 1965, Prawitz usa o termo *dedução* e não *prova* no enunciado do

Temos razões para duvidar que o princípio de inversão, nessa formulação, seja suficiente para estabelecer a harmonia entre as introduções e as eliminações para uma mesma constante lógica. Com efeito, se lembrarmos da discussão anterior acerca da desimplicação, veremos que o conectivo poderia ser dado por dois naipes diferentes de regras, que só se mostravam equivalentes no âmbito da lógica clássica. Vimos que Bowen havia definido esse conectivo empregando a regra de introdução do segundo naipe e regra de eliminação do primeiro naipe:

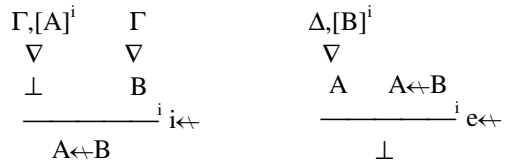


Figura IV-6[206]

Há boas razões para desconfiar da harmonia das regras de Bowen. Embora seja possível mostrar que, numa situação em que tenhamos uma dedução da *pM* da $e\leftrightarrow$, tal que o último passo dessa dedução seja uma $i\leftrightarrow$, como na derivação à esquerda abaixo, haverá uma dedução que pode ser extraída das deduções que permitiam concluir a *pM* da $e\leftrightarrow$, como na derivação à direita, abaixo:

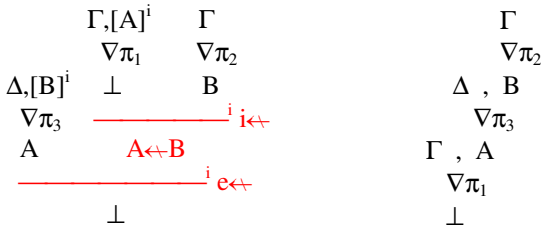


Figura IV-7

De forma imediata, parece que o princípio de inversão para as regras de Bowen é válido, embora seja questionável que exista harmonia entre as regras. Basicamente, o problema está em que há uma única condição para introduzir a desimplicação, ou seja, há uma única regra de introdução cujas condições de introdução da constante requerem uma dedução de *B*. Porém, a partir da regra $e\leftrightarrow$ não será mais possível recuperar a dedução de *B*.

A formulação do princípio de harmonia para esse caso equivaleria à formulação de duas cláusulas, conforme a exposição que fazemos no Apêndice. A primeira seria como a seguir, onde Γ e Θ são listas de fórmulas e o símbolo $\Rightarrow$ está sendo utilizado como um condicional metalingüístico (note também que estamos quantificando sobre listas de fórmulas):

princípio. Aliás, ele só usa a palavra *dedução* quando descreve as condições sob as quais podemos introduzir uma constante lógica [Pra65], pág. 32.

[206] Dessa vez, estamos usando o absurdo para definir as regras, ao invés dos parâmetros proposicionais.

$\{\forall\Gamma((\Gamma,A\Vdash\bot \text{ e } \Gamma\Vdash B) \Rightarrow \Gamma,\Theta\Vdash C)\}$ *(1*)*

$\Rightarrow$

$\{A\leftrightarrow B,\Theta\Vdash C\}$ *(1**)*

Todavia, será impossível fazer a demonstração de *(1*)* para *(1**)*, pois está faltando algo ao conjunto de regras de eliminação oferecido por Bowen. Faltaria uma regra que nos desse $A\leftrightarrow B\Vdash B$. A regra de eliminação de Bowen só nos dá $A\leftrightarrow B,A\Vdash\bot$. Se tivéssemos as duas relações de conseqüência, dado que da suposição de *(1*)* obtemos por instanciação universal $(A\leftrightarrow B,A\Vdash\bot \text{ e } A\leftrightarrow B\Vdash B) \Rightarrow A\leftrightarrow B,\Theta\Vdash C$, então, por *modus ponens*, obteríamos *(1**)*. Faltaria assim a outra parte da condição. Já a segunda cláusula é como a seguir e pode ser demonstrada conforme a Figura IV-7 (basta usar Θ no lugar de Δ), como era de se esperar:

$\{\Theta,B\Vdash A\}$ *(2*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma(\Gamma,A\Vdash\bot \text{ e } \Gamma\Vdash B \Rightarrow \Gamma,\Theta\Vdash\bot)\}$ *(2**)*

Ou seja, ao que parece valeria o princípio de inversão para a definição de Bowen, segundo a implicação *(2*)*$\Rightarrow$*(2**)*, mas não valeria o princípio de harmonia completo, pois a regra de eliminação é "subgeradora". Reparamos que o princípio de inversão pôde ser validado porque usamos a derivação $\Gamma\Vdash B$, conforme a Figura IV-7.

2.1. Observação acerca da Validade das Regras de Introdução-Eliminação

Como vimos no primeiro capítulo, alguns intuicionistas naturais acreditam que as eliminações são uma forma secundária, não-canônica, de construir provas. Eles consideram que o problema da validade das regras de dedução reduz-se ao problema da validade das regras de introdução, pois a validade das regras de eliminação dependeria das de introdução, pelo princípio de inversão. As introduções seriam as formas válidas elementares, as formas diretas para a construção de provas. As eliminações seriam apenas formas indiretas.

Como não estamos adotando esse ponto de vista, o problema da validade das regras de introdução e eliminação não se coloca, para nós, desse mesmo modo. Delas requereremos coerência e harmonia para o binômio de regras. De nossa perspectiva, com essas regras estaríamos procurando capturar elucidatoriamente um certo uso intuitivo da argumentação lógica, sobretudo no âmbito da matemática. Adicionalmente, essa elucidação estaria orientada por um

certo princípio, o de que o núcleo duro do comportamento lógico de uma constante lógica deve poder ser dado em termos de regras que nos digam quando a constante seria bem-empregada (introduções) e que conseqüências se seguiriam do seu emprego (eliminações).

Como vimos, no caso da lógica clássica, as regras de dedução indireta escapam a essa dicotomia ou, pelo menos, quando tentamos mantê-la, as regras deixam de ser independentes[207]. Assim, o problema da validade das regras é relevante e historicamente tem sido considerado assim.

Queremos fazer um exame da forma pela qual atuariam os princípios de dedução indireta. Eles não podem ser classificados como regras de introdução, nem como regras de eliminação. Isso requer que façamos um exame do arcabouço teórico sob o qual os sistemas de dedução natural deveriam ser pensados na medida em que queremos elucidar a lógica clássica. Mas, antes de fazê-lo, consideraremos os rodeios envolvendo regras de introdução e de eliminação.

3. Rodeios

3.1. Pares Operacionais Imediatos

No quadro abaixo, são definidos os **Pares Operacionais Imediatos $\langle r^{I}, r^{II} \rangle$** (***POIs***). No quadro à esquerda, está o esquema da derivação que contém o rodeio, sendo r^{I} a instância de eliminação e r^{II} a instância de introdução, ambas em vermelho. No quadro à direita, está o esquema da derivação resultante da eliminação desse rodeio. Ao lado das ocorrências descartadas, a letra *n* indica quantas ocorrências topo estão sendo descartadas, lembrando que $n>0$. As equações que acompanham cada operação indicam o tamanho da derivação original e o tamanho da derivação resultante, respectivamente:

[207] Ver o Apêndice para a noção de independência.

		Derivação onde nenhuma ocorrência topo é descartada com índice *i* na subderivação subsidiária π_3		Resultado da Eliminação do Par	
Pares Não-Multiplicativos	Par Imediato de Conjunção	$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_6 \quad \nabla\pi_7}{A_1 \quad A_2}\,i\wedge}{\dfrac{A_1\wedge A_2}{A_{1\|2\|}}\,e\wedge e\|d\|}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_6\rvert+\lvert\pi_7\rvert+\lvert\pi_5\rvert+1$	$\pi^{l}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{6\|7\|}}{A_{1\|2\|}}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi^{l}\rvert=\lvert\pi_{6\|7\|}\rvert+\lvert\pi_5\rvert-1$
	Par Imediato de Universal	$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_7}{A}\,i\forall}{\dfrac{\forall xA[a/x]}{A[a/t]}\,e\forall}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_7\rvert+\lvert\pi_5\rvert+1$	$\pi^{l}\equiv \dfrac{\nabla\pi_7[a/t]}{A[a/t]}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi^{l}\rvert=\lvert\pi_7\rvert+\lvert\pi_5\rvert-1$
	Par Imediato de Condicional	$\pi\equiv \dfrac{\nabla\pi_2 \quad \dfrac{\nabla\pi_3}{D}\,^{i}\,i\rightarrow}{B \qquad B\rightarrow D}\,e\rightarrow\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_3\rvert+\lvert\pi_2\rvert+\lvert\pi_5\rvert+1$	$\pi^{l}\equiv \dfrac{\nabla\pi_3}{D}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi^{l}\rvert=\lvert\pi_3\rvert+\lvert\pi_5\rvert-1$
	Pares Imediatos de Disjunção	$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_7}{A_1}\,i\vee e \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4}{A_1\vee A_2 \qquad C \qquad C}\,^{i}\,e\vee\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_7\rvert+\lvert\pi_3\rvert+\lvert\pi_4\rvert+\lvert\pi_5\rvert+1$	$\pi^{l}\equiv \dfrac{\nabla\pi_3}{C}\ \nabla\pi_5$	$\lvert\pi^{l}\rvert=\lvert\pi_3\rvert+\lvert\pi_5\rvert-1$
		$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_7}{A_2}\,i\vee d \quad \nabla\pi_4 \quad \nabla\pi_3}{A_1\vee A_2 \qquad C \qquad C}\,^{i}\,e\vee\ \nabla\pi_5$			

		Derivação com n>0 ocorrência‖s‖ topo descartada‖s‖ com índice *i*	|π|=|π7|+|π3|+|π5|+1	Resultado da Eliminação do Par	|π'|=|π3|+|π5|-1
Par Não-Multiplicativo	Par Imediato de Existencial	$\nabla\pi_7$ A ——— i∃ $\exists xA[a/x]$; $\nabla\pi_3$ C ; ——— ^{i} e∃ ; C ; $\nabla\pi_5$		$\pi'\equiv$ $\nabla\pi_3$ **C** $\nabla\pi_5$	
Pares Multiplicativos	Par Imediato de Condicional	$[\underline{B}]^{i}{}_{n}$ $\nabla\pi_7$ D ——— ^{i} i→ ; $\nabla\pi_2$ B ; B→D ; ——— e→ ; D ; $\nabla\pi_5$	|π|=|π7|+|π2|+|π5|+1	$\pi'\equiv$ $\nabla\pi_2$ **$\underline{B}_{n}$** $\nabla\pi_7$ **D** $\nabla\pi_5$	|π'|=|π7|+|π5|+n.|π2|-n-1 n≤|π7|
	Par Imediato de Disjunção	$\nabla\pi_7$ A_1 ——— i∨e ; $A_1\vee A_2$; $[\underline{A_1}]^{i}{}_{n}$ $\nabla\pi_3$ C ; $\nabla\pi_4$ C ; ——— ^{i} e∨ ; C ; $\nabla\pi_5$	|π|=|π7|+|π3|+|π4|+|π5|+1	$\pi'\equiv$ $\nabla\pi_7$ **$\underline{A_1}_{\|2\|\ n}$** $\nabla\pi_{3\|4\|}$ **C** $\nabla\pi_5$	|π'|=|π3‖4‖| +|π5|+n.|π7|-n-1 n≤|π3|, ‖n≤|π4|‖
		$\nabla\pi_7$ A_1 ——— i∨d ; $A_1\vee A_2$; $[\underline{A_2}]^{i}{}_{n}$ $\nabla\pi_3$ C ; $\nabla\pi_4$ C ; ——— ^{i} e∨ ; C ; $\nabla\pi_5$			
	Par Imediato de Existencial	$\nabla\pi_7$ A[a/t] ——— i∃ $\exists xA[a/x]$; $[\underline{A}]^{i}{}_{n}$ $\nabla\pi_3$ C ; ——— ^{i} e∃ ; C ; $\nabla\pi_5$	|π|=|π7|+|π3|+|π5|+1	$\pi'\equiv$ $\nabla\pi_7$ **$\underline{A}\,[a/t]_{n}$** $\nabla\pi_3$[a/t] **C** $\nabla\pi_5$	|π'|=|π3| +|π5|+n.|π7|-n-1 n≤|π4|

Figura IV-8

Os *POIs* tomam uma das formas acima e as operações sobre eles mostram como o princípio de inversão é aplicável em cada caso. Os *POIs* estão divididos em dois grupos: o dos **pares não-multiplicativos** e o dos **pares multiplicativos**. Essa distinção será discutida mais

adiante. Em qualquer caso, sejam multiplicativos ou não, as subderivações π_3 e π_4 que ocorrem nos *POIs* de disjunção e existencial podem conter ou não ocorrência⟦s⟧ topo descartada⟦s⟧ pela regra.

Usualmente, a literatura destaca como elemento mais relevante nas situações de rodeio aquela ocorrência de fórmula que é conclusão da regra de introdução e *pM* da regra de eliminação, ou seja, a **fórmula máxima** (as fórmulas máximas são as únicas ocorrências de fórmula que estão destacadas em vermelho acima). Na forma tradicional de apresentação das operações de eliminação de rodeio, somente são passíveis de remoção as fórmulas que constituem certos máximos locais, em termos de valor da fórmula. Essa remoção acarreta também a remoção das respectivas instâncias de regras, que, desde esse ponto de vista, são, em geral, mantidas em um plano secundário. Em nosso caso, poremos um pouco mais de relevo nas instâncias de regras que constituem o rodeio, embora não possamos restringir nossas considerações unicamente a elas, pois as fórmulas máximas serão necessárias para, pelo menos, estabelecermos distintos níveis de complexidade para os rodeios.

Destacamos em azul algumas ocorrências nas derivações resultantes de uma operação de eliminação de rodeios para indicar que aquelas fórmulas podem se tornar novas fórmulas máximas. Doravante, sempre que formos definir uma operação de eliminação de rodeios, as ocorrências em azul na derivação indicarão o local em que podem surgir novos rodeios. Por outro lado, a subderivação que estiver marcada em verde poderá vir a conter um novo tipo de rodeio especial antes inexistente e que definiremos mais adiante, neste capítulo.

Finalmente, os *POIs* ocorrem nos sistemas que contêm os sistemas minimais.

3.1.1. Observação sobre o Descarte de Suposições

Tomando por base as duas derivações π e π' no par imediato multiplicativo da implicação, observamos que todas as fórmulas topo da subderivação π_2 que sejam descartadas por uma instância em π_2 continuarão a sê-lo nas cópias de π_2 dentro de π'. Naturalmente, uma ocorrência topo de uma das cópias de π_2 será descartada pela mesma instância dentro da mesma cópia de π_2. Isso requer que novos índices sejam usados nas cópias de π_2, para evitar confusão de índices. As ocorrências topo de π_2 descartadas fora de π_2, ou seja, em π_5, continuarão a ser descartadas nas várias cópias de π_2 pela mesma instância em π_5. Finalmente, ocorrências topo de π_2 que não eram descartadas continuarão assim em todas as cópias de π_2. Observação similar vale para todas as outras operações ditas multiplicativas.

3.1.2. Observações acerca dos Parâmetros

A operação efetuada sobre os pares multiplicativos consiste, parcialmente, em fazer uma acoplação de uma subderivação sobre outra subderivação. Ocorre que essa ação pode resultar em estruturas que já não são mais derivações, como no exemplo abaixo, onde *B(a)* representa uma fórmula básica contendo o parâmetro individual *a*:

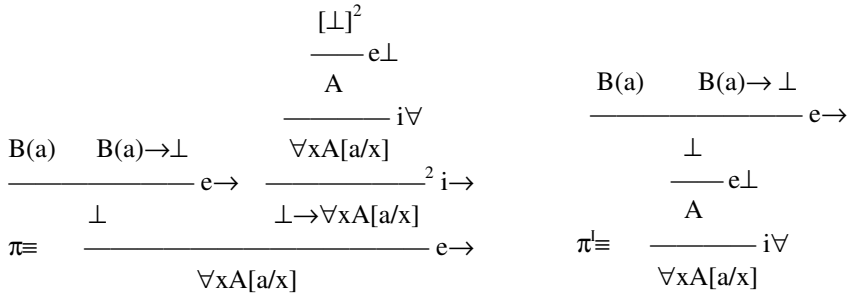


Figura IV-9

A aplicação da regra $i\forall$ em π' é errônea, pois não respeita a restrição sobre o parâmetro *a*. O problema não ocorreria se os parâmetros individuais (próprios) de π fossem puros.[208]

Assim, como requisito à aplicabilidade das operações de eliminação de rodeios sobre as derivações, exige-se que os parâmetros individuais próprios de uma instância de regra em uma derivação sejam todos eles puros. Exatamente a mesma restrição deverá ser aplicada aos parâmetros proposicionais. Os parâmetros proposicionais próprios de uma instância de regra também devem ser puros. A razão para esse requisito adicional aparecerá em breve.

3.2. Par Operacional Imediato para ⊥

Tem sido nossa tese que deve haver uma regra de introdução e uma regra de eliminação para $\perp$ nos sistemas em que esse símbolo será considerado uma constante lógica. De modo correlato, deve haver regras para introdução e eliminação da negação no caso de considerar a negação como constante primitiva. Deveriam aceitar essa tese aqueles que entendem ser a análise elucidatória dos sistemas de dedução natural, em termos de regras de introdução e suas respectivas eliminações, a forma fundamental de elucidar o núcleo duro do uso de uma constante lógica. Aceitada a tese, seguir-se-ia a conclusão de que a formulação tradicional do sistema intuicionista na literatura de dedução natural é, desde Gentzen ([Gen35], pág. 77), incompleta em certo sentido. Todavia, como vimos anteriormente, pelo fato de a regra de introdução de $\perp$ ser

---

[208] O conceito de parâmetro puro está definido no Apêndice. Basicamente, um parâmetro próprio de uma $i\forall$ $\|e\exists\|$ será puro se ocorre somente na subderivação da premissa $\|$menor$\|$ imediata dessa $i\forall$ $\|e\exists\|$.

eliminável, toda prática inferencial que possa ser refletida na formulação do sistema $\mathcal{I}$ também estará refletida na formulação tradicional. Em resumo, os sistemas intuicionistas usuais não seriam incompletos no sentido de que haja alguma relação de dedutibilidade que não seja representável no sistema, mas no sentido de que a elucidação deveria estender-se além.

Se $\bot$ for considerada uma constante proposicional, parece-nos, ela deveria ser vista como uma constante lógica, caso contrário o único tipo de sistema lógico puro sem constantes extralógicas que poderíamos formular seria o sistema minimal. Mas, se $\bot$ for efetivamente uma constante lógica, conseqüentemente, deveria haver uma regra de introdução para ela. Não obstante, essa não tem sido a opinião geral. Em Martin-Löf, por exemplo, encontramos a seguinte passagem ([Mar96], III[a] conferência):

> *Uma introdução é uma inferência na qual você conclui que uma proposição é verdadeira , ou pode ser verificada, com base no fato de que você a verificou. Portanto, $\bot$ sendo definida pela estipulação de que nada conta como uma verificação dela, não há regra de introdução para a falsidade.*[209]

É importante notar que, segundo o autor, $\bot$ é definida pela estipulação de que nada conta como uma verificação dela. Mas o problema está em saber como a estipulação poderia ser integrada a um sistema de dedução natural, pois, afinal, como teríamos certeza de que o símbolo $\bot$ representaria uma proposição absurda dentro do sistema? Qualquer constante nova que viesse a ser admitida na construção das fórmulas, sem que para ela tenhamos dado uma regra de introdução, acabaria sendo tratada sob o mesmo viés. Isso significaria que ela seria uma nova proposição absurda? Por exemplo, se empregássemos o símbolo $\top$ sem apresentar sua respectiva regra de introdução, deveríamos assumi-lo como outro símbolo para o absurdo? Não seria mais sensato manter a distinção entre constantes lógicas e não-lógicas com base na presença ou ausência de regras de introdução e eliminação e, por conseguinte, oferecer regras de introdução para todas as constantes lógicas?

De fato, um princípio que norteia a elaboração dos sistemas em dedução natural é o de que o comportamento dedutivo de uma constante é elucidado por meio das regras de introdução e eliminação para a constante. Parece-nos que a proposta de alguns autores, de que a regra de introdução para o absurdo consiste em não ter nenhuma regra de introdução, enfrenta algumas dificuldades enquanto elucidação formal. A razão é simples. Da mesma forma que não há regra de introdução para $\bot$ em $\mathcal{I}$, também não há regra de introdução de $\bot$ no sistema minimal $\mathcal{M}$.

---

[209] An introduction is an inference in which you conclude that a proposition is true, or can be verified, on the ground that you have verified it, that is, that you possess a verification of it. Therefore, $\bot$ being defined by the stipulation that there is nothing that counts as a verification of it, there is no introduction rule for falsehood.

Contudo, usualmente, consideraríamos que $\mathcal{M}$ é distinto de $\mathcal{J}$, pois a regra $e\bot$ não é considerada válida em $\mathcal{M}$, caso contrário os dois sistemas seriam indistinguíveis. Mas, se a ausência de regra servia como justificativa para a validade de $e\bot$ na lógica intuicionista, por que não serviria para $\mathcal{M}$? A única forma que restaria de manter a distinção entre os dois sistemas consistiria em trocar de posição e passar a sustentar que as regras realmente canônicas são as regras de eliminação.

Assim, conjeturamos que é preciso caracterizar a constante $\bot$ por regras formuladas explicitamente, inclusive porque correríamos o risco de perder o sentido da exigência de harmonia entre as regras de introdução e de eliminação, se não o fizéssemos. Do fato de que não deva existir uma verificação da proposição absurda não se segue que não seja possível estabelecer quais seriam as suas condições de verificabilidade. Podemos dar essas condições de duas formas distintas. Verificaríamos a proposição absurda quando pudéssemos verificar uma proposição qualquer. Mas, como uma introdução deveria ser entendida como uma descrição esquemática de como verificar uma proposição, poderíamos dizer que verificaríamos a proposição absurda quando pudéssemos verificar um parâmetro proposicional, o que será factualmente impossível, sempre que o sistema for não-trivial.

Aliás, como a regra de $i\bot$ requer que a premissa imediata seja básica e, além disso, a conclusão $\bot$ tem valor *1*,[210] poderíamos dizer que essa regra descreve como provar canonicamente o absurdo! Para provar canonicamente o absurdo, bastaria ter uma prova de um parâmetro proposicional, ou seja, bastaria ter um esquema de prova que permitisse a prova de qualquer proposição básica. Que tal prova não exista é algo que desejamos, na medida em que desejamos que nossos sistemas sejam consistentes, mas isso não significa que não possamos falar dela de modo hipotético, sem estarmos preocupados, de antemão, em saber se ela existe ou deixa de existir. O desejável é que não precisássemos tomar decisões ontológicas acerca das provas se pudéssemos nos limitar somente a considerá-las de forma hipotética.

Havendo uma regra de introdução de $\bot$, haverá um novo tipo de rodeio. O último *POI* será o **Par Operacional Imediato de $\bot$ $\langle r^{I},r^{II}\rangle$**, cuja forma é como abaixo, onde Γ é o conjunto de suposições abertas de π e a ocorrência em vermelho é uma **fórmula máxima**:

[210] Ver o Apêndice.

Pares Não-Multiplicativos	Par Operacional Imediato de $\perp$	Derivação		Resultado da Eliminação do Par	
		$\pi\equiv$ Γ $\nabla\pi_7$ F — i$\perp$ $\perp$ — e$\perp$ D $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_7\rvert+2$	$\pi^{\prime}\equiv$ Γ $\nabla\pi_7$ [F/D] **D** $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi^{\prime}\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_7\rvert$

Figura IV-10

A operação envolvendo $e\perp$ acima se justificaria se a premissa imediata F da regra $i\perp$ fosse um parâmetro proposicional. A substituição efetuada na subderivação π_7 da derivação π' só faria sentido para parâmetros proposicionais. Acerca dessa substituição, há uma restrição que deverá ser observada: só as ocorrências abertas de F na subderivação[211] π_7 poderiam ser substituídas pela fórmula D. No entanto, como estamos pedindo que os parâmetros proposicionais sejam puros em π, isso garantiria que todas as ocorrências de F em π_7 seriam abertas. Notamos que a ocorrência D conclusão da subderivação π_7 dentro de π', sendo de valor zero, não poderá tornar-se uma nova fórmula máxima.

Caso tivéssemos definido os sistemas usando a regra $E\perp$, a eliminação do rodeio poderia alterar o valor das ocorrências de fórmula na subderivação π_7. Além desse problema, poderia ocorrer um outro, relativo à eliminação do rodeio em uma derivação que contenha pelo menos uma instância de regra de absurdo básico (*abs*):

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ 0=1\\ \hline A\end{array}\ \text{abs}}{\begin{array}{c}\perp\\ \hline 1=1\wedge 2=2\end{array}\ \text{E}\perp}\ \text{i}\perp \qquad\qquad \pi^{\prime}\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ 0=1\end{array}}{1=1\wedge 2=2}\ ???$$

Figura IV-11

A regra de absurdo básico, após a eliminação do rodeio, passaria a ser usada de uma forma para a qual ela não havia sido validada anteriormente, pois sua conclusão seria de valor maior que zero.

Como já dissemos, a literatura de dedução natural não trata dos rodeios que são *POI* de $\perp$,

---

[211] Observamos que ocorrências abertas do parâmetro podem estar em qualquer parte da subderivação, não só no topo. Não serão abertas aquelas ocorrências que, porventura, sejam fechadas por outra aplicação de $i\perp$ dentro da subderivação.

pois, em geral, o ponto focal está sobre as ocorrências de fórmulas máximas. A proposição $\bot$ é considerada atômica e, sob essa perspectiva, seria estranho considerá-la um máximo local. Quando são focadas as instâncias de regra, a situação muda. O absurdo pode se tornar um máximo local e, dessa forma, seria legitimamente um símbolo lógico, quando entendemos que os símbolos lógicos são elucidados por meio de regras de introdução e eliminação. Por isso, em nossa tese, $v(\bot)=1$, o que, confessadamente, foi motivado pelas observações que acabamos de fazer. Aliás, por isso também temos feito questão de dizer que as fórmulas que não contêm constantes lógicas são fórmulas de valor zero ou básicas, quando o mais usual é dizer que elas são atômicas.

Embora estejamos propondo que uma regra de introdução para $\bot$ deva ser acrescentada à formulação dos sistemas intuicionista e clássico, não significa que aquelas formulações em que essa regra não esteja presente sejam incompletas, do ponto de vista da dedutibilidade. De fato não são incompletas, cf. o Teorema III-1, do capítulo anterior. Porém, isso não demonstra que a regra $i\bot$ é inútil ou que ela é derivável. Mostra unicamente que a introdução dessa regra naquele sistema não afeta o conceito de derivabilidade que lhe é inerente.

Com respeito à regra $e\bot$, observamos que ela compartilha, com as regras de eliminação da conjunção, da implicação e do universal, a característica de permitir re-estabelecer perfeitamente o contexto de introdução, ou seja, o suposto *definiens*. Só mesmo a eliminação da disjunção e do existencial não tem essa propriedade. Por mais essa razão, o sistema $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$ é extremamente interessante, pois nele poderíamos empregar uma versão do princípio de harmonia mais forte que aquela que formulamos para os sistemas que contenham regras para a disjunção e o existencial, conforme nossa discussão anterior.

Finalmente, se nossos sistemas tivessem sido formulados com regras de introdução da negação e eliminação da negação, conforme sugerido no Capítulo I, haveria um *POI* para a negação. Esse *POI* equivaleria a embutir um *POI* de $\rightarrow$ dentro de um par operacional de $\bot$. Como não estamos particularmente interessados em desenvolver o maquinário envolvendo a negação como constante primitiva, nos dispensaremos de apresentar maiores detalhes.

3.2.1. O Princípio de Inversão e a Falta de Regra de Introdução de Absurdo

Voltemos ao problema de definir e analisar o absurdo por meio de regra nenhuma. Já vimos que, para Martin-Löf, não há regra para introdução de absurdo. Do mesmo modo, para Negri & Von Plato, uma regra de introdução de absurdo é impossível. Nos dois casos, os autores usam o princípio de inversão para justificar a validade da regra $e\bot$. Por apresentar um enunciado

sucinto, vamos ver como Negri & Von Plato entendem o **princípio de inversão** ([Neg01], pág. 6):

> **Princípio de Inversão:** *Qualquer coisa que se siga das bases diretas para derivar uma proposição deve seguir-se daquela proposição.*[212]

Parece-nos que a forma de enunciação do princípio contém uma pequena imprecisão na formulação. Cremos que seria mais claro dizer: *qualquer coisa que se segue, ao mesmo tempo, de cada uma das bases diretas para derivar uma proposição deve seguir-se dessa proposição*. No caso da disjunção, tanto uma prova de A quanto uma prova de B seriam autonomamente bases diretas para provar $A \vee B$. No primeiro caso, A se segue das bases diretas e, no segundo caso, B se segue das bases diretas. Embora cada um desses casos ofereça uma base direta para obter $A \vee B$, não podemos concluir A (e nem B) a partir da proposição $A \vee B$. A razão é simples: não está garantido que A (ou B) se siga de cada uma das bases diretas a partir das quais provamos $A \vee B$.

A formulação de Prawitz não sofre desse mal. Todavia, temos dúvidas acerca da identidade entre os dois modos de formular o princípio. Um dos problemas está em interpretar o significado da palavra "deve" na enunciação de Negri & Von Plato. Considerando o caso específico do absurdo, ambas formulações teriam alguma similaridade se a expressão *deve* (*must*) na formulação de Negri & Von Plato fosse a expressão de uma condição necessária: *C se segue de $\bot$ unicamente se C se segue de cada uma das bases diretas*. Nesse caso, a implicação vai da esquerda para a direita: *C se segue de $\bot \rightarrow C$ se segue de cada umas das bases diretas para derivar $\bot$*. Mas é bastante duvidoso que essa seja a forma pela qual os autores queriam que a expressão fosse interpretada[213].

Levando em conta que a definição do absurdo para Negri & Von Plato consiste em dizer que uma prova direta da proposição é impossível, vamos ver a seguir como eles justificam a regra de eliminação correspondente ([Neg01], pág. 8):

> *Finalmente nós temos a conectivo de zero lugares $\bot$ que não tem regra de introdução. As bases imediatas para derivar $\bot$ são vazias e nós obtemos como um caso limite do princípio de inversão a regra para* **eliminação da falsidade** *...*[214]

Examinemos mais de perto a idéia de caso limite. Na verdade, nos opusemos a essa definição e queremos agora dar forma final ao nosso argumento de rejeição.

---

[212] **Inversion Principle:** *Whatever follows from the direct grounds for deriving a proposition must follow from that proposition.*

[213] Visto que não poderiam justificar a validade da regra de eliminação da forma como o fazem, conforme nossa exposição a seguir.

[214] *Finally we have the zero-place connective $\bot$ that has no introduction rule. The immediate grounds for deriving $\bot$ are empty and we obtain as a limiting case of the inversion principle the rule of* **falsity elimination** *...*

Do nosso ponto de vista, para que Negri & Von Plato obtenham a conclusão que qualquer coisa se segue do absurdo, o significado do princípio de inversão na forma enunciada por eles deveria poder ser explicitado do seguinte modo: *(i) toda proposição que é conseqüência de cada uma das bases diretas para derivar ⊥ é uma proposição que é conseqüência de ⊥.* Essa forma *(i)* é, com toda certeza, um enunciado categórico aristotélico universal afirmativo. Ora, segundo a lógica contemporânea, esses enunciados são vacuamente verdadeiros quando a extensão do termo sujeito da proposição é vazia. Assim, como de fato não existiria nenhuma base que permita provar ⊥ (segundo a definição dos intuicionistas), a extensão do termo sujeito - "*proposição que é conseqüência de cada uma das bases diretas para derivar ⊥*" - deveria ser vazia. Em conseqüência, o enunciado *(i)* seria verdadeiro. Ou seja, sob a interpretação contemporânea dos enunciados categóricos, para qualquer extensão que queiramos atribuir ao termo predicado - "*proposição que é conseqüência de ⊥*" -, a proposição categórica seria verdadeira. Em particular, o enunciado *(i)* seria verdadeiro, caso viéssemos a assumir que a extensão do termo predicado é idêntica ao conjunto de todas as proposições (como também seria verdadeiro caso viéssemos a assumir que a extensão do termo predicado é vazia).

Porém, do nosso ponto de vista, se formulássemos o princípio de inversão usando adequadamente o subjuntivo, aqueles autores já não teriam como extrair tão facilmente as conclusões que tiraram. Suponhamos que tivéssemos formulado o princípio da seguinte forma: *(ii) toda proposição que <u>for</u> conseqüência de cada uma das bases diretas para derivar ⊥ será uma proposição conseqüência de ⊥.* A nosso ver, nesse caso, algo importante teria acontecido.

Ao ler *(ii)*, intuitivamente pensaríamos que é absurdo pretender que qualquer proposição será conseqüência da proposição ⊥, pois já sabemos que nenhuma proposição poderia ser conseqüência das "*bases diretas que provam ⊥*", na medida em que, justamente, ⊥ não tem bases diretas das quais aquela conseqüência poderia ser derivada. Quando o princípio é formulado na forma *(ii)*, não há espaço para uma interpretação como aquela que foi aplicada sobre a forma *(i)*. Ao que parece, sob a forma *(ii)*, temos, na verdade, uma regra operacional que simplesmente estabeleceria sob que condições poderíamos responder afirmativamente a pergunta de quando uma proposição é conseqüência de ⊥. Como, por definição, nenhuma delas seria conseqüência das bases diretas para derivar ⊥, mesmo porque tais bases não existiriam, usando o enunciado *(ii)* como procedimento de decisão, não conseguiríamos determinar positivamente para nenhuma proposição que ela seja uma das conseqüências de ⊥.

Parece-nos que Tennant ([Ten99], págs. 215-216) tem uma intuição interessante acerca de qual é o problema envolvido na interpretação "caso-limite". Na forma como o princípio de

inversão está sendo usado em *(i)*, estaríamos fazendo uso metalingüístico de um princípio da mesma potência do *ex falso quodlibet*, se estivéssemos tentando mostrar que o princípio de inversão é verdadeiro para a regra de eliminação do absurdo.

Vamos por partes. Em primeiro lugar, sabemos que as sentenças categóricas universais afirmativas da lógica aristotélica são interpretadas, desde o ponto de vista da lógica contemporânea, por meio da implicação: $\forall x(A \rightarrow B)[a/x]$, onde as fórmulas A e B representariam o termo sujeito e o termo predicado, respectivamente, desde que o parâmetro individual a ocorresse nessas fórmulas. Em segundo lugar, a justificativa para considerar essas sentenças categóricas universais afirmativas como vacuamente verdadeiras, quando o termo sujeito é vazio, consiste em notar que o antecedente da implicação será sempre falso quando a extensão do conceito empregado como termo sujeito for vazio, ou seja, $A[a/c]$ é sempre falso para qualquer constante individual c. Em terceiro lugar, da forma como usualmente é compreendida a interpretação BHK da implicação, a condição para que $A \rightarrow B$ seja provada é a de que tenhamos um procedimento para transformar uma prova de A em uma prova de B. Mas, se o antecedente A for sempre falso, a garantia de poder transformar uma prova do antecedente A (que não existe) na prova de B parece ser, justamente, um princípio que não tem menos força do que o princípio de *ex falso quodlibet*, mesmo que alguns construtivistas considerem-no um princípio embutido na interpretação da implicação[215].

Se nosso argumento é correto, então seria a própria forma interpretativa dos enunciados categóricos que estaria validando o uso do princípio de *ex falso quodlibet*. Ou seja, a interpretação *(i)* acima estaria validando o *ex falso quodlibet* apelando para o *ex falso quodlibet*! Também há que notar que, ao apresentar as condições BHK ou ao apresentar as bases imediatas para a prova direta de uma proposição, os intuicionistas naturais pretendem fazer uma elucidação geral da noção de prova sem empregar distinções de níveis lingüísticos. Desse modo, parece-nos, nenhum intuicionista poderia contra-argumentar apelando à distinção linguagem-metalinguagem para embasar uma justificativa circular. Mesmo porque, se essa distinção fosse feita e se fosse possível usar, na metalinguagem, o princípio que bem entendêssemos, para posteriormente validá-lo na linguagem, não vemos por que o mesmo não poderia ser feito com os princípios de dedução indireta como *consequentia mirabilis*.

Segundo nossa proposta de elucidação, validaríamos a regra $e\bot$ e, por conseguinte, o princípio de *ex falso quodlibet*, amparados pelo princípio de harmonia que apresentamos mais

[215] Lembramos que nós havíamos anteriormente rejeitado a inclusão desse princípio na interpretação da implicação.

acima, e isso sem fazer nenhum uso de um "meta" *ex falso* ⟦*impossibile*⟧ *quodlibet*. Aliás, admitindo a validade irrestrita do "meta" *ex quodlibet*, qualquer construção poderia ser considerada uma prova do absurdo, quando o absurdo for caracterizado pela regra $i\bot$. Parece-nos que essa pode ter sido a razão pela qual muitos autores não cogitaram de oferecer regra de introdução para $\bot$. A partir da regra de introdução de $\bot$, teríamos uma prova direta de $\bot$ se tivéssemos uma prova direta de um parâmetro proposicional. Mas, admitindo que não pode haver prova de um parâmetro proposicional (a menos que o sistema seja inconsistente), qualquer construção provaria $\bot$, se assumirmos a validade do princípio *ex impossibile quodlibet*. Há aqui um claro absurdo e, justamente, o problema está em usar esse princípio "meta". Para nós, sua validade deve ser questionada e, melhor ainda, ele pode ser abandonado, pois não precisamos dele para validar o *ex falso quodlibet* associado à regra $e\bot$.

Notamos, finalmente, que o princípio de inversão na formulação de Prawitz é válido para as regras de introdução e eliminação do absurdo que estamos propondo, conforme a Figura IV-10.

3.2.2. O Princípio de Harmonia para o Absurdo

A formulação do princípio de harmonia para o absurdo é feita em duas partes, como a seguir, em consonância com a exposição do Apêndice:

Caso C seja uma Fórmula Básica $\Rightarrow$

$\{\{ \forall\Gamma((\Gamma \Vdash A \text{ e } A \notin \Gamma \text{ e } A \text{ é Parâmetro Proposicional}) \Rightarrow \Gamma \Vdash C)\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\bot \Vdash C\}\}$ *(**)*

A demonstração da cláusula acima é feita como a seguir. Suponhamos que *C* seja uma fórmula básica, a demonstração prossegue assim: *(a)* suponha que *(*)*; *(b)* por instanciação do universal, obtemos $(\bot \Vdash A \text{ e } A \notin \bot \text{ e } A \text{ é P.Prop.}) \Rightarrow \bot \Vdash C$; *(c)* mas, por $e\bot$, temos $\bot \Vdash B$ para qualquer fórmula básica *B* e, em particular, $\bot \Vdash A$; *(d)* logo $\bot \Vdash C$, por *b* e *c*. Portanto, obtivemos *(**)*. *QED*. A outra metade do princípio de harmonia é formulado da seguinte forma:

caso C seja Fórmula Básica

$\Rightarrow$

$\{\{ \forall\Gamma((\Gamma \Vdash A \text{ e } A \notin \Gamma \text{ e } A \text{ é P.Prop.}) \Rightarrow \Gamma \Vdash C)\}$ *(**)*

A demonstração dessa cláusula está dada no quadro à direita da Figura IV-10. Notamos que não há condições especiais para aplicar a regra de eliminação.

3.2.3. A Regra de Eliminação do Absurdo e o Princípio de Inversão

No primeiro capítulo, examinamos a regra $E\bot$ que, diferentemente de $e\bot$, admite qualquer conclusão. Todavia, o emprego da regra apresenta um problema já apontado: qualquer eliminação de rodeio poderia desfigurar uma instância de regra básica, conforme a Figura IV-11. Por outro lado, o uso dessa regra nos permitiria fazer uso da livre substitutibilidade dos parâmetros predicacionais e, em conseqüência, as derivações e os teoremas voltariam a poder integralmente ser considerados de forma esquemática.

Para tentar evitar o problema e, ao mesmo tempo, garantir que a conclusão da regra possa ter um valor qualquer, poderíamos formular a regra do seguinte modo, onde $B_1,...,B_n$ são fórmulas básicas e C é uma fórmula qualquer[216]:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,[B_1]^i,...,\,[B_n]^i}{\vdots\ \nabla}}{\dfrac{\bot \qquad C}{C}\,i}\ e\bot 2^a$$

Figura IV-12

A existência da derivação subsidiária na regra acima não faria muito sentido se admitíssemos que as hipóteses descartadas pudessem ter qualquer valor, pois sempre poderíamos empregar a seguinte forma:

$$\dfrac{\bot \qquad [C]^i}{C}\,i$$

Figura IV-13

Porém, nesse caso, acabaríamos novamente por nos deparar com um problema similar ao ilustrado na Figura IV-11.

A regra $e\bot 2^{\underline{a}}$ é interderivável com a regra $e\bot$ restrita às conclusões de valor zero, segundo os seguintes esquemas, supondo que $B,B_1,...,B_n$ são fórmulas de valor zero:

---

[216] Algo similar também deveria ser feito para a regra *abs* da aritmética.

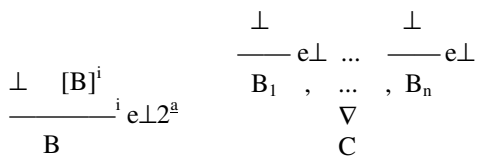


Figura IV-14

É justamente por causa dessa interderivabilidade que preferimos adotar, nesta tese, a regra $e\bot$ na versão restrita às conclusões de valor zero, pois, nessa forma, ela é mais concisa e nos permite simplificar as demonstrações, embora acreditemos que a regra $e\bot 2^{\underline{a}}$ seja uma elucidação melhor.

Havíamos observado outro problema relativo à regra de eliminação do absurdo no capitulo anterior. Ele dizia respeito à generalidade das demonstrações lógicas. Usualmente, consideramos que toda instância de um esquema de teorema é também um teorema e todas as instâncias devem poder ser demonstradas com uma prova de estrutura similar. No máximo, haveria uma variação simples dada pela substituição de parâmetros. Consideremos o seguinte exemplo:

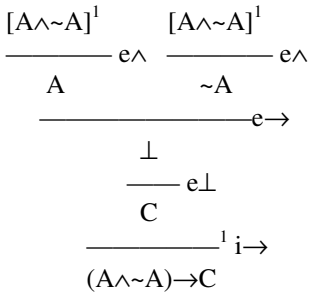


Figura IV-15

Por meio desse esquema, demonstramos que $(A\wedge\sim A)\rightarrow C$. Mas, se C fosse um parâmetro proposicional, gostaríamos em princípio de poder substituir qualquer fórmula F no lugar de C. Por exemplo, gostaríamos de poder substituir a fórmula $B\wedge\sim B$. Todavia, essa substituição sobre a derivação acima resultaria numa derivação incorreta, caso assumíssemos a regra na versão $e\bot$.

Adotando a regra $e\bot 2^{\underline{a}}$, o problema apresentado estaria mitigado, caso garantíssemos a existência de uma derivação a partir de proposições básicas para qualquer fórmula F (por exemplo, $B\wedge\sim B$) que venha a ser substituída no lugar do parâmetro proposicional C e, assim, poderíamos readmitir a livre substitutibilidade dos parâmetros predicacionais em nossos sistemas lógicos:

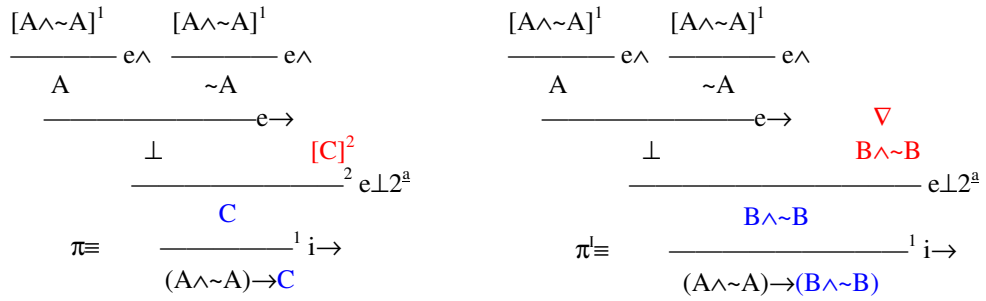


Figura IV-16

Com efeito, será possível construir a derivação de uma fórmula *F* qualquer a partir de fórmulas básicas. Suponhamos que a fórmula *F* seja substituída no lugar do parâmetro *C* em uma derivação como aquela à esquerda abaixo e suponhamos que *C* não ocorre em π_1:

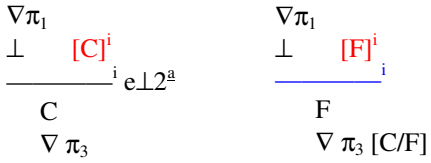


Figura IV-17

Se a fórmula *F* não for básica, ela não poderia ser descartada pela regra e assim deveríamos aplicar o procedimento a seguir até que as fórmulas a serem descartadas sejam todas elas fórmulas básicas. Dependendo da complexidade de *F*, construiremos passo a passo uma derivação para *F*. Teríamos os seguintes casos, conforme a estrutura de *F* (suponhamos, adicionalmente, que *e* é um parâmetro individual que não ocorre em π_1):

F≡G∧H	F≡G∨H	F≡G→H	F≡⊥	F≡∀xG[g/x]	F≡∀xG[g/x]
[G]i [H]i ∇π1 i∧ ⊥ G∧H i F ∇ π3 [C/F]	[G]i ∇π1 i∨ ⊥ G∨H i F ∇ π3 [C/F]	[H]i ∇π1 i→ ⊥ G→H i F ∇ π3 [C/F]	∇π1 ⊥ [G]j j G ∇π1 i⊥ ⊥ ⊥ F ∇π3 C/F]	∇π1 ⊥ [G]j j G ∇π1 i∀ ⊥ ∀xG[g/x] F ∇ π3 [C/F]	[G]i ∇π1 i∃ ⊥ ∃xG[g/x] i F ∇ π3 [C/F]

Figura IV-18

Reiteraremos a substituição das ocorrências topo *G* e *H* da mesma forma que fizemos com *F*, enquanto qualquer uma das fórmulas topo descartadas não seja de valor zero. Quando tais ocorrências tiverem se tornado de valor zero, o processo estará terminado e as instâncias em azul serão todas $e\bot 2^{\underline{a}}$.

Resumindo, $e\bot 2^{\underline{a}}$ parece ser melhor formulação da regra de eliminação do absurdo. Ela permite manter melhor a generalidade da estrutura das provas de um teorema. Contudo, não adotaremos a regra $e\bot 2^{\underline{a}}$ nesta tese, pela complexidade que ela acarretaria no momento de

considerar a prova de alguns metateoremas. Em termos das propriedades dos constructos elucidatórios, a regra $e\bot 2^{a}$ parece apresentar melhores propriedades que a regra $E\bot$ no que tange a eliminação dos rodeios, pois não desfiguraríamos nenhuma instância extralógica básica. Além disso, com respeito à noção de substitutibilidade dos parâmetros, haveria um claro parentesco entre as derivações, exatamente como no exemplo da Figura IV-16 acima, em que a variação só ocorreria na subderivação em vermelho.

3.3. Pares Permutativos de Eliminações

Gentzen foi um dos primeiros a notar que as demonstrações em que não ocorre nenhum rodeio têm certas propriedades especiais. Por causa de algumas dificuldades inerentes à formalização dos sistemas de dedução natural, o autor apontou originalmente uma dessas propriedades sobre o chamado cálculo de seqüentes. Todavia, Gentzen deixou certas pistas que nos fazem conjecturar que, na verdade, o sistema de seqüentes poderia ter sido projetado a partir de considerações sobre o sistema de dedução natural ([Gen35], págs. 68-69 e 82-83). De todo modo, ampliando e modificando um pouco uma idéia que Prawitz já havia trabalhado ([Pra65], apêndice A), nos capítulos anteriores procuramos mostrar que os sistemas de dedução natural e do cálculo de seqüentes podem ser vistos como duas formas de apresentação de um mesmo objeto: a conseqüência dedutiva. Uma forma que mostra e outra forma que enuncia.

No cálculo de seqüentes, uma demonstração sem rodeios ou, o que é similar, uma demonstração sem uso da regra de corte, tem a propriedade de que toda ocorrência de fórmula nos seqüentes-premissa de uma instância de regra de inferência é subfórmula de uma ocorrência do seqüente-conclusão. Segue-se que, em uma demonstração sem rodeios, todas as ocorrências da demonstração são subfórmula de ocorrências de fórmulas do seqüente final da demonstração. Essa propriedade é chamada de propriedade da subfórmula. Dada a forma como interpretamos o sistema de seqüentes, a propriedade similar correlata em dedução natural consistiria em dizer que as ocorrências de fórmulas de uma derivação devem ser subfórmulas ou das hipóteses ou da conclusão da derivação.

Para que as derivações em dedução natural no sistema intuicionista tenham a propriedade da subfórmula, seria preciso adicionar certas operações de permutação às operações de eliminação de *POIs*. As regras de eliminação da disjunção e do existencial induziriam situações como a seguir:

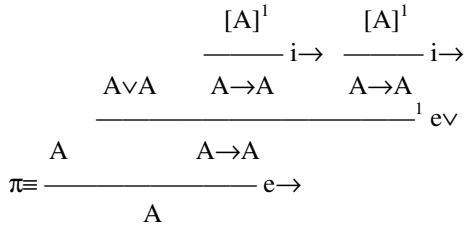


Figura IV-19[217]

Nesses casos, não haveria propriamente rodeio operacional imediato a eliminar, segundo a definição dos *POIs*. Porém, claramente, há uma excursão desnecessária sobre a fórmula $A \rightarrow A$. Além disso, as ocorrências de fórmula da forma $A \rightarrow A$ não são subfórmula nem da conclusão, nem das suposições abertas da derivação. Ou seja, não valeria a propriedade de subfórmula para essa derivação. No entanto, uma permutação das regras de eliminação ofereceria uma solução ao problema:

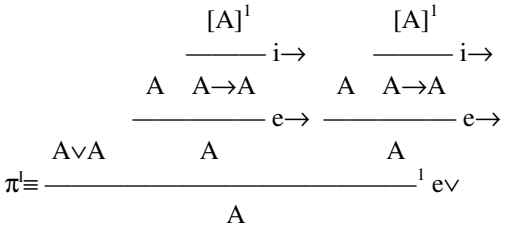


Figura IV-20

A permutação gerou dois novos *POIs* que podem ser agora eliminados. Portanto, esse tipo de troca propicia a futura eliminação de *POIs* e favorece a obtenção do princípio da subfórmula.

Todavia, essas permutações podem ser efetuadas mesmo quando não são imediatamente úteis à preparação da eliminação de um *POI*, como no exemplo abaixo:

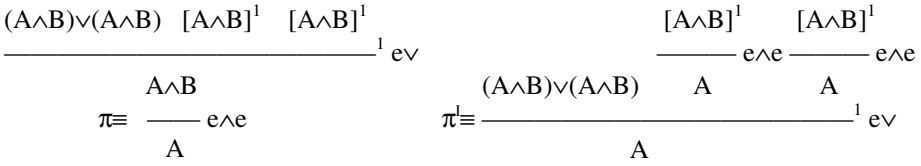


Figura IV-21

Neste trabalho adotaremos como operação de permutação a alternativa liberal, que consiste em admitir as permutações de modo geral, mesmo quando elas não servem propriamente à eliminação imediata de um futuro rodeio. Essa alternativa estaria de acordo com o ponto de vista que adotamos acima, qual seja, o de que as regras de eliminação são interpretadas como a expressão das conseqüências que podem ser extraídas de uma premissa maior. A permutabilidade de duas regras de eliminação quaisquer, em um contexto qualquer, seria simplesmente resultante

[217] O exemplo e a justificativa para a operação de permutação são tomados emprestados de Girard [Gir87], pág. 134.

de um ajuste na conseqüência pretendida. Em termos concretos, a permutação seria admissível e oriunda da forma das regras de eliminação quando as regras de eliminação têm a forma das regras de $e\vee$ ou $e\exists$, sempre que a conclusão imediata dessa regra é *pM* de outra eliminação. Se as regras de eliminação da conjunção, da implicação e do universal fossem formuladas no mesmo estilo, a elas também seriam aplicáveis essas permutações. Na verdade, a permutação equivaleria a admitir uma operação que é conseqüência da seguinte lei envolvendo o conjunto das conseqüências de uma fórmula *A* (*Cq(A)*): *para uma fórmula A, Cq(Cq(A))=Cq(A).* Em particular, se *A* for *pM* de uma eliminação, *C* será conseqüência de *A*, caso *C* seja conseqüência de outras conseqüências de *A*.

Se as formas das regras de eliminação fossem como na Figura IV-3, as permutações permitiriam que as conseqüências lógicas de uma fórmula complexa fossem sempre trazidas para a posição de *pm* de uma regra de eliminação. Como conseqüência, em uma derivação qualquer, em que não ocorressem instâncias de regra de dedução indireta e não existissem permutações nem eliminações de *POIs* a serem efetuadas, todas as *pMs* de regras de eliminação deveriam ser ocorrências topo da derivação.[218]

Para definir a operação de permutação, precisamos do conceito de segmento constante, a ser definido a seguir. O que estaremos chamando de ramo axial[219] é uma seqüência de instâncias lidas de baixo para cima na derivação, tal que as ocorrências de fórmula imediatamente envolvidas mantêm uma relação local fórmula-subfórmula. Os ramos de uma derivação podem ser concebidos de duas formas: como ramos de ocorrências ou como ramos de instâncias de regras.

Definição IV-1 - Diremos que um segmento de ramo axial $\sigma=r_1,...,r_n$, *para* $n\geq 1$, *é um* **segmento constante** *quando:*

(i) todo r_i, *para* $1\leq i\leq n$, *é ou* $e\exists$ *ou* $e\vee$;

(ii) r_{i+1}, *para* $1\leq i<n$, *é im*[220].

Definição IV-2 - Diremos que um segmento de ramo de ocorrências axial $\sigma=A_1,...,A_n$, *para* $n\geq 2$, *é um* **segmento constante de ocorrências** *quando:*

(i) todos os A_i*´s são idênticos, para* $1\leq i\leq n$;

---

[218] Negri & Von Plato também fazem essa observação [Neg01], pág. 9.

[219] Para maiores detalhes, remetemos o leitor ao Apêndice, Definição A - 11 e Definição A - 12. O conceito de ramo axial é similar ao conceito de ramo principal usado em [Pra65].

[220] Doravante, usaremos a expressão *im* para referir uma instância de regra que seja instância menor com respeito a sua antecessora imediata, ou seja, a conclusão é *pm* da instância antecessora. Para maiores detalhes, ver o Apêndice.

(ii) todo A_i, para $1 \leq i < n$, é conclusão de e∃ ou e∨;

(ii) A_n é pm de e∃ ou de e∨, mas não é conclusão nem de e∃ nem de e∨.

No segmento de ocorrências associado ao segmento constante, todas as ocorrências são sintaticamente idênticas e, claro, todos os segmentos constantes são segmentos de ramos axiais. No exemplo abaixo, os ramos axiais em vermelho iniciam na ocorrência marcada com um pequeno círculo e se dirigem às ocorrências topo. Existem dois segmentos de instâncias na derivação, embora existam quatro segmentos de ocorrências tal que cada um está encimado por uma ocorrência topo *C*:

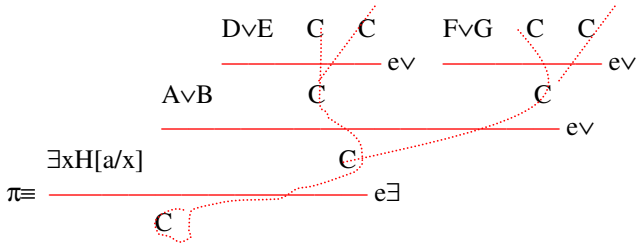


Figura IV-22

Para representar uma derivação com vários segmentos de ramo constantes unindo ocorrências sintaticamente idênticas de uma fórmula *C* qualquer, será usado o seguinte diagrama:

C,...,C
|∇|
C

Figura IV-23

Diagramas similares ao da Figura IV-23 serão usados para representar situações similares à derivação da Figura IV-22. Nesse diagrama, será dado destaque à ocorrência final e a uma multiplicidade de ocorrências topo da forma *C*, todas *pm* de *e∨* ou *e∃*. Com esse artifício, a derivação da Figura IV-19 poderia ser representada da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \to A}\,i\to \quad , \quad \dfrac{[A]^1}{A \to A}\,i\to \qquad |\nabla| \qquad A \to A}{A}\,e\to$$

Figura IV-24

As situações em que podemos efetuar uma permutação e o resultado da respectiva operação de permutação correspondem aos esquemas abaixo, tal que as regras de eliminação estão representadas em sua forma genérica (ver o final do Apêndice):

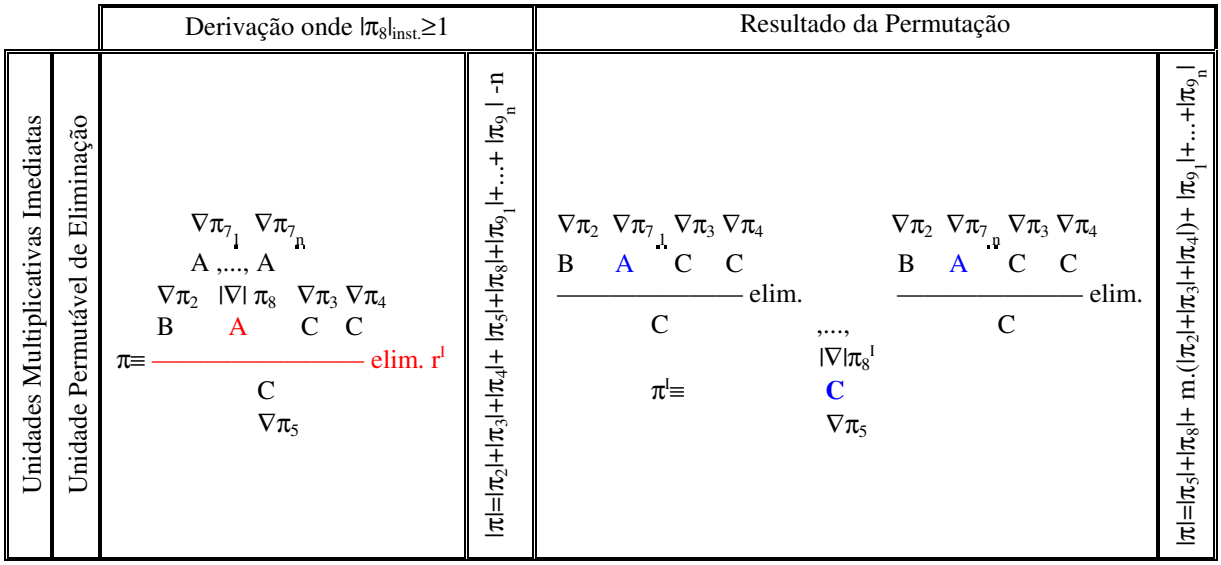


Figura IV-25

Seja r^I a instância de eliminação na figura acima. Diremos que esse tipo de instância é uma **Unidade Permutável de Eliminação** (***UPE***), ela será permutada conforme o esquema de derivação à direita no quadro acima[221]. A premissa imediata *A* da regra de eliminação - aquela destacada em vermelho - será considerada a **fórmula máxima** do *UPE*. Em π_8, existem exatamente $n>0$ segmentos constantes de ocorrências, cuja fórmula constante é *A*, e um número menor ou igual de segmentos constantes de instâncias. A cada um desses segmentos de ocorrências está associada uma subderivação cuja conclusão é *A*: $\pi_{9_1},...,\pi_{9_n}$. Por definição, nenhuma das subderivações tem uma raiz que seja $e\vee$ ou $e\exists$. A operação compreende também a substituição de todas as ocorrências *A* que sejam *pm* de $e\vee$ ou $e\exists$ pela fórmula *C*, dentro dos segmentos constantes de ocorrências. A aplicação da operação requer que todos os parâmetros próprios sejam puros, caso contrário o resultado da operação poderia não ser uma derivação. Os *UPEs* estão definidos para os sistemas minimais e sistemas que os contenham. A permutação sobre o esquema na Figura IV-24 resultaria no esquema abaixo:

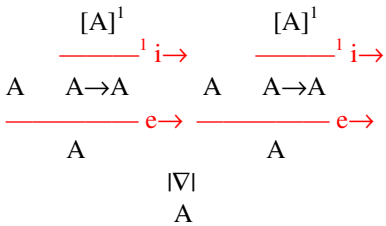


Figura IV-26[222]

[221] Onde foi usada a notação da Figura A - 27 do Apêndice.
[222] Ela representa a derivação da Figura IV-20.

3.4. Par Permutativo Imediato para *Consequentia Mirabilis*

Na literatura de dedução natural para a lógica clássica, usualmente define-se um tipo de rodeio envolvendo a regra $\bot_c$, quando sua conclusão for, ao mesmo tempo, *pM* de uma regra de eliminação. Os rodeios e a operação de eliminação são capturados no esquema abaixo, onde *A* é *pM* de uma regra de eliminação[223]:

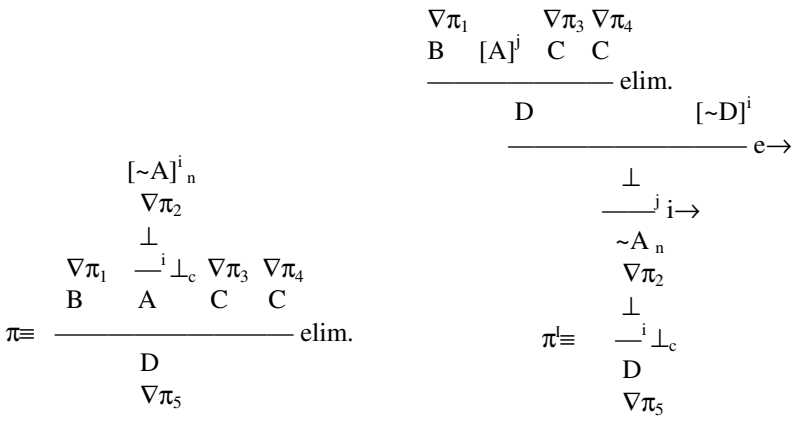


Figura IV-27

Da mesma forma que com os *POIs* e os *UPEs,* a admissibilidade da operação sobre esses pares deveria repousar sobre uma justificação. Todavia, não é imediatamente visível qual seria essa justificativa. É difícil assimilar a regra $\bot_c$ a uma regra de introdução, além do que $E\bot$ é um caso particular de $\bot_c$ e é uma regra de eliminação. Se uma dada instância de $\bot_c$ não descartasse ocorrência topo, seria uma $E\bot$ e, para esse caso particular, a operação na Figura IV-27 daria o seguinte resultado:

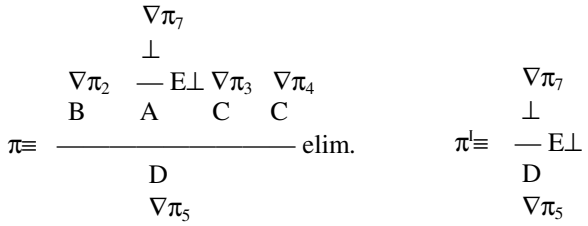


Figura IV-28

Não nos parece que essa situação possa ser tipificada como um *POI*. Embora, à primeira vista, a operação possa parecer razoável, na verdade, é problemática, como veremos adiante. Não obstante, para fins argumentativos, suponhamos a seguir que a operação da Figura IV-28 esteja bem definida e justificada.

Em sistemas clássicos em que $E\bot$ e *cm* fossem regras primitivas, a regra $\bot_c$ poderia ser

---

[223] Ver o final do Apêndice para as formas de representação genérica das regras de eliminação.

derivada da seguinte forma, como já vimos:

$$\pi\equiv\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\sim A]^{i}}{\nabla\pi_1}\,\bot}{A}\,E\bot}{A}\,{}^{i}\,cm$$

Figura IV-29

Assim, segundo essa definição, um par $\bot_c$-eliminação corresponderia, na verdade, a uma tripla *E⊥-cm-eliminação*:[224]

$$\dfrac{\nabla\pi_2 \quad B \qquad \dfrac{[A\rightarrow\bot]^{i}}{\dfrac{\nabla\pi_7}{\bot}}\,{}^{i}\bot_c \quad A \qquad \nabla\pi_3 \quad C \qquad \nabla\pi_4 \quad C}{D}\,elim.\qquad \dfrac{\nabla\pi_1 \quad B \qquad \dfrac{[A\rightarrow\bot]^{i}}{\dfrac{\nabla\pi_7}{\bot}}\,E\bot}{A}\,{}^{i}\,cm \quad A \qquad \nabla\pi_3 \quad C \qquad \nabla\pi_4 \quad C}{D}\,elim.$$

$\nabla\pi_5$ $\qquad$ $\nabla\pi_5$

Figura IV-30

A derivação à esquerda seria nada mais que o resultado de substituir o *definiens* (*E⊥-cm*) pelo *definiendum* ($\bot_c$) sobre a derivação da direita. Assim, o rodeio envolvendo a instância de $\bot_c$ corresponderia, na verdade, a um imbróglio envolvendo *cm*.

Desse ponto em diante, procederemos de forma diferente da que vínhamos fazendo. Apresentaremos uma operação cuja justificativa deve ser tomada como problema a ser resolvido. Ela será objeto de investigação logo a seguir.

Nos sistemas que admitam alguma forma da regra *Peirce*, lembrando que *cm* é caso particular dessa regra, uma instância da regra *Peirce* seguida imediatamente por uma aplicação de regra de eliminação admitirá uma permutação de regras conforme a figura abaixo, quando *Peirce* for *iM*[225]:

---

[224] Lembrando que $\sim A\equiv A\rightarrow\bot$.

[225] Doravante, usaremos a expressão *iM* para significar que uma instância é instância maior com respeito à sua antecessora imediata. Para maiores detalhes, ver o Apêndice.

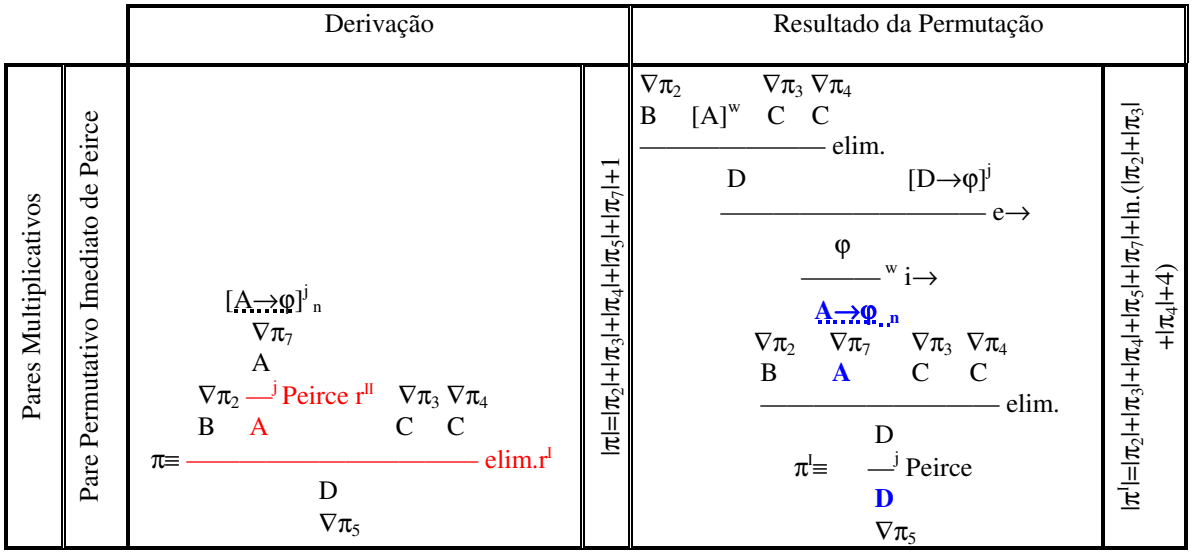


Figura IV-31

Na derivação à esquerda, $n \geq 0$, n é o número de ocorrências topo de π_7 da forma $A \rightarrow \varphi$ e o índice w à direita é um índice novo para cada uma das n cópias. Diremos que as instâncias de regra de uma derivação formam um **Par Permutativo Imediato de Peirce <r^I,r^{II}>** (***PPIP***) quando elas são como no quadro acima, onde r^I é uma regra de eliminação com a *pM A* e r^{II} é *Peirce*. Em particular, diremos que temos um **Par Permutativo Imediato de Mirabilis do Tipo I** (***PPIM-I***) quando tivermos, na situação da Figura IV-31, uma instância de *consequentia mirabilis* ao invés de *Peirce*. Diremos também que a ocorrência *pM* de r^I é uma **fórmula máxima** (aquela destacada em vermelho).

Fazendo a permutação do par de instâncias *cm*-eliminação na derivação à direita, na Figura IV-30, conforme a operação definida na Figura IV-31, obteríamos a derivação π^I abaixo:

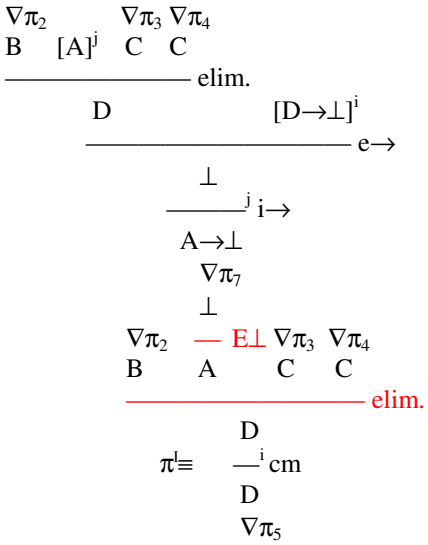


Figura IV-32

Em seguida, com a operação da Figura IV-28 sobre essa derivação, obteríamos π^{II} abaixo:

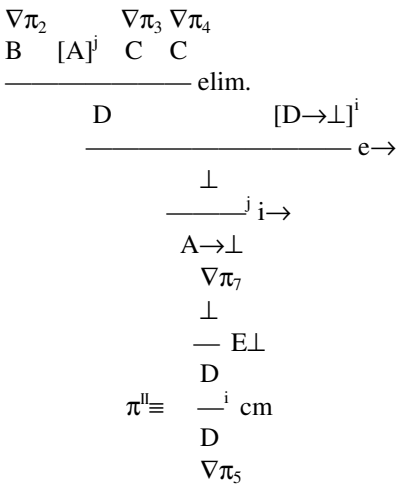


Figura IV-33

Mas, a partir de π'' substituindo o *definiendum* no lugar do *definiens*, $\perp_c$ no lugar da seqüência *E⊥-cm*, obtém-se a seguinte derivação:

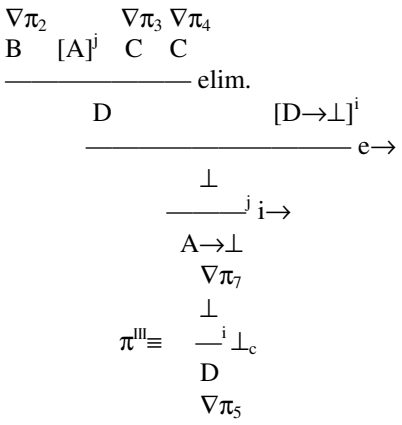


Figura IV-34

Essa derivação, por sua vez, é exatamente a derivação que resultava da operação caracterizada na Figura IV-27 sobre o "rodeio" envolvendo o par $\perp_c$-eliminação.

Dessa forma, a operação efetuada sobre um par $\perp_c$-eliminação equivale a uma operação de permutação envolvendo um par *cm*-eliminação, seguida de uma simplificação relativa à instância *E⊥*. Acerca dessa última, parece-nos claro que, se a simplificação da Figura IV-28 fosse considerada inadmissível, então a operação da Figura IV-27 também deveria ser considerada inadmissível. No entanto, uma situação de simplificação envolvendo o absurdo, como aquela da Figura IV-28, jamais ocorreria se adotássemos a regra *e⊥*.

O potencial dedutivo da regra $\perp_c$ também poderia ser obtido a partir da regra *e⊥* com *cm*. Como definimos $\perp_c$ a partir de *E⊥* e *cm*, basta notar que, para cada derivação empregando *E⊥*, existe uma derivação correspondente da mesma conclusão a partir das mesmas suposições usando só *e⊥*, conforme a Figura III-1. Assim, se supusermos que a subderivação π_1 da Figura IV-29 não

contém instâncias $E\bot$, haveria uma derivação que tem a forma do esquema abaixo, onde π_8 seria uma derivação de A a partir de $\bot$, sem o emprego de $E\bot$:

$$
\begin{array}{l}
[\sim A]^{i} \\
\nabla\pi_1 \\
\bot \\
\nabla\pi_8 \\
A \\
\text{---}^{i}\ \text{cm} \\
A
\end{array}
$$

Figura IV-35

Similarmente, uma seqüência de operações como a que apresentamos no argumento anterior ainda seria aplicável nesse caso. Primeiro, aplicaríamos uma permutação envolvendo um par *cm*-eliminação; depois, eventualmente, teríamos de fazer a eliminação de um *POI*, pois a regra *cm* poderia estar interposta entre uma regra de introdução e uma regra de eliminação, já que a última instância da subderivação π_8 na Figura IV-35 poderia ser uma introdução e, desse modo, A em vermelho na derivação π' abaixo seria uma fórmula máxima:

$$
\pi \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2 \quad [A\to\bot]^{i} \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4}{\begin{array}{l} \nabla\pi_8 \\ A \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{---}^{i}\ \text{cm} \\ A \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla\pi_3 \\ C \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla\pi_4 \\ C \end{array}}{\begin{array}{l} \nabla\pi_2 \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{elim.} \\ D \\ \nabla\pi_5 \end{array}}
\qquad \triangleright \qquad
\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2 \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4}{\begin{array}{l} B \\ [A]^{j} \end{array} \quad C \quad C}\ \text{elim.}}{\begin{array}{l} D \\ \bot \end{array}}\ \text{i}\to^{j}}{\begin{array}{l} A\to\bot \\ \nabla\pi_2 \quad \nabla\pi_8 \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4 \\ B \quad A \quad C \quad C \end{array}\ \text{elim.}}}{\begin{array}{l} D \\ \text{---}^{i}\ \text{cm} \\ D \\ \nabla\pi_5 \end{array}}
\qquad \triangleright \ \ldots
$$

Figura IV-36

Assim, segundo o que acabamos de expor, o uso da regra *cm* ou da regra *Peirce* como regra de dedução indireta permitiria efetuar as mesmas simplificações que efetuaríamos usualmente sobre pares de regras $\bot_c$-eliminação. Em termos elucidatórios, isso constitui parte de nosso argumento final a favor da substituição da regra $\bot_c$ como forma de elucidação da lógica clássica pelas outras duas, conforme a Figura IV-30, levando em conta a harmonia entre $e\bot$-$i\bot$ e a simplicidade de *cm vis-à-vis* as demais regras de dedução indireta.

3.5. Como Justificar a Permutação sobre *Consequentia Mirabilis*?

Voltando ao problema da justificação da operação sobre os *PPIMs-I*, dado que estamos tomando a regra *cm* como primitiva em nossos sistemas, observamos que a operação de permutação sobre os *PPIMs-I* ⟦*PPIPs*⟧, como definida na Figura IV-31, comportaria uma parcela dos atos necessários para eliminar um *POI*. Esse caso tem grande similaridade com a permutação dos *UPEs*, conforme a Figura IV-19. A permutação dos *UPEs* nos permitiu obter a propriedade da subfórmula. Algo similar se passa com as regras de dedução indireta.

As considerações a seguir visam, basicamente, a regra *cm*, mas também se aplicam, de modo geral, à regra *Peirce*. Consideremos a derivação π abaixo, na qual há um par introdução-eliminação, que seria removível por uma eliminação de *POI* não fosse o fato de haver uma regra *cm* interposta entre as duas instâncias, de modo similar ao que ocorria com os *UPEs*:

$$\pi\equiv\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A_1\wedge A_2)\to\bot]^k \quad \nabla\pi_1 \quad A_1 \qquad [(A_1\wedge A_2)\to\bot]^k \quad \nabla\pi_2 \quad A_2}{A_1\wedge A_2}\,i\wedge}{A_1}\,k\ cm}{A_1}\,e\wedge e \qquad \nabla\pi_5$$

Figura IV-37

A derivação π' abaixo seria a derivação resultante de permutar *cm*-$e\wedge e$. A derivação π'' seria a derivação que resultaria da eliminação do par introdução-eliminação em π':

$$\pi'\equiv\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A_1\wedge A_2]^p}{A_1}\,e\wedge e \quad \dfrac{[A_1\to\bot]^i}{\bot}\,e\to \quad \nabla\pi_1 \quad A_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A_1\wedge A_2]^p}{A_1}\,e\wedge e \quad \dfrac{[A_1\to\bot]^i}{\bot}\,e\to}{(A_1\wedge A_2)\to\bot}\,p\ i\to \quad \nabla\pi_2 \quad A_2}{A_1\wedge A_2}\,i\wedge}{A_1}\,e\wedge e}{A_1}\,i\ cm \qquad \nabla\pi_5$$

$$\pi''\equiv\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A_1\wedge A_2]^p}{A_1}\,e\wedge e \quad \dfrac{[A_1\to\bot]^i}{\bot}\,e\to}{(A_1\wedge A_2)\to\bot}\,p\ i\to \quad \nabla\pi_1 \quad A_1}{A_1}\,i\ cm \qquad \nabla\pi_5$$

Figura IV-38

Para que o novo conjunto de hipóteses abertas não seja maior que o conjunto anterior, ao fazer a

eliminação de um par de regras operacionais tendo uma instância *cm* de permeio, seria preciso adicionar aquela subderivação em azul. Ela permitiria que nos desfizéssemos das suposições da forma $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \bot$.[226]

Se tivéssemos que formular uma versão alternativa para o **princípio de inversão**, de modo a abarcar a operação de permutação envolvida em um *PPIM-I*, o princípio seria enunciado da seguinte forma: **Se α é uma aplicação de uma regra de eliminação que tem *C* como conseqüência, logo a dedução usada para derivar a *pM* de α, quando combinada com as deduções das *pms* de α, já permite uma dedução de *C*. A dedução de *C* pode ser, dessa forma, obtida diretamente das deduções dadas, tal que a constante envolvida em α será usada novamente, na pior das hipóteses, em uma nova subderivação, cuja essência é a de mostrar dedutivamente que qualquer coisa que se siga de *C* também se seguirá da *pM* de α mais as derivações subsidiárias das *pms* de α.**

No exemplo da Figura IV-38, a subderivação referida no sublinhado acima será aquela em azul sobre as suposições da forma $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \bot$. Nesse exemplo específico, A_1 corresponderia à fórmula *C* do princípio acima. Assim, o trecho "qualquer coisa que se segue de *C*" está representado pela fórmula $A_1 \rightarrow \bot$ e a fórmula α do trecho "também se segue da *pM* de α ..." estará representado pela fórmula $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \bot$.

Essa formulação do princípio também seria adequada às situações em que, de forma mais geral, é a regra *Peirce* que ocorre interposta entre o par de instâncias de introdução e de eliminação. Quando a regra empregada for a regra *cm,* a fórmula que se segue de *C* será justamente o absurdo. Nesse caso, poderíamos reformular aquela parte sublinhada no parágrafo acima de dois modos diferentes: *(i)* a constante envolvida em α será usada unicamente em uma derivação cuja essência é a de mostrar que quando *C* for absurdo, também a *pM* de α será absurda; *(ii)* a constante envolvida em α será usada unicamente em uma derivação cuja essência é a de mostrar que da falsidade/refutabilidade de *C* seguiria-se a falsidade/refutabilidade da *pM* de α.

Vista de outro modo, a operação sobre os *PPIMs-I* corresponderia, na verdade, a uma operação de deslocamento de índices de descarte para baixo, na derivação, quando a regra de dedução indireta tem uma conclusão que é *pM* de uma regra de eliminação. Da nossa perspectiva,

---

[226] Considerando a possibilidade de definir o sistema clássico adicionando a cada regra de introdução e de eliminação o descarte *à la mirabilis* ‖*Peirce*‖, qualquer rodeio nesse sistema nos daria uma situação similar àquela apresentada na Figura IV-37 e na Figura IV-38. Para esse sistema deveríamos, no mínimo, definir as operações de eliminação de rodeios de modo a poder re-arranjar os descartes *à la mirabilis* ‖*Peirce*‖, similar ao que foi feito nas figuras acima.

a justificativa para a operação emerge quando observamos que essa permutação propicia a eliminação de um rodeio, assim como propiciavam asa permutações dos *UPEs*. Da mesma forma que no caso dos *UPEs*, a operação definida vai além do que seria preciso para eliminar os futuros *POIs*. Assim, nesse caso, a operação de permutação também representaria, na verdade, um ajuste na cadeia de conseqüências. Com efeito, isso pode ser melhor visualizado sobre a regra *te*, conforme o exemplo abaixo (notamos que a estrutura da regra *te* é muito similar a regra de $e\vee$):

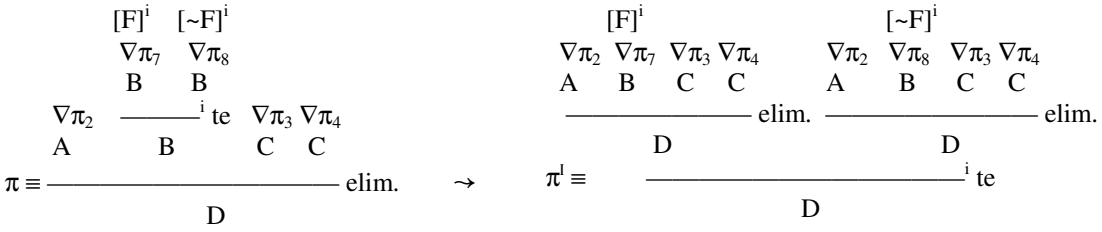


Figura IV-39

A esse ajuste de conseqüências na regra *te* deve necessariamente corresponder um ajuste na regra *cm*, já que elas são equivalentes[227]. Esse ajuste local ficaria ainda mais claro se tivéssemos definido o sistema com o axioma $A\vee\sim A$ tal que, desse modo, a permutação da regra indireta equivaleria à permutação de um *UPE*:

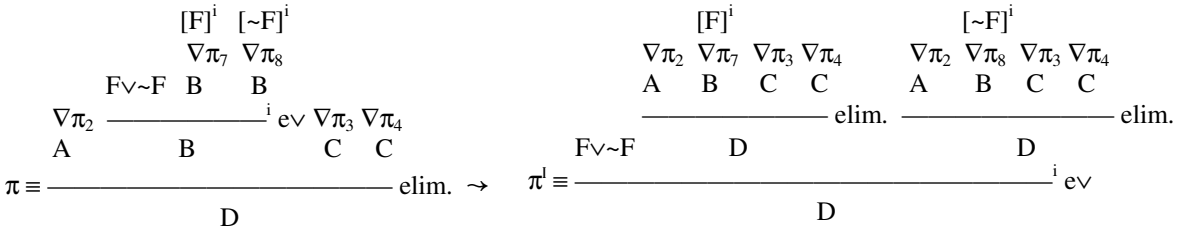


Figura IV-40

Posto dessa forma a operação de permutação da regra *te* com uma regra de eliminação equivale à permutação dos *UPEs*, quando usamos a fórmula de terceiro excluído.

Se usarmos a regra *cm* para derivar *te*, as duas seguintes derivações π'' e π''' corresponderiam às derivações π e π' da Figura IV-39:

[227] O mesmo valeria para as regras *ae* e *Peirce*.

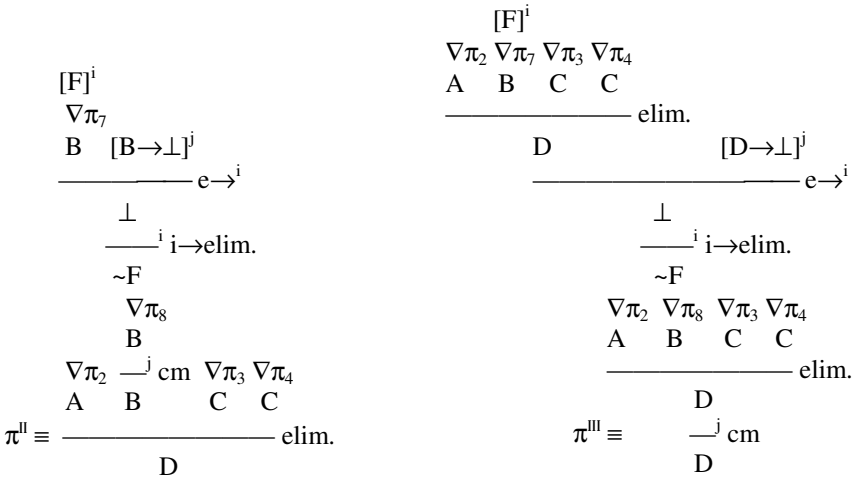


Figura IV-41

Observamos que ao aplicar a operação de permutação dos *PPIMs-I* sobre π'', seguida de uma eliminação de *POI de* $\rightarrow$, obteríamos a derivação π'''. Isso significa que a permutação dos *PPMIs-I* corresponde, de muito perto, à operação de permutação sobre os *UPEs*, só que, no caso dos *PPIMs-I*, a regra empregada é a regra *cm* $[\![Peirce]\!]$. Dessa forma, qualquer justificativa para permutar um *UPE* também será justificativa para permutar as regras de dedução indireta com as regras de eliminação.

3.6. Da Permutabilidade Geral das Regras de Dedução Indireta

Se pudéssemos eliminar completamente as instâncias de dedução indireta de uma derivação, poderíamos transformar qualquer derivação clássica em uma derivação construtiva. Mas, em geral, isso não é possível. Contudo, já seria bastante interessante poder conduzir para baixo os índices de descarte das regras de dedução indireta, pois, assim, toda demonstração em lógica clássica seria transformável em uma outra demonstração em que unicamente a raiz não seria uma instância de regra construtiva. Em outros termos, se fosse possível permutar todas as regras de introdução e de eliminação com as instâncias *cm*, a cada demonstração clássica haveria uma outra demonstração tal que sua raiz seria uma instância *cm* e a subderivação determinada pela premissa da instância raiz seria válida intuicionisticamente. Isso não será possível para todas as regras, mas será para uma parte importante delas. Até onde sabemos Seldin [Sel89] foi um dos primeiros a oferecer certas operações sobre a regra *P*, também aplicáveis a *cm*, com o intuito de obter esse resultado. No que segue apresentaremos operações de condução de descartes para o fim da derivação que são similares àquelas que Seldin [Sel89] havia proposto, mas com algumas diferenças. Em particular procuraremos tornar mias intuitiva a operação de condição de descartes para o fim da derivação.

Como dissemos, para certas regras não será possível efetuar a permutação com *cm* ⟦*Peirce*⟧. O problema mais sério envolve a permutação de *cm* ⟦*Peirce*⟧ com *i*∀. Se fizéssemos a permutação, a estrutura resultante já não seria uma derivação, como ilustramos a seguir. A instância em vermelho não pode ser uma *i*∀ correta, pois a ocorrência topo *A* só seria descartada dois passos dedutivos a frente:

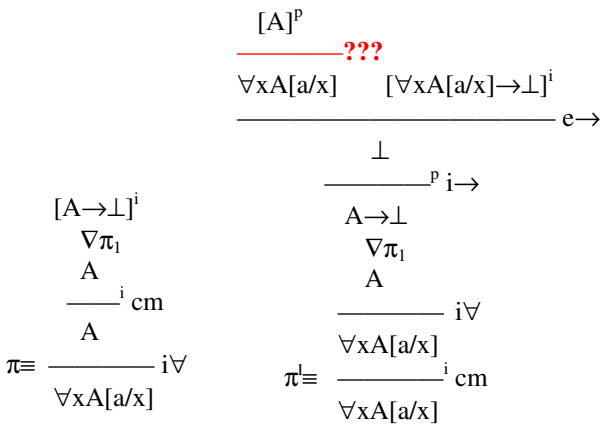


Figura IV-42

Basicamente, a transformação geraria uma estrutura que não respeitaria as restrições sobre parâmetros.

Embora nem sempre seja possível fazer a permutação, será possível permutar a regra *cm* ⟦*Peirce*⟧ com qualquer regra de eliminação, quando *cm* ⟦*Peirce*⟧ for *iM*, e também com todas as regras de eliminação, quando *cm* for *im* ⟦com quase todas as regras de eliminação quando *Peirce* for *im*⟧ da regra de eliminação. Há um único caso onde a permutação para a regra *Peirce* apresenta problemas: é o caso envolvendo uma regra de *e*∃. Ilustramos com o seguinte exemplo, em que estamos supondo que o parâmetro individual *a* não ocorre em *C*, mas ocorre em *B*:

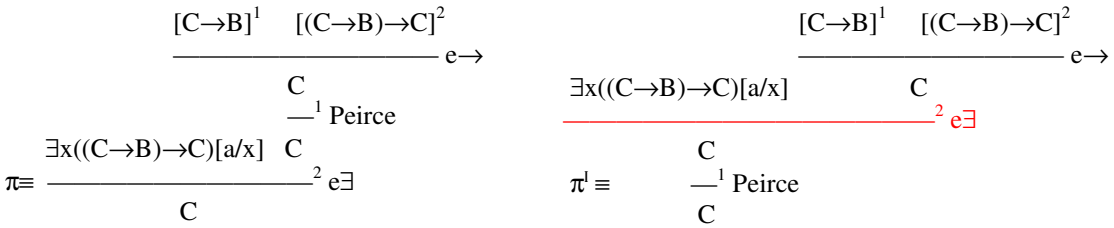


Figura IV-43

Se o parâmetro individual ocorre em *B*, então π' não é uma derivação correta. A permutação acima poderia resultar numa instância de *e*∃ que não respeita a restrição sobre parâmetros. Uma solução poderia ser adotar uma versão clássica da regra *e*∃ que admita a ocorrência do parâmetro

individual em suposições da forma $C\rightarrow\varphi$. Outra solução seria a permutação com o acréscimo da subderivação em azul, como a seguir:

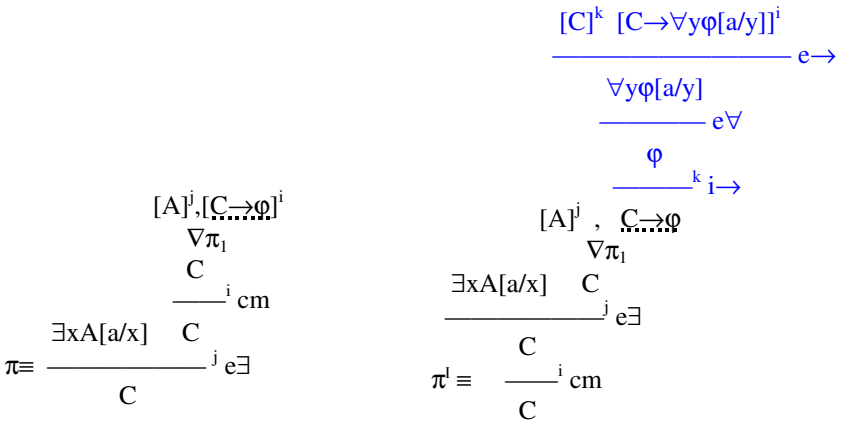


Figura IV-44

Seldin ([Sel89], pág. 207) propôs exatamente essa última solução. A operação manteria a derivabilidade da conclusão a partir do mesmo conjunto de hipóteses. Todavia, nós não a adotaremos, pois, além de faltar-nos uma boa justificativa para adotá-la, se a admitíssemos, acabaríamos por confundir derivações que podem ser distinguidas[228]. Felizmente, a regra *cm* não apresenta o mesmo problema que a regra *Peirce* e essa será uma razão, ainda que pragmática, para adotá-la como forma de definição da lógica clássica:

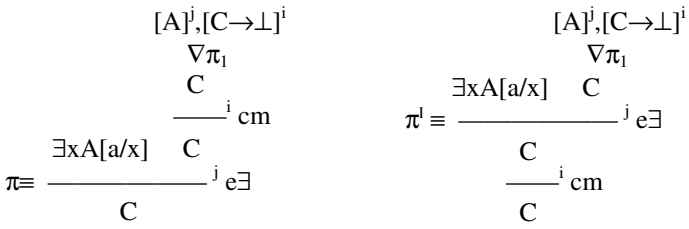


Figura IV-45

Um terceiro caso em que a permutação não funcionaria é o da regra *i⊥*:

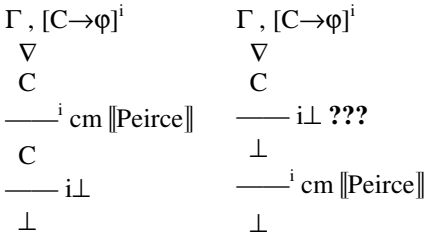


Figura IV-46

Novamente, a aplicação da regra na direita poderia não respeitar as restrições necessárias.

Assim, como vimos, será possível permutar a regra *cm* com qualquer das regras de eliminação, seja quando *cm* é *iM*, seja quando é *im* da regra de eliminação. As operações sobre os

[228] Ver adiante neste capítulo a discussão acerca do problema da unicidade da forma normal.

PPIMs-I capturariam uma parcela dessa possibilidade, a permutação quando *cm* é *iM* de uma eliminação.[229]

As instâncias *cm* só não podem ser permutadas com as instâncias de $i\forall$ e $i\bot$. Isso é interessante, visto que essas duas regras têm uma característica comum. São as únicas em que o conceito de substituição de parâmetros é essencial para a compreensão da correção da regra. São as únicas em que se exige, na premissa imediata, a presença de um **objeto genérico** ou uma proposição genérica. Todavia, o fato de não poder permutar $i\bot$ com uma instância *cm* não será um entrave, já que a regra pode ser eliminada da derivação dispensável. O único entrave para que uma derivação contendo *cm* seja transformada em outra em que só haja uma instância *cm* na raiz dar-se-á quando a derivação contiver uma instância de $i\forall$.

Lema IV-1 - Para qualquer derivação π em C que deriva $\Gamma\vdash A$, se $r(\pi)$ não é $i\forall$ nem $i\bot$ e se todas as subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$ contêm instância de cm no máximo na raiz, então existe uma derivação π' que demonstra $\Gamma\vdash A$, sua raiz é cm e a subderivação da premissa imediata não contêm instâncias de cm

Demonstração # Por casos, conforme $r(\pi)$:

(i) $r(\pi)$ é $i\wedge$, logo, no pior dos casos possíveis, π seria como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[A\rightarrow\bot]^{i}}{\nabla\pi_1}A\quad\dfrac{[B\rightarrow\bot]^{j}}{\nabla\pi_2}B}{A\wedge B}\ i\wedge$$

Figura IV-47

A derivação π' seria:

[229] Uma *iM cm* até poderia ser eliminada quando a outra regra fosse $e\bot$.

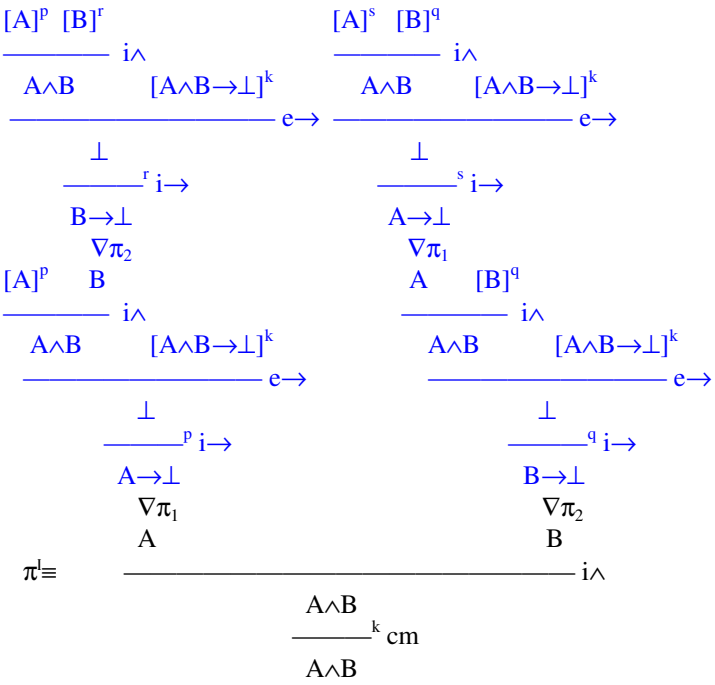


Figura IV-48

Caso não houvesse a regra de índice *i* e/ou a de índice *j*, a derivação resultante seria obtida dessa figura, omitindo subderivações em azul, conforme o caso.

(ii) r(π) é *e∧*, como na permutação dos *PPIMs-I*.

(iii) r(π) é *i∨*, *π* seria como abaixo (o caso para *i∨d* é similar):

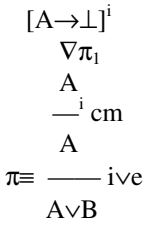


Figura IV-49

A derivação π' seria:

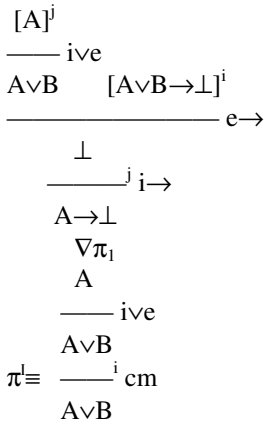


Figura IV-50

(iv) r(π) é *e∨*, logo, no pior dos casos possíveis, *π* seria como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[(A\vee B)\to\perp]^{i}\quad \dfrac{\nabla\pi_1}{A}}{\dfrac{A\vee B}{}\ i\,cm}\qquad \dfrac{[C\to\perp]^{j}\quad \dfrac{\nabla\pi_3}{C}}{\dfrac{C}{}\ j\,cm}\qquad \dfrac{[C\to\perp]^{k}\quad \dfrac{\nabla\pi_4}{C}}{\dfrac{C}{}\ k\,cm}}{C}\ e\vee$$

Figura IV-51

De modo intermediário, a condução das instâncias *cm* com premissa *C* para baixo resultaria na seguinte derivação:

$$\pi^{II}\equiv\ \dfrac{\dfrac{[(A\vee B)\to\perp]^{i}\quad \dfrac{\nabla\pi_1}{A}}{\dfrac{A\vee B}{}\ i\,cm}\qquad \dfrac{[C\to\perp]^{j}\quad \dfrac{\nabla\pi_3}{C}}{C}\qquad \dfrac{[C\to\perp]^{j}\quad \dfrac{\nabla\pi_4}{C}}{C}}{\dfrac{C}{}\ j\,cm}\ e\vee$$

Figura IV-52

A derivação *π′* resultará de *π″* por uma permutação similar àquela dos *PPIMs-I*, ao mesmo tempo colapsando as duas instâncias *cm* finais em uma única instância de índice *j*.

(v) r(π) é *i→*, logo *π* seria:

$$\pi\equiv\ \dfrac{[B\to\perp]^{i}\ ,\ [A]^{j}\quad \dfrac{\nabla\pi_1}{B}}{\dfrac{B}{}\ i\,cm}}{A\to B}\ j\to$$

Figura IV-53

A derivação *π′* seria como abaixo:

$$\pi^{I}\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^{k}}{}\ k\to}{A\to B}\qquad \dfrac{[(A\to B)\to\perp]^{i}}{\perp}\ e\to}{B\to\perp}\ k\to\qquad ,\ [A]^{j}\quad \dfrac{\nabla\pi_1}{B}}{\dfrac{A\to B}{}\ j\,cm}}{A\to B}\ i\,cm$$

Figura IV-54

(vi) r(π) é *e→*, logo, no pior dos casos possíveis, *π* seria:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[A\to\bot]^{i}}{\nabla\pi_1}\ A}{A}\,{}^{i}\mathrm{cm}\quad\dfrac{\dfrac{[(A\to B)\to\bot]^{j}}{\nabla\pi_2}\ A\to B}{A\to B}\,{}^{j}\mathrm{cm}}{B}\,\mathrm{e}\to$$

Figura IV-55

A derivação *π′* seria:

$$\pi'\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^{p}\ [A\to B]^{r}}{B}\,\mathrm{e}\to\quad[B\to\bot]^{k}}{\bot}\,\mathrm{e}\to}{(A\to B)\to\bot}\,{}^{r}\mathrm{i}\to\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^{p}\ A\to B}{B}\,\mathrm{e}\to\quad[B\to\bot]^{k}}{\bot}\,\mathrm{e}\to}{A\to\bot}\,{}^{p}\mathrm{i}\to}{A}\,\mathrm{e}\to}{B}\,{}^{k}\mathrm{cm}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^{s}\ [A\to B]^{q}}{B}\,\mathrm{e}\to\quad[B\to\bot]^{k}}{\bot}\,\mathrm{e}\to}{A\to\bot}\,{}^{s}\mathrm{i}\to\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\quad[A\to B]^{q}}{B}\,\mathrm{e}\to\quad[B\to\bot]^{k}}{\bot}\,\mathrm{e}\to}{(A\to B)\to\bot}\,{}^{q}\mathrm{i}\to}{A\to B}\,\mathrm{e}\to$$

Figura IV-56[230]

(vii) r(π) é *e⊥*, como na permutação dos *PPIMs-I*.

(viii) r(π) é *e ∀*, como na permutação dos *PPIMs-I*.

(ix) r(π) é *i∃*, *π* seria como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[A\to\bot]^{i}}{\nabla\pi_1}\ A}{A}\,{}^{i}\mathrm{cm}}{\exists xA[a/x]}\,\mathrm{i}\exists$$

Figura IV-57

A derivação *π′* seria:

---

[230] Dependendo da existência ou não de descartes de índice *i* e/ou *j*, certas subderivações topo em azul devem ser apagadas.

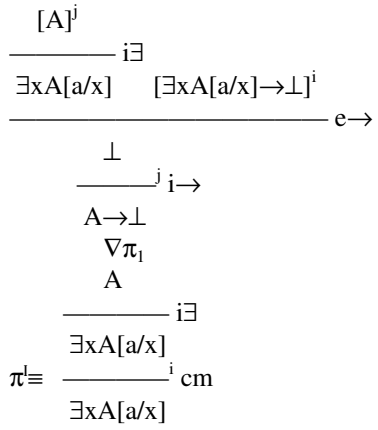


Figura IV-58

(x) r(π) é *e∃*, logo, no pior dos casos possíveis, *π* seria:

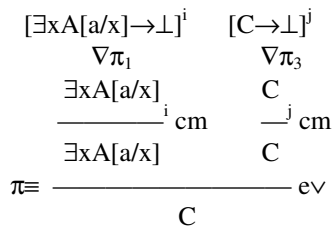


Figura IV-59

De modo intermediário, a condução para baixo daquelas instâncias *cm* com premissa *C* resultaria na seguinte derivação e, como vimos, qualquer que seja o parâmetro usado na subderivação subsidiária ele não ocorrerá em *C*, nem em *C→⊥*:

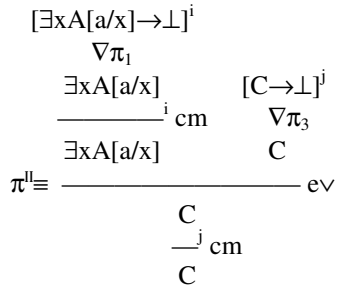


Figura IV-60[231]

A derivação *π'* resultará de *π''* de forma similar ao caso de *e∨*. *QED*

Seldin ([Sel89], pág. 198) definiu uma operação de permutação para sistemas proposicionais – a *⊃ KR$_i$-reduction* - que é uma generalização da operação que definimos na Figura IV-31. A generalização consiste, adicionalmente, em admitir que as regras de introdução de constantes proposicionais formem pares permutativos. O resultado da aplicação dessa operação diverge, frequentemente, das operações apresentadas na prova do lema acima, com

[231] De todas as operações de permutação presentes neste lema, somente essa operação não será aplicável à regra *Peirce*, na medida em que a hipótese descartada podia conter ocorrências do parâmetro individual próprio da instância de regra.

algumas exceções. O autor demonstra que sempre existirá uma derivação à qual não poderiam mais ser aplicadas as permutações chamadas de $\supset KR_i$*-reduction*.[232] Em essência é isso o que foi demonstrado no lema anterior: que os descartes de *consequentia mirabilis* quase sempre "podem ser conduzidos para baixo".

Teorema IV-1 - Se π *é uma derivação de* $\Gamma\vdash A$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que para qualquer aplicação de* $i\forall$ *a sua subderivação subsidiária não contém aplicações da regra cm, então existe uma derivação* π' *de* $\Gamma,\sim A\vdash A$ *em* $\mathcal{S}$.

Demonstração # Aplicando um procedimento de eliminação de todas as instâncias de $i\bot$, segundo o Teorema III-1; depois, um procedimento segundo o Lema IV-1. *QED*

Corolário IV-1 - Se π *é uma derivação de* $\Gamma\vdash A$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que, para qualquer aplicação de* $i\forall$*, a sua subderivação subsidiária não contém aplicações da regra cm, então existe uma derivação* π' *de* $\Gamma\vdash A$ *em* $\mathcal{C}$ *que contém, no máximo, uma única aplicação da regra cm na raiz.*

Demonstração # Segue-se imediatamente do Teorema IV-1. *QED*

Corolário IV-2 - Se π *é uma derivação de* $\Gamma\vdash A$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que para qualquer aplicação de* $i\forall$ *a sua subderivação subsidiária não contém aplicações da regra cm, então existe uma derivação* π' *de* $\Gamma\vdash\sim\sim A$ *em* $\mathcal{S}$.

Demonstração # Usando o Teorema IV-1, seja π_1 a derivação de $\Gamma,\sim A\vdash A$ em $\mathcal{S}$, logo:

$$\pi' \equiv \dfrac{\dfrac{\Gamma\,,\,[A\rightarrow\bot]^j \quad \nabla\pi_1 \quad A \quad [A\rightarrow\bot]^j}{\bot}\,e\rightarrow}{(A\rightarrow\bot)\rightarrow\bot}\,j\,i\rightarrow \qquad (\equiv_{df}\sim\sim A)$$

Figura IV-61

QED.

Corolário IV-3- Se π *é uma derivação de* $\Gamma\vdash A$ *no fragmento proposicional de* $\mathcal{C}$*, então existe uma derivação* π' *de* $\Gamma\vdash\sim\sim A$ *no fragmento proposicional de* $\mathcal{S}$.[233]

Demonstração # Imediato do Corolário IV-2.

Corolário IV-4 - Se π *é uma derivação de* $\Gamma\vdash\sim A$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que, para qualquer aplicação de* $i\forall$*, a sua subderivação subsidiária não contém aplicações da regra cm, então existe uma derivação* π' *de* $\Gamma\vdash\sim A$ *em* $\mathcal{S}$.

Demonstração # Usando o Teorema IV-1, seja π_1 a derivação de $\Gamma,\sim\sim A\vdash\sim A$ em $\mathcal{S}$, onde *D*

---

[232] Para sermos mais precisos, o autor também define outras operações de simplificação sobre a regra *P*. Essas operações junto com a $\supset KR_i$*-reduction* permitiriam obter a propriedade mencionada. Faremos algumas observações acerca dessas operações mais adiante neste capítulo.

[233] Esse corolário foi adicionado por sugestão do prof. L.C. Pereira.

é uma variável proposicional que não ocorre nas suposições abertas de π_1. Logo, obteremos:

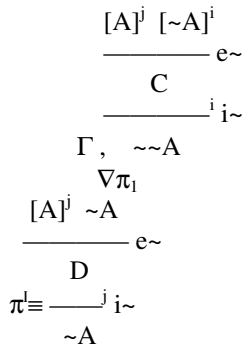


Figura IV-62

QED

Como, em essência, a permutação só não pode ser realizada sobre $i\forall$, se traduzíssemos as derivações usando a definição $\forall xA \equiv \sim\exists x\sim A$, as permutações seriam aplicáveis a todas as derivações obtidas.

Corolário IV-5 - Se π é uma derivação de $\Gamma\vdash A$ em $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$, então há uma derivação π' de $\Gamma\vdash\sim\sim A$ em $\mathcal{G}$.[234]

Demonstração # Imediato do Corolário IV-2.

Corolário IV-6 - Se $\vdash A$ no fragmento $\{\wedge,\sim\}$ de C, então $\vdash A$ no fragmento $\{\wedge,\sim\}$ de $\mathcal{G}$.[235]

Demonstração # Suponha que $\vdash A$. Logo $gr(A)=n>0$. Se $A\equiv B\wedge C$, então $\vdash B$ e $\vdash C$ no fragmento $\{\wedge,\sim\}$ de C, em conseqüência, por indução, $\vdash B\wedge C$ no fragmento $\{\wedge,\sim\}$ de $\mathcal{G}$. Se $A\equiv\sim B$, então há uma derivação π $\sim\sim B\vdash\sim B$ em $\mathcal{G}$, conforme o Teorema IV-1. A existência de uma derivação π' de $\vdash\sim B$ no fragmento $\{\wedge,\sim\}$ de $\mathcal{G}$ é imediata.

No contexto dos próximos corolários, consideremos A^* a fórmula resultante de traduzir $\forall$ por meio de $\rightarrow$, $\exists$ e $\perp$, sobre o sistema $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$ definido no capítulo anterior.

Corolário IV-7 - Se π é uma derivação de $\Gamma\vdash A$ em C, então existe uma derivação π' de $\Gamma^*,\sim A^*\vdash A^*$ em $\mathcal{G}$.

Demonstração # A toda derivação π em C corresponde uma derivação π'' em $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$, conforme as traduções definidas no capítulo anterior. Em π'', não haverá ocorrências de $i\forall$, por definição. O resultado segue-se pelo Teorema IV-1. *QED*

Corolário IV-8 - Se π é uma derivação de $\Gamma\vdash A$ em C, então existe uma derivação π' de $\Gamma^*\vdash\sim\sim A^*$ em $\mathcal{G}$.

---

[234] Idem nota 233.
[235] Idem nota 233.

Demonstração # Usando o Corolário IV-7 e a Figura IV-61.

Os resultados apresentados estão intimamente conectados e/ou são uma reapresentação dos resultados formulados por: Glivenko [Gli29]; Kolmogorov [Kol25]; Prawitz & Malmnas [Pra68]; Seldin [Sel89].[236] Como observa Seldin, os resultados são possíveis porque as regras de dedução indireta admitem a permutação em direção à conclusão.

3.6.1. Observação sobre o Conteúdo Computacional das Provas Clássicas

Podemos ilustrar um pouco o significado dos dois últimos corolários examinando um problema relativo ao conteúdo computacional da lógica clássica. O **princípio de Markov** para $\mathcal{AH}$ consiste no reconhecimento da validade da seguinte inferência, quando A é livre de quantificadores[237]:

$$\frac{\sim\sim\exists x A[a/x]}{\exists x A[a/x]}$$

Figura IV-63

No capítulo anterior, mostramos como as derivações do sistema C podiam ser traduzidas em derivações do sistema $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$. Também a regra $i\perp$ pode ser eliminada das derivações. Suponhamos que A^* seja o resultado de fazer as substituições do universal. Assim, se tivéssemos uma prova de uma fórmula $\exists xA[a/x]$ em C, teríamos um procedimento para transformá-la em uma prova de $\exists xA^*[a/x]$ no sistema $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$ e, usando o procedimento envolvido no Corolário IV-7, poderíamos obter uma prova de $\exists xA^*[a/x]$ que só conteria uma única aplicação de *consequentia mirabilis* na raiz da demonstração. Portanto, a subderivação da raiz dessa prova seria uma derivação intuicionista para $\sim\exists xA^*[a/x]\vdash\exists xA^*[a/x]$. Mas, a partir dessa derivação intuicionista, haveria uma prova intuicionista de $\vdash\sim\sim\exists xA^*[a/x]$:

$$\dfrac{\dfrac{[\sim\exists xA^*[a/x]]^i \quad \nabla}{\exists xA^*[a/x] \quad [\sim\exists xA^*[a/x]]^i}\,e\rightarrow \quad \perp}{\sim\sim\exists xA^*[a/x]}\,i^i\,i\rightarrow$$

Figura IV-64

[236] Ver também [Kle52], págs. 492-501.

[237] Essa inferência não pode ser derivada em $\mathcal{AH}$, porém, como os predicados e operações de $\mathcal{AH}$ são decidíveis, qualquer fórmula livre de quantificadores também será decidível.

Portanto, se a fórmula A^* for decidível em $\mathcal{AH}$, em $\mathcal{AH}$ teremos $\vdash \exists x A^*[a/x]$, segundo o princípio de Markov. Se tivermos um método que permita implementar o princípio de Markov por meio de transformação de provas[238], poderemos transformar a prova intuicionista de $\sim\sim\exists x A^*[a/x]$ em uma prova intuicionista de $\exists x A^*[a/x]$. Como, além do mais, há um método para obter uma prova $A^*[a/\tau]$ a partir da prova de $\exists x A^*[a/x]$, como veremos no Teorema IV-4, então obteremos uma computação para τ. Ou seja, sob determinadas condições, poderíamos extrair informação computacional de uma prova clássica usando o Corolário IV-7.

4. Pares/Unidades Multiplicativas x Não-Multiplicativas

As operações foram divididas em duas classes: as **não-multiplicativas** e as **multiplicativas**. As operações não-multiplicativas correspondem ao ato de eliminar instâncias e ocorrências da derivação. Elas sempre resultam numa derivação em que todos os ramos são resíduos dos ramos da derivação original. O número de instâncias na derivação, assim como o número de ocorrências, diminuirá. Cada instância ⟦ocorrência⟧ deixará, no máximo, um (*1*) resíduo na derivação obtida, após uma operação não-multiplicativa.

A classe das operações multiplicativas tem um comportamento distinto. Elas adicionam cópias de ocorrências e instâncias à nova derivação. Eventualmente, alguma⟦s⟧ instância⟦s⟧ ⟦ocorrências⟧ poderá⟦ão⟧ ter mais de uma cópia na derivação resultante da operação multiplicativa. Assim, a derivação resultante poderá ser maior que a original.

Se, por um lado, a eliminabilidade dos *POIs* asseguraria que existe alguma harmonia entre os pares de introdução-eliminação, por outro lado, poderíamos dizer que o uso de rodeios, sobretudo os rodeios multiplicativos, oferece-nos a possibilidade de efetuar demonstrações que, de outro modo, poderiam escapar a apreensão intelectual humana, dada a sua complexidade em número de passos inferenciais. Sob esse aspecto, a possibilidade de usar os rodeios multiplicativos de implicação, bem como os rodeios multiplicativos envolvendo regras de dedução indireta, oferece o mesmo tipo de utilidade: o de diminuir o tamanho que uma prova direta teria se não os usássemos. Em muitos casos, o tamanho de uma prova extrapolaria nossa capacidade de açambarcar o todo.

No próximo capítulo, efetuaremos um breve exame da complexidade das operações. O estudo da complexidade consiste em procurar avaliar qual comprimento pode ter uma derivação

---

[238] Nossa tradução sobre o fragmento $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}$ guarda semelhança com uma tradução proposta por J. Avigad para obtenção de conteúdo computacional [Avi98]. Ele a chama de *"one-and-a-half negation" translation*.

resultante de um processo reiterado de operações de eliminação de rodeios e permutação de regras, assim como quantos passos de operação seriam necessários para findar completamente com os rodeios. A relevância desse estudo estaria em mostrar que, na exposição axiomática de uma teoria, não faz sentido usar provas diretas. Em geral, o que observamos do processo de eliminação de rodeios e de permutação de regras é que as derivações obtidas tendem a crescer, algumas exponencialmente. No caso particular da lógica clássica, as permutações sobre a regra *cm* são aquelas que apresentam maior tendência ao aumento da derivação resultante.

5. Redução

Definição IV-3 - Diremos que uma derivação π*, em algum sistema,* **reduz-se imediatamente** *a uma derivação* π'*,* $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$*, se* π' *é o resultado de eliminar um POI, ou permutar um UPE, ou permutar um PPIM-I* $[\![PPIP]\!]$.[239]

6. Convenção e Notação

Doravante, uma expressão da forma $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightarrow}} Y$ deve ser entendida como uma seqüência de operações da mesma natureza α, que nos leva do objeto (formal) *X* ao objeto (formal) *Y* em β passos, onde β pode ser:

(i) $X \overset{\alpha}{\underset{i}{\rightarrow}} Y$ *- passo imediato, 1 passo;*

(ii) $X \overset{\alpha}{\underset{\leq i}{\rightarrow}} Y$ *- 1 (um) passo ou zero passos;*

(iii) $X \overset{\alpha}{\underset{n}{\rightarrow}} Y$ *- exatamente um número n de passos, para n um número natural qualquer;*

(iv) $X \overset{\alpha}{\underset{\leq n}{\rightarrow}} Y$ *- um número de passos menor ou igual a n, inclusive zero passos;*

(v) $X \overset{\alpha}{\rightarrow} Y$ *- um número indeterminado de passos, eventualmente, zero passos.*

Consideraremos que ficam automaticamente definidas as seqüências cujo comprimento é zero ou um positivo natural – ou seja, seqüência vácua e fecho transitivo - quando o passo imediato for

[239] Adiante, faremos uma extensão do conceito de redução.

definido. Quando a seqüência é vácua, $X \equiv Y$.[240] A expressão $|X \overset{\alpha}{\rightarrow} Y|$ denota *o comprimento da seqüência* em número de passos. Segundo as convenções, as seqüências de redução $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ estão definidas. Lê-se a expressão como "π se reduz a π'" e, quando isso ocorrer, deve existir uma seqüência $\pi_1,...,\pi_n$ onde $\pi_1 \equiv \pi$, $\pi_n \equiv \pi'$ e $\pi_i \underset{i}{\rightarrow} \pi_{i+1}$ para $1 \leq i < n$.

7. Forma Normal

Ao definirmos uma operação essencialmente baseada em uma única instância r^I, o caso dos *UPEs*, por exemplo, adotaremos uma representação de pares de instâncias da forma $<r^I,r^I>$ com o objetivo de homogeneizar o tratamento de todas as operações. Lembrando que a primeira instância do par é sempre aquela que se encontra mais abaixo na derivação, temos a seguinte definição geral para os rodeios.

Definição IV-4 - Diremos que um par de instâncias $<r^I,r^{II}>$ é um **rodeio** *(**RD**):*
(i) quando $<r^I,r^{II}>$ é um POI;
(ii) quando $<r^I,r^{II}>$ é um PPIM-I $[\![PPIP]\!]$;
(iii) quando $<r^I,r^{II}>$ é um UPE, tal que r^I é a mesma instância r^{II}.

Por razões que ficarão claras em breve, ao invés de associar o valor de um *RD* com o valor da fórmula máxima envolvida, tomaremos outra decisão, aliás, muito pouco diferente.

Definição IV-5 - O valor redutivo de um RD $<r^I,r^{II}>$ será $v_{\triangleright}(<r^I,r^{II}>)=v(A)+1$, se o RD é um POI, ou um UPE, ou um PPIM-I $[\![PPIP]\!]$, quando *A for a fórmula máxima envolvida.*

Diremos que uma derivação está em **forma normal** (***FN***) quando a derivação não contém rodeios. Para representar a *FN* de uma derivação π, será usada a expressão "$\pi^{\triangleright}$", sem que estejamos com isso supondo a unicidade da *FN*. Ao menos por enquanto, "$\pi^{\triangleright}$" não serve para singularizar uma única derivação. Apenas representa qualquer umas das supostas *FNs* de π.

[240] A expressão significa que o objeto *X* é sintaticamente equivalente ao objeto *Y*.

7.1. IE-Forma para Derivações Puras

As instâncias de um ramo axial de uma derivação pura são classificadas em dois tipos. Se classificarmos as instâncias pertencentes aos segmentos constantes – aqueles que só contém $e\vee$ e $e\exists$ via *pms* - como **instâncias inócuas no ramo axial**, todas as demais instâncias serão consideradas **instâncias relevantes no ramo axial**. As definições a seguir consideram somente as regras de introdução, de eliminação, regra *Peirce* e *cm*.

Definição IV-6 - Dado um segmento inicial de um ramo axial de instâncias dizemos que este segmento é um **I-segmento** *somente quando a sua última instância é cm, ou é Peirce, ou é introdução, e tal que nenhuma outra instância que lhe suceda no ramo seja cm, ou Peirce, ou introdução.*

Segundo essa definição, dado um ramo axial, o *I*-segmento pode ser vazio.

Definição IV-7 - Dado um ramo axial, dizemos que um segmento final desse ramo é um **E-segmento** *quando ele é complementar ao I-segmento no ramo axial.*

Segundo essa definição, a instância *lh*[241] sempre estará compreendida no *E*-segmento. Logo, todo ramo axial terá um *E*-segmento não vazio.

Definição IV-8 - IE-forma - Dizemos que um ramo axial de uma derivação π tem a **propriedade da IE-forma,** *quando toda instância de eliminação no I-segmento, se houver alguma, é uma instância inócua.*

Explicando um pouco mais, em princípio, no *I*-segmento não pode haver instâncias de eliminação, com exceção daquelas pelas quais o ramo deve passar quando passa por um segmento constante. Ramos axiais de derivações em *FN* devem ter a propriedade da *IE*-forma.[242] Complementarmente, pelo menos um dos ramos axiais de uma derivação que não está em *FN* não terá a propriedade da *IE*-forma. Em um dado ramo, o *I*-segmento deverá conter todas as instâncias de introdução, de *cm* e de *Peirce* se a derivação está em *FN*. Poderá ainda conter instâncias de eliminação que sejam inócuas dentro do ramo axial. No exemplo abaixo, onde a derivação não está em *FN*, temos os seguintes ramos axiais de instâncias:

---

[241] Chamamos de instância *lh* aquela correspondente ao ato de lançamento de hipótese e que deve acompanhar toda ocorrência topo. Para maiores detalhes, ver o Apêndice.

[242] Essa propriedade corresponde àquela sobre a qual versa o Teorema 3, pág. 41, Capítulo III de [Pra65], assim como é similar àquela do Teorema 2, pág. 53, Capítulo IV.

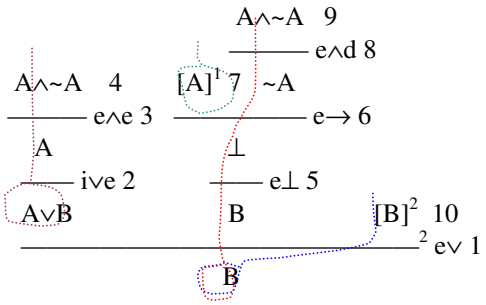


Figura IV-65

No ramo axial de instâncias *1,2,3,4*, segundo a definição acima, o *I*-segmento conteria a $e\vee$ de modo relevante e, por isso, seria um ramo axial que não tem a *IE-forma*. Em outros termos, nesse ramo, há um par de instâncias que forma um rodeio. O ramo axial de instâncias que só tem a instância *7* teria um *I*-segmento vazio, ou seja, o *E*-segmento seria idêntico a todo o ramo, além disso, estaria em *IE-forma*. O ramo axial de instâncias *1,5,6,8,9* teria um *I*-segmento vazio, o *E*-segmento seria idêntico a todo o ramo e, além disso, estaria em *IE-forma*. O ramo axial de instâncias *1,10* teria um *I*-segmento vazio, seu *E*-segmento seria idêntico a todo o ramo e, também, estaria em *IE-forma*. Nesses dois últimos ramos, a instância *1* é dita inócua.

Recordando que os ramos são definidos de baixo para cima na derivação, o lema a seguir prova que π não estaria em *FN* se a propriedade da *IE*-forma não fosse válida para algum ramo axial da derivação π.

Lema IV-2 - Seja $\rho=r_1,...,r_n$ um ramo axial de instâncias em π tal que há uma instância r_i no I-segmento e tal que r_i é uma instância de eliminação relevante. Logo, π não está em FN.

Demonstração # Segundo os dados, deve haver uma instância relevante de eliminação que está dentro do *I*-segmento e que, por definição, não será o topo desse *I*-segmento. Tomamos, nessa situação, aquela instância de eliminação relevante que está mais acima no *I*-segmento. Logo, a instância subseqüente no ramo axial estará no *I*-segmento e será uma *iM*. Mas ela será ou uma eliminação inócua, ou uma introdução, ou uma instância *cm*, ou uma instância *Peirce*. No primeiro caso, haveria um *UPE*; no segundo, um *POI*; no terceiro, um *PPIM-I*; e no quarto, um *PPIP*. Logo, a derivação não está em *FN*. *QED*

Teorema IV-2 - Se algum ramo axial de um derivação π não tem a IE-forma, então π não está em FN.

Demonstração # O resultado segue pelo Lema IV-2. *QED*

Lema IV-3 - Ramos axiais em uma derivação em FN, que iniciam com uma instância relevante de e∨ ou de e∃, só contêm instâncias de eliminação e a instância final lh.[243]

Demonstração # Se não fosse assim, o ramo não teria a propriedade da *IE*-forma. Logo, a derivação não estaria em *FN*, conforme o Teorema IV-2. *QED*

7.2. IE-Forma e Consistência

Um sistema de dedução natural é considerado inconsistente quando permite a demonstração de ⊥ ou, alternativamente de uma fórmula e de sua negação. Todavia, nem todo sistema contará com a regra *i⊥/i~*. Em nossa opinião, se um sistema não admitir a validade dessas regras tampouco admitirá a validade das regras *e⊥/e~*. Nesse caso, alternativamente, poderíamos considerar que o sistema será inconsistente se houver demonstração de um parâmetro proposicional, pois como todos os sistemas contêm parâmetros proposicionais, a demonstração de um parâmetro proposicional permitiria a demonstração de qualquer fórmula. No entanto, para os sistemas que admitem a validade de *i⊥,* se pudéssemos garantir que, para toda prova de ⊥ em *FN*, existe outra derivação em *FN* cuja raiz é *i⊥*, poderíamos concluir também que a toda demonstração de ⊥ em *FN* corresponderia uma demonstração de um parâmetro proposicional. Logo, em qualquer das situações, esteja *i⊥* admitido ou não, consideraremos, nesta tese, que um sistema é **inconsistente** caso haja uma demonstração de um parâmetro proposicional. Caso a negação seja tomada como operação primitiva, um sistema será considerado inconsistente quando ele prova uma fórmula e sua negação, pois a partir dessas duas provas poderemos provar um parâmetro proposicional.

De fato, *a priori*, esperamos que sistemas razoavelmente bem-formulados não permitam demonstrar um parâmetro proposicional. De forma geral, poderíamos dizer que um sistema é **consistente** quando não for possível provar um parâmetro proposicional, o que redundaria em dizer que nem todas as fórmulas seriam demonstráveis.

Assim, após ter feito essa associação entre a consistência e a não-demonstrabilidade dos parâmetros proposicionais, notamos que a inconsistência de um sistema de dedução natural poderia originar-se das regras lógicas, das regras extralógicas, ou, finalmente, da interação de ambos os tipos de regras.

Com base na propriedade da *IE*-forma para derivações em *FN*, será possível mostrar que

---

[243] Na verdade, todas as regras de eliminação que tenham a mesma estrutura da *e∨* ou da *e∃* terão essa propriedade. Assim, se tivéssemos formulado nosso sistema com a regra *e⊥2*[a], também suas instâncias teriam a mesma propriedade.

não existem demonstrações puras de parâmetros proposicionais em C. Lembramos que todos os sistemas são deriváveis no sistema C, e, dessa forma, se algum deles fosse inconsistente, C também o seria. Assim, estando garantida a existência de forma normal para cada derivação que possa ser construída com as regras de C, além da própria consistência de C, seguir-se-ia a consistência de todo sistema de regras que sejam admissíveis desde o sistema C, em particular das regras deriváveis em C. Restará, desse modo, unicamente, a possibilidade de que as regras extralógicas sejam inconsistentes ou que, em conjunto com as regras lógicas, ambas gerem inconsistência. Mas as regras extralógicas não poderão gerar inconsistência em conjunto com as regras lógicas, quando as extralógicas são básicas e seu conjunto consistente. Se, ao adicioná-las a um sistema puro, obtivéssemos inconsistência, já haveria inconsistência no próprio conjunto de regras extralógicas básicas.

A propriedade da *IE-forma* implica a inexistência de uma demonstração pura e em *FN* de $\vdash_C A$, quando A é um parâmetro proposicional. Antes de provar a inexistência de demonstrações de um parâmetro proposicional, precisamos demonstrar os seguintes lemas e teoremas.

Lema IV-4 - Seja π uma derivação em FN tal que $r(\pi)$ é uma instância de eliminação. Logo, existe uma linha $\lambda=r_1,...,r_n,r_{n+1}$ em π, onde todas as instâncias, exceto a última[244]*, são de eliminação e, caso Γ_i contenha unicamente as ocorrências topo da subderivação de π determinada por r_i, para $1\leq i<n+1$, então nenhuma instância r_j, para $j<i$, descartaria ocorrência[s] topo em Γ_i (observando que $\Gamma_1\supseteq\Gamma_2\supseteq...\supseteq\Gamma_n$).*[245]

Demonstração # Antes da prova, duas observações. Primeira, se π está em *FN*, vale a propriedade da *IE*-forma para todos os ramos axiais. Segunda, todas as regras de eliminação têm uma única *pM* e, portanto, uma única *iM*. Como $r(\pi)$ é uma eliminação, definiremos a linha $\lambda=r_1,...,r_n$ como a seguir.

(i) r_1 é $r(\pi)$ – evidentemente, essa instância não tem instâncias antecessoras.

(ii) Se a *iM* sucessora imediata de r_i é uma *lh*, então a linha está terminada, caso contrário teremos dois casos.

(ii.i) Se r_i é $e\wedge$, ou é $e\rightarrow$, ou é $e\bot$, ou é $e\forall$, conseqüentemente, r_{i+1} será a *iM* sucessora imediata de r_i – claramente, r_{i+1} pertence ao mesmo ramo axial que r_i e, por isso, deve ser uma instância de eliminação, já que o ramo deve estar em *IE*-forma. Ademais, se as instâncias antecessoras de r_i não descartavam nenhuma ocorrência topo em π_{r_i}, dado que os quatro tipos de

---

[244] A última instância é *lh*.

[245] Estamos tomando como derivação π_{r_i} aquela subderivação de π determinada pela instância r_i.

instância acima não descartam qualquer ocorrência topo, logo nenhuma ocorrência topo de $\pi_{r_{i+1}}$ será descartada pelas antecessoras de r_{i+1}.

(ii.ii) Se r_i é $e\vee$ ou é $e\exists$, conseqüentemente, r_{i+1} será a *iM* sucessora imediata de r_i [246] - se as instâncias antecessoras de r_i não descartavam nenhuma ocorrência topo em π_{r_i}, como esses dois tipos de instância só descartam ocorrências topo nas subderivações subsidiárias sobre as *pms*, mas não sobre a *pM* (que, por seu turno, pertence a subárvore $\pi_{r_{i+1}}$), logo nenhuma ocorrência topo de $\pi_{r_{i+1}}$ será descartada pelas antecessoras de r_{i+1}. Além disso, r_i deve ser o início de um novo ramo axial e, por isso, r_{i+1} deve ser uma instância de eliminação ou ser *lh*. *QED*

Esse lema permite-nos mostrar algo que já antevíamos no início dessa secção: se tivéssemos uma demonstração em *FN* de $\perp$ em um sistema que admita a regra $i\perp$, então haveria uma demonstração de um parâmetro proposicional nesse sistema.

Teorema IV-3 Se um sistema definido com as regras $i\perp$-$e\perp$ contiver uma demonstração de $\perp$ em FN, então ele também conterá uma demonstração de um parâmetro proposicional.

Demonstração # Suponha que π é uma demonstração de $\perp$ da seguinte forma:

$$\pi\equiv \dfrac{\dfrac{[\underline{\perp\rightarrow\varphi}]}{\nabla\pi_1}}{\perp}\,{}^{i}\,\text{Peirce}\,\|\text{cm}\|$$

Figura IV-66

Essa derivação pode ser transformada na seguinte derivação π':

$$\pi'\equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\perp]^{j}}{\varphi}\,{}^{j}\,i\rightarrow}{\underline{\perp\rightarrow\varphi}}}{\nabla\pi_1}$$

Figura IV-67

Esse procedimento pode ser aplicado até que a raiz da derivação não seja mais uma instância de dedução indireta. Notamos que, se a regra $i\perp$ é admissível, então $e\perp$ estará validada no sistema. Além disso, estamos considerando os sistemas definidos com a regra $e\perp$. Suponhamos que a derivação obtida seja π' e que sua raiz não seja uma regra de dedução indireta. Logo, sua raiz é

[246] Embora r_{i+1} pertença ao mesmo ramo axial que r_i, não pertencerá ao mesmo ramo axial que as antecessoras de r_i, mas, obviamente, pertencerá à mesma linha.

uma eliminação ou uma introdução. Se fosse uma eliminação, não seria uma demonstração de $\perp$, pois a derivação conteria ao menos uma hipótese aberta, conforme o Lema IV-4. Logo, deverá ser uma introdução. Portanto, deve ser $i\perp$ e a derivação deve ter a seguinte forma para algum parâmetro proposicional A:

$$\pi^{II} \equiv \begin{array}{c} \nabla\pi_1^{III} \\ A \\ \hline i\perp \\ \perp \end{array}$$

Figura IV-68

A derivação buscada é a derivação π_1^{III}, subderivação de π^{III}. *QED*

O Lema IV-4 também será empregado na prova do Teorema IV-5 abaixo[247], mas também permite demonstrar, por exemplo, o seguinte teorema.

Teorema IV-4 - Se π é uma derivação em $\mathcal{D}$ em FN, que demonstra $A \vee B$ $\|\exists x A[a/x]\|$, então a raiz de π é $i\vee$ $\|i\exists\|$ e a subderivação imediata da pM da raiz de π ou demonstra A ou demonstra B $\|$demonstra $A[a/\tau]$, para algum termo $\tau\|$.

Demonstração # A raiz de π não pode ser uma regra de eliminação, caso contrário haveria uma hipótese em aberto em π, segundo o Lema IV-4. Logo, a raiz de π é uma regra de introdução, pois π é uma demonstração em $\mathcal{D}$. Logo, $r(\pi)$ é $i\vee$ $\|i\exists\|$ e a subderivação da *pM* demonstra *A* ou demonstra *B* $\|$demonstra $A[a/\tau]$, para algum termo $\tau\|$. *QED*

Teorema IV-5 - Se π é uma derivação pura em FN, que demonstra $\Gamma \vdash A$ e $v(A)=0$, então há, ao menos, uma suposição aberta B em Γ e, se B for da forma $C \rightarrow D$, então $v(C)>0$. [248]

Demonstração # É preciso observar que $r(\pi)$ não pode ser regra de introdução, pois nenhuma dessas regras poderia ter conclusão de valor zero. Assim, $r(\pi)$ só poderia ser ou instância de eliminação, ou *Peirce*, ou *cm*. Como *cm* é caso particular de *Peirce*, não será preciso examiná-la como caso separado. A demonstração prossegue por indução no número de instâncias em π, $|\pi|_{inst.}$.

(i) $|\pi|_{inst.}=0$, é imediato.

(ii) $|\pi|_{inst.}=n+1$, temos dois casos.

---

[247] Até onde podemos ver, para obter o Lema IV-4 não seria necessário que a operação sobre os *UPEs* tivesse sido definida. Caso a operação sobre os *UPEs* não fosse considerada na definição da *FN*, a estrutura dos ramos axiais seria um pouco diferente daquela definida na *IE-forma*. Todavia, acreditamos que ainda haveria um ramo com as características recém-enunciadas no Lema IV-4. Nesse caso, a definição da *FN* contemplaria os *POIs* e os *PPIMs-I* $\|PPIPs\|$, mas não contemplaria os *UPEs*. Conseqüentemente, seriam requeridas algumas mudanças definicionais.

[248] Basicamente, o teorema afirma que $\Gamma \neq \varnothing$ e que $C \neq A$. A observação "se *B* for da forma $C \rightarrow D$, então $v(C)>0$" foi acrescentada por causa da regra de dedução indireta.

(ii.i) r(π) é *Peirce*, ou seja:

$$\pi\equiv \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ ,\ [\underline{A\rightarrow\varphi}]\\ \nabla\pi_1\\ A\end{array}}{A}\ i\ \text{Peirce}$$

Figura IV-69

Por *(HI)*[249], se π_1 em *FN* demonstra que $\Gamma\cup\{A\rightarrow\varphi: \varphi$ *é uma fórmula qualquer*$\}\vdash A$, então há ao menos uma fórmula *B* pertencente a $\Gamma\cup\{A\rightarrow\varphi\}$ tal que, se *B* for da forma $C\rightarrow D$, então $v(C)>0$. Logo, *B* só pode estar em Γ, pois $v(A)=0$ e, conseqüentemente, *B* não é da forma $A\rightarrow\varphi$.

(ii.ii) r(π) é uma instância de eliminação e, portanto, existe uma linha $\lambda=r_1,...,r_n,lh$ em π onde todas as instâncias são de eliminação, exceto a última, tal que nenhuma ocorrência topo da subárvore π_i determinada por r_i, para $1<i\leq n$, é descartada por uma instância antecessora de r_i nesse ramo, segundo o Lema IV-4. Logo, a *pM* de r_n é uma ocorrência topo aberta, seja ela *E*. Teremos dois subcasos.

(ii.ii.i) Se *E* é da forma $F\rightarrow G$, tal que $v(F)=0$, como r_n só pode ser $e\rightarrow$, a situação seria como abaixo:

$$\pi\equiv \dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_1 & \\ F & F\rightarrow G\end{array}}{\begin{array}{c}G\\ \nabla\pi_2\\ A\end{array}}\ e\rightarrow r_n$$

Figura IV-70

A derivação π_1 é subderivação de π_{r_n}, π_1 está em *FN*, $|\pi_1|_{inst.}<|\pi|_{inst.}$ e nenhuma ocorrência topo de π_1 é descartada fora de π_1, segundo o Lema IV-4. O resultado segue por *(HI)*, aplicado a π_1.

(ii.ii.ii) Se *E* não é da forma $F\rightarrow G$, ou, se for da forma $F\rightarrow G$, mas $v(F)>0$, então *E* é a suposição procurada. *QED*

Na prova desse teorema supusemos que *A* era uma fórmula básica, sem constantes lógicas. Isso inclui, evidentemente, o caso em que *A* é um parâmetro proposicional. O teorema acima constitui razão suficiente para dizer que não pode existir uma demonstração em *FN* de uma fórmula básica e em particular de um parâmetro proposicional *A* em nenhum dos sistemas puros definidos nos capítulos anteriores. Desse modo, também não poderá haver uma demonstração de $\bot$, pois a regra $i\bot$ só é aplicável em uma derivação quando o conjunto de suposições já permite

[249] Por **H**ipótese de **I**ndução.

obter, como conclusão, um parâmetro proposicional A.[250] Ou seja, se houvesse uma demonstração de um parâmetro proposicional A, ou mesmo a derivação de A a partir de hipóteses da forma $\sim A$ $[\![A \rightarrow \varphi]\!]$, caso no qual haveria uma demonstração de A usando a regra *cm* $[\![Peirce]\!]$, então haveria uma demonstração de $\perp$.

O resultado do lema anterior também permite dizer que a lógica é incapaz de demonstrar quaisquer proposições cujo conteúdo lógico seja zero, se, é claro, assumimos que as proposições com conteúdo lógico têm valor maior que zero.

Se as regras de eliminação fossem formuladas como na Figura IV-3, tanto no caso intuicionista quanto no caso clássico, a *pM* de uma regra de eliminação seria sempre uma ocorrência topo de uma derivação em *FN*, por causa do Lema IV-4 e da propriedade da IE-forma.

Teorema IV-6 - Não há demonstração pura em FN de $\vdash_C \perp$.

Demonstração # Se houvesse uma derivação π em *FN* cuja conclusão é $\perp$, então, aplicando uma regra de eliminação de $\perp$ demonstraríamos um parâmetro proposicional. Se houver um *POI* nessa nova demonstração será um *POI* de $\perp$. Sua eliminação resulta outra derivação em *FN*. Mas, pelo Teorema IV-5, necessariamente teríamos $\Gamma \neq \varnothing$ nessa nova derivação, onde Γ seria o conjunto de hipóteses abertas. Logo, não pode haver π em *FN* que possa nos dar $\vdash_C \perp$. *QED*

Para o Teorema IV-6, estamos supondo que a derivação está em *FN* e, pelo que podemos perceber, se a definição da *FN* não contemplasse as operações sobre os *PPIMs-I* $[\![PPIPs\text{-}I]\!]$, nós não poderíamos obter o teorema. O problema estaria na putativa prova do Teorema IV-5[251] e sem ela não teríamos base suficiente para a prova de consistência da lógica clássica.

---

[250] Ou seja, um conjunto impossível (incompatível) de suposições.

[251] Em caso contrário, consideremos que o ramo do Lema IV-4 poderia conter uma instância de *cm* $[\![Peirce]\!]$, cuja conclusão poderia ser *pM* de uma regra de eliminação. Observando a demonstração do Teorema IV-5, quando tratamos do caso onde $r(\pi)$ é uma eliminação, no passo indutivo da prova, o ramo teria outras características. Para mostrar que há uma suposição aberta que preenche os requisitos, seria preciso efetuar outra prova por indução no número de instâncias de *cm* $[\![Peirce]\!]$ no ramo em questão. Para zero instâncias, o resultado é imediato, como nos casos *(ii.ii.i)* e *(ii.ii.ii)* da prova do Teorema IV-5 acima. Para *m+1* instâncias de *cm* $[\![Peirce]\!]$, seria preciso operar sobre alguma das instâncias de *cm* $[\![Peirce]\!]$, diminuindo seu número total, mas não vemos forma de fazê-lo, sem envolver novamente um *PPIM-I* $[\![PPIP]\!]$ e a operação definida na Figura IV-31.

7.3. Propriedade da Subfórmula

A propriedade da *IE*-forma foi definida para os ramos axiais de instâncias e, com algum cuidado, também será aplicável aos ramos axiais de ocorrências. Inclusive, não seria preciso distinguir entre ocorrências relevantes e ocorrências irrelevantes.

Diremos que uma ocorrência pertence ao *I*-segmento de um determinado ramo axial ‖*E*-segmento‖ quando ela é conclusão de uma instância que está no *I*-segmento ‖*E*-segmento‖ do respectivo ramo axial de instâncias. Diremos que um ramo axial de ocorrências tem a **propriedade das subfórmulas** quando ele pode ser particionado em um *I*-segmento eventualmente vazio e um *E*-segmento exatamente complementar. Essa propriedade corresponde à propriedade da subfórmula enunciada, por exemplo, em ([Pra65], corolários 1 e 2 no cap. III e, novamente, no cap. IV). Observando o quadro das regras de introdução e lembrando que os ramos são lidos de baixo para cima na derivação, qualquer ocorrência no *I*-segmento será subfórmula da ocorrência de fórmula antecedente, quando houver antecedente, e, no *E*-segmento, será subfórmula da ocorrência de fórmula subseqüente, quando houver subseqüente. É preciso ainda lembrar que por definição qualquer fórmula básica será subfórmula de $\bot$. Em geral, nos ramos axiais sobre derivações puras, haverá uma ocorrência de fórmula dita **ocorrência mínima**, que será subfórmula das fórmulas do *E*-segmento e subfórmula das fórmulas do *I*-segmento, se houver esse último.

O chamado **princípio da subfórmula** [252]para os sistemas que não contêm a regra *cm* ou a regra *Peirce* é enunciado do seguinte modo: *para uma derivação π em FN que demonstra $\Gamma \vdash A$, toda ocorrência de fórmula será subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ.* A propriedade da *IE*-forma garante o princípio da subfórmula. Para os sistemas com regra *cm* ou regra *Peirce* é preciso afrouxar a restrição. As ocorrências de fórmula também poderão ser subfórmula de ocorrências topo descartadas por *cm* ou *Peirce*.

7.4. Unicidade da Forma Normal

Supondo que, para qualquer derivação de um determinado sistema, não exista nenhuma seqüência de operações de redução que possa ser estendida *ad libitum*, então em um número finito de passos de redução obteríamos uma derivação em *FN*. Mas, se houvesse outra seqüência

[252] Ver Corolário 1, pág. 42, em [Pra65].

distinta, tal que a derivação em *FN* resultante fosse diferente da anterior, forçoso seria concluir que o resultado do processo de redução dependeria das escolhas feitas. Ou seja, se isso viesse a ocorrer, é porque, em um dado momento, existiriam múltiplas alternativas de redução e a escolha afetaria o resultado final. Nesse caso, diríamos que, para o conjunto de operações de eliminação de rodeios, **a propriedade da unicidade da *FN* não valeria**. Por outro lado, se as escolhas não afetassem a derivação a ser obtida, diríamos que **vale a propriedade de unicidade da FN**.

A propriedade de unicidade fornece um **critério** (estrito) **de identidade entre as derivações** . Em princípio, quanto mais estrito o critério maior o número de distinções entre as derivações e, quanto maior o número de distinções, mais sutis podem ser os critérios. Um critério mais laxo confunde derivações que poderiam ser distinguidas.

Uma forma de estabelecer identidade entre as derivações consistiria em tomar o conceito de *FN* como um conceito básico nessa definição. Diríamos que **duas derivações quaisquer π e π' são idêntica**s quando $\pi^{\triangleright}$ e $\pi'^{\triangleright}$ pertencem à mesma classe de equivalência, sendo $\pi^{\triangleright}$ e $\pi'^{\triangleright}$ as respectivas *FNs*. Essa definição parcial dependeria ainda de um esclarecimento acerca dos critérios que seriam empregados para definir as classes de equivalência das derivações em *FN*. Poderíamos, por exemplo, tomar a classe das derivações em *FN* sintaticamente equivalentes, $\pi^{\triangleright} \equiv \pi'^{\triangleright}$, conforme a definição que esboçamos no Apêndice. Mas também seria possível caracterizar de forma mais laxa as classes de equivalência das derivações em *FN*, de modo que as derivações pertencentes a uma mesma classe não fossem necessariamente sintaticamente equivalentes, embora, provavelmente, todas as derivações em *FN* sintaticamente equivalentes devessem continuar pertencendo à mesma classe. Por exemplo, poderíamos determinar as classes de equivalência usando as *FNs* que mostram que $\Gamma \vdash A$. Do ponto de vista operativo, entretanto, tornar-se-ia mais difícil aplicar esse critério mais laxo, pois a identidade passaria a depender de considerações bem mais complexas que aquelas envolvidas na equivalência sintática das estruturas derivacionais. As duas derivações seguintes estão em *FN*, têm a mesma conclusão (não contêm hipóteses), mas são estruturalmente distintas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\to A}\,1\,i\to}{B\to(A\to A)}\,i\to}{(A\to A)\to(B\to(A\to A))}\,i\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]^1}{B\to(A\to A)}\,i\to}{(A\to A)\to(B\to(A\to A))}\,1\,i\to$$

Figura IV-71[253]

[253] Exemplo extraído da pág. 257 de [Pra71].

Mesmo adotando o critério mais estrito, é preciso observar que a *FN* de uma derivação qualquer é dependente e relativa a um conjunto de operações sobre as derivações. Esse conjunto de operações pode ser modificado, suas operações podem ser restringidas ou liberalizadas. Conjuntos de operações distintos resultam *FNs* distintas, de modo que qualquer modificação provoca, obviamente, alteração substancial no virtual critério operacional de identidade.

Assumir a propriedade de unicidade como um *desideratum* implica acatar certas restrições quanto à aceitabilidade das operações sobre as derivações. Implica também acatar certas restrições quanto à aceitabilidade de algumas definições sobre a noção de derivação. Isso não significa que um conjunto de operações ou uma definição que viole a unicidade sejam necessariamente destituídos de interesse.

Exemplificaremos a seguir o uso do critério de unicidade sobre um problema relativo ao descarte de ocorrências topo, tratado no Apêndice. Nesta tese, estamos adotando uma forma de descartes que é a mais liberal possível. A aplicação de uma instância de regra que nos faculte o descarte de hipóteses poderá descartar todas, algumas ou nenhuma ocorrência topo, à vontade. Porém nem sempre essa foi a forma de conceber os descartes na literatura[254].

Considerando que o conjunto de operações sobre os *POIs* esteja adequadamente justificado, a adoção do descarte compulsório no âmbito do sistema $\mathcal{N}$ implicaria a perda da propriedade de unicidade da *FN*. Isso está bem ilustrado nas duas séries de reduções alternativas para a derivação π abaixo, em que os *POIs* estão marcados em vermelho, π' é a *FN* que resultaria se a redução iniciasse pelo *POI (I)* e π'' é a *FN* que resultaria se a redução iniciasse pelo *POI (II)*:

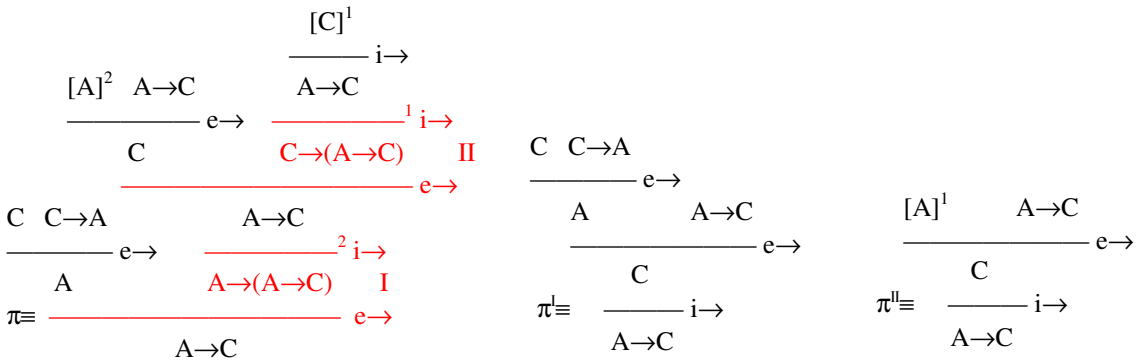


Figura IV-72

A perda da unicidade foi, dessa forma, tomada como razão suficiente para adotar a definição de descarte mais liberal.[255]

Via de regra, assumiremos que um conjunto de operações bem-definido deve oferecer um

---

[254] Prawitz [Pra65], pág. 27, assume uma forma de descartes que consiste em descartar compulsoriamente todas as ocorrências topo sintaticamente idênticas.

[255] Em conversa privada, o prof. L. Pereira disse-nos que já havia observado esse fato.

critério operacional de identidade com base última na equivalência sintática das derivações em *FN*. Um critério de identidade só será minimamente operacional, no entanto, após a demonstração da assim chamada confluência local, ou seja, somente após a demonstração de que, para duas operações imediatas distintas sobre uma mesma derivação, sempre existem seqüências de operações que confluem em uma mesma derivação. Por enquanto, até que seja dada uma prova, vamos nos contentar com o uso da intuição para determinar quais operações parecem não afetar a unicidade.

8. Outros Tipos de Rodeios

As operações relevantes à obtenção da *FN* e das propriedades estruturais que se seguem da *FN* já foram apresentadas. As operações a serem apresentadas não são relevantes para a obtenção daquelas propriedades estruturais, se bem que também não podem entrar em conflito com as operações já definidas. Em especial, não podem implicar a perda da unicidade ao serem introduzidas.

8.1. Simplificações sobre as Derivações

A seguir, apresentaremos algumas operações de simplificação. Em conformidade com as observações já feitas, a adição dessas operações suplementares implica uma modificação na virtual identidade operacional entre as derivações. Antes, discutiremos certas simplificações que aparecem na literatura, e que serão rejeitadas neste trabalho.

8.1.1. Rejeitando as Simplificações para e$\vee$ e e$\exists$

A literatura[256] de dedução natural prevê, ao lado das operações de eliminação de rodeios e de permutações, simplificações para instância$[\![s]\!]$ de $e\vee$ ou $e\exists$ que não descartam nenhuma ocorrência topo em pelo menos uma das subderivações subsidiárias, conforme a representação no quadro abaixo:

[256] Por exemplo, [Pra71], pág. 254.

	Regra com 0 (zero) ocorrência topo descartada em π_2	Resultado da Eliminação da Regra
Disjunção	$\pi\equiv$ $\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_2}{\dfrac{A_1\vee A_2 \quad C \quad C}{C}\,{}^{i}e\vee \\ \nabla\pi_4}$	$\pi^{I}\equiv$ $\dfrac{\nabla\pi_2}{\dfrac{C}{\nabla\pi_4}}$
	$\pi\equiv$ $\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \nabla\pi_2 \quad \nabla\pi_3}{\dfrac{A_1\vee A_2 \quad C \quad C}{C}\,{}^{i}e\vee \\ \nabla\pi_4}$	
Existencial	$\pi\equiv$ $\dfrac{\nabla\pi_1 \quad \nabla\pi_2}{\dfrac{\exists xA(x) \quad C}{C}\,e\exists \\ \nabla\pi_4}$	$\pi^{I}\equiv$ $\dfrac{\nabla\pi_2}{\dfrac{C}{\nabla\pi_4}}$

Figura IV-73

Essas duas operações de simplificação não serão incluídas entre as operações admissíveis, porque elas violam a propriedade da unicidade. Numa mesma situação, como abaixo, poderia ser aplicada uma simplificação ou uma redução e os resultados seriam distintos. Conseqüentemente, haveria perda da unicidade da *FN*:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{C \quad C\to B}{B}\,e\to \quad \dfrac{[A]^1 \quad B}{A\wedge B}\,i\wedge}{A\vee B}\,i\vee d \quad \dfrac{A\wedge B}{B}\,e\wedge d \quad [B]^1}{B}\,{}^{1}e\vee$$

redução do POI de $\vee$ em π

$$\pi^{I}\equiv\ \dfrac{C \quad C\to B}{B}\,e\to$$

simplificação da $e\vee$ seguida de redução do POI de $\wedge$

$$\pi^{II}\equiv\ B$$

Figura IV-74

Mesmo com uma restrição mais forte, exigindo que a simplificação fosse efetuada somente quando, tanto em π_2 quanto em π_3, nenhuma ocorrência topo fosse descartada pela regra, o problema da perda da unicidade persistiria e, na melhor das hipóteses, só poderia ser resolvido por um *fiat ad hoc*. Tornar-se-ia necessário escolher, dentre as duas subderivações subsidiárias, qual seria simplificada e, como duas escolhas são igualmente possíveis, novamente perderíamos a unicidade. Por exemplo, isso é o que ocorre se abaixo π_2 e π_3 estiverem em forma normal:

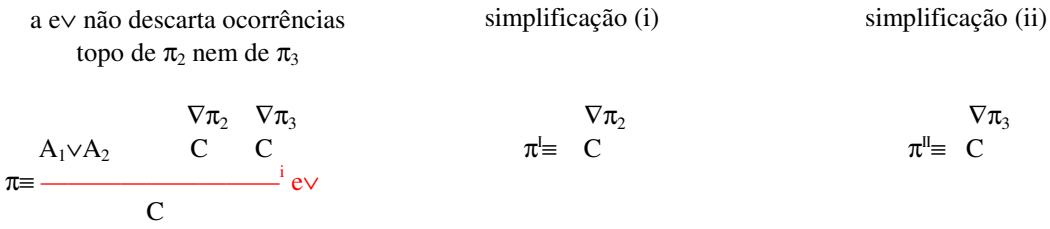


Figura IV-75

Se, para manter a unicidade das derivações em *FN*, for preciso interditar a simplificação de *e∨*, parece-nos que o mesmo deveria ser feito para a regra de *e∃*, ao menos por homogeneidade, pois as duas regras e os dois conectivos são muito similares, embora, no caso da *e∃*, não seja detectável a mesma perda da unicidade com a simplificação.

O fato é que as regras *e∨* e *e∃* são delicadas. É preciso lembrar que os *UPEs* foram introduzidos por causa da forma dessas regras. Também, eventualmente, pode ocorrer que, em uma derivação, uma instância dessas regras tenha uma conclusão exatamente idêntica à *pM*:

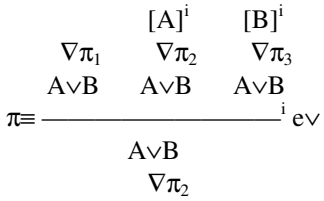
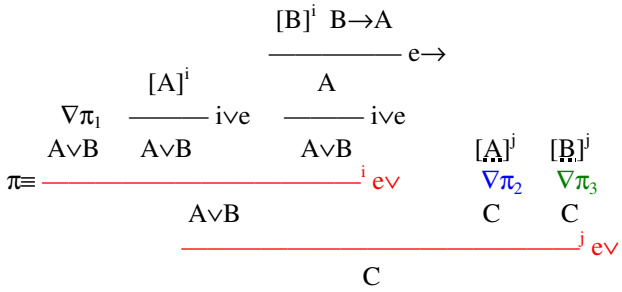


Figura IV-76

Por causa desse tipo de situação, as duas regras distinguem-se das demais regras de eliminação de co

constantes.

No exemplo acima parece haver uma excursão inútil por uma instância de regra de eliminação redundante. Todavia, a simplificação desse tipo de situação nos levaria à perda da unicidade. No exemplo abaixo, se supusermos que π_1 e π_2 estão em forma normal, supusermos que a raiz de π_1 não é instância de introdução, não é instância *cm*, não é *Peirce*, não é *e∨* nem *e∃*, teríamos perdido novamente a unicidade:



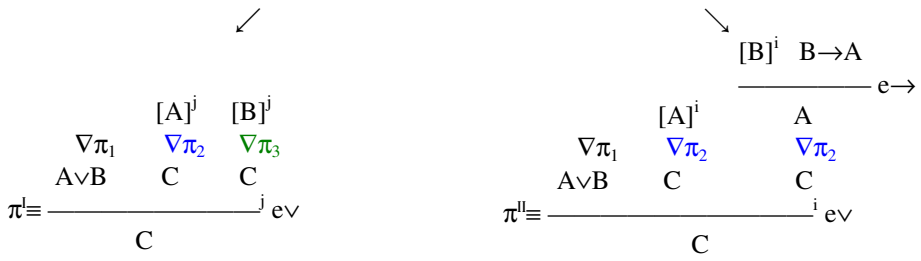


Figura IV-77

A derivação π' seria a simplificação imediata de π. A derivação π'' é obtida após três passos de redução a partir de π, começando com a permutação do *UPE*.

Se recordamos a forma pela qual os princípios de harmonia e de inversão foram enunciados, veremos que a situação da Figura IV-76 corresponde a uma possibilidade admitida pelos princípios: a de que $A \vee B$ seja conclusão e *pM* ao mesmo tempo. Efetivamente, $A \vee B$ deve ser uma das conseqüências de $A \vee B$ e a regra de eliminação da disjunção deve ser capaz, segundo aquele princípio, de permitir obter todas as conseqüências que já eram deriváveis de cada uma das condições suficientes para introduzir a disjunção. Assim, o mais justo parece ser considerar tanto a $e\vee$ quanto a $e\exists$ como *regras de conseqüência*, ou ainda *regras de extração de informação*. Estritamente falando, elas não seriam eliminações, já que, em certas situações, o símbolo pode efetivamente não ser eliminado. Nesse sentido, a regra de $e\vee$ - e o mesmo valerá para a regra $e\exists$ - não poderia ser simplificada quando a *pM* e a conclusão forem idênticas, pois a aplicação da regra seria correta desde o ponto de vista adotado. Em outros termos, embora a aplicação da regra seja, em certo sentido, redundante, seu conteúdo não seria exatamente trivial.

Por essas razões, escolhemos não simplificar as instâncias de $e\vee$ e $e\exists$, em que a *pM* e a conclusão são idênticas. Se a simplificação fosse mantida, seria preciso abandonar as permutações. Se as mantivéssemos, haveria perda da unicidade, conforme as derivações acima. Mas as operações sobre os *UPEs* parecem importantes tanto para a obtenção da propriedade da subfórmula quanto para o controle da finitude do processo de redução, conforme o próximo capítulo.

8.1.2. Rejeitando as Simplificações para $i\bot$

Segundo o Teorema III-1 do capítulo anterior, as instâncias de $i\bot$ são eliminá veis das derivações em $\mathcal{D}$. Todavia, essa operação não fará parte do rol das simplificações admitidas nesta tese. A sua admissão resultaria em perda da unicidade da *FN* se, ao mesmo tempo, tivéssemos a operação de eliminação sobre os *POIs* de $\bot$. Suponhamos que, no exemplo abaixo, a

subderivação π_1 esteja em *FN*:

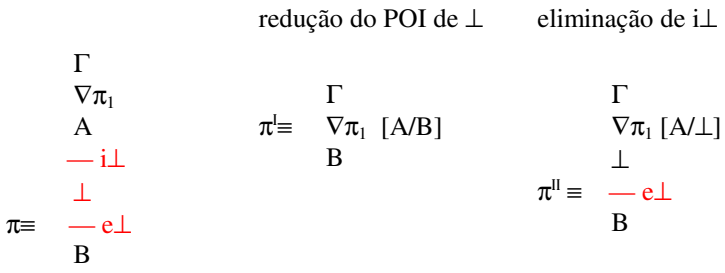


Figura IV-78

Não haveria como manter a unicidade. Sequer uma operação ulterior de substituição de $\perp$ por *B*, sobre a derivação π'', poderia garantir o re-estabelecimento da unicidade, pois $\perp$ já poderia ser ocorrência da derivação π_1 original.

8.1.3. Acerca da Simplificação Envolvendo *E⊥*

Se, ao invés de termos empregado a regra *e⊥* na definição dos sistemas, tivéssemos usado a regra *E⊥*, teríamos a faculdade de aplicar uma simplificação conforme a Figura IV-28 acima. Naquele caso, uma instância de eliminação imediatamente subseqüente a uma instância de *E⊥* era considerada eliminável. Entretanto, se a simplificação para *E⊥* fosse admitida, obteríamos como resultado a perda da unicidade da *FN*, na medida em que mantivéssemos a eliminação do *POI* de $\perp$ em um sistema com operação de permutação sobre os *PPIPs*, conforme os esquemas abaixo, onde *A* é um parâmetro proposicional:

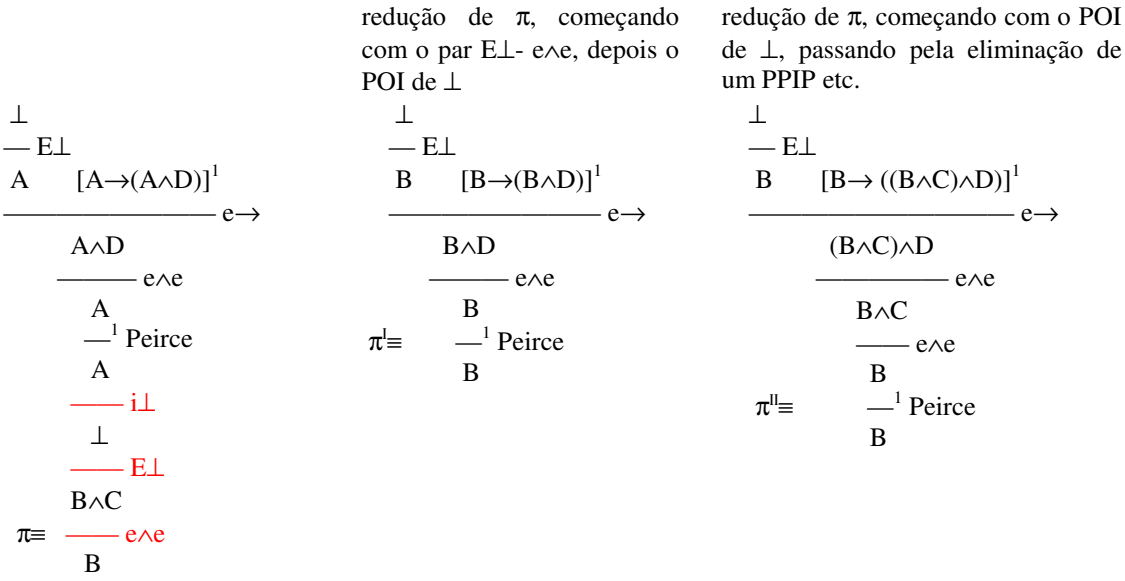


Figura IV-79

Recordamos, todavia, que a forma da regra que consideramos preferível é aquela apresentada na Figura IV-12, ou seja, a regra $e\bot 2^{a}$, embora, em nossas considerações futuras, adotemos somente a regra $e\bot$, por questão de simplicidade. Com a regra $e\bot 2^{a}$, seria absurdo aplicar a simplificação da Figura IV-28. Nesse caso, o mais recomendável seria a permutação do *UPE* que ali existiria:

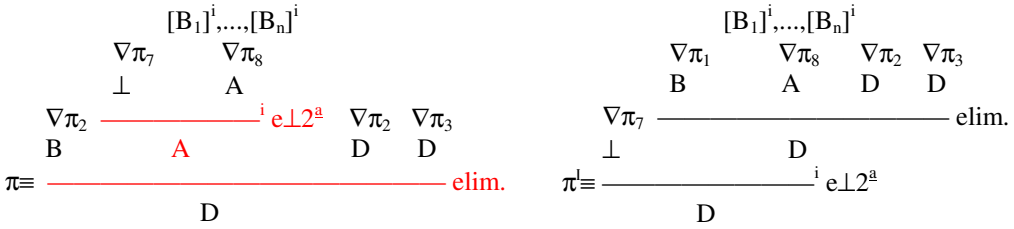


Figura IV-80

Finalmente, como conseqüência, se admitíssemos que a regra $e\bot 2^{a}$ é uma das formulações mais adequadas para a eliminação do absurdo e se rejeitássemos a simplificação envolvendo $E\bot$, também deveríamos rejeitar a operação envolvendo o par $\bot_c$-eliminação. Como vimos, a simplificação envolvendo a regra de $E\bot$ é um caso particular da operação sobre o par $\bot_c$-eliminação quando a regra $\bot_c$ não descarta nenhuma ocorrência topo.

8.1.4. Simplificações Acolhidas

É possível operar sobre as derivações de muitas formas distintas, simplificando ou eliminando excursões desnecessárias. As simplificações que serão adotadas neste trabalho serão apresentadas a seguir. Elas envolvem, genericamente, a remoção de uma excursão inútil por instâncias/ocorrências dentro de uma derivação.

8.1.4.1. Pares de Regras Simplificáveis

Definimos, a seguir, uma simplificação aplicável aos pares contíguos de instâncias de *cm* ⟦*Peirce*⟧. A justificativa para adotar essa simplificação é a de que a utilidade de uma instância de *cm* ⟦*Peirce*⟧ advém da possibilidade de fechar suposições em aberto, já que tanto a conclusão quanto a premissa imediata são idênticas. Assim, se duas instâncias contíguas fecham suposições da mesma forma geral, então uma delas é desnecessária. Ou seja, uma dessas instâncias de *cm* ⟦*Peirce*⟧ constituiria uma excursão desnecessária. Essa simplificação será de suma importância para os procedimentos de normalização, já que ela permite um controle dos valores de indução usados na prova da finitude do procedimento:

		Derivação		Simplificação do Par	
Par Não-Multiplicativo	Par Simplificável (Tipo I)	$[\underline{A\rightarrow\bot}]^{i}{}_{n}$, $[\underline{A\rightarrow\bot}]^{j}{}_{m}$ $\nabla\pi_7$ A $\pi\equiv$ $\quad\quad —^{i}$ cm ‖Peirce‖ r^{II} A $\quad\quad —^{j}$ cm ‖Peirce‖ r^{I} A $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_7\rvert+1$	$[\underline{A\rightarrow\bot}]^{k}{}_{n+m}$ $\nabla\pi_7$ **A** $\pi^{I}\equiv$ $\quad —^{k}$ cm ‖Peirce‖ **A** $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_7\rvert$

Figura IV-81

Se r^{I} é a regra de índice j e r^{II} é a regra de índice i, diremos que esses pares $<r^{I},r^{II}>$ são **Pares Simplificáveis do Tipo I** (***PS-I***), onde $m\geq 0$ e $n\geq 0$ são o número de instâncias topo descartadas pelas instâncias r^{II} e r^{I}. Da mesma forma que anteriormente, a ocorrência em vermelho é uma **fórmula máxima**. No caso em que as regras envolvidas sejam do tipo *P*, as ocorrências no lugar de φ devem ser sintaticamente idênticas para que possamos aplicar a operação.[257]

Seldin ([Sel89], pág. 199) elenca essa mesma operação entre as operações que serão empregadas para obter seu teorema de forma normal, ele a chama de *⊃K⊃K-reduction*.

No caso de um sistema em que o descarte *à la mirabilis* ‖*Peirce*‖ é feito sobre as regras de introdução e sobre as regras de eliminação, a redução de um *POI* ou a permutação de um *UPE* envolveria um ajuste de índices. Parte da operação de ajuste é dada pela permutação dos *PPIMs-I* ‖*PPIPs*‖ definidos acima, mas outra parte é dada, justamente, pela operação que foi recém-definida. Isso é mais fácil perceber no caso dos *UPEs*.

A propriedade da *IE*-forma com essa operação torna-se mais perspícua, pois não existiriam segmentos de ramos compostos por várias instâncias *cm* ‖*Peirce*‖ contíguas. Além disso, uma permutação de um *PPIM-I* ‖*PPIP*‖ poderia gerar outro *PPIM-I* ‖*PPIP*‖ do mesmo valor, caso as duas instâncias *cm* ‖*Peirce*‖ fossem contíguas. Assim, a operação acima resolveria um problema relativo ao procedimento de redução, como exemplificado abaixo, onde π' é obtido por redução imediata do *PPIM-I* em π.

[257] Lembramos que a expressão *Peirce* é usada ambiguamente para referir as regras *P* e *Pg*.

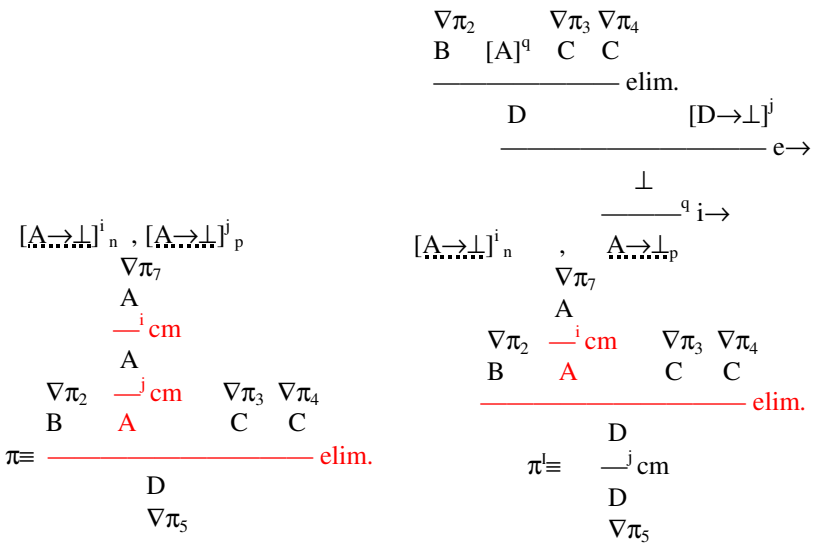


Figura IV-82

Após a redução do *PPIM-I*, surge outro *PPIM-I* do mesmo valor e isso seria um problema se estivéssemos construindo uma prova por indução no valor dos rodeios.

Uma outra operação de simplificação complementar, envolvendo *cm* ⟦*Peirce*⟧, será importante para demonstrar a finitude do processo de redução. Uma aplicação de *cm* ⟦*Peirce*⟧ descarta ocorrências topo que podem ser *pM* de $e\rightarrow$ ou não. Logo, a permutação de um *PPIM-I* ⟦*PPIP-I*⟧ poderia gerar um novo *POI* de valor maior que o do *RD* eliminado[258]:

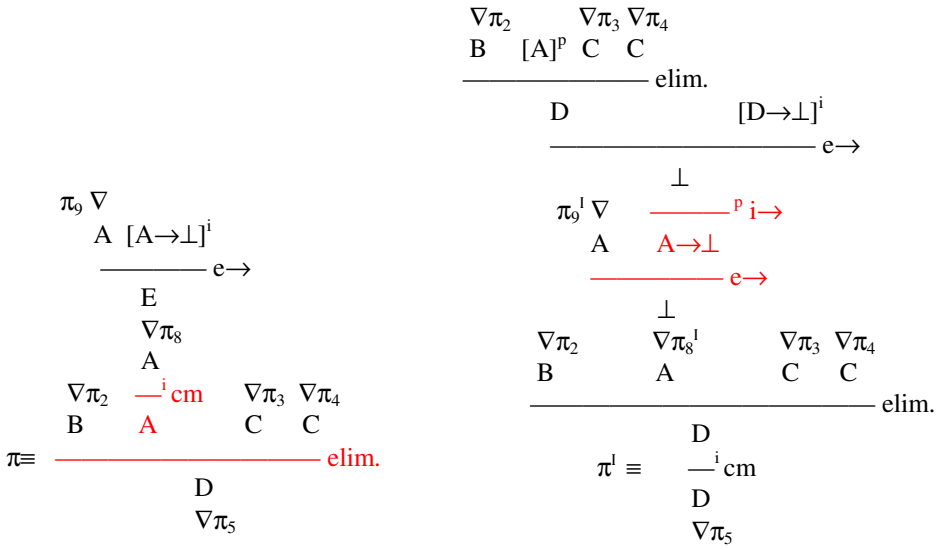


Figura IV-83[259]

Uma redução ulterior do *POI* destacado resultaria na seguinte derivação:

---

[258] Algo similar ocorre com os pares $\perp_c$-eliminação.

[259] Veja que a redução do *PPIM-I* poderá alterar π_8 e π_9, resultando as derivações π_8^I e π_9^I.

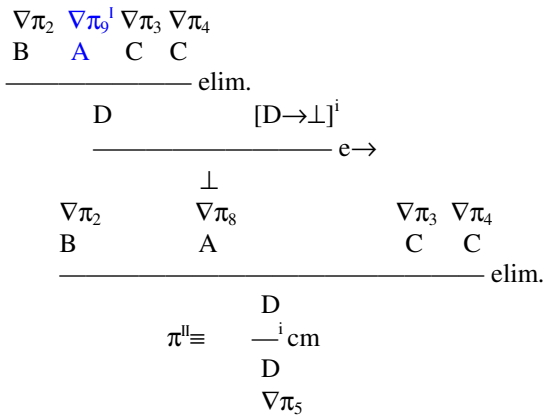


Figura IV-84

Dependendo de qual for a instância raiz de π_9^I, haverá um novo *RD* na derivação π''. Se a instância for de introdução, será um *POI*; se for um segmento constante, será um *UPE*; se for *cm*, um *PPIM-I*. O valor desses novos *RDs* seria exatamente o mesmo valor do *PPIM-I* permutado em π. Em particular, se a instância fosse *cm*, a derivação π'' do exemplo acima seria como abaixo:

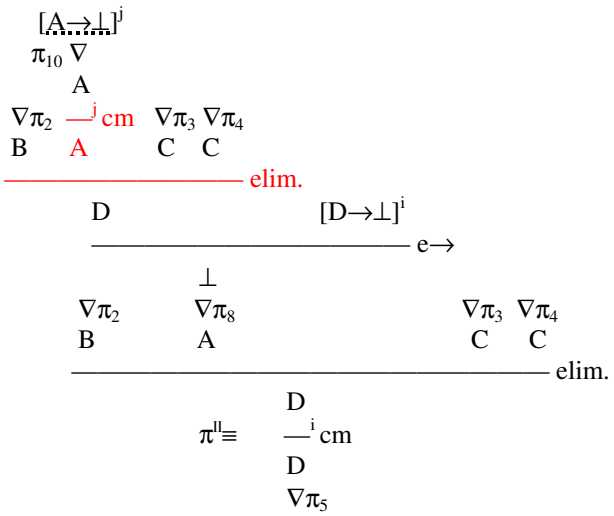


Figura IV-85

Mas, nessa situação, o círculo fecha-se e retornamos ao problema original de reduzir um *PPIM-I* do mesmo valor, após todos os passos de redução.

Se admitirmos a seguinte simplificação, poderíamos barrar parcialmente a aparição de novos *PPIMs-I* do mesmo valor:[260]

[260] Um problema similar ocorre com a regra $\bot_c$, como era de se esperar. Na literatura, ele é resolvido com o acréscimo de novas operações, as quais guardam alguma similaridade com a operação a ser introduzida.

		Derivação		Resultado da Simplificação Imediata	
Par Não-Multiplicativo	Par de Indiretas (Tipo II)	$[\underline{A\rightarrow\bot}]^{i}{}_{n}$ $\nabla\pi_9$ A $—^{i}$ cm r^{II} A $\quad [A\rightarrow\bot]^{j}$ ——————— e→ $\bot$ $\nabla\pi_8$ A $\pi\equiv$ $—^{j}$ cm r^{I} A $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_8\rvert+\lvert\pi_9\rvert+\lvert\pi_9\rvert+2$	$[\underline{A\rightarrow\bot}]^{j}{}_{n}$ $\nabla\pi_9$ **A** $\quad [A\rightarrow\bot]^{j}$ ——————— e→ $\bot$ $\nabla\pi_8$ A $\pi^{I}\equiv$ $—^{j}$ cm A $\nabla\pi_5$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_5\rvert+\lvert\pi_8\rvert+\lvert\pi_9\rvert+1$

Figura IV-86

Chamaremos os pares **<r^{I},r^{II}>** de **Pares Simplificáveis do Tipo II** (***PS-II***), tal que r^{I} é a instância *cm* de índice *j* e r^{II} é a instância de índice *i* na figura acima; $n\geq 0$ é o número de instâncias topo descartadas pela instância r^{II}. Diremos que a ocorrência em vermelho é uma **fórmula máxima**. Essa operação de simplificação depende da forma dos descartes da regra *cm*. O procedimento só faria sentido para a regra *P* original se as fórmulas descartadas com índice *i* e índice *j* forem idênticas. A operação não será, em geral, aplicável à regra *Pg*, pois podem ocorrer problemas com os parâmetros individuais[261], a menos que todas as fórmulas descartas sejam idênticas. Da mesma forma que a operação sobre os *PSs-I*, essa operação não afeta a *IE*-forma. O motivo de haver definido a operação estava em evitar que novos *PPIMs-I* de mesmo valor pudessem surgir após a redução de um *PPIM-I*.

É interessante observar que Seldin ([Sel89], pág. 197) propõe uma simplificação para situações similares àquelas capturadas na derivação π da Figura IV-83 a qual poderia também oferecer, em algumas situações uma solução ao problema que nos havia levado a formular a operação de simplificação sobre os *PSs-II*. Em uma situação como aquela o autor propunha a operação abaixo, que só será aplicável caso nenhuma ocorrência topo de π_9 seja descartada em π_8:

[261] Similar ao que ocorre no exemplo da Figura IV-43.

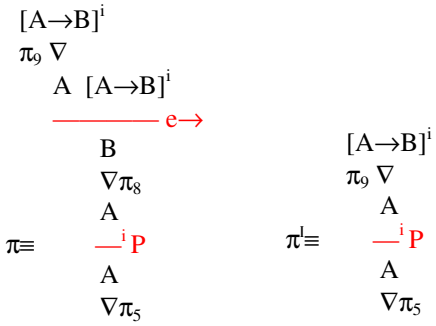


Figura IV-87

Ele designa essa simplificação como uma *⊃K-reduction*. A operação será aplicável mesmo se não houver nenhuma ocorrência topo de π_9 descartada pela regra *P* de índice *i*. A admissão dessa simplificação implicaria a perda da unicidade da forma normal junto com as reduções de POIs:

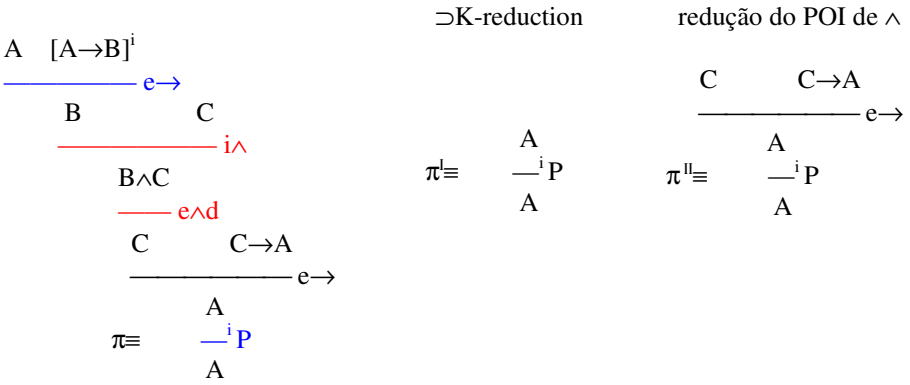


Figura IV-88

A operação sobre os *PSs-II* foi definida com o objetivo de barrar a aparição de novos *PPIMs-I* de mesmo valor. No entanto, ainda poderiam ocorrer situações como a que se segue:

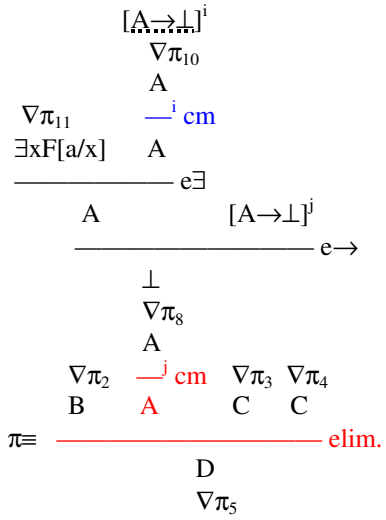


Figura IV-89

Temos aqui um problema similar ao que deu origem às simplificações dos *PSs-II*. Haverá uma

seqüência de reduções começando com o *PPIM-I*, que acabará por gerar outro *PPIM-I* do mesmo valor[262]:

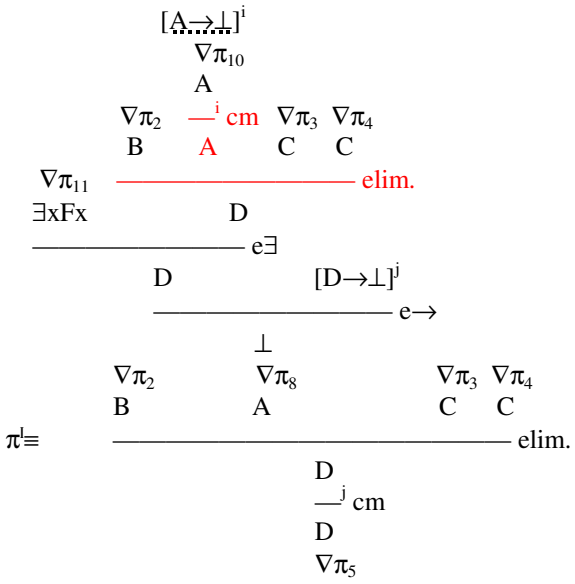


Figura IV-90

A priori, poderia parecer que uma das formas de solucionar o problema consistiria justamente em postular uma pequena permutação entre a $e\rightarrow$ e a $e\exists$ sobre a Figura IV-89, envolvendo agora a *pm* da $e\rightarrow$, conforme, por exemplo, ([Mas90], reduções (10) e (11) à pág. 15). Porém, é difícil ver como essa permutação seria justificada, já que a permutação seria sobre uma *pm*[263] que nesse caso é diferente da conclusão da regra.[264]

Uma solução consistiria simplesmente em propor a permutação da instância *cm* em azul com a $e\exists$ sobre a Figura IV-89 e, ao que parece, só no caso da regra *consequentia mirabilis* haveria solução, ao menos se quiséssemos manter a unicidade da *FN*. O problema já havia sido observado anteriormente quando examinávamos a derivação na Figura IV-43. Para aquele problema poderia parecer, *a priori*, que a solução da Figura IV-44 funcionasse. Mas essa solução implicaria a perda da unicidade da *FN*. A redução do POI da derivação abaixo resultaria uma derivação diferente da derivação que resultaria da simplificação da derivação abaixo:

---

[262] A seqüência consiste da redução do *PPIM-I* seguida de redução de *POI de* $\rightarrow$ e de *UPE* sobre a Figura IV-89.

[263] Inclusive, a permutação não funcionaria se a dedução indireta empregada fosse a regra *Peirce*, pois a permutação poderia transformar a derivação em uma estrutura incorreta, na medida em que o parâmetro próprio de $e\exists$ poderia ocorrer na *pM* de $e\rightarrow$.

[264] Em outras regras de eliminação, como $e\vee$, temos *pms* idênticas à conclusão da regra.

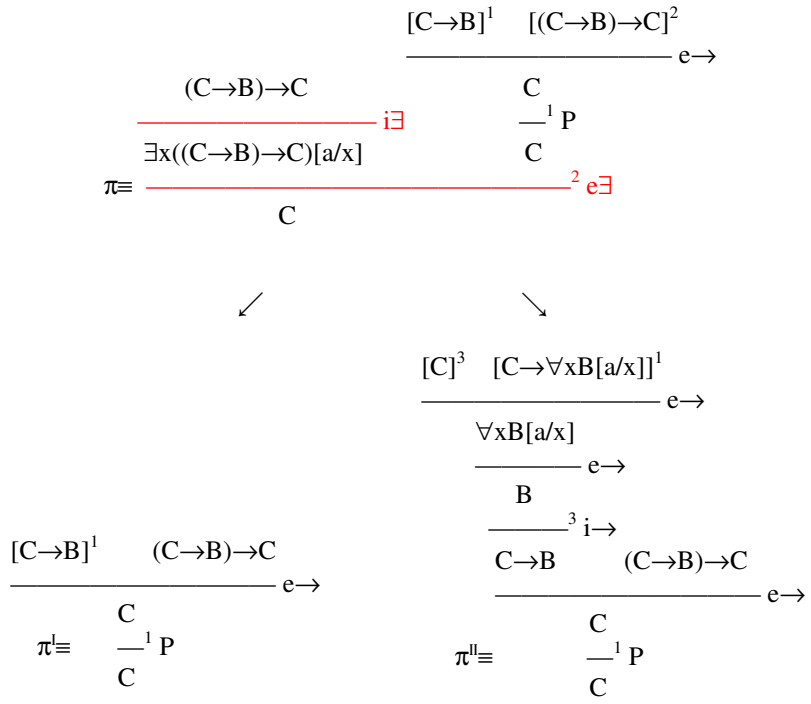


Figura IV-91

A solução da Figura IV-44 havia sido adotada por Seldin ([Sel89], pág. 207).

Quando usamos a regra *cm* ao invés da regra *Peirce*, a permutação com $e\exists$ torna-se viável, conforme já havíamos notado na Figura IV-45. A solução seria como a seguir:

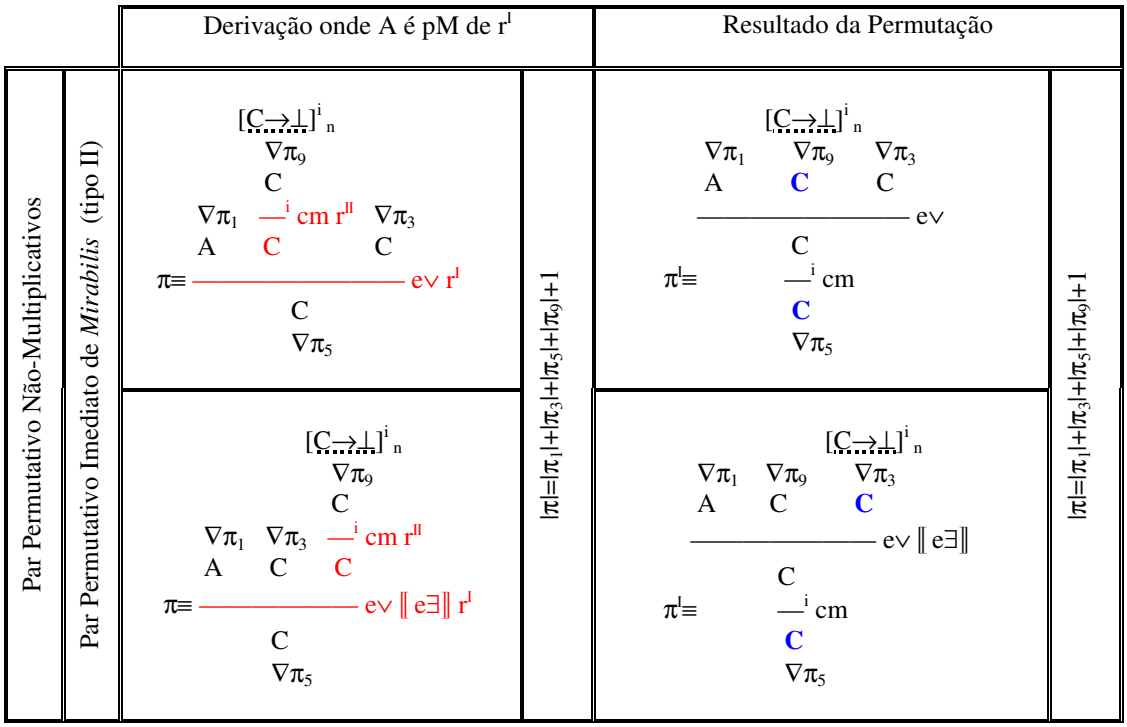


Figura IV-92

A ocorrência de *A*, *pM* da regra, deve ter a forma $E \vee F$ ou a forma $\exists xE[a/x]$. Se tivesse a forma $\exists xE[a/x]$, a subderivação π_3 não existiria. Diremos que $\langle r^I, r^{II} \rangle$ é um **Par Permutativo**

Imediato de *Mirabilis* do Tipo II *(PPIM-II)*. O número de ocorrências topo descartadas pela instância *cm* tem de ser *n>0*. Diremos daquela *pm* de r^{I} que é conclusão de *cm* que ela é uma **fórmula máxima**. Essa operação também não modifica essencialmente a propriedade da *IE*-forma para as derivações em *FN*.

A justificativa dessa operação é delicada. Em princípio, como, nas regras de eliminação, a conclusão deve ser uma conseqüência das condições de introdução, poderíamos considerar que o fato de permutar a regra para baixo advém do fato de que a regra de dedução indireta estende o conceito de conseqüência dedutiva. Ou ainda, a permutação para baixo da regra de dedução indireta não afetaria a relação de conseqüência dedutiva, já que tanto a *pm* de eliminação quanto a sua conclusão são idênticas, teríamos de novo uma espécie de ajuste de conseqüências.

8.1.4.2. Unidades Simplificáveis

Nos *PS-I* e *PS-II* definidos acima, poderia acontecer de uma das instâncias *cm* não descartar nenhuma ocorrência topo. A operação definida sobre os *PSs* permitiria que aquela instância fosse eliminada da derivação com a eliminação do *PS*. Contudo, as duas operações não podem, *a priori*, garantir que todas as instâncias de *cm* que não descartem ocorrências topo sejam eliminadas de uma derivação. Uma instância *cm* que não descarta nenhuma ocorrência topo não tem utilidade na derivação. Essa é a razão pela qual definimos a simplificação abaixo. A situação é complexa, pois uma situação na qual a regra não descarta nenhuma ocorrência topo em uma derivação pode, na verdade, ser uma decorrência do processo de redução. No processo de redução, sobretudo dos *RDs* não-multiplicativos, muitas ocorrências topo podem ser eliminadas.

A aplicação dessa simplificação pode ser deixada para o final do processo redutivo, quando mais nenhuma outra redução for aplicável. No entanto, a definição a seguir será dada da forma mais livre possível, entendendo que a operação poderá ser aplicada a qualquer momento no processo de redução:

		Derivação onde a instância cm não descarta nenhuma ocorrência topo		Resultado da Simplificação Imediata	
Unidades Não-Multiplicativas	Unidade Simplificável de cm ‖Peirce‖	$\pi\equiv \dfrac{\begin{array}{c}\nabla\pi_1\\ A\end{array}}{\begin{array}{c}cm\ \|\|Peirce\|\|\ r^{I}\\ A\\ \nabla\pi_5\end{array}}$	$\lvert\pi\rvert=\lvert\pi_1\rvert+\lvert\pi_5\rvert$	$\pi^{I}\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_1\\ \mathbf{A}\\ \nabla\pi_5\end{array}$	$\lvert\pi^{I}\rvert=\lvert\pi_1\rvert+\lvert\pi_5\rvert-1$

Figura IV-93

Quando uma instância r^l de *cm* ⟦*Peirce*⟧ é como acima, diremos que r^l é uma **Unidade Simplificável** (***US***). Para homogeneizar a designação das unidades com a designação dos pares, diremos que $<r^l, r^l>$ é uma *US*. Nesse caso, consideraremos que não haverá **fórmula máxima**.

Uma instância de *cm* ⟦*Peirce*⟧ tem o único fim de descartar ocorrências topo. Se ela não as descarta, sua utilidade é nula. O fato de haver introduzido uma regra *cm* ⟦*Peirce*⟧ distinta das regras de introdução e de eliminação é o fato gerador da necessidade de introduzir essa simplificação. Se as regras de introdução e de eliminação permitissem o descarte *à la mirabilis* ⟦*à la Peirce*⟧, não seria preciso definir a operação de simplificação.

Observamos que essa operação não faz parte do rol de operações sobre regras de dedução indireta elencadas no trabalho de Seldin ([Sel89]).

Já reparamos que uma instância de *cm* ⟦*Peirce*⟧ pode se tornar eliminável quando uma operação de redução elimina toda uma subderivação e, conseqüentemente, suas ocorrências topo. Por essa razão, todos os esquemas de definição das operações de redução apresentadas anteriormente têm marcada em verde a subderivação que poderia ser afetada pela operação, ou seja, é na subderivação em verde que podem surgir *USs*. A subderivação poderia passar a ter uma instância de *cm* ⟦*Peirce*⟧ eliminável. Isso ocorrerá com as reduções não-multiplicativas. A única redução de um par multiplicativo que pode ocasionar o mesmo é o *POI* de $\vee$, pois uma subderivação com ocorrências topo sempre é eliminada nesse caso.

8.2. Acerca dos Critérios de Admissibilidade para Simplificações

Na verdade, outras simplificações poderiam ser definidas. Da mesma forma que com os demais *RDs*, as simplificações requerem algum tipo de justificação ulterior. Em certa medida, as escolhas dependerão da natureza da tarefa elucidatória que nos propusermos. Por outro lado, o critério de unicidade parece ser um critério importante na escolha das operações a serem definidas. Torna-se mais difícil saber quando duas derivações podem ser consideradas idênticas, se abandonamos o critério de unicidade erigido sobre a identidade sintática das *FNs*.

A seguir, oferecemos um exemplo de simplificação que parece, a princípio, razoável:

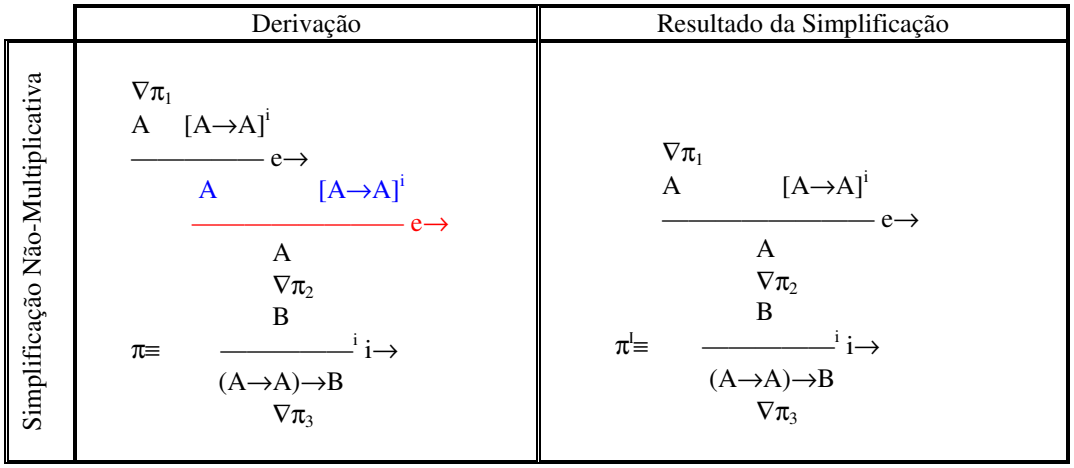


Figura IV-94

A instância de $e\rightarrow$ em vermelho é, aparentemente, uma "excursão" desnecessária. Porém, se admitíssemos a operação de simplificação sobre essa instância, isso afetaria outras construções formais insuspeitas. A derivação à esquerda tem uma estrutura que, em dedução natural, equivaleria à estrutura de certas construções do λ-cálculo empregadas para representar números: os chamados numerais de Church[265]. O resultado dessa simplificação acabaria por confundir todos os numerais de Church. Assim, parece-nos, as simplificações devem ser examinadas e justificadas caso a caso, com vistas a um objetivo específico.

O seguinte exemplo de simplificação parece admissível. Mas ela não será considerada na presente tese, porque não temos uma boa justificativa para acolhê-la. Seu efeito seria o de tornar a *IE*-forma mais perspícua:[266]

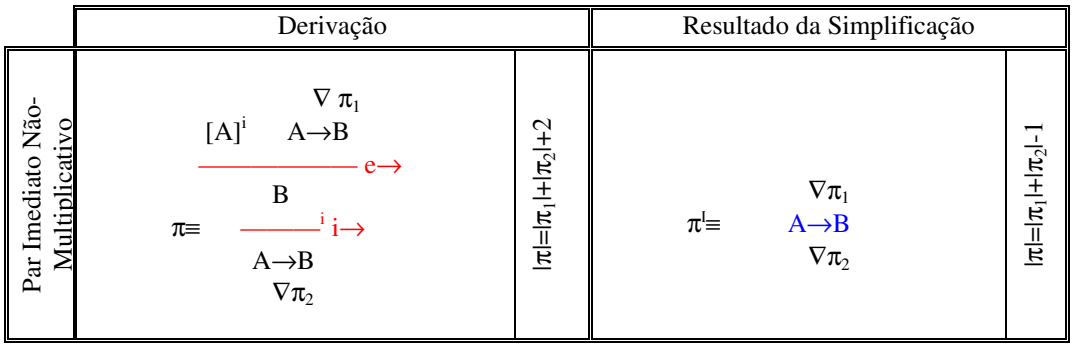


Figura IV-95

9. Rodeios e Forma Normal

A introdução das simplificações exige a extensão de alguns conceitos já definidos e, conseqüentemente, a adição de algumas cláusulas maximais.

---

[265] O isomorfismo entre o λ-cálculo com tipos simples e o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ é chamado de isomorfismo Curry-Howard.
[266] Ela corresponde à η-redução do λ-cálculo.

Em primeiro lugar, com a introdução das *USs*, dos *PSs-I,* dos *PSs-II* e dos *PPIMs-II*, é necessário estender nossa definição de redução.

Definição IV-9 - Diremos também que uma derivação π em algum sistema **reduz-se** *imediatamente a uma derivação π', $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, se π' é o resultado de eliminar uma US, ou de eliminar a instância indireta em um PS-I ou em um PS-II, ou de permutar um PPIM-II daquele sistema.*

Definição IV-10 - Cláusula maximal para o conceito de **redução** *- Uma redução está completamente definida pela Definição IV-3 e Definição IV-9.*

Em segundo lugar, estendemos o conceito de rodeio. Antes, é preciso lembrar a convenção para homogeneizar a representação de um rodeio com uma única instância r^{I}. Nesses casos, ela é feita por um par da seguinte forma: $<r^{I},r^{I}>$.

Definição IV-11 - Diremos também que $<r^{I},r^{II}>$ é um **rodeio** *(**RD**):*

(i) quando $<r^{I},r^{II}>$ é uma US tal que $r^{I.}$ é a mesma instância r^{II};

(ii) quando $<r^{I},r^{II}>$ é um PS, seja de tipo I ou de tipo II;

(iii) quando $<r^{I},r^{II}>$ é um PPIM-II.

Definição IV-12 - Cláusula maximal - Os **rodeios** *estão definidos pela Definição IV-4 e Definição IV-11.*

Em terceiro lugar, estendemos o conceito de valor redutivo de um *RD*. Como as operações sobre as *USs* surgem por causa da forma como são representados os descartes *à la mirabilis* ‖*Peirce*‖, por uma regra que não é nem introdução nem eliminação, eles terão valor destacado dos demais. Adicionalmente, vários tipos de reduções podem dar surgimento às *USs* sem que haja uma relação entre o grau das ocorrências envolvidas.

Definição IV-13 - O valor redutivo de um RD $<r^{I.},r^{II}>$ será $v_{\triangleright}(<r^{I},r^{II}>)=1$, quando o RD é uma US.

Dessa forma, garantimos que qualquer redução que venha a criar uma *US* não criará um *RD* que seja de grau maior que aquele reduzido. Essa decisão é claramente *ad hoc*, mas queremos notar que, se o descarte *à la mirabilis* estivesse sobre as regras de introdução e de eliminação, essa operação sequer teria onde ser aplicada. Do nosso ponto de vista, só estamos obrigados a fazê-la porque estamos considerando as deduções indiretas por meio de uma regra distinta e

separada das demais.

Da forma como foram definidos os *PSs* e os *PPIMs-II*, em ambos casos, a fórmula envolvida como fórmula máxima pode ser de valor zero. Para garantir que somente as derivações em *FN* tenham valor redutivo zero, somamos uma unidade a mais para obter o valor dos *RDs*. Isso mais o fato de estarmos adotando o valor redutivo *1* para as *USs* explicam por que anteriormente adicionamos *1* ao valor redutivo de todos os *RDs*.

Definição IV-14 - O **valor redutivo** *de um RD* $<r^{I},r^{II}>$ *será* $v_{\triangleright}(<r^{I},r^{II}>)=v(A)+1$, *quando o RD é um PS de tipo I ou II, ou um PPIM-II, caso A seja a fórmula máxima envolvida.*

Definição IV-15 - Cláusula maximal - O **valor redutivo** *de um RD está dado pela Definição IV-5, Definição IV-13 e Definição IV-14.*

Dizíamos que uma derivação está em *FN* quando ela não contém nenhum *RD*, o que deverá, doravante, incluir os *RDs* recém-definidos. O **valor redutivo de uma derivação** π ($v_{\triangleright}(\pi)$) será o maior valor dentre os valores redutivos dos *RDs* presentes em π. Uma derivação π em *FN* tem valor redutivo igual a zero, $v_{\triangleright}(\pi)=0$.

9.1. Propriedades das Operações Não-Multiplicativas

Para todos os *RDs* não-multiplicativos, a redução encolhe a derivação. Essa propriedade é enunciada no teorema a seguir.

Teorema IV-7 - Se π *é uma derivação em algum sistema e* $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{I}$ *sobre um RD não-multiplicativo, então:*

(i) para quaisquer duas instâncias distintas r^{III} *e* r^{IV} *em* π^{I}, *elas serão resíduo de duas instâncias distintas* r^{I} *e* r^{II} *de* π;

(ii) $|\pi^{I}|<|\pi|$;

(iii) cada linha λ^{I} *de* π^{I} *é resíduo de uma única linha* λ *de* π *e* $|\lambda^{I}|\leq|\lambda|$.

Demonstração # Conforme as operações não-multiplicativas da Figura IV-8, da Figura IV-10, Figura IV-93, Figura IV-81, Figura IV-86 e Figura IV-92. *QED*

9.2. O Valor Redutivo dos Novos RDs

Os conceitos de valor de um *RD* e de valor redutivo de uma derivação estão intimamente conectados ao conceito de valor de uma fórmula. Seja o valor pensado como grau ou como

profundidade[267], o que interessa considerar é o fato de que a redução de um *RD* qualquer envolvendo como fórmula máxima uma fórmula *A* pode gerar novos *RDs* cuja fórmula máxima *B* tem algum tipo de relação com a fórmula *A*. Freqüentemente, *B* será subfórmula própria de *A*, mas nem sempre.

Abaixo serão analisadas as relações entre as fórmulas e subfórmulas envolvidas nas operações sobre os *RDs*. Quando *A* é subfórmula própria de *B*, o grau *g(A)* é menor que o grau *g(B)* e a profundidade *p(A)* é menor que a profundidade *p(B)*.[268]

Observando as figuras de definição dos *RDs* – Figura IV-8, Figura IV-10, Figura IV-25, Figura IV-31, Figura IV-81, Figura IV-86, Figura IV-92 e Figura IV-93 – intuímos que de várias dessas operações de redução podem surgir novos *RDs*. As ocorrências em azul nas figuras apontam quais resíduos de ocorrência poderiam passar a ser fórmulas máximas nas derivações obtidas. Por outro lado, as subderivações em verde indicam onde poderiam surgir as *USs* que, lembramos, não têm fórmula máxima. Examinaremos a seguir quais tipos de *RDs* podem surgir e qual o seu valor redutivo.

Lema IV-5 - A redução imediata de um POI resultará numa derivação cujo valor redutivo será menor ou igual ao valor redutivo da derivação original.

Demonstração # Observando as Figura IV-8 e Figura IV-10, vemos que os *RDs* da derivação obtida ou são resíduo da derivação anterior ou são novos *RDs*. Se forem novos, envolverão como fórmula máxima as ocorrências em azul ou, eventualmente, serão *USs* que surgirão na subderivação em verde. Como o valor redutivo das *USs* é sempre *1 (um)*, resta-nos examinar os casos em que as ocorrências em azul tornam-se fórmulas máximas. As ocorrências *A*, $A_{1/2/}$, *A[a/t]*, *B* e *D* nas figuras são todas fórmulas de valor menor que o da fórmula máxima reduzida. Assim, qualquer novo *RD* sobre elas terá menor valor que o valor do *RD* reduzido. As ocorrências *C*, sejam elas conclusão de $e\vee$ ou de $e\exists$, podem, eventualmente, estar envolvidas em novos *RDs* de maior valor redutivo que o valor daquele *POI* reduzido. Caso *C* seja uma nova fórmula máxima, *pM* de uma instância de eliminação na derivação obtida, então na derivação anterior já existia um *UPE* de mesmo valor redutivo envolvendo *C*. Caso *C* seja uma nova fórmula máxima, *pM* de uma instância *cm* ⟦*Peirce*⟧, então ela é fórmula máxima de um *PS-I* e, desse modo, na derivação anterior, havia um *PPIM-II* de mesmo valor. Caso *C* seja uma nova fórmula máxima, *pm* de $e\vee$ ou de $e\exists$ envolvida em um *PPIM-II*, então na derivação anterior já

[267] Para maiores detalhes, ver o Apêndice.
[268] Segundo o Lema A - 2 do Apêndice.

havia um *PPIM-II* envolvendo *C*. Finalmente, caso *C* seja uma fórmula máxima, *pm* de $e\rightarrow$ em um *PS-II*, na derivação anterior já havia um *PPIM-II* envolvendo *C*. Fora esses casos, não há nenhuma outra possibilidade. *QED*

Lema IV-6 - Da redução imediata de um UPE resultará uma derivação cujo valor redutivo será menor ou igual ao valor redutivo da derivação original.

Demonstração # Observando a Figura IV-25, vemos que os *RDs* da nova derivação ou são resíduo da derivação anterior ou são novos *RDs*. Se forem novos, como não há eliminação de ocorrências topo da derivação, jamais poderão ser *USs* e, assim, envolverão como fórmula máxima uma das ocorrências em azul. As ocorrências topo *C* em π_8' e em π' são *pm* de $e\vee$ ou de $e\exists$. A ocorrência *A* em azul não poderá ser a fórmula máxima de um *PS-I*, nem de um *PS-II*, pois ela é *pM* de uma instância de eliminação. Ela poderá ser fórmula máxima de um *POI* ou de um *PPIM-I* $[\![PPIP]\!]$. Não poderá ser de um *UPE*, pois as ocorrências *A* topo de π_8 devem ser topo de um segmento constante de ocorrências. Nos dois casos, o valor redutivo do *RD* será o mesmo do *UPE* permutado. A ocorrência *C* em azul pode, eventualmente, estar envolvida em um *RD* de valor redutivo maior que o do *UPE*. Todavia, devemos notar que aquela ocorrência de *C* só poderá ser uma nova fórmula máxima, caso esteja envolvida em um novo *UPE*. Essa ocorrência seria conclusão ou de uma $e\vee$ ou de uma $e\exists$. Nesse caso, o *UPE* terá o mesmo valor redutivo de um *UPE* que existia em π, envolvendo também a fórmula *C* ocorrência topo da subderivação π_5. Fora esses casos, não há nenhuma outra possibilidade. *QED*

Lema IV-7 - A redução imediata de um PS de tipo I ou de tipo II resultará numa derivação cujo valor redutivo será menor ou igual ao valor redutivo da derivação original.

Demonstração # Observando a Figura IV-81 e a Figura IV-86 vemos que os *RDs* da derivação obtida ou são resíduo da derivação anterior ou são novos *RDs*. Se forem novos, devem, necessariamente, envolver como fórmula máxima as ocorrências em azul, pois é impossível que a redução de um *PS* possa gerar novos *USs* que já não existissem na derivação reduzida. *A priori*, as ocorrências *A* em azul poderão fazer parte de novos *RDs* somente se eles forem ou *PS-I*, ou *PS-II*, ou *PPIM-I* $[\![PPIP]\!]$, ou *PPIM-II*. Em qualquer desses casos, o novo *RD* teria o mesmo valor redutivo daquele que foi reduzido. *QED*

Lema IV-8 - A redução imediata de um PPIM-II resultará numa derivação cujo valor redutivo será menor ou igual ao valor redutivo da derivação original.

Demonstração # Observando a Figura IV-92, vemos que os *RDs* da derivação obtida ou são resíduo da derivação anterior ou são novos *RDs*. Se forem novos, devem, necessariamente,

envolver como fórmula máxima as ocorrências em azul, pois é impossível que a redução de um *PPIM-I* possa gerar novos *USs* que já não existissem na derivação reduzida. *A priori*, as ocorrências *C* em azul poderão fazer parte de novos *RDs* somente se eles forem ou *PS-I*, ou *PS-II*, ou *PPIM-I* ⟦*PPIP*⟧, ou *PPIM-II*. Em qualquer desses casos, o novo *RD* teria o mesmo valor redutivo daquele que foi reduzido. *QED*

Lema IV-9 - A redução de uma USs resultará numa derivação cujo valor redutivo será menor ou igual ao valor redutivo da derivação original.

Demonstração # Observando a Figura IV-93 vemos que os *RDs* da derivação obtida ou são resíduo da derivação anterior ou são novos *RDs*. Se forem novos, devem, necessariamente, envolver como fórmula máxima a ocorrência em azul, pois é impossível que a redução de uma *US* possa gerar novas *USs*. *A priori*, as ocorrências *A* em azul poderão fazer parte de qualquer tipo de *RD*, exceto as *USs*. Suponhamos que o novo *RD* envolvendo *A* como fórmula máxima seja $<r^{I},r^{II}>$. A demonstração prossegue por casos sobre o tipo de fórmula máxima que *A* poderia ser. Caso *A* seja uma fórmula máxima de um *POI*, ou um *UPE*, ou um *PPIM-I* ⟦*PPIP*⟧, então ela será *pM* de r^{I} e o seu grau redutivo será *v(A)+1*. Porém, nesse caso, na derivação original, deveria existir um *PPIM-I* ⟦*PPIP*⟧ envolvendo aquela instância de regra, da qual r^{I} é resíduo, junto com a instância *cm* ⟦*Peirce*⟧ simplificada. O valor redutivo do *PPIM-I* ⟦*PPIP*⟧ deveria ser *v(A)+1*. Caso *A* seja uma fórmula máxima de um *PPIM-II*, então ela será *pm* de r^{I} e seu grau redutivo será *v(A)+1*. Portanto, na derivação anterior, deveria haver um *PS-I* envolvendo a instância da qual r^{II} é resíduo e a instância *cm* simplificada. Além disso, o seu grau redutivo seria *v(A)+1*. Caso *A* seja uma fórmula máxima de um *PS-I,* então ela será *pM* de r^{I} e seu grau redutivo será *v(A)+1*. Mas então, na derivação original, já existiria um *PS-I* envolvendo ou a instância da qual r^{I} é resíduo ou a instância da qual r^{II} é resíduo junto com a instância *cm* ⟦*Peirce*⟧ simplificada. Caso *A* seja fórmula máxima de um *PS-II*, ela será conclusão da instância r^{II} e *pm* de $e\rightarrow$ e, dessa forma, já haveria um *PS-II* de mesmo valor na derivação anterior envolvendo a instância *cm* simplificada. Seu grau redutivo seria *v(A)+1*. Como todos os casos foram examinados, conclui-se que o grau redutivo da nova derivação é menor ou igual ao grau da derivação original. *QED*

Os únicos *RDs* cuja redução imediata pode aumentar o valor redutivo da derivação são os *PPIMs-I* ⟦*PPIPs*⟧. Na Figura IV-31, vemos que qualquer *RD* envolvendo como fórmula máxima aquelas ocorrências em azul da forma $A\rightarrow\varphi$ teria grau redutivo maior do que o grau do *PPIM-I*

$\|PPIP\|$ reduzido.

A seqüência de lemas acima permite-nos formular o seguinte teorema.

Teorema IV-8 - Se π *é uma derivação tal que* $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ *e* $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ *sobre um RD que não é um PPIM-I* $\|PPIP\|$*, então* $v_{\triangleright}(\pi')\leq h$.

Demonstração # Pelo Lema IV-5, Lema IV-6, Lema IV-7, Lema IV-8 e Lema IV-9.

10. Considerações Finais

Nesse capítulo, examinamos a propriedade de harmonia entre introduções e eliminações e o chamado princípio de inversão. A primeira interpretação do princípio de harmonia só é aplicável a alguns dos sistemas definidos no capítulo anterior. Nessa interpretação, as regras de introdução e eliminação foram comparadas a uma definição explícita[269]. A segunda interpretação é aplicável a uma quantidade maior de sistemas. Ela considera que as eliminações só podem ter como conseqüência as fórmulas que são, ao mesmo tempo, conseqüência de cada um dos contextos suficientes para a introdução da constante lógica (em união, eventualmente, com alguns contextos subsidiários – aqueles relacionados à obtenção da$\|s\|$ *pm*$\|s\|$ da regra de eliminação). Vimos que o princípio de inversão representa uma parcela importante do princípio de harmonia, embora a sua validade não seja suficiente para concluir pela existência de harmonia. Quanto ao uso do princípio de inversão, uma novidade importante com respeito à literatura está na introdução de um novo rodeio envolvendo seja a constante $\bot$, seja a constante de negação.

Para os sistemas que admitem regras de dedução indireta, é preciso ainda complementar o princípio de inversão, de modo que o seu uso esteja contemplado. Porém, nesse caso, um dos princípios norteadores das elucidações via sistemas de dedução natural deveria ser matizado: não necessariamente todas as regras se dividiriam em introduções e eliminações. Além disso, também parece não ser verdade, até mesmo no caso da lógica intuicionista, que todas as regras de introdução para uma constante lógica possam ser dadas de forma independente[270].

Os sistemas de dedução natural contendo regras de dedução indireta podem ser formulados ou por meio de uma modificação sobre as regras de introdução e eliminação, às quais acrescentamos descartes *à la mirabilis* $\|$*à la Peirce*$\|$, ou podem ser formulados com uma regra

---

[269] Pessoalmente, acreditamos o contrário. Parece-nos mais razoável pensar que as definições explícitas são tributárias das regras de introdução e eliminação.

[270] Para maiores detalhes, ver o Apêndice. Mais especificamente, ver o tratamento da constante proposicional *s*.

extra: *consequentia mirabilis* ⟦*Peirce*⟧. No primeiro caso, as regras de introdução e de eliminação deixariam de ser regras completamente independentes, na medida em que as condições de aplicabilidade fariam menção à constante de absurdo ou negação ⟦implicação⟧. Também é possível, alternativamente, aplicar os descartes somente sobre as regras para a introdução e eliminação do absurdo ou da negação, ao invés de aplicá-los a todas as regras. Contudo, nesse caso, a restrição sobre a conclusão da eliminação do absurdo, que está restringida às conclusões básicas nesta tese, nos conduziria a um sistema mais fraco do que o sistema clássico.

Uma compreensão um pouco distinta do princípio de inversão talvez permita levar em conta a permutabilidade das regras indiretas com uma regra de eliminação. É o que propusemos acima. De outro ponto de vista, considerando que as regras do sistema $\mathscr{M}$ podem receber os descartes *à la mirabilis*, a permutação consistiria, na verdade, em conduzir o índice de descarte *mirabilis* para baixo. Essa extensão da interpretação do princípio requereria considerar, adicionalmente, como contexto auxiliar, que qualquer conseqüência que se siga de uma fórmula qualquer *A* deve se seguir também daquelas fórmulas *B* das quais *A* é conseqüência. Em particular, se *A* fosse refutável, *B* também o seria. Estabelecemos de modo claro uma correlação entre os fundamentos para justificar a permutação dos *PPIMs-I* e os fundamentos para justificar a permutação dos *UPEs*.

Uma novidade básica com respeito à literatura consiste no direcionamento parcial da atenção sobre as instâncias de regras envolvidas em um rodeio − em geral pares de regras −, nem tanto sobre as fórmulas máximas. O deslocamento deve-se à constatação de que os rodeios de *POI* são seqüências de atos que se anulam e, por isso, são desnecessários. As simplificações eliminam atos desnecessários. Com as permutações é diferente, constatamos que a ordem dos atos pode ser trocada.

A discussão acerca da justificabilidade da operação sobre os rodeios de $\bot_c$-eliminação, bem como sobre os pares permutativos imediatos envolvendo regras indiretas procurou clarear uma área às vezes obscura na literatura de dedução natural. Em certo sentido, após o pioneirismo de Gentzen, houve um relativo abandono das questões envolvendo a lógica clássica, tendo o ponto de vista intuicionista ganhado proeminência quando se tratava de considerar os sistemas de dedução natural e os problemas de Teoria Geral da Prova. É bem verdade que, recentemente, por razões de origem computacional, o problema tem novamente recebido bastante atenção. De nossa parte, procuramos apresentar a possibilidade de uma justificação para as permutações envolvendo as regras indiretas.

Com base em certos critérios parciais de admissibilidade, pudemos rejeitar certas simplificações sobre derivações freqüentemente admitidas na literatura, como as de $e\vee$ e $e\exists$. Por outro lado, com esses mesmos critérios, acreditamos ter feito uma análise mais apurada de outras operações que, a nosso ver, resultavam ainda misteriosas. Algumas vezes, nas provas de normalização fraca para a lógica clássica, utiliza-se uma operação aparentemente similar a uma permutação de *UPE*. Estranhamente, tal permutação é bastante dissimilar às demais, na medida em que sua fórmula máxima é uma *pm* de $e\rightarrow$. A solução do problema, nos parece, poderia passar pela admissão da operação sobre os *PPIMs-II*. Desse modo, não teríamos um *UPE* envolvendo a *pm* de $e\rightarrow$, mas uma permutação que permitiria carregar para baixo as instâncias da regra *cm*. A prova de normalização fraca de Massi ([Mas90], cap. 3) utiliza exatamente a operação de permutação de regras de eliminação criticada, envolvendo como fórmula máxima a *pm* de $e\rightarrow$:

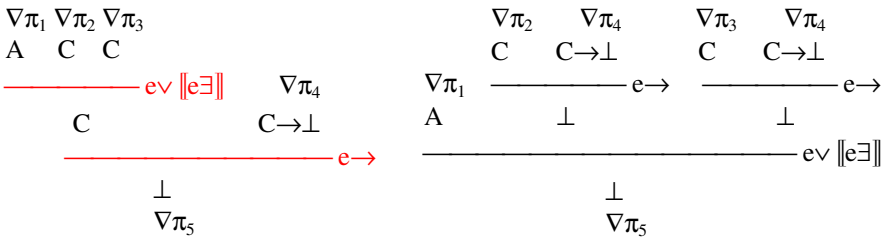


Figura IV-96

Porém, o problema está em saber que razão poderia ser oferecida para adotar esta operação.

Capítulo V O Processo de Normalização

Esta tese avança duas propostas com respeito aos sistemas de dedução natural, propostas intimamente conectadas entre si. Em primeiro lugar, ela propõe uma regra de introdução do absurdo; em segundo lugar, ela adota o uso de *consequentia mirabilis* como forma preferencial para definir a lógica clássica, pois essa regra é um passo atômico de dedução indireta. Esse passo implicaria uma quebra necessária na dicotomia introduções-eliminações sobre as deduções lógicas.

No capítulo anterior, apresentamos o conceito de forma normal e mostramos como a consistência dos sistemas pode ser extraída dessa propriedade. Neste capítulo, faremos uma exposição dos assim chamados teoremas de normalização e confluência levando em conta aquelas duas propostas. Quanto aos teoremas de normalização, buscaremos mostrar que há uma derivação em *FN* para toda derivação daqueles sistemas que admitam a regra de $i\bot$ e as regras de dedução indireta, segundo as operações definidas no capítulo anterior. Também iremos examinar as cotas para o crescimento da derivação e para o comprimento do processo que leva à derivação em *FN* para o subsistema $\mathcal{J}_{cm}$[271]. Quanto ao teorema de confluência geral, ele será demonstrado só para o sistema $\mathcal{J}$, fazendo uso da demonstração da finitude de toda cadeia de redução e do teorema de confluência local. Para o sistema clássico demonstraremos só a confluência local. Não apresentaremos normalização forte para a lógica clássica com o conjunto completo de operadores, só para o conjunto $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$. São problemas em aberto os problemas de demonstrar a confluência geral e a finitude de toda cadeia de redução para o sistema C desta tese.

1. Esquemas Genéricos para as Operações sobre as Derivações

Abaixo, apresentamos sob forma esquemática geral os *RDs*[272] definidos anteriormente:[273]

---

[271] Lembramos que esse sistema é o sistema intuicionista formulado com as regras intuicionistas usuais mais a regra $i\bot$ e estendido com a regra *consequentia mirabilis* para conclusões atômicas.

[272] Abreviaremos o termo *rodeio* por *RD*.

(i) os *POIs* (**Pares Operacionais Imediatos**) serão esquematizados como na figura abaixo:

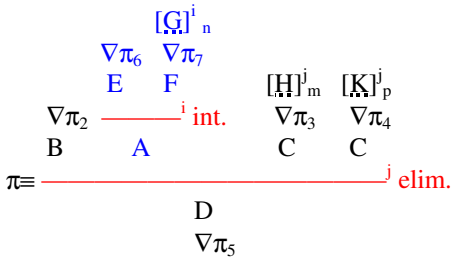


Figura V-1[274]

Nessa derivação *n*, *m* e *p* são o número total de ocorrências topo *G*, *H* e *K* descartadas nas subderivações π_7, π_3 e π_4. Tomando por base o *POI*, chamaremos de **subderivação π_1** àquela subderivação de π cujas ocorrências estão todas em azul. A redução do *POI* mais acima resultará nas seguintes derivações dependendo do tipo do *POI*:

i∧-e∧e	i→-e→	i∧-e∧d,	i→-e→[275]	i∀-e∀	i∨e-e∨	i∨d-e∨,	i∃-e∃	i⊥-e⊥
∇π6 π'≡ D ∇π5	∇π2 G n ∇π7 π'≡ D ∇π5	∇π7 π'≡ D ∇π5			∇π7 F m ∇π3 π'≡ D ∇π5	∇π7 F p ∇π4 [a/t] π'≡ D ∇π5		∇π7[F/D] π'≡ D ∇π5
E≡D	B≡G e F≡D	F≡D			C≡D e F≡H	C≡D e F≡K		A≡⊥; v(D)=0
π2,π3,π4 vazios	π6,π3,π4 vazios	π2,π3,π4 vazios	π6,π3,π4 vazios	π2,π6,π3, π4 vazios	π2,π6 vazios	π2,π6 vazios	π2,π6,π3 vazios	π2,π6,π3,π4 vazios

Figura V-2

Uma cota para π' é dada pelas seguintes inequações: $|\pi'|<2.|\pi_1|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2, π_3 e π_4 sejam vazias[276]. Notamos que a cota oferecida é excessivamente grande. Todavia, queremos observar que a mesma cota será dada aos *UPEs*.

(ii) Os *UPEs* (**Unidades Permutáveis de Eliminação**) serão esquematizados como abaixo, onde a derivação π_8 contém os segmentos constantes da ocorrência *A* (excetuando a

---

[273] Esses esquemas não constituem uma nova definição dos *RDs* e das respectivas operações, pois elas já haviam sido definidas no capítulo anterior.

[274] Lembramos que o tracejado sob uma ocorrência topo indica a possibilidade de várias ocorrências topo idênticas.

[275] *POI* de $\rightarrow$ não-multiplicativo, ou seja, $n=0$.

[276] Relembramos que a expressão $|\pi|$ representa o comprimento de uma derivação e é igual ao número total de ocorrências da derivação, que por sua vez é igual ao número de instâncias da derivação incluindo todas as instâncias *lh* (lançamento de hipóteses) e axiomas (regras sem premissas). Por outro lado, $|\pi|_{inst.}$ é o número de instâncias de dedução da derivação quando não contamos nenhum *lh* nem axiomas. Claramente $|\pi|_{inst.}<|\pi|$, quando $|\pi|>1$.

ocorrência final, todas as demais são *pm* de $e\vee$ ou $e\exists$ e nenhuma das ocorrências topo de π_8 é conclusão de $e\vee$ ou $e\exists$):

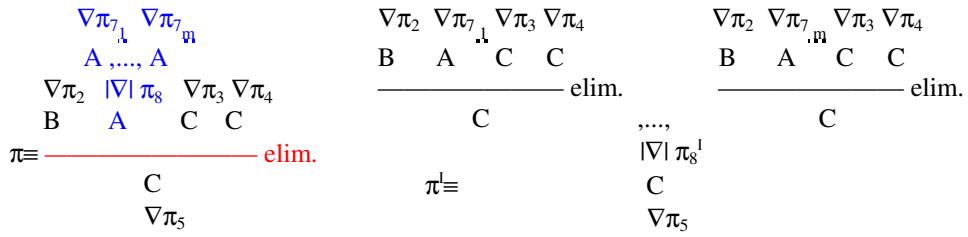


Figura V-3

Chamaremos de **subderivação π_1** à subderivação de π em azul na figura acima. Uma cota para π' é dada pela seguinte inequação: $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$.

(iii) Os *PPIMs-I* (**Pares Permutativos Imediatos de Mirabilis do Tipo I**) e a operação sobre eles são esquematizados na figura abaixo e, evidentemente, só se aplicariam aos sistemas que contém a regra *consequentia mirabilis*:

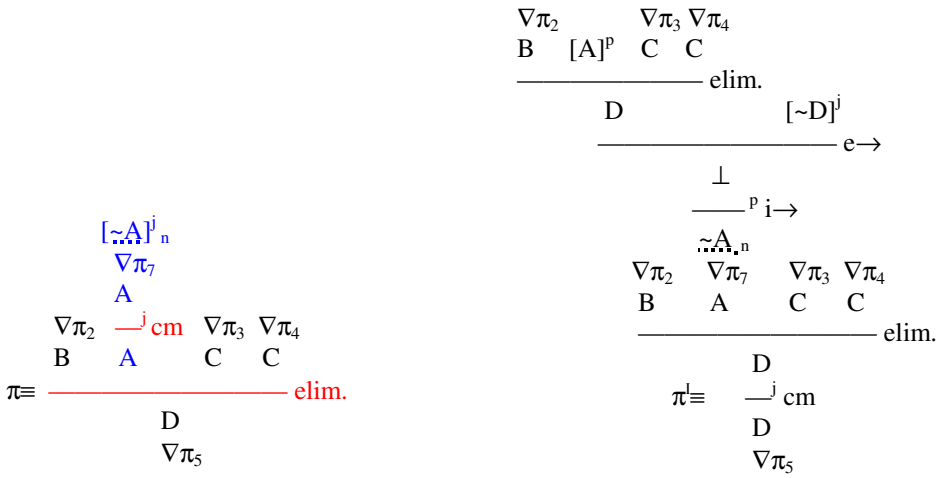


Figura V-4

A subderivação em azul será chamada de **subderivação π_1**. O resultado da operação pode ser cotado, mas não usaremos essa cota.

(iv) Os *PSs* (**Pares Simplificáveis**) e suas simplificações serão representados conforme os seguintes esquemas e serão aplicadas aos sistemas que contenham a regra *cm* :

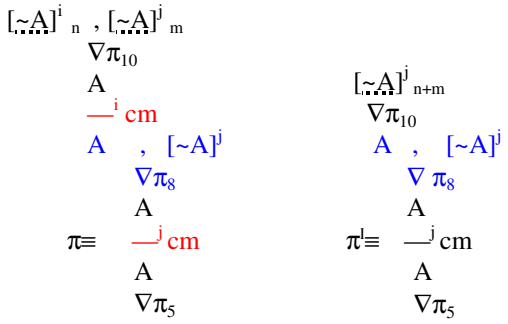


Figura V-5

No esquema acima representamos um *PS-II*, toda a subderivação em azul não existiria se tivéssemos um *PS-I*. Quando for um *PS-II*, a subderivação π_8 terá pelo menos três ocorrências, tal que a ocorrência topo de π_8 da forma *A* é uma *pm* de $e\rightarrow$ e a ocorrência topo de π_8 da forma *~A* é uma *pM* da mesma instância de $e\rightarrow$. Os *PSs* também serão representados na sua forma estrita quando se fizer necessário. A cota para π' é dada pela seguinte equação: $|\pi'|=|\pi|-1$.

(v) Os *PPIMs-II* (**Pares Permutativos Imediatos de Mirabilis do Tipo II**) e a operação sobre eles serão esquematizados abaixo, eles só são aplicáveis aos sistemas que admitem a regra *cm*:

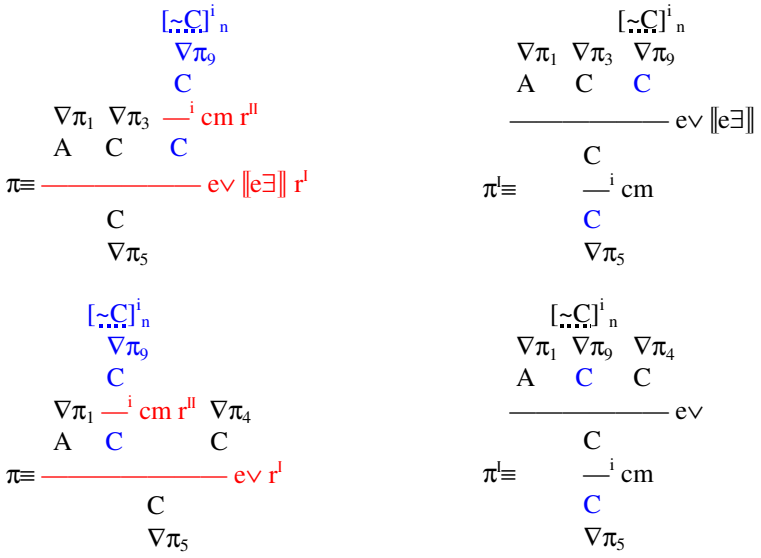


Figura V-6

A subderivação em azul na primeira ⟦segunda⟧ derivação à esquerda será chamada de **subderivação π_4 ⟦π_3⟧**. A cota para π' é dada pela seguinte equação: $|\pi'|=|\pi|$.

(vi) As *USs* (**Unidades Simplificáveis**) serão esquematizadas como na figura abaixo:

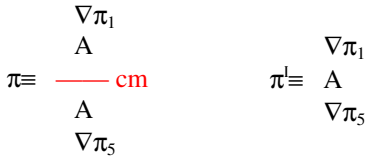


Figura V-7

Notamos que, nesse caso, a instância *cm* não descarta nenhuma ocorrência topo e a cota para π' é: $|\pi'|=|\pi|-1$.

Como os *RDs* foram definidos como certos pares de instâncias de regra em uma derivação (com exceção dos *UPEs* e *USs* onde as duas instâncias do par são a mesma instância), dados dois *RDs* distintos poderá ocorrer que os dois compartilhem a primeira instância do par. Nesse caso, diremos que os dois *RDs* são **concomitantes**. Poderão ser *RDs* concomitantes: *(i)* um *PS-I*

$<r^{I},r^{II}>$ e outro *PS-II* $<r^{I},r^{III}>$; *(ii)* um *PS* $<r^{I},r^{II}>$ e uma *US* $<r^{I},r^{I}>$; *(iii)* um *POI* $<r^{I},r^{II}>$ e um *PPIM-II* $<r^{I},r^{III}>$, onde r^{I} é $e\vee$ ou $e\exists$; *(iv)* um *UPE* $<r^{I},r^{II}>$ e um *PPIM-II* $<r^{I},r^{III}>$, onde r^{I} é $e\vee$ ou $e\exists$; *(v)* um *PPIM-I* $<r^{I},r^{II}>$ e um *PPIM-II* $<r^{I},r^{III}>$, onde r^{I} é $e\vee$ ou $e\exists$. Não existem outros casos.

2. Definições de Normalização e Confluência

Dizemos que o processo de conduzir uma derivação a sua *FN* ‖a uma de suas *FNs*‖, aplicando operações de um conjunto de reduções bem-determinado, é um **processo de normalização**. Provar um **teorema de forma normal ‖com cota para o comprimento da derivação‖** consiste em provar que para cada derivação mostrando $\Gamma\vdash A$ existe uma derivação em *FN* ‖cujo comprimento é menor ou igual a um determinado valor de cota e‖ mostrando que $\Delta\vdash A$, tal que $\Delta\subseteq\Gamma$.

Provar um **teorema de normalização fraca ‖com cota para o comprimento do processo de normalização e/ou cota para o comprimento da derivação resultante‖** consiste em provar que uma determinada estratégia de normalização implica o teorema de forma normal, se for provado que essa estratégia termina após um número finito de passos ‖– tal que o número de passos é menor ou igual a um determinado valor de cota e/ou que o número de ocorrências da derivação resultante é menor ou igual a um certo valor de cota‖.

Provar um **teorema de confluência**, ou provar a propriedade de **Church-Rosser**, ou **a propriedade do diamante**, consiste em provar que, para um determinado conjunto de operações sobre derivações, haverá uma derivação π^{III} e duas seqüências de operações a partir de π^{I} e π^{II}, respectivamente, que terminam exatamente em π^{III}, quando a partir de uma derivação π qualquer obtivermos por meio de duas seqüências finitas de operações as derivações π^{I} e π^{II}, respectivamente. Graficamente, a existência das seqüências de operações em preto acarreta a existência das seqüências de operação em azul:

$$\begin{array}{ccccc} \pi & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \pi^{I} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \vdots & & & & \vdots \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi^{II} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \pi^{III} \end{array}$$

Figura V-8

Provar confluência local equivale a provar a mesma propriedade do diamante, mas levando em conta somente o caso mais simples onde as seqüências de π a π' e de π a π'' são constituídas de no máximo um passo de redução.

Provar um **teorema de normalização forte** ⟦com cota⟧ consiste em provar que qualquer seqüência de normalização termina após um número finito de passos ⟦tal que as seqüências mais longas tem comprimento menor ou igual a um determinado valor⟧. Claramente, o teorema de normalização forte implica o teorema de normalização fraca.

Em dedução natural, com freqüência, considera-se que a normalização forte compreende também a demonstração da unicidade da *FN*[277]. A demonstração de normalização forte com cota para o comprimento do processo, permite-nos, assim, oferecer uma cota ao comprimento da *FN* de qualquer derivação se tivermos uma cota de aumento máximo para cada operação de redução.

A priori, uma forma de demonstrar normalização forte seria a de definir uma estratégia de normalização que gerasse seqüências maximais. A normalização forte e a unicidade seriam conseqüência da existência dessa seqüência caso provássemos: que qualquer outra seqüência conflui para a seqüência maximal distinguida; e que a seqüência de fato é maximal. Uma forma de demonstrar que a seqüência maximal é finita, envolve a busca de um valor de indução sobre a derivação tal que, para qualquer redução via seqüência maximal, esse valor diminui de pelo menos uma unidade na derivação obtida. A demonstração de confluência geral seria obtida, imediatamente, a partir da demonstração de confluência local, por indução sobre o comprimento da seqüência maximal.[278] Grande parte da dificuldade em realizar as provas de normalização está na dificuldade em encontrar esse valor de indução, que não é evidente. No próximo capítulo, mostraremos como encontrar esse valor para o sistema C'.

Outra estratégia para apresentar a unicidade da *FN* consiste em fazer a sua demonstração a partir da demonstração de confluência local usando o lema de König, desde que tenha sido garantido que toda seqüência de normalização é finita. Adotaremos esse procedimento neste

---

[277] Notamos que a literatura sobre sistemas de λ-cálculo freqüentemente não considera a unicidade compreendida no conceito de normalização forte.

[278] Em sua tese de doutoramento, Massi [Mas90], cap. 7, definiu uma estratégia maximal, para um sistema equivalente ao nosso sistema C', e que ele chamou de "a pior seqüência" (aqui o uso do artigo definido pode induzir uma interpretação equivocada, melhor seria dizer "a estratégia da pior seqüência", com isso visando uma estratégia específica, pois, em princípio, poderiam existir outras seqüências maximais que adotem outra estratégia). Massi mostrou que, se essa seqüência, obtida por meio dessa estratégia, fosse finita, obteríamos a propriedade de normalização forte - finitude de todas as cadeias e confluência. Posteriormente, Alves [Alv99], de forma engenhosa, mostrou como obter um valor de indução para mostrar a finitude da seqüência, introduzindo uma nova operação sobre as derivações. Voltaremos ao tema da estratégia da pior seqüência no próximo capítulo.

capítulo.

Conforme a Figura IV-8, Figura IV-10, Figura IV-25, Figura IV-31, Figura IV-93, Figura IV-81, Figura IV-86 e Figura IV-92 o comprimento de uma derivação obtida por redução/simplificação imediata pode ser cotado da seguinte forma: $|\pi'|<|\pi|^2$. Conseqüentemente, se *c* fosse a cota de normalização forte para uma derivação π, ou seja, se *c* fosse a cota para o comprimento máximo das seqüências de normalização, então a cota para o comprimento de $\pi^{\triangleright}$, ou seja a *FN* de π, poderia ser dada por: $|\pi^{\triangleright}|<|\pi|^{2^c}$.[279]

3. Exemplos de Sistemas Sem Normalização

A normalização não é válida para todo sistema de regras de dedução. Com efeito, para um dos sistemas mencionados no Capítulo III, variante definicional da lógica clássica, não vale o teorema de forma normal. A não-validade do teorema de forma normal implica, óbvio, que também não serão válidos os teoremas de normalização fraca e de normalização forte. Quando ocorre uma situação de invalidade do teorema de existência da *FN*, estaríamos predispostos a dizer também que o sistema não seria adequado de ponto de vista definicional, visto que certos rodeios não seriam elimináveis. Ou seja, nesse caso, tomaríamos esse fato como um critério de adequação ao qual os sistemas de dedução natural deveriam se ajustar. Em uma situação como essa, além de termos dificuldades para caracterizar um princípio de identidade para as derivações no sistema, a não eliminabilidade de certos *POIs* mostraria que o princípio de inversão, interpretado em uma forma estrita, não seria válido nesse sistema. Ou seja, as eliminações não seriam conseqüência das introduções.

O sistema com as regras operacionais $i\vee_{\perp}$ e $i\exists_{\perp}$ no lugar da regras tradicionais, conforme a Figura V-9, é o sistema para o qual não vale o teorema de existência de forma normal:

$$\dfrac{[\sim A]^i \quad [\sim B]^i}{\dfrac{\begin{array}{c}\nabla\\ \perp\end{array}}{A\vee B}\, i\vee_{\perp}} \qquad \dfrac{[\sim A[a/\tau]]^i}{\dfrac{\begin{array}{c}\nabla\\ \perp\end{array}}{\exists x A[a/x]}\, i\exists_{\perp}}$$

Figura V-9

Nesse sistema encontraríamos *POIs* não-elimináveis envolvendo $i\vee_{\perp}$ e $e\vee$. A operação de eliminação desses *POIs* seria, provavelmente, um pouco distinta daquela usual envolvendo as regras $i\vee$ e $e\vee$. Lembramos que, nesse sistema, as únicas regras envolvendo $\perp$ são aquelas regras

[279] A referência a essa cota tem caráter meramente ilustrativo, não atribuímos maior importância a essa cota no decorrer da tese.

acima. A operação, para uma derivação π que contivesse um desses *POIs*, resultaria na derivação π', que por sua vez conteria outro *POI*, cuja eliminação resultaria π'' etc.:

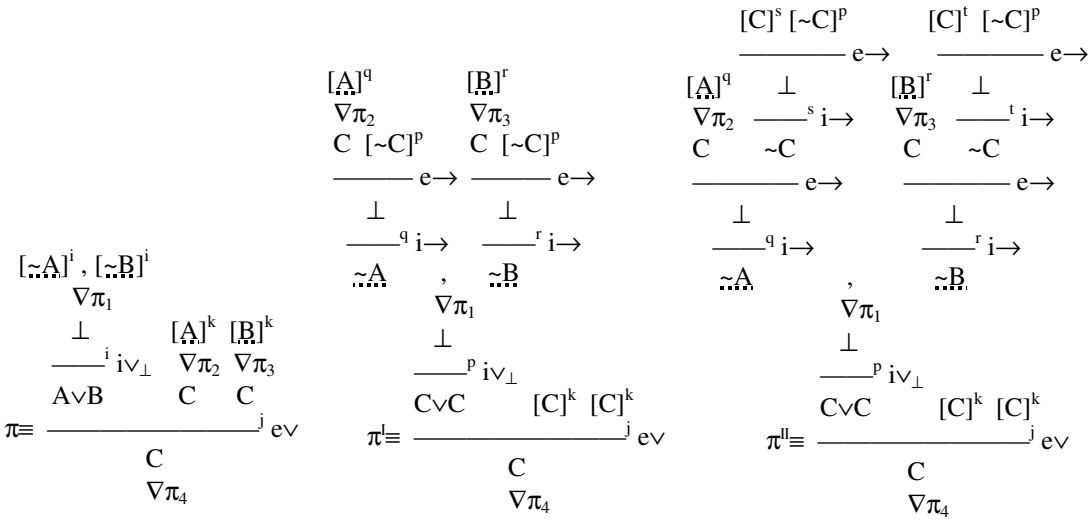


Figura V-10

Curiosamente, haveria uma forma comum à qual as derivações dessa seqüência poderiam ser sempre reconduzidas. A forma comum seria aquela da derivação π' que sempre terá um par contíguo de introdução-eliminação. Veja que a redução dos dois *RDs* de $\rightarrow$ em π'' resulta na derivação π'. Assim, além de mostrar que não vale a propriedade de normalização fraca para o sistema, mostrando que a cadeia de redução para a derivação do exemplo é infinita, foi mostrado também que vale confluência para a derivação específica do exemplo, embora não exista *FN*.

Outra situação na qual perderíamos a possibilidade de eliminar todos os rodeios seria aquela do sistema em que temos regras para introduzir e eliminar o absurdo, mas, além disso, a regra de eliminação também admite o descarte *à la mirabilis*, o que nos daria um caso particular da regra $\perp_c$ (a conclusão seria atômica):

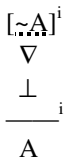


Figura V-11

Como sabemos, para definir o sistema clássico, basta acrescentar o descarte *mirabilis* à regra $E\perp$. Mas, caso as demais regras do sistema não admitissem descartes *mirabilis*, não poderíamos eliminar um rodeio de $\perp$, porque já não seria possível descartar a ocorrência topo da forma $\sim A$, dado que, na derivação resultante, a conclusão A poderia ser conclusão de uma instância de regra que não é $\perp_c$:

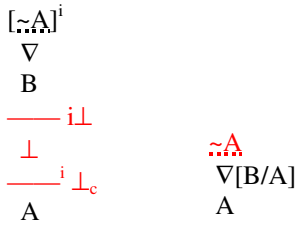


Figura V-12

As observações acima se aplicam também ao caso em que estejamos lidando com a regra *e⊥*.

Além dos casos anteriores, existem ainda outras situações em que perdemos a propriedade da normalização forte. Ao aplicar os descartes em uma derivação, existem duas alternativas: a compulsória e a não-compulsória[280]. Tomando como critério de escolha a propriedade de unicidade da *FN*, só podemos adotar a forma não-compulsória. Segundo a forma compulsória, a aplicação de $i\rightarrow$ com o objetivo de obter $A\rightarrow B$ descartaria todas as ocorrências topo A da mesma forma. Todavia, queremos observar, além da perda da unicidade, perdemos também a normalização forte[281]. Para a seguinte derivação haverá uma seqüência infinita de reduções com derivações que crescem de tamanho tal que a seqüência de operações começa pelo *POI* em vermelho:

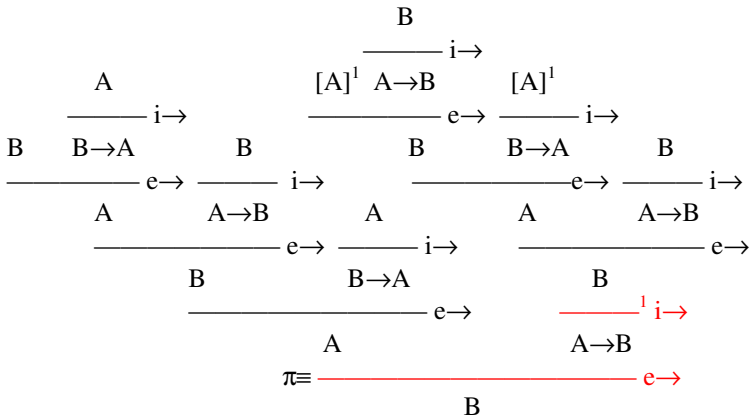


Figura V-13

4. Hauptsatz para *LJ**

Suponha que o sistema de seqüentes *LJ*[282] de Gentzen ([Gen35], págs. 83-85) tivesse sido definido de forma levemente diferente. Ao invés das regras usuais de negação e de enfraquecimento à direita, suponhamos que fossem empregadas regras que correspondem às

---

[280] Ver o Apêndice, acerca da definição dos descartes.
[281] A perda da propriedade de normalização já havia sido observada por Leivant [Lei79], e a de unicidade pelo prof. L.C. Pereira.
[282] Sistema intuicionista.

regras de introdução da negação e da (grande) eliminação da negação em dedução natural como a seguir:

$$\frac{\Gamma \Vdash A}{\neg A, \Gamma \Vdash B}\ \neg\text{-}IA^* \qquad \frac{A, \Gamma \Vdash B}{\Gamma \Vdash \neg A}\ \neg\text{-}IS^*$$

Figura V-14

Como já é de praxe, considere B em $\neg$-IS^* um parâmetro proposicional que não ocorre em A nem em Γ. Chamemos este sistema de ***LJ****. Para esse sistema valem certas propriedades notáveis.

Teorema V-1- Há um procedimento para transformar LJ derivações em LJ derivações e vice-versa, tal que: (i) para todo seqüente $\Gamma \Vdash A$, $\Gamma \Vdash A$ é demonstrável em LJ sse $\Gamma \Vdash A$ é demonstrável em LJ*; (ii) para todo seqüente $\Gamma \Vdash$, se $\Gamma \Vdash$ é demonstrável em LJ, então $\Gamma \Vdash B$ é demonstrável em LJ* tal que B é uma variável proposicional que não ocorre em Γ; (iii) se π é uma prova de $\Gamma \Vdash A$ ($\Gamma \Vdash$) em LJ sem aplicações da regra de corte, então há uma derivação que prova $\Gamma \Vdash A$ ($\Gamma \Vdash B$) em LJ* sem aplicação da regra de corte (tal que B é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ)*

Demonstração # *(i)* e *(ii)* por indução no comprimento da demonstração de $\Gamma \Vdash A$ ($\Gamma \Vdash$). Primeiro, demonstramos a transformação de *LJ** para *LJ*. Suponha dada uma prova de $\Gamma \Vdash A$ em *LJ**. É suficiente mostrar como obter as conseqüências de $\neg$-IA^* e $\neg$-IS^* dentro de *LJ* (outros casos são imediatos). Suponhamos que, por indução, temos uma derivação da‖s‖ premissa‖s‖ imediata‖s‖:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash A\end{array}}{\neg A, \Gamma \Vdash B}\ \neg\text{-}IA^* \Rightarrow \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash A\end{array}}{\neg A, \Gamma \Vdash}\ \neg\text{-}IA \qquad \frac{}{\neg A, \Gamma \Vdash B}\ \textit{Thinning}$$

Figura V-15

Além disso, como B é um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ nem em A e como deve haver uma demonstração de $B \wedge \neg B \Vdash$ em *LJ*:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A, \Gamma \Vdash B\end{array}}{\Gamma \Vdash \neg A}\ \neg\text{-}IS^* \Rightarrow \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots [B/(B\wedge\neg B)]\\ A, \Gamma \Vdash B\ [B/(B\wedge\neg B)]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ B \wedge \neg B \Vdash\end{array}}{A, \Gamma \Vdash}\ \text{Cut} \qquad \frac{}{\Gamma \Vdash \neg A}\ \neg\text{-}IS$$

Figura V-16

Agora demonstremos a transformação de *LJ* para *LJ**. Suponha que há uma demonstração de $\Gamma \Vdash A$ ($\Gamma \Vdash$) em *LJ*. Primeiro caso, demonstração para $\Gamma \Vdash$, existem dois subcasos relevantes (o resto é imediato). Suponhamos que, por indução, temos uma derivação para a premissa imediata de ¬-*IA*. Basta tomar um *B* que seja parâmetro proposicional e que não ocorra nessa derivação (a qual estamos assumindo por indução):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash A\end{array}}{\neg A, \Gamma \Vdash}\ \neg\text{-}IA \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash A\end{array}}{\neg A, \Gamma \Vdash B}\ \neg\text{-}IA^*$$

Figura V-17

Suponhamos que, por indução, temos uma derivação da premissa imediata de uma regra *r* tal que *C* é um parâmetro proposicional que não ocorre em Δ. Suponha que *B* é um parâmetro proposicional tal que *B* não ocorre na derivação que estamos assumindo por indução e *B* não ocorre em Γ, logo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta \Vdash\end{array}}{\Gamma \Vdash}\ r \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ [C/B]\\ \Delta \Vdash C\ [C/B]\end{array}}{\Gamma \Vdash B}\ r^*$$

Figura V-18

Notamos que a regra *r* acima não poderia ser *Thinning* no sucedente, nem ¬-*IA*, nem ¬-*IS*. Assim, *LJ** tem uma regra formalmente idêntica a *r*. Nós a denotamos por *r**. Aplicando *r** sobre Γ nós obteríamos Δ. Passando, agora, ao segundo caso, a demonstração para $\Gamma \Vdash A$ em *LJ*, teremos dois subsubcasos relevantes (os outros são imediatos). Suponhamos que, por indução, temos uma derivação da premissa imediata de ¬-*IS*. Logo, por indução, *B* deve ser um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ nem em *A*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, A \Vdash\end{array}}{\Gamma \Vdash \neg A}\ \neg\text{-}IS \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \text{por indução}\\ \Gamma, A \Vdash B\end{array}}{\Gamma \Vdash \neg A}\ \neg\text{-}IS^*$$

Figura V-19

Para o próximo caso, suponha que, por indução, temos uma derivação de $\Gamma \Vdash B$ tal que *B* seja um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ. Sobre essa derivação, substituímos, em primeiro lugar, todos os parâmetros individuais e proposicionais que tenham sido fechados por uma ∀-*IS**, ou uma ∃-*IA**, ou uma ¬-*IS**. A substituição só será feita sobre as subderivações das premissas imediatas destas instâncias de regra e os parâmetros empregados devem ser novos. Além disso, escolheremos parâmetros que não ocorram na fórmula *A*. Desse modo, a derivação resultante

ainda demonstrará $\Gamma \Vdash B$ tal que B seja um parâmetro proposicional que não ocorre em Γ. Como B não é parâmetro proposicional *eigen* de nenhum $\neg$-*IS**, ele pode ser substituído livremente em toda derivação:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \Gamma \Vdash \\ \text{———— Thinning} \\ \Gamma \Vdash A \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \qquad\qquad \vdots\ [B/A] \\ \Gamma \Vdash B\ [B/A] \end{array}$$

Figura V-20

Assim, *(i)* e *(ii)* estão demonstrados. O item *(iii)* fica demonstrado se observarmos que na transformação de *LJ* à *LJ** nenhuma regra de corte foi usada. Desse modo, qualquer prova *LJ* sem cortes será transformada em uma prova *LJ** sem cortes. *QED*

Corolário V-1 – O Hauptsatz vale para LJ.*

Demonstração # Pelo Teorema V-1, levando em conta a demonstração do *Hauptsatz* para *LJ* (cf. [Gen35], pág. 87). *QED*

O *Hauptsatz* de Gentzen tem estreita relação com a existência de formas normais e com o teorema de normalização fraca. O *Hauptsatz* apresenta um procedimento de transformação para demonstrações sobre seqüentes tal que o processo termina em uma demonstração sem cortes. Um rodeio em uma derivação de dedução natural pode ser visto como o encaixe de duas derivações sobre uma determinada fórmula. Essa fórmula ocorre como fórmula topo de uma delas e é, ao mesmo tempo, *pM* de uma regra de eliminação. Também é ocorrência final da outra derivação e, ao mesmo tempo, conclusão de uma introdução. O corte no cálculo de seqüentes captura essas situações e algumas outras mais. Por exemplo, a fórmula de corte também pode ser uma fórmula básica, embora normalmente não exista fórmula máxima que seja básica, em dedução natural.

A validade do *Hauptsatz* para a lógica intuicionista, com regras de introdução e eliminação da negação, já oferece garantias importantes para a validade da propriedade de normalização sobre os sistemas de dedução natural. Como já dissemos várias vezes, o sistema de seqüentes formula exatamente as mesmas relações que são mostradas em dedução natural. Assim, já que temos essa garantia mínima, dirigiremos nossa atenção para a demonstração de teoremas de normalização mais complexos e mais informativos.

5. Normalização Fraca para Dedução Natural

Se tivéssemos uma prova de normalização forte para o sistema C, a apresentação dessa prova dispensaria a apresentação da prova de normalização fraca. A seguir, passaremos a

apresentar uma prova de normalização fraca sem cota para $\mathcal{C}$, embora a parte inicial da prova envolvendo o sistema $\mathcal{J}_{cm'}$ seja dada com cotas. No entanto, desenvolveremos neste e no próximo capítulo duas provas de normalização forte, uma para o sistema $\mathcal{J}$ e outra para o sistema $\mathcal{C}'$. Sobretudo para o segundo caso, será importante estar de posse da prova de normalização fraca com cotas.

Embora não tenhamos uma prova de normalização forte, a prova de normalização fraca sem cota já nos fornece algumas garantias da adequação do sistema que esteja sob exame. Por exemplo, no caso dos sistemas onde $\bot$ é legitimamente tratado como um símbolo lógico, a operação de eliminação do *POI* de $\bot$ é compatível com a existência de *FN*, ou seja, que o princípio de inversão é aplicável aos sistemas onde tais *POIs* podem ocorrer. Contudo, lembramos que, desde o nosso ponto de vista, é questionável que os sistemas de dedução natural sejam sistemas que ofereceriam uma elucidação para o conceito de prova canônica ou de prova direta. Dessa forma, as provas de normalização talvez não sejam tão interessantes quanto poderiam ser sob essa outra perspectiva.

Na literatura, existem várias provas de normalização fraca, existe prova com cota para o sistema intuicionista, sem a regra de $i\bot$[283], e sem cota para o sistema clássico, também sem aquela regra[284]. Mas, como nossos sistemas contêm a regra de introdução do absurdo e, portanto, contêm operações sobre um novo *POI*, é preciso refazer essas provas. Além disso, como estamos dando ênfase ao uso da regra *consequentia mirabilis* na definição da lógica clássica, esse uso acarreta a necessidade realizar certas operações de permutação envolvendo essa regra.

Definição V-1 - Diremos que uma derivação π é **crítica** *quando, para alguma instância r em π, o par $<r(\pi),r>$ é um RD em π e, para qualquer outro RD $<r^{I},r^{II}>$ em π, $v_{\triangleright}(<r(\pi),r>)>v_{\triangleright}(<r^{I},r^{II}>)$, caso r^{I} não seja $r(\pi)$, ou $v_{\triangleright}(<r(\pi),r>)\geq v_{\triangleright}(<r^{I},r^{II}>)$, caso r^{I} seja $r(\pi)$.*[285]

Chamaremos de **crítico**, em uma derivação π crítica, os *RDs* $<r(\pi),r>$, para alguma instância *r* em π, tal que $v_{\triangleright}(<r(\pi),r>)=v_{\triangleright}(\pi)$. Dado que alguns *RDs* podem ser concomitantes, uma mesma derivação poderá ter dois ou mais *RDs* críticos. Se π reduz-se imediatamente a π' sobre um *RD* crítico, representaremos o fato por $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright_c}{\longrightarrow}} \pi'$.

---

[283] Ver [Per82], no qual, evidentemente, não são considerados *RDs* envolvendo as regras para $i\bot$, outra de estrutura similar também ser encontrada em [Tro96], cap. 6, secção 6.7.
[284] Em [Mas90] também não são considerados *RDs* envolvendo as regras para $i\bot$.
[285] Em [Per82], pág. 97, nota 6, a definição do conceito de derivação crítica é atribuído a G. Pottinger em *A New Way of Normalizing Intuitionistic Propositional Logic*, *Studia Logica*, XXXV, 4, 1976.

5.1. Normalização Fraca com Cota Para $\mathcal{G}_{cm'}$

Demonstraremos a seguir normalização fraca para as derivações do sistema $\mathcal{G}_{cm'}$, com cota para o comprimento da derivação e para o comprimento do processo de normalização. Alguns dos lemas a seguir não levam em conta as particularidades do sistema $\mathcal{G}_{cm'}$ e, por isso, serão lemas de alcance mais geral, a serem usados mais tarde. Para o processo de cotação, usaremos a definição da função hiper-exponencial $n_{(p)}q$:

(i) $n_{(0)}q=q$;
(ii) $n_{(p+1)}q=n^{(n_{(p)}q)}$.

A partir dos seguintes lemas será possível concluir que existe uma derivação $\pi^{\bullet}$ no sistema C, obtida via procedimento de normalização, considerando um conjunto de operações sobre *RDs* que não inclui as operações para os *PPIMs-I*, tal que $|\pi^{\bullet}| \leq 2_{(v_{\triangleright}(\pi))}|\pi|$, quando π é uma derivação qualquer em C [286]. É preciso notar que se encaixam nessa descrição as derivações que não contêm instâncias *cm* ou que só contêm instância *cm* com conclusão básica. O procedimento de normalização a ser apresentado a seguir pode ser chamado de **estratégia geral de redução das críticas**. [287]

Uma derivação crítica terá uma das formas genéricas da Figura V-1, Figura V-3, Figura V-7, Figura V-4, Figura V-6 ou Figura V-5 acima, tal que a subderivação π_5 deve ser vazia em cada um dos casos.

Lema V-1 - Seja π uma derivação crítica do sistema C, tal que $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ e $r(\pi)$ seja cm. Seja π da forma genérica abaixo:

$$\pi \equiv \begin{array}{c} \nabla\pi_1 \\ \mathrm{A} \\ \text{—}\,\mathrm{cm} \\ \mathrm{A} \end{array}$$

Figura V-21

Logo, existe uma derivação π' tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'| \leq |\pi_1|$; $|\pi'|<2.|\pi_1|$.

Demonstração # Existem duas possibilidades, que o *RD* envolvendo $r(\pi)$ seja uma *US* ou que seja um *PS*.

---

[286] Lembramos que $v_{\triangleright}(\pi)$ é o valor redutivo da derivação π. Esse valor é usualmente o valor da fórmula máxima mais um, com exceção dos *USs* onde esse valor é constante: um (*1*). Lembramos, também, que $v(\perp)=1$.
[287] A estrutura do procedimento de prova foi adaptada a partir daquela que encontramos em [Per82].

(i) Se $r(\pi)$ está envolvido em uma *US* crítica, então $v_{\triangleright}(\pi)=1$ e ela poderia eventualmente ser concomitante a um *PS* crítico de tipo *I*. Logo, $\pi \overset{\triangleright_c}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, $|\pi'|=|\pi_1|$ e, finalmente, $v_{\triangleright}(\pi')<h$, já que π_1 deveria estar em *FN*, dado que π era crítica.

(i.ii) Se $r(\pi)$ não está envolvido em uma *US* crítica, então estará envolvida em ao menos um *PS* crítico ou, eventualmente, em vários *PSs* críticos, pois os *PSs* podem ser concomitantes. Do número total de *PSs*, no máximo um deles poderá ser um *PS-I*. A redução de um *PS* crítico (qualquer que ele seja) não poderá gerar nenhum novo *RD*, pois, por um lado, $r(\pi)$ é a última instância na derivação e, por outro lado, a redução só geraria outro *PS* novo se já houvesse um *PS* em π do mesmo valor que não envolvesse $r(\pi)$. Mas isso contrariaria a nossa hipótese de que a derivação é crítica. Seja o número de *PSs* que incluem $r(\pi)$ igual a $n>0$. Claramente, $n<|\pi_1|$ e $\pi \overset{\triangleright_c}{\underset{n}{\rightarrow}} \pi'$ tal que: $v_{\triangleright}(\pi')<h$, $|\pi'|\leq|\pi_1|<2.|\pi_1|$. *QED*

Lema V-2 - Seja π uma derivação crítica do sistema C, tal que $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ e $r(\pi)$ esteja envolvido em um POI crítico. Seja π da forma genérica abaixo, onde A é pM:

$$\pi\equiv \frac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4 \\ B & A & C & C\end{array}}{D}\ \text{elim.}$$

Figura V-22

Logo, existe uma derivação π' tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1|$; $|\pi'|<2.|\pi_1|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2, π_3 e π_4 sejam vazias.

Demonstração # A instância $r(\pi)$ poderá estar envolvida em algum *PPIM-II* de valor *h*. Contudo, a redução do *POI*, ao fazer desaparecer a instância de eliminação, também faria desaparecer o⟦s⟧ *PPIM⟦s⟧-II* porventura existente⟦s⟧. Claramente: $\pi \overset{\triangleright_c}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi'|<2.|\pi_1|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$, quando ao menos uma dentre as subderivações π_2, π_3 e π_4 não for vazia. *QED*

Lema V-3 - Seja π uma derivação crítica do sistema C, tal que $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ e $r(\pi)$ esteja envolvido em um PPIM-II crítico, mas não esteja envolvida em um POI de valor h, nem em um UPE de valor h, nem em um PPIM-I de valor h. Seja π da forma genérica abaixo, onde A é pM:

$$\pi\equiv \dfrac{\begin{array}{ccc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4\\ A & C & C\end{array}}{C}\ e\vee \|e\exists\|$$

Figura V-23

Logo, existe uma derivação π' tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq|\pi_1|+2$; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_3|+|\pi_4|)$.

Demonstração # A derivação poderá conter no máximo dois *PPIMs-II* críticos. Logo, $\pi \overset{\triangleright_c}{\underset{\leq 2}{\rightarrow}} \pi''$ tal que π'' poderia ter a forma abaixo:

$$\pi^{II}\equiv \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3^{II} & \nabla\pi_4^{II}\\ B & A & C & C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \text{—}^{i_1}\ cm\\ C\\ \text{—}^{i_2}\ cm\\ C\end{array}}\ e\vee \|e\exists\|$$

Figura V-24

Vemos que $|\pi_3''|\leq|\pi_3|$ e $|\pi_4''|\leq|\pi_4|$. A seguir, se efetivamente houvesse duas instâncias *cm* de índices i_1 e i_2, elas constituiriam um *PS-I* e, desse modo, $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ tal que $v_{\triangleright}(\pi')<h$, $|\pi'|<|\pi''|$, onde π' seria da seguinte forma:

$$\pi^{I}\equiv \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3^{II} & \nabla\pi_4^{II}\\ B & A & C & C\end{array}}{\begin{array}{c}C\\ \text{—}^{i}\ cm\\ C\end{array}}\ e\vee \|e\exists\|$$

Figura V-25

Caso contrário, teríamos $\pi'\equiv\pi''$. A instância *cm* raiz em π' não poderá formar nenhum *PS-II*, pois de outro modo ela já formaria em π, mas, assim, π não seria crítica, contrariando nossa hipótese. Claramente, $|\pi'|\leq|\pi|<2.|\pi_1|.(|\pi_3|+|\pi_4|)$ e $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq 3\leq|\pi_1|+2$. *QED*

Lema V-4 - Seja π uma derivação crítica do sistema C tal que $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ e $r(\pi)$ esteja envolvida em um UPE crítico, A seja a pM de $r(\pi)$, $1\leq k\leq n$ e π_1 seja a subderivação cujas ocorrências estão em azul na derivação π abaixo:

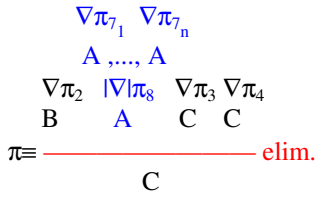


Figura V-26

Logo, existe uma derivação π' tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1|+2$; $|\pi'|<2.|\pi_1|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2, π_3 e π_4 sejam vazias.

Demonstração # Além de estar envolvida em um *UPE*, a instância $r(\pi)$ poderá estar envolvida em *PPIMs-II*. Existem duas combinações possíveis. Primeira, se $r(\pi)$ estiver envolvida em *PPIMs-II* de valor h, então são reduzidos primeiro os *PPIMs-II*, observando que $r(\pi)$ seria $e\vee$ ou $e\exists$. Segunda, caso $r(\pi)$ não envolva nenhum *PPIM-II* de valor h, então, assumindo π'' idêntica a π, passamos diretamente à redução do *UPE*. Voltando ao procedimento para o caso em que $r(\pi)$ esteja envolvida em algum *PPIM-II* de valor h, procederemos como a seguir e novamente por generalidade suporemos que $r(\pi)$ pertence a *2* (dois) *PPIMs-II*, o que ocorrerá somente quando $r(\pi)$ for $e\vee$. Nas figuras abaixo, aquela parte da derivação em verde se originaria da redução dos *PPIMs-II*, se fosse o caso de fazê-las. Reduzindo os *PPIMs-II* teríamos $\pi \overset{\triangleright_c}{\underset{\leq 2}{\rightarrow}} \pi''$, $v_{\triangleright}(\pi'')\leq h$, $|\pi''|=|\pi|$, onde π'' teria a forma abaixo:

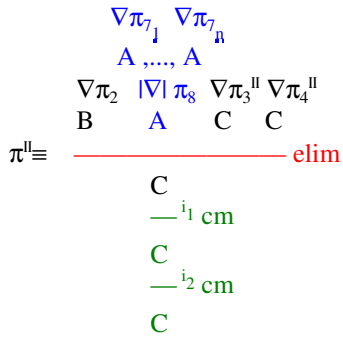


Figura V-27

Claramente, $|\pi_3''|\leq|\pi_3|$ e $|\pi_4''|\leq|\pi_4|$. Nenhuma instância topo de π_1 poderia ser descartada pelas duas regras *cm* em verde, raiz de π''. Observamos também que nenhuma das instâncias *cm* em verde poderia estar envolvida em um *PS-II* com outra instância de π_3'' ou π_4'', pois desse modo π não seria crítica, contrário a nossa suposição. Mas, se havia um *UPE* de valor h associado a $r(\pi)$, também haverá um *UPE* de valor h associado a instância em vermelho em π'' na Figura V-27 e

ele será crítico. O procedimento para reduzi-lo seria como a seguir. Faríamos $\pi'' \xrightarrow[i]{\triangleright_c} \pi'''$ sobre o *UPE* crítico tal que $v_{\triangleright}(\pi''')\leq h$ e π''' teria a forma genérica abaixo:

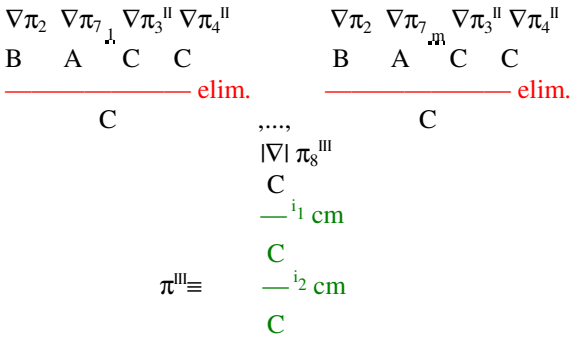


Figura V-28

Chamaremos de π_{9_k}''' a subderivação determinada pela k-ésima regra de eliminação em π''', para $1\leq k\leq n$ (dada pela k-ésima ocorrência topo C em π_8''', notando que π_8''' é obtida de π_8 pela substituição das ocorrências A do segmento constante pelas ocorrências C):

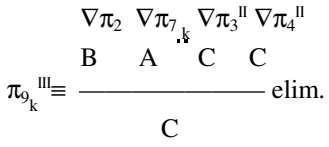


Figura V-29

Na derivação π''' poderão surgir no máximo n novos *RDs* de valor h envolvendo a ocorrência de eliminação de π_{9_k}, ou seja, envolvendo a ocorrência A da Figura V-29. Suponha o pior, que surgiriam n novos *RDs*. Mas esses novos *RDs* só podem ser *POIs* de valor h. Não podem ser *UPEs*, pois nesse caso a raiz de alguma das subderivações π_{7_k} em π deveria ser $e\vee$ ou $e\exists$ e, portanto, essa raiz já deveria fazer parte do segmento constante em π, contrário a nossa hipótese. Não pode ser *PS-I*, nem *PS-II*, nem *PPIMs-II*, nem *US*, pois a ocorrência A é *pM* de uma eliminação. Não pode ser um *PPIM-I* de valor h, pois nesse caso a fórmula máxima seria A e, assim, a raiz de alguma das π_{7_k} em π deveria ser *cm*, mas, ao mesmo tempo, como A era *pm* de $e\vee$ ou $e\exists$ em π, pois pertencia ao segmento constante de ocorrências, haveria um *PPIM-II* em π de valor h e a derivação π não seria crítica, contrário a nossa hipótese. Logo, na pior das hipóteses todas as derivações π_{9_k}''' tem a raiz envolvida em um *POI* crítico. Mas, $v_{\triangleright}(\pi_{9_k}''')=h$. Logo, pelo Lema V-2, $\pi_{9_k}''' \xrightarrow{\triangleright_c} \pi_{9_k}^{IV}$ tal que: $v_{\triangleright}(\pi_{9_k}^{IV})<h$; $|\pi_{9_k}^{IV}|<2.|\pi_{7_k}|$, quando π_2, π_3'' e π_4'' são vazias; $|\pi_{9_k}^{IV}|<2.|\pi_{7_k}|.(|\pi_2|+|\pi_3''|+|\pi_4''|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2, π_3'' e

π_4^{II} sejam vazias; $|\pi_{9_k}^{III} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{9_k}^{IV}| < |\pi_{7_k}|$, pois a regra de eliminação em vermelho na derivação π^{III} não poderia estar envolvida em um *PPIM-II* de valor *h*. Logo π^{IV} será como abaixo:

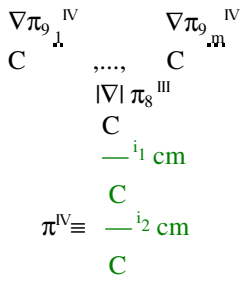


Figura V-30

Assim, ou $v_{\triangleright}(\pi^{IV}) < h$, caso não existam as instâncias *cm* em verde e, nesse caso, tomaríamos $\pi' \equiv \pi^{IV}$, ou, por outro lado, π^{IV} será crítica, caso existam as duas instâncias *cm* em verde. Nessa última situação $\pi^{IV} \underset{\leq i}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi'$ sobre o *PS-I* formado pelas instâncias *cm* em verde. A derivação π' seria da forma abaixo, notando que $|\pi'| \leq |\pi^{IV}|$:

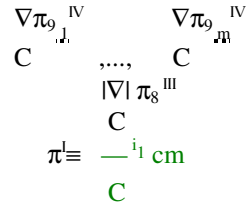


Figura V-31

Teremos as seguintes equações (caso as subderivações π_2, π_3 e π_4 sejam vazias substitua toda a expressão em azul por *1* (um) nas equações abaixo):

$|\pi'| \leq (|\pi_8| - n) + (|\pi_{9_1}^{IV}| + \ldots + |\pi_{9_n}^{IV}|) + 1$

$|\pi_{9_k}^{IV}| < 2.|\pi_{7_k}|.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|)$

$|\pi'| < (|\pi_8| - n) + (2.|\pi_{7_1}|.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|)) + \ldots + (2.|\pi_{7_n}|.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|)) + 1$

$|\pi'| \leq (|\pi_8| - n) + (2.|\pi_{7_1}|.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|)) + \ldots + (2.|\pi_{7_n}|.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|))$

$|\pi'| \leq (|\pi_8| - n) + 2.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|).(|\pi_{7_1}| + \ldots + |\pi_{7_n}|)$

$|\pi_8| - n > 1$

$|\pi'| < 2.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|).(|\pi_8| - n) + 2.(|\pi_2| + |\pi_3^{II}| + |\pi_4^{II}|).(|\pi_{7_1}| + \ldots + |\pi_{7_n}|)$

$|\pi_3^{II}| \leq |\pi_3|$ *e* $|\pi_4^{II}| \leq |\pi_4|$

$|\pi'|<2.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|).(|\pi_8|-n)+2.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|).(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|)$

$|\pi'|<2.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|).(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|+|\pi_8|-n)$

$|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$

Assim: $|\pi'|<2.|\pi_1|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1|.(|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2, π_3 e π_4 sejam vazias. Quanto ao comprimento do processo de redução:

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi^{III}|+(|\pi_{9_1}{}^{III} \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_{9_1}{}^{IV}|+...+|\pi_{9_n}{}^{III} \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_{9_n}{}^{IV}|)+1$

$(|\pi_{9_1}{}^{III} \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_{9_1}{}^{IV}|+...+|\pi_{9_n}{}^{III} \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_{9_n}{}^{IV}|)<(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|))$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi^{III}|+(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|)+1$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi^{III}|\leq 3$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<4+(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|)$

$4+(|\pi_{7_1}|+...+|\pi_{7_n}|)\leq|\pi_1|+2$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1|+2$

QED

Nos quatro lemas acima, foram dadas informações suficientes para provar normalização fraca por indução sobre o valor redutivo de uma derivação no sistema $\mathcal{I}cm'$. No entanto, os lemas permitem um pouco mais, pois eles nos facultam obter também o teorema de normalização fraca com cota.

Dada uma derivação π qualquer em C, tal que $v_{\triangleright}(\pi)=h$ e que π não contenha *PPIMs-I* de valor h, é preciso observar que, se for feita a redução de um *PPIM-II* de valor h, poderá surgir um *PPIM-I* de valor h. Os casos onde isso não aconteceria são o caso onde $h=1$ e o caso onde as conclusões de *cm* são básicas, pois em ambas situações a conclusão da instância *cm*, que forma o *PPIM-II*, seria básica e, desse modo, seria impossível que essa ocorrência fosse *pM* de uma regra de eliminação. Nessas situações não poderia surgir um *PPIM-I* novo, a partir da redução do

PPIM-II. As condições impostas no teorema abaixo visam exatamente esses problemas, pois ainda não alcançamos o ponto de mostrar quais seriam os procedimentos necessários para diminuir o valor redutivo de uma derivação que contenha *PPIMs-I*.

Lema V-5 - Seja π uma derivação em $\mathbb{C}$ tal que: $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$; todos os RDs de valor h não são PPIMs-I; todos os RDs de valor h não são PPIMs-II, quando h>1. Logo, existe uma derivação π' em $\mathbb{C}$ tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; nenhum dos RDs reduzidos era um PPIM-I; nenhum dos RDs reduzidos era um PPIM-II de valor maior que 1; $v_{\triangleright}(\pi)<h$, $|\pi'|<2^{|\pi|}$; $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<2^{|\pi|}$.

Demonstração # Se $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$, então $|\pi|_{inst.}\geq 1$. Ou seja, π tem ao menos uma instância de regra. A demonstração é feita por indução em $|\pi|_{inst.}$, mas, como $|\pi|_{inst.}\geq 1$, não é preciso tratar da base. Teremos três casos são.

(i) Se $r(\pi)$ é uma regra de introdução, conforme a figura genérica a seguir:

$$\pi\equiv \dfrac{\begin{array}{cc}\underset{\vdots}{[A]^i} & \\ \nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 \\ C & B\end{array}}{D}\ i\ \text{int.}$$

Figura V-32

onde π_1 e π_2 são as putativas subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$, então por *(HI)* existem π_1' e π_2' tal que $\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1'$ e $\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2'$, nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-I*, nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-II* de valor maior que *1*, $|\pi_1'|<2^{|\pi_1|}$, $|\pi_2'|<2^{|\pi_2|}$, $v_{\triangleright}(\pi_1')<h$, $v_{\triangleright}(\pi_2')<h$, $|\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1'|<2^{|\pi_1|}$ e $|\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2'|<2^{|\pi_2|}$. Conseqüentemente, a derivação π' é como abaixo:

$$\pi'\equiv \dfrac{\begin{array}{cc}\underset{\vdots}{[A]^i} & \\ \nabla\pi_2' & \nabla\pi_1' \\ C & B\end{array}}{D}\ i\ \text{int.}$$

Figura V-33

Claro está que $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$ e $v_{\triangleright}(\pi')<h$, já que $r(\pi')$ não faz parte de nenhum *RD*. Como $|\pi'|=|\pi_1'|+|\pi_2'|+1$, logo $|\pi'|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+1<2^{|\pi_1|+|\pi_2|+1}=2^{|\pi|}$, onde as parcelas em azul podem não existir se a subderivação correspondente não existir. As derivações π_1 e π_2 são paralelas, logo $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|=|\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1'|+|\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2'|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}<2^{|\pi|}$.

(ii) Se $r(\pi)$ é *cm*, conforme a figura genérica a seguir:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}[\underset{\sim}{A}]^j\\ \nabla\pi_1\\ A\end{array}}{A}\ j\ cm$$

Figura V-34

onde π_1 é a subderivação da premissa imediata de $r(\pi)$, então por *(HI)* existe π_1'' tal que $\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1''$, nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-I*, nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-II* de valor maior que *1*, $|\pi_1''|<2^{|\pi_1|}$, $v_{\triangleright}(\pi_1'')<h$ e $|\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1''|<2^{|\pi_1|}$. Seja π'' a derivação abaixo, onde p (≥ 0) é o número de ocorrências topo da forma $\sim A$ descartadas pela regra *cm*:

$$\pi''\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}[\underset{\sim}{A}]^j{}_p\\ \nabla\pi_1{}^{II}\\ A\end{array}}{A}\ j\ cm$$

Figura V-35

Se $v_{\triangleright}(\pi'')<h$, então basta fazer $\pi'\equiv\pi''$. Conseqüentemente $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$, $v_{\triangleright}(\pi')<h$ e, como $|\pi'|=|\pi_1''|+1$, $|\pi'|<2^{|\pi_1|}+1<2^{|\pi_1|+1}=2^{|\pi|}$. Também $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|=|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|<2^{|\pi_1|}<2^{|\pi|}$. Por outro lado, se $v_{\triangleright}(\pi'')=h$, então π'' é crítica e $r(\pi'')$ está envolvida em uma *US* ou, pelo menos, em um *PS*. Pelo Lema V-1 $\pi'' \underset{k}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi'''$, onde $k\leq|\pi_1''|$, tal que $v_{\triangleright}(\pi''')<h$ e $|\pi'''|<2.|\pi_1''|$. Logo, basta fazer $\pi'\equiv\pi'''$. Conseqüentemente, $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'' \underset{k}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi'$ e $v_{\triangleright}(\pi')<h$, tal que nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-I* e nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-II* de valor maior que *1*. Mas, como $|\pi'|=|\pi'''|<2.|\pi_1''|$, logo $|\pi'|<2.2^{|\pi_1|}=2^{|\pi_1|+1}=2^{|\pi|}$. Também $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|=|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|+|\pi'' \underset{k}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi'|<2^{|\pi_1|}+k<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_1|}=2.2^{|\pi_1|}=2^{|\pi_1|+1}=2^{|\pi|}$.

(iii) Se $r(\pi)$ é uma regra de eliminação conforme a figura genérica a seguir:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_2\ \ \nabla\pi_1\ \ \begin{array}{c}[H]^i\\ \nabla\pi_3\end{array}\ \ \begin{array}{c}[K]^i\\ \nabla\pi_4\end{array}}{\begin{array}{cccc}B & A & C & C\end{array}}\ i\ elim.$$

Figura V-36

onde π_1, π_2, π_3 e π_4 são as putativas subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$ e A é pM, por

(HI) existem subderivações π_1'', π_2'', π_3'' e π_4'' tal que $\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1''$, $\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2''$, $\pi_3 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_3''$, $\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''$ onde nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-I*, nenhum dos *RDs* reduzidos era um *PPIM-II* de valor maior que *1*, $|\pi_1''|<2^{|\pi_1|}$, $|\pi_2''|<2^{|\pi_2|}$, $|\pi_3''|<2^{|\pi_3|}$, $|\pi_4''|<2^{|\pi_4|}$, $v_{\triangleright}(\pi_1'')<h$, $v_{\triangleright}(\pi_2'')<h$, $v_{\triangleright}(\pi_3'')<h$, $v_{\triangleright}(\pi_4'')<h$, $|\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1''|<2^{|\pi_1|}$, $|\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2''|<2^{|\pi_2|}$, $|\pi_3 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_3''|<2^{|\pi_3|}$ e $|\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''|<2^{|\pi_4|}$. Conseqüentemente, a derivação π'' seria como a seguir:

$$\pi'' \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2'' \quad \nabla\pi_1'' \quad [H]^i \quad \nabla\pi_3'' \quad [K]^i \quad \nabla\pi_4''}{\mathrm{B} \quad \mathrm{A} \quad \mathrm{C} \quad \mathrm{C}}}{\mathrm{D}}\,{}^{i}\,\mathrm{elim.}$$

Figura V-37

Essa derivação é obtida pela concatenação das reduções das quatro subderivações. Se $v_{\triangleright}(\pi'')<h$, então basta fazer $\pi'\equiv\pi''$. Conseqüentemente, $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$ e $v_{\triangleright}(\pi')<h$. Como $|\pi'|=|\pi_1''|+|\pi_2''|+|\pi_3''|+|\pi_4''|+1$, logo $|\pi'|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}+1<2^{|\pi_1|+|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|+1}=2^{|\pi|}$, onde as parcelas em azul podem não existir se a subderivação correspondente não existir. Também, dado que π_1, π_2, π_3 e π_4 são paralelas e dado que $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|=|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|$, teríamos $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|=|\pi_1 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_1''|+|\pi_2 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_2''|+|\pi_3 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_3''|+|\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}\leq 2^{|\pi|}$, onde as parcelas em azul podem não existir se a subderivação correspondente não existir. Por outro lado, se $v_{\triangleright}(\pi'')=h$, então π'' é crítica. Em primeiro lugar, será preciso mostrar que $r(\pi'')$ não pode fazer parte de um *PPIM-II* de valor h, quando $h>1$. A subdemonstração é como a seguir. Suponhamos que $h>1$. Obviamente, $r(\pi'')$ só faria parte de um *PPIM-II* de valor h, se $r(\pi'')$ fosse $e\vee$ ou $e\exists$. Considere que $\pi_4\equiv\pi_{4_1}$, $\pi_4''\equiv\pi_{4_n}$ e que $\pi_{4_1},\ldots,\pi_{4_n}$ é a seqüência de derivações envolvidas na seqüência de redução $\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''$. Vamos provar que, para qualquer derivação π_{4_k} dessa seqüência, onde $1\leq k\leq n$, ou $r(\pi_{4_k})$ não é uma instância *cm* ou, se é uma instância *cm*, então sua conclusão C é tal que $v(C)<h-1$. Para o caso básico, onde $n=1$, teríamos $\pi_4\equiv\pi_4''$. Como, por hipótese, não há *PPIM-II* de valor h em π, logo ou $r(\pi_4'')$ não é uma instância *cm* ou, se é um instância *cm*, sua conclusão C é tal que $v(C)<h-1$. Suponhamos, a seguir, que para uma subderivação π_{4_k} da seqüência ou a sua raiz não é uma instância *cm* ou, se é *cm*, sua conclusão C é tal que $v(C)<h-1$.

Veremos que a raiz de $\pi_{4_{k+1}}$ não é uma instância *cm*, a menos que *v(C)<h-1*. Para que uma redução envolvendo π_{4_k} resultasse uma derivação $\pi_{4_{k+1}}$ com uma raiz que fosse instância *cm* e tal que para sua conclusão *v(C)=h-1*, a redução deveria ter envolvido $r(\pi_{4_k})$. Lembramos que todos os *RDs* reduzidos em $\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''$ são críticos na subderivação e esses *RDs* devem ter valor *h*, por *(HI)*. Porém, a redução não poderia ter sido de uma *US*, pois estamos supondo que *h>1* e todas as reduções foram reduções críticas de valor *h*. Não poderia ter sido de um *PS,* caso contrário $r(\pi_{4_k})$ já seria *cm* e *v(C)=h-1*, contrário a suposição. Não poderia ter sido de um *UPE*, pois $r(\pi_{4_{k+1}})$ não seria *cm*, seria uma eliminação. Não poderia ter sido de um *POI*, pois o *POI* teria valor *h* e sua fórmula máxima teria valor *h-1*, logo a conclusão da regra *cm* já poderia ter um valor menor que *h-1*. No que toca os *PPIMs-I* e os *PPIMs-II*, em particular, por *(HI)* as reduções em $\pi_4 \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi_4''$ não foram de *PPIMs-I* e também não foram de *PPIMs-II* de valor maior que *1*. Portanto, ou $r(\pi_{4_{k+1}})$ não é *cm* ou, se é *cm*, *v(C)<h-1*. Conseqüentemente, é impossível que $r(\pi_3'')$ e que $r(\pi_4'')$ sejam instância *cm* com conclusão *C* tal que *v(C)=h-1*, quando *h>1*. Assim, é impossível que $r(\pi)$ faça parte de um *PPIM-II* de valor *h*, quando *h>1*. Isso conclui a subdemonstração. Mas estamos assumindo que π'' é crítica, logo, lembrando que o valor redutivo de um *POI* ou de um *UPE* é sempre maior ou igual a *2*: ou $r(\pi'')$ faz parte exclusivamente de um *POI* de valor *h*; ou faz parte exclusivamente de um *UPE* de valor *h*; ou não faz parte de nenhum dos dois, mas faz parte de um *PPIM-II* de valor *1*. No primeiro caso, usamos o Lema V-2 e, desse modo, existe π' tal que: $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi'|<2.|\pi_1''|$, quando π_2'', π_3'' e π_4'' são todas vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1''|.(|\pi_2''|+|\pi_3''|+|\pi_4''|)$, quando não é verdade que todas as derivações π_2'', π_3'' e π_4'' sejam vazias; $|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1''|$. No segundo caso, usamos o Lema V-4 e, desse modo, existe uma derivação π' tal que: $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1''|+2$ e $|\pi'|<2.|\pi_1''|$, quando π_2, π_3 e π_4 forem vazias; $|\pi'|<2.|\pi_1''|.(|\pi_2''|+|\pi_3''|+|\pi_4''|)$, quando não é verdade que todas as três subderivações π_2'', π_3'' e π_4'' sejam vazias. No terceiro caso, usamos o Lema V-3 e, desse modo, existe uma derivação π' tal que: $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_{\triangleright}(\pi')<h$; $|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq|\pi_1''|+2$; $|\pi'|<2.|\pi_1''|.(|\pi_3''|+|\pi_4''|)$. Em qualquer caso, se uma das derivações π_2'', π_3'' e π_4'' não for vazia então a respectiva subderivação original não será

vazia, assim como, se uma das derivações π_2, π_3 ou π_4 for vazia, a respectiva subderivação obtida por redução será vazia. Quanto ao comprimento da derivação obtida, $|\pi'|<2.|\pi_1''|.(|\pi_2''|+|\pi_3''|+|\pi_4''|)<2.2^{|\pi_1|}.(2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})\leq 2^{|\pi_1|+|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|+1}=2^{|\pi|}$, onde as parcelas em azul podem não existir, se a derivação correspondente não existir. Além disso, quando todas as subderivações π_2, π_3 e π_4 forem vazias, o multiplicando em azul deve ser substituído por *1*. Quanto às equações para o comprimento do procedimento de redução, sabemos que $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|+|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|$. Para o primeiro e o segundo caso, em que estávamos frente a um *POI* ou um *UPE*, teremos as seguintes equações:

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|<(2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})$ logo $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|\leq(2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})-1$

$|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<|\pi_1''|+2$

$|\pi_1''|<2^{|\pi_1|}$ *logo* $|\pi_1''|\leq 2^{|\pi_1|}-1$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<((2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})-1)+((2^{|\pi_1|}-1)+2)$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}+2^{|\pi_1|}=2.2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}\leq 2^{|\pi_1|+|\pi_2|+|\pi_3|+|\pi_4|+1}=2^{|\pi|}$

No terceiro e último caso, aquele envolvendo o *PPIM-II* de valor *1*, as equações são como a seguir:

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|<(2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})$ logo $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi''|\leq(2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})-1$

$|\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq|\pi_1''|+2$

$|\pi_1''|<2^{|\pi_1|}$ logo $|\pi_1''|\leq 2^{|\pi_1|}-1$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq((2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|})-1)+((2^{|\pi_1|}-1)+2)$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq 2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}+2^{|\pi_1|}=2.2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}$

$|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'|\leq 2.2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_3|}+2^{|\pi_4|}<2^{|\pi_1|+|\pi_3|+|\pi_4|+1}=2^{|\pi|}$, pois $|\pi_3|\geq 2$ ou $|\pi_4|\geq 2$, além disso $2.2^{|\pi_1|}>1$.

Novamente, as parcelas em azul podem não existir, caso não exista a respectiva subderivação.

QED

Teorema V-2 - Normalização fraca com cota para $\mathcal{J}_{cm'}$ - Se π é uma derivação em $\mathcal{J}_{cm'}$ tal que $v_{\triangleright}(\pi)>0$, então existe uma derivação $\pi^{\triangleright}$ em $\mathcal{J}_{cm'}$ tal que: $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi^{\triangleright}$; $|\pi^{\triangleright}|<2_{(v_{\triangleright}(\pi))}|\pi|$; e $|\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi^{\triangleright}|<2_{(v_{\triangleright}(\pi))}|\pi|$.

Demonstração # Se π é uma derivação de $\mathcal{J}_{cm'}$, então π é uma derivação de C, além disso, não pode haver *PPIMs-I* em π. Se houver *PPIMs-II*, eles serão sempre de valor *1* (um), dado que a regra *cm* está restrita às conclusões básicas. A demonstração é feita por indução em $v_{\triangleright}(\pi)$ usando o Lema V-5. *QED*

Corolário V-2 - Normalização fraca com cota para $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_f$ e C'.

Demonstração # Usando o Teorema V-2 e os fatos de que $\mathcal{M}_{\rightarrow} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{cm'}$ e $C' \subset \mathcal{J}_{cm'}$. Além disso, usamos o fato de que as regras de $\mathcal{M}_f$ são estruturalmente idênticas uma a uma às regras de $\mathcal{M}$, tanto quanto as regras de $\mathcal{J}_f$ são às regras de $\mathcal{J}$. *QED*

Corolário V-3 - $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_f$, $N\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_{cm_o^-}$, C' e $\mathcal{J}_{cm'}$ são consistentes.

Demonstração # Usando o Teorema IV-6, o Teorema V-2, o Corolário V-2 e os fatos de que $\mathcal{J}_{cm_o^-} \subseteq \mathcal{J}$ e $N\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$. *QED*

5.2. Normalização Fraca com *Consequentia Mirabilis* Não-Restringida

A seguir, demonstramos o teorema de normalização fraca para sistemas com regra *cm*, quando essa regra não está restringida às conclusões básicas. As demonstrações têm estrutura similar àquela de $\mathcal{J}_{cm'}$ acima. No entanto, dessa vez, não daremos uma prova com cota, pois dista de ser evidente que isso seja possível usando o método das críticas. A demonstração de normalização fraca será efetuada para o sistema C. Lembramos que $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}} \subset C$, $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}} \subset C$, $\mathcal{J}_{cm_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}} \subset \mathcal{J}_{cm_o} \subset C$.

Lema V-6 - Seja π uma derivação do sistema C tal que π é crítica, $r(\pi)$ está envolvida em um PPIM-I crítico, $v_{\triangleright}(\pi)=h$, tal que π é como abaixo e a subderivação cujas ocorrências estão em azul é a subderivação π_1:

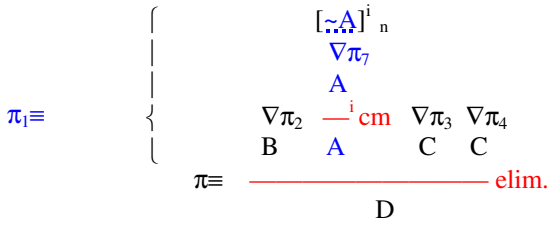


Figura V-38

Logo, existe uma derivação π' tal que $\pi \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$ e $v_{\triangleright}(\pi')<h$.

Demonstração # Além de estar envolvida em um *PPIM-I*, a instância $r(\pi)$ poderá estar envolvida em *PPIMs-II*. Existem duas combinações possíveis. Primeira, se $r(\pi)$ estiver envolvida em *PPIMs-II* de valor *h*, então são reduzidos primeiro os *PPIMs-II*, observando que $r(\pi)$ seria $e\vee$ ou $e\exists$ e que, nesse caso, $v(C)=h-1$. Segunda, caso $r(\pi)$ não envolva nenhum *PPIM-II* de valor *h*, então fazemos $\pi''\equiv\pi$ e passamos à redução do *PPIM-I* de π''. O procedimento para o caso em que $r(\pi)$ esteja envolvida em algum *PPIM-II* de valor *h* é como a seguir. Tratando o caso mais abrangente, por generalidade, suporemos que $r(\pi)$ pertence a *2* (dois) *PPIMs-II*, o que ocorrerá somente quando $r(\pi)$ for $e\vee$. A situação é muito similar àquela que encontramos no caso dos *UPEs*. A derivação π'' seria como abaixo, tal que $\pi \underset{\leq 2}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi''$, e as instâncias verdes poderiam não existir caso não houvesse um *PPIM-II* de valor *h* em π.

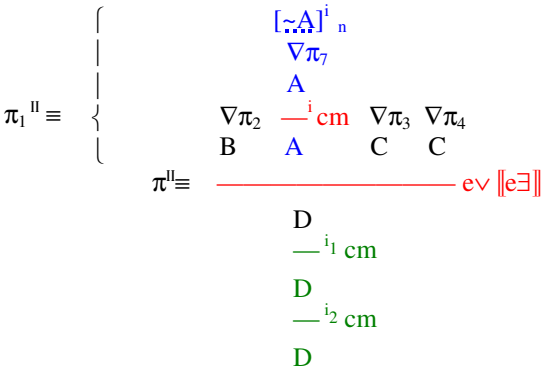


Figura V-39

Nenhuma instância topo de π_1'' ou de π_2 poderia ser descartada pelas regras *cm* em verde. A seguir, o próximo passo seria a permutação sobre o *PPIM-I* em vermelho. Se o *PPIM-I* for crítico em π, ele também será em π'' , nesse caso, $\pi'' \underset{i}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi'''$ tal que π''' seria como abaixo:

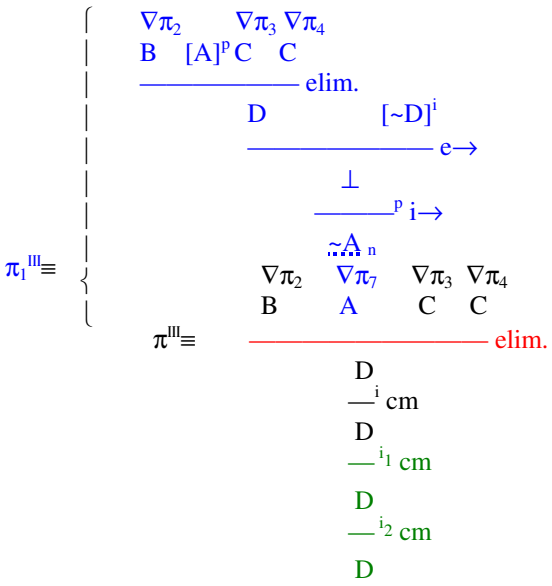


Figura V-40

Não poderá haver *PPIM-I* de valor *h*, nem *PPIM-II* de valor *h*, nas subderivações π_2, π_3, π_4 e π_7, pois, caso contrário, π não seria crítica. Por sua vez, a instância de eliminação em vermelho na figura acima não pode estar envolvida em um *PPIM-I* de valor *h* (de outro modo haveria um *PS-I* de valor *h* em π''), nem em um *PPIM-II* de valor *h*, caso contrário, π não seria crítica. Observe que a instância *cm* de índice *i* não pode descartar nenhuma ocorrência topo em π_2, π_3, π_4 e π_7. Eventualmente, poderia surgir um novo *RD* envolvendo a instância de eliminação em vermelho e a raiz da subderivação π_7 em π''', tanto quanto poderiam surgir novos *RDs* envolvendo as *n* ocorrências $\sim A$ no topo de π_7. O valor do *RD* envolvendo *A* seria *h* e o daqueles envolvendo $\sim A$ seria $h+2$ (lembrando que $\sim A \equiv A \rightarrow \bot$). Para continuar com a estratégia das críticas seria preciso examinar o surgimento dos novos *RDs* de valor $h+2$. Efetivamente, poderão surgir surgirão *q* novos *POIs* de $\rightarrow$, para $0 \leq q \leq n$, envolvendo $\sim A$ como fórmula máxima. Todos esses *POIs* tem a forma genérica da derivação à esquerda abaixo, cuja redução imediata seria da forma genérica da derivação à direita abaixo:

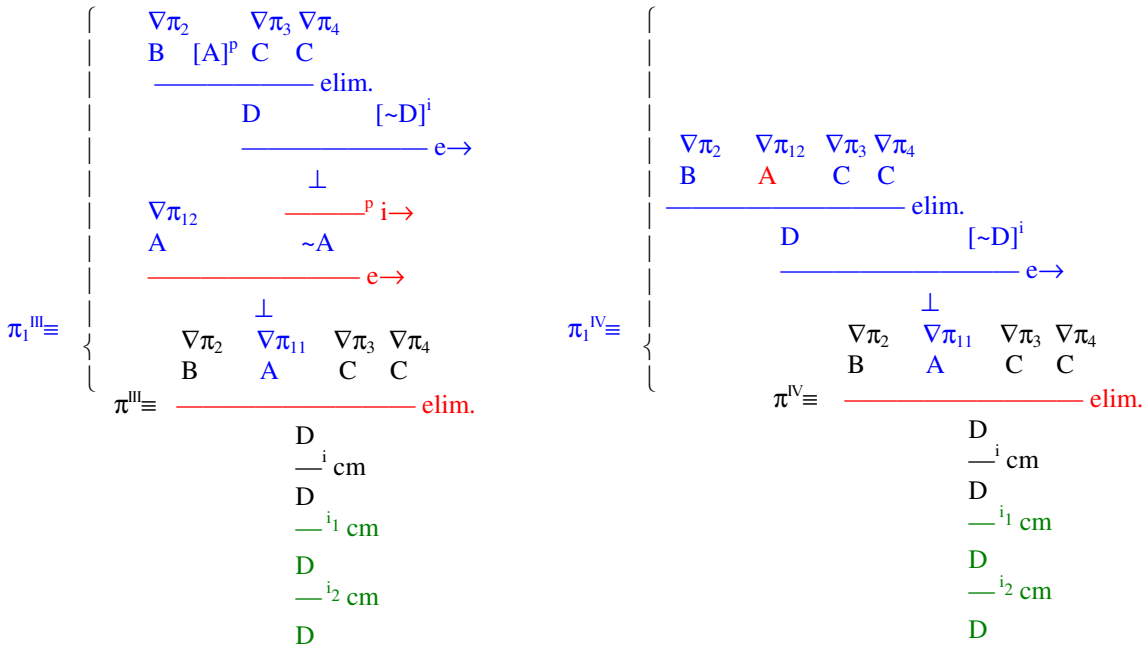


Figura V-41

Se houver ao menos um *POI* de $\rightarrow$ envolvendo ~*A*, haverá ao menos um desses *POIs* de $\rightarrow$ em π^{III} que será crítico. Ou seja, haverá ao menos um tal que não encontraríamos um *RD* de valor maior ou igual a *h+2* na subderivação correspondente a π_{12} dentro de π^{III}, pois, segundo as suposições do enunciado do teorema, não poderia haver tais *RDs* em π_2, π_3 e π_4, já que sequer havia *RD* de valor maior ou igual a *h* em π_2, π_3 e π_4. Por sua vez, a redução do *POI* de $\rightarrow$ crítico poderá gerar um novo *RD*, cuja fórmula máxima é a ocorrência final de π_{12}, a fórmula *A* em vermelho em π^{IV} acima. O valor desse novo *RD* seria no máximo *h*. Mas, como todos os demais *POIs* de $\rightarrow$ têm valor *h+2*, em seguida haveria outro daqueles *POIs* de $\rightarrow$ que é crítico na derivação π^{IV}. O processo se repete *q* vezes. A instância raiz de π_{12} não poderia ser uma instância *cm*. Se fosse uma instância *cm*, haveria um *PS-II* em π e em π'', formados pela instância da qual a raiz de π_{12} é resíduo junto com a instância *cm* que dá origem ao *PPIM-I* de π. Mas, nesse caso, π não seria crítica, contrário a nossa hipótese. Se a instância raiz de π_{12} for uma $e\vee$ ou $e\exists$, então, para qualquer segmento constante determinado a partir dessa instância raiz, o topo do segmento não poderá estar envolvido em um *PPIM-II* de valor *h* em π_{12}, pois esse *PPIM-II* só poderia ser resíduo de outro *PPIM-II* de valor *h* em π. Se assim fosse, π não seria crítica, contrário à nossa hipótese. Cada um dos demais *q-1 POIs* de $\rightarrow$ deve estar naquela subderivação que chamamos de π_{11}. Como essa derivação não é afetada pela redução mostrada na Figura V-41, da mesma forma nenhuma ocorrência *A pm* de uma $e\rightarrow$ envolvida nesses *POIs* de $\rightarrow$, será conclusão de uma instância *cm* ou de uma eliminação pertencente a um segmento constante, cuja ocorrência

topo esteja envolvida em um *PPIM-II*. Assim, seja π^V a derivação resultante da redução de todos os *q POIs* de $\rightarrow$, ou seja, $\pi^{III} \underset{q}{\overset{\triangleright_c}{\rightarrow}} \pi^V$. A derivação π^V teria a seguinte forma:

$$\pi^V \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2 \quad [\sim D]^i \quad \nabla\pi_1{}^V \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4}{\begin{matrix} B & A & C & C \end{matrix}}\ \text{elim.}}{\begin{matrix} D \\ \hline D \\ \hline D \\ \hline D \end{matrix}\ \begin{matrix} {}^i\text{cm} \\ {}^{i_1}\text{cm} \\ {}^{i_2}\text{cm} \end{matrix}}$$

Figura V-42

A subderivação determinada pela instância em vermelho na derivação π^V poderia agora conter até, no máximo, *q+1* novos *RDs*, incluindo aquele que envolve a instância de eliminação em vermelho, todos eles de valor *h*, no máximo. Como não havia *PPIMs-I* ou *PPIMs-II* de valor *h* em π^{III}, também não haveria tais *RDs* em π^V, pois as *q* reduções de *POIs* de $\rightarrow$ não poderiam gerá-los. Assim, se houvesse novos *RDs* em π^V eles seriam ou *POIs* ou *UPEs*. Se tivéssemos $v_{\triangleright}(\pi^V)<h$, faríamos $\pi^{VI} \equiv \pi^V$. Por outro lado, caso $v_{\triangleright}(\pi^V)=h$, já sabemos que não poderia haver nenhum *PPIM-I* de valor *h* em π^V. Adicionalmente, como anteriormente já havíamos eliminado um possível *PPIM-II* envolvendo $r(\pi)$, não haverá *PPIMs-II* de valor *h* em π^V. Caso a derivação de fato contenha as instâncias *cm* em verde teríamos um *PS-I* de valor *h*, pois a ocorrência *D* nesse caso seria equivalente a *C* e teríamos *v(D)=h-1*. Assim, aplicando o Lema V-5 sobre π^V existiria uma derivação π' em C tal que $\pi^V \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'$ e $v_{\triangleright}(\pi')<h$. *QED*

Uma derivação crítica, em que o *RD* crítico é um *PPIM-I*, pode, dessa forma, ser reduzida a uma derivação de valor menor, via redução das críticas. Isso é, em certo sentido, interessante, pois, embora não tenhamos dado cotas ao procedimento e ao seu resultado, é factível que pudéssemos fazê-lo. Porém, haverá, infelizmente, um problema no próximo passo. Observando a figura abaixo, nos depararíamos com um problema já que a redução de um *PPIM-I* na forma do Lema V-6 pode gerar um novo *PPIM-I*, envolvendo a instância *cm* em vermelho em π' e uma instância de regra de eliminação:

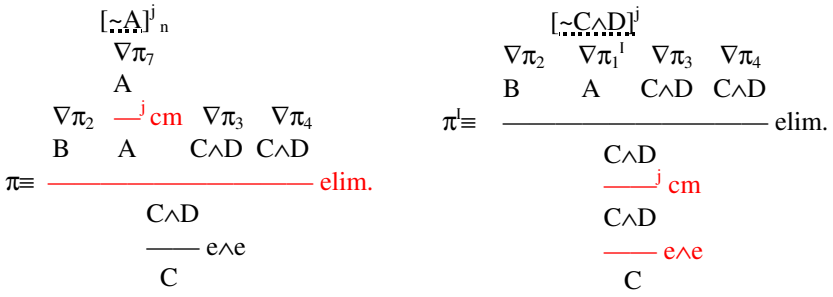


Figura V-43

Aliás, um problema similar ocorreria com a redução de um *PPIM-II* que também poderia gerar um *PPIM-I*. Desse modo, o procedimento das críticas já não permitiria um controle das cotas junto da demonstração de normalização fraca para C, por uma razão precisa. O problema é que tanto a regra de eliminação da disjunção quanto a de eliminação do existencial não mantêm nenhuma relação entre a complexidade lógica da conclusão e a complexidade da *pM*. Aqui reside a causa da perda da capacidade de cotar o resultado. A derivação π' poderia vir a apresentar um novo *PPIM-I* de grau maior que o daquele que foi reduzido, caso $v(C\wedge D)>v(A)$.

Teorema V-3 - Normalização Fraca Sem Cota Para C - Se π é uma derivação em C tal que $v_{\triangleright}(\pi)>0$, então existe uma derivação $\pi^{\triangleright}$ em C em FN tal que $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{\triangleright}$.

Demonstração # Se $v_{\triangleright}(\pi)>0$, então $|\pi|_{inst.}\geq 1$. Ou seja, π tem ao menos uma instância de regra. A demonstração será feita por indução dupla sobre $v_{\triangleright}(\pi)$ e $|\pi|_{inst.}$. Na prova os subíndices indicarão qual valor de indução e qual a hipótese de indução estão sendo usados a cada momento. Como $|\pi|_{inst.}\geq 1$ e $v_{\triangleright}(\pi)=h>0$ não é preciso tratar as bases da indução (a base é zero e assim o resultado sai por *ex falso quodlibet*). Por indução$_1$ sobre $v_{\triangleright}(\pi)=h+1$ e por indução$_2$ sobre $|\pi|_{inst}=k+1$. Seja a derivação π conforme a figura genérica a seguir[288]:

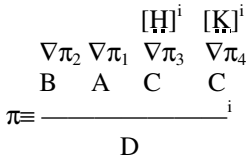


Figura V-44

Nela, π_1, π_2, π_3 e π_4 são as putativas subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$; A é *pM* de $r(\pi)$; $v_{\triangleright}(\pi_1)\leq h+1$, $v_{\triangleright}(\pi_2)\leq h+1$, $v_{\triangleright}(\pi_3)\leq h+1$ e $v_{\triangleright}(\pi_4)\leq h+1$. Por $(HI)_2$ existem subderivações $\pi_1^{\triangleright}$, $\pi_2^{\triangleright}$, $\pi_3^{\triangleright}$ e $\pi_4^{\triangleright}$ tal que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_1^{\triangleright}$, $\pi_2 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_2^{\triangleright}$, $\pi_3 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_3^{\triangleright}$, $\pi_4 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_4^{\triangleright}$, $v_{\triangleright}(\pi_1^{\triangleright})=0$, $v_{\triangleright}(\pi_2^{\triangleright})=0$, $v_{\triangleright}(\pi_3^{\triangleright})=0$ e

[288] O esquema representa uma instância de regra de eliminação, ou de introdução ou *cm*.

$v_{\triangleright}(\pi_4^{\triangleright})=0$. Conseqüentemente, a derivação π'' será como a seguir:

$$\pi'' \equiv \dfrac{\begin{array}{cccc} & & [\underline{H}]^i & [\underline{K}]^i \\ \nabla\pi_2^{\triangleright} & \nabla\pi_1^{\triangleright} & \nabla\pi_3^{\triangleright} & \nabla\pi_4^{\triangleright} \\ B & A & C & C \end{array}}{D}\,i$$

Figura V-45

Ela é obtida pela concatenação das reduções das quatro subderivações. Se $v_{\triangleright}(\pi'')<h+1$, então fazemos $\pi'''\equiv\pi''$. Caso contrário, se $v_{\triangleright}(\pi'')=h+1$, então π'' é crítica e $r(\pi)$ faz parte de um *RD*. Se o *RD* envolve um *PPIM-I* de valor $h+1$, pelo Lema V-6 haverá π''' tal que $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'''$ e $v_{\triangleright}(\pi''')<h+1$. Se o *RD* não envolve um *PPIM-I* de valor $h+1$, mas envolve um *PPIM-II* de valor $h+1$ tal que $h>0$ e, ao mesmo tempo, não envolve um *POI* de valor $h+1$, nem um *UPE* de valor $h+1$, então pelo Lema V-3 haverá π''' tal que $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'''$ e $v_{\triangleright}(\pi''')<h+1$. Porém, se o *RD* estiver envolvido em um *POI*, ou em um *UPE*, ou em um *PS* de valor $h+1$, ou, ainda, não estiver envolvido em nenhum desses três, mas estiver envolvido em um *PPIM-II* de valor $h+1=1$ (ou seja, $h=0$), então, pelo Lema V-5, haverá π''' tal que $\pi'' \overset{\triangleright_c}{\rightarrow} \pi'''$ e $v_{\triangleright}(\pi''')<h+1$. Finalmente, por $(HI)_1$ haverá uma derivação $\pi'''^{\triangleright}$ em C tal que $\pi''' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''^{\triangleright}$ e $v_{\triangleright}(\pi'''^{\triangleright})=0$. Assim, basta fazer $\pi^{\triangleright}\equiv\pi'''^{\triangleright}$. Dessa forma, existe uma derivação $\pi^{\triangleright}$ em *FN* em C tal que $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{\triangleright}$. *QED*

Corolário V-4 - Consistência para $\mathcal{M}_{fc/\rightarrow}$, $\mathcal{LE}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}$, $\mathcal{P}$, $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$, $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$, $C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}$, $\mathcal{FCM}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}$, $\mathcal{FCM}_o$, $\mathcal{NK}$ *e* C.

Demonstração # Similar ao corolário anterior, notando que $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}\subset\mathcal{P}\subseteq C$, $C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}\subset C_{\{\wedge,\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}\subset C$, $C_{\{\vee,\rightarrow,\exists,\perp\}}\subset C$, $\mathcal{M}_{fc/\rightarrow}\subseteq C$, $\mathcal{LE}\subseteq C$, $\mathcal{FCM}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\perp\}}\subset\mathcal{FCM}_o\subset C$ e $\mathcal{NK}\subseteq C$.

Se definíssemos uma variação do sistema clássico em que, ao mesmo tempo, as conclusões das regras de $e\vee$ e de $e\exists$ fossem tais que a redução de um *PPIM-I* não pudesse aumentar o valor da derivação, provavelmente teríamos um sistema para o qual poderíamos demonstrar normalização fraca com cota. A restrição deveria ser a de que a conclusão de $e\vee$ e de $e\exists$ deveria ser de valor menor que o da *pM*.

6. Finitude de Toda Cadeia de Redução via Propriedade da Validade Forte

Mostramos a seguir o teorema de finitude de toda cadeia de redução somente para o sistema $\mathcal{J}$, usando as mesmas idéias apresentadas por Prawitz em [Pra71]. A prova é categorizada como uma prova semântica, pois usamos uma propriedade, a **validade forte**, para dentro da qual levamos uma parte importante da análise indutiva e combinatória da prova de normalização forte. A complexidade da propriedade permitiria o uso de induções mais simples na demonstração de finitude. Lembramos que a diferença essencial do sistema $\mathcal{J}$ para os sistemas intuicionistas tradicionais na literatura está na regra $i\bot$.

Na prova a seguir assumiremos que os *UPEs* foram definidos unicamente para segmentos constantes de comprimento *1* (um), da mesma forma como Prawitz assumia na prova em 1971. Se obtivermos a propriedade de finitude para essa modificação, então se seguiria a finitude para a nossa definição dos *UPEs* com qualquer comprimento para os segmentos constantes, já que as operações nesse caso poderiam ser obtidas pela iteração da operação mais simples sobre segmentos de comprimento *1* (um). Observe que em nenhum momento usamos provas de lemas anteriores.

Definição V-2 - Se π é uma derivação em $\mathcal{J}$ que deriva $\Gamma\vdash C$, dizemos que π é **fortemente válida** *(**FV(π)**) se e somente se uma única das seguintes cláusulas se aplica*[289]*:*

(i) que r(π) seja $i\wedge$ $\|i\vee\|i\exists\|$, $C\equiv A\wedge B$ $\|C\equiv A\vee B\|\|C\equiv\exists xA[a/x]\|$, FV($\pi_6$), FV($\pi_7$), e π seja como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_6 & \nabla\pi_7\\ A & B\end{array}}{C}\ i\wedge\ \|i\vee\|i\exists\|$$

Figura V-46[290]

(ii) que r(π) seja $i\rightarrow$ e, para toda derivação π_2 tal que FV(π_2), tenhamos FV(π') quando π' for como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}[\underline{A}]^i\\ \nabla\pi_7\\ B\end{array}}{A\rightarrow B}\ i\rightarrow^{i}\qquad \pi'\equiv\ \begin{array}{c}\nabla\pi_2\\ \underline{A}\\ \nabla\pi_7\\ B\end{array}$$

Figura V-47

(iii) que r(π) seja $i\forall$ e, para todo termo τ, FV($\pi_7[a/\tau]$):

---

[289] Todas as cláusulas são mutuamente incompatíveis, ou seja, nunca se sobrepõem.

[290] Caso *r(π)* seja $i\vee$ ou $i\exists$ uma das duas subderivações subsidiárias não existiria.

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ A\end{array}}{\forall xA[a/x]}\,i\forall$$

Figura V-48

(iv) que $r(\pi)$ seja $i\bot$ e, para toda fórmula F básica, $FV(\pi_7[B/F])$, onde B é o parâmetro proposicional próprio de $i\bot$:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ B\end{array}}{\bot}\,i\bot$$

Figura V-49

(v) que $r(\pi)$ seja uma eliminação ou que $|\pi|_{inst.}=0$ e, além disso, valham as duas seguintes condições:

(v.i) que π seja normal ou, para toda derivação π', tal que $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, valha que $FV(\pi')$;

(v.ii) caso π seja de uma das formas abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{ccc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4\\ A_1\vee A_2 & C & C\end{array}}{C}\,{}^{i}e\vee \qquad \pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cc}\nabla\pi_1 & \nabla\pi_4\\ \exists xA[a/x] & C\end{array}}{C}\,{}^{i}e\exists$$

Figura V-50

então $FV(\pi_3)$, $FV(\pi_4)$ e, além disso, para toda derivação $\pi_1{}'$, tal que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_1{}'$, onde $\pi_1{}'$ seja de uma das formas abaixo e tal que π_8 represente um segmento constante:

$$\pi_1{}'\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ A_{1\|2\|}\end{array}}{A_1\vee A_2}\,i\vee e\|d\| \qquad \pi_1{}'\equiv\ \dfrac{\nabla \quad \begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ A_{1\|2\|}\end{array}}{\underline{A_1\vee A_2}\ ,\ A_1\vee A_2\ \ |\nabla|\pi_8}\,i\vee e\|d\|$$

$$\pi_1{}'\equiv\ \dfrac{\begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ A\end{array}}{\exists xA[a/x]}\,i\exists \qquad \pi_1{}'\equiv\ \dfrac{\nabla \quad \begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ A\end{array}}{\underline{\exists xA[a/x]}\ ,\ \exists xA[a/x]\ \ |\nabla|\pi_8}\,i\exists$$

Figura V-51[291]

tenhamos que $FV(\pi_9)$, caso π_9 seja de uma das formas abaixo:

---

[291] Ao representar o segmento constante do seguinte modo:

$$\dfrac{\nabla}{\underline{A_1\vee A_2}\ ,\ A_1\vee A_2\ \ |\nabla|\pi_8}$$

queremos apenas destacar uma das subderivações sobre uma única das ocorrências topo de todos os segmentos constantes de ocorrências que possam ser determinados a partir de $r(\pi_8)$.

$$\pi_9 \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_7}{A_{1\|2\|}}}{\nabla\pi_{3\|4\|}\ C} \qquad \pi_9 \equiv \dfrac{\nabla\pi_7}{\dfrac{A}{\nabla\pi_4[a/\tau]}\ C}$$

Figura V-52

A partir de uma definição similar a essa, Prawitz propunha uma demonstração da finitude de toda cadeia de redução. Para a consecução desse fim era preciso realizar dois passos. Primeiro, mostrar que todas as derivações que são fortemente válidas só têm cadeias de redução finita. Segundo, mostrar que todas as derivações são fortemente válidas.

Teorema V-4 - Toda seqüência de redução para uma derivação π é uma seqüência finita, quando FV(π).

Demonstração # Por indução na definição de derivação fortemente válida. Suponha que π é *FV(π)* por *n+1* aplicações da Definição V-2. Teríamos três casos.

(i) Se $|\pi|_{inst.}=0$, logo π está em *FN*, segue-se trivialmente.

(ii) Se $|\pi|_{inst.}>0$ e *r(π)* é uma eliminação, logo pela cláusula *(v.i)* da definição ou π está em *FN*, e nesse caso toda seqüência seria finita, ou para toda derivação π' tal que $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ vale que *FV(π')*. Como para caracterizar *FV(π)* indutivamente é preciso pressupor que *FV(π')* tenha sido caracterizado antes, conseqüentemente *FV(π')* deve ter sido obtido em menos de *n+1* passos. Logo aplicando *(HI)* todas as cadeias de redução para π' terminam. Assim, qualquer que seja π' todas suas cadeias são finitas, logo todas as cadeias de redução para π são finitas;

(iii) se $|\pi|_{inst.}>0$ e *r(π)* é uma introdução, suponha que π_6 e π_7 sejam as derivações subsidiárias das premissas imediatas de *r(π)*, assim *FV(π_6)* e *FV(π_7)*, segundo a Definição V-2, já que no caso de $i\rightarrow$, se *A* for a hipótese, a subderivação com hipótese aberta será fortemente válida dado que *FV(A)*, pois a derivação de uma única fórmula está em *FN*. Por (*HI*), todas as cadeias de redução para π_6 e π_7 terminam, conseqüentemente, todas as cadeias para π terminam, pois nenhuma redução de *RDs* afeta *r(π)* quando essa é uma regra de introdução. *QED*

Lema V-7 - Se $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ e FV(π), então FV(π').

Demonstração # Prova-se o teorema por indução em $|\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'|$, desde que tenhamos provado que a propriedade vale para $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$. Vamos mostrar que, se $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, *FV($\pi'$)*. A prova dessa

propriedade é por indução em $|\pi|$. Teríamos dois casos, conforme $r(\pi)$.

(i) Se $r(\pi)$ for uma introdução, tal que π_6 e π_7 sejam as derivações subsidiárias das premissas imediatas de $r(\pi)$, então $FV(\pi_6)$ e $FV(\pi_7)$, usando a Definição V-2, já que por hipótese $FV(\pi)$, nos casos da $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ e $\bot$. No caso da $\rightarrow$, a derivação cuja única ocorrência é A estaria em FN e, por isso, seria fortemente válida, assim $FV(\pi_7)$. Por (*HI*), $FV(\pi_6')$ e $FV(\pi_7')$ quando $\pi_6 \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi_6'$ e $\pi_7 \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi_7'$. Mas, claramente, $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ por uma ou por outra dessas duas reduções, logo $FV(\pi')$ segundo a Definição V-2.

(ii) Se $r(\pi)$ é uma regra de eliminação, temos $FV(\pi')$ pela Definição V-2. *QED*

Definimos para uma derivação π sua respectiva **árvore de redução** ($\psi(\pi)$), cujos nodos são derivações π' tal que $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$. Claramente, a raiz de $\psi(\pi)$, ou seja $r(\psi(\pi))$ é justamente π. Definimos o **comprimento da árvore de redução** para π ($|\psi(\pi)|$) como o número de nodos da árvore.

Lema V-8 - Seja π uma derivação tal que $r(\pi)$ é uma eliminação, logo $FV(\pi)$ quando valem todas as seguintes condições:

(a) toda seqüência de redução para qualquer subderivação das premissas imediatas de $r(\pi)$ termina;

(b) quando $r(\pi)$ for e$\wedge$, ou e$\rightarrow$, ou e$\bot$, ou e$\forall$, as subderivação⟦ões⟧ da⟦s⟧ premissa⟦s⟧ imediata⟦s⟧ de $r(\pi)$ será ⟦serão⟧ fortemente válida⟦s⟧;

(c) quando $r(\pi)$ for e$\vee$ ou e$\exists$, valerá para π a cláusula (v.ii) da Definição V-2.

Demonstração # Seja π da seguinte forma:

$$\pi \equiv \dfrac{\begin{array}{cccc} \nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4 \\ B & A & C & C \end{array}}{D}\ \text{elim.}$$

Figura V-53

Seja π_1 a subderivação da *pM* de $r(\pi)$. A prova é por indução em uma tripla de números $<\alpha,\beta,\gamma>$ que são associados a cada derivação π. Segundo a suposição envolvida na condição *(a)* do lema, para todas as subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$, qualquer seqüência de redução termina. Usando o lema de König, todas as árvores de redução das subderivações das premissas imediatas são finitas, pois todos as seqüências são finitas e a cada derivação só corresponde um número finito de reduções imediatas. Fazemos $|\psi(\pi_1)|=\alpha$, $|\pi_1|_{inst.}=\beta$ e

$|\psi(\pi_1)|+|\psi(\pi_2)|+|\psi(\pi_3)|+|\psi(\pi_4)|=\gamma$. Para provar que $FV(\pi)$, será preciso mostrar que a cláusula *(v.i)* da Definição V-2 é válida para π, pois a suposição envolvida na condição *(c)* do lema já requer que a cláusula *(v.ii)* dessa definição seja válida para π, caso $r(\pi)$ seja $e\vee$ ou $e\exists$. Mas, se π é normal, então a cláusula *(v.i)* é válida. Por outro lado, se π não for normal, será preciso mostrar que, para cada derivação π', tal que $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, vale que $FV(\pi')$. Teremos três situações distintas conforme a redução imediata aplicada a π. Se em cada uma dessas três situações distintas provarmos que $FV(\pi')$, seguir-se-ia a validade da cláusula *(v.i)* quando π não é normal e a prova estaria completada. Passamos a tratar os distintos casos.

(i) Se $\pi_j \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi_j'$, para algum $1\leq j\leq 4$, π' seria da forma genérica abaixo:

$$\pi' \equiv \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2' & \nabla\pi_1' & \nabla\pi_3' & \nabla\pi_4' \\ B & A & C & C\end{array}}{D}\ \text{elim.}$$

Figura V-54

onde valeriam as seguintes equivalências, com exceção obrigatoriamente de uma única delas: $\pi_2\equiv\pi_2'$, $\pi_1\equiv\pi_1'$, $\pi_3\equiv\pi_3'$, $\pi_4\equiv\pi_4'$. Por suposição, qualquer seqüência de redução para π_1, π_2, π_3 e π_4 será finita. Conseqüentemente, a tripla associada a π' será $<\alpha',\beta',\gamma'>$. Se a redução for sobre a subderivação da *pM* de $r(\pi)$, logo $\alpha'<\alpha$.[292] Caso contrário, $\alpha'=\alpha$ e $\beta'=\beta$, mas em compensação $\gamma'<\gamma$. Em qualquer dos dois casos, por (*HI*), teríamos $FV(\pi')$.

(ii) Se π' for obtido via redução imediata de um *POI* envolvendo $r(\pi)$, para os *POIs* de $\wedge$, $\rightarrow$, $\perp$ e $\forall$ teremos $FV(\pi_1)$, segundo a suposição envolvendo a condição *(b)* do lema. Como a derivação π_1 é tal que $r(\pi_1)$ deve ser uma regra de introdução, conseqüentemente $FV(\pi')$, pois π' é obtido da subderivação de uma premissa imediata de $r(\pi_1)$ e, segundo as cláusulas *(i)*, *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* da Definição V-2, obtemos $FV(\pi')$. Para os *POIs* de $\vee$ e $\exists$, pela suposição envolvida na condição *(c)* do lema vale a cláusula *(v.ii)* da Definição V-2. Conseqüentemente, $FV(\pi')$, já que π' seria, necessariamente, de uma das formas abaixo e, por hipótese, elas seriam fortemente válidas:

$$\pi' \equiv \dfrac{\nabla\pi_1}{\underline{A}\downarrow}\ \dfrac{\nabla\pi_{3[\![4]\!]}}{C} \qquad \pi' \equiv \dfrac{\nabla\pi_1}{\underline{A}}\ \dfrac{\nabla\pi_4[a/\tau]}{C}$$

Figura V-55

---

[292] Para chegar a essa conclusão, basta observar que a árvore de todas as seqüências de redução para π deve ter maior altura do que a árvore de π', que é subárvore própria da primeira.

(iii) Se π' for obtido via redução (simplificada) de um *UPE* envolvendo $r(\pi)$, as derivações π e π' seriam mais precisamente da forma genérica abaixo, onde A é a *pM* da regra de eliminação $r(\pi)$:

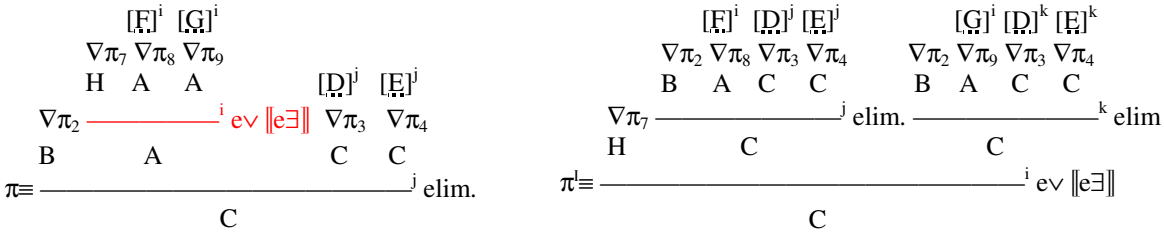


Figura V-56

Caso a regra em vermelho seja $e\exists$, não haveria a subderivação π_8. Destacamos ainda as seguintes subderivações de π e π', respectivamente:

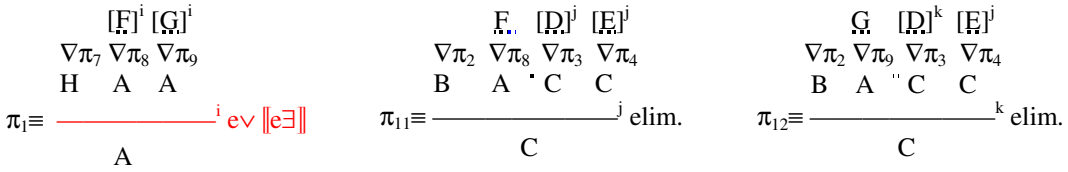


Figura V-57

Para poder aplicar *(HI)* sobre π' seria preciso mostrar que π' cumpre as condições *(a)* e *(c)* do lema, pois a condição *(b)* é irrelevante, nesse caso. Começaremos mostrando, no caso *(iii.i)* abaixo, que a condição *(c)* do lema é aplicável a π'. Em seguida, no caso *(iii.ii)*, mostraremos que a condição *(a)* é aplicável a π'. Só depois poderemos aplicar *(HI)* sobre π'.

(iii.i) Mostrar que a condição *(c)* é aplicável a π' vem a ser o mesmo que mostrar que a cláusula *(v.ii)* da Definição V-2 é aplicável a π'. Isso será feito em *(iii.i.i)* e *(iii.i.ii)*, seguindo de perto a estrutura da cláusula *(v.ii)* da definição.

(iii.i.i) Temos que mostrar que π_{11} e π_{12}, subderivações de π', são fortemente válidas. Isso será feito mostrando que podemos aplicar *(HI)* às duas. Para isso, é preciso mostrar que valem as condições *(a)*, *(b)* e *(c)* do enunciado do lema para ambas. Lembramos que A é a *pM* em ambos casos. Por hipótese sobre π, todas as cadeias de redução para π_2,π_3,π_4,π_8 e π_9 são finitas, via suposição da validade da condição *(a)* para π. Logo, π_{11} e π_{12} satisfazem a condição *(a)* do lema. Se $r(\pi)$ era $e\wedge$, ou $e\rightarrow$, ou $e\bot$, ou $e\forall$, então $FV(\pi_2)$ e $FV(\pi_1)$ via suposição da validade da condição *(b)* para π. Mas $FV(\pi_1)$ implica que $FV(\pi_8)$ e $FV(\pi_9)$ pela cláusula *(v.ii)* da Definição V-2. Dessa forma, tanto $r(\pi_{11})$ quanto $r(\pi_{12})$ seriam ou $e\wedge$, ou $e\rightarrow$, ou $e\bot$, ou $e\forall$, e, adicionalmente, π_{11} e π_{12} satisfariam a condição *(b)* do lema. Se, por outro lado, $r(\pi)$ era $e\vee$ ou $e\exists$, tanto $r(\pi_{11})$ quanto $r(\pi_{12})$ seriam $e\vee$ ou $e\exists$. Por hipótese sobre π teríamos $FV(\pi_3)$ e $FV(\pi_4)$ via

condição *(c)*. Para completar a demonstração da validade da cláusula *(v.ii)* para π_{11} e π_{12}, faltaria ainda mostrar que para qualquer derivação π_{13}, tal que $\pi_8 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{13}$ ou $\pi_9 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{13}$, onde π_{13} seja de uma das formas abaixo e tal que π_{15} represente um segmento constante:

$$\pi_{13}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \mathrm{D}[\![\mathrm{E}]\!]}{\mathrm{A}}\ \mathrm{i}\vee\mathrm{e}[\![\mathrm{d}]\!] \qquad \pi_{13}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \mathrm{D}[\![\mathrm{E}]\!]\quad \nabla}{\underline{\mathrm{A}}\ ,\ \mathrm{A}}\ \mathrm{i}\vee\mathrm{e}[\![\mathrm{d}]\!] \qquad \pi_{13}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \mathrm{E}}{\mathrm{A}}\ \mathrm{i}\exists \qquad \pi_{13}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \mathrm{E}\quad \nabla}{\underline{\mathrm{A}}\ ,\ \mathrm{A}}\ \mathrm{i}\exists$$

Figura V-58

teríamos $FV(\pi_{16})$, caso π_{16} seja de uma das formas abaixo:

$$\pi_{16}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \underline{\mathrm{D}}[\![\underline{\mathrm{E}}]\!]\quad \nabla\pi_{3\|4\|}}{\mathrm{C}} \qquad \pi_{16}\equiv \dfrac{\nabla\pi_{14}\ \underline{\mathrm{E}}\quad \nabla\pi_4[a/\tau]}{\mathrm{C}}$$

Figura V-59

Mas, efetivamente, quando $\pi_8 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{13}$ ou $\pi_9 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{13}$ de uma das formas acima, haverá uma derivação π_{17}, tal que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{17}$ e π_{13} será subderivação de π_{17} de uma das formas abaixo:

$$\pi_{17}\equiv \dfrac{[\underline{\mathrm{G}}]^{\mathrm{i}}\quad \nabla\pi_7\ \nabla\pi_{13}\ \nabla\pi_9\quad \mathrm{H}\quad \mathrm{A}\quad \mathrm{A}}{\mathrm{A}}\ \mathrm{i}\ \mathrm{e}\vee[\![\mathrm{e}\exists]\!] \qquad \pi_{17}\equiv \dfrac{[\underline{\mathrm{F}}]^{\mathrm{i}}\quad \nabla\pi_7\ \nabla\pi_8\ \nabla\pi_{13}\quad \mathrm{H}\quad \mathrm{A}\quad \mathrm{A}}{\mathrm{A}}\ \mathrm{i}\ \mathrm{e}\vee[\![\mathrm{e}\exists]\!]$$

Figura V-60

Mas, se, por hipótese, π satisfazia a condição *(c)* do lema, ou seja, satisfazia a cláusula *(v.ii)* da Definição V-2, então por essa cláusula já tínhamos $FV(\pi_{16})$ no caso de π, já que $r(\pi_{17})$ é $e\vee$ ou $e\exists$. Logo, se $r(\pi)$ era $e\vee$ ou $e\exists$, então π_{11} e π_{12} satisfariam a condição *(c)* do lema. Se as triplas associadas a π_{11} e π_{12} são $<\alpha_{11},\beta_{11},\gamma_{11}>$ e $<\alpha_{12},\beta_{12},\gamma_{12}>$, respectivamente, então $\alpha_{11}\leq\alpha$ e $\alpha_{12}\leq\alpha$, já que $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ e tanto π_{11} quanto π_{12} são subderivações de π'. Além disso, $\beta_{11}<\beta$, $\beta_{12}<\beta$. Conseqüentemente, por (*HI*), $FV(\pi_{11})$ e $FV(\pi_{12})$.

(iii.i.ii) Para completar a demonstração da validade da condição *(c)* para π', faltaria mostrar que para qualquer derivação π_{18}, tal que $\pi_7 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{18}$, onde π_{18} seja de uma das formas abaixo e tal que π_{20} represente um segmento constante:

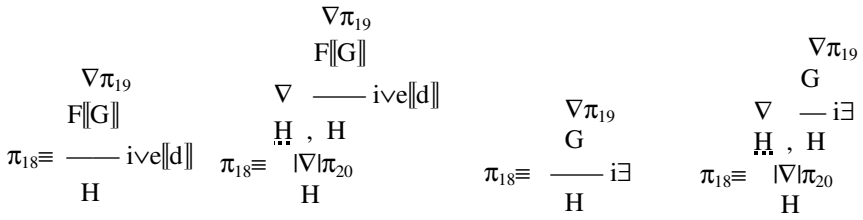


Figura V-61

teríamos que $FV(\pi_{21})$, caso π_{21} seja de uma das formas abaixo:

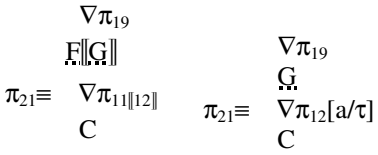


Figura V-62

Nosso problema passa a ser o de demonstrar que $FV(\pi_{21})$. Para fazer isso, usaremos *(HI)* sobre π_{21} e, assim, será preciso antes mostrar que as condições *(a)*, *(b)* e *(c)* valem para π_{21}. Na verdade, a derivação π_{21} terá, mais precisamente, uma das formas a seguir:

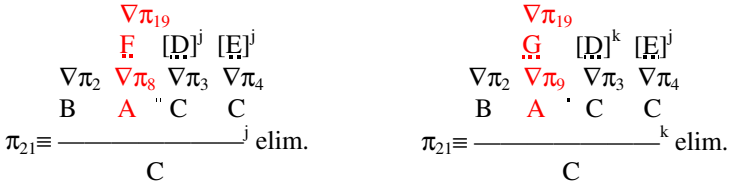


Figura V-63

Vamos chamar de π_{22} qualquer uma das duas subderivações em vermelho sobre a *pM* de $r(\pi_{21})$ na figura acima. Nós já havíamos visto que todas as cadeias de redução para π_2, π_3 e π_4 são finitas. Para mostrar que π_{21} cumpre com a condição *(a)*, seria preciso ainda mostrar que todas as cadeias de redução sobre a derivação π_{22} são finitas. Porém, caso $\pi_7 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{18}$, conseqüentemente, existiria π_{23} tal que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{23}$ e π_{23} seria da forma abaixo:

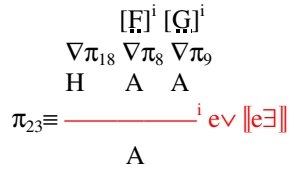


Figura V-64

Mais precisamente, π_{23} poderia ter duas formas distintas, lembrando que π_{20} representava um segmento constante, conforme a Figura V-61:

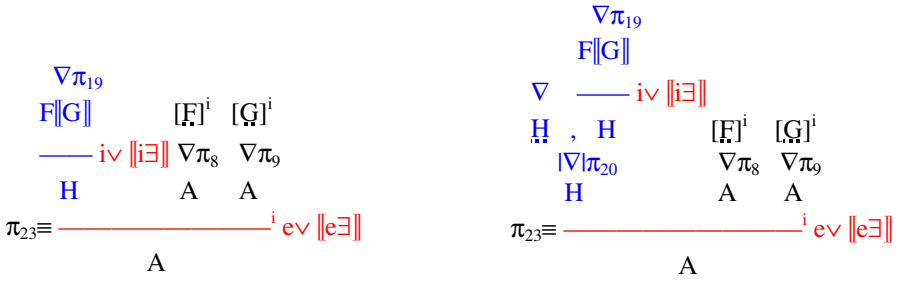


Figura V-65

Logo, dada a forma de π_{18}, ou seja, daquelas subderivações em azul na figura acima, existiria π_{24} tal que $\pi_{23} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{24}$, onde π_{24} seria de uma das formas a seguir e, eventualmente, a subderivação em verde poderia não existir:

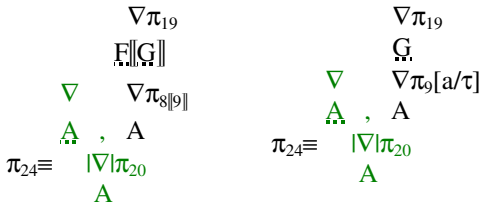


Figura V-66

Ou seja, $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{24}$. Como vemos, π_{22} é subderivação de π_{24}. Mas, como todas as cadeias de redução para π_1 são finitas, para π_{24} também o serão, conseqüentemente, todas as cadeias de redução para π_{22} serão finitas. Isso termina de mostrar que π_{21} satisfaz a condição *(a)* do lema. Se $r(\pi_{21})$ é $e\wedge$, ou $e\rightarrow$, ou $e\bot$, ou $e\forall$, a instância $r(\pi)$ também era um desses casos, assim, pela condição *(b)* sobre π, teríamos $FV(\pi_2)$ e $FV(\pi_1)$. Dado que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{24}$, pelo Teorema V-4, teríamos que $FV(\pi_{24})$. Mas ou $\pi_{22} \equiv \pi_{24}$ ou π_{22} é subderivação de π_{24}. No primeiro caso, é claro que $FV(\pi_{22})$. No segundo caso, π_{22} será a subderivação de uma *pm* de $e\vee$ ou $e\exists$ em π_{24}. Assim, se o comprimento do segmento constante de instâncias, que vai da ocorrência final de π_{24} até a ocorrência final de π_{22}, é s, então, por s aplicações da cláusula *(v.ii)* da Definição V-2, obteríamos $FV(\pi_{22})$. Logo, π_{21} satisfaria a condição *(b)* do lema. Por outro lado, se $r(\pi_{21})$ é $e\vee$ ou $e\exists$, a instância $r(\pi)$ também era um desses casos, assim, pela suposição da validade da condição *(c)* sobre π, teríamos $FV(\pi_3)$ e $FV(\pi_4)$. Para completar a demonstração da validade da cláusula *(v.ii)* para π_{21}, faltaria ainda mostrar que, para qualquer derivação π_{25}, tal que $\pi_{22} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{25}$, onde π_{25} seja de uma das formas abaixo tal que π_{27} represente um segmento constante:

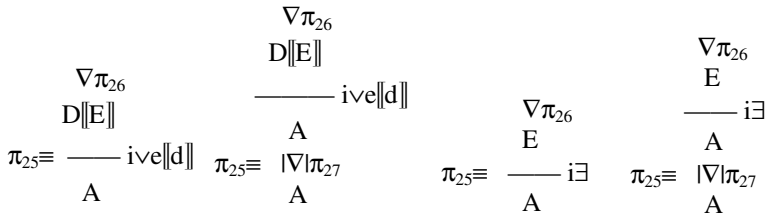


Figura V-67

teríamos $FV(\pi_{28})$, caso π_{28} seja como abaixo, respectivamente :

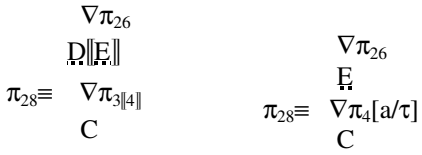


Figura V-68

Mas, nesse caso, haveria uma derivação π_{29}, tal que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{24} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{29}$, onde π_{29} seria de uma das formas abaixo:

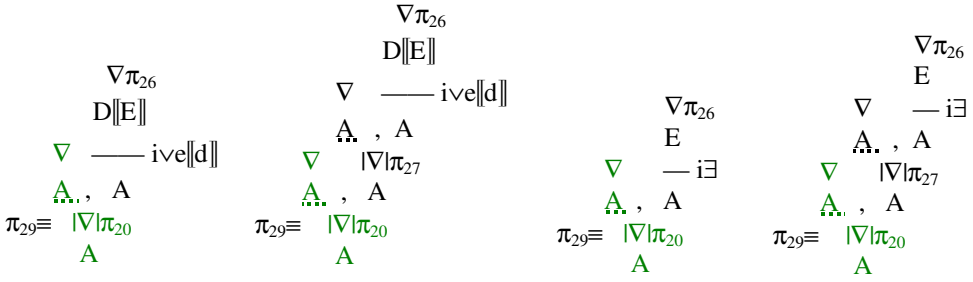


Figura V-69

onde a subderivação em verde poderia não existir. Mas, pela cláusula *(v.ii)* sobre π, já tínhamos $FV(\pi_{28})$, dado que $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{29}$. Com isso, mostramos que π_{21} também satisfaz a condição *(c)* do lema. Finalmente, $|\psi(\pi_{22})| \leq |\psi(\pi_{24})| < |\psi(\pi_1)|$, pois π_{22} é subderivação de π_{24} e $\pi_1 \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_{24}$. Se $<\alpha_{21},\beta_{21},\gamma_{21}>$ é o valor de indução para π_{21}, então $\alpha_{21} < \alpha$, pois $\alpha_{21} = |\psi(\pi_{22})|$ e $\alpha = |\psi(\pi_1)|$. Portanto, por *(HI)*, $FV(\pi_{21})$ e, assim, fechamos o item *(iii.i.ii)*. Com isso fica finalmente provado que a derivação π' satisfaz a condição *(c)* do lema e, por isso, fechamos o item *(iii.i)*.

(iii.ii) Mostrar que a condição *(a)* é satisfeita pela derivação π' é relativamente fácil. Havíamos tomado $\alpha = |\psi(\pi_1)|$. Por sua vez, como π_7 é subderivação própria de π_1 e é a subderivação da *pM* de $r(\pi')$, então $|\psi(\pi_7)| \leq |\psi(\pi_1)|$. Logo, todas as cadeias para π_7 são finitas. Finalmente, pelo item *(iii.i)* acima, temos $FV(\pi_{11})$ e $FV(\pi_{12})$. Assim, usando o Teorema V-4, todas as cadeias de redução para π_{11} e π_{12} são finitas. Dessa forma, concluímos que π' satisfaz a

condição *(a)* do lema.

Para terminar, a tripla associada a π' será $<\alpha',\beta',\gamma'>$. Conseqüentemente, $\alpha'\leq\alpha$ e $\beta'<\beta$. Por (*HI*), temos que $FV(\pi')$. Com isso fechamos o item *(iii)*. *QED*

Definição V-3 - Dizemos que uma derivação π é **fortemente válida por substituição (*FVS*(π))** *se e somente se para uma substituição qualquer de termos no lugar de parâmetros individuais não-próprios em π resultando π^*, para um substituição qualquer de fórmulas básicas no lugar de parâmetros proposicionais não-próprios sobre π^* resultando $\pi^\bullet$, para uma substituição qualquer de derivações fortemente válidas pelas suposições abertas na derivação $\pi^\bullet$ resultando a derivação $\pi^{\clubsuit}$, temos que $FV(\pi^{\clubsuit})$.*

Naturalmente, seguir-se-ia dessa definição que toda derivação fortemente válida por substituição é também fortemente válida, desde que, entre os termos e as fórmulas, admitíssemos aqueles que contenham parâmetros e, entre as derivações fortemente válidas, admitíssemos aquelas que contenham suposições abertas. Uma única ocorrência de fórmula será uma derivação em *FN*, logo, segundo a Definição V-2, ela também será fortemente válida.

Teorema V-5 - Toda derivação em $\mathcal{I}$ é fortemente válida por substituição.

Demonstração # Seja π uma derivação em $\mathcal{I}$. A prova é por indução em $|\pi|_{inst.}$. Se $|\pi|_{inst}=0$ é fácil, pois π tem uma única ocorrência de fórmula e está em *FN*. Logo, pela cláusula *(v.i)* da Definição V-2, temos $FV(\pi^{\clubsuit})$, conseqüentemente $FVS(\pi)$. Se $|\pi|_{inst}=n+1$, por *(HI)*, quaisquer derivações, cujo número de instâncias seja menor ou igual a *n*, serão fortemente válidas por substituição. Se $r(\pi)$ é uma introdução e π_6 e π_7 são as subderivações das premissas imediatas de $r(\pi)$, então $FV(\pi^{\clubsuit})$, pelas cláusulas *(i)*, *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* da Definição V-2 sobre $FV(\pi_6^{\clubsuit})$ e $FV(\pi_7^{\clubsuit})$. Assim, $FVS(\pi)$. Se $r(\pi)$ é eliminação, seja π como abaixo, onde *A* é a *pM*:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4\\ B & A & C & C\end{array}}{D}\ \text{elim.}$$

Figura V-70

Seja $\pi^{\clubsuit}$ da forma a seguir:

$$\pi^{\clubsuit}\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2^{\clubsuit} & \nabla\pi_1^{\clubsuit} & \nabla\pi_3^{\clubsuit} & \nabla\pi_4^{\clubsuit}\\ B^\bullet & A^\bullet & C^\bullet & C^\bullet\end{array}}{D^\bullet}\ \text{elim.}$$

Figura V-71

Mas $FV(\pi_2^{\clubsuit})$, $FV(\pi_1^{\clubsuit})$, $FV(\pi_3^{\clubsuit})$ e $FV(\pi_4^{\clubsuit})$, já que, por (*HI*), $FVS(\pi_2)$, $FVS(\pi_1)$, $FVS(\pi_3)$ e $FVS(\pi_4)$. Pelo Teorema V-4, todas as cadeias de redução para $\pi_2^{\clubsuit}$, $\pi_1^{\clubsuit}$, $\pi_3^{\clubsuit}$ e $\pi_4^{\clubsuit}$ são finitas. Isso

nos dá a condição *(a)* do Lema V-8. Por sua vez, a condição *(b)* é imediata. Quanto a condição *(c)*, só faltaria mostrar a validade da cláusula *(v.ii)* para $\pi^{\clubsuit}$. Nesse caso, as subderivações π_2 e $\pi_2^{\clubsuit}$ não existiriam. Logo, é preciso mostrar que, para qualquer derivação π_5, tal que $\pi_1^{\clubsuit} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi_5$, onde π_5 tenha uma das seguintes formas tal que π_7 represente um segmento constante:

$$\pi_5\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ D\\ \hline i\vee e\|d\|\\ A^{\bullet}\end{array} \qquad \pi_5\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ D\\ \hline \nabla \quad i\vee e\|d\|\\ A^{\bullet}\ ,\ A^{\bullet}\\ |\nabla|\pi_7\\ A^{\bullet}\end{array} \qquad \pi_5\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ D\\ \hline i\exists\\ A^{\bullet}\end{array} \qquad \pi_5\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ D\\ \hline \nabla \quad i\exists\\ A^{\bullet}\ ,\ A^{\bullet}\\ |\nabla|\pi_7\\ A^{\bullet}\end{array}$$

Figura V-72

teríamos que $FV(\pi_8)$, caso π_8 seja de uma das formas abaixo:

$$\pi_8\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ \underline{D}\\ \nabla\pi_{3\|4\|}^{\clubsuit}\\ C^{\bullet}\end{array} \qquad \pi_8\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_6\\ \underline{D}\\ \nabla\pi_4^{\clubsuit}[d/\tau]\\ C^{\bullet}\end{array}$$

Figura V-73

Mas, dado que $FV(\pi_1^{\clubsuit})$, logo $FV(\pi_5)$ pelo Lema V-7. Se não existe a subderivação π_7, então podemos concluir, pela cláusula *(i)* da Definição V-2, que $FV(\pi_6)$. Se existe a subderivação π_7, então, por um número finito de aplicações da cláusula *(v.ii)* da Definição V-2, temos $FV(\pi_6)$. Porém, como tínhamos $FVS(\pi_3)$ e $FVS(\pi_4)$, teremos $FV(\pi_8)$, pela Definição V-3, já que $FV(\pi_6)$. Portanto, pelo Lema V-8, $FV(\pi^{\clubsuit})$. Assim, $FVS(\pi)$. *QED*

Corolário V-5 - Para toda derivação em ∂, todas as cadeias de redução são finitas.

Demonstração # Pelos Teorema V-4 e Teorema V-5, lembrando que, para uma derivação π qualquer, $FV(\pi)$ quando $FVS(\pi)$. *QED*

Se as demonstrações acima forem corretas, isso significaria que a definição do conceito de validade forte, para o caso da regra de introdução do absurdo, seria inobjetável. Lembramos que o item *(iv)* da Definição V-2 tem o seguinte teor: *π é fortemente válida desde que r(π) seja i⊥ e, para toda fórmula F básica, π_7[B/F] seja fortemente válida, onde B é o parâmetro proposicional próprio de i⊥:*

$$\pi\equiv \begin{array}{c}\nabla\pi_7\\ B\\ \hline -i\perp\\ \perp\end{array}$$

Figura V-74

Se o conceito de validade forte só fosse aplicável às derivações que sejam construtivamente aceitáveis, a regra $i\bot$ deveria ser construtivamente aceitável. De fato, inclusive, se quisermos fazer uma leitura intuicionista para a regra $i\bot$, isso seria possível, como já havíamos visto no capítulo anterior. A regra nos informa que, se tivermos prova para qualquer proposição básica, ou ainda, se tivermos um esquema de prova para um parâmetro proposicional qualquer, teríamos uma prova para o absurdo. Como estamos tratando o absurdo como uma constante lógica e, ao mesmo tempo, como uma proposição não-básica, a regra $i\bot$ nos daria a forma canônica de provar $\bot$. O fato de que não exista, ou não deva existir, uma prova de $\bot$, da mesma forma que o fato de que não exista, ou não deva existir, uma prova de um parâmetro proposicional, não interfere em nada na formulação da regra. Afinal de contas, como já argumentamos anteriormente, parece razoável que na elucidação do uso da proposição absurda apresentemos critérios de identificação de uma putativa prova dessa proposição, o que não significa que tenhamos que fazer ontologia de provas, examinando se tais provas existem ou não.

No Capítulo IV havíamos formulado o sistema $\mathcal{I}_f$, o sistema "intuicionista" para a falsidade, cujas regras são estruturalmente idênticas às regras do sistema $\mathcal{I}$. Assim, já que mostramos a finitude de toda cadeia de redução para $\mathcal{I}$, a mesma propriedade também vale para $\mathcal{I}_f$. Mas, nesse caso, deveríamos agora nos perguntar que significado tem a propriedade de validade forte, levando em conta que uma de suas regras não seria intuicionisticamente admissível? Esse é um problema em aberto.

7. Confluência

O tema agora passa a ser a propriedade de confluência local, que será utilizada na demonstração da unicidade da *FN*. Dizemos que vale a propriedade de **confluência local** para as derivações de um sistema quando, dada uma derivação π qualquer, estiver garantida a existência de uma derivação π''' e de cadeias de operações que levam de π' a π''' e de π'' a π''', sempre que π' e π'' resultem de π por uma operação imediata. A prova de confluência local que daremos a seguir levará em conta os *POIs*, os *UPEs*, os *PPIMs-I*, os *PPIMs-II*, os *PSs-I*, os *PSs-II* e as *Uss*. Ou seja, examinaremos confluência local para as regras e operações que propusemos para o sistema $\mathcal{C}$.

Dado um *RD* $<r',r''>$, a instância r' será dita a **instância base**. No caso dos *POIs*, por exemplo, é a instância de eliminação. A instância r'' será dita **instância chave**. No caso dos *POIs*, corresponde à introdução. Com respeito às instâncias base de dois *RDs* distintos, lembramos que

elas podem ser a mesma instância nos dois *RDs*, quando eles são concomitantes. De todo modo, para dois *RDs* distintos quaisquer, eles nunca terão a mesma instância chave.

Queremos notar que, se uma instância *r* é base de um *RD* em uma derivação como abaixo, então após a redução desse *RD* haverá um único resíduo de cada instância/ocorrência da subderivação π_5 dentro da nova derivação obtida:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \nabla\pi_1 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4\\ B & A & C & C\end{array}}{\begin{array}{c}D\\ \nabla\pi_5\end{array}}\ r$$

Figura V-75

Eventualmente, alguma instância *cm* em π_5 poderá tornar-se uma *US*, mas nenhum outro tipo de *RD* novo poderá surgir com suas duas instâncias inteiramente dentro de π_5. Poderão surgir, sem dúvida, outros *RDs* mistos, que envolvem uma instância em π_5 e outra fora de π_5. Uma nova *US* em π_5 só surgiria quando fossem eliminadas todas as ocorrências topo descartadas pela referida instância *cm* localizada em π_5. É preciso lembrar, adicionalmente. que o valor das *USs* é *1*.

Definição V-4 - Dado dois RDs distintos $<r^I,r^{II}>$ *e* $<r^{III},r^{IV}>$ *em uma derivação* π*, diremos que* $<r^I,r^{II}>$ *é* **pivô** *com respeito a* $<r^{III},r^{IV}>$ *em* π *quando se dá uma das seguintes alternativas:*

(i) r^I *está em uma linha mais à direita que* r^{III} *em* π*;*

(ii) r^I *está na mesma linha que* r^{III} *e* r^I *antecede* r^{III} *em* π*;*

(iii) r^I *e* r^{III} *são a mesma instância, e* r^{II} *está em uma linha mais à direita que* r^{IV} *em* π*;*

(iv) r^I *e* r^{III} *são a mesma instância,* r^{II} *e* r^{IV} *estão na mesma linha, mas* r^{II} *antecede* r^{IV} *em* π*.*

O lema a seguir trata de um caso mais complexo da prova do teorema de confluência.

Lema V-9 - Seja π *tal que* $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\longrightarrow}} \pi'$ *e* $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\longrightarrow}} \pi''$ *sobre um PPIM-I e um PS, respectivamente, onde* π *é uma derivação do sistema* C *da forma genérica abaixo:*

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_2 & \dfrac{\dfrac{[\sim A]^i{}_n\ ,\ [\sim A]^j{}_m}{\nabla\pi_{10}}\ A}{\ ^i\!\!-\ cm}\ A & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4\\ B & \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\perp}}{\nabla\pi_8}\ A}{\ ^j\!\!-\ cm} & C & C\end{array}}{\begin{array}{c}D\\ \nabla\pi_5\end{array}}\ elim.$$

Figura V-76

Logo, existe π^{III} *tal que* $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$.

Demonstração # A demonstração compreende basicamente o caso em que temos um *PS-II*. Para o caso em que temos um *PS-I* bastará eliminar aquela parcela em azul nas subderivações envolvidas. Em π^{II} haverá um *PPIM-I* resíduo do *PPIM-I* de π:

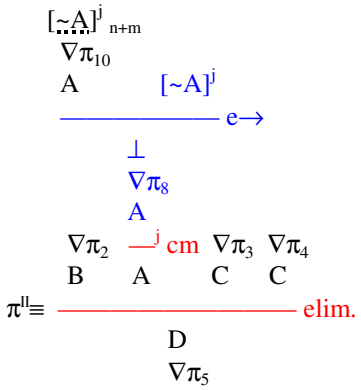


Figura V-77

A redução desse *PPIM-I* resultará na derivação π^{IV} abaixo, ou seja $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV}$:

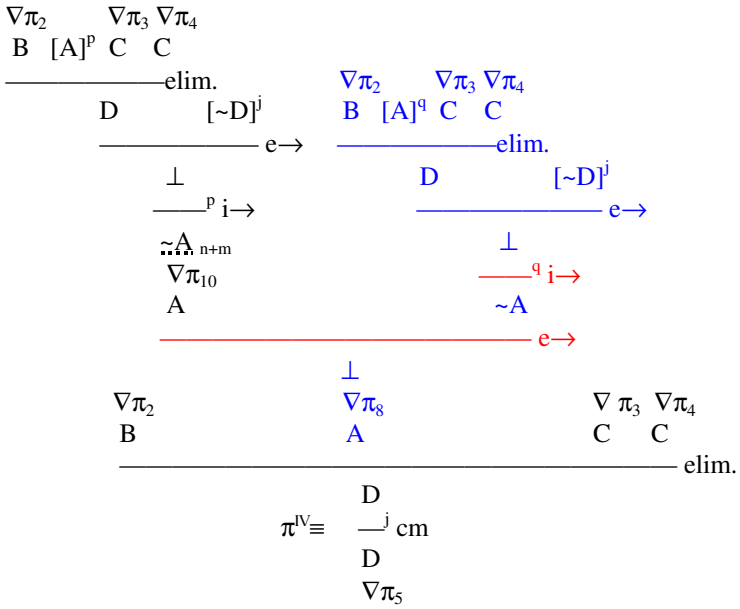


Figura V-78

Em seguida, $\pi^{IV} \overset{\triangleright}{\underset{k}{\rightarrow}} \pi^{V}$ sobre o *POI* de $\rightarrow$ vermelho, onde $k=1$ se o *PS* em π era do tipo *II* ou $k=0$ se era do tipo *I*:

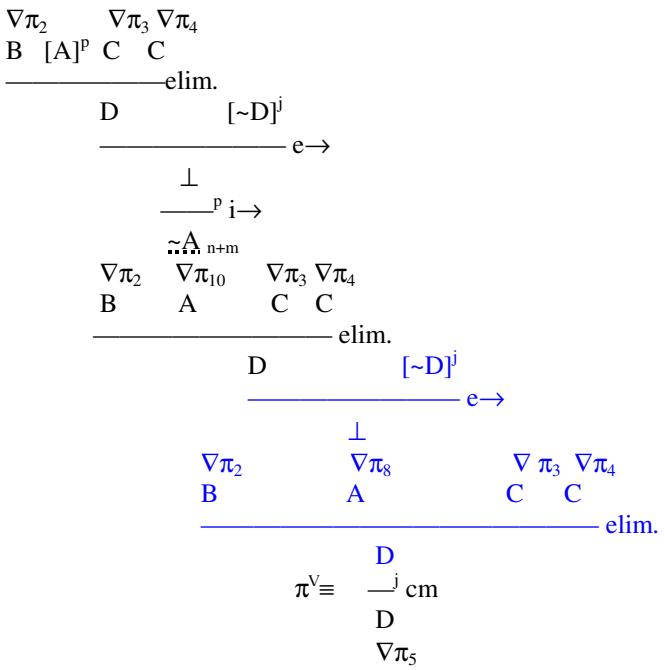


Figura V-79

Por outro lado, a redução do *PPIM-I* na derivação π - o *RD* pivô - resultava na derivação π^{I} abaixo:

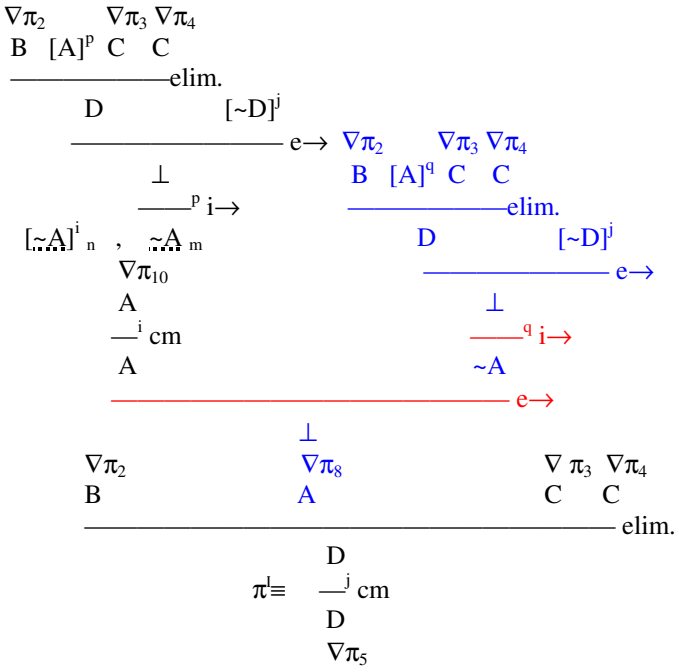


Figura V-80

Em seguida, $\pi^{I} \underset{k}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{VI}$ sobre o *POI* de $\rightarrow$ em vermelho, onde $k=1$ se o *PS* em π era do tipo *II* ou $k=0$ se era do tipo *I*:

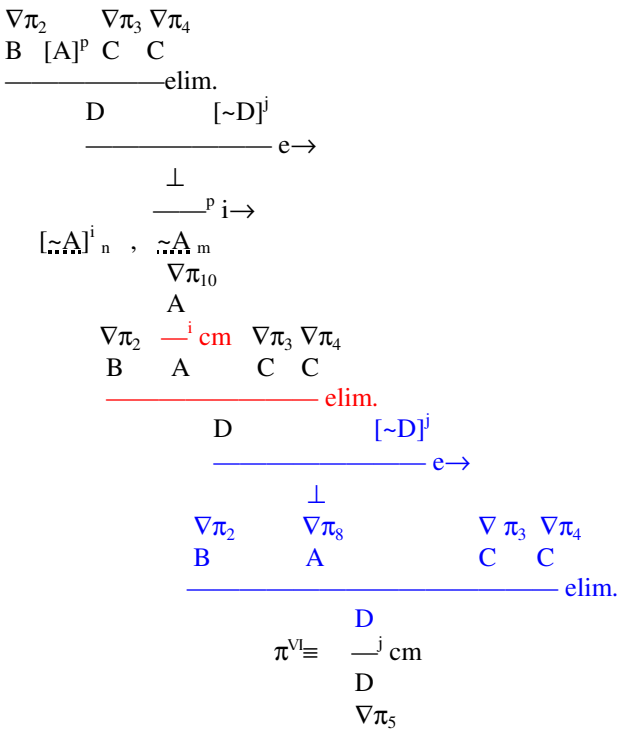


Figura V-81

A redução do novo *PPIM-I* em π^{VI} resultará em π^{VII} abaixo, ou seja $\pi^{VI} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{VII}$:

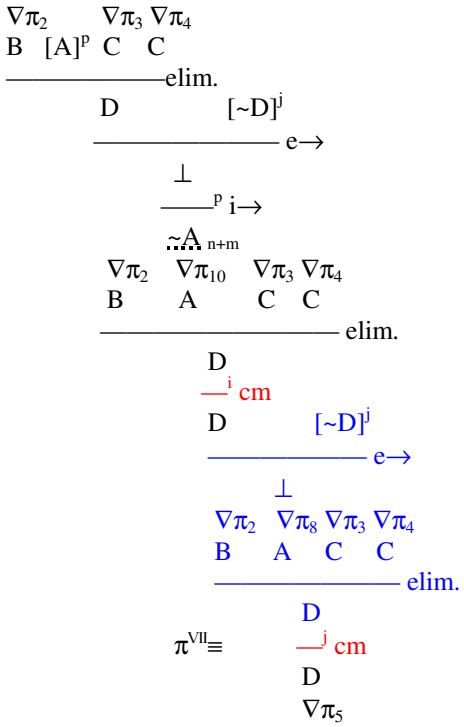


Figura V-82

Mas claramente $\pi^{VII} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{V}$ sobre o *PS* em vermelho. Logo, basta fazer $\pi^{III} \equiv \pi^{V}$. Resumindo $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$

e $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$. *QED*

É importante notar que, na prova de confluência local acima, envolvendo *PPIM-Is* e *PSs*, o único outro tipo de *RD* que foi reduzido era um *RD* operacional de $\rightarrow$. A razão para isso está na forma da regra *cm* que estamos considerando, a saber, definida com $\perp$ e $\rightarrow$.

Passamos a apresentar a prova de confluência local para o sistema C.

Teorema V-6 - (confluência local) Se $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{I}$ *e* $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{II}$*, onde* π *é uma derivação em* C*, então existe* π^{III} *tal que* $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{III}$*, mas onde só estão envolvidos RDs da mesma natureza daqueles reduzidos em* $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{I}$ *e* $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{II}$ [293] *e, eventualmente, outros RDs que envolvam a regra cm, quando uma daquelas duas primeiras reduções já envolvia uma instância cm.*

Demonstração # Suponhamos que π^{I} seja distinto de π^{II}, pois o caso contrário é trivial. Deve haver dois *RDs* distintos na derivação π. Sejam eles $<r^{I},r^{II}>$ e $<r^{III},r^{IV}>$, tal que a derivação π^{I} é obtida reduzindo o primeiro e a derivação π^{II} reduzindo o segundo, respectivamente. Se os *RDs* forem paralelos, ou seja, se as respectivas instâncias bases estão em linhas distintas, então é imediato que existe π^{III} tal que $\pi^{I} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$. Se não são paralelos, então as respectivas instâncias bases estão na mesma linha. De todo modo somente um deles será pivô. Suponha, sem perda de generalidade, que $<r^{I},r^{II}>$ é o *RD* pivô. A subderivação localizada abaixo da instância base do *RD* pivô (aquela que estivemos constantemente nomeando como π_5) sempre permanece com as mesmas instâncias e ocorrências, qualquer que seja a operação efetuada. Mesmo o surgimento de uma nova *US* nessa subderivação ocorre unicamente por que determinadas ocorrências topo descartadas pela regra *cm* foram eliminadas. Logo, seria preciso considerar unicamente aquela subderivação determinada pela instância base do *RD* pivô, para fins de demonstração de confluência. Em outros termos, não precisamos nos ocupar daquela subderivação que designávamos como π_5. Lembramos que, eventualmente, dois *RDs* podem ser concomitantes. Os *RDs* envolvendo *POIs*, *UPEs* e *PPIMs-I* só serão concomitantes com um *PPIM-II*. Além desses casos, os *PSs-I*, os *PSs-II* e as *USs* podem ser concomitantes entre si. A análise das reduções se distribui pelos casos a seguir.

(i) Se $<r^{I},r^{II}>$ for um *POI*, então $<r^{III},r^{IV}>$ não pode ser concomitante, pois se fosse concomitante seria um *PPIM-II* e, nesse caso, r^{I} seria uma $e\vee$ ou uma $e\exists$, conseqüentemente

[293] Se há um *POI* de $\rightarrow$, então havia um *POI* de $\rightarrow$; etc.

$<r^{I},r^{II}>$ não seria pivô, contrário a nossa hipótese. Logo, a forma genérica de π será como aquela abaixo (desconsiderando a subderivação π_5):

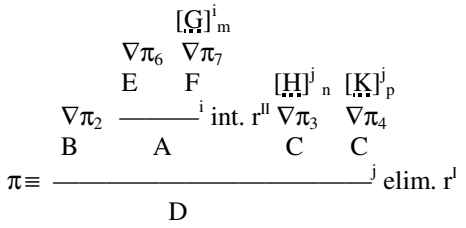


Figura V-83

onde *m*, *n* e *p* são o número de ocorrências topo da forma *G*, *H* e *K* nas subderivações π_7, π_3 e π_4, respectivamente. A derivação resultante da redução imediata sobre o *RD* $<r^{III},r^{IV}>$ pode ser representada genericamente como abaixo:

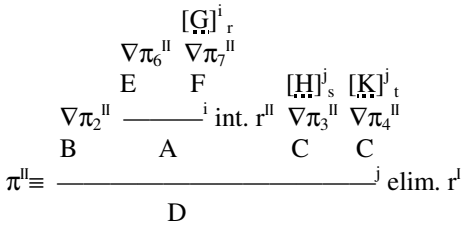


Figura V-84

Para essa derivação, valem as seguintes equivalências, com exceção obrigatoriamente de uma única delas: $\pi_2 \equiv \pi_2^{II}$, $\pi_3 \equiv \pi_3^{II}$, $\pi_4 \equiv \pi_4^{II}$, $\pi_6 \equiv \pi_6^{II}$, $\pi_7 \equiv \pi_7^{II}$. Além disso, os valores *r*, *s* e *t* são o número de ocorrências topo da forma *G*, *H* e *K*, nas subderivações π_7^{II}, π_3^{II} e π_4^{II}, respectivamente. Logo, no máximo uma das seguintes igualdades pode não valer: $m=r$, $n=s$ e $p=t$. É importante lembrar que os parâmetros envolvidos na derivação são puros. Ao total são seis subcasos a examinar, pois π^{I} será como uma daquelas derivações abaixo, conforme o tipo do *POI*:

(i.i)	(i.ii)	(i.iii)	(i.iv)	(i.v)	(i.vi)
i∧-e∧e	i→-e→ (p/ m>0)	i∧-e∧d, i→-e→ (p/ m=0), i∀-e∀	i∨e-e∨	i∨d-e∨, i∃-e∃	i⊥-e⊥
$\nabla\pi_6$ $\pi^{I}\equiv$ D	$\nabla\pi_2$ G m $\nabla\pi_7$ $\pi^{I}\equiv$ D	$\nabla\pi_7$ $\pi^{I}\equiv$ D	$\nabla\pi_7$ F n $\nabla\pi_3$ $\pi^{I}\equiv$ D	$\nabla\pi_7$ F p $\nabla\pi_4[a/\tau]$ $\pi^{I}\equiv$ D	$\nabla\pi_7$ [F/D] $\pi^{I}\equiv$ D
E≡D	B≡G e F≡D	F≡D	C≡D e F≡H	C≡D e F≡K[a/τ]	D é básica
π_2,π_3,π_4 vazias	π_6,π_3,π_4 vazias	π_3,π_4 vazias; π_2,π_6 vazias ou não	π_2,π_6 vazias	π_2,π_6 vazias; π_3 vazia ou não	π_2,π_6,π_3 e π_4 vazias

Figura V-85

Vamos aos subcasos.

(i.i) Nesse caso, $\pi^{I} \xrightarrow[\leq i]{\triangleright} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \xrightarrow[i]{\triangleright} \pi^{III}$, onde:

$\nabla\pi_6^{II}$
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-86

Notamos que, eventualmente, $\pi_6 \equiv \pi_6^{II}$.

(i.ii) Nesse caso, $\pi^{I} \underset{c}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde $1 \leq c \leq m$:

$\nabla\pi_2^{II}$
$\underset{\cdot\cdot}{G}_r$
$\nabla\pi_7^{II}$
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-87

Ocorrerá que $\pi_2 \equiv \pi_2^{II}$ ou, alternativamente, que $\pi_7 \equiv \pi_7^{II}$.

(i.iii) Nesse caso, $\pi^{I} \underset{\leq i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde:

$\nabla\pi_7^{II}$
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-88

Notamos que, eventualmente, $\pi_7 \equiv \pi_7^{II}$.

(i.iv) Nesse caso, $\pi^{I} \underset{c}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde $0 \leq c \leq n+1$:

$\nabla\pi_7^{II}$
$\underset{\cdot\cdot}{F}_s$
$\nabla\pi_3^{II}$
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-89

Notamos que, eventualmente, $\pi_3 \equiv \pi_3^{II}$ e/ou $\pi_7 \equiv \pi_7^{II}$.

(i.v) Nesse caso, $\pi^{I} \underset{c}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde $0 \leq c \leq p+1$:

$\nabla\pi_7^{II}$
$\underset{\cdot\cdot}{F}_t$
$\nabla\pi_4^{II}[a/\tau]$
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-90

Naturalmente, $\pi_4^{II}[a/\tau] \equiv \pi_4[a/\tau]^{II}$. Notamos que, eventualmente, $\pi_4[a/\tau] \equiv \pi_4^{II}[a/\tau]$ e/ou $\pi_7 \equiv \pi_7^{II}$.

(i.vi) Nesse caso, $\pi^{I} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde:

$\nabla\pi_7^{II}$ [F/D]
$\pi^{III} \equiv$ D

Figura V-91

(ii) Se $<r^{I},r^{II}>$ for um *UPE*, $<r^{III},r^{IV}>$ poderá ser concomitante ou não:

(ii.i) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for concomitante, será um *PPIM-II*, π e π^{I} serão da forma abaixo, onde $m>0$ e $1\leq k\leq m$ (o caso onde o *PPIM-II* está na subderivação π_3 é similar):

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_{7_1} & \nabla\pi_{7_m} & [\sim C]^{i} & \nabla\pi_9\\ A & ,\ldots, A & & C\end{array}}{\begin{array}{cccc}|\nabla|\,\pi_8 & \nabla\pi_3 & -^{i}\ cm\ r^{IV} & \\ A & C & C & \\ \multicolumn{3}{c}{\hrulefill}^{j}\ e\vee\llbracket e\exists\rrbracket\ r^{I}\equiv r^{II}\ ,\ r^{III}\\ \multicolumn{3}{c}{C}\end{array}}$$

$$\pi^{I}\equiv\ \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_{7_1} & \nabla\pi_{7_m} & [\sim C]^{i_1} & \nabla\pi_9\\ A & ,\ldots, A & & C\end{array}}{\begin{array}{cccc}|\nabla|\,\pi_8^{I} & \nabla\pi_3 & -^{i_1}\ cm\ r^{IV_1} & \\ A & C & C & \\ \multicolumn{3}{c}{\hrulefill}^{j_1}\ e\vee\llbracket e\exists\rrbracket\ r^{III_1}\\ \multicolumn{3}{c}{C}\end{array}}\quad,\ldots,\quad \dfrac{\begin{array}{cccc}\nabla\pi_{7_1} & \nabla\pi_{7_m} & [\sim C]^{i_m} & \nabla\pi_9\\ A & ,\ldots, A & & C\end{array}}{\begin{array}{cccc}|\nabla|\,\pi_8^{I} & \nabla\pi_3 & -^{i_m}\ cm\ r^{IV_m} & \\ A & C & C & \\ \multicolumn{3}{c}{\hrulefill}^{j_1}\ e\vee\llbracket e\exists\rrbracket\ r^{III_m}\\ \multicolumn{3}{c}{C}\end{array}}$$

Figura V-92

Portanto, π^{II} seria da forma abaixo:

$$\pi^{II}\equiv\ \dfrac{\begin{array}{ccccc}\nabla\pi_{7_1} & \nabla\pi_{7_m} & & [\sim C]^{i} & \\ A & ,\ldots, A & & & \\ |\nabla|\,\pi_8 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_9 & & \\ A & C & C & & \\ \multicolumn{4}{c}{\hrulefill}^{j}\ e\vee\llbracket e\exists\rrbracket\ r^{I}\equiv r^{II}\\ \multicolumn{4}{c}{C}\end{array}}{-^{i}\ cm}$$

Figura V-93

Suponha que o maior de todos os segmentos constantes em π_8 tem comprimento s. Logo $\pi^{I}\underset{\leq m.(s+1)+(m-1)}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}}\pi^{III}$, primeiro sobre os *PPIM-IIs*, no máximo $m.(s+1)$, depois sobre os $m-1$ *PSs-I* que surgirão abaixo da subderivação π_9. Logo, também $\pi^{II}\overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}}\pi^{III}$ sobre o resíduo do *UPE* em π^{II}.

(ii.ii) Se $<r^{III},r^{IV}>$ não for concomitante, a forma genérica de π será como aquela abaixo, para $1\leq k\leq m$, onde $m>0$:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\begin{array}{ccccc}\nabla\pi_{7_1} & \nabla\pi_{7_m} & & & \\ A & ,\ldots, A & & & \\ \nabla\pi_2 & |\nabla|\,\pi_8 & \nabla\pi_3 & \nabla\pi_4 & \\ B & A & C & C & \\ \multicolumn{4}{c}{\hrulefill}\ \text{elim. } r^{I}\equiv r^{II}\\ \multicolumn{4}{c}{C}\end{array}}{}$$

Figura V-94

A instância $r(\pi_8)$ será uma $e\vee$ ou uma $e\exists$. A forma de π^{I} será representada genericamente como na figura abaixo:

$$\pi^{I} \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2\ \ \nabla\pi_{7_1}\ \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4}{B\quad A\quad C\quad C}\ \text{elim.}\qquad \dfrac{\nabla\pi_2\ \ \nabla\pi_{7_m}\ \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4}{B\quad A\quad C\quad C}\ \text{elim.}}{C}\ \ ,\ldots,\ \ |\nabla|\pi_8^{\,I}$$

Figura V-95

Naturalmente, r^{III} não será $r(\pi)$, então a forma de π^{II} será representada genericamente pela figura abaixo:

$$\pi^{II} \equiv \dfrac{\nabla\pi_2^{\,II}\quad |\nabla|\,\pi_8^{\,II}\quad \nabla\pi_3^{\,II}\ \nabla\pi_4^{\,II}}{B\qquad A\qquad C\quad C}\ \text{elim.}\ \ r^{I}\equiv r^{II}$$

$$A\ \ ,\ldots,\ A \quad \text{(sobre } \nabla\pi_{7_1}{}^{II} \text{ e } \nabla\pi_{7_m}{}^{II}\text{)}$$

$$C$$

Figura V-96

Logo, valem as seguintes equivalências, com exceção obrigatoriamente de uma única delas: $\pi_2 \equiv \pi_2{}^{II}$, $\pi_3 \equiv \pi_3{}^{II}$, $\pi_4 \equiv \pi_4{}^{II}$, $\pi_{7_1} \equiv \pi_{7_1}{}^{II}$, ..., $\pi_{7_m} \equiv \pi_{7_m}{}^{II}$, $\pi_8 \equiv \pi_8{}^{II}$. Conseqüentemente, $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{c}{\rightarrow}} \pi^{III}$ tal que $1 \leq c \leq m$ e $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$, onde:

$$\pi^{III} \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2^{\,II}\ \ \nabla\pi_{7_1}{}^{II}\ \nabla\pi_3^{\,II}\ \nabla\pi_4^{\,II}}{B\quad A\quad C\quad C}\ \text{elim.}\qquad \dfrac{\nabla\pi_2^{\,II}\ \ \nabla\pi_{7_m}{}^{II}\ \nabla\pi_3^{\,II}\ \nabla\pi_4^{\,II}}{B\quad A\quad C\quad C}\ \text{elim.}}{C}\ \ ,\ldots,\ \ |\nabla|\pi_8^{\,II}$$

Figura V-97

(iii) Se $\langle r^{I}, r^{II}\rangle$ for um *PPIM-I*, então $\langle r^{III}, r^{IV}\rangle$ não pode ser concomitante, pois assim $\langle r^{III}, r^{IV}\rangle$ seria um *PPIM-II* e $\langle r^{I}, r^{II}\rangle$ não seria pivô, contrário à hipótese. Logo a forma genérica de π e de π^{I} será como abaixo:

$$\pi \equiv \dfrac{\nabla\pi_2\quad [\sim A]^{j}{}_{n}\quad \nabla\pi_7\quad A\quad \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4}{B\qquad A\qquad\qquad C\quad C}\ \text{elim.}\ r^{I}$$

$$\pi^{I} \equiv \dfrac{\dfrac{\nabla\pi_2\quad [A]^{p}\quad C\quad C}{B}\ \text{elim.}\qquad [\sim D]^{j}}{D}\ \rightarrow e \qquad \dfrac{\bot}{\sim A_{\,n}}\ {}^{p}\,i\rightarrow \qquad \dfrac{\nabla\pi_2\quad \nabla\pi_7\quad \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4}{B\qquad A\qquad C\quad C}\ \text{elim.}$$

$$D \quad \text{(sobre } {}^{j}\text{cm } r^{II}\text{)} \qquad D \quad \text{(sobre } {}^{j}\text{cm)}$$

Figura V-98

Lembramos que r^{III} não é $r(\pi)$ e teremos alguns subcasos.

(iii.i) Se r^{III} não for a instância *cm* em π, então a forma de π^{II} será representada genericamente pela figura abaixo:

$$\pi^{II}\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sim A}^{j}_{r}}{\nabla\pi_7^{II}}}{A}\quad \nabla\pi_2^{II}\quad \nabla\pi_3^{II}\ \nabla\pi_4^{II}}{\begin{matrix}B & A & C & C\end{matrix}}\ \text{elim.}\ r^{I}$$

Figura V-99

Logo, valem as seguintes equivalências, com exceção obrigatoriamente de uma delas: $\pi_2\equiv\pi_2^{II}$, $\pi_3\equiv\pi_3^{II}$, $\pi_4\equiv\pi_4^{II}$, $\pi_7\equiv\pi_7^{II}$. Conseqüentemente, $\pi^{I}\overset{\triangleright}{\underset{c}{\rightarrow}}\pi^{III}$ tal que $1\leq c\leq n+1$ e $\pi^{II}\overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}}\pi^{III}$, onde a derivação π^{III} é genericamente da forma abaixo e, talvez, toda subderivação azul seja inexistente, quando $r=0$:

$$\pi^{III}\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sim A}^{p}_{r}}{\perp}\ i\rightarrow}{\begin{matrix}D & [\sim D]^{i}\end{matrix}}\ e\rightarrow}{\begin{matrix}D & [A]^{p} & C & C\end{matrix}}\ \text{elim.}}{\nabla\pi_2^{II}\quad B}\quad \dfrac{\nabla\pi_7^{II}}{A}\quad \nabla\pi_3^{II}\ \nabla\pi_4^{II}\ \begin{matrix}C & C\end{matrix}}{D}\ \text{elim.}}{D}\ {}^{i}\text{cm}$$

Figura V-100

(iii.ii) Se r^{III} for a mesma instância r^{II} em π, ou seja, se for *cm*, então $<r^{III},r^{IV}>$ é um *PS* ou uma *US*. No primeiro caso, o resultado segue pelo Lema V-9. No segundo caso, $n=0$ e as derivações π^{II} e π^{III} seriam da seguinte forma:

$$\pi^{II}\equiv\pi^{III}\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_2\quad \nabla\pi_7\ \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4}{\begin{matrix}B & A & C & C\end{matrix}}\ \text{elim.}}{D}$$

Figura V-101

Claramente, $\pi^{I}\overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}}\pi^{III}$.

(iv) Se $<r^{I},r^{II}>$ for uma *US*, logo r^{I} será *cm* e $<r^{III},r^{IV}>$ não poderá ser concomitante, caso contrário seria um *PS-I* e, desse modo, teríamos $\pi^{I}\equiv\pi^{II}$, contrário a nossa hipótese. Logo, $<r^{III},r^{IV}>$ não será concomitante e as formas genéricas de π, π^{I} e π^{II} serão como aquelas abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_1}{A}\ {}^{i}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{I}\qquad \pi^{I}\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_1}{A}\qquad \pi^{II}\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_1{}^{II}}{A}\ {}^{i}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{I}$$

Figura V-102

Logo, $\pi^{I}\overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}}\pi^{III}$ e $\pi^{II}\overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}}\pi^{III}$, onde:

$$\pi^{III}\equiv\ \dfrac{\nabla\pi_1{}^{II}}{A}$$

Figura V-103

(v) Se $<r^{I},r^{II}>$ for um *PS-I*, as formas genéricas de π e π^{I} serão como aquelas abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[\sim A]^{i}{}_{n}\ ,\ [\sim A]^{j}{}_{m}}{\nabla\pi_{10}}{A}\ {}^{i}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{II}}{A}\ {}^{j}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{I}\qquad \pi^{I}\equiv\ \dfrac{[\sim A]^{j}{}_{n+m}}{\nabla\pi_{10}}{A}\ {}^{j}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}$$

Figura V-104

Teremos alguns subcasos.

(v.i) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for concomitante, então $<r^{III},r^{IV}>$ não poderá ser uma *US*, pois teríamos $\pi^{I}\equiv\pi^{II}$, contrário à nossa hipótese. Logo, $<r^{III},r^{IV}>$ será um *PS-II*, π e π^{I} serão melhor detalhadas como abaixo:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{[\sim A]^{i}{}_{q}\ ,\ [\sim A]^{j}{}_{r}\ ,\quad \bot}{\nabla\pi_{8}}{A}\ {}^{i}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{II}}{A}\ {}^{j}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{I}\ ,\ r^{IIII}\qquad \pi^{I}\equiv\ \dfrac{\dfrac{[\sim A]^{i}{}_{n+m}\ ,\ [\sim A]^{k}{}_{p}}{\nabla\pi_{10}}{A}\ {}^{k}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{IV}}{A\qquad [\sim A]^{j}}\ e\!\rightarrow\ \dfrac{[\sim A]^{j}{}_{q+r}\ ,\quad \bot}{\nabla\pi_{8}}{A}\ {}^{j}\!\!-\!\!\!-\ \text{cm}\ r^{IIII}$$

Figura V-105

Portanto, π^{II} será da forma abaixo:

$$\pi^{II}\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\sim A]^{i}{}_{n}\ ,\ [\sim A]^{j}{}_{m+p}}{\nabla\pi_{10}}}{A}\quad [\sim A]^{j}}{\perp}\ e\!\rightarrow}{[\sim A]^{i}{}_{q}\ ,\ [\sim A]^{j}{}_{r}}}{\nabla\pi_{8}}}{A}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac

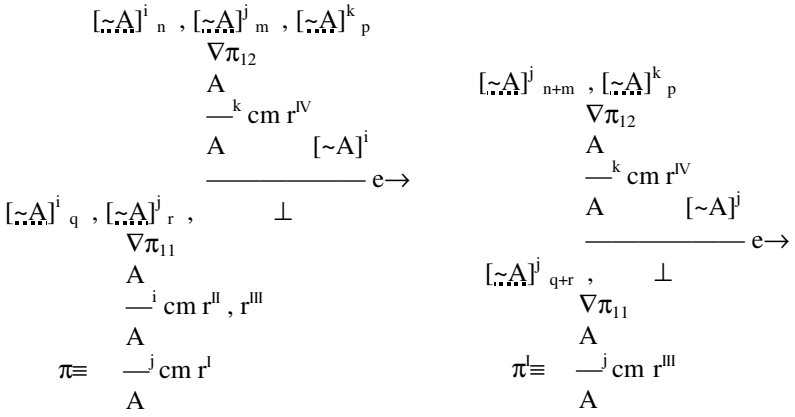


Figura V-109

Portanto, π'' será da forma abaixo:

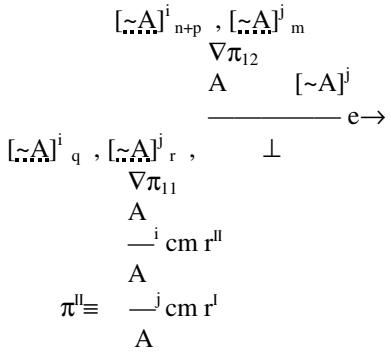


Figura V-110

Nesse caso, $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PS-II* e $\pi'' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PS-I.*

(v.ii.ii) Se r''' não for a instância *cm* r'', então π'' terá forma abaixo (o número de instâncias topo da forma ~*A* pode se alterar):

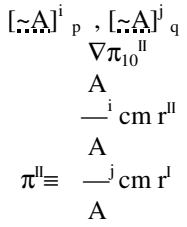


Figura V-111

Logo, $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \overset{\triangleright}{\underset{\leq i}{\rightarrow}} \pi'''$, onde π''' tem a forma abaixo:

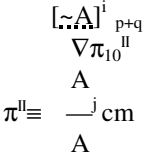


Figura V-112

(vi) Se <r',r''> for um *PS-II*, as formas genéricas de π e π' serão como aquelas abaixo:

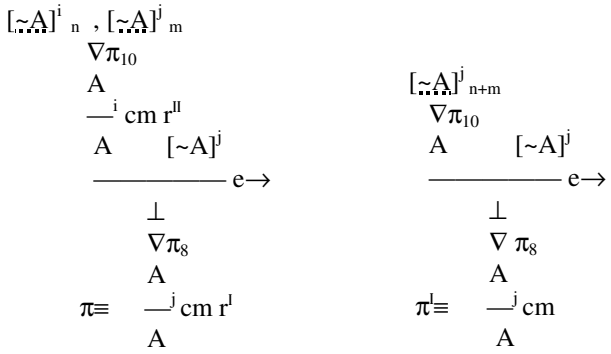


Figura V-113

(vi.i) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for concomitante, será um *PS-II*, não pode ser um *PS-I*, caso contrário $<r^{I},r^{II}>$ não seria pivô, contrário à nossa hipótese. Como $<r^{III},r^{IV}>$ deve ser um *PS-II*, assim a redução de qualquer um dos dois *PSs-II* alternativos mantém como resíduo o outro *PS-II*. Logo, existe π^{III} tal que $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$.

(vi.ii) Se $<r^{III},r^{IV}>$ não for concomitante, teremos alguns subsubcasos.

(vi.ii.i) Se r^{III} for a instância *cm* r^{II}, então $<r^{III},r^{IV}>$ não poderia ser uma *US*, pois então teríamos $\pi^{II} \equiv \pi'$, contrário à nossa hipótese. Este caso se subdivide em dois.

(vi.ii.i.i) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for um *PS-I*, então π e π' serão mais precisamente como abaixo:

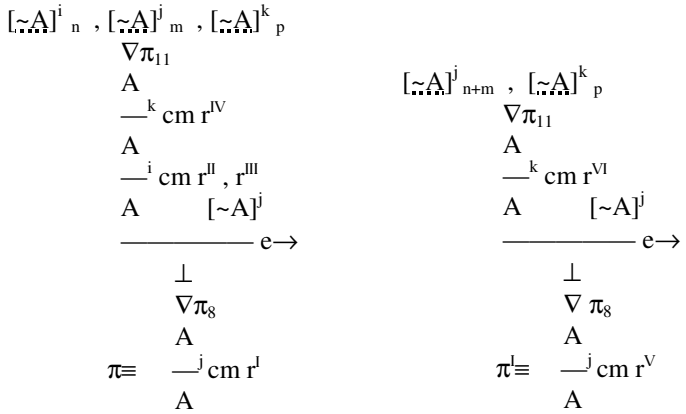


Figura V-114

Portanto, π^{II} será da forma abaixo:

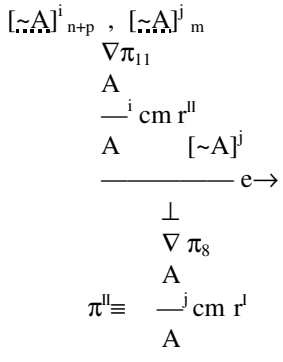


Figura V-115

Nesse caso, $\pi^{I} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ sobre o novo *PS-II* em π^{I} e $\pi^{II} \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{III}$ sobre o *PS-II* resíduo.

(vi.ii.i.ii) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for um *PS-II*, então π e π^{I} serão mais precisamente como abaixo:

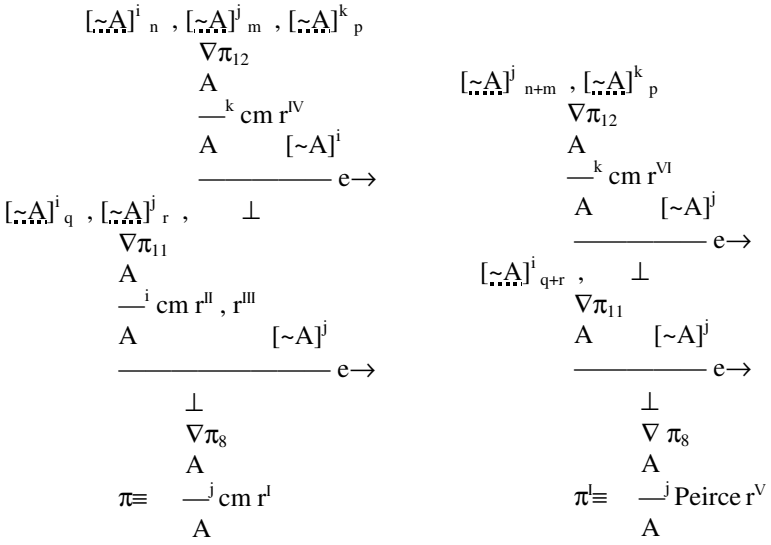


Figura V-116

Portanto, π^{II} será da forma abaixo:

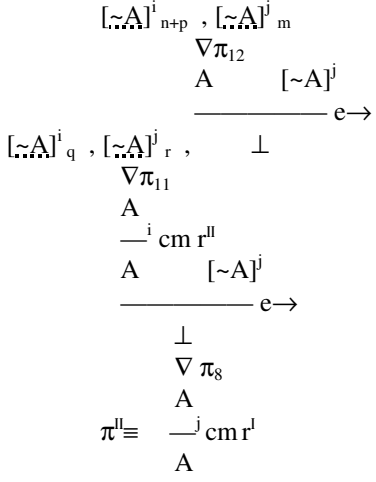


Figura V-117

Nesse caso, $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o novo *PS-II* e $\pi'' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PS-II* resíduo.

(vi.ii.ii) Se r''' não for a instância *cm* r'', então π'' tem a forma abaixo:

$$
\begin{array}{l}
[\sim A]^{i}\ {}_{p}\ ,\ [\sim A]^{j}\ {}_{q} \\
\quad \nabla\pi_{10}{}^{II} \\
\quad A \\
\quad \text{—}^{i}\ cm\ r^{II} \\
\quad A \qquad [\sim A]^{j} \\
\quad \text{——————}\ e\rightarrow \\
\qquad \bot \\
\qquad \nabla\pi_{8}{}^{II} \\
\qquad A \\
\pi^{II} \equiv \quad \text{—}^{j}\ cm\ r^{I} \\
\qquad A
\end{array}
$$

Figura V-118

A subderivação em azul poderia não existir em π''. Se $\pi_8 \neq \pi_8{}''$, então $\pi_{10} \equiv \pi_{10}{}''$, caso π_{10} existisse. Se $\pi_8 \equiv \pi_8{}''$, então $\pi_{10} \neq \pi_{10}{}''$. Qualquer que seja o caso, $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \overset{\triangleright}{\underset{\leq i}{\rightarrow}} \pi'''$, onde π''' tem a forma genérica abaixo:

$$
\begin{array}{l}
[\sim A]^{i}\ {}_{p+q} \\
\quad \nabla\pi_{10}{}^{II} \\
\quad A \qquad [\sim A]^{j} \\
\quad \text{——————}\ e\rightarrow \\
\qquad \bot \\
\qquad \nabla\pi_{8}{}^{II} \\
\qquad A \\
\pi^{III} \equiv \quad \text{—}^{j}\ cm \\
\qquad A
\end{array}
$$

Figura V-119

(vii) Se $<r', r''>$ for um *PPIM-II*, logo π e π' terão as formas genéricas a seguir (o outro caso sobre a subderivação π_3 é bastante similar e não será tratado, notando contudo que ele não poderia ser concomitante com outro *PPIM-II*, pois $<r', r''>$ deve sempre ser pivô):

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\sim C]^{i} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nabla\pi_{9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C \\
\qquad \nabla\pi_{1} \quad \nabla\pi_{3} \quad \text{—}^{i}\ cm\ r^{II} \\
\qquad A \qquad C \qquad C \\
\pi \equiv \quad \text{——————}\ e\vee \llbracket e\exists \rrbracket\ r^{I} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad [\sim C]^{i} \\
\nabla\pi_{1} \quad \nabla\pi_{3} \quad \nabla\pi_{9} \\
A \qquad C \qquad C \\
\text{——————}\ e\vee \llbracket e\exists \rrbracket \\
\qquad\qquad C \\
\pi' \equiv \quad \text{—}^{i}\ cm \\
\qquad\qquad C
\end{array}
$$

Figura V-120

Teremos alguns subcasos.

(vii.i) Se $<r''', r^{IV}>$ for concomitante, então não pode ser um *UPE*, caso contrário $<r', r''>$ não seria pivô. Teremos três subsubcasos.

(vii.i.i) Se $<r''', r^{IV}>$ for um *POI*, logo π e π' serão das formas genéricas abaixo:

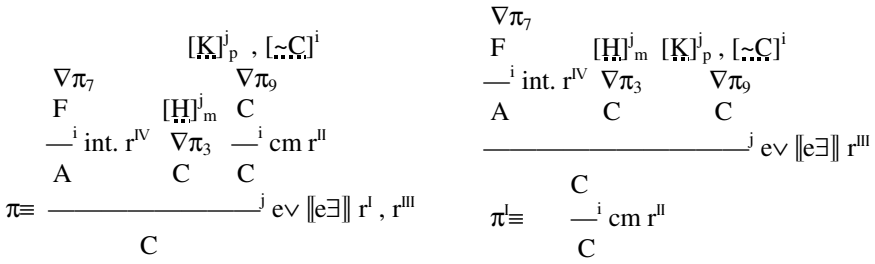


Figura V-121

Assim, π^{II} será de uma das duas formas abaixo:

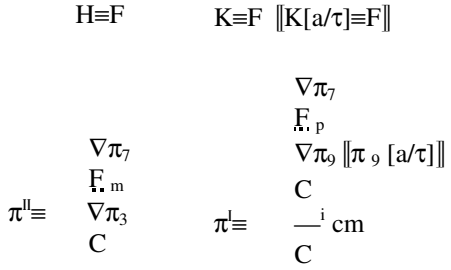


Figura V-122

No primeiro caso, existe uma derivação π^{IV} tal que $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{II}$ sobre o *POI* e, em seguida, sobre a *US*, resíduo da instância *cm* de índice *i* em π. No segundo caso, $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{II}$ sobre o *POI*. Logo, basta fazer $\pi^{III} \equiv \pi^{II}$.

(vii.i.ii) Se $<r^{III}, r^{IV}>$ for um *PPIM-I*, logo π será da forma genérica abaixo:

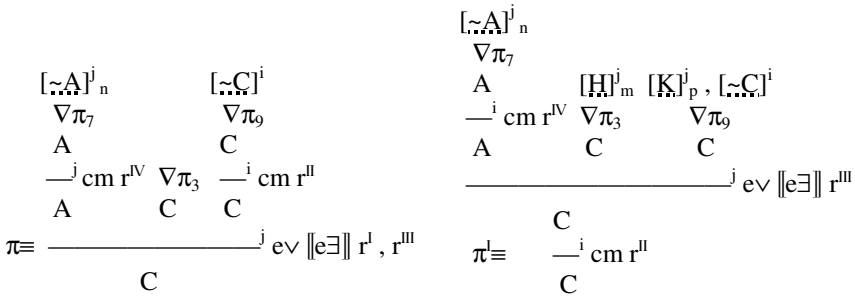


Figura V-123

Portanto π^{II} será da forma abaixo:

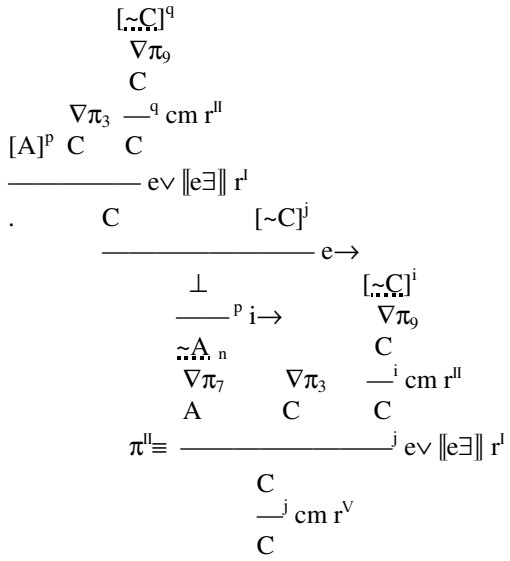


Figura V-124

Logo $\pi'' \underset{2n+2}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$ primeiro sobre os *n PPIMs-II* de π'', envolvendo as *n* cópias de $<r',r''>$; depois sobre os *n PSs-II* resultantes, envolvendo a instância r^V, que é uma instância *cm*; depois uma redução sobre o *PPIM-II* original envolvendo $<r',r''>$; finalmente uma redução sobre o *PS-I* que resultará da redução anterior, tal que π''' será como abaixo:

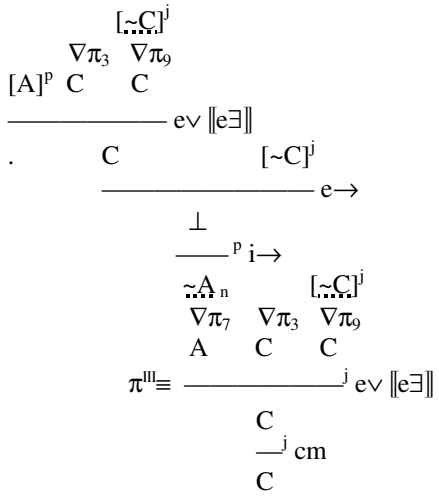


Figura V-125

Mas $\pi' \underset{2}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$ primeiro sobre o *PPIM-I* de π' em seguida sobre o *PS-I* resultante.

(vii.i.iii) Se $<r''',r^{IV}>$ for um *PPIM-II*, logo π e π' serão da forma genérica abaixo:

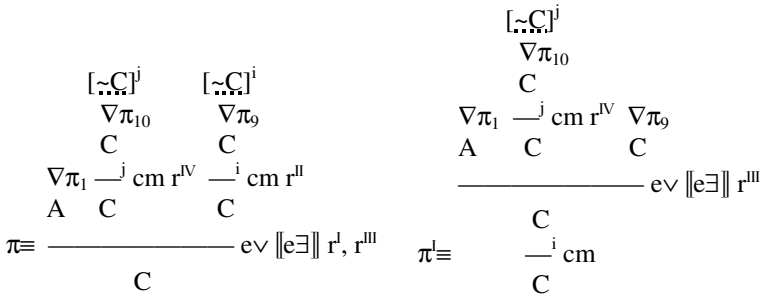


Figura V-126

Portanto, π'' será da forma abaixo:

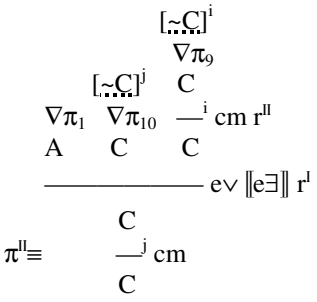


Figura V-127

Tanto $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{2}{\rightarrow}} \pi'''$ quanto $\pi'' \overset{\triangleright}{\underset{2}{\rightarrow}} \pi'''$, primeiro sobre um *PPIM-II*, depois sobre um *PS-I*.

(vii.ii) Se $<r''',r^{IV}>$ não for concomitante, então teremos alguns subcasos.

(vii.ii.i) Se r''' for a instância *cm* r'', então teremos três subsubcasos.

(vii.ii.i.i) Se $<r''',r^{IV}>$ for uma *US*, logo π e π' são melhor detalhadas como abaixo:

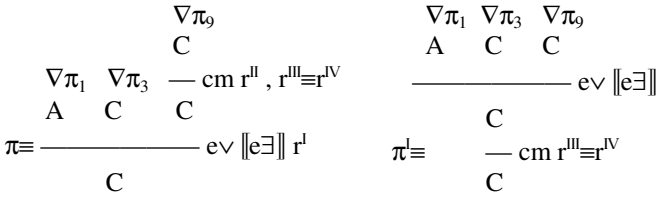


Figura V-128

Portanto, π'' será da forma abaixo:

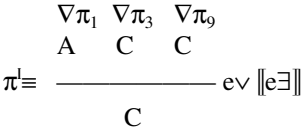


Figura V-129

Claramente, $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi''$, assim basta tomar $\pi''' \equiv \pi''$.

(vii.ii.i.ii) Se $<r''',r^{IV}>$ for um *PS-I*, logo π e π' serão melhor detalhadas como abaixo:

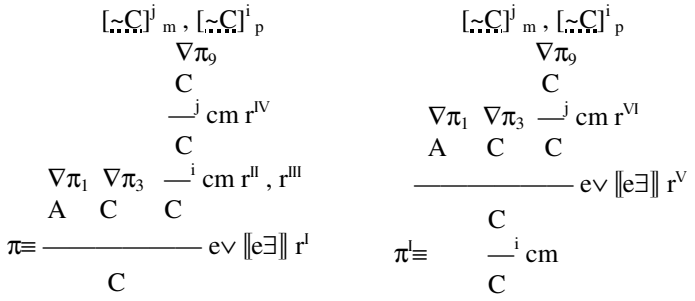


Figura V-130

Portanto, π^{II} é de da forma abaixo:

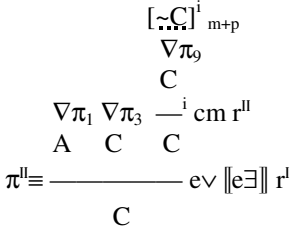


Figura V-131

Conseqüentemente, $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{2}{\rightarrow}} \pi^{III}$ primeiro sobre o novo *PPIM-II* em π^{I}, depois sobre o *PS-I* que daí surgirá, além disso, $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ sobre o *PPIM-II* em π^{II}.

(vii.ii.i.iii) Se $<r^{III},r^{IV}>$ for um *PS-II*, logo π e π^{I} serão melhor detalhadas como abaixo:

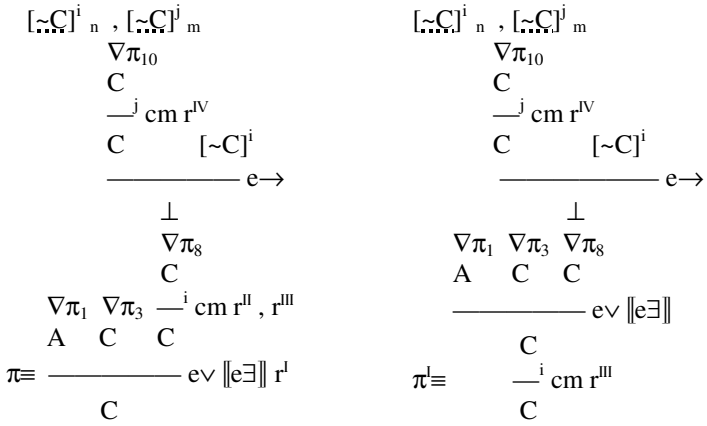


Figura V-132

Portanto, π^{II} é da forma abaixo:

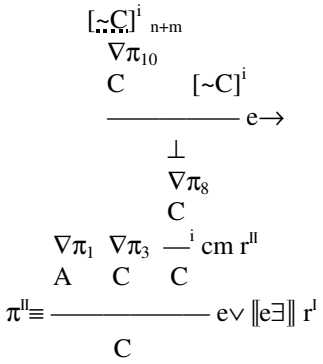


Figura V-133

Conseqüentemente, $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ sobre o *PS-II* e $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ sobre o *PPIM-II* em π^{II}.

(vii.ii.ii) Se r^{III} não for a instância *cm* r^{II}, então a forma de π^{II} será representada genericamente pela figura abaixo:

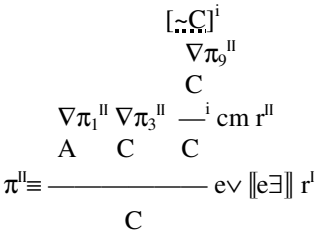


Figura V-134

onde valem as seguintes equivalências, com exceção obrigatoriamente de uma delas: $\pi_1 \equiv \pi_1^{II}$, $\pi_3 \equiv \pi_3^{II}$, $\pi_9 \equiv \pi_9^{II}$. Conseqüentemente, $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$. *QED*

O passo subseqüente, após haver provado confluência local, seria o de perguntar pela validade da confluência para duas seqüências quaisquer de comprimento finito. Dado o teorema acima provavelmente todos intuiríamos que deveria haver uma prova dessa natureza, pois localmente sempre foi possível fazer a confluência. Todavia, para obter a confluência local foi preciso lançar mão de cadeias que envolvem múltiplas reduções. Assim, a confluência local sozinha não nos permite provar a confluência geral. Para provar confluência geral, ou seja, para provar Church-Rosser, seria ainda preciso garantir a finitude de qualquer cadeia de redução. Poderia ocorrer que a tentativa de confluência das respectivas cadeias se estendesse indefinidamente. De posse da finitude, usando o lema König, obteríamos a demonstração. Se não quisermos empregá-lo, será preciso encontrar uma variável de indução associada ao processo de redução que diminua seu valor de pelo menos uma unidade para qualquer redução imediata.

Teorema V-7 - (confluência para $\mathcal{I}$) Se $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ e $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$, onde π é uma derivação em $\mathcal{I}$, então existe π''' tal que $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''$ e $\pi'' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''$.

Demonstração # Pelo Corolário V-5, todas as cadeias de redução para uma derivação π qualquer em $\mathcal{I}$ são finitas. Além dos mais, como para cada derivação π de $\mathcal{I}$ o número de reduções distintas aplicáveis a π é finito, ou seja, o número de ramificações em cada nodo é finito, então pelo lema de König a árvore de reduções de π é finita, ou seja, $\psi(\pi)$ é finita. Para provar Church-Rosser para π, faremos uma indução no comprimento da sua árvore de redução. Obviamente, se $\pi \underset{\geq i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$, então $|\psi(\pi')|<|\psi(\pi)|$. Suponha que $\pi \underset{n}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$ e $\pi \underset{m}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi''$. Os casos onde $n=0$ ou $m=0$ são triviais. Se $n\geq 1$ e $m\geq 1$, a situação é capturada pelo seguinte diagrama:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\pi & \rightarrow^{i} & \pi^{IV} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \pi^{I} \\
\downarrow^{i} & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\pi^{V} & \rightarrow & \pi^{VI} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \pi^{VII} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\pi^{II} & \rightarrow & \pi^{VIII} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \pi^{IX} \equiv \pi^{III}
\end{array}
$$

Figura V-135

Por suposição, existe π^{IV} e π^{V} tal que $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{IV} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ e $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{V} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$. Pelo Teorema V-6, existe π^{VI} tal que $\pi^{IV} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VI}$ e $\pi^{V} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VI}$ (aquelas reduções em azul na figura acima). Logo, $\pi \underset{\geq i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{VI}$. Assim, $|\psi(\pi^{IV})|<|\psi(\pi)|$, $|\psi(\pi^{V})|<|\psi(\pi)|$ e $|\psi(\pi^{VI})|<|\psi(\pi)|$. Por *(HI)*, existem π^{VII}, π^{VIII}, e π^{IX} tal que $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII}$, $\pi^{VI} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII}$, $\pi'' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VIII}$ e $\pi^{VI} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VIII}$, $\pi^{VII} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{IX}$ e $\pi^{VIII} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{IX}$ (aquelas reduções em vermelho na figura acima). Basta tomar $\pi^{III} \equiv \pi^{IX}$, pois $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{IX}$ e $\pi'' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VIII} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{IX}$. *QED*

Corolário V-6 - Normalização forte para $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}_f$ com cota p/ o comprimento da FN.

Demonstração # Pelos Teorema V-7 e Corolário V-5, a *FN* é única e toda seqüência de redução é finita, além disso, pelo Teorema V-2 a *FN* de uma derivação π está cotada da seguinte forma: $|\pi^{\triangleright}|<2_{v_{\triangleright}(\pi)}|\pi|$. *QED*

8. Definição da Pior Seqüência

Uma outra forma de provar Church-Rosser consiste em definir uma seqüência especial de redução tal que qualquer seqüência possa ser comparada a essa seqüência distinguida. Esse será o caso quando temos aquilo que, usualmente, tem sido chamado de *a pior seqüência*. Na verdade, *a pior seqüência* é apenas uma estratégia que pretensamente nos daria uma seqüência maximal. A intuição basilar, por trás da estratégia, é a de buscar uma forma de se livrar da menor quantidade possível de instâncias de regras em cada passo imediato de redução.

A estratégia de *pior seqüência* havia sido definida por Massi ([Mas90], cap. 7) em sua tese de doutoramento para um sistema correlato ao sistema que estamos chamando de C'. Ele havia mostrado também que sob a pressuposição de finitude ela realmente ofereceria uma seqüência maximal. Depois dele, Alves [Alv99] mostrou, em sua tese de doutoramento, que essa estratégia sempre termina.

Do nosso ponto de vista, a característica mais importante da estratégia estaria no fato de que ela pode ser comparada a qualquer outra cadeia de reduções, pois demonstrar que ela é maximal consiste em mostrar que ela é maior ou igual a qualquer outra cadeia de redução. Mas, se de fato *a pior seqüência* é comparável a qualquer outra seqüência, talvez seja razoável esperar que possamos obter a unicidade da *FN* a partir da definição dessa seqüência, ou seja, obter Church-Rosser. O problema da finitude estará resolvido se for possível obter uma variável de indução que diminua de valor após cada passo imediato de redução. É justamente isso que Alves apresentou em sua tese, uma variável dessa natureza.

Observando a prova de confluência local dada mais acima, é possível observar que, na maioria dos casos, a redução que passa pelo assim chamado *RD* pivô resulta ser maior ou igual à outra seqüência de redução. Os casos onde isso não acontece são dois: quando o *RD* pivô é um *PPIM-II*; quando o *RD* pivô é um *POI*. Quando é um *PPIM-II*, a única situação em que não será maior ou igual é quando o *RD* pivô é concomitante a um *PPIM-I*. Quando o *RD* pivô é um *POI*, só não acontece quando $|\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''|=0$. Em qualquer situação a redução $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$ joga fora uma subderivação inteira, justamente aquela subderivação dentro da qual encontrar-se-ia o *RD*

reduzido em $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi''$. Assim, para obter a pior seqüência deveríamos de antemão nos ocupar em obter a *FN* da subderivação que será descartada na redução $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$. Finalmente, dado que no sistema $\mathcal{J}_{CM'}$ não existem *PPIMs-I* , então poderemos definir uma estratégia de pior seqüência para $\mathcal{J}_{CM'}$.

Na definição de **pior seqüência** para o sistema $\mathcal{J}_{CM'}$ é preciso buscar o *RD* pivô de toda a derivação, ou seja, aquele tal que ele é pivô com respeito a qualquer outro *RD* e, depois de encontrá-lo, proceder da forma a seguir. Quando o *RD* descarta subderivações inteiras, se essas subderivações não estão em *FN*, o mesmo procedimento da pior seqüência deve ser aplicado sobre a subderivação a ser descartada, até que ela esteja em *FN*; caso contrário, se todas as subderivações que seriam descartadas estão em *FN*, ou ainda, caso não existam subderivações a serem descartadas, o *RD* pivô encontrado será reduzido Esse processo aplicado paulatinamente nos dará uma das seqüências de redução mais longas e aquela que tem sido muitas vezes denominada de **a pior seqüência**.

9. Considerações Finais

A posse de uma variável de indução que possa garantir a finitude dos procedimentos de normalização seria algo imensamente interessante. Nossos esforços no próximo capítulo vão no sentido de mostrar como obter esse valor para certos subsistemas de C, trilhando um caminho já iniciado por Massi e Alves. Um dos avanços importantes com respeito a esses trabalhos estará na cota que daremos ao valor de indução e da relação dessa cota com outras cotas. Da obtenção desse valor de indução decorrerá normalização forte e Church-Rosser para o respectivo sistema sob estudo. Em particular, se esse valor de indução puder ser usado como uma cota para o comprimento da derivação em *FN*, então a normalização forte com cota terá sido obtida.

Como vimos, Prawitz em [Pra71] oferece uma demonstração de normalização forte por meio de uma prova onde se faz apelo a uma propriedade das derivações, a validade forte, tal que a validade forte implica normalização forte. Segundo Massi ([Mas90], pág. 2), nessas provas, as vezes chamadas de semânticas, perderíamos visibilidade da estrutura combinatória por trás desses processos de redução, embutidas na definição da propriedade usada na prova. O próprio Massi procurou apresentar uma prova de natureza puramente combinatória com base em uma tradução entre derivações, adaptando uma idéia de Girard ([Gir87], págs. 150-159). A utilização de uma operação de expansão parece ser a idéia essencial na constituição da prova. A derivação obtida

por expansão permitirá mostrar normalização forte para a lógica clássica, pois, depois de efetuadas as expansões, qualquer redução faria decrescer o comprimento da derivação obtida por expansão. Alves propôs uma operação expansiva para as derivações desse sistema que resultaria, por meio de um processo finito, em certas estruturas informativas. Sobre essa estrutura haveria uma forma de correlacionar certas simplificações com cadeias as cadeias de reduções sobre a derivação original. Nós mostraremos uma função de cota para esse valor.

No próximo capítulo investigaremos mais profundamente a combinatória envolvida nos processos de normalização para o sistema que nós definimos como sistema C'. Para isso, serão usadas operações de expansão sobre as próprias derivações e que resultam em outras derivações, todas elas pertencentes à mesma classe de equivalência, tal que essas operações serão cotadas por uma função tomando como variáveis certas características da derivação original.

Capítulo VI Cotas e Operação de Expansão Sobre Derivações

Neste capítulo, serão definidos certos pares de instâncias similares aos rodeios, mas que não são pares imediatos. Sobre alguns desses pares nas derivações do sistema C', poderemos aplicar duas novas operações. Ainda não sabemos se definições similares poderão ser estendidas e ampliadas para outros sistemas mais compreensivos, constituindo assim problema em aberto. As operações permitirão mostrar de modo surpreendente uma série de resultados importantes, alguns já conhecidos, mas também alguns resultados novos relacionados ao conceito de normalização forte.

Basicamente, as novas operações a serem definidas em breve preservam muito da derivação antiga e uma delas, em particular, a mais importante, efetua uma expansão da derivação original. Com respeito a essa nova operação será introduzido o conceito de forma normal expansiva e sobre ela será feito também um exame de cota para o comprimento da *FN* e do processo de normalização. Propriedades similares a normalização forte e a confluência valem para essa operação de expansão. Ela será a base para demonstrar **normalização forte** com cota para as reduções no sistema C'. Ao fim do capítulo faremos algumas considerações acerca das cotas e processos de cotação para as *FNs*.

1. Operação de Expansão

1.1. Pares Não-Imediatos e a Forma Normal Expansiva

No Capítulo IV definimos uma série de *RDs* e suas respectivas operações de eliminação ou simplificação. Os *RDs* foram classificados como *RDs* multiplicativos e *RDs* não-multiplicativos. Uma operação de redução sobre um *RD* não-multiplicativo sempre encolhe a derivação tal que qualquer novo *RD* que possa surgir após essa operação ou envolve instâncias vizinhas locais àquelas que formavam o *RD* não-multiplicativo ou é uma *US*.

A idéia principal por trás da definição da operação de expansão consiste em determinar

certos pares de instâncias de regra cujos resíduos poderão vir a tornar-se *RDs*, após um número finito de reduções. Tomando o seguinte exemplo, percebe-se que certas instâncias de regra podem vir a constituir um novo *RD*. Dois *RDs*, em vermelho, são claramente identificáveis, assim como é identificável um novo par não-imediato, em azul. As ocorrências em azul, ligadas a esse par não-imediato, não são sintaticamente equivalentes, havendo uma variação importante nos seus termos[294]:

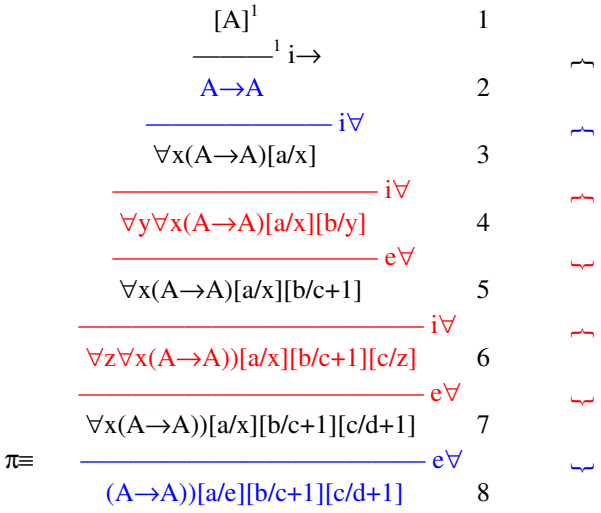


Figura VI-1

Seguindo a praxe contida na literatura, as ocorrências *4* e *6* são fórmulas máximas em π. A redução envolvendo *4* colapsaria as ocorrências *3* e *5*; a redução envolvendo *6* colapsaria as ocorrências *5* e *7*. As duas reduções seguidas da redução do par não-imediato, em azul, colapsariam as ocorrências *2* e *8* na figura acima. Essas duas ocorrências em azul diferem radicalmente em seus termos, na ocorrência *8*, no lugar de *b*, ocorreria agora o termo *d+1+1* tal que uma simples re-nomeação de parâmetros não seria capaz de tornar homogêneas as ocorrências *2* e *8*. Apenas a estrutura lógica, considerando aí unicamente a ocorrência dos predicados e dos símbolos lógicos, é a mesma nessas duas ocorrências.

O exemplo mostra que é possível determinar novos pares não-imediatos de instâncias, pares esses que no futuro podem vir a tornar-se novos *RDs*. Mas, para além da intuição que o exemplo acima nos oferece, é preciso definir um procedimento que possa estabelecer esses pares não-imediatos de forma precisa. O procedimento será similar àquele que é empregado ao ler uma

[294] Em sua tese de doutoramento Alves [Alv99] havia procurado mostrar como antecipar algumas das futuras fórmulas máximas em uma derivação em C', para isso forjando o conceito de *segmento-*α. A tarefa que estamos nos propondo é similar, mas procuraremos dar um desenvolvimento parcialmente distinto daquele usado pelo autor, tentando evitar um problema. O problema diz respeito às ocorrências de termos em uma ocorrência de fórmula e será ilustrado no exemplo a seguir.

expressão formal, como por exemplo, as fórmulas do cálculo proposicional. Como sabemos, a compreensão da estrutura da fórmula requer que façamos o pareamento dos parênteses (ou chaves ou colchetes) presentes na expressão linear. Algo similar ocorrerá com os ramos axiais de uma derivação, pois eles podem ser lidos como seqüências de instâncias em uma derivação. Na figura acima, se formos ler a última coluna de baixo para cima, teremos uma coleção de abre-chaves e fecha-chaves. A cada regra de eliminação corresponde um abre-chaves e cada regra de introdução um fecha-chaves. Os pares imediatos de abre-fecha-chaves são *RDs*.

Nas fórmulas do cálculo proposicional, correlacionamos cada parêntese esquerdo com um único parêntese direito. Às vezes, a quantidade de parênteses torna-se muito grande. Faz-se necessário introduzir colchetes e chaves. Todavia, esses elementos heterogêneos não são pareados entre si.

Um procedimento algo semelhante ao do pareamento de parênteses será aplicado sobre os ramos axiais, permitindo identificar vários pares imediatos e não-imediatos em uma derivação. Dado que os ramos de uma derivação estão sendo definidos de baixo para cima, as regras de eliminação serão sempre o primeiro elemento do par, equivalente ao abre-chaves em uma expressão linear, e as regras de introdução o segundo elemento do par, o fecha-chaves, como no exemplo acima: {{}{}}}.[295]

No sistema $\mathcal{C}'$ não há regras para $\vee$ nem para $\exists$. Por seu turno, as conclusões da regra *cm* são sempre básicas, em particular, nunca podem ser $\bot$. Além disso, a regra de eliminação do absurdo está restringida às conclusões básicas, também. Dessa forma, não há *UPEs*, nem *PPIMs-I*, nem *PPIMs-II* em $\mathcal{C}'$. Só há *POIs* para $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\bot$; *USs*; *PSs-I* e *PSs-II*. De todos esses *RDs* o único *RD* multiplicativo é o *POI* de $\rightarrow$. Dentre todos os possíveis *RDs* só nos interessarão aqueles pares que envolvam instâncias de introdução e eliminação. Aliás, só nesses casos a fórmula envolvida no rodeio será de valor maior que zero.

Por meio do procedimento de pareamento iremos determinar pares multiplicativos, sejam eles imediatos ou não, sobre os quais aplicaremos a operação de expansão. Duas instâncias formarão um par não-imediato somente se não houver entre elas nenhuma instância *cm* no segmento de ramo, pois a premissa imediata e a conclusão dessa regra são básicas em $\mathcal{C}'$ e as fórmulas básicas não são fórmula máxima de um *POI*. Pela mesma razão, não pode haver pares não-imediatos de instâncias de introdução e de eliminação entre as quais esteja interposta uma regra de dedução extralógica de um sistema $\mathcal{B}$ básico qualquer.

---

[295] Eventualmente alguns elementos poderão ficar sem par.

A partir das observações acima formularemos uma condição de adequação que determina quando duas instâncias de um segmento de ramo em uma derivação formam um par.

Definição VI-1 Seja $\sigma=r_1,...,r_n$ *um segmento de ramo em uma derivação* π *que não contém cm, nem instâncias extralógicas, nem regra de lançamento de hipóteses (lh), então, para* **duas instâncias** *quaisquer* r_j *e* r_k*, onde* $1\leq j<k\leq n$*, dizemos que elas* **formam par no segmento** *quando* r_j *é eliminação e* r_k *é introdução, respectivamente, de* $\rightarrow$*, ou de* $\wedge$*, ou de* $\forall$*, ou de* $\perp$ *e, adicionalmente, vale ao menos uma das seguintes condições:*

(i) r_k *é sucessora imediata de* r_j*;*

(ii) para qualquer instância r_p*, tal* $j<p<k$*:*

(ii.i) se r_p *é uma regra de eliminação, então existe um único q, para* $p<q<k$*, tal que* r_p *e* r_q *formam par e* r_q *é uma regra de introdução;*

(ii.ii) se r_p *é uma regra de introdução, então existe um único q, para* $j<q<p$*, tal que* r_p *e* r_q *formam par e* r_q *é uma regra de eliminação.*

Como os ramos axiais de uma derivação são segmentos de instâncias, usando a condição de adequação será possível definir de forma unívoca todos os pares de instâncias identificáveis em uma derivação.

Definição VI-2 - Seja $\rho=r_1,...,r_n$ *um ramo axial de uma derivação* π*, para* **duas instâncias** *quaisquer* r_j *e* r_k*, tal que* $1\leq j<k<n$*, dizemos que elas* são um **par simétrico** $<r_j,r_k>$ *em* ρ *quando:*

(i) r_j *e* r_k *formam um par no segmento* $r_j,...,r_k$ *de* ρ*;*

(ii) para $j<p<q<k$*, se o par* $<r_p,r_q>$ *é da forma* $<e\wedge e,i\wedge>$ *⟦da forma* $<e\wedge d,i\wedge>$*⟧, então* r_{q+1} *é a instância sucessora imediata à esquerda ⟦à direita⟧ de* r_q *em* π*.*

Definição VI-3 - Sejam r^I *e* r^{II} *duas instâncias distintas em* π*, elas formam um par simétrico em* π (***PS***)*, quando existe um ramo axial* ρ *em* π *tal que* $<r^I,r^{II}>$ *é um* **par simétrico** *em* ρ*.*

A seguir oferecemos um exemplo contendo três *PSs* numerados *I, II e III* e onde alguns dos ramos axiais estão destacados:

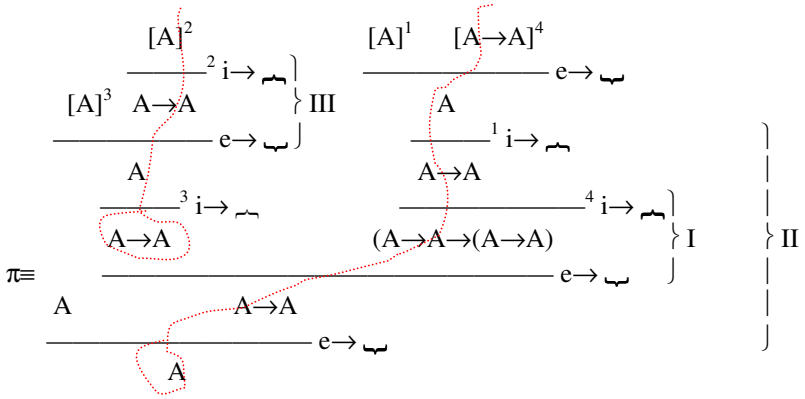


Figura VI-2

No entanto, haverá situações mais complexas, como aquela exemplificada abaixo, em que o ramo axial bifurca várias vezes:

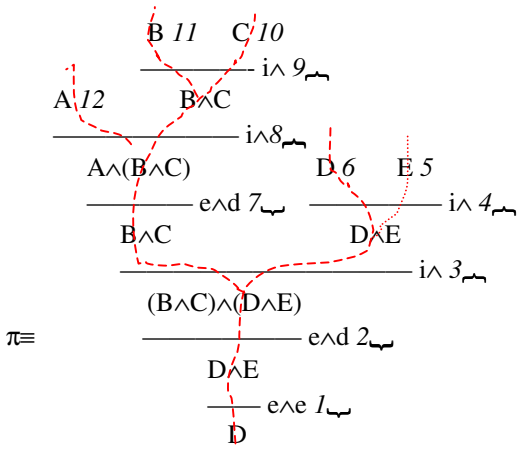


Figura VI-3

Os ramos axiais ρ^{I}=*1,2,3,4,5* e ρ^{II}=*1,2,3,7,8,9,10* têm instâncias em comum na figura acima. Pela Definição VI-2: <*1,4*> e <*2,3*> são pares sobre o ramo ρ^{I}; <*2,3*> e <*7,8*> são pares sobre o ramo ρ^{II}. Esses três pares são pares simétricos. Repare que <*1,9*> não pode ser um par simétrico no ramo ρ^{II}, segundo a cláusula *(ii)* da Definição VI-2.

Pela definição de *PS*, todo *POI* é um *PS*. Diremos que o **valor de um PS** $<r^{I},r^{II}>$ ($v(<r^{I},r^{II}>)$) é o valor da *pM* de r^{I}.[296] Quando $<r^{I},r^{II}>$ é um *PS* em π, diremos que $\sigma=r_1,...,r_n$ é um **segmento simétrico** se r_1 é r^{I} e r_n é r^{II}. Além disso, se $A_1,...,A_n$ são, respectivamente, as conclusões de $r_1,...,r_n$, então diremos que $\sigma_o=A_2,...,A_n$ é o **segmento simétrico de ocorrências** associado ao *PS* $<r^{I},r^{II}>$. Com base na definição, provamos o lema logo abaixo. Ele estabelece que qualquer par simétrico interno a um outro par simétrico deve ser de valor maior que esse último. Isso justifica porque não pode haver instâncias *cm* ou extralógicas internas a um par simétrico.

Lema VI-1 - Seja π uma derivação e seja $<r^{I},r^{II}>$ um PS em π. Logo, para toda ocorrência A no segmento simétrico de ocorrências associado a $<r^{I},r^{II}>$, temos que $v(A)\geq v(<r^{I},r^{II}>)$.

Demonstração # Sejam $\sigma=r_1,...,r_n$ o segmento simétrico e $\sigma_o=A_2,...,A_n$ o segmento simétrico de ocorrências associado ao *PS* $<r^{I},r^{II}>$ em π, tal que $<r_1,r_n>$ é o par $<r^{I},r^{II}>$ e $n>1$. Prova por casos, no número de *PSs* definíveis sobre σ.

(i) Se há só um par, então $<r_1,r_n>$ é um *POI*, segue-se o enunciado imediatamente.

(ii) Suponha que existe $t+1$ pares e que qualquer um dos t pares $<r_p,r_q>$, definíveis no intervalo de instâncias de r_2 a r_{n-1}, é tal que se a fórmula *B* ocorre no segmento simétrico de

[296] Esses valores são menores em uma unidade que os valores redutivos dos *RDs*.

ocorrências associado a $<r_p,r_q>$, então $v(B) \geq v(<r_p,r_q>)$. Existem duas possibilidades.

(ii.i) Se há um par simétrico $<r_2,r_{n-1}>$, a conclusão de r_2 é *pM* de r_1 e a *pM* de r_{n-1} é conclusão de r_n. Essas duas ocorrências de fórmulas podem diferir unicamente nos seus termos, suas árvores de construção são idênticas. Portanto, o valor delas é o mesmo que o do *PS* $<r_1,r_n>$, é menor que o valor da premissa de r_2, pois r_2 é uma regra de eliminação, e menor que o valor da conclusão de r_{n-1}. Por *(HI)*, qualquer ocorrência no segmento simétrico de ocorrências associado a $<r_2,r_{n-1}>$ tem valor maior ou igual ao do *PS* $<r_2,r_{n-1}>$, logo vale o enunciado.

(ii.ii) Se não há um par $<r_2,r_{n-1}>$, então existem $m \leq t$ *PSs* no intervalo de instâncias de r_2 a r_{n-1} com a seguinte estrutura:

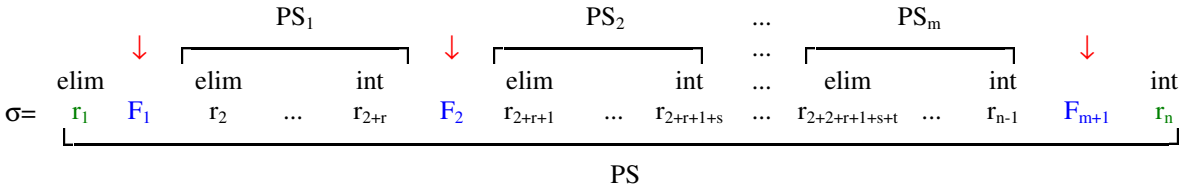


Figura VI-4

Mas deve haver uma ocorrência de fórmula entre cada um desses *m* pares. São as fórmulas em azul $F_2,...,F_m$ entre a regra de introdução de um *PS* e a regra de eliminação do outro *PS*. Adicionalmente, há duas ocorrências, uma que é conclusão de r_n e outra que é *pM* de r_1, no ramo da derivação: F_{m+1} e F_1, respectivamente. Todas essas fórmulas, diferem no máximo nos seus termos, logo elas têm o mesmo valor. Assim, essas fórmulas têm o mesmo valor do *PS* $<r_1,r_n>$. Logo, todos os *m PSs* têm um valor maior que o valor do *PS* $<r_1,r_n>$. Por *(HI)*, qualquer ocorrência nos segmentos correspondentes a cada um dos *m PSs* tem valor maior ou igual ao do *PS* em questão, logo vale o enunciado. *QED*

1.1.1. Forma Normal Expansiva para *C'*

Definição VI-4 - Seja $<r^I,r^{II}>$ um PS em uma derivação π, onde r^I é e→ e r^{II} é i→, tal que r^{II} descarta pelo menos uma ocorrência topo em π, nesse caso, dizemos que esse par é um ***par simétrico multiplicativo*** (**PSM**), caso contrário, diremos que o PS não é multiplicativo.

Os *PSMs* serão, em geral, ilustrados da seguinte forma, onde $\pi_1,...,\pi_4$, eventualmente, podem não ter nenhuma instância e, dessa forma, eventualmente, $A \rightarrow B$ e $A^* \rightarrow B^*$ poderiam ser a mesma ocorrência:

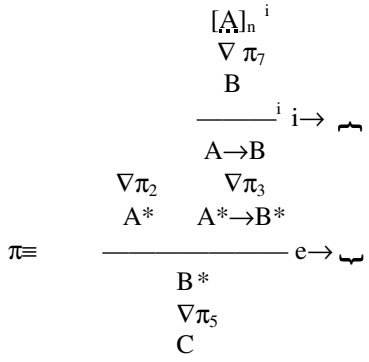


Figura VI-5

No esquema acima, as fórmulas A^*, B^* e $A^*\rightarrow B^*$ podem diferir das fórmulas A, B e $A\rightarrow B$, respectivamente, somente sobre os termos.

Definição VI-5 - Seja π uma derivação que não contém PSMs, então diremos que essa derivação está em ***forma normal expansiva (*FNE*)***.

A derivação a seguir não está em *FN*, está em *FNE*. As instâncias marcadas com *I*, *II* e *III* são os *PSs* não-multiplicativos (*I* e *III* são também *RDs*):

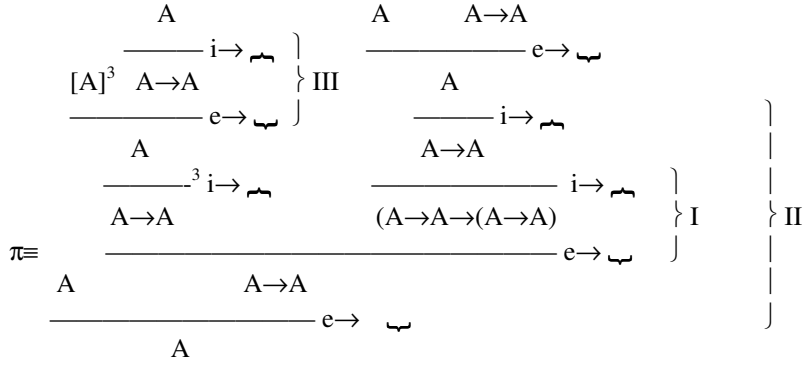


Figura VI-6

Teorema VI-1 - Se $\pi \xrightarrow[i]{\triangleright} \pi'$ *e* π *está em FNE, então: a redução foi de um RD não-multiplicativo;* π' *está em FNE;* $|\pi'|<|\pi|$.

Demonstração # Se o *RD* reduzido fosse multiplicativo, então haveria pelo menos um *PSM* em π, pois um *RD* multiplicativo em π é um *PSM*, o que é absurdo, pois π está em *FNE*. Logo, o *RD* reduzido era não-multiplicativo. Nesse caso, todos os *PSs* de π' são resíduos dos *PSs* de π e só pode haver no máximo um único resíduo em π' para cada *PS* em π. Como π estava em *FNE*, π' estará em *FNE*. Por fim, qualquer redução sobre um *RD* não-multiplicativo diminui o comprimento da derivação, conforme o Teorema IV-7. *QED*

Corolário VI-1 - Toda seqüência de redução para π *em FNE é finita.*

Demonstração # Basta ver que o número de instâncias em cada derivação é finito e que

decresce após uma redução não-multiplicativa, segundo o Teorema VI-1. *QED*

Do ponto de vista da complexidade, as derivações em *FNE* são duplamente interessantes. Em primeiro lugar, se π está em *FNE* e π' é sua *FN* então $|\pi|$ é uma cota para $|\pi'|$. Em segundo lugar, como toda redução de um *RD* não-multiplicativo elimina pelo menos uma instância de uma derivação, então $|\pi|_{inst.}$ é uma cota para $|\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'|$.

1.1.2. Novas Operações sobre as Derivações em C'

Tomando por base a Figura VI-5, uma operação por meio da qual fosse adicionado a cada uma das ocorrências topo de *A* (da subderivação π_2) uma cópia da derivação π_1, transformaria o *PSM* em um *PS* não-multiplicativo. Ocorreria uma certa expansão da derivação, baseada na própria estrutura da derivação, e, se houvesse um limite máximo para a expansão das derivações, talvez pudéssemos extrair algumas conseqüências interessantes desse fato. O problema é que as fórmulas $A^* \rightarrow B^*$ e $A \rightarrow B$ na Figura VI-5 podem ser bastante distintas, no que tange as ocorrências de termos, por razões similares àquelas ilustradas na Figura VI-1. Conseqüentemente, antes de fazer a expansão, devemos modificar essas ocorrências, caso contrário, o resultado da expansão não seria uma derivação. Infelizmente, isso não pode ser feito sobre as cópias, adicionadas, da subderivação π_1, muito menos seria possível fazer essa modificação sobre π_1 diretamente, como uma análise rápida do exemplo a seguir atestaria:

$$\pi \equiv \dfrac{\dfrac{c=b \quad \dfrac{c=b \rightarrow c'=b'}{c'=b'}\, e\rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{[a=b']^1}{a=b' \rightarrow a=b'}\, 1\, i\rightarrow}{\forall x(x=b' \rightarrow x=b')}\, i\forall \qquad \dfrac{}{c'=b' \rightarrow c'=b'}\, e\forall}{c'=b'}\, e\rightarrow}{c'=b'}\, e\rightarrow$$

Figura VI-7

Nenhuma substituição de parâmetros poderia transformar *c'=b'* em *a=b'*.

Será preciso definir uma operação que permita a homogeneização das ocorrências envolvidas como conclusão de $i\rightarrow$ e como *pM* de $e\rightarrow$ em um *PS*.

1.1.2.1. Uniformização

Observemos a seguinte homogeneização, feita sobre o exemplo da Figura VI-7:

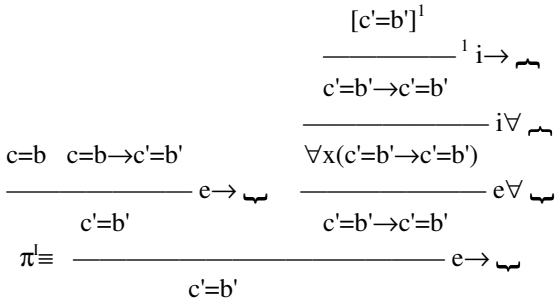


Figura VI-8

Após essa homogeneização, a instância de $i\forall$ passa a ser imprópria, sobre um parâmetro inexistente, e a estrutura resultante é, efetivamente, uma derivação. As derivações π e π^{I} confluem para uma mesma derivação e, portanto, são idênticas, assumindo o critério de identidade proposto no Capítulo IV. Assim, tornar-se-ia viável a aplicação da operação de expansão sobre a derivação π^{I}, operação que consiste em agregar uma cópia de π_1 sobre a ocorrência topo *c'=b'*, descartada pela $i\rightarrow$:

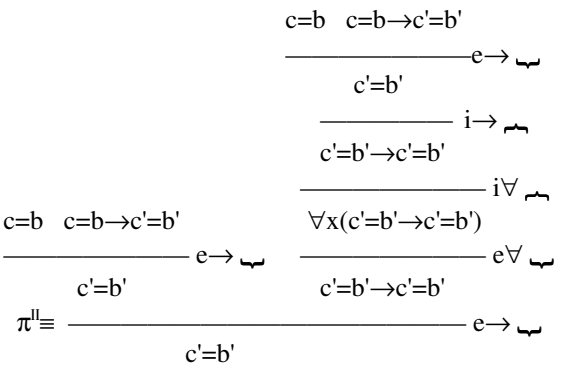


Figura VI-9

A seguir, formalizaremos a operação recém apresentada.

Definição VI-6 - Um **segmento** de ramo $\sigma=r_1,...,r_n$ *é* **homogêneo** *quando:*

(i) ou n=2 e $\sigma=r_1,r_2$ *é um segmento simétrico;*

(ii) ou n>2 e σ^{I} *é o resultado de concatenar m segmentos simétricos homogêneos da forma* $\sigma_i=r_{p_i},...,r_{q_i}$*, para* $1\leq i\leq m$*, tal que* $m\geq 1$ *e, além disso, ou* $\sigma=r_1,\sigma^{I},r_n$*, onde a pM de* r_1 *é sintaticamente idêntica a conclusão de* r_n*, ou* $\sigma=\sigma^{I}$*.*

Naturalmente, um *PS* $<r^{I},r^{II}>$ em uma derivação π será **homogêneo** quando o segmento simétrico associado é homogêneo. Se o segmento não for, diremos que o *PS* não é homogêneo. Um *PS* só não será homogêneo quando, no segmento simétrico associado a ele, houver um *PS* universal. Considere o exemplo:

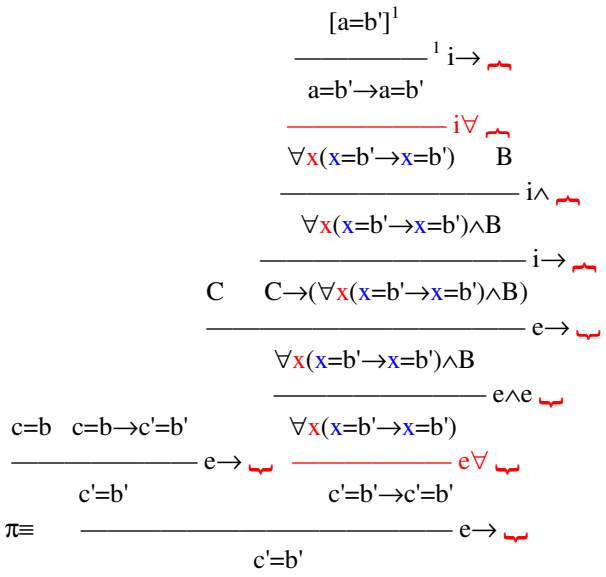


Figura VI-10

No exemplo acima, as ocorrências em vermelho da variável *x* são ocorrências ligantes e as demais, em azul, são as ocorrências ligadas. Conforme a definição de fórmula, Definição A - 3 do Apêndice, para toda fórmula haverá uma única ocorrência ligante de *x* e todas as demais serão ocorrências ligadas à única ocorrência ligante. Para uniformizar aquele par de instâncias de introdução e eliminação do universal em π, fazemos a substituição sintática das ocorrências ligadas de *x* pelo termo *c'*, em cada uma das fórmulas do segmento simétrico, obtendo π'. Na ocorrência ligante não mexemos. Depois, fazemos a substituição das ocorrências do parâmetro próprio *a* pelo termo *c'*, em π', obtendo π'':

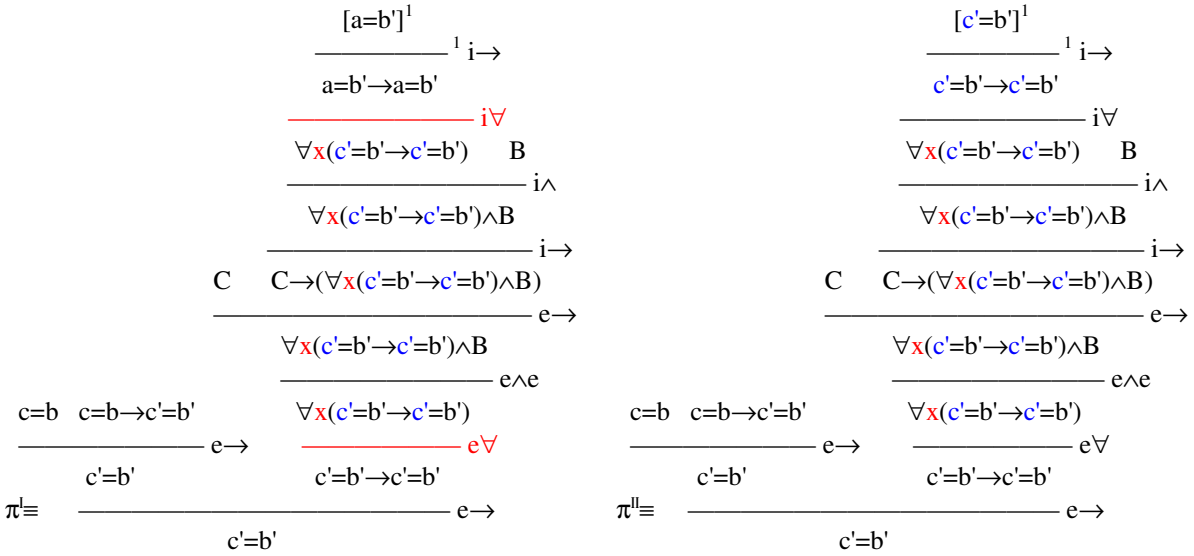


Figura VI-11

Notamos que a fórmula *C* não poderá conter ocorrências da variável *x*, segundo a Definição A - 3, na medida em que ela é subfórmula de $C \rightarrow (\forall x(x=b' \rightarrow x=b') \wedge B)$.

Definimos a operação de uniformização, formalmente, como abaixo, usamos o símbolo $\|\nabla|$ para representar a existência de um segmento simétrico ligando as ocorrências:

	derivação onde o segmento simétrico em π_6 é homogêneo	resultado da uniformização
Par Simétrico Não-Multiplicativo	$\nabla\ \pi_7$ A ———— i∀ é r^{II} ∀xA[a/x] $\|\|\nabla\|\|\ \pi_6$ ∀xA[a/x] $\pi\equiv$ ———— e∀ é r^{I} A[a/τ] $\nabla\pi_5$ C	$\nabla\ \pi_7$ [a/τ] A[a/τ] ———— i∀ é r^{II} ∀xA[a/τ] $\|\|\nabla\|\|_{[x/\tau]}\ \pi_6$ ∀xA[a/τ] $\pi^{I}\equiv$ ———— e∀ é r^{I} A[a/τ] $\nabla\pi_5$ C

Figura VI-12

A representação envolvendo $\|\nabla|_{[x/\tau]}$ em π' será usada para indicar o segmento simétrico, depois de homogeneizado, depois de efetuada a substituição das ocorrências ligadas de x – e somente dessas – pelo termo τ. É preciso lembrar, adicionalmente, que o parâmetro a não ocorreria em π_6, se todos os parâmetros individuais próprios fossem puros na derivação π. Além disso, relembramos, haverá no máximo uma única ocorrência ligante da variável x nas ocorrências de fórmula do segmento homogêneo de π_6. Dizemos que a derivação π' é o resultado da **uniformização imediata** sobre a derivação π ($\pi \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$). A uniformização do *PS* universal resultará uma aplicação de $i\forall$ imprópria. Dessa forma, o processo de uniformização pode ser aplicado, no máximo, uma única vez a um *PS* universal não-homogêneo, segundo a definição. Cada instância em π' corresponde a uma única instância em π. Logo, a cada *PS* ou *RD* de π' corresponde um único *PS* ou *RD* em π. A operação também não afeta o grau e a profundidade das ocorrências, assim como não altera o comprimento da derivação.

Lema VI-2 - Se π é uma derivação em C' $[\![(\mathcal{B})$, para $\mathcal{B}$ básico$]\!]$ e $\pi \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, então π' é uma derivação em C' $[\![(\mathcal{B})]\!]$.

Demonstração # Tomamos por base a Figura VI-12. Para mostrar que a derivação obtida é correta, é preciso mostrar que as aplicações de $i\forall$ permanecerão corretas, ou seja, que a restrição sobre os parâmetros próprios continua valendo em π' para toda instância de $i\forall$, dado que os termos e as variáveis das ocorrências de fórmula foram alterados. Suponha que todos os parâmetros próprios de π são puros. Logo, o parâmetro a só ocorre em π_7. Poderiam pairar

dúvidas somente sobre os parâmetros próprios que porventura ocorram em τ. Dentro de π_6, a uniformização altera somente as ocorrências do segmento homogêneo, mas nenhuma dessas ocorrências é uma ocorrência topo. Ela alterará, também, algumas ocorrências de π_7, mas, como *a* não ocorria nas hipóteses abertas de π_7, τ e seus parâmetros não ocorrerão nas ocorrências topo de π_7, se já não ocorriam antes. Logo, todos os parâmetros próprios que ocorrem em τ respeitarão a restrição de aplicação de $i\forall$. Assim, qualquer instância de $i\forall$ em π_5, atuando sobre um parâmetro contido em τ, permaneceria correta. *QED*

Lema VI-3 - Se $\pi \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{I}$*, então existe* π^{II} *tal que* $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{II}$ *e* $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{II}$*. (Identidade operacional local entre* π *e* π^{I}*).*

Demonstração # Seja $<r^{I},r^{II}>$ o *PS* universal uniformizado, suponha que o parâmetro próprio e o termo envolvido sejam, respectivamente, *a* e τ. Seja $\sigma=r_1,...,r_n$ o segmento simétrico associado ao *PS*. Vale lembrar que $r_2,...,r_{n-1}$ é um segmento homogêneo. A demonstração é por indução no comprimento de σ. Se $n=2$, o *PS* era um *RD* e é imediata a existência de π^{II}. Se $n=m+1$, deve haver pelo menos um *POI* $<r_i,r_j>$ tal que $1<i<j<n$ em σ. Logo, $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ e $\pi^{I} \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV}$ sobre o mesmo *POI*, tal que $\pi^{III} \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV}$. O resultado se segue por *(HI). QED*

Teorema VI-2 - Se $\pi \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{I}$ *e* $\pi \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{II}$*, então existe* π^{III} *tal que* $\pi^{I} \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \overset{\cong}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{III}$*. (confluência local para uniformização).*

Demonstração # Sejam $<r^{I},r^{II}>$ e $<r^{III},r^{IV}>$ os dois *PSs* universais uniformizados em $\pi \overset{\approx}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{I}$ e $\pi \overset{\approx}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{II}$, respectivamente. Se $<r^{I},r^{II}>=<r^{III},r^{IV}>$, trivial. Se $<r^{I},r^{II}>$ e $<r^{III},r^{IV}>$ são paralelos, ou seja se r^{I} não é antecessor de r^{III} e vice-versa, o resultado é imediato. Caso r^{I} seja antecessor de r^{III} (o caso inverso é tratado de forma similar), sejam: *a* e τ_1 o parâmetro e o termo envolvidos na uniformização de $<r^{I},r^{II}>$; *b* e τ_2 o parâmetro e o termo envolvidos na uniformização de $<r^{III},r^{IV}>$. Obviamente *a* e *b* são parâmetros individuais distintos, supondo que os parâmetros próprios sejam puros. A derivação π seria da seguinte forma:[297]

[297] Um par não poderia ser interno a outro, pois, nesse caso, não haveria um segmento homogêneo, como era requerido, conforme a Figura VI-12.

$$
\pi\equiv\quad
\begin{array}{l}
\nabla\pi_1\\
B\\
\hline
\forall yB[b/y]\quad i\forall\ é\ r^{IV}\\
\|\nabla\|\pi_2\\
\forall yB[b/y]\\
\hline
B[b/\tau_2]\quad e\forall\ é\ r^{III}\\
\nabla\pi_3\\
A\\
\hline
\forall xA[a/x]\quad i\forall\ é\ r^{II}\\
\|\nabla\|\,\pi_4\\
\forall xA[a/x]\\
\hline
A[a/\tau_1]\quad e\forall\ é\ r^{I}\\
\nabla\pi_5\\
C
\end{array}
$$

Figura VI-13

Conforme a suposição sobre os parâmetros puros, *a* e *b* não ocorrem em τ_1, assim como *b* não ocorre em τ_2. Claramente, *a* não ocorre em nenhuma hipótese aberta de π_1, π_2 ou π_3; *b* não ocorre em nenhuma hipótese aberta de π_5; *a* poderia eventualmente ocorrer em τ_2. As derivações π' e π'' serão respectivamente:

$$
\pi'\equiv\quad
\begin{array}{l}
\nabla\pi_1\ [a/\tau_1]\\
B\ [a/\tau_1]\\
\hline
\forall yB[b/y][a/\tau_1]\quad i\forall\ é\ r^{IV}\\
\|\nabla\|\pi_2[a/\tau_1]\\
\forall yB[b/y][a/\tau_1]\\
\hline
B[b/t_2][a/\tau_1]\quad e\forall\ é\ r^{III}\\
\nabla\pi_3\ [a/\tau_1]\\
A[a/\tau_1]\\
\hline
\forall xA[a/\tau_1]\quad i\forall\ é\ r^{II}\\
\|\nabla\|_{[x/\tau_1]}\,\pi_4\\
\forall xA[a/\tau_1]\\
\hline
A[a/\tau_1]\quad e\forall\ é\ r^{I}\\
\nabla\pi_5\\
C
\end{array}
\qquad
\pi''\equiv\quad
\begin{array}{l}
\nabla\pi_1\ [b/\tau_2]\\
B[b/\tau_2]\\
\hline
\forall yB[b/\tau_2]\quad i\forall\ é\ r^{IV}\\
\|\nabla\|_{[y/\tau_2]}\pi_2\\
\forall yB[b/\tau_2]\\
\hline
B[b/\tau_2]\quad e\forall\ é\ r^{III}\\
\nabla\pi_3\\
A\\
\hline
\forall xA[a/x]\quad i\forall\ é\ r^{II}\\
\|\nabla\|\pi_4\\
\forall xA[a/x]\\
\hline
A[a/\tau_1]\quad e\forall\ é\ r^{I}\\
\nabla\pi_5\\
C
\end{array}
$$

Figura VI-14

As uniformizações $\pi' \underset{i}{\overset{\approx}{\rightarrow}} \pi^{IV}$, sobre o resíduo do par $<r''',r^{IV}>$, e $\pi'' \underset{i}{\overset{\approx}{\rightarrow}} \pi^{V}$, sobre o resíduo do par $<r',r''>$, são respectivamente:

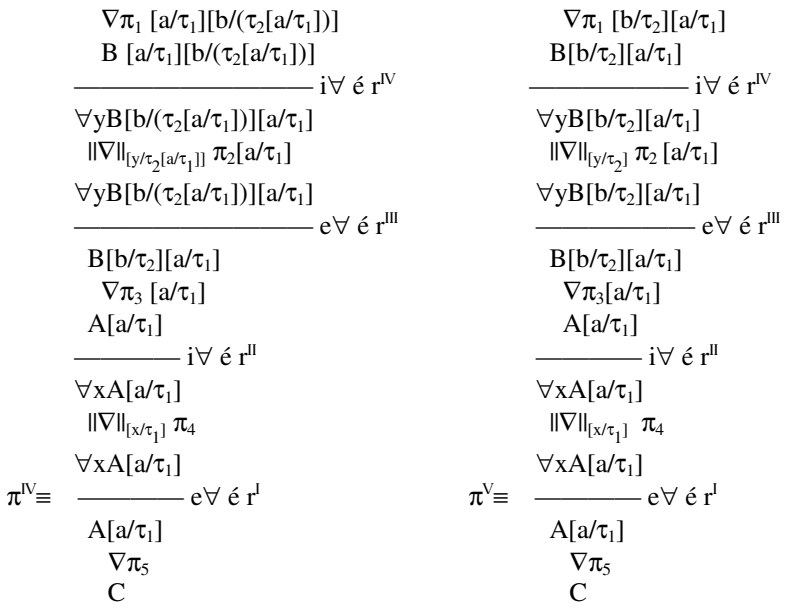


Figura VI-15

As duas derivações só poderiam diferir nas ocorrências acima da instância r^{III}. Contudo, nesses casos não é difícil averiguar que elas serão sintaticamente idênticas, observando que *b* não ocorre em τ_1 e não ocorre em τ_2. Logo, $\pi^{V} \equiv \pi^{IV}$. Assim, basta fazer $\pi^{III} \equiv \pi^{IV} \equiv \pi^{V}$. *QED*

Corolário VI-2 - (Normalização Forte com Confluência para Uniformização) - Para qualquer derivação em $\mathcal{C}'$ $[\![(\mathcal{B}), \mathcal{B}$ básico$]\!]$, qualquer seqüência de uniformização é finita e termina na mesma derivação.

Demonstração # Usando o Teorema VI-2, basta verificar que, dada uma derivação qualquer, o número de *PSs* universais não-homogêneos é finito e que o procedimento de uniformização reduz o número de *PSs* universais não-homogêneos, mas mantém inalterado o número de instâncias na derivação. Além disso, nesse caso, a confluência local é base suficiente para provar Church-Rosser. *QED*

Se uma derivação não contém *PSs* universais não-homogêneos, então todos os *PSs* da derivação serão homogêneos. Um *PS* só não será homogêneo se no segmento simétrico associado houver um *PS* universal não-homogêneo. Doravante, antes de aplicar a operação de expansão, será assumido que todas as derivações só contém *PSs* homogêneos. O processo para tornar os *PSs* homogêneos é finito e a ordem da uniformização não altera o resultado final.

1.1.2.2. Operação de Expansão

Para *PSMs* homogêneos, é possível definir a operação de expansão acima referida:

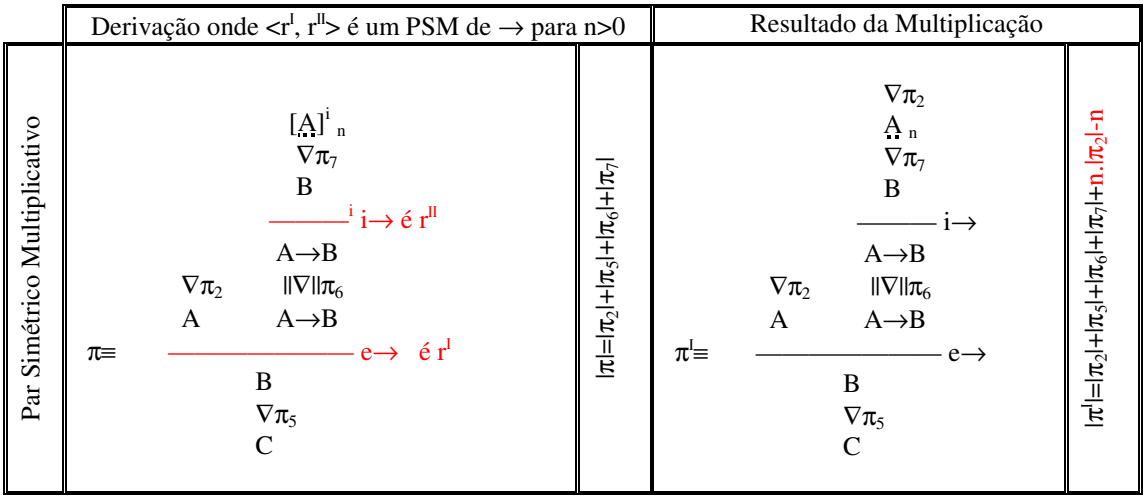


Figura VI-16

Diremos que π **multiplica-se imediatamente** a π' ($\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$). Acima, *n* é o número de ocorrências topo em π, descartadas pela regra $i\rightarrow$. Claramente, a estrutura resultante é uma derivação. A operação mantém os mesmos *PSs* que estavam em π, acrescentando alguns novos, eventualmente. O *PSM* é transformado em um *PS* não-multiplicativo, pois a regra de $i\rightarrow$ não mais descartará nenhuma ocorrência topo. Lembramos que no comprimento de cada subderivação consideramos incluídas as fórmulas topo e a fórmula final. Por exemplo, na subderivação π_7 as *n* ocorrências de *A* e a ocorrência *B* todas elas pertencem a subderivação π_7.

Retomando o exemplo da Figura VI-2, abaixo, no quadro à esquerda, a derivação π' é o resultado de multiplicar o *PSM III* da derivação na Figura VI-2; no quadro à direita, a derivação π'' é resultado de multiplicar o *PSM I* em π' (que também é um *RD*):

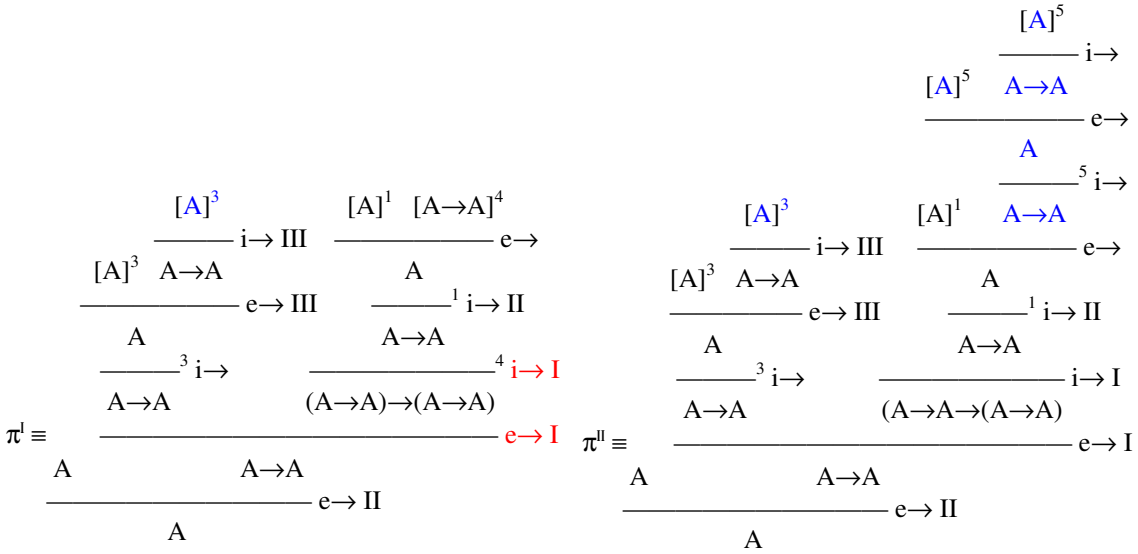


Figura VI-17

Assim, como no caso da redução dos *RDs* multiplicativos, na derivação resultante de uma

multiplicação pode ocorrer que nem todos os parâmetros próprios sejam puros, mas, aplicando os mesmos procedimentos descritos no Apêndice, a situação pode ser resolvida. A derivação resultante poderá conter novos *PSs* que são não-homogêneos. Assim, uma cadeia de uniformizações deve ser aplicada de forma a homogeneizar todos os novos pares não-homogêneos.

Lema VI-4 - Se $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$*, então existe* π'' *tal que* $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$ *e* $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$*. (Identidade operacional local entre* π *e* π'*)*

Demonstração # Suponha que $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ sobre $<r',r''>$, como na Figura VI-16. Seja $\sigma=r_1,...,r_n$ o segmento simétrico associado ao *PSM* $<r',r''>$. A demonstração é por indução no comprimento de σ. Se $n=2$, então o *PSM* é um *RD*, logo sua redução imediata, tanto em π quanto em π', resulta na mesma derivação π''. Se $n=k+1$, existe ao menos um *RD* no segmento e qualquer um deles pode ser escolhido como candidato à redução. Se $\pi \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi' \overset{\triangleright}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV}$ sobre o mesmo *RD*, como, tanto no caso de um *RD* de implicação quanto no de um *RD* de conjunção, a subderivação descartada não contém nenhuma parte do segmento simétrico, então $\pi''' \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{IV}$, tal que o segmento compreendido pelo *PSM* resíduo de $<r',r''>$ em π''' e π^{IV} é menor que $k+1$. Logo, por *(HI)*, existe π^V tal que $\pi''' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^V$ e $\pi^{IV} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^V$. Evidentemente, basta fazer $\pi'' \equiv \pi^V$. *QED*

Para mostrar a finitude do procedimento de redução via pior seqüência, para um sistema similar ao sistema C' nesta tese, Alves ([Alv99], cap. 2) havia proposto uma operação de expansão como aquela ilustrada a seguir:

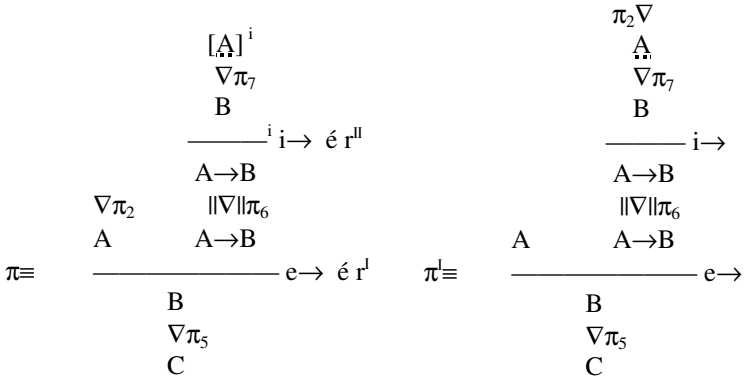


Figura VI-18

Essa forma de operação resultará estruturas que já não são mais derivações corretas, pois a restrição sobre $i \forall$ poderia ser violada em π'. Com efeito, observe o seguinte exemplo:

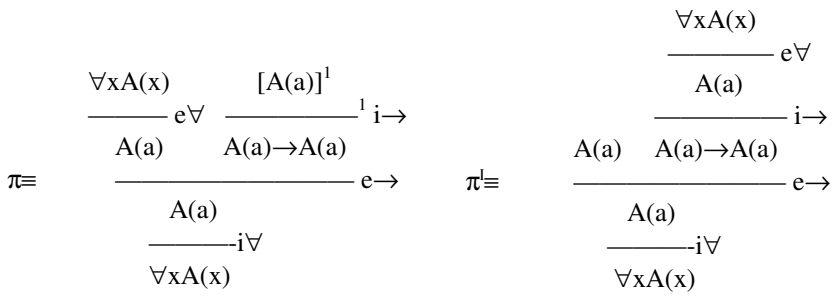


Figura VI-19

A estrutura π' na Figura VI-19 viola as restrições de aplicação das regras em C'. Por essa razão, aquele autor viu-se obrigado a trabalhar sobre estruturas que já não são derivações, ele as chamava de quase-derivações. De nossa parte, gostaríamos de evitar a duplicação de estruturas, procurando com isso obter um ganho em termos de simplicidade definicional. A idéia de Alves de um valor de indução obtido por uma operação de expansão sobre as derivações funciona bem porque os termos não têm nenhuma influência no comprimento das seqüências de redução. Todavia, a propriedade de unicidade da forma normal é extremamente sensível ao tratamento dos termos nas ocorrências de fórmula de uma derivação. Desse modo, procuraremos preservar a proposta de Alves para obtenção do um valor de indução ao mesmo tempo dando um tratamento cuidadoso aos termos e parâmetros, já que consideramos a unicidade uma propriedade importante. Como vimos, ela pode ser usada como critério de adequação sobre a definição dos descartes, sobre a definição das operações de eliminação de rodeios e sobre as operações de simplificação. Além disso, ela constitui, provavelmente, a melhor base de que dispomos para definir uma noção de identidade de derivações.

A operação de multiplicação definida por nós, é resultante de uma separação entre o efeito eliminatório e o efeito multiplicativo, ambos mesclados, na operação de redução dos *RDs* multiplicativos. Quando o objetivo é provar normalização forte para o sistema C', nosso maior problema está justamente no fato de que algumas reduções são multiplicativas: aquelas sobre os *RDs* que são *PSMs*. As operações sobre os *PSMs* podem multiplicar o número de *RDs/PSMs* da derivação original e dar surgimento a novos *RDs/PSMs*. Porém, nada é eliminado na operação de multiplicação que definimos acima, ela conserva todas as antigas instâncias, acrescentando novas, eventualmente. Assim, se for possível mostrar finitude de toda cadeia e unicidade para a operação de multiplicação, será possível mostrar finitude de toda cadeia e unicidade para as reduções de C'. As *FNEs* têm como característica importante o fato de que para todas as seqüências de redução nenhum dos seus passos é um passo de redução multiplicativo. Essa observação nos permitirá extrair algumas conseqüências relativas à complexidade das seqüências de redução, mas,

também, à complexidade da *FN* de uma derivação.

Lema VI-5 - Se $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'$*, então: (i)* $|\pi| \leq |\pi'|$*; (ii) se* $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'| = m$*, então* $|\pi'| \leq |\pi|^{2^m}$.

Demonstração #

(i) Por indução em $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'|$. Se $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'| = 0$, trivial. Suponha que $\pi \underset{m-1}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'' \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$. Logo, π'' não está em *FNE*. Seja $<r', r''>$ o *PSM* sobre o qual $\pi'' \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$:

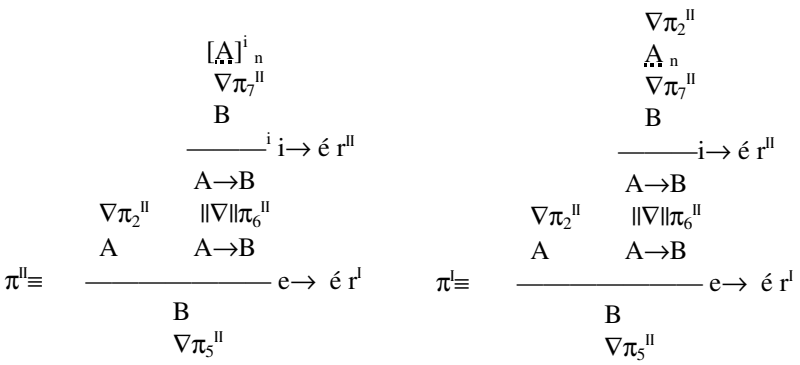


Figura VI-20

Existem duas possibilidades, levando em conta π_2''. Se $|\pi_2''| = 1$, então $|\pi''| = |\pi'|$ e, assim, $|\pi''| \leq |\pi'|$. Mas, por *(HI)*, $|\pi| \leq |\pi'|$. Se $|\pi_2''| > 1$, $|\pi''| < |\pi'|$ e, por *(HI)*, $|\pi| \leq |\pi'|$. Quanto ao segundo item do enunciado do teorema, quando $\pi'' \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$, então, segundo a Figura VI-16, $|\pi'| = |\pi''| + n.|\pi_2''| - n = |\pi''| + n.(|\pi_2''| - 1)$. Mas $n < |\pi''|$. Logo, $|\pi'| \leq |\pi''| + |\pi''|.(|\pi_2''| - 1) = |\pi''|.|\pi_2''| < |\pi''|^2$. Assim, não é difícil ver que $|\pi'| < |\pi|^{2^m}$, quando $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'| = m$.[298] *QED*

1.2. Normalização e Confluência Para Multiplicação com Cota

Nosso objetivo, a seguir, será o de demonstrar normalização forte para a operação de multiplicação, ou seja, finitude de toda cadeia de multiplicação e unicidade da *FNE*. Nesse meio tempo, será possível dizer alguma coisa acerca da complexidade das *FNs*. O caminho será: primeiro, demonstrar normalização fraca para a multiplicação, com cota para a complexidade da *FNE* obtida; segundo, a confluência de toda cadeia com uma cadeia especial; por fim, normalização forte, usando normalização fraca com cota e confluência.

[298] A mesma cota pode ser dada para as reduções no sistema C'.

1.2.1. Normalização Fraca com Cota para as *FNEs*

Há um método de obtenção de *FNEs* e, assim, existe *FNE* para toda derivação. Esse método oferece também uma cota para o comprimento da *FNE* em termos do número de ocorrências/instâncias de fórmulas, embora seja uma cota hiper-exponencial. As provas, que oferecemos a seguir, têm uma estrutura bastante similar a da prova de normalização fraca com cota do Capítulo V. Novamente, será empregada a estratégia das críticas.

A operação de homogeneização está bem-definida, é finita e o resultado é sempre único. Assim, podemos, doravante, deixá-la em segundo plano e considerar as classes de equivalência módulo procedimento de homogeneização. As definições a seguir aplicam-se às derivações que pertencem a uma mesma classe de homogenização. Dizemos que o **valor multiplicativo de um *PSM*** $<r^I,r^{II}>$ ($v_\times(<r^I,r^{II}>)$) é o valor da *pM* de r^I. Dizemos que o **valor multiplicativo de uma derivação** π ($v_\times(\pi)$) é o máximo dos valores dos *PSMs* de π. Se uma derivação está em *FNE*, seu valor multiplicativo é *zero*, lembrando que toda derivação em *FN* está em *FNE*.

Lema VI-6 - Seja π uma derivação em $\mathcal{C}'[\![(\mathcal{B}), \mathcal{B}$ básico,$]\!]$ que não esteja em FN, então $v_\times(\pi)\leq v_\triangleright(\pi)$.

Demonstração # Ou π contém um *PSM* ou não contém. Se não contém, $v_\times(\pi)=0$. Logo, $v_\times(\pi)<v_\triangleright(\pi)$. Caso contenha, seja $<r^I,r^{II}>$ um *PSM* tal que $v_\times(\pi)=v_\times(<r^I,r^{II}>)$. Seja *A* a *pM* de r^I. Logo, $v(A)=v_\times(<r^I,r^{II}>)$. Se $<r^I,r^{II}>$ é um *RD*, como $v(A)+1=v_\triangleright(<r^I,r^{II}>)$ e $v_\triangleright(<r^I,r^{II}>)\leq v_\triangleright(\pi)$, logo $v_\times(\pi)<v_\triangleright(\pi)$. Se $<r^I,r^{II}>$ não é um *RD*, então deve haver um *RD* $<r^{III},r^{IV}>$ no segmento simétrico associado a $<r^I,r^{II}>$. Mas, usando o Lema VI-1, segue-se que $v_\triangleright(<r^{III},r^{IV}>)\geq v(A)+1$ e, como $v_\triangleright(<r^{III},r^{IV}>)\leq v_\triangleright(\pi)$, então $v_\times(\pi)<v_\triangleright(\pi)$. *QED*

Lema VI-7 Seja π_3 como abaixo, onde A é uma ocorrência de ligação entre π_1 e π_2 tal que podem haver n ocorrências de A:

$$\pi_3 \equiv \begin{array}{l} \nabla\pi_2 \\ \underset{\cdot\cdot}{A}_n \\ \nabla\pi_1 \\ C \end{array}$$

Figura VI-21

Logo, $v_\times(\pi_3)\leq max(v_\times(\pi_1),v_\times(\pi_2),v(A))$.

Demonstração # Seja $<r^I,r^{II}>$ um *PSM* tal que $v_\times(\pi_3)=v_\times(<r^I,r^{II}>)$. Três casos:

(i) $<r^I,r^{II}>$ está em π_1, imediato;

(ii) $<r^I,r^{II}>$ está em π_2, imediato;

(iii) r^I está em π_1 e r^{II} está em uma das n cópias de π_2, logo o segmento simétrico de ocorrências associado ao *PSM* $<r^I,r^{II}>$ contém a ocorrência A, mas pelo Lema VI-1 $v_\times(<r^I,r^{II}>)\leq v(A)$. *QED*

Lema VI-8 - Se $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, *então* $v_\times(\pi')\leq v_\times(\pi)$ *(a multiplicação de uma derivação não aumenta o grau multiplicativo da derivação).*

Demonstração # Seja $<r^I,r^{II}>$ o *PSM* de π sobre o qual $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$:

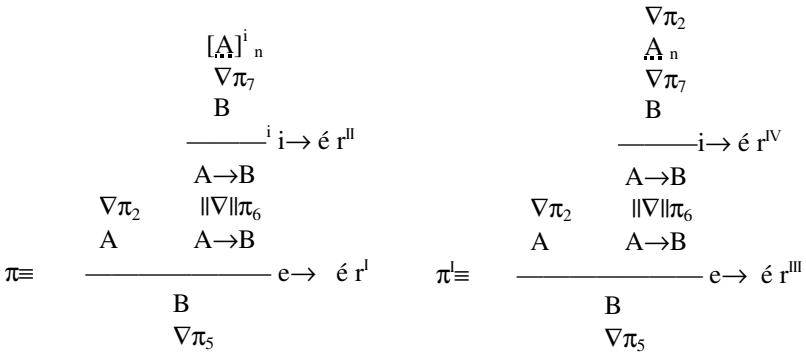


Figura VI-22

Suponhamos que a derivação π, acima, fosse a subderivação π_1 da Figura VI-21. Logo, a derivação π' acima corresponderia a derivação π_3 da Figura VI-21, onde a ocorrência topo A é a ligação. Logo, segundo o Lema VI-7, $v_\times(\pi')\leq max(v_\times(\pi),v_\times(\pi_2),v(A))$. *QED*

Lembrando que π_{r^I} é a subderivação de π cuja instância raiz é r^I, diremos que um *PSM* $<r^I,r^{II}>$ em uma derivação π será **crítico** quando qualquer outro *PSM*, que ocorra na subderivação π_{r^I}, mas seja diferente de $<r^I,r^{II}>$, for de valor menor que $v_\times(<r^I,r^{II}>)$. Dizemos que π será uma **derivação ×-crítica** quando, para algum r^{II}, o par $<r(\pi),r^{II}>$ for um *PSM* crítico. A multiplicação imediata de π a π' sobre um *PSM* crítico será denotada da seguinte forma: $\pi \overset{\times_c}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$.

Lema VI-9 - Seja π *uma derivação tal que* $v_\times(\pi)=h>0$. *Então, existe* π' *tal que:* $\pi \overset{\times_c}{\rightarrow} \pi'$; $v_\times(\pi')<h$; $|\pi'|<2^{|\pi|}$.

Demonstração # Por indução sobre $|\pi|_{inst}$. Teremos dois casos.

(i) Se $r(\pi)$ é $i\wedge$, ou $i\forall$, ou $i\rightarrow$, ou $e\bot$, ou *cm*, ou $e\wedge$, ou $e\forall$, por *(HI)*.

(ii) Se $r(\pi)$ é $e\rightarrow$, seja π como abaixo:

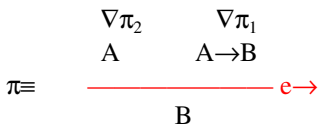


Figura VI-23

Logo, $|\pi|=|\pi_1|+|\pi_2|+1$. Por *(HI)*, existe π'' tal que: $\pi_1 \overset{\times_c}{\rightarrow} \pi_1''$; $\pi_2 \overset{\times_c}{\rightarrow} \pi_2''$; $|\pi_1''|<2^{|\pi_1|}$; $|\pi_2''|<2^{|\pi_2|}$; $v_\times(\pi_1'')<h$; $v_\times(\pi_2'')<h$; $|\pi''|=|\pi_1''|+|\pi_2''|+1$. Pelo Lema VI-8, $v_\times(\pi'')\leq v_\times(\pi)$. Teremos dois subcasos.

(ii.i) Se $v_\times(\pi'')<v_\times(\pi)$, então basta tomar $\pi'\equiv\pi''$, pois $|\pi''|<2^{|\pi_1|}+2^{|\pi_2|}+1\leq 2^{|\pi_1|+|\pi_2|+1}=2^{|\pi|}$.

(ii.ii) Se $v_\times(\pi'')=v_\times(\pi)$, logo existe um *PSM* $<r(\pi''),r>$, para algum r em π'', tal que π'' é $\times$-crítica e é da seguinte forma, onde π_1'' está representada em azul:

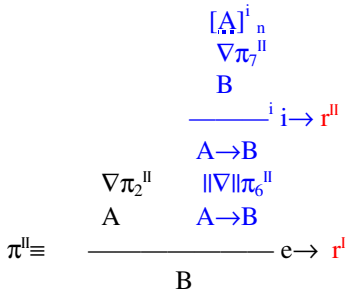


Figura VI-24

Conseqüentemente, $|\pi_1''|\geq 2$. Caso contrário, não haveria este *PSM* em π''. Suponha que $\pi'' \overset{\times_c}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$ sobre $<r(\pi''),r>$. Logo, $|\pi'|=|\pi_1''|+|\pi_2''|+n.(|\pi_2''|-1)+1=|\pi_1''|+(n+1).(|\pi_2''|-1)+2$, onde n é o número de ocorrências topo descartadas pela regra r em π''. Mas $n+1\leq|\pi_1''|$, portanto $|\pi'|\leq|\pi_1''|+|\pi_1''|.(|\pi_2''|-1)+2=|\pi_1''|+|\pi_1''|.|\pi_2''|-|\pi_1''|+2=|\pi_1''|.|\pi_2''|+2$. Lembrando que $|\pi_2''|\geq 1$, $|\pi'|\leq|\pi_1''|.|\pi_2''|.2<2^{|\pi_1|}.2^{|\pi_2|}.2=2^{|\pi_1|+|\pi_2|+1}=2^{|\pi|}$. Além disso, qualquer novo *PSM* terá valor menor ou igual a $v(A)$, mas $v(A)<v(A\rightarrow B)\leq v_\times(\pi)$. *QED*

As **funções hiper-exponenciais** de base n são definidas do seguinte modo: *(i)* $n_{(0)}q=q$; *(ii)* $n_{(p+1)}q=n^{(n_{(p)}q)}$.

Teorema VI-3 - Seja π uma derivação em C' $[\![(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ básico$]\!]$, então existe $\pi^\times$ tal que: $\pi \overset{\times_c}{\rightarrow} \pi^\times$; $\pi^\times$ está em FNE; $|\pi^\times|\leq 2_{(v_\times(\pi))}|\pi|$.

Demonstração # Segue-se por indução em $v_\times(\pi)$, usando o Lema VI-9. QED

Esse teorema demonstra a existência de *FNE* para toda derivação de C', por meio do método de multiplicação das críticas. É, portanto, um teorema de normalização fraca para aquela operação. Além disso, o método estabelece uma cota para o comprimento final da árvore de

derivação em *FNE*. É importante notar, a cota do teorema de normalização fraca para a *FN* de uma derivação em C', segundo o Teorema V-2, será maior que a cota da *FNE* dessa mesma derivação, pois, quando a derivação não está em *FN*, o valor redutivo da derivação é maior que o valor multiplicativo, conforme a demonstração do Lema VI-6, e esses dois valores compõem a função de cotação em cada caso. Na verdade, ao definirmos o valor redutivo de uma derivação, levamos em conta o valor redutivo dos *RDs* e esse valor foi definido como sendo uma unidade maior que o valor da fórmula máxima envolvida no *RD*. Fizemos isso porque no caso das *Uss*, que não têm fórmula máxima, seu valor redutivo foi convencionado como sendo igual a um (*1*). Caso tivéssemos adotado, como valor redutivo dos *RDs* de uma derivação, o valor da sua fórmula máxima, simplesmente, a cota para a *FN* já seria suficiente para cotar as *FNEs*. Mas isso é surpreendente, levando em conta que na multiplicação nenhuma instância/ocorrência de fórmula é eliminada durante a operação.

Corolário VI-3 - A cota para a FN de uma derivação π em C', que não esteja em FN, via método das críticas, é grande o suficiente para comportar um cota para a FNE, obtida por meio da operação de multiplicação, via método das críticas.

A situação é explicável. Ocorre que a cota embutida no procedimento das críticas leva em conta, sempre, o aumento máximo que uma redução na derivação pode produzir, tomando para isso o valor do *RD* de maior complexidade na derivação. Em um certo sentido, a *FNE* de uma derivação merece ser chamada de cota para o pior resultado que pode ser produzido sobre uma derivação, em termos do comprimento do resultado. Jamais, uma redução imediata de um *RD* multiplicativo poderá resultar numa derivação maior que a que resultaria da multiplicação desse mesmo *RD*. Não obstante, o método das críticas adaptada a C' resulta, para as reduções, num valor maior que a cota atribuída ao pior caso de multiplicação. A operação de multiplicação sobre as derivações de C' aumenta o número de ocorrências de fórmulas, de modo a englobar e ultrapassar a expansão de uma redução multiplicativa, sem descartar nenhuma ocorrência de fórmula. É a isso que estamos nomeando de pior aumento. A operação de multiplicação efetua uma separação entre os dois efeitos das reduções: eliminação de instâncias/ocorrências e multiplicação das instâncias/ocorrências.

A seguir, a normalização forte para a multiplicação poderia ser demonstrada, usando, adicionalmente, só a propriedade de confluência, pois o teorema de confluência garantiria a unicidade das *FNEs* e, portanto, valeria a cota obtida via método das críticas para as *FNEs*.

1.2.2. Church-Rosser e Finitude para a Multiplicação

Dados dois *PSMs* distintos em uma derivação, diremos que o *PSM* **pivô** é aquele cuja regra de $i\rightarrow$ está na linha mais à direita da derivação. Caso dois ou mais *PSMs* estejam na mesma linha, será aquele cuja $i\rightarrow$ está mais abaixo nesta linha. Diremos que um *PSM* $<r^{I},r^{II}>$ é **pivô na derivação** π (***PSM(π)***) caso ele seja pivô com respeito a qualquer outro *PSM* distinto em π[299]. Uma **multiplicação imediata via *PSM(π)*** será representada como $\pi \overset{\times_p}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi^{I}$. Por definição, há um único *PSM(π)*, conseqüentemente, haverá sempre uma única seqüência via *PSM(π)*.

Uma seqüência de multiplicação seria maximal, se ela fosse maior ou igual a toda outra seqüência. Subentende-se que ela também deveria ser comparável a toda outra seqüência. Que uma seqüência finita seja maximal implica, intuitivamente, a finitude de toda cadeia de multiplicação. Adiantando um pouco as intuições, a seqüência via *PSM(π)* será uma das seqüências maximais. A seguir, faremos a demonstração de finitude para o processo de multiplicação bem como da unicidade da *FNE*.

Seja $<r^{I},r^{II}>$ o *PSM(π)* como na figura abaixo:

$$\pi\equiv\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\underset{\cdot\cdot}{A}]^{i}\ n}{\nabla\pi_7}\,B}{\overset{i}{\hrulefill}\ i\rightarrow \text{é } r^{II}}\,A\rightarrow B}{\nabla\pi_2\quad \|\nabla\|\pi_6}\quad A\quad A\rightarrow B}{\hrulefill\ e\rightarrow\ \text{é } r^{I}}\,B}{\nabla\pi_5}\,C$$

Figura VI-25

Um *PSM* $<r^{III},r^{IV}>$ qualquer em π, como na figura acima, deveria encaixar-se sob uma das seguintes possibilidades: *(i)* $<r^{III},r^{IV}>$ *é* $<r^{I},r^{II}>$, logo é *PSM(π)*; *(ii)* $<r^{III},r^{IV}>$ está em π_5; *(iii)* $<r^{III},r^{IV}>$ está em π_6; *(iv)* $<r^{III},r^{IV}>$ está em π_2; *(v)* $<r^{III},r^{IV}>$ está em π_7; *(vi)* r^{III} está em π_5 e r^{IV} está em π_7. Nos casos *(ii)* e *(iii)*, as derivações π_5 e π_6 devem ter a forma abaixo e $<r^{III},r^{IV}>$ deve estar em π_8, caso contrário, teríamos outro *PSM(π)*, diferente daquele ilustrado na Figura VI-25:

---

[299] A definição é assemelhada à de *RD* pivô que apresentamos anteriormente.

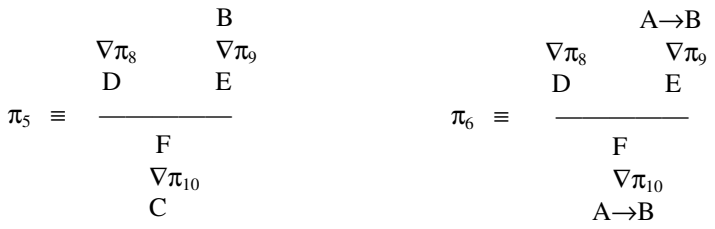


Figura VI-26

Uma multiplicação imediata sobre $<r^{III},r^{IV}>$, nos casos *(ii)*, *(iii)*, *(iv), (v) e (vi)* , resulta numa derivação π' que terá um único resíduo de $<r^{I},r^{II}>$ e esse resíduo será *PSM*(π^{I}), pois o efeito da operação nos casos *(ii)*, *(iii)*, *(iv)*, *(v)* e *(vi)* será local a π_5, π_6, π_2, π_7 e π_7, respectivamente.

Lema VI-10 – (Confluência Local entre a Estratégia Maximal e qualquer outra seqüência de multiplicação) Se $\pi \xrightarrow[i]{\times_p} \pi^{I}$ *e* $\pi \xrightarrow[i]{\times} \pi^{II}$, *tal que* $\pi^{II} \neq \pi^{I}$, *então existe* π^{III} *e existe k tal que* $0<k<|\pi|$ *e tal que* $\pi^{I} \xrightarrow[k]{\times} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \xrightarrow[i]{\times_p} \pi^{III}$.

Demonstração # O número de ocorrências topo descartadas, conforme a Figura VI-25, é $n>0$, caso contrário, não haveria um *PSM*(π). Supondo que $\pi \xrightarrow[i]{\times_p} \pi^{I}$ sobre $<r^{I},r^{II}>$ e $\pi \xrightarrow[i]{\times} \pi^{II}$ sobre $<r^{III},r^{IV}>$, conforme as considerações feitas para as Figura VI-25 e Figura VI-26, estruturalmente existiriam duas situações distintas:

(i) $\pi \xrightarrow[i]{\times} \pi^{II}$ via $\pi_2 \xrightarrow[i]{\times} \pi_2^{II}$, logo $\pi^{I} \xrightarrow[n+1]{\times} \pi^{III}$ (sobre as diferentes cópias de π_2 em π^{I}) e $\pi^{II} \xrightarrow[i]{\times_p} \pi^{III}$, nesse caso $k=n+1$, logo $k>0$.

(ii) $\pi \xrightarrow[i]{\times} \pi^{II}$ via $\pi_6 \xrightarrow[i]{\times} \pi_6^{II}$, ou via $\pi_5 \xrightarrow[i]{\times} \pi_5^{II}$, ou via $\pi_7 \xrightarrow[i]{\times} \pi_7^{II}$, ou via um *PSM* cuja regra de $e\rightarrow$ está em π_5 e cuja regra de $i\rightarrow$ está em π_7, em todos esses casos $\pi^{I} \xrightarrow[i]{\times} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \xrightarrow[i]{\times_p} \pi^{III}$, tal que $k=1$. *QED*

Lema VI-11 - Se $\pi \xrightarrow[\leq i]{\times_p} \pi^{I}$ *e* $\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}$, *então existe* π^{III} *tal que* $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \xrightarrow[\leq i]{\times_p} \pi^{III}$.

Demonstração # A prova é por indução sobre o comprimento de $\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}$, ou seja sobre $|\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}|$. O caso $|\pi \xrightarrow[\leq i]{\times_p} \pi^{I}|=0$ é trivial. Suponhamos que $|\pi \xrightarrow[\leq i]{\times_p} \pi^{I}|=1$. A seguir, temos dois casos.

(i) Suponha que $|\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}| \leq 1$, teremos dois subcasos.

(i.i) Se $\pi^{II} \equiv \pi^{I}$, trivial, pois $\pi^{II} \equiv \pi^{I} \equiv \pi^{III}$.

(i.ii) Se $\pi^{II} \neq \pi^{I}$, então conforme o Lema VI-10.

(ii) Suponha que $|\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}| > 1$, logo $\pi \underset{m-1}{\xrightarrow{\times}} \pi^{IV} \underset{i}{\xrightarrow{\times}} \pi^{II}$, para algum *m*, e, por (*HI*), existe π^{V} tal que $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{V}$ e $\pi^{IV} \underset{\leq i}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{V}$. De novo dois casos.

(ii.i) Se $\pi^{II} \equiv \pi^{V}$, trivial, pois $\pi^{II} \equiv \pi^{V} \equiv \pi^{III}$.

(ii.ii) Se $\pi^{II} \neq \pi^{V}$, então, pelo Lema VI-10, existe π^{III} tal que $\pi^{V} \xrightarrow{\times} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{\leq i}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{III}$, basta observar que $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{V} \xrightarrow{\times} \pi^{III}$. *QED*

Teorema VI-4 – (Confluência entre uma seqüência de multiplicação qualquer para π e um segmento finito qualquer da seqüência PSM(π)) Se $\pi \underset{m}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{I}$ e $\pi \xrightarrow{\times} \pi^{II}$, para m>0, então existe π^{III} tal que $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{III}$ e $\pi^{II} \underset{\leq m}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{III}$.

Demonstração # Por indução em *m*, usando o Lema VI-11.

Corolário VI-4 - (Uma derivação qualquer, que seja resultante de uma cadeia finita de multiplicações de PSMs pivô, é sempre menor ou igual a uma derivação em FNE obtida via seqüência das críticas) Se $\pi \underset{n}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{I}$ e $\pi \xrightarrow{\times_c} \pi^{X}$, tal que π^{X} esteja em FNE, então $|\pi| \leq |\pi^{I}| \leq |\pi^{X}|$.

Demonstração # Pelo Lema VI-5, se $\pi \xrightarrow{\times_p} \pi^{I}$, então $|\pi| \leq |\pi^{I}|$. Como π^{X} está em *FNE*, pelo Teorema VI-4, existe π^{III} tal que $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{III}$ e $\pi^{X} \underset{\leq n}{\xrightarrow{\times_p}} \pi^{III}$. Logo, $\pi^{III} \equiv \pi^{X}$, ou seja, $\pi^{I} \xrightarrow{\times} \pi^{X}$. Portanto, $|\pi^{I}| \leq |\pi^{X}|$, pelo Lema VI-5. *QED*

Corolário VI-5 - A seqüência de multiplicação dos PSMs pivô é finita.

Demonstração # Só há um caso de multiplicação imediata em que a derivação resultante tem o mesmo comprimento que a derivação original: quando, tomando por base a Figura VI-25, π_2 tem uma única ocorrência. Em uma multiplicação, quando o número de instâncias é mantido, o número de *PSMs* da derivação diminui. Assim, considerando o comprimento da derivação como um nível, é impossível uma cadeia infinita de multiplicações no mesmo nível, pois o número de *PSMs* é finito. Por outro lado, cada aumento de nível é uma aproximação da cota máxima, pois, segundo o Corolário V-5, o comprimento da *FNE* obtida pela seqüência das críticas é uma cota para o comprimento de todas as derivações da seqüência que só reduz os *PSMs* pivô.

Conseqüentemente, é impossível uma infinidade de aumentos de nível. Por conseguinte, a seqüência de multiplicação de pivôs na derivação é finita. *QED*

Chamaremos essa seqüência de multiplicações, via *PSMs* pivô da derivação, de **a pior seqüência de multiplicação**. Adiante, mostramos que de fato ela é maximal.

Corolário VI-6 - (Church-Rosser) Se $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{I}$ *e* $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{II}$*, então existe* π^{III} *tal que* $\pi^{I} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{III}$ *e* $\pi^{II} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{III}$.

Demonstração # Por indução em $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{X}|$. Base $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{X}|=0$ trivial. Passo indutivo, suponha que $\pi \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^{IV} \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{X}$.

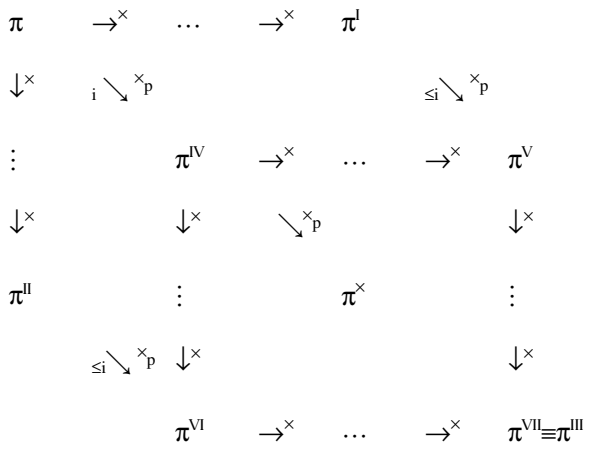


Figura VI-27[300]

Logo, pelo Teorema VI-4, existe π^{V} tal que $\pi^{I} \underset{\leq i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^{V}$ e $\pi^{IV} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{V}$, assim como, existe π^{VI} tal que $\pi^{II} \underset{\leq i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^{VI}$ e $\pi^{IV} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VI}$. Por *(HI)*, notando que $|\pi^{IV} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{X}| < |\pi \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^{IV} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{X}|$, existe π^{VII} tal que $\pi^{V} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VII}$ e $\pi^{VI} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VII}$. Mas, claramente, $\pi^{I} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{V} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VII}$ e $\pi^{II} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VI} \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{VII}$, basta fazer $\pi^{III} \equiv \pi^{VII}$. *QED*

Assim, temos unicidade da *FNE*. Portanto, a cota, apresentada no Teorema VI-3, é uma cota para a única *FNE*. A cota da *FNE* de π será cota para a *FN* de π, pois, no Teorema VI-1, foi mostrado que qualquer redução imediata para uma derivação em *FNE* resulta outra *FNE* de menor complexidade, quanto ao número de ocorrências/instâncias. Outros resultados ainda estão por vir, embora aqueles resultados recém-mencionados sejam auspiciosos. Está ao alcance da

---

[300] O quadro em vermelho é dado por *(HI)*.

mão uma demonstração de normalização forte para a multiplicação.

Demonstra-se normalização forte, para a multiplicação, mostrando que toda seqüência é finita. Há múltiplas formas de fazer isso. Aquela, abaixo, permitirá, adicionalmente, dizer que a pior seqüência é maximal.

Teorema VI-5 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$, *então* $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| > |\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x|$. *(o comprimento da pior seqüência para* π *é maior que o da pior seqüência para* π'*)*

Demonstração # Por indução em $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x|$.

(i) Se $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = 1$, logo há um único *PSM* em π tal que sua multiplicação não gera novos *PSMs*. Conseqüentemente, π' está em *FNE*. Portanto, $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| > |\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = 0$.

(ii) Suponha que $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = m > 1$, ou seja, $\pi \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'' \underset{m-1}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^x$. Se $\pi'' \equiv \pi'$, é imediato. Se $\pi'' \neq \pi'$, pelo Lema VI-10, existe π''' e existe $k>0$ tal que $\pi' \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \underset{k}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'''$. Dado que $|\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = m-1$, basta aplicar k vezes a *(HI)*, de tal forma que resultará uma cadeia de desigualdades:

$$|\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| > \ldots > |\pi''' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x|$$

Na pior das hipóteses, $k=1$. Conseqüentemente, $|\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| > |\pi''' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x|$. Mas $|\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = |\pi''' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| + 1$ e $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = |\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| + 1$. Logo, $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| > |\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x|$. *QED*

Corolário VI-7 - Não há nenhuma seqüência de multiplicação que não seja finita.

Demonstração # Dada uma derivação qualquer π tal que $\pi \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$, pelo Corolário VI-5, existem números naturais m e p tal que $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = m$ e $|\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^x| = p$. Mas, pelo Teorema VI-5 $p<m$. Conseqüentemente, é impossível uma cadeia infinita de multiplicações, pois é impossível uma cadeia descendente infinita de números naturais. *QED*

Corolário VI-8 - Normalização forte para multiplicação.

Demonstração # A partir dos Corolário VI-6 e Corolário VI-7.

Corolário VI-9 - (a pior seqüência é maximal) Se $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}$ *e* $\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}$, *então* $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}| \leq |\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}|$.

Demonstração # Por indução em $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}|$.

(i) Se $|\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}|=0$, logo $\pi \equiv \pi^{\times}$, imediato.

(ii) Suponha que $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi' \overset{\times}{\underset{n-1}{\rightarrow}} \pi^{\times}$. Por *(HI)*, $|\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}| \geq |\pi' \overset{\times}{\underset{n-1}{\rightarrow}} \pi^{\times}|$. Pelo Teorema VI-5, $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}| > |\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}|$. Conseqüentemente, $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}| \geq |\pi \overset{\times}{\underset{n}{\rightarrow}} \pi^{\times}|$. *QED*

1.2.3. A Estrutura da Prova de Normalização Forte para a Multiplicação

Teceremos alguns comentários acerca das provas, a seguir. A seqüência de resultados apresentada toma a seguinte ordem. Principiamos provando normalização fraca para a operação de multiplicação com cota para a *FNE*, usando para isso a estratégia das críticas. Posteriormente, definimos uma cadeia distinguida de multiplicação, que mais tarde se revelou ser maximal. Chamamos essa cadeia de **a pior cadeia de multiplicação**. Mostramos, em seguida, que a pior cadeia é comparável com quaisquer cadeias de multiplicação, em particular com a cadeia das críticas, pois provamos confluência entre a pior cadeia e qualquer outra cadeia. Dessa forma, a cota para o comprimento da *FNE*, obtida via cadeia crítica, pode ser usada como cota para a pior cadeia. Daqui segue-se a finitude da pior cadeia. No entanto, até esse momento não sabíamos se aquilo que estamos chamando de a pior cadeia é maior ou igual a qualquer outra cadeia. Como mostramos a finitude da pior cadeia finita, o próximo passo é usar o seu comprimento como variável de indução para provar Church-Rosser, dessa feita para quaisquer duas cadeias. Assim, na seqüência de provas acima provamos confluência duas vezes, se bem que a segunda prova é subsidiária da primeira, e por isso pôde ser tão simplificada. Em seguida, provamos que o comprimento da pior cadeia é um ordinal natural para a operação de multiplicação e, em conseqüência, que todas as cadeias são finitas. Só no fim, fica provado que a pior cadeia é de fato maximal.

1.2.4. Valor de Indução

Na prova do teorema de Church-Rosser, o valor do comprimento da pior cadeia de

multiplicação foi usado como variável de indução na construção da prova. Intuitivamente, costumamos associar o valor de indução com uma propriedade característica da definição indutiva do objeto formal sob exame. Mas isso não é necessário. Se garantirmos a associação entre um determinado resultado numérico com os objetos formais definidos indutivamente, esse resultado numérico poderá ser utilizado como variável de indução, na medida em que os procedimentos para sua obtenção sejam considerados calculáveis, em princípio, e na medida em que possamos hierarquizar o resultado desses cálculos. No caso do comprimento da pior seqüência, em geral, não podemos esperar poder calcular concretamente o valor desse comprimento, visto que as funções de cota envolvidas são de ordem hiper-exponencial. No entanto, foi mostrado que cada operação de multiplicação reduz o valor dessa variável de indução de pelo menos uma unidade e foi mostrado que esse valor de indução pode ser cotado. Essas são garantias suficientes para que o referido valor possa ser usado como variável de indução.

2. Conseqüências da Operação de Expansão

Com base nos resultados do capítulo precedente, algumas conseqüências da operação de expansão serão apresentadas a seguir. Em primeiro lugar, será apresentada a demonstração de normalização forte para $\mathcal{C}'$. Em seguida, serão examinadas e comparadas certas cotas hiper-exponenciais para o fragmento implicacional da lógica minimal $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ na literatura − as de Troelstra e Schwichtenberg, por um lado, e a de Beckmann, por outro − com as cotas obtidas das considerações acima, lembrando que $\mathcal{M}_{\rightarrow} \subset \mathcal{C}'$. Por fim, consideraremos a possibilidade de oferecer cotas que não dependam do valor das fórmulas, adaptando para dedução natural algumas idéias que Orevkov havia elaborado para o cálculo de seqüentes. para o fragmento implicacional da lógica minimal $\mathcal{M}_{\rightarrow}$.

2.1. Normalização Forte para $\mathcal{C}'$

Como conseqüência da operação de expansão introduzida, segue-se, imediatamente, a demonstração de Church-Rosser e finitude para toda cadeia de reduções de derivações em $\mathcal{C}'$, ou seja, normalização forte. Para esse sistema, já foi demonstrada a confluência local através do Teorema V-6 e também a normalização fraca com cota para o comprimento das cadeias, via estratégia de redução das críticas no Teorema V-2.

Uma das vias para fazer a demonstração de normalização forte poderia consistir em mostrar que a seqüência definida como a pior seqüência de redução, no capítulo anterior, é

sempre finita.[301] Mas, dados os resultados dos capítulos anteriores, é possível empregar uma via mais simples. Na verdade, toda dificuldade na prova normalização forte está em encontrar um valor de indução adequado, tal que cada redução imediata sobre uma derivação resulte um decréscimo nesse valor. Se estivéssemos de posse de um valor dessa natureza, obteríamos, em seguida, a finitude de toda cadeia de redução. Adicionalmente, dado que a propriedade de confluência local já está estabelecida por uma análise de combinações, uma indução sobre essa mesma variável resultaria o teorema de Church-Rosser para as derivações.

Efetivamente, o comprimento da *FNE* de π pode ser usado como valor de indução para as referidas provas. A normalização forte com cota para a operação de multiplicação já está provada. Também já está provada a identidade operacional local para as derivações envolvidas em uma multiplicação imediata, embora a identidade operacional geral (não-local) não esteja.

A seguir provamos a confluência local entre uma redução imediata qualquer e uma multiplicação imediata via a pior seqüência de multiplicação.

Lema VI-12 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$ *e* $\pi \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi''$*, então existe* π''' *tal que* $\pi' \underset{\leq i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ *e* $\pi'' \underset{\leq n+1}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$*, onde n>0 é o número de ocorrências topo descartadas pela* $i\rightarrow$ *envolvida no PSM multiplicado.*

Demonstração # Sejam π e π'' como abaixo, onde estão destacados o *PSM*(π) $<r', r''>$ e o *PS* resíduo em π'' $<r''', r^{IV}>$:

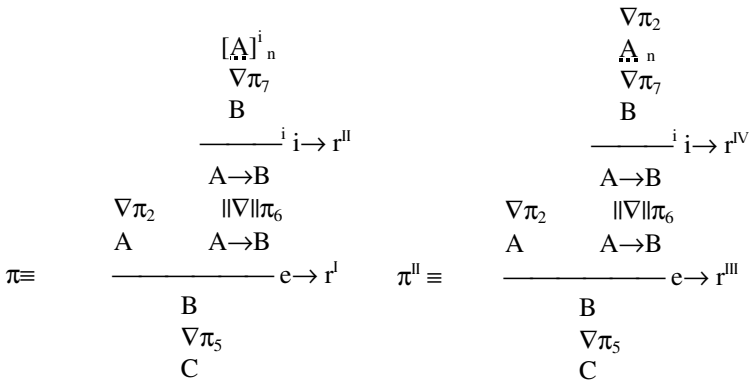


Figura VI-28

A redução $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$ pode ter sido efetuada em π_2, ou π_7, ou π_6, ou π_5, ou ainda sobre o *PSM*(π) $<r', r''>$ se ele fosse um *RD*, caso no qual π_6 seria uma subderivação vazia. Temos vários casos.

---

[301] Como havíamos dito, Massi [Mas90], cap. 7, havia provado que, para qualquer redução imediata, diminuiria o comprimento da seqüência e que, além disso, toda outra seqüência confluiria para ela, na hipótese dessa seqüência ser de fato finita. Alves [Alv99], cap. 2, mostrou uma forma de assegurar a finitude dessa seqüência com base em uma operação de expansão ligeiramente distinta da multiplicação que definimos mais acima.

(i) Se foi em π_2, existe π''' tal que $\pi' \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \underset{n+1}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$, pois o *PSM($\pi'$)* será resíduo do *PSM($\pi$)*.

(ii) Se foi em π_7, existem duas possibilidades, ou a redução elimina todas as *n* ocorrências topo descartadas pela regra de $i\rightarrow$ do *PSM(π)*, ou resta pelo menos uma ocorrência. Se não resta, então basta tomar $\pi'''\equiv\pi'$. Se resta, existe π''' tal que $\pi' \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$, pois o *PSM($\pi'$)* será resíduo do *PSM($\pi$)*.

(iii) Se foi em π_6, existem três possibilidades. Ou a redução envolvia um *RD* sobre o segmento simétrico, ou o *RD* está em uma linha mais à esquerda da linha que contém o segmento simétrico, ou o *RD* está em uma linha mais à direita da linha que contém o segmento simétrico. Começando por esse último caso, o *RD* só poderia ser não-multiplicativo. Caso contrário, teríamos outro *PSM(π)* e a redução afetaria π_6, sem afetar o segmento simétrico. Se o *RD* reduzido está no segmento simétrico, então ele é um *RD* não-multiplicativo. Caso contrário, $<r',r''>$ não seria *PSM(π)*. Nesse caso, a redução afeta π_6 eliminando duas instâncias do segmento simétrico. Por fim, se foi em uma linha mais à esquerda, então novamente a redução afeta π_6, sem afetar o segmento simétrico. Nos três casos, portanto, existe π''', tal que $\pi' \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PSM(π')* e $\pi'' \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$, já que o *PSM($\pi'$)* é resíduo do *PSM($\pi$)*.

(iv) Se foi em π_5 e o *RD* está um em uma linha mais à direita que o *PSM(π)*, ou mais abaixo na mesma linha que o *PSM(π)*, então o *RD* é não-multiplicativo. Caso contrário, $<r',r''>$ não seria *PSM(π)*. Nesse caso, a redução poderia eliminar o par multiplicativo $<r',r''>$. Se não elimina, então o *PSM(π')* é resíduo do *PSM(π)*. A última alternativa é a de que o *RD* esteja em uma linha mais à esquerda, nessa situação a redução afeta somente π_5. Logo, em qualquer situação existe π''' tal que $\pi' \underset{\leq i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$,

(v) Se a redução foi sobre o *PSM(π)*, $\pi'''\equiv\pi'$ e $\pi'' \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$. *QED*

O teorema a seguir estabelece que o comprimento da *FNE*, de uma derivação π qualquer, é um valor de indução adequado para as operações de redução, lembrando que esse valor é cotável.

Teorema VI-6 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'$, *então* $\pi^{\times} \underset{\geq i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'^{\times}$, *tal que:* $\pi^{\times}$ *e* $\pi'^{\times}$ *estão em FNE;* $\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}$; $\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'^{\times}$; $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}| \geq |\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'^{\times}|$; $|\pi^{\times}| > |\pi'^{\times}|$; $|\pi^{\times}| \geq |\pi|$; $|\pi'^{\times}| \geq |\pi'|$.

Demonstração # Por indução em $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}|$.

(i) Se $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}|=0$, $\pi \equiv \pi^{\times}$ e, por conseguinte, $\pi' \equiv \pi'^{\times}$. Logo, segundo o Teorema VI-1, as conseqüências do enunciado são imediatas.

(ii) Suponha que $|\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}|=m \geq 1$, ou seja, $\pi \underset{i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'' \underset{m-1}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi^{\times}$. Pelo Lema VI-12, existe π''' tal que $\pi' \underset{\leq i}{\overset{\times_p}{\rightarrow}} \pi'''$ e $\pi'' \underset{\leq p+1}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$, onde p é um número natural. Aplicando *(HI)*, no máximo $p+1$ vezes, em $\pi'' \underset{\leq p+1}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''$, demonstra-se que $\pi'^{\times} \underset{q}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi'''^{\times}$ tal que: $q \geq 1$; $\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'^{\times}$; $\pi''' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'''^{\times}$; $|\pi'' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'^{\times}| \geq |\pi''' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'''^{\times}|$; $|\pi^{\times}| > |\pi'^{\times}|$; $\pi'^{\times}$ e $\pi'''^{\times}$ estão em *FNE*. Dado que $\pi'^{\times} \equiv \pi^{\times}$, basta fazer $\pi'^{\times} \equiv \pi'''^{\times}$. *QED*

Corolário VI-10 - Para toda derivação em $\mathcal{C}'$ $[\![(\mathcal{B}), \mathcal{B}$ *básico*$]\!]$, *qualquer seqüência de redução é finita.*

Demonstração # Pelo Teorema VI-6, para uma derivação qualquer π o valor $|\pi^{\times}|$ será um valor de indução, onde $\pi^{\times}$ é a *FNE* de π. *QED*

Qualquer passo de redução sobre $\pi^{\times}$ diminui o comprimento dessa derivação e para qualquer *RD* em π haverá um único *RD* correspondente em $\pi^{\times}$. Essa variável de indução não implica somente a finitude para a pior seqüência de redução, implica também a finitude de toda seqüência. Assim, como a finitude da pior seqüência de redução depende do comprimento das *FNEs*, esse comprimento deve ser considerado como um valor de indução fundamental para demonstrações envolvendo a normalização e a confluência.

Corolário VI-11 - Se $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$, *então* $\pi^{\times} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'^{\times}$, *tal que:* $\pi \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi^{\times}$; $\pi' \overset{\times_p}{\rightarrow} \pi'^{\times}$; $|\pi^{\times}| \geq |\pi'^{\times}| \geq |\pi'|$.

Demonstração # Por indução sobre $|\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'|$ usando o Teorema VI-6. *QED*

A propriedade de Church-Rosser é provada com base no teorema de confluência local,

Teorema V-6, usando o comprimento das *FNEs* como valor de indução.[302]

Teorema VI-7 - (Church-Rosser) Se $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ *e* $\pi \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$*, então existe* π'''*, tal que* $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''$ *e* $\pi'' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'''$.

Demonstração # Por indução em $|\pi^{\times}|$, onde $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}$.[303]

(i) Se $|\pi^{\times}|=1$, então $\pi^{\times} \equiv \pi \equiv \pi' \equiv \pi'' \equiv \pi'''$.

(ii) Suponha que $|\pi^{\times}|=m$. Se $\pi \equiv \pi'$, ou $\pi \equiv \pi''$, ou $\pi'' \equiv \pi'$, é imediato. Suponha que não ocorre nenhum desses casos, tal que $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{IV} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi'$ e $\pi \underset{i}{\overset{\triangleright}{\rightarrow}} \pi^{V} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi''$. Por confluência local para C', existe π^{VI} tal que $\pi^{IV} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VI}$ e $\pi^{V} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VI}$. Mas $|\pi^{IV\times}|$,$|\pi^{V\times}|$ e $|\pi^{VI\times}|$ *são menores que m*, pelo Teorema VI-6. Por *(HI)*, existe π^{VII} tal que $\pi' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII}$ e $\pi^{VI} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII}$. Conseqüentemente, $\pi^{V} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VII}$. Novamente, por *(HI)*, existe π^{VIII} tal que $\pi'' \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VIII}$ e $\pi^{VII} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{VIII}$. Basta tomar $\pi''' \equiv \pi^{VIII}$. *QED*

A partir da finitude de toda cadeia de redução e de Church-Rosser, está demonstrada a normalização forte para C'. Como foi possível constatar, o conceito de a pior seqüência de redução pode ser dispensado, se bem que um conceito similar foi usado nas operação de multiplicação. Isso não significa que o conceito de a pior seqüência, envolvendo operações de redução, não possa ter várias aplicações, inclusive heurísticas, em outras situações.[304]

Ao ouvir uma explicação acerca do funcionamento da prova por indução, não é incomum que se diga que por meio dela estaria sendo estabelecida a validade de uma determinada propriedade para um âmbito de objetos definido indutivamente, de tal forma que a validade da propriedade é mostrada em "camadas": primeiro, a validade para a camada básica de objetos; segundo, a validade para uma camada qualquer de objetos que tenha sido obtida de uma camada anterior de objetos para os quais valia a propriedade. No entanto, nem sempre o valor de indução usado na prova corresponde estritamente às "camadas" de definição indutiva do âmbito de

---

[302] Em relação à pior seqüência de redução definida por Massi, isso significa que podemos dispensar o conceito de a pior seqüência de redução, aproveitando unicamente aquela parte da maquinaria contida na prova de que a pior seqüência é maior ou igual que qualquer outra seqüência. Justamente essa maquinaria é aquela que envolve o exame combinatorial contido na prova de confluência local do capítulo anterior.

[303] Como vale normalização forte para as multiplicações, não importa qual cadeia nos leva de uma derivação a sua *FNE*.

[304] Para uma demonstração da comparabilidade de toda seqüência de redução com a pior seqüência sugerimos que o leitor dirija-se a Tese de Doutoramento de Massi. No entanto, a parcela mais importante da combinatória envolvida nessa prova está presente na prova de confluência local no Capítulo V.

objetos. Esse é o caso da prova de normalização forte para C', que usa o comprimento das *FNEs* como valor de indução. As derivações em *FNE* são uma parte própria das derivações, portanto, não constituem todo o âmbito de objetos definido indutivamente. A prova de normalização forte aplica-se a todas as derivações, a todo âmbito indutivo, mas a indução feita nessa prova não leva em conta as camadas de objetos desse âmbito. Leva em conta apenas certas classes de equivalência sobre esse âmbito. O comprimento das *FNEs* é um valor de indução tão bom quanto outro qualquer. No caso da normalização por indução sobre o comprimento das *FNEs*, é preciso observar a seguinte propriedade. Há um procedimento de expansão efetivo que associa qualquer derivação π a sua *FNE*, que é única, embora esse processo possa ser hiper-exponencialmente complexo. Logo, o procedimento oferece um critério de decisão que determinaria quando uma derivação π' é a *FNE* de uma derivação π. Como todas as derivações são finitas e há uma cota ao comprimento das *FNEs*, o comprimento dessas derivações pode ser usado como valor de indução para as reduções redução, pois qualquer redução resulta uma derivação cuja *FNE* será menor que a *FNE* da derivação anterior.

Teorema VI-8 - Seja π uma derivação qualquer em C'. Logo, $\pi^{\times} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{\triangleright}$ e $|\pi^{\triangleright}| \leq |\pi^{\times}|$, onde $\pi^{\times}$ e $\pi^{\triangleright}$ são a FNE e a FN de π, respectivamente.

Demonstração # A partir do Teorema VI-7, a derivação $\pi^{\triangleright}$, ou seja, a *FN* de π, será única. Assim, tomando uma cadeia qualquer de redução à *FN*, que será sempre finita segundo o Corolário VI-10, pelo Teorema VI-6, concluímos que $\pi^{\times} \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^{\triangleright\times}$ e, como $\pi^{\triangleright\times} \equiv \pi^{\triangleright}$, teremos $|\pi^{\triangleright}| \leq |\pi^{\times}|$, pelo Teorema VI-1. *QED*

2.2. Cotas para a *FN* e para a Seqüência de Redução

Uma das conseqüências importantes, que decorria da nossa exposição, era a de que a cota via reduções críticas, apresentada no Capítulo V, para o comprimento da *FN* de uma derivação, é em geral maior que a cota via multiplicação dos *PSMs* críticos para o comprimento da *FNE* da derivação, no caso do sistema C'. Ou seja, como o conceito de multiplicação sobre uma derivação é o que podemos chamar de pior aumento que podemos efetuar sobre uma derivação, mais do que qualquer redução, então as cotas para a *FN* são demasiadamente grandes.

No que segue, examinaremos algumas formas alternativas de tomar medidas sobre as derivações bem como as cotas que resultam dessas medições. Definimos a função $\boldsymbol{max\{n_1,...,n_m\}}$ como o maior valor dentre os valores $n_1,...,n_m$, como é usual. Essa função será utilizada a seguir.

2.3. Cotas no Fragmento $\mathcal{M}_{\rightarrow}$

O fragmento implicacional da lógica minimal, ou seja, aquele sistema no qual só estão presentes as regras de $i\rightarrow$ e $e\rightarrow$, também é fragmento de C'. Dessa forma, todos os resultados apresentados até aqui são aplicáveis a esse fragmento. O sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ está estreitamente correlacionado ao λ-cálculo com tipos simples, de forma que os mesmos resultados obtidos são transladáveis a esse sistema. Na presente tese, não dedicaremos nossa atenção ao λ-cálculo propriamente. Transladaremos os resultados que queremos comentar para o sistema de dedução natural. Da mesma forma, aqueles que quiserem obter os resultados que apresentaremos para dedução natural devem transladá-los para o λ-cálculo com tipos simples.

Nesta secção, todas as referências às derivações estarão subentendendo o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$.

Abaixo, analisaremos uma cota para derivações em *FN* de $\mathcal{M}_{\rightarrow}$. Essa cota leva em conta o comprimento da maior linha de uma derivação e não o comprimento da derivação. Uma análise deste tipo é efetuada por Troelstra & Schwichtenberg ([Tro96], cap. 6, secção 6.7) e, também, por Beckmann [Bec01], que, adicionalmente, dá uma cota para o comprimento da seqüência maximal[305].

A **altura de uma derivação** π ($\updownarrow(\pi)$) será o comprimento da maior linha de uma derivação menos *1* (um), o que vem a ser o mesmo que contar o comprimento da maior linha da árvore de derivação excetuando as instâncias de lançamento de hipóteses, ou ainda, o comprimento da maior linha de ocorrências menos *1*. O comprimento de uma derivação qualquer e sua altura estão correlacionadas da seguinte forma, no sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$. Tomando por base a altura, $|\pi|\leq 2^{\updownarrow(\pi)}$. Conforme o Capítulo V, se $\pi^{\triangleright}$ é a *FN* de π, $|\pi^{\triangleright}|\leq 2_{(v_{\triangleright}(\pi))}|\pi| = 2_{(v_{\triangleright}(\pi))}(2^{\updownarrow(\pi)}) = 2_{(v_{\triangleright}(\pi)+1)}\updownarrow(\pi)$. Ao reverso, tomando o comprimento, a cota para a altura máxima da derivação será $\updownarrow(\pi)\leq|\pi|_{inst.}<|\pi|$. Conseqüentemente, vale a seguinte cota para a altura da *FN*: $\updownarrow(\pi^{\triangleright})\leq|\pi^{\triangleright}|_{inst.}<|\pi^{\triangleright}|\leq 2_{(v_{\triangleright}(\pi)+1)}\updownarrow(\pi)$. Essas cotas surgem de modo imediato das considerações que já fizemos. Todavia, ainda podemos examinar o assunto mais minuciosamente.

Com respeito ao efeito que as distintas operações podem ter sobre a altura de uma árvore de derivação, observamos que uma redução imediata tanto pode aumentar a altura, mantê-la igual, ou diminuí-la. Para as *FNEs*, ou mantêm igual ou diminui.

---

[305] Nos dois casos, a investigação foi originalmente desenvolvida para o λ-cálculo com tipos simples. A exposição a seguir translada os resultados dessas investigações para dedução natural.

Essa definição de altura que acabamos de apresentar corresponde às medidas empregadas para aquilo que transladado seria uma derivação correspondente ao λ-termo, tanto em [Tro96] (pág. 8) quanto em [Bec01].

Com respeito à outra medida tomada sobre as derivações, aquela que leva em conta a estrutura lógica das ocorrências de fórmulas na derivação – que em nosso caso estamos designando de modo ambíguo como *valor* -, em [Tro96] (pág. 8) ela corresponde ao que estamos chamando de *profundidade*, conforme a definição do Apêndice. Já que o conceito de valor que adotamos tanto pode ser substituído pelo grau quanto pela profundidade das fórmulas, a definição do valor redutivo de uma derivação poderá ser entendida como a profundidade redutiva dessa derivação. Adicionalmente, como o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ não contém regra *cm*, o valor redutivo dos *RDs* poderia ter sido dado diretamente pelo valor da fórmula máxima envolvida no *RD*.

Devemos lembrar que na definição do valor redutivo de um *RD* adicionávamos *1* (um) ao valor da fórmula máxima, por causa dos *RDs* que envolviam a regra *cm* (as *Uss* são sempre de valor *1* (um)). Se fizermos a alteração na forma de obter a profundidade, sem somar aquela unidade, a **profundidade redutiva de uma derivação** será, dessa forma, idêntica ao conceito de **grau de corte de uma derivação** presente em [Tro96] (pág. 161)[306]. Em [Bec01], por outro lado, são usadas medidas um pouco distintas. Lá, o **nível de uma fórmula**[307] *A* (***lv(A)***) é dado conforme a seguinte definição:

(i) se *A* é atômica, então $lv(A)=0$;

(ii) $lv(A \rightarrow B)=max\{lv(A)+1,lv(B)\}$.

Observe que, segundo essa definição, o nível de uma fórmula que é conclusão de uma regra $i\rightarrow$ pode ser o mesmo da premissa imediata, diferentemente da profundidade, que sempre aumenta de pelo menos uma unidade, conforme observação anterior. Por exemplo, para *A* e *B* básicos, $lv(A \rightarrow B)=1$, $lv(A \rightarrow (A \rightarrow B))=1$, $lv(A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B)))=1$, etc. O **nível de uma derivação** π (***lv(*** π***)***) é o máximo dos níveis das subderivações de π.[308] Isso significa que o nível de uma derivação é o maior dos níveis das suas ocorrências. Esse valor é diferente da profundidade de uma derivação, pois para determinar a profundidade da derivação é preciso determinar a profundidade de todos os *RDs* e delas adotar a maximal. Para comparação[309], $p(A \rightarrow B)=1$,

---

[306] Pág. 161. O *cutrank* de uma derivação é identificado como o maior valor de profundidade das fórmulas de corte contidas na derivação.

[307] Mais especificamente o nível de um tipo, no artigo original.

[308] Na verdade, o autor vai chamar de *grau de uma derivação*, [Bec01], pág. 2, isso que agora estamos chamando de *nível da derivação*, mas, por uniformidade, preferimos manter o termo *nível*, já que esse valor é obtido a partir do nível das fórmulas.

[309] Lembramos que $p(A)$ é a profundidade da fórmula *A*, conforme o Apêndice.

$p(A\to(A\to B))=2$, $p(A\to(A\to(A\to B)))=3$. Para ilustração, considere as seguintes derivações e os valores que obteríamos para o grau redutivo e a profundidade redutiva (sem adição daquela unidade):

$$\pi\equiv\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to B}{A\to(A\to B)}\,i\to}{A\to(A\to(A\to B))}\,i\to \qquad \pi'\equiv\dfrac{A \quad \dfrac{A \quad \dfrac{\dfrac{A\to B}{A\to(A\to B)}\,i\to}{A\to(A\to(A\to B))}\,e\to}{A\to(A\to B)}\,e\to}{B}\,e\to$$

Figura VI-29

Nesse caso, teremos $v_{\triangleright}(\pi)=g_{\triangleright}(\pi)=p_{\triangleright}(\pi)=0$ e $lv(\pi)=1$, por um lado, $v_{\triangleright}(\pi')=g_{\triangleright}(\pi')=p_{\triangleright}(\pi')=3$ *e* $lv(\pi')=1$, por outro.

Beckmann usa também outra medida para o comprimento da derivação, uma medida que seria mais ou menos equivalente a contar o número de regras de $i\to$ somado ao número instâncias de lançamento de hipóteses. Esse valor ($|\pi|_{i\to}$) é definido indutivamente como se segue:

(i) se π é uma derivação com uma única ocorrência, então $|\pi|_{i\to}=1$;

(ii) se $r(\pi)$ é $i\to$ e π_1 é a subderivação da *pM* de $r(\pi)$, então $|\pi|_{i\to}=|\pi_1|_{i\to}+1$;

(iii) se $r(\pi)$ é $e\to$, π_1 e π_2 são as subderivações das *pM* e *pm* de $r(\pi)$, então $|\pi|_{i\to}=|\pi_1|_{i\to}+|\pi_2|_{i\to}$.

Essa medida é interessante. Na literatura, o conceito de derivação canônica está associado basicamente às regras de introdução. As derivações canônicas só conteriam regras atômicas e regras de introdução de constantes lógicas. A medida acima captura o número de regras de introdução mais o número de ocorrências topo da derivação. Portanto, seria praticamente uma forma de medir o comprimento canônico das derivações. Como veremos, essa medida de comprimento tem propriedades similares à medida de comprimento para derivações que temos estado usando neste trabalho.

Por fim, levando em conta que o objetivo de Beckmann é o de cotar as seqüências de redução maximais, o autor representa o valor do comprimento da seqüência maximal por $d(\pi)$.[310]

Lema VI-13 - Se π *está em FNE e* $\pi\overset{\triangleright}{\to}\pi'$, *então* $\updownarrow(\pi)\geq\updownarrow(\pi')$ *e* $|\pi|_{i\to}>|\pi'|_{i\to}$.

[310] Na verdade, considerando a árvore resultante de todas as seqüências de redução para uma dada derivação, $d(\pi)$ mede a altura dessa árvore, que será naturalmente igual ao comprimento da pior seqüência.

Demonstração # O *RD* reduzido era não-multiplicativo. Logo, $\updownarrow(\pi)\geq\updownarrow(\pi')$. Em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, todo *RD* $<r',r''>$ envolve uma instância de $i\rightarrow$, que a redução irá eliminar, além disso, como o *RD* é não-multiplicativo, diminuirá o número de ocorrências topo, pois ao menos uma delas será eliminada. Logo, $|\pi|_{i\rightarrow}>|\pi'|_{i\rightarrow}$. *QED*

Lema VI-14 - Se $\pi\overset{\times}{\rightarrow}\pi'$, *então* $\updownarrow(\pi)\leq\updownarrow(\pi')$ *e* $|\pi_{i\rightarrow}|\leq|\pi'_{i\rightarrow}|$.

Demonstração # Lembrando que a operação de multiplicação conserva todas as instâncias, exceto, eventualmente, algumas instâncias de lançamento de hipóteses, que são substituídas por uma derivação, então $\updownarrow(\pi)\leq\updownarrow(\pi')$ e $|\pi_{i\rightarrow}|\leq|\pi'_{i\rightarrow}|$. *QED*

Se a ocorrência topo que será estendida por uma multiplicação não estiver na maior linha da derivação, então, eventualmente, o resultado da operação pode não resultar uma linha maior do que as já existentes. Nesse sentido, a medida baseada sobre o comprimento da derivação é mais sensível à operação de multiplicação. Lembramos que foi com base nessa medida que a finitude de toda cadeia de multiplicações foi demonstrada. A altura não permitiria o mesmo resultado. Por outro lado, a nova definição de comprimento da derivação, aquela de Beckmann, é tão sensível quanto a que usamos anteriormente.

Em [Tro96] (pág. 161) encontramos demonstração de proposições equivalentes ao Lema VI-15 e ao Teorema VI-9, abaixo.

Lema VI-15 - Seja π *uma derivação em* $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ *tal que* $p_{\triangleright}(\pi)\leq h\ (>0)$[311]. *Então, há uma derivação* π' *tal que* $\pi\overset{\triangleright}{\rightarrow}\pi'$, *onde* $p_{\triangleright}(\pi')<h$ *e* $\updownarrow(\pi')\leq 2^{\updownarrow(\pi)}$.

Teorema VI-9 - Seja π *uma derivação em* $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, *então* $\pi\overset{\triangleright}{\rightarrow}\pi^{\triangleright}$, *onde* $\pi^{\triangleright}$ *está em FN, tal que* $\updownarrow(\pi^{\triangleright})\leq 2_{p_{\triangleright}(\pi)}(\updownarrow(\pi))$.

O objetivo de apresentar esses dois resultados revela-se nas comparações que estabeleceremos em breve. As provas dessas duas proposições são irrelevantes no contexto. Entretanto, elas são conseqüência daquilo que apresentaremos a seguir. Veremos na seqüência que um lema e um teorema semelhantes podem ser apresentados para a operação de multiplicação. O teorema é o equivalente de uma demonstração de normalização fraca com cota para a altura da derivação e, como será possível constatar, o método das críticas é novamente aplicável.

---

[311] O acréscimo entre parênteses é nosso.

Lema VI-16 - Seja π uma derivação em $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ tal que $v_{\times}(\pi)\leq h$, para $k>0$. Então, existe uma derivação π' tal que $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'$, onde $v_{\times}(\pi')<h$ e $\updownarrow(\pi')<2^{\updownarrow(\pi)}$.

Demonstração # A demonstração é por indução em $\updownarrow(\pi)$. Existem dois casos.

(i) Se $r(\pi)$ é $i\rightarrow$, imediato, por *(HI)*, já que $r(\pi)$ não faz parte de nenhum *PSM*.

(ii) Se $r(\pi)$ é $e\rightarrow$, sejam π_1 e π_2 as subderivações das *pM* e *pm*, respectivamente. Logo, $v_{\times}(\pi)\geq v_{\times}(\pi_1)$, $v_{\times}(\pi)\geq v_{\times}(\pi_2)$, $\updownarrow(\pi)\geq\updownarrow(\pi_1)+1$ e $\updownarrow(\pi)\geq\updownarrow(\pi_2)+1$. Por *(HI)*, existe π'' tal que: $r(\pi'')=r(\pi)$; $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi''$ via $\pi_1 \overset{\times}{\rightarrow} \pi_1''$, onde $v_{\times}(\pi_1'')<h$ e $\updownarrow(\pi_1'')<2^{\updownarrow(\pi_1)}$, e via $\pi_2 \overset{\times}{\rightarrow} \pi_2''$, onde $v_{\times}(\pi_2''))<h$ e $\updownarrow(\pi_2'')<2^{\updownarrow(\pi_2)}$. A seguir temos dois subcasos.

(ii.i) Suponha que ou não existe um *PSM*, onde $r(\pi'')$ seja a regra de eliminação, ou que existe, mas $v_{\times}(\pi'')<v_{\times}(\pi)$. Claramente, $\updownarrow(\pi'')=max\{\updownarrow(\pi_1''),\updownarrow(\pi_2'')\}+1= max\{\updownarrow(\pi_1'')+1,\updownarrow(\pi_2'')+1\}$, ou seja, $\updownarrow(\pi'')<max\{2^{\updownarrow(\pi_1)}+1,2^{\updownarrow(\pi_2)}+1\}$. Mas $2^{\updownarrow(\pi)}\geq 2^{\updownarrow(\pi_1)+1}\geq 2^{\updownarrow(\pi_1)}+1$ e $2^{\updownarrow(\pi)}\geq 2^{\updownarrow(\pi_2)+1}\geq 2^{\updownarrow(\pi_2)}+1$. Logo, $2^{\updownarrow(\pi)}>\updownarrow(\pi'')$. Basta fazer $\pi'\equiv\pi''$.

(ii.ii) Se existe um *PSM* $<r(\pi''),r>$, para algum r, e $v_{\times}(\pi'')=v_{\times}(\pi)$, então $v_{\times}(<r(\pi''),r>)=v_{\times}(\pi'')$. Logo o *PSM* é *×-crítico*. Suponha que $\pi'' \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PSM* $<r(\pi''),r>$. Assim, $\updownarrow(\pi''')\leq\updownarrow(\pi_1'')+\updownarrow(\pi_2'')+1=\updownarrow(\pi_1'')+(\updownarrow(\pi_2'')+1)\leq\updownarrow(\pi_1'')+2^{\updownarrow(\pi_2)}<2^{\updownarrow(\pi_1)}+2^{\updownarrow(\pi_2)}$. Se $\updownarrow(\pi_1)\geq\updownarrow(\pi_2)$, então $2^{\updownarrow(\pi_1)}+2^{\updownarrow(\pi_2)}\leq 2^{\updownarrow(\pi_1)}+2^{\updownarrow(\pi_1)}=2.2^{\updownarrow(\pi_1)}=2^{\updownarrow(\pi_1)+1}=2^{\updownarrow(\pi)}$. Se $\updownarrow(\pi_1)<\updownarrow(\pi_2)$, então $2^{\updownarrow(\pi_1)}+2^{\updownarrow(\pi_2)}<2^{\updownarrow(\pi_2)}+2^{\updownarrow(\pi_2)}=2.2^{\updownarrow(\pi_2)}=2^{\updownarrow(\pi_2)+1}=2^{\updownarrow(\pi)}$. Em qualquer caso, $\updownarrow(\pi''')< 2^{\updownarrow(\pi)}$. Basta fazer $\pi'\equiv\pi'''$. *QED*

Teorema VI-10 - Para qualquer derivação π, $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}$ tal que $\updownarrow(\pi^{\times})\leq 2_{v_{\times}(\pi)}(\updownarrow(\pi))$.

Demonstração # Por indução em $v_{\times}(\pi)$, usando o Lema VI-16. *QED*

A hipercota, examinada acima, será cota para a *FNE* de uma derivação, mas também será cota para a *FN* de uma derivação. Compare os teoremas. Similar ao caso em que tomávamos o comprimento da derivação como medida, se tomássemos a altura, a cota para a *FN* seria suficientemente grande para comportar uma cota àquelas expansões brutais, resultantes da operação de multiplicação.

Passando às medidas empregadas por Beckmann, os resultados serão similares. Haverá um lema e um teorema similar. Mas, antes, precisamos definir o conceito de nível para os *PSs*. O

nível de um *PS* $<r',r''>$ será o nível da *pM* de r' (***lv(<r',r''>)***). Dessa forma, fica também definido o conceito de nível para os *PSMs*. Definiremos o **nível redutivo de uma derivação** π (***lv$_{\triangleright}$(π)***), respectivamente, o **nível multiplicativo de uma derivação** π (***lv$_{\times}$(π)***), como o máximo dos $lv(<r',r''>)$, onde $<r',r''>$ é um *RD*, respectivamente um *PSM*, em π. Se não há *RD*, $lv_{\triangleright}(\pi)=0$; se não há *PSM*, $lv_{\times}(\pi)=0$. É preciso lembrar que $lv(\pi)$ é o maior dos níveis dentre os níveis de todas as ocorrências de fórmula de π. Conseqüentemente, $lv_{\times}(\pi)\leq lv_{\triangleright}(\pi)\leq lv(\pi)$.

Lema VI-17 - Seja π *uma derivação tal que* $lv_{\times}(\pi)\leq k$, *para* $k>0$. *Logo, existe uma derivação* π' *tal que* $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi'$, *onde* $lv_{\times}(\pi')<k$ *e* $|\pi'|_{i\rightarrow}<2^{|\pi|_{i\rightarrow}}$.

Demonstração # Por indução em $|\pi|_{i\rightarrow}$. Existem dois casos.

(i) Se $r(\pi)$ é $i\rightarrow$, por *(HI)*.

(ii) Se $r(\pi)$ é $e\rightarrow$, sejam π_1 e π_2 as subderivações das *pM* e *pm* de $r(\pi)$, respectivamente. Conseqüentemente, $lv_{\times}(\pi)\geq lv_{\times}(\pi_1)$, $lv_{\times}(\pi)\geq lv_{\times}(\pi_2)$, $|\pi|_{i\rightarrow}>|\pi_1|_{i\rightarrow}$ e $|\pi|_{i\rightarrow}>|\pi_2|_{i\rightarrow}$, dado que $|\pi|_{i\rightarrow}=|\pi_1|_{i\rightarrow}+|\pi_2|_{i\rightarrow}$, $|\pi_1|_{i\rightarrow}>0$ e $|\pi_2|_{i\rightarrow}>0$. Por *(HI)*, existe π'' tal que $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi''$ via $\pi_1 \overset{\times}{\rightarrow} \pi_1''$ junto com $\pi_2 \overset{\times}{\rightarrow} \pi_2''$, onde $r(\pi'')=r(\pi)$, $lv_{\times}(\pi_1'')<k$, $lv_{\times}(\pi_2'')<k$, $|\pi_1''|_{i\rightarrow}<2^{|\pi_1|_{i\rightarrow}}$ e $|\pi_2''|_{i\rightarrow}<2^{|\pi_2|_{i\rightarrow}}$. Logo, $|\pi''|_{i\rightarrow}=|\pi_1''|_{i\rightarrow}+|\pi_2''|_{i\rightarrow}<2^{|\pi_1|_{i\rightarrow}}+2^{|\pi_2|_{i\rightarrow}}\leq 2^{|\pi_1|_{i\rightarrow}+|\pi_2|_{i\rightarrow}}=2^{|\pi|_{i\rightarrow}}$. Temos dois subcasos.

(ii.i) Suponha que ou não existe um *PSM* em π'', onde $r(\pi'')$ seja a regra de eliminação, ou que exista, mas $lv_{\times}(\pi)>lv_{\times}(\pi'')$. Bastará fazer $\pi'\equiv\pi''$.

(ii.ii) Se existe um *PSM* $<r(\pi''),r>$, para algum r, e $lv_{\times}(\pi'')=lv_{\times}(\pi)$, então $lv(<r(\pi''),r>)=lv_{\times}(\pi'')=h$, pois $lv_{\times}(\pi_1'')<h$ e $lv_{\times}(\pi_1'')<h$. Suponha que A é *pm* de $r(\pi'')$ e $A\rightarrow B$ é *pM* de $r(\pi'')$. Conseqüentemente, $lv(A\rightarrow B)=max\{lv(A)+1,lv(B)\}$. Se $\pi'' \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'''$ sobre o *PSM* $<r(\pi''),r>$, então, como nos casos passados, qualquer novo *RD* que venha a surgir será de nível igual ao nível de A. Por outro lado, qualquer novo *PSM* será de nível menor ou igual ao de A. Vemos que $lv(A\rightarrow B)>lv(A)$. Se $m>0$ é o número de ocorrências topo descartadas pela regra r em π_1'', então $|\pi'''|_{i\rightarrow}=|\pi_1''|_{i\rightarrow}-m+(m+1).|\pi_2''|_{i\rightarrow}$. Assim, $|\pi'''|_{i\rightarrow}=|\pi_1''|_{i\rightarrow}-m+(m.|\pi_2''|_{i\rightarrow})+|\pi_2''|_{i\rightarrow}$, ou seja, $|\pi'''|_{i\rightarrow}=|\pi_1''|_{i\rightarrow}+m.(|\pi_2''|_{i\rightarrow}-1)+|\pi_2''|_{i\rightarrow}$. É preciso lembrar que há ao menos uma instância de $i\rightarrow$ em π_1'', logo $m\leq|\pi_1''|_{i\rightarrow}-1$. Portanto, $|\pi'''|_{i\rightarrow}\leq|\pi_1''|_{i\rightarrow}+(|\pi_1''|_{i\rightarrow}-1).(|\pi_2''|_{i\rightarrow}-1)+|\pi_2''|_{i\rightarrow}$, ou seja, $|\pi'''|_{i\rightarrow}\leq(|\pi_1''|_{i\rightarrow}.|\pi_2''|_{i\rightarrow})+1$. Mas, $|\pi_1''|_{i\rightarrow}\geq 1$, dado que há ao menos uma $i\rightarrow$. Conseqüentemente,

$(|\pi_1''|_{i\rightarrow}).(|\pi_2''|_{i\rightarrow})+1 \leq (|\pi_1''|_{i\rightarrow}).(|\pi_2''|_{i\rightarrow}+1) \leq |\pi_1''|_{i\rightarrow}.2^{|\pi_2|_{i\rightarrow}} < 2^{|\pi_1|_{i\rightarrow}}.2^{|\pi_2|_{i\rightarrow}}$. Finalmente, $|\pi'''|_{i\rightarrow} < 2^{|\pi_1|_{i\rightarrow}}.2^{|\pi_2|_{i\rightarrow}} = 2^{|\pi|_{i\rightarrow}}$. *QED*

Teorema VI-11 - Seja π uma derivação, então $\pi \overset{\times}{\rightarrow} \pi^{\times}$ tal que $|\pi^{\times}|_{i\rightarrow} \leq 2_{lv_{\times}(\pi)}(|\pi|_{i\rightarrow})$.

Demonstração # Por indução em $lv_{\times}(\pi)$, usando o Lema VI-17. *QED*

Embora na investigação de Beckmann o objetivo seja cotar as piores seqüências, com nossa alfaiataria e as medidas de Beckmann vestimos também as *FNEs* de $\mathcal{M}_{\rightarrow}$. Todas as seqüências de redução para uma derivação formam uma árvore, onde cada linha da árvore é uma seqüência de redução, chamamos essa árvore de **árvore de redução**. Assim, dar uma cota para o comprimento das maiores seqüências de reduções para uma derivação vem a ser o mesmo que dar uma cota para a altura da árvore de redução da derivação. No caso de Beckmann, ele define uma variante de árvore de redução chamando-a: *expanded head reduction tree*. Não será preciso concentrar nossa atenção nesse conceito, o importante é observar a cota que ele apresenta, pois o resultado final pode ser compreendido, desde nosso ponto de vista, usando a nossa operação de multiplicação, como acima. Ele mostra que as seqüências de redução podem ser cotadas pela função hiper-exponencial $d(\pi) \leq 2_{lv(\pi)}(|\pi|_{i\rightarrow})$. Mas, a cota para a *FNE* obtida por multiplicação é $|\pi^{\times}|_{i\rightarrow} \leq 2_{lv_{\times}(\pi)}(|\pi|_{i\rightarrow})$, observando que $lv(\pi) \geq lv_{\times}(\pi)$. Com efeito, o autor poderia ter usado uma medida um pouco melhor, pois $lv(\pi) \geq lv_{\triangleright}(\pi)$ e $lv_{\triangleright}(\pi)$ já seria suficiente para a prova de normalização e de finitude.

A partir das cotas para o comprimento das *FNEs*, obtemos também uma forma de cotar o comprimento das seqüências de multiplicação. No caso da medida de comprimento usada em nossa investigação, quando estamos levando em consideração o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, basta tomar a cota para o comprimento da *FNE* e dividir por dois. Essa será uma cota para o comprimento das seqüências de multiplicação, ou seja, para a pior seqüência de multiplicação. Vejamos porque. A cada multiplicação permanece um *PS* resíduo do *PSM* multiplicado, cada *PS* é composto de uma introdução e de uma eliminação. No comprimento são computadas todas as instâncias de eliminação e todas as instâncias de introdução, logo dividindo o comprimento por dois obtêm-se a cota. No caso do comprimento canônico, definido por Beckmann, basta tomar diretamente a cota para o comprimento canônico da *FNE* como cota para o comprimento das cadeias de multiplicação.

Queremos notar a grande maleabilidade do procedimento das críticas. Ele funciona para reduções e multiplicações em certa independência das medidas tomadas sobre a derivação: grau,

profundidade, nível, comprimento, altura, etc.

Também é notável a pregnância da operação de multiplicação, que resulta sempre uma derivação cotável pelo método das críticas, mostrando, claramente, que as tentativas de cotar procedem de forma ao menos tão ruim quanto as expansões multiplicativas. Com efeito, as hipercotas registram algo muito pior do que "o que de pior" pode acontecer nas reduções. Segundo o Corolário VI-11, tomando uma derivação qualquer π, o comprimento das derivações em *FNE* obtidas por multiplicação são cota para o comprimento de qualquer derivação obtida a partir de π por uma seqüência qualquer de redução. Esse nos parece ser um resultado esclarecedor.

Em conclusão, as hipercotas são, em geral, maiores do que o necessário, na maioria dos casos. Simplesmente, isso ocorrerá sempre que o valor redutivo ou o valor multiplicativo da derivação sejam maior que zero.

2.3.1. O Processo de Cotação

Em geral, as funções de cota tomam duas medidas sobre uma derivação. Uma delas mede uma dimensão da derivação - altura ou comprimento -, aquilo que pode ser chamado de **dimensão visada**, a outra diz respeito a uma medida de complexidade das ocorrências da derivação. A cota é dada por certas expressões funcionais que dão um limite máximo ao valor da dimensão visada. Como vimos, existem certas derivações obtidas por uma expansão brutal da derivação original e que estão dentro dos mesmos limites estabelecidos por diferentes cotas para a *FN* na literatura. É digno de nota que essas derivações resultantes da expansão pertencem à mesma classe de equivalência que a derivação original, módulo redutibilidade.

Ao cotar uma das dimensões da *FN* de uma derivação por uma função hiper-exponencial, obtemos uma idéia de quão complexo pode ser o resultado do processo de redução por comparação à complexidade do resultado do processo combinatório envolvido no cálculo da função hiper-exponencial. Embora nem sempre a complexidade dos resultados esteja intimamente conectada com a complexidade do respectivo processo, a hiper-exponencial serve como um indício da complexidade do processo de redução. A cota para o comprimento da *FN* equivale intuitivamente a determinar qual a quantidade de papel - quadriculado suponha - é suficiente para poder escrever a *FN* da derivação e, como foi visto, sob a comparação contida nas cotas hiper-exponenciais, a quantidade de papel suficiente para escrever uma derivação em *FN* não seria maior que a quantidade usada para escrever a derivação em *FNE* correspondente.

Sobre o resultado da operação de multiplicação, que atribui univocamente uma derivação

$\pi^{\times}$ em *FNE* a outra derivação π, são extraídas várias informações, por exemplo, que $|\pi^{\times}|$ é uma cota para o comprimento da *FN* de π: $|\pi^{\wedge}|$. De fato, o objeto $\pi^{\times}$ é fonte de muitas cotas. Se desejássemos saber qual a cota para a altura da *FN* poderíamos usar a altura de $\pi^{\times}$; se desejássemos saber qual o comprimento da *FN*, poderíamos usar o comprimento de $\pi^{\times}$; se quiséssemos saber qual a cota para o comprimento de qualquer cadeia de redução para π, poderíamos usar o comprimento de $\pi^{\times}$ dividido por dois ou, eventualmente, o número de pares simétricos de $\pi^{\times}$ - dependendo do sistema -, ou o número de instâncias de introdução; se quiséssemos cotar o comprimento de qualquer cadeia de multiplicação, poderíamos usar o comprimento de $\pi^{\times}$ dividido por dois, ou eventualmente o número de pares simétricos de $\pi^{\times}$, ou o número de instâncias de introdução etc.

Das observações recém-compiladas somos, naturalmente, levados a ponderar se não seria dessa forma preferível abandonar as funções de cota e focar a atenção unicamente sobre a operação de multiplicação como um processo combinatorial significativo, índice e padrão de comparação para o processo combinatorial envolvido nas reduções. Com efeito, todas as informações importantes foram obtidas a partir do objeto especial $\pi^{\times}$.

Resumindo, a função hiper-exponencial serve como processo combinatório familiar com base no qual são estabelecidos limites ao processo combinatório de redução, isso equivaleria a dizer que eles estão sendo classificados por similaridade combinatorial, os resultados dos processos de redução com o resultado do processo de cálculo de uma hiper-exponencial. Desde que o processo combinatorial envolvido na operação de multiplicação seja finito e o resultado independa da ordem em que é realizado, parece natural utilizar esses processos combinatoriais de expansão como fonte de informação acerca das derivações.

2.3.2. Melhoria nas Cotas

Fica claro que as cotas hiper-exponenciais, inclusive na versão que utiliza a altura, são grandes. Algumas melhorias são possíveis. A questão é saber quando o resultado de uma melhoria é genuinamente interessante. Parece-nos que a alternativa de considerar as expansões e as *FNEs*, ao invés das funções hiper-exponenciais, é de genuíno interesse, pela multiplicidade de resultados que elas enfeixam.

As cotas hiper-exponenciais têm em geral uma propriedade indesejável. Não é difícil ver que as cotas não são homogêneas, num sentido intuitivo de homogeneidade. Ou seja, para derivações que têm intuitivamente a mesma estrutura, as cotas são diferentes, conforme o

exemplo a seguir:

$$\pi\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad A}{A\wedge A}\,i\wedge}{A}\,e\wedge e}{A\to A}\,{}^{1}\,i\to$$

Figura VI-30

Considere a derivação π' obtida de π ao substituir todas ocorrências do parâmetro proposicional *A* pela fórmula $C\to B$. Podemos dizer que essa derivação teria a mesma estrutura da anterior, ou seja, as mesmas instâncias nas mesmas posições assim como também os mesmos descartes:

$$\pi'\equiv\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[C\to B]^1 \qquad C\to B}{(C\to B)\wedge(C\to B)}\,i\wedge}{C\to B}\,e\wedge e}{(C\to B)\to(C\to B)}\,{}^{1}\,i\to$$

Figura VI-31

A cota para o comprimento da *FN* da derivação da Figura VI-30, segundo o Teorema V-2, usando como valor a profundidade das fórmulas seria $2_2(5)$ ao passo que a cota para o comprimento da derivação da Figura VI-31 seria $2_3(5)$, um belo aumento. No entanto, parece plausível que as mesmas estruturas tenham formas normais e árvores de redução estruturalmente similares[312].

Para dar um exemplo de uma possível melhoria no valor de cota, suponhamos que definíssemos o conceito de *calado de uma derivação* π, $cl(\pi)$, como: $cl(\pi)=min\{p(A)$: *A é uma ocorrência de* $\pi\}$. O calado nos daria a ocorrência mais rasa da derivação, ou seja, a de menor valor. Se definíssemos o *diferencial de uma ocorrência A em uma derivação* π, $\Delta(A)$, como $\Delta(A)=p(A)-cl(\pi)$, poderíamos definir o *diferencial redutivo de uma derivação* e o *diferencial multiplicativo de uma derivação* de forma similar às definições do valor redutivo e do valor multiplicativo de uma derivação. Usando esses valores, ao invés do valor usual, é de se conjeturar que os mesmo teoremas anteriormente demonstrados continuem a sê-lo, em particular o teorema de normalização fraca descrito no Capítulo V. A cota obtida seria menor ou igual a cota que usa o valor (grau ou profundidade). Apesar de solucionar o problema com respeito aos exemplos da

[312] Mais que intuitivamente plausível a questão é trivial olhada de outro ponto de vista. Via isomorfismo Curry-Howard, associamos derivações aos termos do λ-cálculo com tipos. Se um termo do λ-cálculo tem forma normal é algo que depende da sua estrutura. Os tipos simplesmente restringem a classe dos termos aceitáveis de tal forma que para essa classe sempre temos existência da forma normal e finitude de toda cadeia de reduções.

Figura VI-30 e Figura VI-31, dando cotas homogêneas para as duas derivações, em outros casos essa proposta não funcionaria a contento. Por isso, essa melhoria não será de muito interesse. Considere o que ocorreria com a seguinte derivação. Mesmo usando o conceito de diferencial, a cota para a *FN* de π'' seria $2_3(5)$, embora ainda seja possível dizer que ela tem a mesma estrutura das derivações anteriores:

$$\pi'' \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{[C\to(B\wedge D)]^1 \quad C\to B}{(C\to(B\wedge D))\wedge(C\to B)}\,i\wedge}{C\to B}\,e\wedge e}{(C\to B)\to(C\to B)}\,^1 i\to$$

Figura VI-32

Assim, a melhoria da cota a partir da nova medida careceria de maior interesse, porque a natureza da expressão funcional não seria verdadeiramente alterada.

A complexidade da *FN* e do processo de redução depende, sobretudo, da estrutura das instâncias e descartes de uma derivação. As ocorrências de fórmula desempenham um papel menor, mas crucial: elas selecionam que estruturas são admissíveis. Em uma comparação com o λ-cálculo com tipos simples, dado que as fórmulas correspondem a tipos, elas na verdade funcionam como uma forma de restringir as possíveis combinações de instâncias de regra em uma derivação. Essa restrição torna-se cada vez mais frouxa quando passamos a admitir novas fórmulas de ordem cada vez maior. Infelizmente, embora as medidas para a complexidade das fórmulas máximas capturem algum elemento essencial aos processos de redução, elas contêm informação extra.

Existe uma forma de caracterizar as cotas em primeira ordem sem levar em conta o valor das ocorrências. A partir de uma investigação de Orevkov extrairemos para o caso de dedução natural uma cota desse gênero.

2.4. Cota sem Valor no Sistema C'?

O exame dos processos de redução e de multiplicação parece indicar que as medidas de complexidade desses processos independem dos termos que ocorrem nas ocorrências de fórmulas de uma derivação. Não que os termos não sejam importantes, eles são, e a propriedade de unicidade depende entre outras coisas do fato de que as substituições de parâmetros por termos sejam feitas de modo adequado.

Se focarmos nossa atenção no cálculo proposicional será possível entender melhor o que

estamos querendo dizer. Nesse caso, certamente, os termos de uma proposição são irrelevantes, desde o ponto de vista do exame da complexidade das operações de redução. No cálculo proposicional não há regras que afetem os termos da proposição. No caso do cálculo proposicional qualquer resíduo de ocorrência de fórmula que venha a se transformar em uma fórmula máxima depois de um número finito de reduções deve ser tal que na derivação original existiam duas instâncias uma de introdução e outra de eliminação, tal que a ocorrência de conclusão da primeira seja idêntica a ocorrência *pM* da segunda. Isso é condição necessária, embora não seja suficiente. Por ser condição necessária, esse fato será usado em nossas considerações logo abaixo. Com essas considerações, capturamos uma das intuições importantes por trás das propostas de Orevkov [Ore91] para as medidas de complexidade da *FN*.

Nosso objetivo agora passará a ser o de oferecer uma cota à dimensão visada para as derivações do sistema C' de primeira ordem, na qual a medida do valor das ocorrências da derivação não interfira. O fato que acabamos de mencionar no parágrafo anterior será crucial nesse sentido.

Na verdade, a observação acerca das regras e da fórmula máxima vale imediatamente, desde que a regra $i\bot$ não esteja presente no sistema. A presença da regra $i\bot$ dará origem, eventualmente, a *RDs* envolvendo $\bot$ como fórmula máxima. A redução desse tipo de *RDs* implica a substituição de um parâmetro proposicional por uma fórmula de valor zero nos sistemas com a regra $e\bot$. Mas, justamente, como nosso sistema foi definido com aquela regra, isso nos obrigará a adotar certos cuidados.

No cálculo de predicados de primeira ordem sem a regra $i\bot$, após uma redução as ocorrências de fórmulas residuais podem vir a ser diferentes das originais quando a redução envolve uma substituição de parâmetros individuais por termos. O resíduo de uma ocorrência de fórmula só poderá vir a ser uma fórmula máxima caso na derivação original existissem duas instâncias, uma de introdução e outra de eliminação, tal que a ocorrência de conclusão e a ocorrência *pM* dessas instâncias, respectivamente, tivessem a mesma "estrutura", com as mesmas constantes lógicas e extralógicas e os mesmos parâmetros predicacionais nos mesmos lugares que aquela fórmula que se tornou fórmula máxima após a redução.

Em se tratando de sistemas que contém a regra $i\bot$ será preciso definir uma noção de identidade estrutural que levará em conta não só a possibilidade de considerar que duas fórmulas têm a mesma estrutura, como no parágrafo anterior, mas também a possibilidade de que os parâmetros proposicionais sejam substituídos por fórmulas básicas no sistema C'.

Antes de tudo, é preciso esclarecer aquilo que chamaremos de pseudofórmulas. As

pseudofórmulas são propriamente as subfórmulas sintáticas de uma fórmula.

Definição VI-7 - w é um **pseudotermo** *individual:*

(i) quando w é um parâmetro individual ou uma constante individual ou uma variável individual;

(ii) quando $w=o^n(w_1,...,w_n)$*, onde* $w_1,...,w_n$ *são pseudotermos individuais e* o^n *é uma constante de operação n-ária.*

Definição VI-8 - W é uma **pseudofórmula básica** *quando W é da forma* $P(w_1,...,w_n)$ *onde P é uma constante predicacional n-ária ou um parâmetro predicacional n-ário e* $w_1,...,w_n$ *são pseudotermos.*

Definição VI-9 - W é uma **pseudofórmula** *em* $\mathbb{C}'$*:*

(i) quando W é uma pseudofórmula básica;

(ii) quando W é $\bot$*;*

(iii) quando W é da forma $(V\wedge U)$ *ou* $(V\rightarrow U)$*, onde V e U são pseudofórmulas;*

(iv) quando W é da forma $\forall xV$*, onde V é uma pseudofórmula.*

Claramente, toda fórmula será uma pseudofórmula.

Definição VI-10 - Sejam W e V duas pseudofórmulas quaisquer em $\mathbb{C}'$*, diremos que W e V tem* **estrutura similar** $(W\approx V)$ *quando se dá uma das seguintes situações:*

(i) W e V são básicas e:

(i.i) ou W é um parâmetro proposicional e V é uma pseudofórmula atômica qualquer;

(i.ii) ou W é da forma $P(w_1,...,w_n)$*, onde P é um parâmetro predicacional n-ário, para* $n>0$*, V é da forma* $Q(v_1,...,v_n)$*, onde Q é um parâmetro ou uma constante predicacional n-ária, e* $w_1,...,w_n,v_1,...,v_n$ *são pseudotermos quaisquer*

(i.iii) ou W é da forma $Q(w_1,...,w_n)$*, V é da forma* $Q(v_1,...,v_n)$*, onde Q é uma constante predicacional n-ária, e* $w_1,...,w_n,v_1,...,v_n$ *são pseudotermos quaisquer;*

(ii) W é da forma $M\wedge N$*, V é da forma* $S\wedge U$*,* $M\approx S$ *e* $N\approx U$*;*

(iii) W é da forma $M\rightarrow N$*, V é da forma* $S\rightarrow U$*,* $M\approx S$ *e* $N\approx U$*;*

(iv) W é da forma $\forall xM$*, V é da forma* $\forall yS$ *e* $M\approx S$*.*

Na verdade, tomaremos como relação de similaridade estrutural o fecho simétrico e transitivo da relação acima. Essa relação é obviamente uma relação de equivalência. Além disso, diremos que duas fórmulas são **estruturalmente distintas** quando não for o caso que elas sejam estruturalmente similares.

Dado que toda fórmula é pseudofórmula, segue-se que a definição de identidade estrutural acima se aplica também às fórmulas. A definição de similaridade comporta um certo grau de pragmatismo. Com efeito, se o conceito for adequado para demonstrar uma cota ao comprimento da *FNE* que só dependa do comprimento da derivação original, ele já terá servido aos seus propósitos. Por exemplo, a justificativa última para desconsiderar as diferenças entre os pseudotermos subentendida na cláusula *(i)* da definição deve-se ao fato de que a complexidade dos procedimentos de substituição de parâmetros por termos compreendidos no processo de redução é irrelevante desde o ponto de vista das considerações da complexidade do próprio processo de redução.

Lema VI-18 - Seja π uma derivação em $\mathbb{C}'$. Se $\pi \xrightarrow[i]{\equiv} \pi'$, ou $\pi \xrightarrow[i]{\triangleright} \pi'$, ou $\pi \xrightarrow[i]{\times} \pi'$ e A é uma ocorrência de fórmula em π', então há uma ocorrência de fórmula B em π tal $A \approx B$.

Demonstração # Como toda ocorrência de π' ou é resíduo de uma ocorrência em π, ou é cópia de uma ocorrência em π, suponhamos que B seja a ocorrência original em π da qual A é resíduo/cópia. Se $A \equiv B$, então $A \approx B$. Caso contrário, quando as duas ocorrências não são sintaticamente idênticas, ou foi efetuada uma uniformização que a atingiu, ou uma redução de *POI* universal que a atingiu, ou uma redução de *POI* de $\perp$, ou a aplicação de um procedimento de substituição de parâmetros para torná-los puros.[313] Os dois efeitos de uma uniformização sobre as ocorrências de fórmula consistem em: primeiro, substituir as ocorrências ligadas de uma variável por um termo sobre algumas ocorrências de fórmula da derivação; segundo, substituir um parâmetro que ocorre como argumento em algumas ocorrências da derivação por um termo. Mas, segundo a definição de similaridade estrutural na cláusula *(i)*, duas fórmulas atômicas que só diferem nos seus argumentos são estruturalmente similares. A similaridade se propaga para as fórmulas logicamente mais complexas. O caso para o *POI* universal é similar ao caso anterior. A redução de um *POI* de $\perp$ envolve a substituição de um parâmetro proposicional por uma fórmula de valor zero em várias das ocorrências de fórmula da derivação. Novamente, pela cláusula *(i.i)* um parâmetro proposicional é estruturalmente similar a qualquer fórmula de valor zero. Finalmente, qualquer substituição de parâmetros não altera a relação de similaridade estrutural. Logo, as ocorrências resultantes da substituição serão estruturalmente similares. Assim, $A \approx B$. *QED*

Orevkov ([Ore91], cap. 1) desenvolveu uma estratégia para o cálculo de seqüentes que permite definir certas medidas para as derivações. Dessas medidas, segue-se uma cota para o

[313] Ver o Apêndice.

comprimento de uma derivação que não envolve o valor das ocorrências da derivação. A intuição por trás da estratégia de Orevkov é a de que nenhuma fórmula poderá tornar-se fórmula máxima, caso não existam ocorrências dessa fórmula, ou similares a ela, como *pM* de uma regra de eliminação ou como conclusão de uma regra de introdução.

No caso particular do sistema C', além dos *POIs*, existem ainda outros *RDs*: os *PS* e as *USs*. Esses *RDs* são não-multiplicativos e a regra *cm* envolvida estará sempre restringida às conclusões básicas. É preciso notar que a redução desses *RDs* não pode gerar novos *RDs* envolvendo fórmulas de maior complexidade lógica, justamente porque *cm* está restrita às conclusões básicas.

Nosso objetivo a seguir será o de definir o conceito de profundidade de uma fórmula no contexto de uma derivação para aqueles casos onde a fórmula pode vir a se tornar uma fórmula máxima. Diremos que uma **fórmula *A* é pareável na derivação π**, quando há uma ocorrência de fórmula *B pM* de uma regra de eliminação e uma ocorrência de fórmula *C* conclusão de uma regra de introdução em π tal que $A \approx B \approx C$, caso contrário ***A* não é pareável em π**.

Definição VI-11 - A profundidade de uma fórmula A no contexto de uma derivação π ($p_\pi(A)$) é dado por indução da seguinte forma:

(i) se não há nenhuma ocorrência B de π tal que $A \approx B$, $p_\pi(A)=0$;

(ii) se há pelo menos uma ocorrência B de π tal que $A \approx B$, então:

(ii.i) se A não é pareável, $p_\pi(A)=0$;

(ii.ii) se A é pareável, então:

(ii.ii.i) se A é da forma $\bot$, então $p_\pi(A)=1$;

(ii.ii.i) se A é da forma $\forall xB[a/x]$, então $p_\pi(A)=p_\pi(B)+1$;

(ii.ii.ii) se A é da forma $B \wedge C$ ou $B \rightarrow C$, então $p_\pi(A)=max(p_\pi(B)+ p_\pi(C))+1$.

Lema VI-19 - Para qualquer derivação π, se A ocorre em π e é pareável em π e B é subfórmula[314] *semântica de A, então $p_\pi(B)<p_\pi(A)$.*

Demonstração # Se não há fórmula estruturalmente similar a *B* em π ou, em havendo, se *B* não é pareável em π, o resultado é imediato. Caso contrário, temos uma das seguintes situações:

(i) $p_\pi(A)=max\{p_\pi(C), p_\pi(B)\}+1>p_\pi(B)$, onde $A \equiv B \rightarrow C$ ou $A \equiv C \rightarrow B$;

(ii) $p_\pi(A)=max\{p_\pi(C), p_\pi(B)\}+1>p_\pi(B)$, onde $A \equiv B \wedge C$ ou $A \equiv C \wedge B$;

(iii) $p_\pi(A)=p_\pi(C)+1>p_\pi(B)$, onde $A \equiv \forall xC[c/x]$ e $B \equiv C[c/\tau]$ para algum termo τ;

[314] Ver a definição de subfórmula semântica no Apêndice.

(ii) $p_\pi(A)=p_\pi(B)+1>p_\pi(B)$, onde B é básico e A é $\perp$, já que $p_\pi(B)=0$. *QED*

Em qualquer processo de redução para uma derivação π, os resíduos das ocorrências que não são pareáveis em π jamais poderão ser fórmula máxima, por isso recebem sempre profundidade contextual igual a *0*, em particular, ocorrências atômicas não são pareáveis e sempre recebem profundidade *0*. Da forma como foi definido, faz sentido perguntar qual é a profundidade no contexto da derivação π de uma fórmula A que é ocorrência de uma derivação distinta π'.

Definiremos a seguir dois conceitos visando capturar: *(i)* o máximo das profundidades contextuais das ocorrências de uma derivação; *(ii)* o máximo das profundidades contextuais dos *PSMs* em uma derivação. Os conceitos que vão ser definidos devem permitir considerar a profundidade de uma derivação π' no contexto de outra derivação π. Assim, diremos que a **profundidade contextual de uma derivação π' com respeito à derivação π** ($p_\pi(\pi')$) é o máximo das profundidades das fórmulas que são ocorrências da derivação π' dado o contexto da derivação π. Ou seja, $p_\pi(\pi')=max\{p_\pi(A_1),...,p_\pi(A_n)\}$, onde $A_1,...,A_n$ são todas as ocorrências de π'. O item *(i)* acima seria capturado por $p_\pi(\pi)$. Diremos que a **profundidade contextual de um *PS* $<r^I,r^{II}>$ de π' com respeito a π** ($p_\pi(<r^I,r^{II}>_{\pi'})$) é a profundidade contextual da fórmula que é *pM* de r' na derivação π' dado o contexto de π. $p_\pi(<r',r''>_{\pi'})=p_\pi(A)$, se A é a *pM* de r' na derivação π'. A **profundidade contextual multiplicativa de uma derivação π' com respeito à derivação π** ($p_{\times\pi}(\pi')$) será a máxima das profundidades dos *PSMs* em π' com respeito a derivação π. O item *(ii)* acima seria capturado pela fórmula $p_{\times\pi}(\pi)$. Além disso, segue-se imediatamente que $p_\pi(\pi)\geq p_{\times\pi}(\pi)$.

Novamente, o método das críticas para cotar o comprimento da *FNE* de uma derivação é aplicável, usando o conceito de profundidade contextual multiplicativa. Como conseqüência, resultará uma cota para a *FNE* que só depende de uma medida da derivação original, o seu comprimento.

Teorema VI-12 - Se $\pi \overset{\times}{\underset{i}{\rightarrow}} \pi'$, *então para uma fórmula A qualquer* $p_\pi(A)=p_{\pi'}(A)$.

Demonstração # Todas as ocorrências e instâncias são preservadas na operação de multiplicação e, claramente, toda ocorrência cópia ou resíduo é estruturalmente similar a uma ocorrência na derivação original. Por casos com respeito à $p_\pi(A)$.

(i) Se $p_\pi(A)=0$, é porque ou não havia B em π, tal que $A\approx B$, ou havia, mas não era

pareável. Mas, para qualquer ocorrência C de π' existe uma ocorrência D em π tal que $C \approx D$. Conseqüentemente, no primeiro caso, não haveria uma ocorrência B em π' tal que $A \approx B$, assim $p_\pi(A)=p_{\pi'}(A)=0$. No segundo caso, sejam $B_1,...,B_n$ todas as ocorrências de π' tal que $A \approx B_1 \approx ... \approx B_n$, como A não era pareável em π e como cada uma das ocorrências $B_1,...,B_n$ é resíduo ou cópia de uma ocorrência em π, então ou nenhuma das ocorrências B_i era *pM* de eliminação ou nenhuma era conclusão de introdução em π. O mesmo ocorrerá em π'. Segue-se que $p_\pi(A)=p_{\pi'}(A)$.

(ii) Se $p_\pi(A)=n>0$, então A é pareável em π. Uma fórmula qualquer B é pareável em π se e somente se B é pareável em π', pois todas as ocorrências que sejam *pM* de $e\forall$, ou de $e\wedge$, ou de $e\rightarrow$, ou de $e\bot$ em π, deixarão resíduos que serão respectivamente *pM* de $e\forall$, ou de $e\wedge$, ou de $e\rightarrow$, ou de $e\bot$ em π', e todas as ocorrências que sejam conclusão de $i\forall$, ou de $i\wedge$, ou de $i\rightarrow$, ou de $i\bot$ em π, deixarão resíduos que são conclusão de $i\forall$, ou de $i\wedge$, ou de $i\rightarrow$, ou de $i\bot$ em π'. As ocorrências topo de π, que são estendidas pela multiplicação, podem ser agora conclusão/premissa de uma determinada regra em π' unicamente se a mesma fórmula já era conclusão/premissa dessa mesma regra em π. Logo $p_\pi(A)=p_{\pi'}(A)$. *QED*

Corolário VI-12 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$, *então* $p_\pi(\pi)=p_{\pi'}(\pi')$.

Demonstração # Imediato, a partir do Teorema VI-12, lembrando que novos *PSMs* envolverão a fórmula A no segmento simétrico de ocorrências, se o *PSM* multiplicado envolvia a fórmula $A \rightarrow B$. *QED*

Corolário VI-13 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$, *então* $p_{\times\pi}(\pi')=p_{\times\pi'}(\pi')$.

Demonstração # A partir do Teorema VI-12, basta observar, adicionalmente, que todas as fórmulas que ocorrem em π' são resíduo de uma fórmula em π, além disso, uma fórmula é pareável em π' se e somente se é pareável em π. *QED*

Lema VI-20 - Seja $<r',r''>$ *um PS em* π, *se A é uma ocorrência no segmento de ocorrências associado ao segmento simétrico, então A é pareável em* π *e* $p_\pi(A) \geq p_\pi(<r',r''>_\pi)$.

Demonstração # Similar a prova do Lema VI-1.

As mesmas definições de *PSM crítico* e de derivação $\times$-crítica que demos anteriormente valem para essa noção de profundidade contextual.

Lema VI-21 - Se $\pi \underset{i}{\overset{\times}{\rightarrow}} \pi'$ *sobre o PSM* $<r',r''>$, *então:*

(i) $p_{\times\pi}(\pi') \leq p_{\times\pi}(\pi)$;

(ii) se, para qualquer PSM $<r^{III},r^{IV}>$ *distinto de* $<r^{I},r^{II}>$, $p_{\pi}(<r^{I},r^{II}>_{\pi})>p_{\pi}(<r^{III},r^{IV}>_{\pi})$, *então* $p_{\times\pi}(\pi')<p_{\times\pi}(\pi)$.

Demonstração # Prova de *(i)* - Por definição $p_{\times\pi}(\pi')$ é o máximo das profundidades contextuais dos *PSMs* de π' com respeito a π e a profundidade contextual de um *PS* é a profundidade contextual da *pM* da regra de eliminação do *PS*. Pelo Teorema VI-12, $p_{\pi}(B)=p_{\pi'}(B)$, para qualquer fórmula *B*. Conseqüentemente, $p_{\times\pi}(\pi')\leq p_{\times\pi}(\pi)$. Prova de *(ii)* - Sob as mesmas razões que provam *(i)*, existem dois subcasos. Ou os *PSMs* em π' são resíduos ou são novos. Se um *PSM* em π' é resíduo de um *PSM* em π, suas profundidades contextuais em π' e em π são as mesmas e, assim, todos os *PSMs* residuais em π' têm profundidade menor que $p_{\pi}(<r^{I},r^{II}>_{\pi})$, segundo a condição exposta em *(ii)*. Se o *PSM* é novo, supondo que a regra de introdução do *PSM* $<r^{I},r^{II}>$ descarta uma ocorrência topo *A* e a *pM* da regra de eliminação é $A\rightarrow B$ em π, então, para qualquer *PSM* $<r^{V},r^{VI}>$ novo de π', *A* será uma ocorrência do segmento de ocorrências associado ao segmento simétrico. Pelo Lema VI-20, $p_{\pi'}(A)\geq p_{\pi'}(<r^{V},r^{VI}>_{\pi'})$ e, usando o Teorema VI-12 e o Lema VI-19, $p_{\pi'}(A)=p_{\pi}(A)<p_{\pi}(A\rightarrow B)=p_{\pi}(<r^{I},r^{II}>_{\pi})=p_{\times\pi}(\pi)$. Logo $p_{\pi'}(<r^{V},r^{VI}>_{\pi'})<p_{\times\pi}(\pi)$. *QED*

Lema VI-22 - Seja π *tal que* $p_{\times\pi}(\pi)=h>0$. *Então, existe* π' *tal que:* $\pi\overset{\times_c}{\rightarrow}\pi'$; $p_{\times\pi}(\pi')<h$; $|\pi'|<2^{|\pi|}$.

Demonstração # Em uma demonstração similar àquela do Lema VI-9, levando em conta aquilo que enunciamos no item *(ii)* do Lema VI-21, mostramos que existe π' tal que $\pi\overset{\times_c}{\rightarrow}\pi'$, $p_{\times\pi}(\pi')<h$ e $|\pi'|<2^{|\pi|}$. *QED*

Teorema VI-13 - Seja π *tal que* $p_{\times\pi}(\pi)=h>0$. *Logo, existe* π^{X} *tal que* $\pi\overset{\times_c}{\rightarrow}\pi^{X}$, π^{X} *está em FNE e* $|\pi^{X}|<2_{p_{\times\pi}(\pi)}(|\pi|)$.

Demonstração # Usando o Lema VI-22, por indução em $p_{\times\pi}(\pi)$. *QED*

Até aqui, basicamente, foram reapresentados os resultados anteriores sob uma nova roupagem. Contudo, a real dimensão do conceito de profundidade contextual aparece a partir dos seguintes desenvolvimentos.

Denotaremos o número de instâncias de introdução em uma derivação π em C' por $|\pi|_I$ e o número de instâncias de eliminação por $|\pi|_E$. Não é difícil de ver que se $A_1,...,A_n$ são todas as distintas fórmulas pareáveis em uma derivação π, então $|\pi|_I\geq n$ e $|\pi|_E\geq n$.

Teorema VI-14 - Seja π uma derivação em $\mathbb{C}'$, se $p_\pi(A)=n\geq 1$, então existem, pelo menos, n fórmulas $B_1,...,B_n$, cada uma delas ocorrência de π, distintas entre si e pareáveis em π, tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(A)$, para $1\leq i\leq n$.

Demonstração # Por indução em $p_\pi(A)$.

(i) Se $p_\pi(A)=1$, logo A é pareável em π. Conseqüentemente, existe pelo menos uma ocorrência B de π tal que $A\approx B$ e, evidentemente, $p_\pi(A)=p_\pi(B)$.

(ii) Suponhamos que $p_\pi(A)=n>1$. Temos alguns subcasos.

(ii.i) Se A é da forma $\forall xC[a/x]$, logo $p_\pi(C)=n-1$. Portanto, além de A, C também é pareável em π, pois $n-1\geq 1$. Por *(HI)*, existem $n-1$ fórmulas $B_1,...,B_{n-1}$, cada uma delas ocorrência de π, distintas entre si e pareáveis em π, tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(C)$, para $1\leq i\leq n-1$. Seja B_n a ocorrência de π tal que $A\approx B$. Logo, existem n fórmulas $B_1,...,B_n$ distintas entre si e pareáveis em π, tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(A)=p_\pi(B_n)$, para $1\leq i\leq n$.

(ii.ii) Se A é da forma $C\rightarrow D$ ou da forma $C\wedge D$, então: $p_\pi(D)\leq p_\pi(C)=n-1$ ou $p_\pi(C)<p_\pi(D)=n-1$; A é pareável em π, C, ou D, é pareável em π, pois $n-1\geq 1$. Por *(HI)*, existem $n-1$ fórmulas $B_1,...,B_{n-1}$, cada uma delas ocorrência de π, distintas entre si e pareáveis em π tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(C)$ ou $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(D)$, para $1\leq i\leq m-1$. Seja B_n a ocorrência de π tal que $A\approx B$. Logo, existem n fórmulas $B_1,...,B_n$ distintas entre si e pareáveis em π, tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(A)=p_\pi(B_n)$, para $1\leq i\leq n$. *QED*

Corolário VI-14 - Seja π uma derivação em $\mathbb{C}'$. Logo: $|\pi|_I\geq p_\pi(\pi)$; $|\pi|_E\geq p_\pi(\pi)$; $|\pi|>p_\pi(\pi)$.

Demonstração # O caso onde $p_\pi(\pi)=0$ é trivial. Suponhamos que $p_\pi(\pi)=n>0$. Logo, há uma ocorrência de fórmula em π tal que $p_\pi(A)=n$. Seja A uma fórmula máxima em π tal que $p_\pi(A)=p_\pi(\pi)=n\geq 1$. Assim, pelo Teorema VI-14, existem n fórmulas $B_1,...,B_n$, cada uma delas ocorrência de π, estruturalmente distintas entre si e pareáveis em π tal que $p_\pi(B_i)\leq p_\pi(A)$, para $1\leq i\leq n-1$. Logo, $|\pi|_I\geq n$ e $|\pi|_E\geq n$. Portanto, $|\pi|\geq 2n$. Segue-se que $|\pi|>p_\pi(\pi)$.*QED*

Teorema VI-15 - Seja π uma derivação em $\mathbb{C}'$, logo $|\pi^\triangleright|\leq|\pi^\times|<2_{|\pi|}(|\pi|)$, onde $\pi^\triangleright$ e $\pi^\times$ são a FN e a FNE de π, respectivamente.

Demonstração # A partir do Teorema VI-13, $|\pi^\times|<2_{p_{\times\pi}(\pi)}(|\pi|)$. Pelo Corolário VI-14, $|\pi|>p_\pi(\pi)$. Além disso, $p_\pi(\pi)\geq p_{\times\pi}(\pi)$. Portanto, $|\pi^\times|<2_{|\pi|}(|\pi|)$. Mas, pelo Teorema VI-8, $\pi^\times \overset{\triangleright}{\rightarrow} \pi^\triangleright$ e $|\pi^\triangleright|\leq|\pi^\times|$. Conseqüentemente, $|\pi^\triangleright|<2_{|\pi|}(|\pi|)$. *QED*

Esse último teorema justifica o nome da secção.

3. Considerações Finais

Até onde sabemos, os resultados aqui nesse capítulo são originais. Eles constituem um exame do sistema clássico C', em que o absurdo é tratado com regra de introdução e de eliminação e a regra de dedução indireta é a *consequentia mirabilis*. Para os desenvolvimentos propostos, fazemos uso das idéias de três autores principalmente. Primeiro Alves, que, como já dissemos, propôs uma forma de mostrar a finitude da pior seqüência de redução definida por Massi. Nós retomamos aquela idéia, a de que é possível expandir uma derivação e que essa expansão termina, e lhe demos um novo tratamento. Alves demonstrou uma propriedade equivalente a normalização fraca sem cota para as quase-derivações obtidas por expansão[315], ao passo que nós demonstramos normalização forte com cota para as derivações obtidas pela operação de multiplicação que definimos acima. Em segundo lugar, empregamos as mesmas idéias trabalhadas por Pereira em sua tese de doutoramento a respeito das seqüências críticas e das cotas que obtemos ao tratar dessas seqüências. Em terceiro lugar, usamos o modo de oferecer cotas de Orevkov para analisar cotas para o sistema C'.

Parece-nos, também, que merece destaque o fato de que a prova de normalização forte é feita por indução e que o valor de indução é o comprimento das *FNEs*.

Com respeito à comparação que fizemos entre as cotas para o sistema $\mathcal{M}_{\rightarrow}$, acreditamos ter mostrado que as idéias contidas no conceito de expansão das derivações são tão boas ou melhores que aquelas que encontramos na literatura correlata para o λ-cálculo com tipos simples. De fato, nossos resultados compõem um ponto de vista que é bastante abrangente.

Finalmente, até onde alcançamos ver, é nova na literatura de dedução natural uma cota para a *FN* onde não é empregado o valor das ocorrências na função de cota, em todo caso é nova para a forma do sistema C' que definimos em nossa tese usando as propriedades das *FNEs* via multiplicação.

---

[315] Ele chamava sua operação de expansão de multiplicação-*.

Capítulo VII Conclusão

Na presente tese procuramos examinar os usos dedutivos da negação no seio dos sistemas de dedução natural avançando uma tese que, até onde podemos ver, é nova com respeito à literatura da área. Sempre havia nos parecido muito estranho o fato de que todas as constantes lógicas usuais, exceto a negação, têm seu comportamento dedutivo elucidado por meio de regras de introdução e de eliminação. Para a negação não havia regra de introdução. Fizemos no primeiro capítulo uma proposta de regra de introdução para o caso da negação, partindo de uma proposta que Russell havia defendido a mais de cem anos atrás, mas que parece ter abandonado depois.

A elucidação que propusemos para a negação foi também desdobrada posteriormente de modo a permitir uma elucidação da chamada constante de absurdo, ou proposição absurda. A negação, como de praxe, pode ser definida a partir do absurdo e da implicação, mas nosso procedimento procurou evidenciar exatamente a situação inversa, de que a postulação de uma proposição absurda, com suas regras de introdução e eliminação, permitiria que analisássemos a elucidação para a negação em dois componentes: um envolvendo o absurdo o outro a implicação.

Em nossa proposta elucidatória, basicamente, a regra de introdução da negação estabelece que para introduzir/concluir uma proposição negada precisaríamos ter derivado, ou provado, um parâmetro (ou variável) proposicional que não ocorre nas hipóteses empregadas, dentre as quais figura a proposição que queremos negar. A regra de introdução do absurdo funciona de forma similar. Essa proposta consiste em tomar a averiguação de que uma situação é impossível como condição para introdução da negação, pois uma forma de representar a impossibilidade de uma situação/conjunto de hipóteses consiste justamente em derivar dela uma variável proposicional.

Em ambas análises, da negação e do absurdo, fomos levados a interpretar os constructos derivacionais em dedução natural de uma forma um pouco distinta daquela que costumam fazer vários dos autores que trabalham na área e que, na tese, identificamos como intuicionistas naturais. Suas teses interpretativas estão associadas ao intuicionismo. Nossa formulação parece

ser estranha ao espírito dos intuicionistas naturais, já que há uma tendência de contra-argumentação que apontaria para o fato de que é impossível provar um parâmetro proposicional.

De nossa parte estamos dispostos a aceitar esse contra-argumento, mas somente na medida em que a objeção vier acompanhada do reconhecimento do fato que, primeiro, é preciso garantir a consistência do sistema de regras, para depois sustentar que a prova de uma variável proposicional é impossível. Ocorre que a consistência não é algo que, usualmente, possa ser aceito por meio de um *fiat*. Aliás, originalmente, a demonstração da existência de formas normais para as derivações foi usada como uma forma de provar a consistência do sistema de regras ([Pra65], pág. 44). Antes de demonstrar a consistência, podemos definir o que seria uma prova do absurdo. Teríamos provado o absurdo se tivéssemos provado um parâmetro proposicional.

Os intuicionistas naturais, em geral, estabelecem uma conexão íntima entre as provas e as derivações de dedução natural, conexão que nós queremos evitar, pois, nos parece, essa identificação é inadequada. Alternativamente, procuramos erigir uma outra interpretação, apresentada ainda no primeiro capítulo da tese, sob a qual as derivações são consideradas uma forma de mostrar uma relação de conseqüência dedutiva. Essa relação não envolveria imediatamente as asserções, envolveria aqueles elementos que são o conteúdo de uma asserção e que podem ordinariamente ser formulados por uma oração declarativa. Uma hipótese não é uma asserção e não pode ser asserida sem deixar de ser hipótese, ainda mais se dessa hipótese for extraída uma conclusão impossível. Consideramos que essa elucidação da relação de conseqüência dedutiva inerente aos sistemas de dedução natural faculta-nos um esclarecimento ulterior da natureza dos argumentos dedutivos. Da forma como os interpretamos, esses argumentos devem ser tais que suas premissas e conclusão devem ter entre si uma relação de conseqüência dedutiva. Naturalmente, as premissas e a conclusão de um argumento são asserções, embora não seja verdade que toda oração declarativa que venha a ocorrer em um argumento possa ser considerada uma asserção. Um bom argumento dedutivo deveria fazer ver essa relação de conseqüência dedutiva entre as premissas e a conclusão.

Adotando essa perspectiva, poderíamos manter a estrutura tradicional de inter-relação conceitual entre provas, argumentos e conseqüência dedutiva, presente nos manuais de lógica em geral e na própria tradição histórica da lógica. Os intuicionistas naturais têm a tendência de inverter os termos dessa equação. Para eles, argumentos válidos seriam aqueles que transformariam provas das premissas em prova da conclusão. Para nós, a noção de argumento dedutivo seria mais básica. Nesse caso, as provas seriam simplesmente argumentos dedutivos válidos que partem de premissas reconhecidas como verdadeiras, mediata ou imediatamente.

Desde nosso ponto de vista, uma prova incorreta ainda continuaria sendo um argumento, embora não seja um argumento válido. Nos perguntamos o que seria uma prova incorreta para um intuicionista natural. Para nós, a estrutura das premissas e da conclusão permanece, mesmo se a prova estiver errada. Resumindo, acreditamos que o conceito de argumento válido tem precedência conceitual sobre o conceito de prova. Os intuicionistas naturais acreditam o inverso.

Sob o arcabouço que estamos propondo, as regras de dedução natural estabeleceriam relações de conseqüência dedutiva entre orações declarativas ou proposições. Em particular, a regra de introdução do absurdo estabeleceria quando o absurdo é conseqüência dedutiva de um conjunto de hipóteses: seria conseqüência dedutiva quando um parâmetro proposicional for conseqüência dedutiva desse mesmo conjunto de hipóteses.

Mas para que essa descrição acima seja aceitável precisamos de um conceito de suposição/hipótese que se distingue do conceito de assunção freqüentemente empregado pelos intuicionistas e intuicionistas naturais. Hipóteses, para nós, são simplesmente ponto de partida de uma cadeia de deduções, informação inicial de identificação de certas (putativas) situações das quais queremos sacar conclusões. Desse modo, ao fazer uma hipótese, não estaríamos fazendo nenhum compromisso com a realidade ou a irrealidade desse ponto de partida. Ocorre que, segundo nossa percepção, o conceito de assunção intuicionista tende a identificar a suposição da verdade de uma informação com a suposição de que conhecemos ou de que temos uma prova dessa informação. Desde o nosso ponto de vista essa postura seria criticável. Quer parecer-nos que a diferença torna-se bem visível quando consideramos as suposições contrafactuais, onde está claro que a suposição é falsa. Nesse caso é muito estranho considerar que estamos supondo que conhecemos como provar uma suposição que já sabemos ser falsa. Pior ainda, se supusermos algo que já sabemos ser notoriamente falso e se considerarmos universalmente válido o princípio de *ex falso quodlibet*, sempre poderemos justificar qualquer conclusão. Por exemplo, se admitirmos que é impossível demonstrar uma variável proposicional, a suposição da posse da demonstração de uma variável proposicional já seria suficiente, por *ex falso quodlibet*, para concluir que temos uma prova do absurdo. Além disso, também poderíamos concluir que temos uma refutação do absurdo; ou que temos uma prova do absurdo e uma refutação do absurdo ao mesmo tempo; ou que temos uma refutação de $A \rightarrow A$; ou uma prova de $A \rightarrow A$, etc. Em resumo, em geral, seria problemático empregar o princípio de *ex falso quodlibet* com suposições contrafactuais. Para nós o emprego desse princípio só estaria autorizado caso definíssemos a negação ou o absurdo por meio de uma regra de introdução adequada.

Já que as derivações em dedução natural foram pensadas como uma forma de apresentação do conceito de conseqüência dedutiva, com as novas regras de introdução e de eliminação para a negação/absurdo, acreditamos ser possível colocar a relação entre os sistemas de dedução natural e o cálculo de seqüentes em outro patamar. O cálculo de seqüentes seria, desde a nossa perspectiva, apenas uma forma assercional de apresentação da relação de conseqüência dedutiva. Com efeito, a cada uma das regras da negação corresponderia de modo imediato uma regra do cálculo de seqüentes. A relação envolvida na asserção da premissa e da conclusão seria sempre a mesma. O símbolo de seqüente representaria a relação de conseqüência dedutiva.

Ainda no primeiro capítulo desenvolvemos o tratamento da questão da negação fazendo algumas considerações sobre o conceito de refutabilidade. Do nosso ponto de vista, os sistemas de dedução natural permitem uma representação do conceito de refutabilidade a partir do conceito de conseqüência dedutiva (que é representado de forma primária nesses sistemas) e do conceito de impossibilidade (que pode ser representado pela dedutibilidade dos parâmetros proposicionais).

Além daquelas situações de relação dedutiva, explicitadas por meio das regras de introdução e de eliminação para o absurdo e a negação, existem outras. Essas outras envolvem aquilo que estamos chamando de deduções indiretas. Como vimos, essas formas de relacionamento dedutivo estão sendo elucidadas pelo emprego das regras de dedução indireta. Essas regras, segundo nosso ponto de vista, resultariam numa extensão do conceito de conseqüência dedutiva representado pelas regras de introdução e eliminação, transformando situações em que é impossível afirmar que não existe relação de conseqüência em situações de conseqüência positiva.

Os intuicionistas não aceitam de modo geral a validade das regras de dedução indireta. Basicamente, essas regras permitem o descarte de certas hipóteses. Para nós a rejeição deve-se em parte a forma mais estrita sob a qual os intuicionistas compreendem o uso das hipóteses. Com efeito, sob essa concepção torna-se difícil aceitar os descartes que essas regras efetuariam. Segundo eles, esses descartes só seriam admissíveis se pudéssemos garantir a existência de uma prova da suposição descartada, desde que essa prova fosse extraída da própria dedução hipotética dada. Todavia, parece-nos, essa crítica poderia ser parcialmente contornada se tomássemos uma outra concepção da noção de hipótese. Foi o que propusemos na tese ao dizer que essas regras podem ser interpretadas como uma extensão ao conceito de conseqüência dedutiva, pois, ao

reconhecer que uma suposição não pode ter jogado nenhum papel na dedução de uma determinada conclusão, ficaria desse modo autorizado o descarte dessa suposição.

Os diversos sistemas de dedução natural são analisados nos segundo e terceiro capítulos. No segundo são examinados somente aqueles sistemas onde não valeria o princípio de *ex falso quodlibet*; no terceiro aqueles sistemas onde esse princípio é considerado válido. Será no segundo capítulo, em particular, que faremos uma análise do conceito de refutabilidade. Para nossa surpresa constatamos que é possível formular um sistema para preservação da falsidade estruturalmente idêntico aos sistemas de regras de preservação da verdade. Em cada um desses dois tipos de sistemas é possível definir uma forma distinta da noção de refutabilidade sob hipóteses. As duas noções só convergiriam caso admitíssemos a validade das regras de dedução indireta.

Será nesse segundo capítulo, em particular, que daremos início a análise das regras de dedução indireta. Essa análise se estenderá até o quarto capítulo. O problema de determinar qual seria o conceito que supostamente as regras de dedução natural permitiriam definir (se o conceito de prova estrito, ou o conceito de prova hipotética, ou o conceito de conseqüência dedutiva, ou conceito de refutabilidade estrita ou conceito de refutabilidade sob hipóteses) é o ponto de partida das investigações nesse capítulo.

No terceiro capítulo, além de haver examinado os sistemas que admitem regras de dedução indireta e o princípio de *ex falso quodlibet* − ambos incluídos nos sistemas por meio de regras de dedução−, estivemos preocupados em mostrar a viabilidade da existência de formas básicas de *ex falso quodlibet*. Poderia nos ser objetado que uma regra de introdução do absurdo só seria aplicável caso uma regra de eliminação do absurdo fosse aplicada previamente. No terceiro capítulo procuramos mostrar que isso não é verdade. Desde o nosso ponto de vista, poderíamos formular regras básicas (regras que não envolvem as constantes lógicas usuais $\{\wedge,\vee,\rightarrow,\bot,\sim,\forall,\exists\}$) que constituem razão suficiente para a introdução da negação ou do absurdo. O exemplo que examinamos é o da regra *abs* para a aritmética dos números naturais:

$$\frac{a'=0}{A}\ abs$$

Figura VII-1

Evidentemente, mesmo que tenhamos mostrado adequadamente porque considerar uma regra de absurdo básico como válida, isso não resolve todo problema. Precisaríamos ainda examinar a possibilidade de oferecer regras da natureza de um *ex falso quodlibet* básico para quaisquer teorias. *A priori*, não vemos maior problema nessa tarefa. Essas regras de *ex falso quodlibet*

seriam, desde nosso ponto de vista, uma forma de indicar quais formas proposicionais básicas (atômicas) são incompatíveis entre si. Por exemplo, independente de saber que número é *a* e que número é *b*, as duas formas a seguir são incompatíveis ou contrárias: $a=b$ e $a<b$. Para expressar essa incompatibilidade poderíamos postular a seguinte regra:

$$\frac{a=b \quad a>b}{A}$$

Figura VII-2

Aliás, observamos que não há porque fazer o conceito de negação interferir na observação dessa contrariedade. Se considerarmos essa forma de expressão razoável, o próximo problema a ser abordado seria o problema da justificação da regra caso quiséssemos efetivamente garantir que qualquer proposição básica poderia ser derivada daquelas duas premissas. Nós mostramos que isso funciona para o caso da regra *abs*.

Do quarto capítulo em diante imergimos na maquinaria de provas e teoremas de dedução natural e teoria da prova. No quarto capítulo apresentamos uma discussão conceitual acerca do princípio de inversão e do princípio de harmonia. Procuramos mostrar que o princípio de inversão é apenas uma parcela do princípio de harmonia. Também formulamos o princípio de harmonia para as regras de introdução e eliminação do absurdo. A formulação para as demais constantes lógicas pode ser encontrada no Apêndice. Acreditamos que o princípio de harmonia serve como forma de explicitar o *dito* gentzeniano de que as introduções são as definições e as eliminações como que a conseqüência dessas definições.

Uma parcela importante do trabalho conceitual levado a cabo no quarto capítulo diz respeito às regras de dedução indireta e às operações que aplicamos sobre essas regras. Procuramos mostrar como seria possível estender o princípio de inversão quando lidamos com sistemas envolvendo essas regras. Apresentamos uma tese que mereceria ser investigada mais a fundo, a nosso ver. Segundo ela, as operações envolvendo regra de eliminação e regra de dedução indireta são similares às operações de permutação já presentes no âmbito do sistema intuicionista. Mas, além disso, examinamos também a possibilidade de permutar de modo geral as regras de dedução indireta e as demais regras dos sistemas de dedução natural. Para nossa surpresa só haverá duas situações em que isso não será possível, quando as outras regras são $i\bot$ e $i\forall$. Esse fato permitiu-nos reapresentar vários resultados importantes de teoria da prova, na medida em que estabelecemos o fato de que em muitas situações é perfeitamente possível conduzir todas as instâncias de dedução indireta para o fim da derivação amalgamando-as numa única. Ou seja, as derivações contendo deduções indiretas podem ser vistas como derivações

intuicionisticamente válidas (às vezes até minimalmente válidas) com uma aplicação final de regra de dedução indireta. Em certa medida, esse resultado já havia sido antecipado por Seldin [Sel89], embora subsistam diferenças importantes entre os resultados que apresentamos aqui e os dele.

No quarto capítulo examinamos ainda outras operações que devem ser acrescentadas às tradicionais operações de eliminação de rodeios e de permutação de instâncias de eliminação. Essas novas operações envolvem as regras de dedução indireta e elas foram empregadas no quinto capítulo.

O quinto capítulo contém as provas de normalização fraca e de confluência local para a maioria dos sistemas apresentados no segundo e terceiro capítulos. Começamos com uma prova de existência de forma normal para o cálculo de seqüentes formulado com novas regras para a negação. O cálculo examinado é uma variação do sistema *LJ* de Gentzen. Essa prova é muito significativa, pois ela é como a *clef de voûte* da relação que, desde o primeiro capítulo, vínhamos tentando estabelecer entre o cálculo de seqüentes e os sistemas de dedução natural. Depois dessa prova passamos a tratar dos sistemas de dedução natural. Apresentamos provas de normalização fraca com cota para um sistema contendo dedução indireta, equivalente à lógica clássica, e que é uma extensão da lógica intuicionista. Oferecemos também um teorema de normalização fraca sem cota para a lógica clássica.

A seguir apresentamos uma prova de finitude de toda cadeia de redução para o sistema intuicionista definido com regras de introdução e eliminação do absurdo. Essa prova é uma adaptação da prova de Prawitz em [Pra71]. O interesse que ela desperta reside no fato de que ela é de natureza semântica, ou seja, uma prova em que a finitude das cadeias decorre do fato de que uma determinada propriedade implica essa finitude e do fato de que todas as derivações têm essa propriedade. A propriedade em questão é, em essência, o conceito de validade forte derivado por Prawitz do conceito de validade ([Pra71], apêndice A). Assim, se nossa prova é de fato correta, parece que não haveria problema em considerar uma definição do conceito de validade forte que envolvesse também as regras de introdução e de eliminação do absurdo. Repare que os intuicionistas naturais de modo geral dizem que não há regra de introdução de absurdo pois não haveria prova do absurdo. Desde o primeiro capítulo, viemos apresentando uma série de objeções a essa concepção e a prova da qual estamos falando constituiria um argumento final em favor da nossa proposta de elucidação do absurdo.

Fechamos o capítulo com a prova de confluência local para a lógica clássica e de confluência geral para lógica intuicionista usando nessa última prova o resultado de finitude de toda cadeia antes apresentado.

No sexto e último capítulo tratamos de normalização forte com cota para a lógica clássica em um sistema em que não estão presentes nem as regras para a disjunção nem as regras para o existencial. O teorema de normalização forte para esse sistema foi obtido como conseqüência de uma nova operação sobre derivações que introduzimos nesse capítulo. A operação a que nos referimos é a operação de expansão das derivações e ela é tal que ao mesmo tempo não pode haver extensão indefinida dessa operação e qualquer seqüência resulta na mesma derivação. Analisamos também, nesse capítulo, uma série de formas de dar cota seja ao comprimento das derivações obtidas pelo processo de redução seja ao comprimento do próprio processo de redução. Finalizamos o capítulo com a formulação de uma função de cotas que só depende do comprimento da derivação.

As funções de cota, tanto para normalização fraca quanto para normalização forte, não são nada auspiciosas do ponto de vista do resultado que estamos obtendo acerca da complexidade dos procedimentos envolvidos. De fato é questionável que funções de cota essencialmente melhores possam ser obtidas. Parece que todas as funções acabam sempre por levar em conta[316] o que de pior pode acontecer em um passo de redução. Todavia, como nada pode ser pior do que uma expansão, provavelmente as cotas nunca poderão ser menores do que os resultados que obteríamos por meio de uma expansão das derivações. No sexto capítulo mostramos que as cotas para a normalização já são suficientes para cotar o resultado das expansões.

Vários temas tratados nessa tese mereceriam um desenvolvimento posterior. Podemos dividi-los, grosso modo, em temas filosófico-conceituais e temas técnicos.

Dentre os temas filosófico-conceituais parece-nos que ainda é preciso desenvolver mais a fundo a opção de tratar a lógica clássica desde um ponto de vista que lhe seja elucidatoriamente mais adequado do que o ponto ordinariamente assumido em dedução natural. Não são as provas que devem ser visadas no nosso entender, mas os argumentos. O problema da concepção do conceito de hipótese é outro desses pontos. Há ainda o problema muito mais intrincado do conceito de prova canônica, empregado pelos intuicionistas naturais. Aliás, se a justificativa que uma parcela considerável dos intuicionistas naturais oferece para a necessidade de desenvolver provas de normalização forte advém da tentativa de justificar a validade das regras de eliminação por meio das formas canônicas de prova, ou seja, por meio das regras de introdução, então, desde

[316] E parece que assim deve ser.

o nosso ponto de vista, poderíamos abandonar as provas da normalização forte, pois para nós esse tipo de justificativa não faria sentido. Com efeito, o fato de haver proposto uma forma alternativa de interpretar os sistemas de dedução natural assim como o fato de haver proposto um princípio mais abrangente para interpretar o *dito* gentzeniano, o princípio de harmonia, origina-se da tese de que a validade das regras de eliminação não é derivada da validade das regras de introdução. Elas seriam mutuamente válidas, duas faces da mesma moeda. Justificaríamos as regras de eliminação tomando por base as regras de introdução sempre que pudéssemos demonstrar que todas as conseqüências que podemos obter do uso de uma constante lógica já são conseqüência de cada uma das condições suficientes para a introdução da constante lógica e, ao mesmo tempo, garantindo que não haveria nenhuma conseqüência dessas condições que não seja obtida pelas regras de eliminação.

Dentre os temas técnicos, uma simplificação geral dos teoremas de normalização e confluência é algo imensamente desejável. A verdade é que pelo comprimento das demonstrações perde-se intuitividade e aumenta-se a dubiedade das provas e dos teoremas.

Também, dentre os problemas técnicos, parece-nos, seria muitíssimo interessante desenvolver um sistema onde só houvesse regras de introdução e eliminação, mas agora admitindo os descartes *à la mirabilis*. Para esse sistema seria interessante desenvolver uma prova de normalização e de confluência. Aliás, seria interessante obter um procedimento geral que garantisse a validade desses teoremas para esses sistemas. Uma alternativa pode ser a de analisar mais profundamente os conceitos envolvidos no princípio de harmonia e determinar se desses conceitos já poderíamos extrair uma garantia da validade daqueles teoremas. Em um certo sentido isso equivaleria a voltar atrás e buscar examinar conceitos que possam ser mais adequados para a formulação de uma prova semântica de normalização. As chamadas provas combinatoriais, em geral, são demasiado extensas e o risco de erro torna-se maior a cada nova linha de prova, sem falar a perda da intuitividade. Já as provas semânticas parecem ser provas mágicas em que, simplesmente, "os coelhos vão saindo da cartola". Todavia, acreditamos que um uso mais consciente dos conceitos poderia, talvez, eliminar, ou pelo menos diminuir, essa sensação de "passe de mágica".

Finalmente, acreditamos que uma boa parte do trabalho em lógica pode ser perfeitamente desenvolvido tomando por base somente os conceitos já presentes em dedução natural, desde que certos requisitos sejam obedecidos: o de que sempre podemos estender os meios de expressão lingüísticos, o de que o representamos formas proposicionais quando os parâmetros são usados de modo algébrico, etc. Em outros termos, a tradicional distinção sintaxe-semântica, virtualmente

presente em cada um das publicações contemporâneas sobre lógica, poderia, quem sabe, ser substituída por outras considerações que sejam ainda de natureza rigorosa mas muito mais intuitivas. Afinal, aquilo que se costuma chamar de sintaxe é algo tão semântico quanto aquilo que se costuma chamar de semântica. Essa semântica, por seu turno, não é, em geral, mais que uma tradução da "sintaxe" dentro de uma teoria de conjuntos não-formalizada, uma teoria de conjuntos formulada de forma intuitiva. A "sintaxe" é constantemente tratada como um jogo cego que só ganharia verdadeiro significado quando complementado por uma semântica. Acreditamos que nem o jogo é tão cego assim, embora alguns insistam em se fazer de cegos, nem a semântica é tão esclarecedora assim, pois dificilmente ela poderia iluminar, sozinha, um "porão sem janelas". Do ponto de vista filosófico pode ser imensamente interessante questionar essa separação rígida espargida como marca de batismo sobre todos os lógicos iniciados.

Apêndice - Conceitos Básicos de Dedução Natural

O propósito deste apêndice é o de apresentar e examinar conceitos básicos relativos aos sistemas de dedução natural. Tais sistemas são definidos por meio de uma pluralidade de estruturas chamadas de regras de dedução, cujo objetivo principal tem sido o de elucidar o conceito de argumento matemático ou o conceito de prova matemática. Porém, a esse respeito, *a priori*, pelo menos duas abordagens são possíveis. Ou o conceito de argumento é considerado como básico, e o conceito de prova é derivado do conceito de argumento, ou o conceito de prova é considerado como básico, e o conceito de argumento é derivado. As considerações levadas a cabo na presente tese adotam a primeira alternativa.

Embora os sistemas de dedução natural sejam normalmente associados a uma apresentação sintática da lógica, nem por isso as considerações envolvidas seriam de ordem puramente sintática. Ao contrário, ainda que a forma das regras seja considerada essencial − e essa é uma das razões por que estamos no âmbito da lógica formal −, interpretamos aquelas investigações como investigações de natureza semântica, de modo que a exposição das propostas elucidatórias sob uma forma sintática precisa tem apenas o objetivo de proporcionar a máxima precisão e a máxima objetividade aos conceitos empregados[317]. Mesmo assim, devemos conceder que nem sempre é possível usar estruturas sintáticas para elucidar completamente os conceitos de caráter semântico, um exemplo disso é o conceito de verdade.

Pelas razões apontadas, ao invés de buscar uma definição precisa da sintaxe das fórmulas, simplesmente faremos uma caracterização das **formas lingüísticas** usadas para definir as regras e do significado associado a elas.

Considerando que o objetivo de um sistema de dedução natural é o de elucidar e caracterizar o conceito de **conseqüência dedutiva correta**, os artefatos elucidatórios resultantes − no caso, as derivações − podem ser vistos como uma definição recursiva do conceito, em que o

[317] Quer parecer-nos que não somos os únicos a tomar esse tipo de decisão. Vários intucionistas, como Dummett, por exemplo, examinam a possibilidade de construir uma teoria semântica a partir do conceito de *prova de uma asserção*.

passo propriamente indutivo será dado por um conjunto de regras de raciocínio consideradas as mais elementares e simples.

1. A Proposição e a sua Forma

Apresentamos, brevemente, as expressões que constituem a base para edificar os sistemas de dedução natural. As expressões definidas buscam representar o que poderíamos chamar de **forma lógica das proposições**. Para nossos fins consideraremos que uma proposição é aquilo que podemos chamar de conteúdo de um possível ato de asserção. Basicamente, uma proposição tem que poder ser expressada por uma oração, ou sentença, ou frase declarativa, na medida em que um ato de asserção consiste da enunciação de uma oração declarativa. O termo *oração declarativa* também poderá ser empregado no lugar do termo proposição, pois as diferenças que esse uso acarretaria não seriam assim tão grandes.

A formulação de uma teoria lógica deve repousar em última instância sobre uma teoria das formas, que em geral permanece implícita nas discussões lógicas. Com efeito, contemporaneamente, assumimos que os dois principais constituintes de uma proposição simples, ou oração simples, do ponto de vista semântico, são: a **relação**, ou **predicado**; e os **argumentos**[318] que a saturam. Assim, na proposição "*João ama Maria*", a lista ordenada de argumentos é <*João,Maria*> e sua ordem é relevante para o significado da proposição. A relação é, em geral, apontada por meio do seguinte tipo de estrutura: __ *ama* __. Os espaços sublinhados devem ser preenchidos por argumentos, em geral nomes ou descrições de objetos. Como a relação e os argumentos são os dois componentes fundamentais da estrutura semântica de uma proposição, haverá duas categorias semânticas fundamentais nas quais estarão divididas as expressões que iremos caracterizar adiante. A partir dessa teoria das formas, implícita, poderemos identificar certas estruturas que se forem saturadas tornar-se-ão proposições, a estas estruturas insaturadas estaremos chamando de **formas proposicionais**.

Em breve, definiremos o que entendemos pelo conceito de **fórmula**. As fórmulas servirão para fixar com precisão o que será entendido pela **forma de uma proposição**. A forma mais simples é justamente aquela descrita no parágrafo anterior, cujos componentes são a relação e os argumentos. A caracterização do conceito de fórmula será tal que haverá pelo menos uma

---

[318] Na literatura, é mais comum encontrarmos os conceitos de **função proposicional** e **argumento**. Como a palavra *função* está, em geral, associada a uma concepção matemática extensional, em que, dependendo do argumento, o valor da função será "o verdadeiro" ou "o falso", preferiremos utilizar em seu lugar a palavra *forma*, pois não temos disposição para assumir a interpretação das sentenças como nomes para aqueles dois objetos raros: "o verdadeiro" e "o falso".

fórmula para representar cada proposição[319], embora haja outras fórmulas que não representem proposições. Quando isso ocorre, diremos que elas representam a forma abstrata de uma proposição. De forma simplificada, pela **forma abstrata de uma proposição** entendemos a expressão resultante da substituição de um ou mais elementos semânticos relevantes que compõem a proposição por algum tipo de variável apropriada.

Uma das características mais relevantes das elucidações lógicas por meio dos sistemas de dedução natural está na diferenciação que eles fazem entre dois tipos de variáveis para a categoria semântica de argumento. Uma delas será chamada de variável individual e a outra de parâmetro individual. Após as definições a seguir, detalharemos melhor qual a relevância dessa distinção.

1.1. Símbolos

As expressões formais mais complexas são construídas pelo arranjo de símbolos. Os distintos conjuntos de símbolos são como abaixo.

(i) ***Constantes Extra-Lógicas*** *- Eventualmente, esse conjunto de expressões pode ser vazio. Essas expressões têm um significado fixo e essa é sua principal característica. Em nossas considerações futuras, estaremos supondo que essas constantes sempre referem dentro de sua categoria semântica. Elas estão divididas nas três categorias semânticas como se segue.*

(i.i) ***Individuais*** *- Nomes de indivíduos, empregados como argumentos em uma forma proposicional. Neste trabalho, usaremos 0, 1, 2, 3, ...*

(i.ii) ***Operacionais n-árias*** *- Nomes de operações. Usaremos: +, . , ' e ⁻. Serão usadas para expressar, respectivamente, as operações de soma, multiplicação, sucessor e antecessor na aritmética dos números naturais.*

(i.iii) ***Predicacionais n-árias*** *- Nomes de relações para n argumentos, com n>0. Usaremos apenas = e <.*

(ii) ***Parâmetros*** *- Símbolos que desempenham o papel de variável. São genericamente substituíveis por outras expressões pertencentes à mesma categoria semântica e essa é sua principal característica. Haverá duas categorias semânticas nas quais eles se subdividem.*

(ii.i) ***Individuais*** *- Parâmetros dos quais deve haver uma quantidade não-limitada. Usaremos a, b, c, com ou sem subíndices, como parâmetros individuais. Estão relacionados ao papel de argumento de uma forma proposicional, ou de uma operação.*

(ii.ii) ***Predicacionais n-árias*** *- Parâmetros dos quais deve haver uma quantidade não-limitada para cada n, onde n≥0. Usaremos os símbolos A^n, B^n etc. com ou sem subíndices, como parâmetros predicacionais. Omitiremos a* ***aridade*** *sempre que ela for clara ou irrelevante no contexto. Esses parâmetros representam as formas proposicionais. Parâmetros predicacionais 0-ários serão também chamados de* ***parâmetros proposicionais****.*

---

[319] Para proposições de primeira ordem.

(iii) ***Variáveis*** *- São símbolos usados para ligação e regência*[320] *dentro de uma expressão mais complexa. Teremos um único tipo de categoria semântica para elas.*

(iii.i) ***Individuais*** *- Variáveis das quais deve haver uma quantidade não-limitada. Usaremos x, y, z, com ou sem subíndices. Basicamente, ocupam a posição de um argumento em uma operação ou em uma forma proposicional.*

(iv) ***Constantes Sintáticas*** *- Esse grupo constitui uma categoria à parte. São muitas vezes denominadas de sincategoremáticas.*

(iv.i) ***Operadores Lógicos***

(iv.i.i) ***Conectivos Proposicionais***: $\wedge$ *(conjunção, lê-se "e"),* $\vee$ *(disjunção, lê-se "ou"),* $\rightarrow$ *(condicional, lê-se "implica"),* $\sim$ *(negação, lê-se "não" ou "não é o caso que") e* $\leftrightarrow$ *(equivalência, lê-se "se e somente se"). Quando aplicados a proposições ou formas proposicionais, geram novas proposições ou novas formas proposicionais, respectivamente.*

(iv.i.ii) ***Quantificadores****:* $\forall$ *(universal de primeira ordem, lê-se "para todo");* $\exists$ *(existencial de primeira ordem, lê-se "existe"). Quando aplicados às formas proposicionais, podem transformar aquela forma em uma proposição.*

(iv.ii) ***Proposições Lógicas****:* $\perp$ *(lê-se "absurdo").*

(iv.iii) ***Símbolos auxiliares***: *parênteses e vírgula.*

1.2. Fórmulas

As expressões que constituem os elementos sobre os quais estarão dadas as regras são definidas como a seguir.

Definição A - 1 - τ *é um* **termo individual**:

(i) quando τ *é um parâmetro individual ou uma constante individual;*

(ii) quando τ *é da forma* $\mathcal{O}^n(\tau_1,...,\tau_n)$*, onde as expressões* $\tau_1,...,\tau_n$ *são termos individuais e a expressão* $\mathcal{O}^n$ *é uma constante de operação n-ária.*

Os **termos individuais** caem sob a **categoria semântica de argumentos**. As variáveis $\tau, \tau_1,...,\tau_n$ e o, na definição acima, são metavariáveis usadas com o propósito de comunicar uma definição e devem ser substituídas pelas respectivas expressões indicadas na definição. Os termos individuais denotarão um objeto específico quando nenhum de seus componentes for um parâmetro individual[321]. Nesse caso, serão um **nome** ou **descrição** de objeto. Um termo será uma **descrição esquemática** quando contiver pelo menos uma ocorrência de parâmetro individual e uma operação. Abaixo, qualquer expressão sintática da forma $\varepsilon_1[\varepsilon_2/\varepsilon_3]$ será considerada

[320] Ligação em conexão com os operadores quantificacionais, regidos por esses operadores.
[321] Desde que, adicionalmente, as operações envolvidas estejam completamente definidas.

equivalente a outra expressão que resultaria da substituição, sobre a expressão ε_1, de todas as ocorrências de ε_2 por ε_3.

Definição A - 2 - A é uma **fórmula básica**, *quando A é uma expressão da forma* $P(\tau_1,...,\tau_n)$, *onde P é uma constante predicacional n-ária ou um parâmetro predicacional n-ário e* $\tau_1,...,\tau_n$ *são termos. Dizemos também que cada* τ_i *é um argumento da fórmula básica, para* $1 \leq i \leq n$.

Definição A - 3 - A é uma **fórmula**[322]*:*

(i) quando A é uma fórmula básica;

(ii) quando A é $\bot$*;*

(iii) quando A é da forma $\sim B$ *e B é uma fórmula;*

(iv) quando A é da forma $(B \wedge E)$, *ou* $(B \vee E)$, *ou* $(B \rightarrow E)$, *onde B e E são fórmulas tal que nenhuma variável que ocorre em B ocorre em E e vice-versa;*

(v) quando A é da forma $\forall \chi B[\alpha/\chi]$, *onde B é uma fórmula,* α *é um parâmetro individual e* χ *é uma variável que não ocorre em B;*

(vi) quando A é da forma $\exists \chi B[\alpha/\chi]$, *onde B é uma fórmula,* α *é um parâmetro individual e* χ *é uma variável que não ocorre em B.*

Novamente, as letras gregas P, A, B, E, α, τ e χ são usadas com o propósito de comunicação. Elas são metavariáveis substituíveis por expressões construídas a partir dos conjuntos de símbolos delineados anteriormente. Para simplificar, essas metavariáveis quase não serão utilizadas na tese. Usaremos os parâmetros proposicionais, ou seja, os parâmetros predicacionais *0*-ários, para indicar uma fórmula qualquer, a menos que seja dito expressamente o contrário. Usaremos também as variáveis e os parâmetros individuais, respectivamente, para indicar uma variável ou um parâmetro individual qualquer.

Na prática, boa parte dos parênteses que ocorrem nas fórmulas será descartada, da mesma forma que na literatura. Isso dará às expressões maior acuidade visual. Serão mantidos aqueles que ajudem a evitar uma leitura ambígua.

As definições acima determinam precisamente o conceito de **fórmula de primeira ordem**. Se ocorrem *n* parâmetros individuais distintos em uma fórmula *A*, diremos que ela é uma **fórmula n-dependente**. Dizemos que uma **fórmula é independente** quando ela é *0*-dependente. Se não ocorrem parâmetros em uma fórmula de primeira ordem, então ela representa uma

---

[322] Em geral, na literatura, as fórmulas básicas são chamadas *fórmulas atômicas*. Contudo, entre elas inclui-se freqüentemente a fórmula $\bot$. Como não queremos confundir as fórmulas básicas com as fórmulas que contêm ao menos um símbolo lógico, evitaremos usar a expressão *fórmula atômica*. Notamos, adicionalmente, que Negri & Von Plato também não consideram $\bot$ como atômica [Neg01], pág. 29.

proposição. Caso contrário, representa uma **forma proposicional**. As fórmulas formam a **linguagem de primeira ordem**.

A noção de linguagem adotada segue de perto as noções que tanto Prawitz [Pra65] quanto Gentzen [Gen35] apresentam. Prawitz, em particular, faz a seguinte observação ([Pra65], pág. 13):

> *As linguagens consideradas são linguagens lógicas de predicados de primeira ordem formuladas do modo usual. No entanto, eu sigo a prática conveniente (que nem sempre é adotada) de usar dois tipos de signos que variam sobre indivíduos; um tipo, chamadas variáveis, é usado somente de forma ligada, e o outro, chamados parâmetros, é usado somente de forma livre.*[323]

Embora a observação pareça inocente, ela está prenhe de conseqüências, não imediatamente visualizáveis.

O fato de fazer uma distinção entre dois tipos de variáveis e o fato de definir a linguagem como constituída de expressões nas quais podem ocorrer parâmetros individuais ambos significam que as fórmulas não só representam proposições, mas também representam formas abstratas de proposições. O uso dos parâmetros individuais pode ser **conteudístico** ou **algébrico**. O uso conteudístico de uma variável equivale a entender que, no lugar da variável, só pode ser substituída uma expressão de significado constante e definido. Já o uso algébrico equivale a admitir uma ampliação nas possibilidades de substituição da variável, admitindo que outras expressões, inclusive contendo partes variáveis, possam ser empregadas na substituição. Por exemplo, a fórmula $a+b=b+a$: usada conteudisticamente, só admite que as variáveis a e b sejam substituídas por números naturais; usada de forma algébrica, admitiria todas as substituições conteudísticas mais outras. Conteudisticamente, obteríamos $(c.d)+b=b+(c.d)$ da expressão $a+b=b+a$, pela substituição da variável a pela expressão $(c.d)$. Por isso, dizemos que a expressão obtida é instância da primeira.[324]

A importância do uso algébrico dos parâmetros dentro da linguagem revela-se mais diretamente quando temos de considerar o uso dos quantificadores. Como veremos, a elucidação contida nas regras de dedução natural para os quantificadores exige o emprego dos parâmetros individuais. Por meio da regra de introdução do universal, estabelecemos em quais situações é lícito empregar o quantificador. A condição para introduzi-lo envolve, necessariamente, o uso de um parâmetro. Mas, dado que estamos assumindo a possibilidade de usar parâmetros para

---

[323] *The languages considered are languages of first order predicate logic formulated in the usual way. However, I follow the convenient practice (which is not always adopted) of using two kinds of signs that range over the individuals; one kind, called variables, is only used bound, and the other, called parameters, is only used free.*

[324] Para uma referência histórica importante acerca da distinção do uso conteudístico e do uso algébrico das variáveis, ver [Hil25], págs. 376-380 .

indivíduos e, dessa forma, admitir um uso algébrico, não vemos por que não fazer o mesmo com os predicados, as relações e até com as proposições. De fato, é com uma linguagem desse tipo que nossa proposta de elucidar os usos dedutivos da negação fará mais sentido. As regras de dedução natural que estamos oferecendo para a negação no corpo da tese requerem que os parâmetros proposicionais sejam considerados fórmulas admissíveis.

A definição de fórmula de primeira ordem acima apresenta uma restrição nas cláusulas *(iv)*, *(v)* e *(vi)* sobre as variáveis, restrição essa que nem sempre é encontrada na literatura. Com ela visamos evitar o aborrecimento de definir quando as ocorrências de uma variável são livres ou ligadas, pois, no nosso caso, nunca haverá ocorrências livres. Diremos que uma **ocorrência de uma variável** qualquer em uma fórmula é **ligante**, quando ela está imediatamente à direita do quantificador. Caso contrário, diremos que ela é **ligada**. Da forma como definimos essas noções, toda ocorrência de variável em uma fórmula será ligada ou ligante. Ademais, haverá sempre uma única ocorrência ligante para cada variável dentro de uma mesma fórmula.[325] Eventualmente, também aceitaremos afrouxar a restrição e admitir fórmulas com mais de uma ocorrência ligante, desde que isso propicie alguma utilidade. A utilidade de uma definição é, freqüentemente, o seu único diploma de cidadania. Com efeito, a nossa própria definição está sendo feita desse modo por causa das operações que estamos definindo no Capítulo VI.

Lema A - 1 - Em uma fórmula A qualquer, duas ocorrências distintas de uma mesma variável estarão ligadas pela mesma ocorrência de quantificador, quando ambas ocorrências não forem ligantes.

Demonstração # Imediata da definição de fórmula.

Diremos que o **grau lógico de uma fórmula *A*** (***g(A)***) é o número de constantes lógicas que a fórmula *A* contém. Dessa forma, $g(\bot)=1$ e $g(A)=0$, quando *A* é um parâmetro proposicional, por exemplo.

Uma fórmula *D* é **subfórmula (semântica[326])** da fórmula *A*: quando, para uma lista de parâmetros $\alpha_1,...,\alpha_n$ e uma lista de termos $\tau_1,...,\tau_n$, *D* é $A[\alpha_1/\tau_1,...,\alpha_n/\tau_n]$; ou quando *A* pode ser obtida a partir de fórmulas *B* e/ou *C* por meio de uma das cláusulas *(iii)*, *(iv)*, *(v)* e *(vi)* da Definição A - 3, ao mesmo tempo que *D* é subfórmula de *B* ou subfórmula de *C*; ou quando *D* é

---

[325] Não é difícil imaginar um procedimento sintático que possa converter qualquer fórmula da linguagem de primeira ordem, segundo as definições mais tradicionais, em uma expressão que seja uma fórmula segundo a definição acima. Basta ir substituindo as ocorrências de variáveis ligadas por novas variáveis que não ocorrem na fórmula.

[326] Dizemos que uma fórmula é *subfórmula semântica*, quando as duas expressões estão ligadas de modo relevante pela sua estrutura de significação. A estrutura sintática serve unicamente para tentar tornar explícita essa ligação semântica.

uma fórmula básica e *A* é ⊥. Diremos que *A* é **subfórmula própria** de *B* quando *A* é subfórmula de *B* e *A* não é *B*.

2. Observação quanto à Representação das Fórmulas

Doravante, sempre que indicarmos uma fórmula com a expressão *∀xA[a/x]* ou a expressão *∃xA[a/x]*, assumiremos que a variável *x* não faz parte da fórmula *A*, de modo a respeitar as cláusulas *(v)* e *(vi)* da Definição A - 3.

2.1.1. Observações acerca da Árvore de Construção de uma Fórmula

A toda fórmula *C* está associada uma árvore que chamaremos de **árvore de construção da fórmula C**, tal que o **nodo raiz** é dado pela fórmula *C* e os **nodos topo** são todos fórmulas básicas ou ⊥. Exemplificamos a árvore para a fórmula *(A→B∧⊥)∨(B→(⊥→∀xA))*:

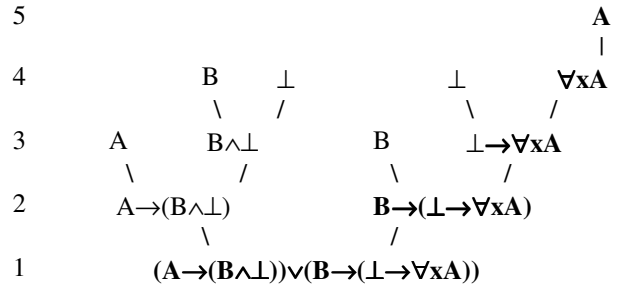


Figura A - 1

A **altura da árvore** de construção de fórmulas será o comprimento dos seus maiores ramos. Na árvore acima, o ramo escuro é o maior e seu comprimento é *5* (cinco). O comprimento de um ramo corresponde ao seu número de nodos e cada nodo corresponde a uma subfórmula da fórmula final. Diremos que a **profundidade de uma fórmula** *A* (***p(A)***) é a altura de sua árvore de construção quando ao menos um dos maiores ramos tem como nodo final a fórmula ⊥. Caso contrário, será a altura da árvore menos *1*. [327] Conseqüentemente, *p((A→(B∧⊥))∨(B→(⊥→∀xA)))=4*. Por outro lado, *p(⊥)=1*. O conceito de profundidade está correlacionado ao grau de uma fórmula, ambos dependendo do número de constantes lógicas nela presentes. A definição formal é como a seguir.

Definição A - 4 - Se A é uma fórmula, então:

(i) p(A)=0, quando A não contém constantes lógicas;

[327] Isso equivale a apagar da árvore de construção todos os nodos topo que sejam diferentes de ⊥ e medir a altura da árvore obtida.

(ii) p(A)=1, quando A é ⊥;

(iii) p(A)=p(B)+1, quando A é da forma ∀xB[a/x], ou da forma∃xB[a/x], ou da forma ~B;

(iv) p(A)=max{p(B),p(C)}+1, quando A é da forma (B∧C), ou da forma (B∨C), ou da forma (B→C).

Lema A - 2 - Se A é uma subfórmula própria de B, então g(A)<g(B) e p(A)<p(B).

Demonstração # imediata.

Serão utilizáveis como medida para as fórmulas tanto a profundidade quanto o grau. Empregamos o conceito ambíguo de **valor de uma fórmula** *A* (***v(A)***), que pode ser substituído, homogeneamente, por qualquer um dos dois conceitos: grau ou profundidade. Freqüentemente, a profundidade de uma fórmula é um valor numérico menor que o grau da fórmula.

2.1.2. Observação acerca dos Parâmetros

A priori, qualquer expressão que contenha parâmetros deve ser interpretada como uma representação para uma certa estrutura proposicional ou forma proposicional. Diremos que essas expressões são esquemas. Num esquema, as ocorrências de parâmetros podem ser substituídas por outras expressões pertencentes à mesma categoria semântica do parâmetro, sempre de forma homogênea, em um mesmo contexto. Mais precisamente, parâmetros individuais só podem ser substituídos por termos; parâmetros predicacionais, somente por fórmulas. A substituição de um parâmetro por outra expressão resultará numa **instância** do esquema original. No caso em que a expressão que seja ela mesma um parâmetro, ou contenha um parâmetro, o esquema resultante será uma espécie de instância esquemática. Qualquer cadeia de substituições para descrições esquemáticas só não resultará noutro esquema quando não restarem parâmetros individuais. Qualquer cadeia de substituições para formas proposicionais só não resultará noutra forma proposicional se não restarem parâmetros predicacionais, nem parâmetros individuais.[328]

Existem expressões da linguagem natural que têm exatamente o mesmo papel dos parâmetros nas fórmulas. As expressões "fulano", "sicrano" e "beltrano" são usadas como se

---

[328] Em primeira ordem, os parâmetros predicacionais *n*-ários poderão ser sempre substituídos por fórmulas *n+m*-dependentes, para $m \geq 0$. Se há uma ocorrência de $P^n(\tau_1,...,\tau_n)$ na fórmula *B* e *A* é uma fórmula *n+m*-dependente qualquer que não tem nenhum parâmetro em comum com $P^n(\tau_1,...\tau_n)$, onde P^n é um parâmetro predicacional *n*-ário e $a_1,...,a_n,...,a_{n+m}$ são todos os parâmetros individuais distintos que ocorrem em *A*, então a operação de substituição de uma ocorrência do parâmetro P^n em *B* pela fórmula *A*, para uma ordem paramétrica $<a_1,...,a_n,...,a_{n+m}>$, consistirá em substituir sintaticamente aquela ocorrência de $P^n(\tau_1,...\tau_n)$ por $A[a_1/\tau_1,...,a_n/\tau_n]$ em *B*. É preciso notar que de diferentes ordens paramétricas resultam em diferentes substituições. Para não nos aborrecermos com detalhes, podemos convencionar a ordem paramétrica como aquela que surge naturalmente da ordenação dos subíndices de cada parâmetro individual.

fossem nomes, mas não nomeiam ninguém. Elas são usadas para falar de um qualquer, de um elemento genérico, sem especificação. Em muitas situações o que importa descrever é a situação e não o personagem que vivencia a situação.

Eventualmente, alguns poderiam tentar identificar os pronomes pessoais "ele" e "ela" com os parâmetros. Todavia, pronomes pessoais são anafóricos e são usados ligados a expressões que já apareceram anteriormente no discurso. Assim, na verdade, os pronomes pessoais assemelham-se muito mais às variáveis ligadas pelos quantificadores. A expressão "fulano", por seu turno, não é primariamente usada como anafórico.

A distinção entre parâmetros e variáveis está presente em *Natural Deduction* de Prawitz ([Pra65], pág. 14). Ela reflete uma distinção paralela presente nas *Untersuchungen* de Gentzen ([Gen35], pág. 70), em que a distinção se dá entre variáveis que só são usadas ligadas e variáveis que só são usadas livres. Aqui, os parâmetros são concebidos como itens sintáticos claramente distintos das constantes individuais, pois usualmente se considera que constantes são nomes e, portanto, não são marcadores de lugar que possam ser normalmente substituídos por outros nomes. A conseqüência mais imediata e notável da distinção entre o conjunto de variáveis livres e o conjunto de variáveis ligadas está no fato de que assim evita-se o problema de capturar, de modo indesejado, uma variável livre sob o escopo de um quantificador. Por outro lado, acreditamos, desse modo a elucidação do procedimento dedutivo torna-se mais claro do que, por exemplo, aquelas que encontramos em outros lugares como *Introduction to Metamathematics* ([Klee52], págs. 82-100), em que o autor emprega os conceitos de *variável variada* e *variável mantida constante*!

2.1.3. Observação acerca do Papel dos Quantificadores em uma Fórmula

O uso dos quantificadores em dedução natural tem sido, muitas vezes, interpretado de modo **substitucional**. Isso, todavia, não impede uma interpretação não-substitucional, ou seja, não impede uma interpretação de **alcance**[329] ou de **extensão** sobre um domínio. Formalmente, o papel básico dos quantificadores de primeira ordem é o de ligar e reger a posição dos argumentos usados para descrever objetos em uma fórmula.

[329] *Range*, em inglês.

2.1.4. Observação acerca da Identidade Sintática entre Fórmulas

Diremos que duas fórmulas *A* e *B* são **sintaticamente equivalentes** (***A*≡*B***) quando existirem duas cadeias de substituições, eventualmente vazias, constituídas da substituição homogênea de novas variáveis individuais no lugar das antigas variáveis individuais, e/ou novos parâmetros individuais no lugar dos antigos parâmetros individuais, e/ou a substituição de novos parâmetros predicacionais *n*-ários no lugar dos antigos parâmetros predicacionais *n*-ários sobre *A* e sobre *B*, respectivamente, tal que ambas as cadeias resultem na mesma fórmula *C*. Quando dizemos novas variáveis e novos parâmetros, entendemos variáveis e parâmetros que não ocorrem nas fórmulas *A* e *B* e que ainda não foram empregados nas substituições efetuadas sobre a fórmula.

2.1.5. Observação acerca das Definições Explícitas

O símbolo "$\equiv_{df}$" será usado para indicar a **definição explícita** de uma expressão. A expressão à esquerda de "$\equiv_{df}$" é chamada de **definiendum** e é, propriamente, a expressão "nova". A expressão à direita é chamada de **definiens** e é considerada a expressão que dá sentido ou significado à expressão à esquerda.

2.2. Operadores Lógicos Definidos

A **equivalência** ($\leftrightarrow$) não será considerada um operador lógico primitivo, embora pudesse sê-lo. A **negação** (**~**) pode tanto ser considerada primitiva, quanto definida. Se decidíssemos por considerá-las ambas definidas, o conceito de fórmula deveria ser alterado para refletir essa situação. Esses dois símbolos lógicos podem ser definidos da seguinte forma: $\sim A \equiv_{df} (A \rightarrow \bot)$ e $A \leftrightarrow B \equiv_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

2.3. Notações

Os símbolos gregos Γ, Δ, Θ e Λ serão usados ambiguamente para denotar conjuntos finitos, multiconjuntos finitos ou listas finitas de fórmulas. [330]

[330] Os multiconjuntos admitem a repetição de elementos.

3. Derivações

As regras de dedução natural tomam por base as expressões acima caracterizadas. A composição das regras dará origem às derivações. Consideraremos as derivações como constructos elucidatórios para as deduções e para o conceito de conseqüência dedutiva. Uma derivação representará um esquema de dedução quando houver pelo menos uma ocorrência de parâmetro aberto nas expressões que constituem a derivação.

Em geral, costuma-se chamar **regra de inferência** àquelas regras que atuam sobre asserções. Em nosso caso, estaremos considerando as regras de dedução natural primariamente como regras que atuariam sobre proposições ou, na melhor das hipóteses, sobre informações/estruturas informacionais. Todas as regras de dedução natural podem ser concebidas sob esse ponto de vista, ou seja, como regras para a caracterização de quando a relação de conseqüência dedutiva se dá entre as proposições e/ou formas proposicionais.

Um exemplo clássico de dedução visando mostrar a validade do chamado princípio de *ex contradictione quodlibet* é aquele a seguir, atribuído ao Pseudo-Escoto ([Kne62], págs. 286-287):

$$\dfrac{\dfrac{\text{Sócrates existe e Sócrates não existe}}{\text{Sócrates não existe}} \qquad \dfrac{\text{Sócrates existe e Sócrates não existe}}{\text{Sócrates existe}}}{\dfrac{\text{Sócrates não existe} \qquad \text{Sócrates existe ou um homem é um burro}}{\text{Um homem é um burro}}}$$

Figura A - 2

A sentença "Sócrates existe e Sócrates não existe" é um exemplo típico de autocontradição. O exemplo retirado de Kneale & Kneale dá a estruturação em árvore da dedução do Pseudo-Escoto. Nos sistemas de dedução natural, as derivações também terão uma estrutura similar, em árvore. Com uma substituição ulterior das proposições pelas suas respectivas formas proposicionais, a estrutura da Figura A - 2 seria como a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge \sim A}{\sim A} \qquad \dfrac{A \wedge \sim A}{A}}{\dfrac{\sim A \qquad A \vee B}{B}}$$

Figura A - 3

Na figura anterior, cada traço separando duas fórmulas corresponde à aplicação de uma dedução. Tais traços serão chamados de **linhas de separação**. A fórmula imediatamente abaixo

da linha é a **conclusão** imediata de uma dedução. A[s] fórmula[s] imediatamente acima da linha de separação é[são] a[s] **premissa[s] imediata[s]** da dedução. A expressão **ocorrência de fórmula** será usada para designar uma fórmula ocupando uma posição específica dentro de uma derivação, como premissa ou conclusão de uma dedução específica. Assim, na derivação acima, existem duas ocorrências distintas da mesma fórmula $A \wedge \sim A$. Uma fórmula que não está por baixo de nenhuma linha de separação é dita uma **ocorrência topo** ou **suposição** – e poderá ser **aberta** ou **fechada**. Em uma derivação correta, cada linha de separação corresponderá à aplicação de um esquema de dedução correto. Em alguns casos, a regra de dedução utilizada fará parte do conjunto convencionado como o conjunto de regras de dedução elementares. No sistema de lógica dito clássico, todas as deduções contidas na Figura A - 3, excetuando a última, seriam elementares. Nos casos em que a dedução válida não pertence ao conjunto de deduções elementares, ela deverá ser obtida a partir da composição de várias aplicações das regras elementares. Esse é o caso da última dedução na Figura A - 3.

Como uma derivação tem a forma de árvore, elas serão representadas por grafismos geométricos que lembram uma árvore:

A
∇
B

Figura A - 4

A fórmula *B* deve ser interpretada como a **ocorrência final da derivação** e *A* como uma das **ocorrências topo da derivação**. Além disso, eventualmente, as ocorrências topo de uma árvore poderão estar destacadas conforme os grafismos abaixo:

A	A	Γ	$A_1,...,A_n$
∇	∇	∇	∇
B	B	B	B

Figura A - 5

No primeiro grafismo, estará sendo destacada uma única ocorrência topo de *A*. Eventualmente, podem existir outras ocorrências topo distintas. No segundo grafismo, onde aparece um pontilhado abaixo da fórmula, está sendo destacada uma pluralidade de ocorrências topo da fórmula *A*, mas não necessariamente todas as ocorrências. No terceiro grafismo, o símbolo Γ representa uma lista de suposições abertas da derivação que, via de regra, consideramos como o conjunto de todas as suposições abertas, a menos que ao seu lado sejam explicitadas separadamente as demais ocorrências topo que não pertencem a Γ. No quarto grafismo, destacamos uma lista de ocorrências topo específicas.

3.1. Derivações e Regras Lógicas para Dedução Natural

Os sistemas de dedução natural de estilo gentzeniano têm uma característica marcante: quase toda constante lógica é apresentada por meio de dois tipos de regras de dedução, regras de introdução e de eliminação ([Gen35], pág. 80). Isso é, do ponto de vista teórico, extremamente importante:

> *As introduções representam, como se fossem, as 'definições' dos respectivos símbolos, e as eliminações não são mais, no fim das contas, do que conseqüências dessas definições. Esse fato pode ser expressado como se segue: ao eliminar um símbolo, nós podemos usar a fórmula que contém o símbolo terminal com o qual estamos lidando unicamente ´no sentido conferido a ele pela introdução daquele símbolo' ...*[331]

Na presente tese, adotamos, programaticamente, como guia da elucidação a ser desenvolvida, o princípio de que o núcleo duro do uso das constantes lógicas deve ser esclarecido por meio de regras de introdução e de eliminação. No decorrer do trabalho, procuramos aplicar esse ponto de vista à elucidação da operação de negação de um modo que, a nosso ver, não tem sido feito na literatura. Assumiremos que, para cada constante lógica, as regras de introdução estabelecem em quais situações uma constante lógica estaria adequadamente empregada e as regras de eliminação estabelecem quais conseqüências se seguiriam do uso adequado dessa constante lógica.

As **derivações** serão obtidas pela combinação de certas derivações fundamentais, como a seguir. Uma ocorrência de fórmula *A* será uma **derivação simples** em que a ocorrência topo e a ocorrência final são a mesma. Consideraremos que, nesse caso, a derivação mostra que *A* é conseqüência dedutiva de si mesma, o que é óbvio. As demais derivações fundamentais são chamadas de **regras lógicas elementares** e são ou **introduções**, ou **eliminações**:

Introduções	$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta \\ \nabla & \nabla \\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\ i\wedge$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ ,\ [A_1]^i \\ \nabla \\ A_2\end{array}}{A_1 \rightarrow A_2}\ ^i i\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A\end{array}}{\forall x A[a/x]}\ i\forall$ (*)
	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A_1\end{array}}{A_1 \vee A_2}\ i\vee e$ $\quad$ $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A_2\end{array}}{A_1 \vee A_2}\ i\vee d$		$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A[a/\tau]\end{array}}{\exists x A[a/x]}\ i\exists$

[331] Ver nota 200.

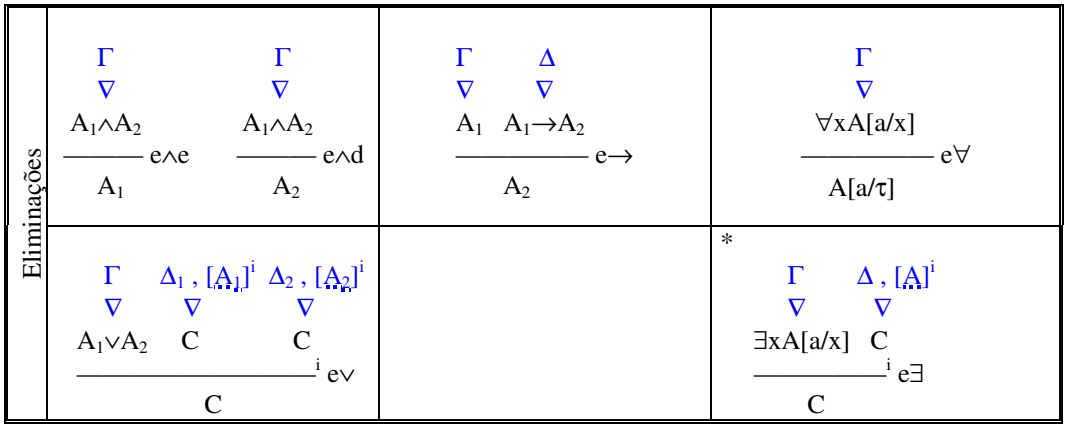


Figura A - 6[332]

Em cada regra, a linha de separação aparta, de um lado, as **condições de aplicabilidade da regra** e, de outro, a **conclusão**. É preciso notar que tanto a condição de aplicabilidade quanto a conclusão são ambas esquemáticas em cada regra. Assim, diremos de um símbolo lógico que ocorra na parcela que estabelece as condições de aplicabilidade, ou também na parcela que corresponde à conclusão, que ele é um **símbolo essencial** dentro da regra. As regras de introdução devem conter, pelo menos, uma ocorrência essencial da constante lógica na conclusão. Se a ocorrência essencial na conclusão é a única em toda a regra, de modo que a condição de aplicabilidade não tem ocorrência essencial dessa constante, ou de outra constante qualquer, então diremos que a **regra de introdução** é **completamente independente**. As eliminações, por sua vez, conterão necessariamente, entre as condições de aplicabilidade, ao menos uma ocorrência essencial da constante lógica em questão. Caso essa ocorrência seja a única, diremos também que a **regra de eliminação** é **completamente independente**. Adiante, veremos o exemplo de regras de introdução e eliminação que não são completamente independentes. As regras acima são todas completamente independentes.[333]

As regras destacadas com * têm restrições de aplicabilidade que serão explicitadas abaixo. As ocorrências topo em Γ, Δ , Δ_1 e Δ_2 são chamadas de **suposições abertas** e não haverá nenhuma suposição aberta que não esteja contemplada nessas listas. Acima, todas as regras foram apresentadas como regras de dedução. Todavia, naqueles casos em que as subderivações estão em azul, elas podem ser dispensadas. Desse modo, algumas ganhariam a forma com que usualmente são apresentadas na literatura. Quando não houver nenhuma restrição especial sobre a subderivação subsidiária, poderemos suprimi-la da representação, exatamente o que ocorre com

[332] Negri & Von Plato [Neg01], cap. 8, também apresentam as regras de dedução natural representando, nas condições de aplicabilidade das regras, as derivações de cada uma das premissas imediatas.

[333] Para uma discussão acerca das condições que poderiam estar envolvidas na determinação da admissibilidade das regras de inferência, ver [Zuc78]. Entendemos que o nosso conceito de regra completamente independente equivaleria à soma dos conceitos de separabilidade e explicitude de Zucker & Tragesser.

aquelas subderivações azuis. Chamaremos de **subsidiárias** aquelas subderivações que são condição para a aplicação de uma regra de dedução.

Com base nas regras de dedução, poderemos definir o que vem a ser uma regra de inferência. Uma **regra de inferência** envolveria asserções e desse modo pode ser analisada como constituída de uma dedução correta tal que as premissas imediatas sobre as quais é aplicada a dedução não dependeriam de nenhuma suposição aberta. Ou seja, as premissas imediatas estão sendo asseridas. Às vezes confundimos regras de inferência e de dedução, porque, em certas situações, elas são praticamente indistinguíveis pela sua forma, já que, como acabamos de ver, as derivações sobre as premissas de uma regra de dedução podem ser dispensadas em certos casos em que não há nenhuma restrição especial sobre as suposições envolvidas. Quando isso ocorre, poderia parecer que a regra só teria premissas imediatas e, assim, não teria derivação subsidiária. Isso é um equívoco, pois a premissa imediata poderia estar sendo tomada como uma asserção, mas também poderia estar sendo tomada como uma suposição. Um exemplo clássico é o caso da regra $i\wedge$.[334]

3.2. Caracterização das Regras Lógicas

O nome da regra de dedução vem ao lado da linha de separação em cada caso. Nas regras acima, os parâmetros proposicionais que ocorrem nas fórmulas podem ser substituídos homogeneamente por qualquer outra fórmula, resultando numa instância da regra. Naturalmente, uma instância de regra será correta quando as ocorrências acima ou abaixo da linha de dedução forem fórmulas segundo a Definição A - 3.

As regras elementares foram divididas em duas espécies. Aquelas cuja conclusão contém um operador lógico que não estava contido na⟦s⟧ premissa⟦s⟧ imediata⟦s⟧ são chamadas **introduções**. Suas premissas imediatas são sempre chamadas de **premissa⟦s⟧ maior⟦es⟧** (***pM***). Aquelas que contêm o operador lógico em apenas uma de suas premissas imediatas e não o contêm na conclusão são chamadas **eliminações**. A premissa imediata que contém o operador lógico também será chamada de **premissa maior** e as demais, quando houver, **premissas menores** (***pm***). Cada operador lógico tem regra⟦s⟧ de introdução e regra⟦s⟧ de eliminação. Entenderemos que as regras de introdução e eliminação caracterizam dedutivamente cada um dos operadores. A aplicação de todas as regras requererá que certas derivações prévias tenham sido

[334] Negri & Von Plato [Neg01], pág. 166, consideram que uma regra de inferência não deve ser definida como uma relação entre asserções, mas entre uma derivação, tomada como premissa, e a asserção de conclusão.

dadas: as derivações das premissas, sejam elas menores ou maiores. Como já dissemos, essas derivações serão chamadas de **derivações subsidiárias**.

Em todas as regras de introdução, a‖s‖ premissa‖s‖ é ‖são‖ subfórmula da conclusão, e o valor da fórmula de conclusão será sempre maior que o valor da‖s‖ premissa‖s‖.

A regra $i\wedge$ no quadro da Figura A - 6 é a **introdução da conjunção**. Essa regra tem duas premissas imediatas e a ordem em que aparecem as fórmulas A_1 e A_2 na conclusão é a mesma em que são listadas como premissas. Estritamente, segundo a definição de fórmula que demos acima, a conclusão só será uma fórmula se A_1 e A_2 não possuem variáveis individuais em comum. A mesma observação aplica-se a todas as regras. No exemplo abaixo, as derivações em vermelho são as derivações subsidiárias para a aplicação da regra de $i\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A\wedge B}\,i\wedge \qquad A}{(A\wedge B)\wedge A}\,i\wedge$$

Figura A - 7

A regra $i\rightarrow$ é a **introdução da implicação**. Diferentemente da regra anterior, essa regra pode conter, além de uma premissa imediata A_2, uma derivação de A_2 a partir das suposições Γ e A_1. No exemplo abaixo, a derivação à esquerda é a derivação subsidiária para a aplicação da última regra de dedução na derivação à direita:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A\wedge B}\,i\wedge \qquad A}{(A\wedge B)\wedge A} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad B}{A\wedge B}\,i\wedge \qquad [A]^1}{(A\wedge B)\wedge A}\,i\wedge}{A\rightarrow((A\wedge B)\wedge A)}\,{}^1 i\rightarrow$$

Figura A - 8

A conclusão da derivação à esquerda depende das suposições A e B, sendo que a suposição A é usada duas vezes. Na derivação da direita, a **aplicação da regra de dedução fecha a suposição** A, o que é indicado pela colocação de colchetes ao redor da suposição junto com um índice relacionando as **suposições fechadas** e a regra que as fecha. Várias suposições podem ser fechadas ao mesmo tempo. O **pontilhado** sob a fórmula, na Figura A - 6, representa a possibilidade de que múltiplas ocorrências topo da mesma fórmula sejam fechadas, não necessariamente todas, podendo inclusive fechar zero ocorrências! Nesse último caso, diremos que a aplicação de $i\rightarrow$ é **irrelevante**.

No esquema de regra de $i\rightarrow$, representamos as suposições de uma forma que simplifica a listagem das suposições. Se quiséssemos ser formalmente precisos, deveríamos indicar, sobre a derivação, uma lista completa das suposições abertas do seguinte tipo: $\Gamma_1,A_1,\Gamma_2,A_1,...,A_1,\Gamma_n$. A aplicação da regra descartaria aquelas ocorrências de A_1 explicitadas na lista, ou seja, da aplicação da regra resultaria $\Gamma_1,[A_1]^i,\Gamma_2,[A_1]^i,...,[A_1]^i,\Gamma_n$. Além disso, cada um dos $\Gamma_i's$ seria uma lista de suposições abertas que poderia conter ocorrências não descartadas de A_1 e poderia, inclusive, ser vazia. Portanto, o descarte das ocorrências topo abertas resultaria na lista de suposições $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_n$. Essas mesmas considerações valem para todos os esquemas de regra em que há descarte de suposições. Notamos, finalmente, que, com respeito à figura acima, na derivação à direita, a conclusão depende só da suposição *B*, pois as repetições da suposição *A* foram fechadas. Dizemos, nesse caso, que *B* é uma **suposição aberta**. Via de regra, nenhuma conclusão depende de suposições fechadas.

A regra $i\forall$ é a **introdução de universal**. Eventualmente, o parâmetro *a* pode não ocorrer em *A*. Se *a* ocorre em *A*, diremos que a aplicação da regra é **própria**. Se *a* não ocorre em *A*, será chamada de **imprópria** − o que não significa que ela seja incorreta. Entende-se também que, ao invés do parâmetro *a*, poderia ocorrer outro parâmetro, desde que as restrições estabelecidas a seguir sejam observadas. A restrição diz respeito ao parâmetro individual. Suponhamos que Γ contém todas as ocorrências de suposições abertas na derivação subsidiária mais à esquerda na figura abaixo, cuja conclusão é *A*:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & \Gamma \\ \nabla & & \nabla \\ A & & A \\ & & \hline \\ & & \forall xA[a/x] \end{array} \quad i\forall$$

Figura A - 9

A regra de $i\forall$ só seria aplicável como na derivação à direita se o parâmetro *a* não ocorre em nenhuma fórmula de Γ. Lembramos que, pela definição do conceito de fórmula, a variável *x* não ocorre em *A*. Além disso, em *A[a/x]*, todas as ocorrências do parâmetro individual *a* em *A* devem ter sido substituídas pela variável *x*, ou seja, *a* não ocorre em *A[a/x]*.

A regra de $i\forall$ só fará sentido quando tivermos uma forma de representar objetos genéricos, que em nosso caso são representados pelos parâmetros. Sua aplicação requer que tenhamos deduzido uma fórmula contendo a ocorrência do parâmetro individual *a* a partir de um conjunto de suposições Γ que não contenha ocorrências de *a*. Essa regra seria mais problemática em uma linguagem em que as fórmulas só representassem proposições.

As regras ***i∨e*** e ***i∨d*** são **introdução da disjunção inclusiva à esquerda** e **à direita**, respectivamente. São duas regras distintas, pois existem duas posições distintas em que a premissa pode ocorrer como parte da conclusão. Quando for dispensável maior precisão, referiremos simplesmente a regra *i∨*.

A regra ***i∃*** é a **introdução do existencial**, onde *a* é um parâmetro individual qualquer. Se *a* ocorre em *A*, diremos que a aplicação da regra é **própria**.[335] Caso contrário, será chamada de **imprópria** − o que não significa que ela seja incorreta. Se *a* ocorre em *A*, então *A[a/x]* não contém nenhuma ocorrência de *a*. Lembramos que, pela definição do conceito de fórmula, a variável *x* também não ocorre em *A*.

Passando para as regras de eliminação, a maioria dessas regras tem uma conclusão que é subfórmula da *pM* e distinta dessa, ou seja, o valor da conclusão é estritamente menor que o valor da *pM*. No entanto, dentre todas essas regras, duas delas não mantêm nenhuma correlação mais estreita entre a *pM* e a conclusão. São as regras de *e∨* e *e∃*. Nessas, a conclusão pode, inclusive, não ser subfórmula da *pM*. Conseqüentemente, podem ter valor maior que o da *pM*. Todavia, as ocorrências topo descartadas pela regra nas derivações subsidiárias têm uma relação fórmula-subfórmula com a *pM*.

As regras ***e∧e*** e ***e∧d*** são, respectivamente, **eliminação da conjunção à esquerda** e **à direita**. São duas regras distintas, pois existem duas posições distintas em que a conclusão pode ocorrer como parte da premissa. Nos contextos em que for dispensável maior precisão, estará indicado só *e∧*.

A regra ***e→*** é **eliminação da implicação**, também chamada **modus ponens**.

A regra ***e∀*** é **eliminação do universal**.

A regra ***e∨*** é a **eliminação da disjunção**. Essa regra contém, além da *pM*, duas *pms C* e suas respectivas derivações subsidiárias. As suposições que ocorrem na derivação subsidiária poderão ser descartadas ou não. Mas a regra só poderá descartar suposições da forma A_1 na primeira derivação subsidiária e descartar suposições da forma A_2 na segunda derivação subsidiária. A regra pode ser intuitivamente examinada a partir da representação na figura abaixo. Contudo, seria violado o requisito de que haja apenas uma conclusão em cada regra:

---

[335] Na verdade, dizer que o parâmetro *a* ocorre em *A* é o mesmo que dizer que existem certas ocorrências do termo τ em *A[a/τ]* que serão quantificadas existencialmente, após a aplicação da regra.

$$\dfrac{\dfrac{A_1 \vee A_2}{\nabla}\text{eliminação da }\vee \quad \begin{matrix}[A_1] & [A_2] \\ \nabla & \nabla \\ C & C\end{matrix}}{C}\text{contração}$$

Figura A - 10

Quanto ao descarte das suposições efetuado pela regra constante da Figura A - 6, ele é da mesma natureza do descarte de $i\rightarrow$. Ou seja, a regra $e\vee$ poderia descartar um número arbitrário de ocorrências da suposição A_1 na primeira derivação subsidiária e/ou da suposição A_2 na segunda derivação subsidiária, inclusive não descartar nenhuma ocorrência.

A regra $e\forall$ é a **eliminação do universal**.

A regra $e\exists$ é a **eliminação do existencial**. Ela é similar à regra $e\vee$, quanto à derivação subsidiária. A regra $e\exists$ pode fechar somente suposições que sejam distintas ocorrências de A. Sobre o parâmetro individual a, existem certas restrições a serem respeitadas. Ele não deve ocorrer em Γ, nem em C. Se existem suposições da forma A descartadas pela regra na derivação subsidiária e tal que o parâmetro a ocorre em A, diremos que a aplicação da regra é **própria** e que a é um **parâmetro próprio de** $e\exists$. Caso o parâmetro a não ocorra ou caso não seja usada nenhuma suposição da forma A, diremos que a aplicação da regra é **imprópria** − mas não incorreta. Observamos que, se a não ocorre em A, $A[a/x]\equiv A$.

3.2.1. Observações quanto à Natureza da Validade de uma Regra

A distinção entre o uso conteudístico e o uso algébrico das variáveis tem implicações quanto à forma de conceber as regras de dedução. O usual é que justifiquemos a validade de uma regra pela preservação da verdade. Diferentemente do caso conteudístico, um uso algébrico das variáveis permitirá relacionar por meio das regras não só as proposições, mas também as formas proposicionais. Entretanto, é problemático dizer que uma forma proposicional é verdadeira ou falsa, pois, embora, em um sentido derivado, talvez possamos dizer que a fórmula $a=a$ é verdadeira e que a fórmula $a=a'$ é falsa, não faz sentido dizer que a fórmula $a=b$ é verdadeira ou, alternativamente, que ela é falsa.

A partir do uso algébrico das variáveis, dizer que as regras de dedução consideradas válidas são aquelas que preservam a verdade só poderá significar que: *se as premissas forem de determinadas formas e, além disso, forem proposições verdadeiras, então, se a conclusão for*

uma proposição, ela será necessariamente verdadeira.[336] Contudo, é preciso notar, a proposição será verdadeira somente se estiver garantido que as expressões que a compõem têm referência. Esse é um pressuposto que permanece implícito na forma gentzeniana de apresentação dos sistemas de dedução natural[337]. De outro modo, poderia ocorrer que as derivações dos sistemas de dedução natural partissem de premissas verdadeiras e resultassem numa conclusão que não é verdadeira nem falsa, como no caso da *e*∀.

Um modo pelo qual costuma-se compreender a afirmação de preservação da verdade, cujas condições são apresentadas pelo emprego do modo subjuntivo, consiste em fazer referência a todas as interpretações concretas que as formas proposicionais que compõem a regra poderiam assumir. Consideremos, por exemplo, a seguinte regra:

$$\frac{a=b}{b=a}$$

Figura A - 11

Admitindo as duas expressões da figura acima como fórmulas de uma linguagem, a preservação da verdade costuma ser averiguada a partir dos atos de fixação da interpretação para os parâmetros *a* e *b*, supondo que a interpretação do predicado de igualdade esteja fixada. Desse ponto de vista, levam-se em conta todas as possíveis fixações dos parâmetros, ou seja, todas as variações possíveis de sua interpretação. Bastaria um único caso em que a fixação resultasse numa premissa verdadeira e numa conclusão falsa para que a regra não fosse válida. Mas, justamente, não é claro qual é o conjunto de <u>todas</u> as fixações possíveis, sem falar que essa noção envolve um uso de quantificação universal. Mas a quantificação universal é uma das operações lógicas que queremos elucidar por meio das regras de dedução natural.

No caso da regra de *i*∀, torna-se pitoresca a afirmação de que as regras preservam a verdade. Do nosso ponto de vista, a premissa imediata dessa regra é uma forma proposicional da qual, em princípio, não faria muito sentido dizer que ela é verdadeira ou falsa, embora talvez faça sentido dizer que ela é uma forma correta/válida. Mas, se fixamos a interpretação do parâmetro que ocorre na premissa imediata, a própria aplicação da regra já não faria mais sentido. Ou seja, em um caso concreto, não faz sentido concluir uma proposição universal tomando como premissa imediata uma proposição concreta, instância da proposição universal, já que de modo geral induções generalizadoras não são inferências dedutivamente válidas.

---

[336] A partir de $\forall xA[a/x]$ podemos concluir *A* tal que, se o parâmetro individual *a* ocorre em *A*, *A* não representa uma proposição, mas uma forma proposicional.

[337] Notamos que isso não ocorre na proposta de dedução natural feita por Jaskowski, conforme o Capítulo I.

Outra alternativa distinta para interpretar a noção de preservação da verdade com respeito aos sistemas de regras de dedução consiste em vê-la mais como um critério de adequação que as regras devem respeitar, e é essa forma que adotamos nesta tese. Assim, se, na verdade, as regras válidas fossem definidas como regras que preservam informação, então a preservação da verdade resultaria do fato de que a regra tem a propriedade de preservação da informação. Mas, definir um conjunto de regras que preserve informação consistirá em apontar um conjunto básico de regras tais que a preservação possa ser constatada por apelo a uma espécie de intuição intelectual, como, por exemplo, no caso da regra da figura acima[338]. As demais regras válidas deveriam poder ser obtidas por composição de regras que já foram reconhecidas intuitivamente como válidas. Desse modo, qualquer regra que não seja elementar, só será validada mediante a demonstração da sua derivabilidade a partir daquele conjunto de regras mais elementares.

Assim, dessa perspectiva, no caso do exemplo da figura acima, poderíamos falar de uma preservação da informação cuja justificativa não seria de ordem propriamente dedutiva, mas, por falta de um termo melhor, de ordem intuitiva e tal que não se faz apelo à fixação de uma interpretação para os parâmetros. Basta supor que os parâmetros podem ter uma interpretação objetual. Nesse caso, como a conexão entre as estruturas informativas das premissas e da conclusão é da ordem da intuição[339], poderíamos entender que o uso da palavra *necessariamente* na formulação do critério de adequação de uma regra dependeria, efetivamente, de uma compreensão inicial da ordem da intuição para as regras elementares e se estenderia para as demais regras sempre que pudéssemos mostrar que elas podem ser obtidas por um procedimento de composição a partir das regras elementares.

De todas as regras elementares, aquela que torna mais pungente o problema de conceber a validade como preservação da verdade é a regra de $i\forall$. Nessa regra e nas suas instâncias, a premissa imediata não é e não pode ser uma proposição, exceto em casos triviais e irrelevantes. Ela deverá sempre ser uma forma proposicional contendo um parâmetro individual. Mas, se não faz sentido assumir que a premissa imediata seja uma proposição, será difícil dizer em que consistiria a preservação da verdade na passagem da premissa imediata à conclusão. Uma saída possível seria a de postular entidades que correspondessem àquela forma proposicional que é premissa imediata e, adicionalmente, dizer que a verdade equivaleria à existência de uma referência (um estado-de-coisas, por exemplo) correspondente a essa forma. Nesse caso, uma

---

[338] Dizer que apelamos à intuição nesse caso não significa dizer que vemos de modo imediato a correção da regra. Significa que, embora possa haver um discurso justificando-a, esse discurso não poderá ser interpretado como um discurso demonstrativo. Na melhor das hipóteses, esse discurso favoreceria a intuição da correção da regra.

[339] Provavelmente de uma intuição não-imediata.

forma proposicional verdadeira apontaria uma entidade abstrata correspondente, ao passo que uma forma falsa apontaria, talvez, outra coisa. Contudo, simplesmente preferiremos não adotar essa via, evitando, na medida de nossas forças, o compromisso ontológico com entidades abstratas.

Notamos que, com respeito à validade das regras, há uma outra leitura possível: aquela na qual as regras de introdução são consideradas como imediatamente válidas, pois, de algum modo, estabeleceriam o núcleo do significado da constante. As regras de eliminação seriam válidas somente se correspondessem adequadamente às regras de introdução. Ou seja, desde essa perspectiva, as eliminações seriam consideradas formas indiretas de provar uma proposição, enquanto as introduções seriam as formas diretas. Essa tem sido a posição adotada pelos intuicionistas com respeito à interpretação daquela passagem de Gentzen que destacamos acima. A posição intuicionista, em geral, trata as regras de dedução natural como regras de inferência, ou seja, regras que envolveriam asserções.

Desde o nosso ponto de vista, as eliminações deveriam ser solidárias das introduções e, em certo sentido, se não houvesse regras de introdução para um determinado símbolo, também não faria sentido postular uma regra de eliminação. Só assim poderíamos dizer que as eliminações são conseqüência das introduções.

1.1.1.1. A Harmonia das Eliminações com respeito às Introduções

A seguir, apresentamos critérios de adequação para as regras de introdução e eliminação. Na verdade, são critérios de adequação das eliminações com respeito às introduções.

Um conjunto de regras de eliminação para uma constante lógica © deverá permitir (pelo menos) obter as conseqüências que se seguiriam comumente de cada uma das condições suficientes para introduzir a constante. Isso estará assegurado quando pudermos demonstrar as cláusulas a seguir, para cada uma das constantes lógicas da Figura A - 6. A seguir Γ, Δ e Θ são consideradas listas finitas de fórmulas; o símbolo $\Rightarrow$ está sendo usado para representar um condicional metalingüístico; os quantificadores são metalingüísticos. As listas de fórmulas Θ serão consideradas listas paramétricas, de modo que suas ocorrências podem ser suprimidas:[340]

[340] Consideramos também que, nas cláusulas, a melhor leitura para os quantificadores sobre uma lista de fórmulas Γ é a leitura: *para qualquer* Γ. Notamos que esse não é um quantificador de primeira ordem. Além disso, o símbolo de conseqüência dedutiva poderá ser interpretado de modo mais estrito, como a posse de uma dedução que leva de determinadas suposições até uma determinada conclusão.

(a.i) Conjunção: $\{\forall\Gamma\forall\Delta((\Gamma\Vdash A \text{ e } \Delta\Vdash B) \Rightarrow \Gamma,\Delta,\Theta\Vdash C)\}$ (*)

$\Rightarrow$

$\{A\wedge B,\Theta\Vdash C\}$ (**)

(a.ii) Disjunção: $\{\forall\Gamma(\Gamma\Vdash A\Rightarrow\Gamma,\Theta_1\Vdash C) \text{ e } \forall\Delta(\Delta\Vdash B\Rightarrow\Delta,\Theta_2\Vdash C))\}$ (*)

$\Rightarrow$

$\{A\vee B,\Theta_1,\Theta_2\Vdash C\}$ (**)

(a.iii) Implicação: $\{\forall\Gamma(\Gamma,A\Vdash B\Rightarrow\Gamma,\Theta\Vdash C)\}$ (*)

$\Rightarrow$

$\{A\rightarrow B,\Theta\Vdash C\}$ (**)

(a.iv) Universal: $\{\forall\Gamma((\Gamma\Vdash A \text{ e } a\notin\Gamma)\Rightarrow\Gamma,\Theta\Vdash C)\}$ (*)

$\Rightarrow$

$\{\forall xA[a/x],\Theta\Vdash C\}$ (**)

(a.v) Existencial: $a\notin C$ e $a\notin\Theta\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma(\Gamma\Vdash A[a/\tau]\Rightarrow\Gamma,\Theta\Vdash C)\}$ (*)

$\Rightarrow$

$\{\exists xA[a/x],\Theta\Vdash C\}$ (**)

Para demonstrar essas cláusulas não será admitido fazer uso das regras de introdução. A idéia é mostrar que as eliminações são suficientes para extrair uma conclusão que seja comum a todas as condições de introdução de uma determinada constante. Assim, para demonstrar tais cláusulas, só será admissível o emprego das regras de eliminação da constante em questão mais os seguintes fatos básicos: identidade, $A\Vdash A$; composição, ou seja, que obtemos $\Gamma\Vdash B$ compondo $\Gamma\Vdash A$ e $A\Vdash B$; contração, ou seja, obtemos $\Gamma,A,\Delta\Vdash B$ de $\Gamma,A,A,\Delta\Vdash B$. Assim, se as regras de eliminação estiverem mal formuladas, pode ocorrer de nem todas as conseqüências comuns às condições de introdução serem deriváveis via regras de eliminação.

Se admitíssemos o uso das regras de introdução na demonstração das cláusulas acima, poderíamos demonstrar a validade da cláusula para a expressão *tonk*[341], a qual não quereríamos, de forma nenhuma, considerar como uma constante lógica correta. As regras para essa expressão são as seguintes regras:

$$\frac{A}{A\mathit{tonk}B}\ \text{i-tonk} \qquad \frac{A\mathit{tonk}B}{B}\ \text{e-tonk}$$

Figura A - 12

A demonstração requereria que, da suposição de $\forall\Gamma(\Gamma\Vdash A \Rightarrow \Gamma\Vdash C)$, obtivéssemos $AtonkB\Vdash C$. Mas, a partir da suposição, temos $AtonkB\Vdash A \Rightarrow AtonkB\Vdash C$. A seguir, pela regra de eliminação, temos $AtonkB\Vdash B$ e $BtonkA\Vdash A$. Pela regra de introdução, temos $B\Vdash BtonkA$. Logo, por composição, teríamos $B\Vdash A$ e, em seguida, $AtonkB\Vdash A$. Finalmente, teríamos $AtonkB\Vdash C$.

Demonstramos a seguir a cláusula para a conjunção, os demais casos são similares: *(i)* suponha que *(*)*; *(ii)* por instanciação universal, temos $(A\wedge B\Vdash A \text{ e } A\wedge B\Vdash B) \Rightarrow A\wedge B, A\wedge B, \Theta\Vdash C$; *(iii)* mas, pela regras de $e\wedge$, temos $A\wedge B\Vdash A$ e $A\wedge B\Vdash B$; *(iv)* logo, por *modus ponens*, temos $A\wedge B, A\wedge B, \Theta\Vdash C$; *(v)* finalmente, por contração, temos *(**)*.

Podemos dizer que cada uma das cláusulas acima apresenta condições sob as quais uma fórmula *C* será considerada conseqüência de uma constante ©. Assim, se as regras de eliminação forem minimamente suficientes, cada uma das cláusulas deverá poder ser demonstrada fazendo uso delas. Todavia, isso ainda não significaria que as eliminações sejam adequadas, pois elas poderiam ser superabundantes, o que ocorreria se pudéssemos concluir uma fórmula *C* usando a regra de eliminação e a fórmula não fosse conseqüência de cada uma das condições suficientes para introduzir ©. Desse modo, para garantir que as regras de eliminação estejam em completa harmonia com as introduções, seria preciso exigir mais: exigir que qualquer fórmula *C* que possa ser concluída via regra de eliminação já seja obtida a partir de cada uma das condições suficientes para introduzir ©. Mais precisamente, se as condições para aplicar uma eliminação de conseqüência imediata *C* estiverem cumpridas, é porque cada uma das condições suficientes para introduzir a constante em questão já permitiria obter *C*.[342] Nas cláusulas abaixo, estão dadas as condição para cada constante:

---

[341] Para uma exposição do problema envolvendo a constante, ver [Pri60] e o comentário em [Bel62].

[342] A forma sob a qual consideraremos as regras de eliminação nas cláusulas abaixo é aquela empregada por Schröder-Heister em [Sch84] (pág. 1293). Para uma discussão acerca dessas formas, ver o Capítulo IV.

(b.i) Conjunção: $\{A,B,\Theta \Vdash C\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma\ \forall\Delta\ ((\Gamma \Vdash A \text{ e } \Delta \Vdash B) \Rightarrow \Gamma,\Delta,\Theta \Vdash C)\}$ *(**)*

(b.ii) Disjunção: $\{A,\Theta_1 \Vdash C \text{ e } B,\Theta_2 \Vdash C\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma(\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma,\Theta_1 \Vdash C) \text{ e } \forall\Delta\ (\Delta \Vdash B \Rightarrow \Delta,\Theta_2 \Vdash C))\}$ *(**)*

(b.iii) Implicação: $\{\Theta_1 \Vdash A \textbf{ e } B,\Theta_2 \Vdash C\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma(\Gamma,A \Vdash B \Rightarrow \Gamma,\Theta_1,\Theta_2 \Vdash C)\}$ *(**)*

(b.iv) Universal: $\{A[a/\tau],\Theta \Vdash C\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma((\Gamma \Vdash A \text{ e } a \notin \Gamma) \Rightarrow \Gamma,\Theta \Vdash C)\}$ *(**)*

(b.v) Existencial: $\{a \notin C \text{ e } a \notin \Theta \text{ e } A,\Theta \Vdash C\}$ *(*)*

$\Rightarrow$

$\{\forall\Gamma(\Gamma \Vdash A[a/\tau] \Rightarrow \Gamma,\Theta \Vdash C)\}$ *(**)*

Em cada uma das cláusulas recém-dadas, a condição *(*)* é a condição necessária à aplicação da regra de eliminação (corresponde à condição de aplicabilidade da regra de eliminação da constante). Só estabeleceríamos que $\copyright \Vdash C$[343], caso essa condição seja cumprida.

Sob um olhar mais acurado, será possível perceber que o segundo naipe de cláusulas corresponde àquilo que Prawitz chama de princípio de inversão e do qual tratamos no corpo da tese. Se estivermos corretos, então a validade do princípio de inversão na versão que lhe dá Prawitz pode ser interpretada como uma garantia parcial de que as regras de eliminação estão em harmonia com as introduções. Mais precisamente, elas garantiriam que as eliminações não são supergeradoras. Além do mais, como cada uma das cláusulas do segundo naipe já apresenta tanto as condições para aplicação da regra de eliminação quanto as condições para aplicação das regras

[343] Nessas cláusulas, estamos considerando versões das regras de eliminação que contêm subderivações subsidiárias para o caso das constantes $\wedge$, $\rightarrow$ e $\forall$.

de introdução, as cláusulas devem poder ser demonstradas sem nenhum apelo às regras de introdução ou às regras de eliminação da referida constante.

Nesse caso, temos algo parecido ao que ocorria antes. Se permitíssemos o uso da regra de introdução e/ou de eliminação, acabaríamos por demonstrar a respectiva cláusula para a constante *tonk*, pois, ao supor que $A\,tonk\,B \Vdash C$ e ao supor que $\Gamma \Vdash A$, demonstraríamos por composição que $\Gamma \Vdash C$, já que $A \Vdash A\,tonk\,B$ por introdução de *tonk*.

Nossa proposta de um princípio de harmonia acima guarda algumas semelhanças com um princípio de mesmo nome enunciado por Tennant em [Ten78] e posteriormente revisado em várias ocasiões, a última delas [Ten06]. Ele dá como condições de harmonia entre regras de introdução e eliminação para uma constante lógica as duas condições seguintes ([Ten06], págs. 8 e 9): *(i)* a de que uma ©-proposição deve ser a mais forte conclusão que se segue das condições descritas pelas regras de introdução de ©; *(ii)* a de que a ©-proposição deve ser, por outro lado, a mais fraca premissa maior sob as condições descritas pelas regras de eliminação de ©. Até onde podemos ver a parte *(i)* tem íntima correspondência com a primeira parte do princípio de harmonia que propusemos acima. Já a parte *(ii)* diverge daquilo que constitui a segunda parte do princípio que nós propusemos. Além disso, pelo fato de usarmos explicitamente o conceito de conseqüência dedutiva, acreditamos que as condições estão mais claramente formuladas em nosso caso do que no caso de Tennant que emprega os conceitos de *a-conclusão-mais-forte* e *a-premissa-maior-mais-fraca*. Usando o conceito de conseqüência dedutiva, *a conclusão mais forte* é aquela ©-proposição da qual seguem-se todas as demais proposições pertencentes ao conjunto das conseqüências dedutivas associado às condições de introdução da constante ©. *A premissa maior mais fraca*, por seu turno, é aquela ©-proposição que é conseqüência dedutiva de todas as proposições que poderiam figurar na posição de premissa maior da regra de eliminação, mantidas as mesmas condições.

3.2.2. Mais Observações quanto à Operação de Substituição Sintática

Dizíamos anteriormente que havia outra razão para empregarmos as representações de substituição sintática $[\varepsilon_1/\varepsilon_2]$ nas expressões com o fim de comunicar. Nas regras envolvendo o quantificador $\forall \| \exists \|$, essa forma de representação é o modo mais próximo que encontramos de salientar o fato de que a *pM* é subfórmula da conclusão na regra $i\forall \| i\exists \|$ e que a conclusão é ‖as suposições subsidiárias são‖ subfórmula da *pM* na regra $e\forall \| e\exists \|$.

3.2.3. Observações acerca da Semântica dos Operadores Lógicos

Muitos autores têm associado o significado das constantes lógicas às suas respectivas regras de introdução e eliminação. Esse é um tema espinhoso. De fato, ele nos remete a inúmeras questões não-resolvidas. A primeira e mais óbvia é a definição do que é uma constante lógica. Outro problema diz respeito à natureza das restrições que devemos impor sobre as regras. Todavia, de modo geral, estamos dispostos a aceitar que as regras de dedução natural de introdução e eliminação capturam elementos importantes da semântica dos operadores lógicos. Elas capturariam o núcleo duro, embora nos pareça difícil sustentar a tese mais forte de que elas capturariam toda essa semântica.

Em nossa tese, procuramos investigar que tipo de regra é necessário para representar a lógica clássica. Se de fato quisermos assumir a possibilidade de elucidar a lógica clássica por meio de regras de dedução natural, deveremos admitir outros tipos de regras que não se encaixam no estilo das regras de introdução ou de eliminação. Pelo menos, as regras já não seriam completamente independentes.

Embora não tenhamos uma resposta completa ao problema de saber quais são os tipos de regras admissíveis, parece-nos, todavia, que um dos critérios mais importantes para a análise do significado das constantes lógicas por meio de regras de dedução consiste em buscar justamente as constantes que possam ser caracterizadas de forma separada e independente umas das outras. Como estamos mostrando na tese, nem sempre uma caracterização dessas será possível. De fato, alguns autores já haviam observado que nem sempre é possível dar regras de eliminação completamente independentes para certas constantes lógicas explicitamente definíveis. Um exemplo é a constante lógica proposicional *s* a seguir: $sABC \equiv_{df} (A \leftrightarrow B) \vee C$.[344]

Dentre todas as formas de definição, aquela que parece ser a mais segura e inquestionável é a definição explícita. Se isso for correto, a constante *s* acima estaria perfeitamente definida, desde que, é claro, conheçamos o significado das constantes lógicas $\leftrightarrow$ e $\vee$. A seguir, poderíamos ainda considerar que uma outra forma de definição mereceria nossa credibilidade. Referimo-nos àquela na qual temos regras de introdução e de eliminação completamente independentes. Se houvesse uma definição dessa natureza para *s*, poderíamos considerá-la bem-definida. É possível dar regras de introdução completamente independentes para ela:

---

[344] Essa constante não deve ser confundida com a constante *s* que apresentamos no Capítulo II. Para maiores detalhes sobre a que recém-apresentamos, ver [Sch84].

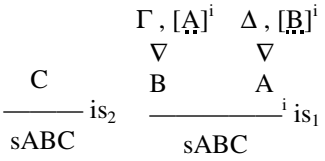


Figura A - 13

Contudo, infelizmente, seria impossível dar a respectiva regra de eliminação de forma completamente independente:

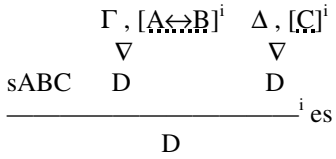


Figura A - 14

Desse modo, vemos que nem sempre uma constante poderá ser caracterizada dedutivamente por meio de regras de introdução e eliminação completamente independentes, embora a constante seja explicitamente definível. Eventualmente, esse fato poderia levar alguns a acreditar que isso é uma boa razão para considerar, de algum modo, que as regras de introdução são as regras essenciais, visto que, segundo Gentzen, as introduções são como que definições e as eliminações nada mais do que as conseqüências dessas definições. Todavia, existem também boas razões para não tirar conclusões apressadas.

Suponhamos que tivéssemos definido a constante *s* do seguinte modo: $sABC \equiv_{df} (A \rightarrow B) \rightarrow C$. Não vemos por qual razão não a consideraríamos bem-definida, se a outra constante *s* anterior também foi considerada bem-definida. Para essa nova constante *s*, poderíamos especificar seu comportamento dedutivo com uma única regra de eliminação completamente independente:

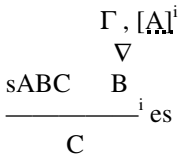


Figura A - 15

Porém, sua regra de introdução não seria completamente independente:

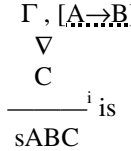


Figura A - 16

Assim, sem presumir *a priori* nenhum tipo de restrição, somos obrigados a admitir que o interesse das regras de dedução natural completamente independentes está no fato de que elas

poderiam propiciar uma boa compreensão do núcleo semântico de um número reduzido de constantes lógicas, pois nem toda constante que possa ser considerada bem-definida seria uma constante para a qual haveria regras de introdução e de eliminação completamente independentes.

3.3. Regras Não-Contempladas no Quadro Anterior

3.3.1. A Regra de Eliminação do Absurdo

Os sistemas de dedução natural também contemplam, usualmente, uma outra regra que não está no quadro da Figura A - 6 e que podemos chamar de **regra de eliminação do absurdo**:

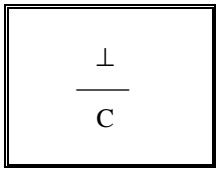


Figura A - 17

Notamos que essa regra embute o princípio de ***ex falso quodlibet***.

Essa regra pode ser usada em duas versões diferentes, dependendo das restrições que fazemos sobre a fórmula *C*. A regra na qual não fazemos nenhuma restrição à fórmula *C* será chamada de **grande eliminação do absurdo** (***E⊥***). A outra versão da regra em que a fórmula *C* deve ser uma fórmula básica será chamada de **eliminação do absurdo** (***e⊥***). A regra *e⊥* é um **caso particular** de *E⊥*. Ela também é, freqüentemente, chamada de **absurdo intuicionista** (***⊥$_i$***).

O problema da validade dessas regras é crucial nesta tese. O problema da validade é mais complexo para a regra *E⊥* que para a regra *e⊥*, pois o conjunto das conclusões de *E⊥* contém e estende o conjunto das conclusões de *e⊥*.

3.3.2. Regras de Dedução Indireta

Em certos sistemas, encontraremos a presença de outras regras que não podemos classificar como regra de eliminação ou como regra de introdução. Um exemplo é a **regra *P***:

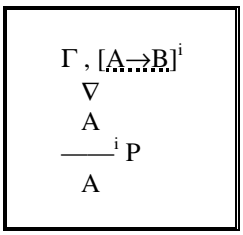


Figura A - 18

Ela é uma daquelas que podemos chamar de **regra de dedução indireta**. As regras de dedução indireta são indispensáveis quando se trata de definir a lógica clássica. Na regra *P*, há uma única premissa imediata que será, portanto, a **premissa maior** (***pM***). A premissa imediata *A* depende de uma derivação subsidiária e, quando pudermos estabelecer que *A* pode ser deduzida de $A \rightarrow B$, consideraremos que, desse modo, *A* já seria conseqüência dedutiva do conjunto Γ de suposições. O qualificativo "regra de dedução indireta" justifica-se na medida em que a regra não nos dá conhecimento de qual poderia ser a conexão inferencial direta que nos levaria de Γ a *A*. Até pode ocorrer que a conexão inferencial que nos leva de $\Gamma, A \rightarrow B$ a *A* seja direta, mas não fica claro como, dessa conexão inferencial, poderíamos extrair a outra conexão. Da mesma forma que em outros casos, admite-se que, para *m* ocorrências topo da forma $A \rightarrow B$, a regra descarte *n* ocorrências, tal que $0 \leq n \leq m$. Dentre todas as regras, essa é a única em que está garantido que a premissa imediata é subfórmula da conclusão e vice-versa!

A regra *P* poderia ser interpretada como uma informação que estabelece a complementaridade e a incompatibilidade entre dois tipos de proposições bem específicas. Em outros termos, $A \rightarrow B$ e *A* seriam informações complementares e incompatíveis e, dessa forma, como a suposição $A \rightarrow B$ descartada pela regra é uma informação complementar à informação da conclusão *A*, aquela suposição não teria nenhuma relevância dedutiva para a obtenção da conclusão *A*.

O problema da validade desse tipo de regra também é outro problema crucial, pois ela escapa à dicotomia introdução-eliminação. Uma boa dose de nossa investigação consistiria em examinar o problema da validade dessa regra.

3.4. Árvores de Derivação

A partir das regras lógicas elementares, a estrutura da Figura A - 3 acima poderia ser construída conforme a seguinte derivação, usando a regra $E\bot$, partindo da suposição $A \wedge \sim A$ e, claro, assumindo que a negação é um operador definido:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge \sim A}{A}\, e\wedge e}{A \vee B}\, i\vee e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge \sim A}{\sim A}\, e\wedge d \qquad [A]^1}{\bot}\, e\rightarrow}{B}\, E\bot \qquad [B]^2}{B}\, {}^2 e\vee$$

Figura A - 19

Os sistemas lógicos, entre eles incluídos os sistemas de dedução natural, assumem que o problema da correção de uma derivação complexa é sempre redutível e depende da correção das derivações elementares. Assim, a última regra na Figura A - 3 é correta, porque a estrutura em azul acima é uma construção correta.

Um sistema de dedução natural deve ser aplicável, pelo menos, a diversas teorias matemáticas. Por isso, quando se examinam as conexões lógicas em uma teoria, importa admitir também as chamadas regras extralógicas. Uma **teoria** será um conjunto de regras composto: *(i)* de um subconjunto do conjunto das regras lógicas elementares (com ou sem restrições adicionais); *(ii)* de um conjunto de regras de dedução extralógicas, tal que esse conjunto eventualmente pode conter regras sem premissa‖s‖, ou seja, **axiomas**.[345]

Diremos que **uma derivação é pura** quando ela é obtida por meio da combinação de regras lógicas elementares tal que nenhuma ocorrência de fórmula contenha constantes extra-lógicas. Caso contrário, diremos que a **derivação não é pura**. As considerações a seguir se aplicam às derivações em geral, puras ou não.

A expressão **instância de regra** designará uma ocorrência de uma das regras lógicas elementares ou das regras extralógicas em uma derivação. As instâncias serão identificadas, na prática, pela linha de separação.

Derivações que não contêm instâncias de regras de quantificadores serão derivações **proposicionais**, ao passo que as que contêm pelo menos uma instância de regra de quantificador de primeira ordem serão derivações **predicacionais de primeira ordem**.

As composições das quais falávamos podem ser de duas ou mais derivações cuja correção já tenha sido mostrada e tal que a ocorrência final de uma seja suposição aberta na outra. A derivação da Figura A - 19 seria representável de várias formas distintas, dentre as quais as três formas a seguir, em que a estrutura em azul da terceira derivação corresponde à estrutura em azul da Figura A - 19:

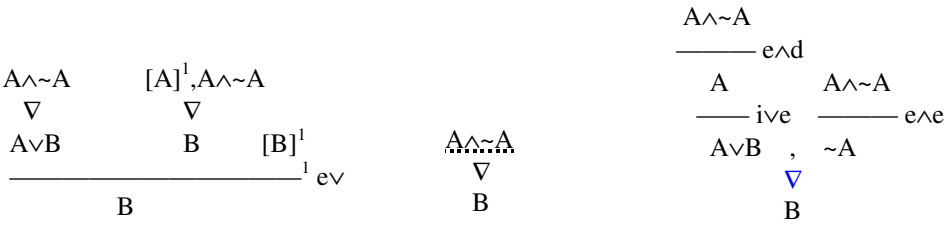


Figura A - 20

[345] Representaremos um axioma como uma regra sem premissas imediatas.

Dada uma ocorrência de fórmula ‖uma instância de regra‖ em uma árvore de derivação, a partir dela fica determinada uma **subárvore de derivação** que inclui a ocorrência ‖que inclui a instância e sua ocorrência de conclusão‖. Na Figura A - 20, do lado esquerdo, as ocorrências de $A \vee B$ e de B determinam, cada uma, uma subárvore. A regra de $e\vee$ determina uma subárvore cuja conclusão é B. Nesse caso, a subárvore é idêntica à árvore de derivação.

As estruturas derivacionais em árvore são compostas por nodos. Em uma árvore de derivação, o nodo mais abaixo na árvore é o **nodo raiz**. Usualmente, consideramos que os nodos de uma árvore de derivação são as ocorrências de fórmulas da derivação. No entanto, adotaremos uma segunda possibilidade que consiste em considerar as instâncias de regra como nodos da derivação. Mais precisamente, em considerar as linhas de separação associadas a uma instância de regra como nodos. Assumiremos, adicionalmente, que cada ocorrência topo de uma derivação é dada por uma regra de **lançamento de suposição** (***lh***)[346], quando a ocorrência não for um axioma. Por outro lado, se a ocorrência for descartada, consideraremos que o ato de lançamento de hipótese sofreu reversão. O **nodo sucessor imediato** em uma derivação é aquele que está imediatamente acima de um dado nodo. Assim, dada uma instância de regra que não seja *lh*, qualquer ocorrência que seja premissa imediata dessa instância será sucessora imediata da sua conclusão. Por outro lado, dada uma ocorrência, a sucessora imediata da instância que tem essa ocorrência como premissa será a instância que tenha a mesma ocorrência como conclusão.

Uma derivação π pura será, portanto, uma árvore onde cada nodo poderá ter de zero a três nodos sucessores imediatos, pois nenhuma das regras para constantes lógicas tem mais que isso, nem a regra de dedução indireta. Nodos de derivações não-puras podem ter tantos sucessores imediatos quantas premissas houver nas regras extralógicas mais complexas. Na figura abaixo, retomamos a derivação da Figura A - 19:

$$\dfrac{\dfrac{A\wedge\sim A}{A}\,e\wedge e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge\sim A}{\sim A}\,e\wedge d \qquad [A]^1}{\bot}\,e\rightarrow}{B}\,E\bot}{A\vee B} \qquad [B]^2 \qquad \Big/\,e\vee,2$$

$$B$$

Figura A - 21

[346] Contrariamente ao que pode parecer, a introdução dessa regra não é *ad hoc*. Se as regras de inferência estão associadas a atos, então deve haver um ato, nesse caso representado por uma regra de inferência, que consiste em propor um ponto de partida. Consideraremos que lançar uma hipótese envolve propor um ponto de partida.

Nela dão-se as relações a seguir. Considerando as ocorrências como nodos: para a ocorrência final *B* são sucessores imediatos a *pm B* entre colchetes, a *pm B* sem colchetes e a *pM A∨B*. Considerando as instâncias como nodos: para a instância de *e∨* serão sucessores imediatos a instância *lh* sobre *B*, depois descartada, a instância de *E⊥* e a instância *i∨e*; para a instância de *e→*, serão a instância *e∧d* e a instância *lh* sobre *A*, depois descartada; para a instância *i∨e*, a única sucessora imediata é a instância *e∧e*.

O conceito de **nodo antecessor imediato** (de um outro nodo) é obtido pela inversão do conceito de sucessor imediato. Um nodo será **sucessor** ⟦**antecessor**⟧ de outro quando houver uma cadeia de sucessores ⟦antecessores⟧ imediatos ligando os dois nodos. Para dois nodos distintos, se nenhum deles for antecessor do outro, dizemos que eles são **nodos paralelos**. Quando as instâncias são tomadas como nodos de π, da mesma forma como as premissas de uma regra eram classificadas como menores ou maiores, as instâncias também serão classificadas. A instância mais abaixo em π será, como já dissemos, a **instância raiz de π**, (***r*(π)**). As demais instâncias serão ou **instância maior** (***iM***), quando sua conclusão é *pM* da instância que a antecede imediatamente, ou será uma **instância menor** (***im***), quando sua conclusão é *pm* da instância que a antecede imediatamente. Na Figura A - 21 acima, *e∨* é raiz, *i∨e* é *iM* e *E⊥* é *im*.

Ao tomarmos as respectivas árvores de duas derivações distintas π e π', diremos dos nodos correlatos em uma e outra que eles ocupam a **mesma posição** em π e π', seja o nodo interpretado como ocorrência ou como instância. Diremos que uma **ocorrência de fórmula ⟦instância⟧ é a mesma** em π e π' se as ocorrências de fórmula ⟦instâncias⟧ ocupando a mesma posição forem sintaticamente idênticas ⟦forem do mesmo tipo e descartarem ocorrências topo nas mesmas posições⟧.

Quanto às operações de transformação sobre as derivações, quando elas forem tais que possam ser definidas a partir dos atos de apagar instâncias e/ou ocorrências e de acrescentar subderivações novas sobre ocorrências topo, diremos, intuitivamente, que uma dada instância ⟦ocorrência⟧ de π' é **resíduo** de uma instância ⟦ocorrência⟧ de π quando ela é sintaticamente equivalente a esta e ambas ocorrem na mesma posição. Ou seja, instâncias ⟦ocorrências⟧ adicionadas ao topo da derivação não são resíduo de nada. Naturalmente, uma instância ⟦ocorrência⟧ de π' será resíduo de, no máximo, uma instância ⟦ocorrência⟧ de π.

O **comprimento de uma derivação** π ($|\pi|$) será igual ao número de instâncias da derivação, incluindo todas as instâncias *lh* e axiomas. Claramente, o número de instâncias de uma derivação será igual ao número de ocorrências da derivação. O **número de instâncias estritas de uma derivação** π ($|\pi|_{inst.}$) não conta nenhum *lh* nem axiomas. Assim, $|\pi|_{inst.}<|\pi|$.

A seguir, são apresentadas certas estruturas seqüenciais de instâncias sobre uma derivação.

Definição A - 5 - Seja π uma derivação e seja r_1 uma instância em π. Diremos que $\rho=r_1,...,r_n$ é um **ramo** *de π, se, para todo r_i, com $1<i\leq n$, r_i for a instância sucessora imediata de r_{i-1} em π e r_n for uma instância lh.*

Definição A - 6 - Seja π uma derivação, se r_1 é $r(\pi)$ e $\rho=r_1,...,r_n$ é um ramo de π, diremos que $\lambda=r_1,...,r_n$ é uma **linha** *de π.*

Definição A - 7 - Seja π uma derivação, seja r_1 uma instância de π e seja $\rho=r_1,...,r_m,...,r_n$ um ramo de π, para algum $m\leq n$, diremos que a seqüência $\sigma=r_1,...,r_m$ é um **segmento de ramo** *em π.*[347]

Essas estruturas seqüenciais recém-definidas têm ordem de baixo para cima[348]. É preciso notar nesse ponto que essas definições consideram como nodos de π as instâncias de regra de π, mais precisamente as respectivas linhas de separação. Quando nosso interesse recai sobre as ocorrências, os termos correlatos são definidos como a seguir.[349] As estruturas seqüenciais que se seguem também são definidas de baixo para cima.

Definição A - 8 - Seja π uma derivação e seja A_1 uma ocorrência em π. Diremos que $\rho=A_1,...,A_n$ é um **ramo de ocorrências** *de π, se, para todo A_i, com $1<i\leq n$, A_i for sucessor imediato de A_{i-1} em π e A_n for uma ocorrência topo.*

Definição A - 9 - Seja π uma derivação, se A_1 é conclusão de $r(\pi)$ e $\rho=A_1,...,A_n$ é um ramo de ocorrências de π, diremos que $\lambda=A_1,...,A_n$ é uma **linha de ocorrências** *de π.*

---

[347] Observamos que essa definição carrega em seu bojo o conceito de *segmento de linha*.
[348] Intuitivamente, ramos nascem de outros ramos e do tronco.
[349] Os termos *ramo*, *linha* e *segmento de ramo* - respectivamente, *branch*, *thread* e *segment* - são definidos para seqüências de ocorrências de fórmulas em [Pra65], pág. 25. Essas definições diferem das que apresentaremos aqui. Lá, as seqüências de ocorrências são definidas *top-down*.

Definição A - 10 - Seja π uma derivação, seja A_1 uma ocorrência de π e seja $\rho=A_1,...,A_m,...,A_n$ um ramo de ocorrências de π, com $m\leq n$, diremos que a seqüência $\sigma=A_1,...,A_m$ é um **segmento de ramo de ocorrências** *em π.*

Quando $\sigma=r_1,...,r_n$ ⟦$\sigma=A_1,...,A_n$⟧ for um segmento de ramo, diremos que r_1 ⟦A_1⟧ é o **vértice do segmento** e r_n ⟦A_n⟧ é o **topo do segmento**.

Definimos o **comprimento de um segmento de ramo ⟦de ocorrências⟧** σ (|σ|) como o número de instâncias ⟦ocorrências⟧ que o segmento de ramo contém. Essa definição também aplica-se a ramos e linhas. A seguir, definimos o conceito de ramo axial que é, basicamente, aquele ramo em que a conclusão e uma premissa imediata da mesma instância de regra têm entre si uma relação de fórmula-subfórmula. O conceito é similar, mas não igual, ao conceito de ramo principal presente em [Pra65] (pág. 41).

Definição A - 11 - Diremos que um ramo de instâncias $\rho=r_1,...,r_n$ de uma derivação π é um **ramo axial de instâncias** *se e somente se:*

(i) o ramo principia de uma das seguintes formas:

(i.i) r_1 é $r(\pi)$ e r_2 é iM;

(i.ii) r_1 é $r(\pi)$, essa instância é e$\vee$ ou é e$\exists$ e, além disso, r_2 é im;

(i.iii) r_1 é im de e$\rightarrow$, essa instância não é e$\vee$, nem e$\exists$, e r_2 é iM;

(i.iv) r_1 é im de e$\rightarrow$, essa instância é ou e$\vee$ ou e$\exists$ e, além disso, r_2 é im;

(i.v) r_1 é e$\vee$ ou e$\exists$ e, além disso, r_2 é iM;

(ii) o ramo continua da seguinte forma, para qualquer j tal que $2<j<n$:

(ii.i) se r_j é e$\vee$ ou e$\exists$, então r_{j+1} é im;

(ii.ii) se r_j não é e$\vee$ e, nem e$\exists$, então r_{j+1} é iM.

Definição A - 12 - Diremos que um ramo de ocorrências $\rho=A_1,...,A_n$ de uma derivação π é um **ramo axial de ocorrências** *se e somente se:*

(i) o ramo principia de uma das seguintes formas:

(i.i) A_1 é conclusão de π e A_2 é pM de qualquer regra, menos de e$\vee$ e de e$\exists$;

(i.ii) A_1 é conclusão de π e A_2 é pm de e$\vee$ ou de e$\exists$;

(i.iii) A_1 é pm de e$\rightarrow$ e A_2 é pM de qualquer regra, menos de e$\vee$ e de e$\exists$;

(i.iv) A_1 é pm de e$\rightarrow$ e A_2 é pm de e$\vee$ ou e$\exists$;

(i.v) A_1 é pM de e$\vee$ ou de e$\exists$ e A_2 é pM de qualquer regra, menos de e$\vee$ e de e$\exists$;

(i.vi) A_1 é pM de e$\vee$ ou de e$\exists$ e A_2 é pm de e$\vee$ ou e$\exists$;

(ii) o ramo continua da seguinte forma, para qualquer j tal que 2<j<n:

(ii.i) se A_j é conclusão de e∨ ou e∃, então A_{j+1} é pm;

(ii.ii) se A_j não é conclusão de e∨ e, nem de e∃, então A_{j+1} é pM.

Observamos que há uma estreita associação entre os dois tipos de ramos axiais.

No mesmo exemplo anterior, identificaremos os ramos axiais como a seguir (ρ será usado para representar tanto os ramos de instâncias quanto os ramos de ocorrências). No caso dos ramos axiais de ocorrências, cada um deles corresponderá a uma linha tracejada sobre o diagrama abaixo, iniciando justamente em um pequeno círculo:

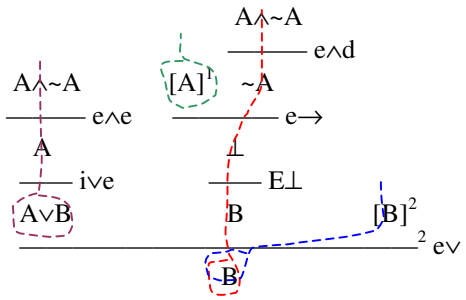


Figura A - 22

Da esquerda para a direita:

(i) ρ^{I}=*e∨,i∨e,e∧e,lh* é um ramo axial, cujo ramo axial de ocorrências associado é ρ^{I}=*A∨B,A,A∧~A*;

(ii) ρ^{II}=*lh* é um ramo axial, cujo ramo axial de ocorrências associado é ρ^{II}=*A* (o ramo é constituído daquela ocorrência topo *A* descartada por *e∨*);

(iii) ρ^{III}=*e∨,E⊥,e→,e∧d,lh* é um ramo axial que inicia em *r(π)* e cujo ramo axial de ocorrências associado é ρ^{III}=*B,B,⊥,~A,A∧~A*;

(iv) ρ^{IV}=*e∨,lh* é um ramo axial, cujo ramo axial de ocorrências associado é ρ^{IV}=*B,B*.

3.4.1. Observações sobre o Descarte de Suposições

As regras que fecham suposições abertas são: *i→*, *e∨*, *e∃* e *P*. O descarte vai indicado pela colocação de colchetes em torno da ocorrência topo, acompanhado de um índice que também acompanha a instância que "realiza" o descarte. Em uma derivação, não é permitido que duas instâncias de regras distintas tenham o mesmo índice de descarte.

A princípio, duas formas de efetuar os descartes em uma subderivação seriam imagináveis:

(i) o descarte de todas as suposições abertas, sintaticamente idênticas a uma determinada

fórmula;

(ii) o descarte de um número qualquer das suposições abertas, sintaticamente idênticas a uma determinada fórmula, número que varia de zero a todas.

Sem maiores informações, o primeiro procedimento poderia parecer o mais adequado. Contudo, ele é demasiadamente restritivo. Como todas derivações admissíveis desde o primeiro ponto de vista são admissíveis desde o segundo ponto de vista, adotaremos o segundo. Além disso, com o primeiro procedimento perdem-se certas propriedades relevantes.[350]

Observamos que há uma única regra de introdução que efetua descarte de suposições: $i\rightarrow$.

Observamos, também, que há uma diferença importante dos sistemas de dedução natural com respeito aos sistemas axiomáticos: os primeiros representam de forma primária o uso de hipóteses e/ou suposições em uma argumentação, ao passo que os segundos, se o fazem, representam de forma secundária, via teorema da dedução. Aliás, parece-nos que a forma adequada de interpretar o teorema da dedução consiste exatamente em perceber que a sua demonstração equivale a mostrar a validade da regra de introdução da implicação naqueles sistemas em que o comportamento da implicação está definido por meio de axiomas. Do nosso ponto de vista, a elucidação oferecida pelos sistemas de dedução natural para o fenômeno da argumentação dedutiva cumpre com um critério de adequação mais estreito que os sistemas axiomáticos.

Para a interpretação que atribuiremos ao uso das **suposições** em uma derivação, usar uma fórmula *A* como **suposição** significa propor que consideremos uma virtual situação ou um virtual conjunto de situações (todas compartilhando algo em comum). O ato de supor é um ato distinto dos atos de asserir e afirmar. Supor uma proposição *A* é o mesmo que fazer uma proposta, um convite para tomar *A* como verdadeira ou também para tomar a informação *A* como ponto de partida, ou seja, considerar como se fosse um fato a situação descrita por *A*, o que não implica que *A* descreva um fato. Além disso, como também admitimos o uso de fórmulas para representar formas proposicionais, segundo o uso algébrico das variáveis, supor uma forma proposicional *A* será o mesmo que fazer uma proposta, um convite para considerar em abstrato uma situação ou um conjunto de situações que possa ser encaixado sob a descrição *A*. Novamente, essa suposição não implica um compromisso com a existência de um fato.

---

[350] Prawitz [Pra65], págs. 27-30, também apresenta os dois procedimentos, mas parece não ter percebido, naquele momento, que o primeiro procedimento é problemático: perde-se a unicidade da formal normal. Para maiores detalhes, ver o Capítulo V desta tese.

3.4.2. Observações quanto aos Parâmetros Individuais

Diremos que *a* é um **parâmetro individual próprio** de uma instância de $i\forall$ ‖$e\exists$‖ em uma derivação se *a* ocorre em *A*, premissa de $i\forall$ ‖suposição da derivação subsidiária de $e\exists$‖. Diremos que as ocorrências de um parâmetro individual *a* em uma derivação são **ocorrências fechadas** quando uma dessas ocorrência é uma ocorrência própria de $i\forall$ ‖$e\exists$‖. Serão **abertas** quando não forem fechadas. Fechar um parâmetro significa o mesmo que restringir as substituições que poderiam ser feitas sobre ele. No máximo, poderemos trocá-lo por outro, se precisarmos ou quisermos re-nomear parâmetros dentro da derivação. No contexto de uma derivação, a substitutibilidade dos parâmetros individuais só se aplica às ocorrências abertas. A substituição homogênea das ocorrências de um parâmetro individual por algum termo resultará numa derivação que é uma instância da anterior

Diremos que um parâmetro próprio *a* é **puro** quando todas as ocorrências de *a* na derivação se dão unicamente na subderivação subsidiária da instância de $i\forall$ ‖$e\exists$‖ e ele só é próprio com respeito a essa instância. Caso contrário, diremos que o parâmetro próprio é **impuro**. Parâmetros que não forem próprios não são nem puros nem impuros.

Para transformar qualquer derivação com parâmetros próprios impuros em outra derivação tal que todos seus parâmetros próprios sejam puros, procedemos como a seguir: tomamos uma instância de $i\forall$ ou $e\exists$ mais acima na derivação cujo parâmetro próprio, suponhamos *a*, seja impuro; substituímos todas as ocorrências do parâmetro *a* nas ocorrências de fórmula contidas na subderivação subsidiária por um parâmetro novo que não ocorre em toda a derivação; repetimos o processo paulatinamente até obter uma derivação onde todos os parâmetros próprios sejam puros.

A regra de $i\forall$ é também chamada de **regra de dedução por caso geral**. Vamos retomar a Figura A - 9:

$$\begin{array}{cc} \Gamma & \Gamma \\ \nabla & \nabla \\ A & A \\ & \hline \\ & \forall xA[a/x] \end{array} \; i\forall$$

Figura A - 23

Quando se cumpre a restrição de que o parâmetro *a* não esteja presente em nenhuma ocorrência de Γ, onde estão todas as suposições abertas, várias derivações distintas podem ser

obtidas pela substituição irrestrita de *a* por diferentes termos. Caso ele ocorra em *A*, na derivação à esquerda, será um **parâmetro aberto** ou poderá ser transformado em um pela substituição recém-descrita, pois, nesse caso, ele seria próprio e impuro e se tornaria aberto pelo processo de purificação acima. Porém, após a aplicação da regra $i\forall$, ele se tornará **fechado** e, em geral, sua substituição só será possível se feita por outro que não ocorra na derivação.[351] Usualmente, diz-se que a regra $i\forall$ porta sobre um **objeto genérico** *a* justamente porque, no lugar das ocorrências desse parâmetro na derivação, podemos substituir qualquer termo e, dessa forma, fazer referência a um objeto qualquer sem que as suposições admitidas na derivação sejam afetadas. A substituição do parâmetro *a* por qualquer termo τ sobre a derivação subsidiária resultaria numa instância de derivação cuja conclusão é $A[a/\tau]$.

No caso da regra $e\exists$, o parâmetro individual *a* só pode constar naquelas ocorrências topo da subderivação subsidiária que são efetivamente descartadas pela regra. O parâmetro não poderá ocorrer em *C*. Consideremos uma derivação da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}\Gamma\ ,\ \underset{\cdots}{A}\\ \nabla\\ C\end{array}$$

Figura A - 24

Suponhamos que Γ contenha todas as hipóteses abertas que são diferentes de *A*, tal que o parâmetro individual *a* não apareça em nenhuma das ocorrências de Γ e não apareça na ocorrência final *C*. Nesse esquema, a substituição do parâmetro individual *a* por qualquer termo τ resultaria numa derivação de *C* a partir do mesmo conjunto Γ de suposições abertas. A única diferença estaria nas suposições abertas da forma $A[a/\tau]$. Se tomássemos a derivação como uma subderivação subsidiária para uma $e\exists$, essa aplicação fecharia o parâmetro da mesma forma que no caso do universal. É compreensível que, usualmente, diga-se que uma dedução dessa natureza parte de uma hipótese sobre um **objeto genérico** *a*. Em outros termos, para qualquer que seja o objeto sobre o qual é feita a suposição *A*, aplicando a mesma cadeia de raciocínios chegaremos à mesma conclusão *C*. Nesse caso, a presença do objeto genérico nas suposições abertas da derivação subsidiária é essencial, ele não pode ocorrer na conclusão da derivação.

A diferença do uso do objeto genérico nos dois casos está em que, na derivação subsidiária de $i\forall$, estamos desenvolvendo um raciocínio que poderia ser aplicado a qualquer termo, em particular a qualquer constante individual (a qualquer objeto que possa ser nomeado). Já na derivação subsidiária de $e\exists$, o raciocínio partiria da suposição de aplicabilidade de uma

[351] Como no procedimento acima de transformar parâmetros impuros em parâmetros puros.

propriedade a um objeto qualquer, que não precisamos especificar, e tal que obtemos uma conclusão que já não envolve o objeto. O raciocínio valerá para qualquer termo e, em particular, poderá ser aplicado sobre qualquer constante individual (sobre qualquer objeto nomeável).

Nos dois casos, o significado da expressão "objeto genérico" é compreensível, considerando a idéia de uma virtual derivação resultante de uma possível substituição do parâmetro. Derivações que contenham parâmetros abertos são esquemas de dedução que poderão ser instanciados via substituição de parâmetros em uma dedução concreta, mais precisamente, em uma derivação em que as ocorrências topo e a conclusão sejam proposições concretas. Resumindo, só teremos objeto genérico se o parâmetro for usado na conclusão de uma derivação, mas não for usado em nenhuma hipótese aberta, ou, ainda, se for usado em um único tipo de hipótese aberta, mas não for usado na conclusão da derivação, nem nas demais hipóteses.

Segundo a nossa forma de conceber o conceito de suposição, o conceito de objeto genérico é uma *façon de parler*. Se entendêssemos que uma suposição envolve a asserção de uma proposição e a suposição da posse da prova dessa proposição, a concepção do que vem a ser um objeto genérico demandaria explicações ulteriores. O cerne da questão está em saber, nesse caso, o que seria a suposição da posse da prova ou construção: ela seria para a asserção da forma proposicional *A* ou seria para a asserção de uma proposição que tem a forma *A*? Em nosso caso, o objeto genérico é um modo de apresentar a possibilidade de fazer instanciações de um esquema derivacional, tal que ou variamos uma só hipótese, mantendo a conclusão e as demais hipóteses sem modificação, ou variamos a conclusão, mantendo as hipóteses sem modificação.

Acima, apontamos a diferença entre uma interpretação conteudística e uma interpretação algébrica dos parâmetros. Nossa tese é a de que a opção conteudística é mais difícil de sustentar no âmbito de dedução natural. Em certas derivações a substituição de um parâmetro individual por uma constante resultaria uma estrutura que já não representaria uma derivação, segundo as definições das regras que estamos empregando. Se, na seguinte derivação, as suposições e a conclusão fossem proposições, parece-nos que a fórmula *P[a/b]* não representaria uma proposição concreta, ela representaria uma forma proposicional:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \forall x((P\wedge Q)[a/x])\end{array}}{P\wedge Q[a/b]}\,e\forall}{P[a/b]}\,e\wedge e}{\forall yP[a/y]}\,i\forall$$

Figura A - 25

A última regra terá sido usada de forma relevante e adequada quando *b* representa um objeto genérico. Isso estaria assegurado se *b* fosse considerado um parâmetro individual que não ocorre em Γ e os parâmetros individuais fossem claramente separados das variáveis ligadas e das constantes individuais[352].

Caso quiséssemos usar constantes no lugar dos parâmetros, teríamos que modificar as regras. Mas, mesmo que modificássemos essas definições para permitir o uso das constantes, provavelmente teríamos um problema de adequação elucidatória. O fato é que nas provas informais não costumamos empregar constantes individuais ou nomes no papel de objeto genérico.

A regra $i\forall$ só faria sentido completo quando a premissa imediata envolvesse um objeto genérico, ou ainda, se estivesse de antemão garantida a possibilidade de aplicar as mesmas considerações sobre qualquer outro objeto substituído no lugar do objeto genérico. Se aquilo que chamamos de parâmetro próprio da regra fosse uma constante, as aplicações da regra deveriam respeitar um tipo de restrição levemente diferente. Se fôssemos usar constantes, a restrição deveria ser modificada para que a constante funcionasse como objeto genérico. Seria preciso exigir que ela não ocorra nas hipóteses abertas da qual depende a premissa da $i\forall$. Todavia, mesmo assim, isso ainda não seria suficiente, pois seria preciso garantir que os termos que aparecem nas hipóteses abertas referem objetos distintos do objeto referido pela constante, caso contrário, novamente, ela não representaria um objeto genérico. Assim, o uso dos parâmetros individuais parece ser uma forma elegante e simples de elucidar a prática dedutiva e argumentativa informal. Segundo nosso ponto de vista, isso se daria por que nessa prática empregaríamos relações lógicas entre formas proposicionais, quando fazemos jogar o conceito de objeto genérico nas deduções. Se isso é correto, a interpretação conteudística dos parâmetros seria inadequada do ponto de vista elucidatório que estamos adotando.

3.4.3. Observações quanto à Identidade das Derivações

Dadas duas derivações π e π', com as mesmas instâncias de regra e os mesmos descartes nas mesmas posições, tal que existem duas cadeias de substituições com certas características específicas resultando na mesma derivação π'', nesse caso diremos que π e π' são *sintaticamente equivalentes* ($\pi \equiv \pi'$). As cadeias podem ser vazias. Se não forem vazias, devem estar constituídas da substituição homogênea de novas variáveis individuais no lugar das antigas, e/ou novos

[352] Em observação anterior já havíamos notado que existem certas expressões da linguagem ordinária que parecem co0mportar-se como os parâmetros, por exemplo, a expressão "fulano".

parâmetros individuais no lugar dos antigos, e/ou novos parâmetros predicacionais *n*-ários no lugar dos antigos. Quando dizemos novas variáveis e novos parâmetros, queremos dizer variáveis e parâmetros que não ocorriam anteriormente em nenhuma das duas derivações e que não tenham ainda sido empregados nestas cadeias de substituições.

Observamos que, segundo esse critério, duas derivações tal que uma tenha sido obtida da outra pelo processo de purificação de parâmetros não seriam consideradas sintaticamente idênticas. Todavia, é óbvio que queremos considerá-las idênticas. Assim, deveremos assumir que a purificação de parâmetros constitui uma extensão da classe de equivalência das derivações sintaticamente equivalentes acima definida. De outro modo, a substituição de parâmetros deveria ser considerada como outra operação a mais no quadro das operações de redução à forma normal.

3.5. Notações

A letra π com ou sem super/subíndices será usada para nomear genericamente uma árvore de derivação.

Quanto à sua forma, as regras de introdução de constantes lógicas dadas acima ou têm uma só *pM* ou têm duas *pMs*. Diremos que a forma genérica das regras de introdução é como abaixo:

$$\begin{array}{c} \quad [\underline{\underline{G}}]^i \\ \nabla\pi_6 \quad \nabla\pi_7 \\ E \quad F \\ \hline \quad i \\ D \\ \nabla\pi_5 \end{array}$$

Figura A - 26

As ocorrências *E* e *F* são *pMs*. No caso das regras com uma única *pM*, não existe a subderivação π_6.

As regras de eliminação têm a forma genérica abaixo:

$$\begin{array}{c} \quad\quad [\underline{\underline{H}}]^i \quad [\underline{\underline{K}}]^i \\ \nabla\pi_2 \; \nabla\pi_1 \quad \nabla\pi_3 \quad \nabla\pi_4 \\ B \quad A \quad C \quad C \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad i \text{ elim.} \\ D \\ \nabla\pi_5 \end{array}$$

Figura A - 27

Nesse esquema, *A* é a *pM*, mas *B* e *C* são *pms*. A regra não descarta ocorrências topo na subderivação π_2, nem na subderivação π_1. No caso de $e\wedge$, $e\forall$ e $e\bot$, não existem as subderivações π_2, π_3 e π_4. No caso de $e\rightarrow$, não existem as subderivações π_3 e π_4. Além disso, $A\equiv B\rightarrow D$. No caso de $e\vee$ e $e\exists$, não existe a subderivação π_2, $C\equiv D$ e, adicionalmente, no caso de $e\exists$, não existe a

subderivação π_3. Como representação genérica usada somente para falar de $e\vee$ e $e\exists$, usaremos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{c} \nabla\pi_1\ \nabla\pi_3\ \nabla\pi_4 \\ A\quad D\quad D \\ \hline\hline \qquad\qquad e\vee[\![e\exists]\!] \\ \\ \quad D \\ \quad \nabla\pi_5 \end{array}$$

Figura A - 28

Bibliografia Referida

[Alm04] Almeida, J.M.: *Logics of Formal Inconsistency*, Tese de Doutorado, IFCH/Unicamp, 2004.

[Alv99] Alves, D.D.P.: *Normalização Forte Via Ordinal Natural*, Tese de Doutorado, Unicamp, 1999.

[Alv01] Alves, D.D.P. & Sanz, W.C.: *Denial, Relevance and Information*, Contributed Papers (caderno de artigos e resumos), I Natural Deduction Meeting, PUC-Rio, Brasil, 2001.

[Arn62] Arnaud, A. & Nicole, P.: *La Logique ou L´Art de Penser* (Lógica de Port-Royal), Vrin, 1981.

[Avi98] Avigad, J: *A Realizability Interpretation for Classical Arithmetic*, Lecture Notes in Logic, v. 13, eds. R.S.Buss et alli, 2000; ver também http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad.

[Bec01] Beckmann, A.: *Exact Bounds for Lengths of Reductions in Typed λ-Calculus*, Journal of Symbolic Logic, v. 66, n. 3, 2001.

[Bel62] Belnap, N.D.: *Tonk, Plonk and Plink*, em Philosophical Logic, ed. P.F.Strawson, págs. 132-137, Oxford University Press, 1967.

[Bel96] Belíssima, F. & Pagli, P.: *Consequentia Mirabilis*, Biblioteca di Storia Della Scienza, v. 38, L.S. Olschki, 1996.

[Ber22] Bernays, P.: *Hilbert´s Significance for the Philosophy of Mathematics*, em Bernays Project, http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/left.html, 2003.

[Bla69] Blanché, R.: *Structures Intelectuelles, Essays sur L´organisation Systématique des Concepts*, Vrin, 1969.

[Boo84] Boolos, G.: *Don´t Eliminate Cut*, em Logic, Logic and Logic (coletânea), págs. 365-369, Harvard University Press, 1998.

[Bow71] Bowen, K.A.: *An Extension of the Intuitionistic Propositional Calculus*, Indagationes Mathematicae, v. 33, f. 1, North-Holland, 1971.

[Boy74] Boyer, C.B.: *História da Matemática*, E. Blucher, 1996.

[Bra94] Brandom, R.B.: *Making It Explicit*, Harvard University Press, 1998.

[Bri04] Bridges, D.: *Constructive Mathematics*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/, 2004.

[Cai78] Caicedo, X.: *A Formal System for the Non-Theorems of the Propositional Calculus*, Notre Dame Journal of Formal Logic, v. XIX, n. 1, 1978.

[Cor93] Cori, R. & Lascar, D.: *Logique Mathématique*, v. II, Masson, 1993.

[Cos79] Da Costa, N.C.A.: *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica*, Hucitec, 1994.

[Cur63] Curry, H.B.: *Foundations of Mathematical Logic*, Dover, 1977.

[Dop62] Dopp, J.: *Logiques Construites par une Méthode de Déduction Naturelle*, Collection de Logique Mathématique, série B, n. III, 1962.

[Dum91] Dummett, M.: *The Logical Basis of Metaphysics*, Harvard Press, 1993.

[Fre79] Frege, G.: *Begriffsschrift*, em From Frege to Gödel, ed. J.Van Heijenoort, págs. 5-82, Harvard University Press, 1967.

[Fre18I] _____: *O Pensamento. Uma investigação Lógica*, em Investigações Lógicas e Outros Ensaios, Cadernos de Tradução, n. 7, págs. 9-37, ed. P.Alcoforado, USP, 2001.

[Fre18II] _____: *A Negação. Uma Investigação Lógica*, em Investigações Lógicas e Outros Ensaios, Cadernos de Tradução, n. 7, págs. 39-60, ed. P.Alcoforado, USP, 2001.

[Fre69] _____: *Dezessete Sentenças Básicas da Lógica*, em Investigações Lógicas e Outros Ensaios, Cadernos de Tradução, n. 7, págs. 955-96, ed. P.Alcoforado, USP, 2001.

[Gen33] Gentzen, G.: *On the Relation Between Intuitionist and Classical Arithmetic*, em The Collected Papers Of Gerhard Gentzen, ed. M.E.Szabó, págs. 53-67, North–Holland, 1969.

[Gen35] _____: *Investigations into Logical Deduction*, em The Collected Papers Of Gerhard Gentzen, ed. M.E.Szabó, págs. 68-131, North–Holland, 1969; também *Recherches Sur La Déduction Logique*, eds. R.Feys & J.Ladriére, PUF, 1955.

[Gen36] _____: *The Consistency of Elementary Number Theory*, em The Collected Papers Of Gerhard Gentzen, ed. M.E.Szabó, págs. 132-213, North–Holland, 1969.

[Gir87] Girard, J. Y.: *Proof Theory and Logical Complexity*, v. I, Bibliopolis, 1987.

[Gli29] Glivenko, V.: *On Some Points of the Logic of Mr. Brouwer*, em From Brouwer to Hilbert, ed. P.Mancosu, págs. 301-305, Oxford University Press, 1998.

[Göd33] Gödel, K.: *Acerca da Aritmética e da Teoria Intuicionista dos Números*, em O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo, ed. M.Lourenço, págs. 359-369, Calouste Gulbenkian, (sem data).

[Goo70] Goodman, N.: *A Theory of Constructions Equivalent to Arithmetic*, em Intuitionism and Proof Theory, págs. 101-120, eds. A. Kino et alli, North-Holland, 1970.

[Gri50] Griss, G.F.C.: *Negationless Intuitionistic Mathematics II*, Indagationes Mathematicae, v. 12, North-Holland, 1950.

[Hea21] Heath, T.: *A History of Greek Mathematics*, v. I, Dover 1981.

[Hea25vI] *Euclid, The Thirteen Books of The Elements (Books I-III)*, ed. T.L.Heath, v. I, Dover, 1956.

[Hea25vII] *Euclid, The Thirteen Books of The Elements (Books IV-IX)*, ed. T.L.Heath, v. II, Dover, 1956.

[Hen49] Henkin, L.: *Fragments of the Propositional Calculus*, Journal of Symbolic Logic, v. 14, n. 1, 1949.

[Hey30] Heyting, A.: *On Intuitionistic Logic*, em From Brouwer to Hilbert, ed. P.Mancosu, págs. 306-310, Oxford University Press, 1998.

[Hey56] _____: *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland, 1956.

[Hil25] Hilbert, D.: *On the Infinite*, em From Frege to Gödel, ed. J.Van Heijenoort, págs. 369-392, Harvard University Press, 1967.

[How69] Howard, W.A.: *The Formulae-as-Type Notion of Construction*, em To H.B. Curry: Essays on Cobinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, eds. J.P.Seldin & J.R.Hindley, págs. 479-490, Academic Press, 1980.

[Jas34] Jaskowski, S.: *On The Rules of Suppositions in Formal Logic*, em Polish Logic, ed. S.McCall, Oxford University Press, 1967.

[Kle52] Kleene, S.C.: *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, 1971.

[Kne62] Kneale, W. & Kneale, M.: *O Desenvolvimento da Lógica*, Calouste Gulbenkian, 2ª edição, (sem data).

[Kol25] Kolmogorov, A.N.: *On the Principle of Excluded Middle*, em From Frege to Gödel, ed. J.Van Heijenoort, págs. 416-437, Harvard University Press, 1967.

[Leg96] Legris, J.: *Sobre la Ley de Peirce y las Relaciones entre la Lógica Intuicionista y la Lógica Cássica*, Analogia, ano 10, n. 1, 1996.

[Lei79] Leivant, D.: *Assumption Classes in Natural Deduction*, Z MATH LOGIK, n. 25, 1979.

[Les01] Leslie, N.: *Characterising the Difference Between NJ and NK in a Connective-Free Manner*, Contributed Papers (caderno de artigos e resumos), I Natural Deduction Meeting, PUC-Rio, Brasil, 2001.

[Lop72] López-Escobar, E.G.K.: *Refutability and Elementary Number Theory*, Indagationes Mathematicae, v. 34, North-Holland, 1972.

[Lop99] López-Escobar, E.G.K.: Standardizing The N Systems of Gentzen, em Models, Algebras and Proofs, ed. X.Caicedo & C.H.Montenegro, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 203, págs. 411-434, 1999.

[Luk51] Lukasiewicz, J.: *Aristotle´s Syllogistic*, Oxford University Press, 1951.

[McC67] McCall, S.(ed): *Polish Logic*, Claredon Press, 1967.

[Man98] Mancosu, P.: *From Brouwer to Hilbert*, Oxford University Press, 1998.

[Mar96] Matin-Löf, P.: *On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws*, em Nordic Journal of Philosophical Logic, v. 1, n. 1, Scandinavian University Press, 1996; também http://www.hf.uio.no/ifikk/filosofi/njpl/vol1no1/meaning/meaning.html.

[Mas90] Massi, C.D.B.: *Provas de Normalização para a Lógica Clássica*, Tese de Doutorado, Unicamp, 1990.

[Men79] Mendelson, E.: *Introduction To Mathematical Logic*, D. Van Nostrand, 1979.

[Neg01] Negri, S. & Von Plato, J.: *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, 2001.

[Nel49] Nelson, D.: *Constructible Falsity*, Journal of Symbolic Logic, v. 14, n. 1, 1949.

[Ore91] Orevkov, V.P.: *Complexity of Proofs and their Transformations in Axiomatic Theories*, Translations of Mathematical Monographs, v. 128, AMS, 1991.

[Per82] Pereira, L.C.P.D.: *On the Estimation of the Length of Normal Derivations*, Akademilitteratur, 1982.

[Pos21] Post, E.L.: *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, em From Frege to Gödel, ed. J.Van Heijenoort, págs. 265-283, Harvard University Press, 1967.

[Pra65] Prawitz, D.: *Natural Deduction*, Almqvist&Wiksell, 1965. Também edição Dover 2006.

[Pra71] _____: *Ideas and Results in Proof Theory*, em Proceedings of the Second Scandinaviam Logic Symposium, ed. J.Fenstad, págs. 235-307, North-Holland, 1971.

[Pra73] _____: *Towards a Foundation of a General Proof Theory*, em Logic Methodology and Philosophy of Science IV, ed. P.Suppes et alli, págs. 225-250, North-Hollland, 1973.

[Pra74] _____: *On the Idea of a General Proof Theory*, Synthese, n. 27, 1974.

[Pra77] _____: *Meaning and Proofs: on the conflict Between Classical and Intuitionistic Logic*, Theoria, n. 43, 1977.

[Pra78] _____: *Proofs and the Meaning and Completeness of the Logical Constants*, em Essays on Mathematical and Philosophical Logic, eds. J. Hintikka et alli, págs. 25-40, D. Reidel, 1978.

[Pra85] _____: *Remarks on Some Approaches to the Concept of Logical Consequence*, em Synthese, n. 62, págs. 153-171, 1985.

[Pra98] _____: *Truth and Objectivity from a Verificationist Point of View*, em Truth in Mathematics, eds. H.G.Dales & G.Olivieri, págs. 41-51, Oxford University Press, 1998.

[Pra68] Prawitz, D. & Malmnas, P.E.: *A Survey of Some Connections Between Classical, Intuitionistic and Minimal Logic*, em Contributions to Mathematical Logic, eds. A. Schmidt et alli, págs. 215-229, North-Holland, 1968.

[Pri60] Prior, A.N.: *The Runabout Inference-Ticket*, em Philosophical Logic, ed. P.F.Strawson, págs. 129-131, Oxford University Press, 1967.

[Rag70] Raggio, A.: *L´Évolution de la Notion dee Système Axiomatique*, L´age de la Science, v. III, n. 3, 1970; ver também http://www.iphi.com.br/pdfs/evolucao.pdf.

[Rag88] _____: *The 50th Anniversary of Gentzen´s Thesis*, em Contemporary Mathematics, v. 69, eds. W.Carnielli & L.P.Alcântara, AMS, 1988.

[Rus03] Russell, B.: *Principles of Mathematics*, Norton, (sem data).

[Sac33] Saccheri, G.: *Euclides Vindicatus*, ed. (também tradutor e autor da introdução) G.B.Halsted, Open Court, 1920, Chicago.

[San01] Sanz, W.C.: *Big Bound*, Contributed Papers (caderno de artigos e resumos), I Natural Deduction Meeting, PUC-Rio, Brasil, 2001.

[Sch84] Schroeder-Heister, P.: *A Natural extension of Natural Deduction*, Journal of Symbolic Logic, v. 49, n. 4, 1984.

[Sel89] Seldin, J.P.: *Normalization and Excluded Middle I*, Studia Logica, v. 48, 1989.

[Seo02] Seoane, J.: *Consecuencia Lógica: La Perspectiva Tarskiana Inicial*, Manuscrito, v. XXV, n. 1, 2002.

[Sim79] Simpson, T.M.: *Linguagem, Realidade e Significado*, Francisco Alves, 1979.

[Sun98] Sundholm, G.: *Inference Versus Consequence*, em Logica, Czech Acad. Sc., 1998; ver também http://www.ozsl.uu.nl/articles/Sundholm01.pdf.

[Tam94] Tamminga, A.M.: *Logics of Rejection: Two Systems of Natural Deduction*, Logique Et Analyse, n. 146, 1994.

[Tam99] Tamminga, A.M & Tanaka, K: *A Natural Deduction System for First Degree Entailment*, Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 40, n. 2, 1999.

[Tar36] Tarski, A.: *On the Concept of Logical Consequence*, em Logic, Semantics, Metamathematics, ed. J.Corcoran, págs. 409-420, Hackett, 1983.

[Ten78] Tennant, N.: *Natural Logic*, Edinburgh University Press, 1978.

[Ten99] _____: *Negation, Absurdity and Contrariety*, em What is Negation, ed. D.Gabbay & H.Wansing, págs. 199-222, Kluwer, 1999.

[Ten06] _____: *Harmony and a Counterpoint*, http://people.cohums.ohio-state.edu/tennant9/

[Tro96] Troelstra, A.S. & Schwichtenberg, H.: *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, 1996.

[Waj37] Wajsberg, M.: *Contributions to Metalogic*, em Polish Logic, ed. S.McCall, págs. 285-318, Claredon Press, 1967.

[Wan99] Wansing, H.: *Negation as Falsity: A Reply to Tennant*, em What is Negation, ed. D.Gabbay & H.Wansing, págs. 223-238, Kluwer, 1999.

[Whi10] Whitehead, A.N. & Russell, B.: *Principia Mathematica*, v. 1, Cambridge University Press, 1910.

[Zim01] Zimmermann, E.: *Peirce´s Rule in Natural Deduction*, Contributed Papers (caderno de artigos e resumos), I Natural Deduction Meeting, PUC-Rio, Brasil, 2001.

[Zuc78] Zucker, J.I & Tragesser, R.S.: *The Adequacy Problem for Inferential Logic*, Journal of Philosophical Logic, n. 7, 1978.

Bibliografia Adicional

Aristóteles: *Tratados de Lógica (Organon)*, v. 1 e v. 2, Gredos, 1988.

_____: *Metafísica*, Gredos, 1970.

Barnes, J. (ed.): *Aristotle*, Cambridge Companion, Cambridge University Press, 1995.

Bernays, P.: *The Philosophy of Mathematics and Hilbert´s Proof Theory*, em Bernays Project, http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/left.html, 2004.

Blanché, R.: *La Logique et Son Histoire D´Aristote a Russell*, Armand Colin, 1970.

Chateaubriand, O.: *Logical Forms Part 1: Truth and Description*, Coleção CLE, 2001.

Coffa, A.: *Dos Concepciones de la Elucidación Filosófica*, Crítica, v. 7, n. 21, 1975.

Coniglio, M.E & Sernadas, C: *A Hilbert-style Axiomatization of Higher-order Intuitionistic Logic*, em Lógica: Teoria, Aplicações e Reflexões, eds: H.Feitosa e F.Sautter, Coleção CLE, v. 39, págs. 25-58, 2004.

Copi, I.: *Introdução à Lógica*, Mestre Jou, 1978.

Corcoran, J.: *Information Recovery Problems*, Theoria (segunda época), v. 10, n. 24, 1995.

Etchemendy, J.: *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press, 1990.

Fernández, G.: *El Concepto Intuicionista de Prueba Canónica*, Ágora, v. 18, n. 2, 1999.

_____: *Kolmogorov, Heyting and Gentzen on the Intuitionistic Logical Constants*, Crítica, v. 32, n. 96, págs. 43-57, 2000.

Gómez-Torrente, M.: *Tarski on Logical Consequence*, Notre Dame Journal of Formal Logic, v.37, n. 1, 1996.

Heijenoort, J.V.: *From Frege To Gödel*, Harvard University Press, 1967.

_____: *Logic as a Calculus and Logic as a Language*, Synthese, v. 17, 1967.

Hilbert, D. & Bernays, P.: *Fondements des Mathématiques*, v. 1, tradução F.Gaillard & M.Guillaume, L´Harmattan, 2001.

Hindley, J.R. et alli: *Introduction to Combinatory Logic*, Cambridge University Press, 1972.

Kreisel, G.: *Foundations of Intuitionistic Logic*, em Logic Methodology and Philosophy of Science, ed. E.Nagel et alli, págs. 198-210, Stanford University Press, 1962.

Kuznetsov, A.V.: *On the Propositional Calculus of Intuitionistic Provability*, Soviet. Math. Dokl. v. 32, n. 1, 1985.

Lassalle Casanave, A.: *Em Torno da Interpretação Operacionalista do Programa de Hilbert*, Manuscrito, v. XXI, n. 1, 1998.

Legris, J.: *Deduccion y Conocimiento en los Origenes de la Teoria de la Demostracion*, Theoria (segunda época), v. 16, n. 3, 2001.

Moschovakis, J.: *Intuitionistic Logic*, (verbete) Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2004.

Prawitz, D.: *Remarks on Some Approaches to the Concept of Logical Consequence*, Synthese v. 62, 1985.

_____: *Problems for a Generalization of a Verificationist Theory of Meaning*, Topoi, v. 21, 2002.

de Queiroz, G. da S.: *Sobre a Dualidade Entre Intuicionismo e Paraconsistência*, Tese de Doutorado, Unicamp, 1998.

Raggio, A.: *El Cincuentenario de los Grundlagen der Mathematik de Hilbert y Bernays*, Revista Latinoamericana de Filosofia, v. 16, n. 2, 1990.

Read, S.: *Formal and Material Consequence*, Journal of Philosophical Logic, v. 23, 1994.

Sagüillo, J.M.: *Logical Consequence Revisited*, The Bulletin of Symbolic Logic, v. 3, n. 2, 1997.

Sanz, W. C.: *Relating Intuitionist Negation and Triviality*, Logic Journal of the IGPL, v. 12, n. 6, 2004.

Schroeder-Heister, P.: *The Completness of Intuitionistic Logic with Respect to a Validity Concept Based on an Inversion Principle*, Journal of Philosophical Logic, n. 12, 1983.

Seoane, J.: *Intuiciones e Formalismos*, tese de doutorado, Universidad Nacional de Córdoba, 2003.

Shapiro, S.: *Foundations without Foudationalism*, Oxford University Press, 2000.

Stalmarck, G.: *Normalization Theorems for Full First Order Classical Natural Deduction*, Journal of Symbolic Logic, v. 56, n. 1, 1991.

Smullyan, R.: *First-Order Logic*, Springer-Verlag, 1968.

Widebäck, F.: *Identity of Proofs*, Almqvist & Wiksell, 2001

Índice Remissivo

Símbolos

$\updownarrow(\pi)$, altura da derivação, 431

$\psi(\pi)$, árvore de redução, 362

$\Vdash$, conseqüência dedutiva, 70, 86

$\leftrightarrow$, equivalência, 471

$\equiv$, equivalência sintática, 471

$\approx$, fórmulas de estrutura similar, 443

$\neg$, negação, 136

$\subseteq$, sistema derivável, 114

$\subset$, subsistema, 114

$\perp_c$, 187

$\perp_i$, regra de absurdo intuicionista, 490

$|\psi(\pi)|$, comprimento da árvore de redução, 362

$|\sigma|$, 496

$|\pi|$, comprimento da derivação, 495

$|\pi|_{i\rightarrow}$, 433

$|\pi|_{inst}$, número de instâncias da derivação, 495

~, negação, 471

$\top$, tautologicidade, 135

$\dashv\Vdash$, refutabilidade condicional, 101

A

a pior seqüência, 395

abs, 220

absI, 222

absurdidade, 102

absurdidade simples, 107

absurdo intuicionista, 490

aceitabilidade sob condições, 127

ae, 145

afirmação, 36

$\mathcal{AH}$, 228

alternativa excluída, 81, 141

altura da árvore, 468

altura de uma derivação, 431

antecessor, 494

antecessor imediato, 227

$\mathcal{AP}$, 228

$\mathcal{A}r$, 218

$\mathcal{A}r_{+ind}$, 220

argumento, 66

argumento de uma relação, 462

argumento dedutivo válido, 67

argumento indutivo, 67

argumento válido, 47

Aritmética de Heyting, 228
Aritmética de Peano, 228
aritmética elementar, 218
aritmética indutiva elementar, 220
árvore de construção de uma fórmula, 468
árvore de redução, 362, 437
asserção, 36, 66
ato de asserção, 67
ato de asserção bem-fundamentado, 67
ato de asserção mal-fundamentado, 67
axioma da redução, 153
axioma de Peirce, 145
axiomas, 492
axiomas extralógicos, 217

B

beco sem-saída, 83

C

C, 186
C', 198
$C_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\bot\}}$, 202
$C_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}$, 196, 200
cálculo de seqüentes intuicionista, 88
cancelamento da dupla implicação, 146
cancelamento da dupla negação, 146
caso particular, 79, 103, 490
caso particular de uma regra (definição), 114
cdi, 146
cdi⊥, 160
cdn, 146
Church-Rosser, 331
cm, 160
cm´, 198
completamente independente, regra, 475
comprimento da árvore de redução, 362
comprimento de um segmento de ramo, 496
comprimento de uma derivação, 495
conclusão, 36, 47, 66, 473, 475
condicionalmente refutável, 117, 125
condições de aplicabilidade da regra, 475
Conectivos Proposicionais, 464
confluência local, 371
conjunto de fórmulas trivial, 114
conjunto de proposições/formas proposicionais impossível, 85
conseqüência dedutiva, 67, 70, 86
conseqüência dedutiva de forma absoluta, 73
conseqüência dedutiva de qualquer conjunto finito de formas proposicionais/proposições, 73
conseqüência dedutiva entre proposições/ formas proposicionais, 66
conseqüência dedutiva, mostrar a, 67
consequentia mirabilis, 35, 160
Constantes Extra-Lógicas, 463
Constantes Individuais, 463
Constantes Operacionais, 463
Constantes Predicacionais, 463
Constantes Sintáticas, 464
contra-axiomas, 102
critério de identidade entre derivações, 300

D

dedutibilidade de um sistema em outro, 115
definição explícita, 471
definição implícita, 217
definiendum, 471
definiens, 471
demonstrabilidade condicional, 127
derivação, 474
derivação ×-crítica, 416
derivação crítica, 339
derivação fortemente válida, 359
derivação fortemente válida por substituição, 369
derivação não-pura, 492
derivação pura, 492
derivação simples, 474
derivação subsidiária, 476, 477
descrição, 464
descrição esquemática, 464
desimplicação, 123
dimensão visada, 438

E

e∀, 480
E⊥, 95
e∃ imprópria, 480
e∃ própria, 480
e∨, eliminação da disjunção, 479
e→, eliminação de implicação, 479
e⊥, eliminação do absurdo (básico), 490
e∃, eliminação do existencial, 480
e∀, eliminação do universal, 479
E⊥, grande eliminação do absurdo, 490
e∧d, eliminação de conjunção à direita, 479
e∧e, eliminação da conjunção à esquerda, 479
e⊥$_r$, 134
e~, 79
E~, 79
e~$_r$, 132
eliminação da conjunção, 479
eliminação da disjunção, 479
eliminação da implicação, 479
eliminação da negação, 79
eliminação da tautologicidade, 135
eliminação de absurdo minimal, 134
eliminação do absurdo, 490
eliminação do existencial, 480
eliminação do universal, 479, 480
eliminação restringida da negação, 132
equivalência, 471
equivalência sintática entre fórmulas, 471
E-segmento, 291
estratégia geral de redução das críticas, 340
ex contradictione quodlibet, 35, 76
ex falso quodlibet, 35, 490
ex falso quodlibet básico, 220
extensão conservativa de um sistema, 115
extensão dedutiva de um sistema, 114
e⊤, 181
e⊤$_r$, 135

F

fechamento da suposição, 477
FN, 290

FNE, 403
forma abstrata de uma proposição, 463
forma de uma proposição, 462
forma lógica das proposições, 462
forma normal, 290
forma normal expansiva, 403
forma proposicional, 466
formas proposicionais, 462
fórmula, 462, 465
fórmula básica, 465
fórmula de primeira ordem, 465
fórmula demonstrável, 114
fórmula derivável, 114
fórmula independente, 465
fórmula máxima, 240, 251, 254, 268, 271, 308, 311, 315, 316
fórmula não pareável na derivação, 445
fórmula n-dependente, 465
fórmula pareável na derivação, 445
fórmulas de estrutura similar, 443
fórmulas estruturalmente distintas, 443
funções hiper-exponenciais, 417
FV(π), 359
FVS(π), 369

G

$\mathcal{G}$, 218
g(A), 467
grande eliminação da negação, 79
grande eliminação de absurdo, 95
grande eliminação do absurdo, 490
grau de corte de uma derivação, 432
grau lógico de uma fórmula, 467

H

hipótese, 69

I

$\mathcal{I}$, 171
$i\bot$, 95
$i\rightarrow$ irrelevante, 477
$i\exists$, existencial imprópria, 479
$i\exists$, existencial própria, 479
$i\wedge$, introdução da conjunção, 477
$i\rightarrow$, introdução da implicação, 477
$i\exists$, introdução do existencial, 479
$i\forall$, introdução do universal, 478
$i\forall$, universal imprópria, 478
$i\forall$, universal própria, 478
$i\vee$d, introdução da disjunção à direita, 479
$i\vee$e, introdução da disjunção à esquerda, 479
i~, 78
$\mathcal{I}_{CM'}$, 212
$\mathcal{I}_{CM_{\{\wedge,\rightarrow,\forall,\bot\}}}$, 214
$\mathcal{I}_{CM_o}$, 215
$\mathcal{I}_{CM_o^-}$, 216
identidade de derivações, 300
IE-forma, 291
im, 494
iM, 494
ind, 218
indecorre, 123
ind_r, 219
indução restrita, 219
instância base, 371

instância chave, 371
instância da regra, 469
instância de regra, 492
instância maior, 494
instância menor, 494
instância raiz da derivação, 494
instâncias inócuas no ramo axial, 291
instâncias relevantes no ramo axial., 291
interpretação das regras de eliminação, 243
introdução da conjunção, 477
introdução da disjunção inclusiva, 479
introdução da implicação, 477
introdução da negação, 78
introdução da tautologicidade, 135
introdução de absurdo, 95
introdução de universal., 478
introdução do existencial, 479
intuicionistas naturais, 43
I-segmento, 291
$i\top$, 135, 181

J

$\mathcal{J}_f$, 181

L

lançamento de suposição, 493
$\mathcal{LE}$, 164
lh, 493
linguagem de primeira ordem, 466
linha de instâncias, 495
linha de ocorrências, 495
linha de separação, 472
LJ**, 336
lógica intuicionista de Heyting, 173
$lv_{\triangleright}(\pi)$, 436
$lv(\pi)$, 432
$lv(<r^{I},r^{II}>)$, 436
lv(A), 432

M

$\mathcal{M}$, 116
$\mathcal{M}_{\rightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow}$, 115
$max\{n_1,...,n_m\}$, 430
mesma ocorrência de fórmula, 494
mesma ocorrência de instância, 494
mesma posição, 494
$\mathcal{M}_f$, 122
$\mathcal{M}_{fc/\rightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow}$, 141
modus ponens, 479
multiplicação imediata, 411
multiplicação imediata via PSM(π), 419

N

não-demonstrabilidade, 102
negação, 471
negação clássica, 107
negação estrita, 107, 161
negação intuicionista, 107
negação minimal, 105, 131
nível de um PS, 436
nível de uma derivação, 432
nível de uma fórmula, 432
nível multiplicativo de uma derivação, 436
nível redutivo de uma derivação, 436
$\mathcal{NJ}$, 174
$\mathcal{NK}$, 189

Nm, 108
nodo antecessor imediato, 494
nodo raiz, 468, 493
nodo sucessor imediato, 493
nodos paralelos, 494
nodos topo, 468
nome, 464
normalização forte, 397
número de instâncias estritas de uma derivação, 495

O

objeto genérico, 280, 500
ocorrência aberta de parâmetro individual próprio, 499
ocorrência aberta de parâmetro proposicional, 97
ocorrência de fórmula, 473
ocorrência de uma variável, 467
ocorrência fechada de parâmetro individual próprio, 499
ocorrência fechada de parâmetro proposicional, 97
ocorrência final da derivação, 473
ocorrência ligada, 467
ocorrência ligante, 467
ocorrência mínima, 299
ocorrência topo, 473
ocorrências topo da derivação, 473
operação separável, 154
operações multiplicativas, 288
operações não-multiplicativas, 288
operador fortemente definível, 97
operador fracamente definível, 96
Operadores Lógicos, 464
ortofórmula, 215
ortofórmula negativa, 216

P

$\mathcal{P}$, 144
$\mathcal{P}'$, 158
$p_{\times\pi}(\pi')$, 446
$p_{\pi}(\pi')$, 446
$p_{\pi}(<r^{I},r^{II}>_{\pi'})$, 446
$p_{\pi}(A)$, 445
p(A), 468
$\mathcal{P}_{\{\wedge,\rightarrow,\forall\}}$, 156
Par Operacional Imediato de $\perp$, 254
Par Permutativo Imediato de Mirabilis do Tipo I, 271
Par Permutativo Imediato de Mirabilis do Tipo II, 315
Par Permutativo Imediato de Peirce, 271
par simétrico, 400
par simétrico multiplicativo, 402
parâmetro individual aberto, 500
parâmetro individual fechado, 500
parâmetro individual fechado pela regra de indução, 219
parâmetro individual impuro, 499
parâmetro individual próprio, 499
parâmetro individual puro, 499
parâmetro proposicional próprio, 97
parâmetro proposicional próprio impuro, 97
parâmetro proposicional próprio puro, 97
parâmetro próprio de e$\exists$, 480

Parâmetros, 463
Parâmetros Individuais, 463
Parâmetros Predicacionais, 463
parâmetros proposicionais, 463
pares multiplicativos, 250
pares não-multiplicativos, 250
Pares Operacionais Imediatos, 248
Pares Simplificáveis do Tipo I, 308
Pares Simplificáveis do Tipo II, 311
Peirce generalizada, 147
Pg, 147
pior cadeia de multiplicação, 424
pior seqüência, 395
pior seqüência de multiplicação, 422
pm, 476
pM, 476, 491
POIs, 248
PPIM-I, 271
PPIM-II, 315
PPIP, 271
predicado, 462
premissa, 36
premissa imediata, 473
premissa maior, 476, 491
premissas, 47, 66
premissas menores, 476
preservação da falsidade, 121
preservação da refutabilidade/refutação, 122
pressuposição referencial, 40
princípio da subfórmula, 299
princípio de harmonia, 245
princípio de indução, 218
princípio de inversão, 245, 257
princípio de inversão (alternativo), 275
princípio de Markov, 287
princípio de redução, 38
processo de normalização, 331
profundidade contextual de um PS $<r',r''>$ de π' com respeito a π, 446
profundidade contextual de uma derivação π' com respeito à derivação π, 446
profundidade contextual multiplicativa de uma derivação π' com respeito à derivação π, 446
profundidade de uma fórmula, 468
profundidade de uma fórmula no contexto de uma derivação, 445
profundidade redutiva de uma derivação, 432
proposição, 37, 466
proposição absurda, 90
proposição/forma proposicional absolutamente incompatível, 85
proposição/forma proposicional impossível, 85
proposição/forma proposicional incompatível com um conjunto dado de proposições/formas proposicionais, 85
proposição/forma proposicional necessária, 73
Proposições Lógicas, 464
propriedade da IE-forma, 291
propriedade das subfórmulas, 299
propriedade do diamante, 331
prova hipotética, 56

provas, 68
PS, 400
PS homogêneo, 405
pseudofórmula, 443
pseudofórmula básica, 443
pseudotermo, 443
PS-I, 308
PS-II, 311
PSM, 402
PSM crítico, 416
PSM pivô na derivação, 419
PSM(π), 419

Q

Quantificadores, 464

R

r(π), raiz da derivação π, 494
ramo axial de instâncias, 496
ramo axial de ocorrências, 496
ramo de instâncias, 495
ramo de ocorrências, 495
$\mathcal{RC}$, 162
RD, 290, 318
redução, 318
redução imediata, 289
reductio, 74
reductio ad contradictione, 74
refutabilidade, 102
refutabilidade clássica, 107, 160
refutabilidade completa, 161
refutabilidade condicional, 101
refutabilidade simples, 105
refutação, 100
refutação canônica/direta, 124
refutável, 102
regra de absurdo clássico, 187
regra de alternativa excluída, 145
regra de cancelamento da dupla implicação com absurdo, 160
regra de dedução indireta, 491
regra de dedução por caso geral, 499
regra de eliminação, 475
regra de eliminação do absurdo, 490
regra de inferência, 472, 476
regra de introdução, 475
regra de terceiro excluído, 160
regra derivável, 114
regra independente, 475
regra lógica elementar, 474
regra P, 71, 490, 491
regra Peirce, 148
regras extralógicas, 217
relação, 462
resíduo, 494
rodeio, 240, 290
rodeio crítico, 339
rodeio pivô, 372
rodeios, 248, 318
rodeios concomitantes, 330

S

segmento constante de instâncias, 266
segmento constante de ocorrências, 266
segmento de ramo de instâncias, 495
segmento de ramo de ocorrências, 496

segmento homogêneo, 405
segmento simétrico, 401
segmento simétrico de ocorrências, 401
sentença absurda, 102
Símbolos auxiliares, 464
sistema básico, 217
sistema básico para a igualdade, 218
Sistema Clássico, 113, 186
Sistema Clássico para o fragmento $\{\wedge, \rightarrow, \forall, \bot\}$, 196, 200
sistema consistente, 293
Sistema da Falsidade Construtiva, 181
sistema derivável, 114
sistema inconsistente, 293
Sistema Intuicionista, 113
Sistema Intuicionista com Absurdo, 171
Sistema Intuicionista com Negação, 174
Sistema López-Escobar, 164
Sistema Minimal, 113, 116
Sistema Minimal para a Falsidade, 122
Sistema Minimal Para a Implicação, 115
Sistema Minimal Para Preservação da Falsidade com Implicação, 141
Sistema Para a Refutabilidade Completa, 162
Sistema Peirce, 144
Sistema Peirce Básico, 158
Sistema Peirce$_{\{\wedge, \rightarrow, \forall\}}$, 156
sistema trivial, 114
subárvore de derivação, 493
subfórmula, 467
subfórmula própria, 468
subsistema, 114
suposição, 69, 473, 498
suposição aberta, 475, 478
suposição fechada, 477

T

tautologicidade, 135
tautologicidade minimal, 135
te, 160
te', 198
teorema de confluência, 331
teorema de forma normal, 331
teorema de normalização forte, 332
teorema de normalização fraca, 331
teoria, 492
termo individual, 464
topo do segmento, 496
tradução natural, 182
trivial, 102

U

unicidade da FN, 300
Unidade Simplificável, 316
Unidades Permutáveis de Eliminação, 268
uniformização imediata, 407
UPE, 268
US, 316
uso algébrico das variáveis, 466
uso conteudístico das variáveis, 466

V

$v_{\times}(\pi)$, valor multiplicativo de uma derivação, 415
$v_{\triangleright}(\pi)$, valor redutivo de uma derivação, 319

$v_{\times}(<r^{I},r^{II}>)$, valor multiplicativo de um PSM, 415
$v_{\triangleright}(<r^{I},r^{II}>)$, valor redutivo de um rodeio, 319
v(A), 469
validade forte, 359
válido, 67
valor de um PS, 401
valor de uma fórmula, 469
valor multiplicativo de um PSM, 415
valor multiplicativo de uma derivação, 415
valor redutivo de um rodeio, 319
valor redutivo de uma derivação, 319
Variáveis, 464
Variáveis Individuais, 464
variáveis reais, 40
vértice do segmento, 496