Carlos Gustavo González

MODELOS DA TEORIA DE CONJUNTOS DE ZERMELO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas.

Este ejemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 17/06/91.

Orientador:

Luiz Paulo de Alcantara.

Maio 1991

INTRODUÇÃO

Em 1908 E. Zermelo forneceu os axiomas para a teoria dos conjuntos que serviram como base ao sistema axiomático mais usual na lógica matemática atual[1]: o de Zermelo-Fraenkel ou ZF, que acrecentou a teoria de Zermelo com os axiomas de Fundações e Substituição[2]. O estudo do sistema de Zermelo tem três importantes razões. A primeira é que nele pode ser desenvolvida quase toda a matemática atual, apesar de que não se pode fazer a reconstrução da teoria ordinal e cardinal de Cantor, ou seja, por mais que ela seja menos poderosa que ZF, é suficiente para a maioria dos fins práticos; a segunda é que, conhecendo a relação entre a Teoria de Zermelo e ZF, podemos saber também como acrescentar a primeira para um fim específico determinado e a terceira é uma razão histórica, pois o conhecimento dos aspetos lógico-matemáticos da teoria pode servir para compreender melhor a heurística e os conceitos intuitivos relacionados com o desenvolvimento histórico.

A finalidade deste trabalho é o estudo de alguns

[1] Cfr. ZERMELO [1908].

[2] Este acréscimo foi feito por Fraenkel e Skolem. Cfr. FRAENKEL [1922] e SKOLEM [1923].

modelos da teoria de Zermelo que possibilitam resultados de independência, isto é, supondo a consistência de certas subteorias, prova-se, de uma maneira finitista, que determinados axiomas não podem ser derivados dos outros. Assim, usando o método dos modelos de permutação de Fraenkel-Mostowski[3] prova-se a independência dos axiomas de União e do Conjunto Potência, tendo importância o fato de que as duas provas são totalmente finitistas. Isto é, seja φ ou o Axioma de União ou o Axioma do Conjunto Potência, e seja T a teoria resultante da eliminação de φ da Teoria de Zermelo. Suponhamos que a teoria T, à qual foi acrescentada $\neg\varphi$, seja inconsistente, ou seja, pode-se deduzir uma contradição a partir dela. Então o método fornece a construção da dedução de uma contradição a partir da teoria T somente. Estas provas são resultados originais.

Além disso, estuda-se um modelo interno da teoria de Zermelo que tem sido pouco abordado pela literatura. Embora, este modelo permita obter importantes resultados de independência, como a consistência relativa dos axiomas de Pares, União e Fundações. Também dele obtém-se um resultado sobre pontos fixos da função união que permite generalizar

[3] Introduzido em FRAENKEL (1922) e aperfeiçoado por MOSTOWSKI e SPECKER, entre outros.

alguns fatos conhecidos sobre a impossibilidade de provar a existência de certos conjuntos, fornecendo uma prova unificada. Também estes são resultados originais.

Por último, prova-se a independência do Axioma de Fundações do Esquema de Axiomas de Fundações. Este resultado foi obtido por Jensen e Schröder, mas a prova destes autores, a diferença da fornecida aqui, não é finitista. Além disso, a prova dada neste trabalho é mais simples.

Devido a outros resultados bem conhecidos, o acréscimo feito aqui fornece uma idéia precisa das possibilidades e limitações da teoria de Zermelo.

PRELIMINARES: A TEORIA DE ZERMELO

A teoria de Zermelo, que abreviaremos Z^-, é uma teoria de primeira ordem com igualdade, que tem somente a pertinência, "$\in$", como símbolo de predicado não lógico[1]. A tal efeito podem ser utilizados, por exemplo, os axiomas lógicos que figuram em MENDELSON[2], para fazer um sistema axiomático estilo Hilbert, acrescentando os seguintes axiomas.

Axioma de Extensionalidade:

(Ex) $\forall x \forall y \forall z\ ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$

Axioma de Pares:

(Pa) $\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$

Este axioma possibilita a definição usual de $\{x,y\}$.

Axioma de União:

(Un) $\forall x \exists y \forall u\ (u \in y \Leftrightarrow \exists h\ (u \in h \wedge h \in x))$

---

[1] A teoria de Zermelo, tal como ela foi feita em 1908, não era uma teoria de primeira ordem, devido a que o uso dessa lógica ainda não se havia generalizado.

[2] Cf. MENDELSON [1987].

Escreveremos a união de um conjunto x como $\bigcup x$, e a união de x e y como $x \cup y$

Axioma do Conjunto Potência:

(Po) $\forall x \exists y \forall u \; (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x)$

(Onde $u \subseteq x$ é a fórmula $\forall z \; (z \in u \Rightarrow z \in x)$)

Axioma de Infinito:

(In) $\exists x \; (\exists y \; (y \in x \wedge \forall z \; z \notin y) \wedge \forall z \; (z \in x \Rightarrow (z \cup \{z\}) \in x)$

Esquema de axiomas de Separação

(Se) $\forall x \exists y \forall z \; (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$

A teoria de Zermelo com escolha, ZC^-, é Z^- acrescentada com o Axioma da Escolha.

Axioma da Escolha:

(Ac) $\forall x \; (\forall y \forall z \; (y \in z \wedge z \in x \wedge y \neq z \wedge \exists h \; h \in y \Rightarrow \neg \; \exists h (h \in y \wedge h \in z)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists e \forall z \; (z \in x \Rightarrow \exists ! h \; (h \in z \wedge h \in e))$

A teoria de Zermelo bem fundada, Z, é Z^- mais o axioma de Fundações.

Axioma de Fundações

(Fu) $\forall x \; (\exists y \; y \in x \Rightarrow \exists y \; (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$

A teoria de Zermelo-Fraenkel, ZF, é Z mais os axiomas de Substituição. ZF^- é ZF sem o Axioma de Fundações. ZFC^- e ZFC têm o significado obvio.

INDICE

CAPITULO I: RESULTADOS DE CONSISTENCIA RELATIVA USANDO O METODO DOS MODELOS INTERNOS. 1

1. Os métodos para provar consistência relativa nas teorias de conjuntos. 1

2. O método dos modelos internos em geral. 2

O modelo $V_{\omega+\omega}$ 10

O modelo W 11

CAPITULO II. RESULTADOS DE CONSISTENCIA OBTIDOS PELO METODO DOS MODELOS DE PERMUTAÇÃO DE FRAENKEL-MOSTOWSKI 22

1. Os modelos de permutação em geral 22

2. Os modelos de permutação aplicados à Teoria de Zermelo 26

Discussão geral sobre relativização 27

Relativização em modelos de permutação da teoria de Zermelo 32

Bibliografía 50

RESULTADOS DE CONSISTENCIA RELATIVA USANDO O METODO DOS MODELOS INTERNOS.

1. Os métodos para provar consistência relativa nas teorias de conjuntos.

Quase todos os resultados de consistência relativa nas teorias de conjuntos foram obtidos pelo método de modelos internos, modelos de permutação ou *forcing*. Este último método não produz provas finitistas enquanto é aplicado à teoria de Zermelo. Ademais o método do *forcing* permite obter resultados de dois tipos: de cardinais e combinatória infinita de um lado, e de outro em referência ao Axioma da Escolha. Mas os resultados do primeiro tipo não tem importância na teoria de Zermelo porque a cardinalidade dos conjuntos é indefinível, mesmo que acrescentemos o Axioma da Escolha. Além disso, o método dos modelos de permutação fornece provas em Z^- dos resultados do segundo tipo.

Assim sendo, somente estudaremos aqui os dois primeiros tipos de modelos, começando neste Capítulo com os modelos internos.

2. O método dos modelos internos em geral

Um modelo interno não é um modelo no sentido semântico do termo, mas é um procedimento que fornece provas de consitência relativa, nas quais a heurística provém da noção semântica de modelo. Por isso também se dá a eles e a outros procedimentos semelhantes o nome de modelos sintáticos. Poderíamos fazer um tratamento geral dos modelos sintáticos, mas preferimos tratar por separado os modelos internos e os modelos de permutação para simplificar a exposição.

Pelo Teorema de Gödel não se pode provar em Z^- a consistência de Z^-. Por isto, não se pode provar em Z^- a existência de um modelo de Z^-, isto é, não se pode provar a existência de um conjunto $\langle A,E\rangle$ tal que seja um modelo de Z^- de domínio A e a relação E interprete o símbolo $\in$. Mas tudo isto é verdadeiro, desde que Z^- seja consistente.

Por isto, o método dos modelos internos não fornece um conjunto que seja um modelo de uma teoria determinada, mas somente uma classe definível M, no sentido que existe uma fórmula φ da linguagem de Z^-, tal que vale $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow x \in M)$, fato que é interpretado no sentido intuitivo como que a classe M é o domínio do modelo. Para um tratamento mais geral haveria também que considerar os modelos internos não standard, no sentido que a relação pertinência não é somente a restrição de $\in$. Mas, como todos os modelos que vamos analisar são standard, isto não é preciso no contexto deste estudo. Aqui começamos por provar que os modelos internos fornecem provas de consistência.

DEFINIÇÃO 1: $\forall x \in y\ \varphi(x) =_{df} \forall x\ (x \in y \rightarrow \varphi(x))$

DEFINIÇÃO 2: Seja M uma classe. *A relativização de* φ *a* M, φ^M *é:*

$(x \in y)^M =_{df} x \in y$

$(x = y)^M =_{df} x = y$

$(\neg\varphi)^M =_{df} \neg(\varphi^M)$

$(\psi \wedge \varphi)^M =_{df} \psi^M \wedge \varphi^M$

$(\forall x\ \varphi(x))^M =_{df} \forall x \in M\ (\varphi(x))^M$

Por exemplo, $(\forall x\ x \in y)^M$ é $\forall x \in M\ x \in y$, i.e. $\forall x\ (x \in M \rightarrow x \in y)$, o que, por fim, na linguagem de Z^- é $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow x \in y)$.

A Definição 2 somente tem validade neste Capítulo, já que no próximo vamos definir um outro tipo de relativização para os modelos de permutaçao.

DEFINIÇÃO 3: Se T é um conjunto de fórmulas, então T^M é o conjunto das relativizações de todas as fórmulas de T.

TEOREMA 1: Sejam T uma teoria e M uma classe tais que $T\vdash T^M$ e $T^M\vdash \exists x\ (x\in M)$. Ademais, seja ψ uma sentença qualquer tal que $T\vdash \psi^M$. Então $T^M\vdash \psi^M$. Isto se prova de maneira finitista, ou seja, fornecidas as deduções das hipóteses, contrói-se uma dedução de ψ^M a partir de T^M.

Primeiro fixamos uma dedução D que justifique $T\vdash \psi^M$. Se φ é uma fórmula, sejam $x_1...x_n$ todas as variáveis livres que figuram nas fórmulas de D (segundo a ordem da numeração do alfabeto), e seja $\varphi^\forall$ a fórmula $\forall x_1...\forall x_n\varphi$. Prova-se, primeiro $T^M\vdash \psi^{\forall M}$, por indução no comprimento da dedução, e logo, prova-se $T^M\vdash \psi^M$, sob a hipótese $T^M\vdash \exists x\ (x\in M)$. Nos outros detalhes técnicos se faz da maneira usual, por exemplo: fixa-se uma fórmula que define M e se renomeiam as variáveis ligadas que figuram em D, etc. Nos casos que vamos ter aqui, a classe M não tem parâmetros, isto é, a fórmula que a define só tem uma variável livre, e assim sendo, deve-se dar atenção a poucos detalhes . Seja então D, isto é, $\psi_1, ...,\psi_n=\psi$, uma dedução de ψ em T.

a) Se n for igual a 1, então temos duas posibilidades:

i) ψ é um axioma lógico. No sistema de MENDELSON[1], se ψ tem a forma de algum dos esquemas de axiomas 1, 2, ou 3, é imediato. Exemplo: seja ψ da forma de um dos axiomas 1, 2 ou 3. Então, ψ^M tem a forma do mesmo axioma, por Generalizaçao temos $\psi^{M\forall}$, que implica $\psi^{M\forall M}$ (que é a mesma fórmula que $\psi^{\forall M}$). Se ψ é um axioma 4, isto é, $\forall x\ \vartheta(x) \rightarrow \vartheta(y)$, pois nossa linguagem primitiva não tem símbolos de constante nem de função, e sendo φ a fórmula que define M, isto é, $x\in M \leftrightarrow \varphi(x)$, temos que provar:

$$[\ \forall y\ (\varphi(y) \rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \vartheta(x)) \rightarrow \ \vartheta(y))]^{\forall M}$$

que é:

$$\forall x_1(\varphi(x_1) \rightarrow ...\forall x_m(\varphi(x_m) \rightarrow (\forall y\ (\varphi(y) \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \vartheta^M(x)) \rightarrow \vartheta^M(y))))...) \qquad (*)$$

Pondo como hipóteses $\varphi(y)$ e $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \vartheta^M(x))$, é fácil provar $\forall y\ (\varphi(y) \rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \vartheta^M(x)))$, donde se obtém (*) usando o axioma 1, Modus Ponens e

[1] Cf. MEDELSON [1987] pg. 55-56.

Generalização repetidas vezes. Igualmente, para o axioma 5 tem que se provar:

$$\forall x_1 (\varphi(x_1) \rightarrow ...\forall x_m (\varphi(x_m) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow (\vartheta^M \rightarrow \zeta^M)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\vartheta^M \rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \zeta)))) ...)$$

que obtém-se pondo como premissas as fórmulas $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow (\vartheta^M \rightarrow \zeta^M))$ e ϑ^M. Na prova dos axiomas da igualdade, não há dificuldade alguma.

ii) $\psi \in T$. Por hipótese temos $T^M \vdash \psi^M$. De ψ^M deduz-se $\psi^{\forall M}$, e então, $T^M \vdash \psi^{\forall M}$.

b) n>1. Temos 4 casos:

i) ψ_n é um axioma lógico. Procede-se da mesma maneira que acima;

ii) $\psi_n \in T$. Também procede-se igual acima;

iii) ψ_n deduz-se por MP de duas fórmulas anteriores ψ_i e $\psi_i \rightarrow \psi_n$. Pela hipótese da indução temos $\psi_i^{\forall M}$ e $(\psi_i \rightarrow \psi_n)^{\forall M}$ que é:

$$\forall x_1 (\varphi(x_1) \rightarrow ...\forall x_m (\varphi(x_m) \rightarrow (\psi_i^M \rightarrow \psi_n^M)) ...) \qquad (*)$$

onde $\varphi(x)$ é a fórmula que define M, isto é, $x \in M \Leftrightarrow \varphi(x)$. Deve-se provar $\psi_i^{\forall M} \rightarrow \psi_n^{\forall M}$ a partir de (*).

Primeiro tiramos de (*) todos os quantificadores $\forall x_i$, $1 \le i \le m$. Suponhamos que já temos tirado até i-1, ou seja:

$$\varphi(x_1) \Rightarrow (\varphi(x_2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\varphi(x_{i-1}) \Rightarrow \forall x_i(\varphi(x_i) \Rightarrow \vartheta))\ldots)$$

Como a única variável livre de $\varphi(x_{i-1})$ é x_{i-1}, temos: $(\varphi(x_{i-1}) \Rightarrow \forall x_i \zeta) \Leftrightarrow \forall x_i(\varphi(x_{i-1}) \Rightarrow \zeta)$, e substituindo equivalentes obtemos:

$$\varphi(x_1) \Rightarrow (\varphi(x_2) \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \Rightarrow \forall x_i(\varphi(x_{i-1}) \Rightarrow (\varphi(x_i) \Rightarrow \vartheta))\ldots).$$

Voltamos a fazer o mesmo até que $\forall x_i$ fique no início da fórmula, e logo usando o axioma 4 e MP, eliminamos $\forall x_i$ da fórmula. Então temos:

$$\varphi(x_1) \rightarrow (\varphi(x_2) \rightarrow \ldots \rightarrow (\varphi(x_m) \rightarrow (\psi_t^M \rightarrow \psi_n^M))\ldots)$$

Como $\varphi(x_m) \rightarrow (\psi_t^M \rightarrow \psi_n^M) \leftrightarrow (\varphi(x_m) \rightarrow \psi_t^M) \rightarrow (\varphi(x_m) \rightarrow \psi_n^M)$ temos:

$$\varphi(x_1) \rightarrow (\varphi(x_2) \rightarrow \ldots$$
$$\ldots \rightarrow ((\varphi(x_m) \rightarrow \psi_t^M) \rightarrow (\varphi(x_m) \rightarrow \psi_n^M))\ldots)$$

e repetimos até distribuir todas as $\varphi(x_i)$. Logo, por Generalização e $\forall x\ (\vartheta \to \zeta) \to (\forall x\vartheta \to \forall x\zeta)$ voltamos a colocar todos os quantificadores até ter: $\psi_t^{\forall M} \to \psi_n^{\forall M}$. Então, por MP temos: $\psi_n^{\forall M}$.

iv) ψ_n é $\forall x\ \psi_t$, com $t<n$. Como no caso acima, primeiro tiramos todos os quantificadores iniciais de $\psi_t^{\forall M}$. Se x for igual a algum x_i, trocamos o nome de x_i por uma variável nova z. Usando Generalização e a equivalência $\forall y\ (\vartheta \to \zeta) \leftrightarrow (\vartheta \to \forall y\zeta)$ (se y não ocorre em ϑ), colocamos $\forall x$ ao lado de ψ_t. Agora trocamos z por x_i (se havíamos mudado o nome), e com Generalização e a equivalência dita voltamos a colocar todos os quantificadores.

Assim temos $T^M \vdash\ \psi_n^{\forall M}$. Agora vamos tirar todos os quantificadores relativizados. Então temos $\forall x_i(\varphi(x_i) \to \vartheta)$ para $1 \le i \le m$ e a seguinte dedução em T^M, onde y é uma variável ainda não usada, para poder usar a regra C[2] na terceira fórmula

[2] Cf. MENDELSON [1987], pgs. 64-65.

$\exists x\ \varphi(x)$

$\forall x_i(\varphi(x_i) \Rightarrow \vartheta)$

$\varphi(y)$

$\varphi(y) \Rightarrow \vartheta$

ϑ

x_i não está livre em ϑ porque ϑ é uma sentença. Uma vez feito isto com todas as x_i, temos $T^M \vdash \psi_n{}^M$.

COROLARIO 1: Como no Teorema 1, sejam T uma teoria e M uma classe tais que, $T \vdash T^M$ e $T^M \vdash \exists x\ x \in M$, e seja ψ uma sentença qualquer tal que, $T \vdash \psi^M$. Então prova-se de maneira finitista $Con(T) \Rightarrow Con(T+\psi)$, onde "Con" significa consistência.

O modelo $V_{\omega+\omega}$

O modelo interno mais conhecido de Z^- é $V_{\omega+\omega}$, cuja definição é:

$V_0 = \emptyset$

$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

$V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$

$V_{\omega+\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\omega+\omega} V_\alpha$

Este modelo está definido em ZF, e por isso, não fornece provas finitistas de consistência, mas somente provas em ZF. Em realidade sua fama deve-se a que a hierarquia dos V_α é o modelo mais usual de ZF, e a que $V_{\omega+\omega}$ é o primeiro dessa hierarquia que satisfaz os axiomas de Z^-. Também não nos proporciona muita informação sobre Z^-, pois tem conjuntos demais, como V_ω cuja existência não pode ser provada em Z^- (se Z^- for consistente). A única coisa importante que nos ensina $V_{\omega+\omega}$ é que a existência de $\omega+\omega$ não pode ser provada em Z^-, se Z^- é consistente. Não fornecemos aqui uma prova de que $V_{\omega+\omega}$ é um modelo interno de Z^-, porque é uma prova elementar encontravel na literatura[9].

---

[9] Ver, por exemplo, DRAKE [1974].

O modelo **W**

Em Z^- pode-se provar a existência da classe **W**, que é um modelo interno de Z^-. Se considerarmos somente a linguagem de Z^-, ou seja, sem símbolos adicionais, isto significa que existe uma fórmula $\varphi(x)$, com somente x como variável livre tal que, se definirmos:

$$x \in \mathbf{W} \leftrightarrow \varphi(x)$$

então podemos provar em Z^- a relativização dos axiomas de Z^- ao modelo **W**.

Com estas convenções, devemos provar:

$$Z^- \vdash (Z^-)^{\mathbf{W}}.$$

A prova de que **W** é um modelo interno tem duas partes: em primeiro lugar prova-se a existência de **W** em Z^-, ou seja, constrói-se a fórmula $\varphi(x)$, e em segundo lugar, prova-se, para cada axioma ψ de Z^-:

$$Z^- \vdash \psi^{\mathbf{W}}.$$

DEFINIÇÃO 4:

$W_o = \omega$

$W_{n+1} = \mathcal{P}(W_n)$ com $n \in \omega$

$W = \bigcup_{n \in \omega} W_n$

LEMA 1: Para cada W_n vale:

a) $W_n \in W_{n+1}$

b) $x \subseteq W_n \Leftrightarrow x \in W_{n+1}$

c) $W_n \subseteq W_{n+1}$

d) $\forall m \leq n \ (W_m \subseteq W_n)$

e) $\forall m \in \omega \ m \in W_n$

f) $x \in W_n \rightarrow x \subseteq W_n$ (i.e. W_n é transitivo)

A partir da definição, as partes a) e b) são imediatas; c) segue-se de f) e b); e d) segue-se de c). A parte e) prova-se por indução. E imediata para $W_0 = \omega$. Agora devemos provar que $m \in W_{n+1}$. Se $m=0$ é imediato. Se não, $0, \ldots, m-1 \in W_n$, ou seja, $m \subseteq W_n$ e $m \in W_{n+1}$ por b). Para f), procedemos também por indução. Notemos que $x \in \omega \rightarrow x \subseteq \omega$, isto é, vale para W_0. Para provar que vale para W_{n+1}, suponhamos que $x \in W_{n+1}$ e que $y \in x$. Por b) $x \subseteq W_n$, e assim sendo, $y \in W_n$. Por hipótese indutiva $y \subseteq W_n$, e por b), $y \in W_{n+1}$.

Contudo a Definição 4 ainda não tem justificação. Se estivermos trabalhando em ZF, a definição de W estaria justificada pelo Teorema da Recursão Transfinita. Ou seja, sendo F e G funções classes, com $F:On \longrightarrow V$ e $G:V \longrightarrow V$, temos:

$$F(\alpha)=G(F|\alpha)$$

Mas para provar em ZF o Teorema da Recursão Transfinita, precisa-se do Axioma do Substituição, e assim sendo, essa prova não pode ser feita em Z^-. Mas se acrescentarmos certas condições pode ser feita em Z^-:

$$F(n)=G(F|n) \qquad \text{com } n\in\omega$$

estas condições são que $\exists y\ G(F|n)=y$ para cada n, e ademais, que a existência desse y possa provar-se em Z^-. Nesses casos, a classe F está definida por uma fórmula, que pode ser utilizada para definir modelos internos.

Se seguirmos a prova habitual o problema fundamental consiste em que para cada n, deve-se provar a existência das funções parciais f de domínio n tal que:

$$f=F|n$$

normalmente chamadas, uma computação de comprimento n baseada em G. Para provar a existência dessas f em ZF utiliza-se o Axioma do Substituição. Como não temos este axioma, provaremos a existência das f com os meios a nossa disposição em Z^-. Como, em realidade, não se precisa de todos os axiomas de Z^- para esta prova, vamos definir uma subteoria T de Z^-.

DEFINIÇÃO 5: $T = Z^- - \text{Pares} - \text{União}$.

LEMA 2: $\langle n, W_n \rangle \in W_{n+3}$

Pelo Lema 1, $n \in W_{n+1}$ e $W_n \in W_{n+1}$. Então tanto $\{n\}$ como $\{n, W_n\}$ pertecem a W_{n+2} e $\langle n, W_n \rangle \in W_{n+3}$

TEOREMA 2: Em T pode-se provar a existência de uma computação de comprimento n, f_n, para cada n, tal que,

$$\forall m < n \ (F(m) = W_m = f_n(m)) \qquad *$$

Como vamos trabalhar em T, devemos construir a função f_n usando somente os axiomas de Partes, Infinito e Separação (isto é, sem União nem Pares).

Para todo $m \leq n$, $\langle m, W_m \rangle \in W_{m+3}$. Então, pelo Lema 1 d), para todo $m \leq n$, $\langle m, W_m \rangle \in W_{n+3}$. Seja $f_0 = \emptyset$ e $f_{n+1} = \{\langle m, W_m \rangle : m \leq n\}$, então $f_{n+1} \subseteq W_{n+3}$. Pelo Axioma de Separação, f_n existe. Ademais f_n satisfaz $*$. Com o Axioma de Extensionalidade, prova-se que é função e que é a única computação de comprimento n baseada na Definição 4.

LEMA 3: a) $T \vdash (Ex)^W$

b) $T \vdash (Inf)^W$

c) $T \vdash (Po)^W$

Para a) é suficiente notar que W é transitiva. Para b) vamos ver que $(Inf)^W$ é:

$$\exists x \in W\ ((\emptyset \in x)^W \wedge \forall z \in W\ (z \in x \rightarrow ((z \cup \{z\}) \in x)^W)\ )$$

Como $x \in \{a,b\} \leftrightarrow x=a \vee x=b$ e que $x \in a \cup b \leftrightarrow x \in a \vee x \in b$, tanto $\{a,b\}$ como $a \cup b$ são absolutas. Asim temos: $((z \cup \{z\}) \in x)^W \leftrightarrow (z \cup \{z\}) \in x$. Ademais, ω existe por In e como $\forall n \in \omega$, $n \in W$, ω satisfaz In^W. Para c) Po^W é:

$$\forall x \in W\ \exists y \in W\ \forall z \in W\ (z \in y \leftrightarrow (z \subseteq x)^W)$$

Primeiro vemos que a inclusão é absoluta:

$\forall a\in W\ \forall b\in W\ (a\subseteq b \leftrightarrow (a\subseteq b)^{W})$

ou seja:

$\forall a\in W\ \forall b\in W\ (\forall c\ (c\in a \Rightarrow c\in b) \Leftrightarrow \forall c\in W\ (c\in a \Rightarrow c\in b))$

Fixamos a e b, então a direita é uma implicação lógica em primeira ordem. Para a recíproca, seja c um conjunto qualquer tal que $c\in a$. Pela transitividade de W, temos que $c\in W$ e por $\forall c\in W\ (c\in a \rightarrow c\in b))$, temos $c\in b$. Agora, para provar Po^{W}, fixamos um $x\in W$. Por Potência $\mathcal{P}(x)$ existe. Vemos agora que $\mathcal{P}(x)\in W$. Como $x\in W$, existe um n tal que, $x\in W_n$, e pela transitividade de W_n, temos que $x\subseteq W_n$. Seja $y\in\mathcal{P}(x)$, ou seja, $y\subseteq x$ e por isso $y\subseteq W_n$. Então $y\in W_{n+1}$, e finalmente temos que $\mathcal{P}(x)\subseteq W_{n+1}$ e $\mathcal{P}(x)\in W_{n+2}$.

LEMA 4: a) $T \vdash (Pa)^{W}$

b) $T \vdash (Un)^{W}$

c) $T \vdash (Sep)^{W}$

Para a) notamos que $(Pa)^{W}$ é:

$\forall x\in W\ \forall y\in W\ \exists z\in W\ \forall u\in W\ (u\in z \leftrightarrow u=x \vee u=y)$

Fixamos x e y. Então existem n e m tais que, $x \in W_n$ e $y \in W_m$. Seja $r=\text{máx}(n,m)$. Então x e y pertencem à W_r e $W_r \in W_{r+1}$. Por Separação obtemos $\{x,y\}$ de W_r. Como a operação pares é absoluta, $\{x,y\}$ satisfaz $(\text{Pa})^W$. Para b), $(\text{Un})^W$ é:

$$\forall x \in W\ \exists y \in W\ \forall z \in W\ (z \in y \leftrightarrow \exists h \in W\ (z \in h \wedge h \in x))$$

Seja $x \in W$, isso é, $x \in W_n$ para algum n. Pela transitividade de W_n, $\bigcup x \subseteq W_n$, e portanto, $\bigcup x \in W_{n+1}$, mas como $W_{n+1} \in W_{n+2}$, por Separação obtemos $\bigcup x$. Ainda falta provar que $\bigcup x$ é absoluta, i.e.:

$$\forall x \in W\ \forall y \in W\ (\exists h\ (h \in W \wedge y \in h \wedge h \in x) \leftrightarrow \exists h\ (y \in h \wedge h \in x))$$

A direita é uma implicação lógica. Para a inversa, fixamos um $h \in x$. Então pela transitividade de W, $h \in W$. Para c) note que $(\text{Sep})^W$ é:

$$\forall x \in W\ \exists y \in W\ \forall z \in W\ (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi^W(z)\ )$$

Fixamos um $x \in W$. Por Separação, existe $s=\{z\colon z \in x \wedge \varphi^W(z)\}$. Ademais, como $x \in W$, $x \in W_n$ para algum n, e $x \subseteq W_n$. Como $s \subseteq x$, também $s \subseteq W_n$ e $s \in W_{n+1}$.

LEMA 5: a) $T \vdash (Fu)^W$.

b) $T \vdash (\forall x\ x \in W)^W$.

Para a) $(Fu)^W$ é:

$$\forall x \in W\ ((x \neq \emptyset)^W \Rightarrow \exists y \in W\ (y \in x \wedge \forall z \in W\ (z \notin y \vee z \notin x)))$$

Seja um $x \in W$ qualquer tal que, $(x \neq \emptyset)^W$. Seja n o menor m tal que, $x \in W_m$, isso é, $x \in W_n$ e $x \notin W_m$ se $m < n$. Agora procedemos por casos. Se $n=0$, então $x \in \omega$. Como $x \neq \emptyset$ e $\emptyset \in x$, com isso verifica-se o consequente. Se não, então $x \in W_{n+1}$. Então, seja m o menor natural tal que $\exists y\ (y \in z \wedge y \in W_m)$, e seja $s = W_m \cap x$. Se $m=0$, escolhemos o menor $t \in \omega$ com $t \in s$. Se não $m=r+1$ e seja $y \in s$. Então $y \neq \emptyset$, ou seja, $\exists z\ z \in y$, e $z \notin x$, pois $z \in W_r$. Para b) temos que ver que $x \in W$ é absoluta. Assim é, pois isto é consequência de que os conceitos usados para definir "*computação de comprimento n*" são absolutos. Logo, é suficiente notar que $(\forall x\ x \in W)^W$ é $\forall x\ (x \in W \Rightarrow (x \in W)^W)$.

DEFINIÇÃO 6: $Z^+ = Z^- + Fu + \forall x\ (x \in W)$

TEOREMA 3: $Con\ (T) \Rightarrow Con\ (Z^+)$

É um fato conhecido que a existência de V_ω, $\omega+\omega$, $z=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$, etc., não se pode provar em

Z^-, se Con (Z^-). De uma maneira mais geral, provamos:

TEOREMA 4: Seja x tal que $x \neq \omega$, $x \neq \emptyset$ um ponto fixo da função união, i.e., $\bigcup x = x$. Então, se Con (T) a existência de x não se pode provar em Z^+.

Seja um tal x com as características indicadas. Vamos provar que $x \notin W$.

1) $x \notin W_0 = \omega$. Pois o único $n \in \omega$ tal que $\bigcup n = n$ é $\emptyset$, já que $\bigcup(n+1) = n$.

2) $x \notin W_1 = \mathcal{P}(\omega)$. Ou seja, $x \nsubseteq \omega$. Suponhamos, para uma prova por absurdo, que $x \neq \omega \wedge x \subseteq \omega \wedge \bigcup x = x$. Note-se que x não pode ser finito, porque se isto acontecer haveria um máximo $n \in x$, e em tal caso $n \notin \bigcup x$.. Para x infinito $\exists n$ ($n \notin x \wedge n+1 \in x$). Então, como $n \in n+1 \in x$, teremos $n \in \bigcup x = x$, uma contradição.

3) $x \notin W_{n+1} \rightarrow x \notin W_{n+2}$. Suponha que $x \in W_{n+2}$. Então, $x \subseteq W_{n+1}$ e podemos escrever:

$$W_{n+1} = (W_{n+1} \sim x) \cup x$$

Como $W_{n+1} = \mathcal{P}(W_n)$, temos que $\bigcup W_{n+1} = W_n$. Então,

$$W_n = \bigcup W_n = \bigcup[(W_{n+1} \sim x) \cup x] = [\bigcup(W_{n+1} \sim x)] \cup (\bigcup x) = [\bigcup(W_{n+1} \sim x) \cup x]$$

Então, $x \subseteq W_n$ e $x \in W_{n+1}$. Asim, temos que $x \not\subseteq W_{n+1} \rightarrow x \not\subseteq W_{n+t}$. Em síntese, temos que $x \not\subseteq W_0$ e procedemos por indução à partir de $n=1$, usando b) e c) da página 11, e com isto fica provado para todo W_n.

Suponha-se agora que a existência de x pode-se provar em Z^+. Como em Z^+ podemos provar que $x \in W$, temos uma contradição, ou seja, $\neg Con(Z^+)$, o que produz $\neg Con(T)$. Tendo em consideração alguns conjuntos x para os quais $\bigcup x=x$, temos o seguinte Corolário.

COROLARIO 2: A existência de z, V_ω, $V_{\omega+\omega}$, $\omega+\omega$, $\omega+\omega+\omega$, ω_1,$\omega_1+\omega$, etc., não se pode provar em Z^+.

Como o ordinal $\omega+\omega$ é definível em Z^+, se fosse possível provar em Z^+ a existência de algum ordinal maior, poderia provar-se a de $\omega+\omega$ pelo Axioma de Separação. Portanto não se pode provar em Z^+ a existência de nenhum ordinal maior que $\omega+\omega$. Por este motivo, a teoria ordinal de Cantor não podem ser desenvolvida em Z^+. E, além disso, se se pretende que os ordinais sejam absolutos, também não se pode desenvolver em Z^+ a teoria das recursões transfinitas representaveis na Aritmética de Peano. Ademais, pelos mesmos motivos que para $\omega+\omega$, não se pode provar em Z^+ a existência de nenhum conjunto V_α, com $\alpha>\omega$.

O sistema de axiomas Z^{+} é redundante, pois o conjunto de axiomas $T+\forall x(x \in W)$ (que chamaremos T') gera a mesma teoria.

TEOREMA 5: a) $T' \vdash Pa$

b) $T' \vdash Un$

c) $T' \vdash Fu$

Para a) e b) fazemos como no Lema 4, e c) prova-se de maneira semelhante ao Lema 5.

2. RESULTADOS DE CONSISTENCIA OBTIDOS PELO METODO DOS MODELOS DE PERMUTA O DE FRAENKEL-MOSTOWSKI.

1. Os modelos de permutação em geral.

O método dos modelos de permutação foi introduzido por A. Fraenkel e desenvolvido mais tarde por A. Mostowski e E. Specker, entre outros. Os modelos de permutação são modelos sintáticos, mas eles podem ser entendidos também de uma maneira platônica: conservando o mesmo universo dos conjuntos, define-se uma outra relação em vez da pertinência "standard". Ou seja, estes são modelos não standard, pois o símbolo "$\in$" não é interpretado como a relação intuitiva de pertinência da teoria ingênua dos conjuntos. Embora esta maneira de compreender os modelos de permutação tenha uma grande importância heurística, do ponto de vista da lógica matemática, o principal é que eles geram provas finitistas de consitencia. Lembramos que temos uma prova relativa de consistência finitista da teoria T em relação à teoria T', em símbolos $Con(T') \rightarrow Con(T)$, quando se dá um procedimento mecânico capaz de produzir a dedução de uma contradição em T', fornecida a dedução de uma contradição em T.

O método dos modelos de permutação introduz a pertinência não standard como um símbolo eliminável. Isto é, as provas que fornecemos que tenham fórmulas com a pertinência não standard podem ser transformadas em provas na linguagem originária da teoria.

Assim, as seguintes definições permitem a construção do modelo de permutação:

DEFINIÇÃO 7: Se T é uma teoria qualquer, diz-se que uma fórmula $\varphi(x,y)$ sem variáveis livres exceto x e y, *define uma permutação do universo em relação à teoria T sse*:

1*) $T \vdash \forall x \forall y \forall z\ (\varphi(x,y) \wedge \varphi(z,y) \rightarrow x=z)$

2*) $T \vdash \forall x \forall y \forall z\ (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y=z)$

3*) $T \vdash \forall x \exists y\ \varphi(x,y) \wedge \forall x \exists y\ \varphi(y,x)$

Se φ define uma permutação do universo, também chamaremos a φ uma *bijeção* (do universo).

DEFINIÇÃO 8: Seja φ uma bijeção (supondo fixada a teoria T)

$F(x)=y$ sse $\varphi(x,y)$

$x \in' y$ sse $\exists z\ (F(x)=z \wedge z \in y)$

também chamaremos à F uma bijeção ou uma permutação.

DEFINIÇÃO 9: Fixadas a bijeção φ e a teoria T, e sendo ψ uma fórmula qualquer, seja ψ^F (a relativização de ψ)

1) $(x=y)^F =_{df} x=y$

2) $(x\in y)^F =_{df} x\in' y$

3) $(\psi \to \eta)^F =_{df} \psi^F \to \eta^F$

4) $(\neg\psi)^F =_{df} \neg\psi^F$

5) $(\forall x\ \psi)^F =_{df} \forall x\ \psi^F$

TEOREMA 6: Seja F uma permutação, T uma teoria e ψ uma fórmula deduzível de T, isto é, $T\vdash \psi$. Então $T^F \vdash \psi^F$.

Prova-se por indução no comprimento da dedução, de $T^F \vdash \psi^F$. Seja $\psi_1, \ldots, \psi_n = \psi$ uma dedução de ψ em T.

a) Se n for igual a 1, então tem duas posibilidades:

i) ψ é um axioma lógico. No sistema de MENDELSON[1], se ψ tem a forma de algum dos esquemas de axiomas 1, 2, 3, 4 ou 5, ou os axiomas da igualdade, é imediato, pois ψ^F tem a mesma forma.

ii) ψ é um axioma de T. Então ψ^F é um axioma de T^F e trivialmente deduzível de T^F.

b) Supondo que já temos $T^F \vdash \psi_m$, para cada m<n, devemos provar $T^F \vdash \psi_n$. Se ψ_n é um axioma lógico ou uma fórmula

[1] Cf. MENDELSON [1987], pgs 55-56.

de T, o caso é igual ao acima. Se ψ_n deduz-se por Modus Ponens de duas fórmulas anteriores ψ_r e $\psi_r \rightarrow \psi_n$, por hipótese indutiva temos $(\psi_r \rightarrow \psi_n)^F$ e ψ_r^F, que é a mesma fórmula que $\psi_r^F \rightarrow \psi_n^F$. Por Modus Ponens temos ψ_n^F. Se ψ_n deduz-se por Generalização de uma fórmula anterior, ψ_r, por hipótese inductiva temos ψ_r^F, e por Generalização temos ψ_n.

TEOREMA 7: Sejam F igual ao Teorema 6, e T e S duas teorias. Se $T \vdash S^F$, então há uma prova finitista de $Con(T) \rightarrow Con(S)$.

Prova de $\neg Con(S) \rightarrow \neg Con(T)$. Supondo que $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ temos pelo Teorema 6 que $S^F \vdash \varphi^F \wedge \neg\varphi^F$, pois $(\varphi \wedge \neg\varphi)^F$ é a mesma fórmula que $\varphi^F \wedge \neg\varphi^F$. Como $T \vdash S^F$, temos que $T \vdash \varphi^F \wedge \neg\varphi^F$. Ademais, o Teorema 6 diz como fazer essa dedução.

2. Os modelos de permutação aplicados à Teoria de Zermelo.

O método dos modelos de permutação permite obter resultados de consistência relativa em fragmentos de Z^-. Enquanto que em ZF^- pode provar-se $(ZF^-)^F$, para qualquer permutação, isto não é verdade para Z^-, pois a validade dos axiomas de União, do Conjunto Potência e de Infinito, dependem da permutação particular que se escolha. Isto fornece provas finitistas dos três axiomas, mas só tem interesse para os axiomas de União e de Conjunto Potência, pois para o caso do Infinito, temos modelos aritméticos conhecidos. O seguinte teorema é um resultado geral independente da permutação escolhida.

TEOREMA 8: Seja F uma permutação qualquer para a teoria Z^-. Então $Z^- \vdash Ex^F$, $Z^- \vdash Pa^F$ e $Z^- \vdash Se^F$.

a) $Z^- \vdash Ex^F$, onde Ex^F é $[\forall x \forall y \forall z\ ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)]^F$. Vejamos primeiro que $(z \in x \leftrightarrow z \in y)^F$ é $F(z) \in x \leftrightarrow F(z) \in y$ para um z qualquer, e supondo esta última fórmula, provamos que $x \subseteq y$: Seja um a qualquer tal que $a \in x$. Por 3* (página 23), existe um b tal que $F(b) = a$ e como $F(z) \in x \leftrightarrow F(z) \in y$ para qualquer z, temos que $F(b) \in y$. De igual maneira prova-se que $y \subseteq x$. Então, por Extensionalidade, temos $x = y$.

b) $Z^{-}\vdash Pa^{F}$, onde Pa^{F} é $[\forall x\forall y\exists z\forall u\ (u\in z \leftrightarrow u=x \vee u=y)]^{F}$. E esta fórmula é $\forall x\forall y\exists z\forall u\ (F(u)\epsilon z \leftrightarrow u=x \vee u=y)$. Sejam x e y dois conjuntos e seja $z=\{F(x),F(y)\}$, ($F(x)$ e $F(y)$ existem por 3* (página 23) e z existe por Pa). Isto é $F(u)\epsilon z$ sse $F(u)=F(x)$ ou $F(u)=F(y)$. Mas por 1* e 2* isto acontece sse $u=x$ ou $u=y$.

c) $Z^{-}\vdash Se^{F}$, onde Se^{F} é $[\forall x\exists y\forall z\ (z\in y \leftrightarrow z\in x \wedge \varphi(z))]^{F}$, ou seja, $\forall x\exists y\forall z\ (F(z)\epsilon y \leftrightarrow F(z)\epsilon x \wedge \varphi^{F}(z))$. Vamos considerar a fórmula $F(x)\epsilon y \wedge \varphi^{F}(x)$ e seja $z=F(x)$.

$F(x)\epsilon y \wedge \varphi^{F}(x) \leftrightarrow z\epsilon y \wedge \exists x(F(x)=z \wedge \varphi^{F}(x))$ por 1* e 2*

$z\epsilon h \leftrightarrow z\epsilon y \wedge \exists x(F(x)=z \wedge \varphi^{F}(x))$ por Se

Como $F(x)=z$, h satisfaz Se^{F}.

<u>Discussão geral sobre relativização</u>

A diferença dos modelos internos, os manuais não fazem uma discussão geral do problema da relativização, no caso dos modelos de permutação. Mas, o problema é a tal ponto delicado que a prova da independência do Axioma da Escolha, que forneceu Fraenkel em 1922[2], tem um erro por não perceber que a relativização trocava algumas noções. O problema da

[2] Cf. FRAENKEL [1922].

relativização nos modelos não standard das teorias dos conjuntos, ainda não tem uma exposição geral, nem tampouco foram desenvolvidas as ferramentas que permitam essa exposição.

Suponha que tenhamos uma linguagem $\mathscr{L}$ e duas interpretações I e J de $\mathscr{L}$ que coincidem no domínio. Suponha ademais que $\mathscr{L}$ tenha um símbolo de constante c, um símbolo de função f e um símbolo de relação R. Apesar de I e J terem o mesmo domínio, poderia acontecer que a interpretação de c em I seja diferente da interpretação de c em J. Isto é, o objeto que chama-se c em I, objeto que nomearemos c_I, não é o mesmo objeto que chama-se c em J: (c_J), ou seja $c_I \neq c_J$. Entretanto, o objeto c_I pertence ao domínio de J, mas aí não se chama c. A mesma coisa acontece com os símbolos de função. Isto é, se $a_1,\dots,a_n$ pertecem aos domínios de I e J, f é um símbolo de função n-ário, e f_I e f_J as interpretações de f em I e em J, poderia acontecer que $f_I(a_1,\dots,a_n) \neq f_J(a_1,\dots,a_n)$. Analogamente para as relações, poderiam existir $a_1,\dots,a_n$ tais que, $R_I(a_1,\dots,a_n)$ e não $R_J(a_1,\dots,a_n)$.

No nosso caso particular, isto é, a teoria dos conjuntos, a linguagem original somente tem o símbolo de relação $\in$, e os outros símbolos de constante, de função e de relação definem-se a partir da pertinência. Mas esqueçamos por um momento este fato e pensemos na linguagem ampliada da teoria dos conjuntos com todos os símbolos usuais: $\emptyset$, ω, $\mathcal{P}$, $\bigcup$, {, etc. Para um enfoque heurístico, pensemos que temos duas interpretações, I e J, mas que I é a "verdadeira interpretação", que diz como são as coisas "em realidade", fato que, como um abuso de linguagem, escrevemos $\tau_I=\tau$ para os termos. Então, como no caso acima, poderia acontecer que para uma constante, por exemplo $\emptyset$, tenhamos $\emptyset_I\neq\emptyset_J$. Mas isto significa, com nossas premisas, que a interpretação J usa o nome $\emptyset$ para um objeto que não é "o verdadeiro conjunto vazio", já que $\emptyset_J\neq\emptyset$ pois $\emptyset_I=\emptyset$. Por exemplo, poderia acontecer que $\emptyset_J=\omega$, ou seja, na interpretação J, $\emptyset$ seria o nome do conjunto dos naturais. Analogamente, para os símbolos de função e de relação, por exemplo $a\cup_J b=\{a,b\}$, $\mathcal{P}_J(x)=\bigcup(x)$, etc. ou $a<_J b$ e $b<a$, etc. Em poucas palavras, uma interpretação não standard J pode ser um "mundo ao revés" onde as coisas tenham todos os nomes trocados. Isto dá uma idéia de em que se baseia a dificuldade dos modelos não standard, isto é, modelos J onde tem a e b tais que $a\in_J b$ mas $a\notin b$.

A idéia intuitiva de relativização a uma interpretação J é justamente entender que nomeiam em J os símbolos de constante, de função e de relação. Por exemplo, conhecer que é a relativização do $\emptyset$ à interpretação J, ou seja $\emptyset_J$, o objeto nomeado por $\emptyset$ na interpretação J. Mas isto somente é uma idéia intuitiva. Como nossa intenção é produzir provas finitistas de consistência, não trabalhamos com modelos semânticos, mas com modelos sintáticos, e assim, isto tem que ser formulado de outra maneira.

Nos modelos de permutação a relação de pertinência definida, que nós chamamos $\in'$, é não standard. Em realidade, ela é somente uma abreviatura, mas "trabalha" como se fosse uma outra relação. Para maior complexidade, não porque a que temos até agora seja pouca, na teoria dos conjuntos os símbolos $\emptyset$, $\aleph_0$, $\cup$, $\{$, etc. são definidos usando somente a relação pertinência (e os símbolos lógicos da linguagem de primeira ordem com igualdade). Isto é, para conhecer que coisa tem o nome $\emptyset$ no modelo de permutação, temos que ir à definição de $\emptyset$, substituir $\in$ por $\in'$ e explicitar esta definição. Então entende-se porque tem importância conhecer que símbolos são absolutos (isto é, o símbolo relativizado tem o mesmo significado que o símbolo sem relativizar) e quais trocam os objetos, e como trocam os que trocam.

Forneçamos um exemplo do estudo da relativização de um símbolo. Seja F uma permutação qualquer para Z^-. Vejamos o que acontece com o símbolo $\emptyset$, cuja definição é:

$$\forall x \ (x \in \emptyset \leftrightarrow x \neq x)$$

substituindo o único símbolo $\in$ temos $\forall x\ (x\in'\emptyset \Leftrightarrow x\neq x)$, e logo $\forall x\ (F(x)\in\emptyset \Leftrightarrow x\neq x)$. Explicitando duas vezes temos $\forall x\ (\exists z\ (F(x)=z \wedge z\in\emptyset) \Leftrightarrow x\neq x)$, e $\forall x\ (\exists z(\varphi(x,z) \wedge z\in\emptyset) \Leftrightarrow x\neq x)$.

Disto deduz-se $\neg\exists z\ (\varphi(x,z) \wedge z\in\emptyset)$, e logo $\forall z(\neg\varphi(x,z) \vee z\notin\emptyset)$, e

$$\neg\varphi(x,z) \vee z\notin\emptyset \qquad (*)$$

Mas, por φ bijeção temos $\forall z\exists x\ \varphi(x,z)$, donde $\exists x\ \varphi(x,z)$. Então pela regra C, já que x ainda não foi instanciada, tem $\varphi(x,z)$, o que com $(*)$ produz $z\notin\emptyset$. Como $z=z$ temos $z\notin\emptyset \wedge z=z$, donde

$$\forall z\ (z\in\emptyset \Leftrightarrow z\neq z)$$

Também prova-se facilmente a recíproca, com o qual temos que o vazio é absoluto.

Mais geralmente, para todo termo $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ tem uma definição:

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\forall y\ (y\in\tau(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)\ ) \qquad (**)$$

DEFINIÇÃO 10: Seja F uma permutação para Z^-, e $\tau(x_1,\dots,x_n)$ um termo da linguagem ampliada, com parâmetros $x_1,\dots,x_n$, (possivelmente nenhum), definido por (**). A *relativição de* τ *a* F, em símbolos τ_F, é o termo definido por:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \ (F(y)\in\tau_F(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow \psi^F(x_1,\dots,x_n)\ )$$

DEFINIÇÃO 11: Seja F uma permutação para Z^-. Um termo $\tau(x_1,\dots,x_n)$ diz-se absoluto sse

$$\tau(x_1,\dots,x_n)=\tau_F(x_1,\dots,x_n)$$

Nós não precisamos definir a relativização de uma relação, mas poderíamos fazer de uma maneira análoga.

<u>Relativização em modelos de permutação da teoria de Zermelo</u>

LEMA 6: a) $\emptyset=\emptyset_F$

b) $x\cup_F y=x\cup y$

c) $\{x,y\}=\{F(x),F(y)\}$

DEFINIÇÃO 12: $x^F=\{F(y):\ y\in x\}$

DEFINIÇÃO 13: $x^{-F}=\{y\colon F(y)\in x\}$

Nota bene:

a) x^{F} ou x^{-F} poderiam não ser conjuntos, em Z^{-}. Pelo contrário, em ZF sempre são conjuntos, cuja existência prova-se como o Axioma da Substitução.

b) Obviamente x^{F} pode ser diferente de x^{-F}. E os dois podem ser diferentes de $F(x)$. (Ademais, $F(x)$ sempre é um conjunto).

c) Em geral, fornecido um termo constante τ, τ_{F} pode ser diferente de τ^{F}, τ^{-F} e $F(\tau)$. Mas para alguns termos podem existir coincidências parciais. Por exemplo, as do Lema 7.

LEMA 7: Se para todo $x\in\omega$ $F(x)=x$, então $\omega^{F}=\omega$. Ademais, ω satisfaz o Axioma do Infinito.

Primeiro temos que $F(\emptyset_{F})\in\omega^{F}$. Pelo Lema acima $\emptyset_{F}=\emptyset$ e pela hipótese $F(\emptyset)=\emptyset$, ou seja, $F(\emptyset_{F})=\emptyset$. Analogamente, se $x\in\omega$, $F(x)\in\omega^{F}$ e $F(\{x\}_{F}\cup_{F}x)=\{x\}\cup x\in\omega$.

Segundo, In^{F} é:

$$\exists x\ (\exists y\ (F(y)\in x \wedge \forall z\ F(z)\notin y) \wedge \forall z\ (F(z)\in x \Rightarrow (F(z\cup_{F}\{z\}_{F})\in x)$$

O vazio satisfaz $\forall z$ $F(z)\notin\emptyset$ e, como vimos, $F(\emptyset)=\emptyset\in\omega$. Ademais, seja $F(z)=z\in\omega$. Então, $z\cup\{z\}=F(z\cup_{F}\{z\}_{F})\in\omega$.

COROLARIO 3: Seja F uma permutação tal que, para todo $x \in \omega$ $F(x)=x$. Então, $Z^- \vdash In^F$.

LEMA 8: Sejam F uma permutação qualquer para Z^- e $G=F^{-1}$, isto é, a inversa de F. Então x^F é um conjunto sse x^{-G} é um conjunto.

Imediato, pelas definições de x^F e de x^{-F}.

LEMA 9: Seja F uma permutação qualquer para Z^-. Então

a) $x \subseteq y$ é absoluta;

b) As proposições i)-iii) são equivalentes:

i) $x \subseteq y$

ii) $x^F \subseteq y^F$

iii) $x^{-F} \subseteq y^{-F}$

a) $x \subseteq y$ é $\forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y)$ e por F bijeção, é equivalente à $\forall z\ (F(z) \in x \rightarrow F(z) \in y)$, que é $(x \subseteq y)^F$.

b) Vejamos primeiro que i) $\rightarrow$ ii). Seja z tal que $z \in x^F$. Por F bijeção existe um z' tal que, $z=F(z')$ e logo, $z' \in x$. Como $x \subseteq y$, também $F(z') \in y$, isto é $z' \in y^F$. Trocando F por F^{-1}, x^F e y^F por x^{-F} e y^{-F} temos: i) $\rightarrow$ iii).

Para ii) $\rightarrow$ i) seja $z \in x$, então $F(z) \in x^F$ e logo $F(z) \in y^F$, $z \in y$. Analogamente iii) $\rightarrow$ i).

LEMA 10: a) $\mathcal{P}_F(x)=(\mathcal{P}(x))^F$

b) $\bigcup_F(x)=\bigcup(x^{-F})$

Para a) temos: $\mathcal{P}_F(x) = \{F(y): \forall z\ (F(z)\in y \Rightarrow F(z)\in x)\} = \{F(y): \forall z\ (z\in y \Rightarrow z\in x)\}=(\mathcal{P}(x))^F$, já que $\forall z\ (F(z)\in y \Rightarrow F(z)\in x) \Leftrightarrow \forall z\ (z\in y \Rightarrow z\in x)$, por ser F bijeção.

Para b) temos $\bigcup_F(x) = \{F(z): \exists h\ (F(z)\in h \wedge F(h)\in x)\} = \{z: \exists h\ (z\in h \wedge F(h)\in x)\} = A$, por F bijeção. Como $F(h)\in x \Leftrightarrow h\in x^{-F}$, temos que $A=\{z: \exists h\ (z\in h \wedge h\in x^{-F})\} = \bigcup(x^{-F})$

Note que, se x^F é um conjunto para todo x, então $\mathcal{P}_F(x)$ é um conjunto para todo x. De maneira análoga com x^{-F} e $\bigcup_F$. Mas as recíprocas também são verdadeiras.

TEOREMA 9: Seja F uma permutação qualquer para Z^-.

a) Para todo x, x^F é um conjunto sse para todo y, $\mathcal{P}_F(y)$ é um conjunto;

b) Para todo x, x^{-F} é um conjunto sse para todo y, $\bigcup_F(y)$ é um conjunto.

Só mostraremos as implicações não óbvias. Para a), suponhamos que, para todo y, $\mathcal{P}_F(y)$ é um conjunto e seja x um conjunto qualquer. Devemos provar que x^F é um conjunto. Pela hipótese $\mathcal{P}_F(\bigcup x)$ existe, e $\mathcal{P}_F(\bigcup x)=(\mathcal{P}(\bigcup x))^F$. Então temos x^F por Separação, pois está incluído em $\mathcal{P}(\bigcup x)^F$ (pelo Lema 10).

Para b), seja x um conjunto qualquer. Temos que

$\mathcal{P}(\bigcup_F(x))=\mathcal{P}(\bigcup(x^{-F}))$ e $\mathcal{P}(\bigcup_F(x))$ existe pela hipótese. Como $x^{-F}\subseteq\mathcal{P}(\bigcup(x^{-F}))$, por Separação temos x^{-F}.

Com isto temos as condições necessárias e suficientes para que os axiomas do conjunto Potência e de União valham no modelo de permutação.

COROLARIO 4: Seja F uma permutação para Z^-. Então:

a) $Z^-\vdash Po^F$ sse $\mathcal{P}_F(x)$ existe para todo x;

b) $Z^-\vdash Un^F$ sse $\bigcup_F(x)$ existe para todo x.

Para a) lembremos que Po^F é:

$$\forall x\exists y\forall u\ (F(u)\in y \leftrightarrow u\subseteq_F x)$$

Mas, como $x\subseteq y$ é absoluta, temos: $\forall x\exists y\forall u\ (F(u)\in y \leftrightarrow u\subseteq x)$, e $(\mathcal{P}(x))^F=\mathcal{P}_F(x)$ satisfaz Po^F.

Para b) Un^F é:

$$\forall x\exists y\forall u\ (F(u)\in y \leftrightarrow \exists h\ (F(u)\in h \wedge F(h)\in x))$$

Mas, como F é bijeção, temos $\forall x\exists y\forall u\ (u\in y \leftrightarrow \exists h\ (u\in h\wedge F(h)\in x))$ e, pela definição de x^{-F}, $\forall x\exists y\forall u\ (u\in y \leftrightarrow \exists h\ (u\in h \wedge h\in x^{-F}))$, e então, $\bigcup(x^{-F})=\bigcup_F(x)$ satisfaz Un^F. As recíprocas seguem-se de Extensionalidade.

COROLARIO 5: Seja F uma permutação para Z^-. Então:

a) $Z^- \vdash Po^F$ sse x^F é um conjunto para todo x;

b) $Z^- \vdash Un^F$ sse x^{-F} é um conjunto para todo x.

Agora estudaremos os modelos que provam a independência de Un e de Po.

Seja $W_0 = \omega$

$W_{n+1} = \mathcal{P}(W_n)$

$a = \{\{\emptyset\}\}$

$m \in \omega$, $n \in \omega$

Então definimos a bijeção F dada por:

1) $F(W_n) = \{n,a\}$;

2) $F(\{\langle a,0\rangle,W_n\}) = W_n$;

3) $F(\{\langle a,m+1\rangle,W_n\}) = \{\langle a,m\rangle,W_n\}$;

4) $F(\{n,a\}) = \{\langle a,0\rangle,\{n,a\}\}$;

5) $F(\{\langle a,m\rangle,\{n,a\}\}) = \{\langle a,m+1\rangle,\{n,a\}\}$;

6) $F(x) = x$ se não é um caso anterior.

TEOREMA 10: F define a permutação do universo.

Para provar (1*) (página 23) é suficente mostrar que qualquer conjunto x tem somente uma das formas que aparecem na definição acima. Se $x=W_n$ para algum n, temos que x é infinito, enquanto os conjuntos das formas (2) à (5) são finitos. O caso (4) não é o caso (2) nem o caso (3), pois nesses casos o conjunto x tem um conjunto infinito. Como a é diferente de $\{n,a\}$ e de $\langle a,n\rangle$ para qualquer m e n, o caso (4) não é o caso (5). Os W_n são todos diferentes dos $\{n,a\}$ para qualquer n, e assim o caso (5) é diferente dos casos (2) e (3). Por fim, como $0\neq n+1$ para qualquer n, segue-se que (2) e (3) são diferentes. A prova de (2*) é análoga.

A propriedade (3*) segue-se imediatamente pela simetria da definição.

Para provar que $Z^- \vdash Po^F$ precisa-se do seguinte Lema.

LEMA 11: $Z^- \vdash \forall y \exists x\ x=y^F$

Dado y, por Separação obtemos: $y_1,\dots,y_6$ tais que, $y_1 = \{ x\in y : \exists n\ x=W_n\}$ (x é caso (1)), $y_2 = \{ x\in y : \exists n\ n=\{\langle a,0\rangle,W_n\}\}$, e analogamente para y_3-y_6. Assim, y_1^F é obtido por Separação de ω, y_2^F por Separação da união de y_2. Para y_3^F, obtemos o conjunto $W_y = \{ W_n : W_n\in y\}$ por União e Separação, e logo separamos y_3^F de $\mathcal{P}(\{\langle a,n\rangle\}\cup W_y))$. O conjunto y_4^F é separado de ω^F. Por fim, para y_5^F, seja $b=\{\langle a,m\rangle : m\in\omega\}$, (ele existe pelos axiomas de União, Conjunto Potência e Separação). Então, separamos $\{\{\langle a,m+1\rangle,n\}: \{\langle a,m\rangle,n\}\in y\}$ de $\mathcal{P}(b\cup\omega)$. Logo $y^F=y_1^F\cup\ldots\cup y^F_{\sigma}$.

COROLARIO 6: $Z^-\vdash Po^F$.

Por Corolário 5 e Lema 11.

OBSERVAÇÃO:

$Z^-\vdash (\exists x\ (x\in x))^F$ (Pois $F(W_z)\in W_z$, isto é, $\{\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ $\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$.

$Z^-\vdash (\forall x\forall y\exists z\forall u\ (u\in z \Leftrightarrow u\in x \vee u\in y))^F$

$Z^-\vdash (\forall x_1\ldots\forall x_n\exists z\forall u(u\in z \Leftrightarrow u\in x_1 \vee\ldots\vee u\in x_n)^F$

Agora, como para a bijeção F temos que $(\omega\times\{a\})^F$ não é um conjunto, podemos provar o seguinte teorema.

TEOREMA 11: Se $Con(Z^-)$ então $Z^-\nvdash Un^F$.

Provaremos que $Z^-\vdash Un^F$ então $\neg Con(Z^-)$. Suponhamos então que $Z^-\vdash Un^F$, isto é, $Z^-\vdash \forall x\exists y\forall z(\exists h(\ F(z)\in h\ \wedge\ F(h)\in x)\ \Leftrightarrow F(z)\in y)$. Se x é $\omega\times\{a\}$, então:

$y=\{F(z)\ :\ F(z)\in h\ \wedge\ F(h)\in(\omega\times\{a\})\}$

logo, $F(h)=\langle n,a\rangle$ ou seja, é o caso 1, e h é W_n. Então, o y cuja existência afirma Un^F é

$y=\{F(z) : F(z)\in W_n \wedge F(W_n)\in\omega\}$

e por F bijeção

$y=\{w : w\in W_n \wedge n\in\omega\}=\bigcup_{n\in\omega} W_n=W$

Mas, já vimos que a classe W é um modelo de Z^-. Isto significa que podemos provar em Z^- a existência de um modelo de Z^-, e portanto $Z^-\vdash Con(Z^-)$. Logo, pelo Teorema de Gödel, temos $Z^-\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, i.e., não $Con(Z^-)$.

DEFINIÇÃO 14: Seja T a Teoria de Zermelo menos Un, isto é Z^--Un.

TEOREMA 12: Se Con(T) então $T\nvdash$ Un.

Suponha que $T\vdash$ Un. Então, pelo Teorema 6, temos: $T^F\vdash Un^F$, e, pelo Teorema 8 e os Corolários 3 e 6, temos: $Z^-\vdash Un^F$. Logo, pelo Teorema 11, temos $\neg Con(Z^-)$(*). Se Con(T) e $T\vdash$ U então $Con(Z^-)$, em contradição com (*). Portanto $T\nvdash$ U.

DEFINIÇÃO 15: Seja T', a teoria T acrescentada com as fórmulas "$\exists x\ x\in x$" e "$\forall x_1\ldots\forall x_n\exists z\forall u(u\in z \Leftrightarrow u\in x_1 \vee\ldots\vee u\in x_n)$".

COROLARIO 7: Se Con(T') então $T'\nvdash$ Un.

Agora, para provar a independência de Po, seja $G=F^{-1}$, ou seja, a inversa da bijeção que definimos. Enquanto que para qualquer x, x^F era um conjunto, para G temos que x^{-G} sempre é um conjunto.

LEMA 12: $Z^- \vdash Un^G$.

Seja x um conjunto qualquer. Pelo Lema 11 x^F é um conjunto. Logo pelo Lema 6, x^{-G} também é um conjunto. Então, pelo Corolário 4, temos que $Z^- \vdash Un^G$.

De maneira análoga ao Teorema 11, prova-se:

TEOREMA 13: Se $Con(Z^-)$, então $Z^- \nvdash Po^G$.

Notemos que: $W=(\omega\times\{a\})^{-F}=(\omega\times\{a\})^G$. Além disso, como $(\omega\times\{a\})\subseteq\mathcal{P}(\bigcup(\omega\times\{a\}))$, temos que $(\omega\times\{a\})^G\subseteq(\mathcal{P}(\bigcup(\omega\times\{a\})))^G$, pelo Lema 8. Mas, $(\omega\times\{a\})^G$ é definível, e portanto $(\mathcal{P}(\bigcup(\omega\times\{a\})))^G$ não existe. Como, $(\mathcal{P}(\bigcup(\omega\times\{a\})))^G=\mathcal{P}_G(\bigcup(\omega\times\{a\}))$, usando Po^G obtemos uma contradição. A prova detalhada pode ser feita usando o mesmo argumento do Teorema 11.

DEFINIÇÃO 16: A teoria T'' é Z^--Po.

COROLARIO 8: Se Con(T'') então T'' $\nvdash$ Po.

Prova-se da mesma maneira que o Teorema 12.

Agora veremos que estes resultados podem ser extendidos acrescentando o Axioma da Escolha, que abreviamos por Ac.

LEMA 13: $Z^{-} \vdash \forall x(\forall y \forall z(\exists v\ v \in y \wedge y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z \Rightarrow \neg \exists h(h \in y \wedge h \in z))^{F} \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists y \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow F(z) \in x))$. (Isto é: se ($x$ é disjunto (dois-a-dois) $)^{F}$, então x^{-F} existe).

Dado um x suponha que (x é disjunto$)^{F}$

$$\forall y \forall z(\exists v\ F(v) \in y \wedge F(y) \in x \wedge F(z) \in x \wedge y \neq z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists h\ (F(h) \in y \wedge F(h) \in z))$$

Por F bijeção

$$\neg \exists h\ (F(h) \in y \wedge F(h) \in z)) \Leftrightarrow \neg \exists h\ (h \in y \wedge h \in z)) \qquad (1)$$

Existe no máximo um $\{n,a\} \in x$ tal que $n \in \omega$. Se não, existem n e m, $n \in \omega$, $m \in \omega$ e $n \neq m$. Então, $F(W_n) \in x \wedge F(W_m) \in x \wedge W_n \neq W_m$. Por (1) $\neg \exists h\ (h \in W_n \wedge h \in W_m)$, uma contradição, pois para todo $k \in \omega$, $\emptyset \in W_k$. Por Separação obtemos: $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-6}$, tais que, $x_{-1} = \{z\ : z \in x \wedge \overset{*}{\exists} n(n \in \omega \wedge z = \{a,n\})\}$ (z é o caso 1 inverso), etc. Como vimos existe no máximo um $n \in \omega$ tal que, $\{n,a\} \in \omega$ e então existe no máximo W_n tal que $W_n \in x_{-1}^{-F}$ e x_{-1}^{-F} existe. Como $\{\langle a,\emptyset \rangle\}$ existe, por Po, Un e Se, $\{\langle a,\emptyset \rangle\} \times x_{-2} = x_{-2}^{-F}$ existe. Nos outros casos, fazemos como no Lema 11.

Por fim, notemos que $x^{-F}=x_{-1}^{-F} \cup \ldots \cup x_{-6}^{-F}$ e x^{-F} satisfaz o consequente.

LEMA 14: Se $(x$ é disjunto$)^{F}$, então x^{-F} é disjunto.

Suponha que x^{-F} não seja disjunto

$$\exists y \exists z\ (y \in x^{-F} \wedge z \in x^{-F} \wedge y \neq z \wedge \exists h\ (h \in y \wedge h \in z))$$

Pela definição de x^{-F}

$$(*) \qquad \exists y \exists z\ (F(y) \in x \wedge F(z) \in x \wedge y \neq z \wedge \exists h\ (h \in y \wedge h \in z))$$

Como F é bijeção

$$(**) \qquad \exists h\ (h \in y \wedge h \in z)) \leftrightarrow \exists h\ (F(h) \in y \wedge F(h) \in z))$$

Então, por (*) e (**)

$$\exists y \exists z\ (F(y) \in x \wedge F(z) \in x \wedge y \neq z \wedge \exists h\ (F(h) \in y \wedge F(h) \in z))$$

Mas, esta fórmula é $\neg$ $(x$ é disjunto$)^{F}$.

Lembramos que o Axioma da Escolha, Ac, é a fórmula

$$\forall x\ (\forall y \forall z\ (y \in z \wedge z \in x \wedge y \neq z \wedge \exists h\ h \in y \Rightarrow \neg\ \exists h\ (h \in y \wedge h \in z)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists e \forall z\ (z \in x \Rightarrow \exists! h\ (h \in z \wedge h \in e))$$

Lembramos ademais que ZC^- é Z^- mais Ac.

TEOREMA 14: $ZC^- \vdash Ac^F$

Suponhamos o antecedente do Ac relativizado, ou seja, $(x \text{ disjunto})^F$. Então, pelo Lema 13, x^{-F} existe e pelo Lema 14, x^{-F} é disjunto. Então, pelo Ac temos:

$$\exists e \forall z\ (z \in x^{-F} \Rightarrow \exists! h\ (h \in z \wedge h \in e))$$

E por F bijeção

$$\exists e \forall z\ (z \in x^{-F} \Rightarrow \exists! h\ (F(h) \in z \wedge F(h) \in e))$$

Por definição de x^{-F}

$$\exists e \forall z\ (F(z) \in x \Rightarrow \exists! h\ (F(h) \in z \wedge F(h) \in e))$$

E isto é o consequente relativizado.

DEFINIÇÃO 17: Seja TC a teoria ZC^- menos Un.

COROLARIO 9: Se Con(TC), então TC$\nvdash$ Un.

Jensen e Schröder[a] forneceram una prova de que, ao contrário do que acontece en ZF, na teoria de Zermelo o Esquema de Axiomas de Fundações:

$$\exists y\ \varphi(y) \Rightarrow \exists y\ (\varphi(y) \wedge\ \neg\exists z\ (z\in y \wedge \varphi(z)))$$

é independente do Axioma de Fundações (ou Axioma Fraco de Fundações):

$$\forall x\ (\exists y\ y\in x \Rightarrow \exists y\ (y\in x \wedge\ y\cap x=\emptyset))$$

Aqui fornecemos una prova mais simples que a de Jensen e Schröder e que tem duas vantagens adicionais:

a) Mostra a existência de uma sequência (classe) infinita descendente definível em Z^-;

b) Tem un carácter finitista.

Em primeiro lugar vamos definir a sequência das c_n a qual será a sequência infinita descendente, e logo, o modelo de permutação

---

[a] Cf. JENSEN SCHROEDER [1969].

Sejam $c_0=\{\{\{\emptyset\}\}\}$

$c_{n+1}=\{c_n\}$

Seja H tal que

1) $H(c_{n+2})=c_n$

Se i=0 ou i=1

2) $H(c_i)=c_i\cup\{\emptyset\}$ (isto é $c_i\cup 1$)

3) $H(c_i\cup(n+1))=c_i\cup(n+2)$

4) $H(x)=x$ Se não é um caso acima.

De maneira mais simples que no Teorema 10, prova-se:

TEOREMA 15: H define uma permutação do universo.

Para os termos à esquerda, os c_i não contêm naturais e assim caso 3) não é casos 1) nem 2), e estes casos são obviamente diferentes. Com as mesmas razões prova-se que os casos à direita também são diferentes. Pela simetria da definição e 4), H está definida para todo o domínio e é sobrejetora.

LEMA 15: Para qualquer x, temos que x^H e x^{-H} são conjuntos.

A mesma técnica que usamos para provar o Lema 11. Dado um conjunto x fazemos os x_i tal que $x=x_1\cup x_2\cup x_3\cup x_4$.

Usando as operações de Z^- podem-se contruir x_i^H e x_i^{-H} para $1 \leq i \leq 3$. Por exemplo, $\bigcup x_1$ é x_1^H, e x_1^{-H} obtem-se por Separação de $\mathcal{P}\mathcal{P}(x_1)$. Para $i=4$ é imediato.

COROLARIO 10: a) $Z^- \vdash In^H$

b) $Z^- \vdash Un^H$

c) $Z^- \vdash Po^H$

Para a) notamos que para qualquer $x \in \omega$, $H(x)=x$. Então pelo Lema 7 temos $Z^- \vdash In^H$. As partes b) e c) são consequências imediatas do Corolário 5 e do Lema 15.

LEMA 16: Para toda fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ com variáveis livres $x_1,\dots,x_n$, existe uma fórmula ψ com as mesmas variáveis livres tal que $Z^- \vdash \varphi(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow \psi^H(x_1,\dots,x_n)$.

A prova é por indução na complexidade da fórmula. A única parte que a prova não é imediata é o caso que φ seja $x \in y$, onde ψ^H é $\exists z\ (\ H(z)=x \wedge H(z) \in y\ )$.

COROLARIO 11: Existe uma fórmula ψ com duas variáveis livres x e y tal que $Z^- \vdash \psi^H(x,y) \Leftrightarrow x_y = c_y$.

A classe $\{c_n\colon\ n \in \omega\}$ é definível e tem uma bijeção definível com ω. Então temos $Z^- \vdash \varphi(x,y) \Leftrightarrow x_y = c_y$. Pelo Lema acima temos $Z^- \vdash \psi^H(x,y) \Leftrightarrow x_y = c_y$.

LEMA 17: Existe uma fórmula ψ com duas variáveis livres tal que $Z^- \vdash \forall n \in \omega\ \exists x \exists y\ (\psi^H(n+1,x) \wedge \psi^H(n+2,z) \wedge H(z) \in x)$.

Seja n tal que $n \in \omega$. Temos que $c_n \in c_{n+1}$ e como $c_n = H(c_{n+2})$ temos também $H(c_{n+2}) \in c_{n+1}$. Pelo Corolário 11 temos a prova da fórmula.

A operação sucessor é absoluta, pois $n+1 = n \cup \{n\}$, e $n+2$ deve-se ler como $(n+1)+1$. Como também ω e os naturais são absolutos, temos que $\forall n \in \omega\ \exists x\ \exists y\ (\ \psi^H(n+1,x) \wedge \psi^H(n+2,z) \wedge H(z) \in x\ )$ e $(\forall n \in \omega\ \exists x \exists y (\psi(n+1,x) \wedge \psi(n+2,z) \wedge z \in x))^H$ são a mesma fórmula, que chamaremos (existem sequências infinitas decrescentes)^H, que deve entenderse no sentido de "existe uma classe definível que é uma sequência infinita decrescente" e não como a existência de um conjunto. Então temos:

COROLARIO 12: $Z^- \vdash$ (Existem sequências infinitas decrescentes)^H.

TEOREMA 16: $Z + \forall x\ x \in W \vdash [\ \forall x\ (\exists y\ y \in x \Rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))]^F$

Como dissemos, a interseção finita e o conjunto vazio são absolutos. Agora diferenciamos os seguintes casos.
Caso 1: $x = c_{n+1}$. Então $c_n \in c_{n+1}$, $F(c_{n+2}) \in c_{n+1}$ e $c_{n+2} \cap c_{n+1} = \emptyset$.
Caso 2: $x = c_0$. Então $c_0 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ e $F(\{\{\emptyset\}\}) = \{\{\emptyset\}\} \cap \{\{\{\emptyset\}\}\} = \emptyset$.

Caso 3: $x=c_i\cup(n+1)$. Então $\emptyset\in x$. Caso 4 $F(x)=x$. Por Fundações $\exists y\ (y\in x\ \wedge\ y\cap x=\emptyset)$. Agora procedemos por sub-casos. Sub-caso 4 a: $y=c_n$. Seja $c_m\in x$ tal que $c_{m+1}\notin x$ e suponhamos que $\forall h\ (F(h)\in x\ \Rightarrow\ h\cap x\neq\emptyset)$. Então $c_{m+1}\in x$. Sub-caso 4 b: $y=c_i\cup(n+1)$. Assim, para algum y' $y=F(y')$ e $y'\subseteq y$. Então $y'\cap x=\emptyset$. Sub-caso 4 c: $F(y)=y$. Imediato.

COROLARIO 13: Se Con(Z) então $Z\nvdash$ (Não existem sequências infinitas decrescentes).

Pelos Corolários 10 e 12, e os Teoremas 8 e 16.

Como é bem conhecido o Esquema de Fundações implica que não existem sequências infinitas descendentes, e assim temos:

COROLARIO 14: Se Con(Z) então $Z\nvdash \exists y\ \varphi(y)\ \Rightarrow\ \exists y\ (\varphi(y)\ \wedge\ \neg\exists z\ (z\in y\ \wedge\ \varphi(z)))$ para toda fórmula φ.

BIBLIOGRAFIA.

DRAKE, F.

[1974] Set Theory, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

FELGNER, U.

[1971] Models of ZF-Set Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics **223**.

FRAENKEL, A.

[1922] Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Klasse 21, 253-257.

JENSEN, R.B., SCHROEDER,M.E.

[1969] Mengeninduktion und Fundierungsaxiom, Archiv für mathematische Logik, 12, 119-133.

MENDELSON, E.

[1987] Introduction to Mathematical Logic (3th. Edition), Wadsworth and Brooks, Belmond.

MOSTOWSKI, A.

[1939] Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes von Ordnungsprinzip. Fund. Math. 32, 201-252.

SKOLEM, T.

[1923] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wiss. Vorträge 5, Kongress skandinav. Mathematiker in Helsingfors 1922, 217-232.

ZERMELO, E.

[1908] Untersuchen über die Grundlagen der Mengenlehre, Mathematischen Annalen, 65, 261-281.