José Eduardo de Almeida Moura

UM ESTUDO DE Cω EM CÁLCULO DE SEQÜENTES E DEDUÇÃO NATURAL

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Profª.Drª.Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em ..../..../2001

BANCA

Profª.Drª Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Prof. Dr. Elias Humberto Alves

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

M 865 e

Moura, José Eduardo de Almeida
Um estudo de Cω em cálculo de seqüentes e dedução natural / José Eduardo de Almeida Moura - - Campinas, SP : [s. n.], 2001.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica simbólica e matemática. 2. Lógica matemática não-clássica. 3. Lógica - Filosofia. I. D'Ottaviano, Ítala Maria Loffredo . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

Resumo

A partir dos trabalhos de Raggio, datados de 1968 e 1978, sobre os sistemas $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, desenvolve-se uma análise de C_ω em Cálculo de Seqüentes e Dedução Natural, apresentando como resultados mais destacados os Teoremas de Eliminação do Corte e a de Normalização Forte. Características relevantes são o tratamento dado à negação e a permissividade da definição de prova normal.

Abstract

Following Raggio's 1968 and 1978 papers on $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ systems, it is developed here an analysis of C_ω in Sequent Calculus and Natural Deduction, presenting respectively the Cut Elimination and the Strong Normalization Theorems as main results. Relevant characteristics are the treatment applied to negation and the permissibility of normal proof definition.

Sumário

Introdução

O assunto geral desta tese pode ser classificado como Teoria da Prova. Métodos e técnicas utilizados para a análise geral de sistemas lógicos e teorias formalizadas, através do estudo da estrutura de suas provas, são utilizados para mostrar que o Sistema C_ω, apresentado por da Costa em 1963 [15], formulado convenientemente em Cálculo de Seqüentes e em Dedução Natural presta-se, adequadamente, à demonstração do *Hauptsatz* (v. [38]). De fato, desenvolve-se a formulação que Elias H. Alves apresenta em [2] para este cálculo paraconsistente em dedução natural — o cálculo NNC_ω — e, além de discutir algumas de suas apresentações em cálculo de seqüentes — CG_ω, WG_ω, WG'_ω e WGI_ω — desenvolve-se uma nova formulação — NCG_ω — para a qual se prova a eliminação do corte, a validade do princípio de subfórmula e, por conseqüência, sua decidibilidade.

Aliás, esta questão, generalizada — a decidibilidade dos Cálculos $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ —, foi a motivação inicial de A. Raggio em [61]. Este trabalho pioneiro não rendeu frutos imediatos, sob a ótica do método segundo o qual foi apresentado, embora o problema da decidibilidade tenha sido resolvido, satisfatoriamente, por outros caminhos, por exemplo, por Fidel em [36].

Meu interesse em retomar os temas discutidos por Raggio, em [61] e [63], data dos idos de 1985, quando esta tese foi inciada, sob a orientação do Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira. O entusiasmo e brilhantismo com que o Prof. Luiz Carlos ministrava suas aulas de Teoria da Prova foram a motivação bastante para que eu desejasse me iniciar nestas questões, embora a advertência do Prof. Elias H. Alves sobre a candência dos temas discutidos e a necessidade de aprofundar o trabalho que Raggio e ele próprio haviam iniciado, aproveitando a disponibilidade e competência daquele professor, tenha sido elemento fundamental da decisão.

Assim, contando com a aceitação do Prof. Luiz Carlos, foram iniciados os estudos que deram origem a este trabalho. A idéia geral de retomar as discussões dos artigos do Prof. Raggio, de 1968 e 1978, apoiava-se na possibilidade de aplicar recursos mais recentemente desenvolvidos, tendo em vista que o crescente interesse por questões relativas à computabilidade e a excelência demonstrada pelas técnicas associadas à Teoria da Prova, punham à disposição um novo enfoque e instrumentos de análise anteriormente não acessíveis. Deste período são uma comunicação, ainda não publicada, apresentada no Encontro Brasileiro de Lógica realizado em São José dos Campos em 1986; o esboço geral das provas, hoje completamente desenvolvidas; e a demonstração de alguns teoremas fundamentais.

A conclusão da licença para cursar pós-graduação e o retorno à terra Natal, levaram à interrupção do trabalho, que se estendeu pelo período em que fui convocado a participar da administração universitária no Rio Grande do Norte.

O estímulo do Prof. Antônio Mário Sette, sua disposição e empenho para analisar, junto com os Professores Walter Carnielli, Ítala D'Ottaviano e Elias Alves, o que já havia sido elaborado e avaliar sua originalidade e atualidade, foram o impulso para a retomada e conclusão deste trabalho. A disponibilidade destes professores e o apoio sempre presente do Prof. Elias, inclusive hospedando-me quando de minhas vindas a Campinas, para discutir e avaliar a atualidade do trabalho iniciado, levaram-me a uma investigação bibliográfica por títulos mais recentemente publicados, para atualizar as informações de que já dispunha.

Como pode ser visto na Bibliografia, há uma retomada das discussões sobre os sistemas paraconsistentes de da Costa. A par as aplicações que têm se multiplicado, os trabalhos recentemente publicados de da Costa, Béziau, Carnielli, Marcos de Almeida, Castro, Castro e D'Ottaviano, dentre outros, demonstram o interesse por temas relacionados com esses cálculos. Assim, solucionar problemas pendentes do C_ω, coloca-se neste contexto. Se considerado sob o ponto de vista geral das discussões sobre as lógicas paraconsistentes, é indiscutível o interesse da comunidade acadêmica por temas a elas relacionados. Tome-se como parâmetro a quantidade de publicações recentes ou a afluência de especialistas a congressos internacionais realizados aqui e na Europa.

A despeito dos problemas que originaram estas discusões terem sido solucionados através de outros procedimentos, é de considerar que, sob o aspecto histórico, aplicar metodologias clássicas a problemas antigos contribui para enriquecer o contexto original, esclarecendo, *a posteriori,* aqueles problemas.

No caso particular aqui discutido, quanto ao cálculo de seqüentes, parece terem sido respeitados, estritamente, os 'limites' impostos pelo 'estado da arte', na época. Parece, três problemas enfrentados por Raggio 'não podiam ser resolvidos' no fim dos anos 60, por limitações impostas pela 'received view'[1], ou pelo 'paradigma'[2] vigente. Primeiro, embora se possa encontrar as origens das lógicas paraconsistentes no início do século, em Vasil'ev e Łukasiewicz, e Jaśkowski já tivesse publicado a primeira versão de sua Lógica Discursiva desde 1948, a proposta de da Costa e a hierarquia dos cálculos $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, continham elementos inovadores ainda não suficientemente 'absorvidos' pela comunidade científica dos lógicos e matemáticos. Inibições, portanto, seriam naturais no desenvolvimento destes sistemas. Segundo, embora brilhante na demonstração do teorema da forma normal para os cálculos NJ e NK em [60], Raggio certamente se preocupava mais com os problemas da teoria da prova da época, que estavam focados, para Kreisel em [45], na relação de conseqüência (cf. [46]), do que com questões novas propostas por sistemas não-clássicos. Em terceiro lugar, as diferenças fundamentais entre os cálculos $C_n, 1 \leq n < \omega$ e C_ω ainda não tinham sido claramente enfatizadas, pondo-se o problema da solução para $C_n, 1 \leq n \leq \omega$.

Assim, superadas estas limitações históricas, pode-se encontrar uma solução para C_ω e mais, mostrar que, embora não a tenha desenvolvido, esta solução estava talvez implícita na proposta de Raggio em [61].

Desenvolver o sistema de dedução natural de Elias H. Alves, apresentado em [2], ampliando a solução de Raggio, em [63], até a demonstração de um teorema de normalização forte, resgata o alcance do que havia sido proposto e completa um ciclo de estudos.

Assim, após novas discussões com a Professora Ítala D'Ottaviano e o Professor Newton da Costa, agora na ausência definitiva do Professor Sette, concluiu-se pela originalidade e relevância dos resultados aqui apresentados, que foram explanados, também, para conhecimento e crítica dos Professores Elias H. Alves, Daniel D. P. Alves e Milton A. de Castro, aos quais agradeço

[1] [68].

[2] A idéia de paradigma, de Kuhn, em [47], é adequada para descrever o conjunto de teorias e visões que definem o ambiente e as condições da pesquisa científica de uma época, embora ainda não tenha visto aplicação deste enfoque na 'explicação' ou 'reconstrução' de qualquer fragmento da história da lógica.

as sugestões para melhorar o texto e a indicação de imprecisões e erros que procurei corrigir.

Este trabalho divide-se em 4 capítulos. No Capítulo 1, Sobre o Sistema Proposicional C_ω de da Costa, apresenta-se, sumariamente, o Cálculo Proposicional C_ω a partir de algumas considerações gerais sobre suas origens e como Raggio, através do sistema $CG_n(1 \leq n \leq \omega)$, tentou desenvolvê-lo em Cálculo de Seqüentes e as principais dificuldades que encontrou para demonstrar, como queria, a decidibilidade destes cálculos. O Capítulo 2, C_ω em Cálculo de Seqüentes, apresenta uma formulação de CG_ω com *mix*, MCG_ω, que difere do cálculo CG_ω original de [61] somente por conter *mix* no lugar do *corte*, para o qual se prova um teorema de eliminação do *corte* (*mix*, no caso) e desenvolve o sistema NCG_ω, para o qual se prova a eliminação do *mix*. No Capítulo 3, C_ω em Dedução Natural, após uma breve discussão das idéias fundamentais de [63], introduz-se e desenvolve-se a formulação apresentada em [2], demonstrando-se um Teorema de Normalização Forte. Por fim, em Considerações Finais, são resumidos os resultados obtidos e discutidos seu alcance e aplicações.

Agradeço sinceramente a todos estes que discutiram e contribuiram para a conclusão deste trabalho e muito particularmente à minha querida amiga Maria Inês Prates Alves, às Professoras Ângela Maria Paiva Cruz e Maria da Paz Nunes de Medeiros, do Departamento de Filosofia da UFRN e ao Dr. Jackson M. F. Maia que me ensinou a usar LaTeX.

Dedico este trabalho a Ana Carenina (mãe de Ariel e Amanda), Ana Catarina, minhas filhas, e a Katiane, minha mulher.

Capítulo 1

Sobre o Sistema Paraconsistente C_ω de da Costa

Este Capítulo, depois de apresentar, rapidamente, a origem dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$, descreve o cálculo C_ω e algumas de suas características básicas; contextualiza a proposta de Raggio, em [61], relacionando-a com a questão da decidibilidade dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$, e apresenta o cálculo CG_n, $1 \leq n \leq \omega$. Destaca a equivalência entre C_ω e CG_ω e, por fim, apresenta os cálculos WG_ω, WG'_ω e WGI_ω, de [61], após discutir as dificuldades que Raggio encontrou para provar a eliminação do *corte* nos cálculos CG_n, $1 \leq n \leq \omega$.

1.1 Lógica paraconsistente

A presença de contradição em teorias cuja lógica subjacente é, por exemplo, a Lógica Clássica ou a Lógica Intuicionista, tem como conseqüência imediata a trivialização. Semelhantemente, a Lógica Minimal permite deduzir, a partir de uma contradição, a negação de qualquer proposição. Este contexto, que desqualificava como relevante qualquer teoria cuja consistência não estivesse convenientemente provada, durante muito tempo impediu o desenvolvimento de estudos que permitissem um tratamento mais adequado de, por exemplo, teorias que contivessem conjuntos como o de Russell, ou o de Cantor, e impediu análises menos limitadas de posturas filosóficas vinculadas a idéias de Heráclito e outros, mantendo as contradições num contexto sem melhores acessos.

Apesar das advertências de Hegel e outros filósofos da direita e da esquerda hegelianas sobre a importância das contradições para uma melhor compreensão da realidade, a prevalência da interpretação clássica da lógica aristotélica e sua apropriação por todas as outras correntes filosóficas e pela ciência, reduziu o espaço para o estudo profundo da contradição, que teve, de alguma forma, que aguardar o impulso das geometrias não euclidianas para que N. A. Vasil'ev, através das lógicas imaginárias (v. [5]), chamasse atenção para a distinção das partes e dimensões que constituem um sistema lógico e lançasse algumas bases sobre as quais se pudesse desenvolver lógicas que admitissem contradições, sem o erro de afastar-se das origens e fundamentos clássicos.

Assim, distinguindo a *metalógica,*

> onde estariam as leis do pensamento, leis que não podem ser eliminadas de um sistema sem que este deixe de ser lógico; (...) ([5], p. 10.),

da *parte ontológica da lógica,*

> onde estariam as leis que dependem das propriedades dos objetos. ([5], p. 10.),

Vasil'ev lança as bases para que se possa construir lógicas distintas da lógica aristotélica e que permitam, dentre outros, estudos de contradições, sem as limitações tradicionais.

> De acordo com Vasil'ev, a metalógica é a "primeira lógica", anterior a toda lógica, a mesma para todos os sistemas e uma lógica de "dimensão um", i. e., é uma lógica de somente um tipo de julgamentos — julgamentos afirmativos. Para ele, partindo da metalógica, podemos construir a lógica aristotélica, uma lógica de "dimensão dois ", adicionando julgamentos de um novo tipo, os julgamentos negativos. Da Lógica Aristotélica podemos construir uma lógica de "dimensão três", adicionando julgamentos de um terceiro tipo, os "julgamentos indiferentes" (S é P e não P) ([33], p. 98.)[1].

Pode-se, portanto, dizer que, enquanto era introduzida a Lógica Imaginária e enquanto J. Łukasiewicz reinterpretava o Livro Γ da Metafísica (v. [49]), estavam sendo lançadas as bases para o trabalho que S. Jaśkowski, sob a forma da Lógica Discursiva, em [42], e N. C. A. da Costa, com a Lógica Paraconsistente, desenvolveram para o estudo de sistemas formais inconsistentes, mas não triviais.

Em Jaśkowski [42] está delineado um programa para a Lógica de Sistemas Contraditórios:

[1] "According to Vasil'ev, metalogic is the "first logic", prior to every logic, the same for all systems and one logic of "dimension one", i. e., it is a logic of only one quality of judgements - affirmative judgements. For him, starting from metalogic, we can construct the aristotelian logic, a logic of "dimension two", by adding judgements of a new quality, the negative judgements. From Aristotelian Logic we can build a logic of "dimension three", by adding judgements of a third quality, the "indifferent judgements" (S is P and not P)" ([33], p. 98.).

> De acordo com isto, o problema da lógica de sistemas contraditórios é formulado aqui da seguinte maneira: a tarefa é encontrar um sistema de cálculo sentencial que: 1) quando aplicado a sistemas contraditórios não implicaria sempre sua trivialização (*over-completeness*), 2) seria rico o bastante para permitir inferência prática, 3) teria uma justificação intuitiva. Obviamente, estas condições não determinam univocamente a solução, pois elas podem ser satisfeitas em vários graus, sendo bastante difícil avaliar objetivamente a satisfação da condição 3) (p. 145)[2].

É, no entanto, em "Notas sobre o conceito de contradição" ([13]) de N. C. A. da Costa, que se encontra proposta uma forma diferente de ver o problema:

> Dos pontos de vista sintático e semântico, toda teoria é permissível, desde que não seja trivial.

Este *Princípio de Tolerância em Matemática* começaria a mostrar sua fecundidade a partir de 1963 com "Sistemas Formais Inconsistentes" ([16]) e na série de artigos publicada a partir daí, principalmente em *Comptes Rendus de l'Academie de Science de Paris* (ver bibliografia).

Em [16] estão muito claramente definidos os interesses e o programa desta investigação que geraria as lógicas paraconsistentes. Veja-se:

> Informalmente, a idéia central deste trabalho é a seguinte: um sistema formalizado baseado na lógica clássica (ou lógica intuicionista, ou algumas lógicas polivalentes...) se inconsistente, é trivial no sentido em que todas as suas proposições são demonstráveis; então, deste ponto de vista, ela não tem qualquer interesse matemático especial. No entanto, por muitas razões como, por exemplo, a análise comparativa com sistemas consistentes, e para uma adequada análise metamatemática do princípio sob

[2] "Accordingly, the problem of the logic of contradictory systems is formulated here in the following manner: the task is to find a system of the sentential calculus which: 1) when applied to the contradictory systems would not always entail their over-completeness, 2) would be rich enough to enable practical inference, 3) would have an intuitive justification. Obviously, these conditions do not univocally determine the solution, since they may be satisfied in variyng degrees, the satisfaction of condition 3) being rather difficult to appraise objectively " ([42], p. 145).

consideração, é conveniente estudar 'diretamente' os sistemas inconsistentes. Mas para tal estudo é necessário construir novos tipos de lógica elementar apropriados para manipular tais sistemas[3] (apud [33], p. 103).

A hierarquia de cálculos proposicionais C_n, $1 \leq n \leq \omega$, construída nestes primeiros trabalhos de 1963 e 1964, satisfaz às condições seguintes, estabelecidas como características fundamentais do programa proposto:

1. o princípio de contradição, na forma $\neg(A \& \neg A)$, não é válido em geral;

2. de duas premissas contraditórias A e $\neg A$, não se deduz uma fórmula qualquer B; e

3. os sistemas contêm os esquemas e regras mais importantes da lógica clássica que são compatíveis com as condições 1 e 2.

Esta hierarquia, mantendo suas características fundamentais, foi estendida para os cálculos de predicados de primeira ordem C_n^*, $1 \leq n \leq \omega$, para os cálculos de primeira ordem com igualdade $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$ e para os cálculos de descrições D_n, $1 \leq n \leq \omega$. Posteriormente, estes cálculos foram aplicados para a construção da hierarquia de teorias de conjuntos NF_n, $1 \leq n \leq \omega$ e para sistemas de ordem superior [3].

D'Ottaviano, em [33], bem apresenta todo um estudo sobre o desenvolvimento destes sistemas e inclui a bibliografia fundamental para a compreensão da importância destes trabalhos para o desenvolvimento dos estudos de lógica, também, no Brasil.

[3] "Loosely speaking, the central idea of this paper is the following: a formalized system based on classical logic (or intuitionistic logic, or some many-valued logics...) if inconsistent is trivial in the sense that all its propositions are provable; then, from this point of view, it does not have any special mathematical interest. However, for many reasons as, for example, the comparative analysis with consistent systems, and for an adequate metamathematical analysis of the principle under consideration, it is convenient to study 'directly' the inconsistent systems. But for such study it is necessary to construct new types of elementary logic appropriate to handle such systems" ([33], p. 103).

1.1.1 O sistema C_ω

O sistema C_ω, introduzido por da Costa, que aqui será estudado, pode ser descrito, sumariamente, como segue. Construído a partir da linguagem proposicional usual com os símbolos $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, com um conjunto enumerável de variáveis proposicionais e fórmulas definidas como usualmente, que serão denotadas por letras latinas maiúsculas, C_ω caracteriza-se pelo seguinte conjunto de postulados, segundo [15]:

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,
3. $\dfrac{A, \quad A \supset B}{B}$,
4. $A\&B \supset A$,
5. $A\&B \supset B$,
6. $A \supset (B \supset (A\&B))$,
7. $A \supset A \vee B$,
8. $B \supset A \vee B$,
9. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$,
10. $A \vee \neg A$,
11. $\neg\neg A \supset A$.

Os operadores a seguir são introduzidos por definição.

Definição 1.1 $A^o =_{df} \neg(A\&\neg A)$.

Definição 1.2 $A^n =_{df} A^{\overbrace{oo...o}^{}}{}_{n\ vezes}$.

Definição 1.3 $A^{(1)} =_{df} A^o$.

Definição 1.4 $A^{(n)} =_{df} A^o\&A^{oo}\&...\&A^n$.

Definição 1.5 $\neg^* A =_{df} \neg A \& A^o$.

Definição 1.6 $\neg^{(n)} A =_{df} \neg A \& A^{(n)}$.

Os cálculos C_n, $1 \leq n < \omega$, têm os postulados de C_ω mais os seguintes, para cada valor de n:

12(n). $B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$,

13(n). $A^{(n)} \& B^{(n)} \supset (A \supset B)^{(n)} \& (A \& B)^{(n)} \& (A \vee B)^{(n)}$.

A negação $\neg^*$ tem todas as propriedades da negação clássica, em C_n, $1 \leq n < \omega$, e isto pode ser facilmente comprovado, através da demonstração do teorema correspondente à *reductio ad absurdum*.

C_ω constitui o limite natural estabelecido por seu criador, da hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Carnielli e de Almeida, em [12], dentre outros, mostraram que, sob certos aspectos e a partir do ponto de vista que adotam, C_ω não seria o limite de C_n, tirando daí inúmeras conseqüências e contribuindo, decisivamente, para estabelecer que não basta tentar estender as técnicas de análise e os resultados obtidos em C_n, $1 \leq n < \omega$ para C_ω. Aí começam, talvez, as explicações para as dificuldades encontradas por Raggio, em [61], como se mostra adiante.

A observação seguinte,

> Arruda 1975 provou que $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, não eram decidíveis por matrizes finitas (veja também Arruda & da Costa 1964). Desde 1976, vários lógicos introduziram diferentes tipos de semânticas para os cálculos de da Costa e provaram sua decidibilidade (Arruda & da Costa 1977, Alves e da Costa 1977, Fidel 1977, Loparic 1977 and 1978, Loparic & Alves 1980, Marconi 1980, Carnielli 1990 and Carnielli & Lima-Marques 1992)[4] ([35], p. 5).

[4] "Arruda 1975 proved that $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, are not decidable by finite matrices (see also Arruda & da Costa 1964). Since 1976, several logicians have introduced different kinds of semantics for da Costa's calculi, and have proved their decidability (Arruda & da Costa 1977, Alves e da Costa 1977, Fidel 1977, Loparic 1977 and 1978, Loparic & Alves 1980, Marconi 1980, Carnielli 1990 and Carnielli & Lima-Marques 1992)" ([35], p. 5.).

apresenta uma cronologia que ressalta a questão que a seguir se discute.

Para facilitar a referência e simplificar a apresentação de provas, são apresentadas a seguir algumas propriedades e características de C_ω, demonstradas em [2].

As noções de demonstração, de dedução, de teorema (formal) e o símbolo $\vdash$ são definidos como em [43]. Dos postulados apresentados na página 16 decorrem:

1. Em C_ω, demonstram-se todos os teoremas e regras de dedução da lógica positiva intuicionista. Em particular,
   (a) $A\&B \vdash B\&A$,
   (b) $A \vee B \vdash B \vee A$,
   (c) $(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$,
   (d) $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$.
2. A "Lei de Peirce", $((A \supset B) \supset A) \supset A$, não é válida em C_ω.
3. Em particular, não são válidas em C_ω fórmulas da forma de:
   (a) $\neg(A\&B) \supset (\neg A \vee \neg B)$,
   (b) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A\&\neg B)$,
   (c) $\neg A \supset (A \supset B)$.
4. C_ω não é finitamente trivializável.
5. Vale, em C_ω, o Teorema da Dedução. Em particular,
   (a) $A \supset (B \supset C) \vdash (A\&B) \supset C$,
   (b) $(A\&B) \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$.
6. O teorema de substituição de equivalentes não se aplica a C_ω.
7. Os axiomas de C_ω são independentes.

1.2 Decidibilidade dos Cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$

É a partir da questão da decidibilidade dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$, que até 1968 não havia ainda sido estabelecida, que Raggio constrói uma hierarquia de cálculos de seqüentes CG_n, $1 \leq n \leq \omega$, para tentar provar os teoremas do corte correspondentes. No entanto, porque esta hierarquia de cálculos "apresenta algumas restrições que somente são justificadas a partir de um ponto de vista intuicionista", Raggio constrói uma nova hierarquia, WG_n, $1 \leq n \leq \omega$, de cálculos decidíveis, equivalente a C_n, $1 \leq n < \omega$. O cálculo WG_ω, no entanto, é mas mais forte que C_ω, i. e., contém este cálculo, mas permite provar que

$$\vdash_{WG_\omega} \rightarrow (C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B)),$$

que não vale em C_ω (cf. [15], [61] (p. 361-362), [35]).

Para entender a observação de Raggio sobre as restrições que "só se justificam sob um ponto de vista intuicionista", leve-se em conta que C_n, $1 \leq n < \omega$, tem características relevantes distintas das de C_ω.

De fato, enquanto C_ω tem características intuicionistas, como pode claramente ser visto (p. ex., em [50], [48], [65], [29] e [12]), C_n, $1 \leq n < \omega$, não as tem. A tentativa de tratar toda a hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$, uniformemente, dificulta e limita a tarefa a que se propôs Raggio. Na verdade, o ponto de partida de N. C. A. da Costa, em [16] e outros, inibe a adoção de uma visão intuicionista para a análise da hierarquia $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, pois é afirmada, explicitamente, a pretensão de fazê-la uma extensão da Lógica Clássica, inclusive usando como metodologia para sua construção o "enfraquecimento" da negação clássica. No entanto, a literatura posterior, que discute a questão, mostra claramente que C_ω tem características intuicionistas, não se aplicando, portanto, o cuidado da restrição de [61] e mais, sob certos aspectos, não pode ser considerado como o limite de C_n (v. [12], por exemplo).

A observação de da Costa e Marconi, em [24], sobre a decidibilidade dos cálculos $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, mostra bem como Raggio se antecipou na discussão desta questão, merecendo os louros e enfrentando as dificuldades dos pioneiros:

> Problemas de decidibilidade relacionados com as lógicas C_n, $1 \leq n \leq \omega$, e cálculos similares, foram investigados por da Costa,

Alves, Loparic e Marconi (veja Loparic e Alves 1980, Marconi 1980, Loparic e da Costa 1984, e Loparic 1977 e 1978)[5] (p. 11).

Pode-se considerar, por outro lado, que o âmbito da discussão lógica sobre teoria da prova e a aplicação dos métodos de Gentzen, dos anos sessenta, a "received view", (se se quiser usar a expressão consagrada em [68]) ainda estava apegada ao padrão clássico e, antes de dar atenção a outros problemas, vivia o desenvolvimento das discussões sobre o Programa de Hilbert. Prawitz, em [57], afirma:

> Embora a formulação do programa de Hilbert pertença aos vinte, o caminho próprio para entender e avaliá-lo é algo que ainda tem sido muito discutido na última década, e trabalhos técnicos assim como monografias neste campo têm aparecido muito recentemente[6].

O trabalho clássico de G. Kreisel, *A survey of proof theory* ([45]), bem mostra quais são os métodos, objetivos e problemas desta época. É clara a limitação explícita aos procedimentos clássicos já consagrados e a necessidade de resolver os problemas já postos que ainda aguardavam solução.

Com efeito, a perseguição da prova do "Hauptsatz" para demonstração da decidibilidade não é via de investigação corrente, pois que somente em 1965 é publicado, na Suécia, [55], o texto que sistematiza e amplia os métodos de desenvolvimento e o alcance dos sistemas de Dedução Natural, e relaciona os resultados de normalização com a eliminação do corte.

Acima destes fatos e sem considerar que a "restrição intuicionista" impõe limitação a C_ω, continuar a análise que Raggio faz deste sistema a partir de CG_ω mostra que sua tentativa, historicamente bem situada, pode ser desenvolvida com técnicas que posteriormente foram apresentadas.

---

[5] "Problems of *decidability* related to the logics $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, and similar calculi, were investigated by da Costa, Alves, Loparic and Marconi (see Loparic and Alves 1980, Marconi 1980, Loparic and da Costa 1984, and Loparic 1977 and 1978)" (p. 11).

[6] "Although the formulation of Hilbert's program belongs to the twenties, the proper way of understanding and evaluating it is something that has still been much discussed in the last decade, and technical works as well as monographs in this field have also been appearing very recently".

1.2.1 Proposta de Raggio: a hierarquia CG_n, $1 \leq n \leq \omega$

Em [61], após uma breve introdução sobre contradições e o trabalho de N. C. A. da Costa, A. Raggio apresenta as hierarquias CG_n, $1 \leq n \leq \omega$, WG_n, $1 \leq n \leq \omega$ e WGI_n, $1 \leq n \leq \omega$, tentando resolver o problema da decidibilidade dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$. O contexto desta questão, já apresentado, impunha restrições decorrentes do estado de desenvolvimento das lógicas não clássicas e, até, dos estudos sobre os sistemas de Gentzen e Teoria da Prova. Particularmente importante é levar em conta que ainda não estavam bem delineadas as conseqüências das principais diferenças entre C_n, $1 \leq n < \omega$, e C_ω.

Embora se apresente, aqui, a hierarquia CG_n, $1 \leq n \leq \omega$, somente será desenvolvido o que diz respeito ao cálculo C_ω, explicitando-se e adaptando-se à notação hoje utilizada o que inicialmente foi publicado em [61].

1.2.2 Os sistemas CG_n, $1 \leq n \leq \omega$

Os sistemas CG_n, $1 \leq n \leq \omega$, são construídos a partir de uma linguagem proposicional padrão, L, que contém: um conjunto enumerável de variáveis proposicionais; as constantes lógicas: $\neg, \&, \vee, \supset$.

Definição 1.7 *São as seguintes as fórmulas de L, denotadas por letras latinas maiúsculas:*

1. *As varáveis proposicionais são* **fórmulas atômicas***;*

2. *Se A e B são fórmulas,* $(A\&B), (A\vee B), (A \supset B)$ *e* $(\neg A)$ *são* **fórmulas***;*

3. *Todas as fórmulas são as permitidas por (1) e (2).*

Definição 1.8 *$g(A)$ denota o* **grau da fórmula** *A e:*

1. *se A é uma fórmula atômica, $g(A) = 1$;*

2. *se A é $\neg B$, $g(A) = g(B) + 1$;*

3. *se A é $(B\&C)$, $(B \vee C)$ ou $(B \supset C)$, então $g(A) = g(B) + g(C) + 1$.*

Definição 1.9 *Se A é da forma $(B\&C)$, $(B \vee C)$, $(B \supset C)$, $(\neg B)$, o* **símbolo principal de A** *é $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, respectivamente.*

Definição 1.10 *As subfórmulas de uma fórmula A são as seguintes:*

1. *A é uma* **subfórmula** *de A;*

2. *se $(B\&C)$, $(B \vee C)$, ou $(B \supset C)$ é uma subfórmula de A, então, também o são B e C;*

3. *se $(\neg B)$ é uma subfórmula de A, então, também o é B.*

Esta definição vincula-se ao **princípio de subfórmula.** Adiante, será demonstrada a propriedade de certas derivações, chamadas de normais, de conter somente subfórmulas de suas fórmulas finais.

As letras gregas $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$, com ou sem índices inferiores ou superiores, representam seqüências de fórmulas. Π e Σ, com ou sem índices, representam derivações.

Definição 1.11 *Expressões da forma $\Gamma \rightarrow \Delta$ são* **seqüentes**, *onde Γ é o* **antecedente** *e Δ, o* **conseqüente.**

Definição 1.12 *Uma* **regra de inferência** *é uma figura da forma*

$$\frac{S_1, \ldots, S_n}{S},$$

onde S_1, ..., S_n $(n = 1, 2)$ e S são seqüentes, que representa a inferência do seqüente S (conclusão), a partir dos seqüentes S_1, ..., S_n (premissas).

Gentzen, em [39], estabelece a seguinte relação entre seqüentes e fórmulas:

Definição 1.13 *"O seqüente $A_1, A_2, \ldots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ é equivalente à seguinte fórmula: se os A's e os B's não são vazios:*

$$(A_1 \& \ldots \& A_m) \supset (B_n \vee \ldots \vee B_1);$$

(...) se os A's são vazios, mas os B's não são:

$$B_n \vee \ldots \vee B_1;$$

se os B's são vazios, mas os A's não são:

$$A_1 \& \ldots \& A_m \supset (A \& \neg A);$$

se os A's e os B's são vazios:

$$A \& \neg A.$$

A equivalência é transitiva"[7].

A formulação de CG_ω apresentada em [61] é a seguinte:

1. Regras Estruturais:

   (a) no antecedente:

      i. atenuação:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{D, \Gamma \rightarrow \Theta} at \rightarrow;$$

[7] "The sequents (*sic*) $A_1, A_2, \ldots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ is equivalente to the following formula: If the A's and the B's are not empty: $(A_1 \& \ldots \& A_m) \supset (B_n \vee \ldots \vee B_1)$; (...) if the A's are empty, but the B's are not: $B_n \vee \ldots \vee B_1$; if the B's are empty, but the A's are not: $A_1 \& \ldots \& A_m \supset (A \& \neg A)$; if the A's and the B's are empty: $A \& \neg A$. The equivalence is transitive" ([39], p. 115).

ii. contração:

$$\frac{D, D, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, \Gamma \rightarrow \Theta} cont \rightarrow;$$

iii. permutação:

$$\frac{\Gamma, D, E \rightarrow \Theta}{\Gamma, E, D \rightarrow \Theta} perm \rightarrow;$$

(b) no conseqüente:

i. atenuação:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, D} \rightarrow at;$$

ii. contração:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, D} \rightarrow cont;$$

iii. permutação:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D, E}{\Gamma \rightarrow \Theta, E, D} \rightarrow perm.$$

2. Corte:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, D \quad D, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda, \Theta} corte.$$

3. Regras Operacionais:

(a) no antecedente:

i. conjunção:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \& \rightarrow, \qquad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \& \rightarrow;$$

ii. disjunção:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} \vee \rightarrow;$$

iii. condicional:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad B, \Delta \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} \supset\rightarrow;$$

iv. negação:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\neg\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} \neg\neg \rightarrow;$$

(b) no conseqüente:

i. conjunção:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A\&B} \rightarrow \&;$$

ii. disjunção:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B,} \rightarrow \vee, \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B,} \rightarrow \vee;$$

iii. condicional:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \rightarrow\supset;$$

iv. negação:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A} \rightarrow \neg.$$

4. Seqüentes iniciais da forma:

$$A \rightarrow A.$$

As Regras Operacionais definem a introdução dos símbolos lógicos no antecedente ou no conseqüente de um seqüente. A fórmula na qual o símbolo lógico é introduzido é a **fórmula principal**. As demais fórmulas, explicitamente apresentadas ou pertecentes a Γ, Θ, Λ ou Δ, são **fórmulas secundárias** (ou laterais[8]).

Na regra **corte**, D é a **fórmula do corte** e o **grau** de uma aplicação do corte é igual ao grau de D. Uma regra aplicada no antecedente (conseqüente) será referida, simplesmente, como uma regra de antecedente (conseqüente).

Observe-se que CG_ω é construído a partir do sistema proposicional LK de Gentzen, [39], onde a regra NEA:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} NEA$$

é substituída por:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\neg\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} \neg\neg \rightarrow (NEA')$$

e, em vez de FES:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B} FES,$$

CG_ω tem:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \rightarrow\supset (FES'),$$

[8] "side formulas" (ver, p. ex. [43], p. 443).

que contém a restrição intuicionista (conseqüente com **uma** fórmula).

Os sistemas C_n, $1 \leq n < \omega$, são construídos pela adição a CG_ω de uma regra de introdução de negação no antecedente, denominada, por Raggio, NEA'', com o correspondente valor de n:

$$\frac{A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_p^{(n)}, \Gamma \rightarrow \Theta, \beta(A_1, A_2, ..., A_p)}{\neg\beta(A_1, A_2, ..., A_p), A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_p^{(n)}, \Gamma \rightarrow \Theta} NEA'',$$

onde $\beta(A_1, A_2, ..., A_p)$ é qualquer fórmula construída a partir de $A_1, A_2, ..., A_p$.

As definições seguintes visam a uniformizar a terminologia utilizada neste trabalho e não divergem das usuais.

Definição 1.14 *As Regras Estruturais, Corte e Regras Operacionais são* **regras de inferência**.

Definição 1.15 *Os seqüentes que ocorrem acima das linhas que aparecem nos esquemas das regras de inferência são* **seqüentes superiores** *e os que ocorrem abaixo, são* **seqüentes inferiores**.

Definição 1.16 *Uma* **prova**, *em CG_ω, é construída a partir de seqüentes iniciais por meio de regras de inferência e tem a forma de uma* **árvore** *Π, tal que:*

1. *os nós mais altos de Π são seqüentes iniciais;*
2. *cada nó μ de Π, exceto o último, é o seqüente superior de uma aplicação de uma regra de inferência cujo seqüente inferior também ocorre em Π, imediatamente abaixo de μ.*

Definição 1.17 *O seqüente mais baixo de Π, que não é seqüente superior de nenhuma regra, é o* **seqüente final** *de Π.*

Definição 1.18 *A* **altura** *de Π, denotada por $h(\Pi)$, é definida como a seguir:*

1. *se* Π *é um seqüente inicial,* $h(\Pi) = 0$;

2. *se* Π *é obtida de* Π_1 *por uma Regra Estrutural, então* $h(\Pi) = h(\Pi_1)$;

3. *se* Π *segue de* Π_1 *por uma Regra Operacional de uma única premissa, então* $h(\Pi) = h(\Pi_1) + 1$;

4. *se* Π *segue de* Π_1 *e* Π_2 *por uma Regra Operacional de duas premissas ou Corte, então* $h(\Pi) = \max(h(\Pi_1) + 1,\ h(\Pi_2) + 1)$.

Definição 1.19 *Sejam* Π *e* Π_i *(*$1 \leq i \leq n$*) provas. O* **comprimento de** Π, *denotado por* $l(\Pi)$, *define-se assim:*

1. *se* Π *é um seqüente inicial,* $l(\Pi) = 1$;

2. *se* Π *é da forma*

$$\frac{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n}{A}$$

então $l(\Pi) = (l(\Pi_1) + l(\Pi_2) + ... + l(\Pi_n) + 1)$.

Quando necessário, **"est"** indicará a aplicação de regras estruturais na combinação e número de vezes exigidos para a obtenção do seqüente indicado; $r(\Pi)$ indicará a regra cuja conclusão é o seqüente final de Π.

O teorema e corolário seguintes, conseqüências imediatas do apresentado, demonstram a consistência do sistema descrito. As formas de seqüentes apresentadas, $\Gamma \rightarrow$ (conseqüente vazio) e $\rightarrow$ (antecedente e conseqüente vazios), representam as situações correspondentes à demonstração do falso.

Teorema 1.20 *Em* CG_ω, *não há prova de* $\Gamma \rightarrow$[9].

Demonstração. Indução sobre o comprimento das provas.

Seja Π uma prova tal que $l(\Pi) = 1$. Neste caso, não há o que demonstrar, pois $\Gamma \rightarrow$ não tem a forma de um seqüente inicial. Se $l(\Pi) = n > 1$, pela hipótese da indução, não há prova de pelo menos uma das premissas de $r(\Pi)$. $\square$

[9] Resultado de Raggio, em [61].

Corolário 1.21 *Em CG_ω não há prova de* $\quad\rightarrow\quad$ [10].

Demonstração. Caso particular do Teorema 1.20. □

1.2.3 Equivalência entre C_ω e CG_ω.

É fundamental que a equivalência entre C_ω e CG_ω seja demonstrada, para que tenha sentido a aplicação a C_ω dos resultados obtidos para CG_ω. Demonstrações desta natureza não são estranhas a Gentzen que, além da Definição 1.13, em [39], afirma:

> Duas *derivações* serão chamadas equivalentes se a fórmula final (seqüente final) de uma é equivalente ao da outra.
>
> Dois *cálculos* serão chamados equivalentes se toda derivação em um cálculo pode ser transformada em uma derivação equivalente no outro cálculo (p. 116)[11].

Esta equivalência, segundo [61], significa o que expressa o teorema seguinte:

Teorema 1.22 a) *Se* $\vdash_{C_\omega} A$ *então* $\vdash_{CG_\omega} \rightarrow A$;

b1) *se* $\vdash_{CG_\omega} A_1, A_2, ..., A_n \rightarrow B_1, B_2, ..., B_p$ *então* $\vdash_{C_\omega} A_1 \& A_2 \& ... \& A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_p$;

b2) *se* $\vdash_{CG_\omega} \rightarrow B_1, B_2, ..., B_p$ *então* $\vdash_{C_\omega} B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_p$.

Demonstração. a) Os axiomas de C_ω são demonstráveis em CG_ω.
1) $A \supset (B \supset A)$:

---

[10] Resuldado de Raggio, em [61].

[11] "Two *derivations* will be called equivalent if the endformula (endsequent) of one is equivalent to that of the other.

"Two calculi will be called equivalent if every derivation in one calculus can be transformed into an equivalent derivation in the other calculus" ([39], p. 116).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \rightarrow A}{B, A \rightarrow A}\, at\rightarrow}{A \rightarrow B \supset A}\, \rightarrow\supset}{\rightarrow A \supset (B \supset A)}\, \rightarrow\supset .$$

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \rightarrow A \qquad \cfrac{A \rightarrow A \quad \cfrac{B \rightarrow B \qquad C \rightarrow C}{B \supset C, B \rightarrow C}\, \supset\rightarrow}{B, A \supset (B \supset C), A \rightarrow C}\, \supset\rightarrow}{A, A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow C}\, \supset\rightarrow}{A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow A \supset C}\, \rightarrow\supset}{A \supset B \rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}\, \rightarrow\supset}{\rightarrow (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))}\, \rightarrow\supset .$$

4) $A\&B \supset A$:

$$\cfrac{\cfrac{A \rightarrow A}{A\&B \rightarrow A}\, \&\rightarrow}{\rightarrow A\&B \supset A}\, \rightarrow\supset .$$

5) $A\&B \supset B$:

$$\cfrac{\cfrac{B \rightarrow B}{A\&B \rightarrow B}\, \&\rightarrow}{\rightarrow A\&B \supset B}\, \rightarrow\supset .$$

6) $A \supset (B \supset (A\&B))$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{est\,\cfrac{A \rightarrow A}{A, B \rightarrow A} \qquad \cfrac{B \rightarrow B}{A, B \rightarrow B}\, at\rightarrow}{A, B \rightarrow A\&B}\, \rightarrow\&}{A \rightarrow B \supset (A\&B)}\, \rightarrow\supset}{\rightarrow A \supset (B \supset (A\&B))}\, \rightarrow\supset .$$

7) $A \supset (A \lor B)$:

$$\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A \lor B}\;{\to}\lor}{\to A \supset (A \lor B)}\;{\to}\supset .$$

8) $B \supset (A \lor B)$:

$$\dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to A \lor B}\;{\to}\lor}{\to B \supset (A \lor B)}\;{\to}\supset .$$

9) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \lor B) \supset C))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad C \to C}{A, A \supset C \to C} \qquad \dfrac{B \to B \quad C \to C}{B, B \supset C \to C}\;{\supset}{\to}}{A \lor B, A \supset C, B \supset C \to C}\;{\lor}{\to}}{A \supset C, B \supset C, A \lor B \to C}\;est}{A \supset C, B \supset C \to (A \lor B) \supset C}\;{\to}\supset}{A \supset C \to (B \supset C) \supset ((A \lor B) \supset C)}\;{\to}\supset}{\to (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \lor B) \supset C))}\;{\to}\supset .$$

10) $A \lor \neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}\;{\to}\neg}{\to A \lor \neg A, \neg A}\;{\to}\lor}{\to A \lor \neg A, A \lor \neg A}\;{\to}\lor}{\to A \lor \neg A}\;cont.$$

11) $\neg\neg A \supset A$:

$$\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg\neg A \to A}\;\neg\neg{\to}}{\to \neg\neg A \supset A}\;{\to}\supset$$

O Postulado 3, a regra de *Modus Ponens*, corresponde à seguinte aplicação da regra do *corte* e da regra $\supset\rightarrow$, em CG_ω :

$$
corte\ \dfrac{\rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\rightarrow A \qquad \dfrac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A, A \supset B \rightarrow B}\supset\rightarrow}{A \supset B \rightarrow B}\ corte}{\rightarrow B}
$$

b1) Prova-se por indução sobre o comprimento das provas, Π, dos seqüentes dados.

Base. Se $l(\Pi) = 1$, $\vdash_{CG_\omega} A \rightarrow A$. Ora, $\vdash_{C_\omega} A \supset A$, da forma seguinte:

1. $(A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$ $\quad$ *Post.*2
2. $A \supset (A \supset A)$ $\quad$ *Post.*1
3. $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A)$ $\quad$ $1, 2/Post.3$
4. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ $\quad$ *Post.*1
5. $A \supset A$ $\quad$ $3, 4/Post.3$.

Passo Indutivo. Se $l(\Pi) = n$, pela Hipótese da Indução, a(s) premissa(s) de $r(\Pi)$ é (são) fórmula(s) de C_ω com a propriedade descrita. Ora, qualquer das regras de CG_ω da forma $\& \rightarrow$, $\rightarrow \&$, $\vee \rightarrow$, $\rightarrow \vee$, $\supset\rightarrow$, ou $\rightarrow\supset$ é regra derivada de C_ω, conforme o Teorema 1, de [15]. Portanto, obtém-se o resultado desejado aplicando as regras correspondentes.

Se $r(\Pi)$ é $\neg\neg \rightarrow$, posto que $\vdash_{C_\omega} A \supset \neg\neg A$, $\neg\neg \rightarrow$ é admissível em C_ω, e, aplicando-a convenientemente, obtém-se o resultado desejado. Da mesma forma, se $r(\Pi)$ é $\rightarrow \neg$.

As Regras Estruturais são admissíveis em C_ω, pois correspondem a propriedades de "$\vdash$" garantidas pela validade do Teorema da Dedução e as propriedades de idempotência e comutatividade de $\&$ e de $\vee$.

b2) Este caso prova-se, analogamente, considerando os casos provados no Teorema 1.20 e Corolário, e a Definição 1.13. □

A caracterização explícita da adequação da restrição intuicionista imposta à regra de introdução do condicional no conseqüente se dá pela prova de que a regra FES $(\rightarrow\supset)$ não é admissível em CG_ω. Isto é feito mostrando que

$$\rightarrow (C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B))$$

é demonstrável com a utilização da regra de introdução de condicional no conseqüente, mas não com a restrição intuicionista, e a apresentação de matrizes que mostram que fórmulas desta forma não valem em C_ω [61].

Com efeito,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rightarrow at\,\dfrac{C \rightarrow C}{C \rightarrow C, A} \qquad \dfrac{\dfrac{A \rightarrow A}{A \rightarrow A, B} \qquad \dfrac{B \rightarrow B}{B \rightarrow A, B}\rightarrow at}{(A \vee B) \rightarrow A, B}\vee\rightarrow}{C, C \supset (A \vee B) \rightarrow A, B}\supset\rightarrow}{C \supset (A \vee B) \rightarrow A, (C \supset B)}FES}{C \supset (A \vee B) \rightarrow A \vee (C \supset B), A \vee (C \supset B)}\rightarrow\vee}{\rightarrow (C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B))}est, \rightarrow\supset$$

é uma demonstração de $\rightarrow (C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B))$ com a aplicação FES, sem a restrição de fórmula única no conseqüente. Em [61], p. 361 ss, estão as matrizes da Tabela 1.1 a seguir, que invalidam $(C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B))$ em CG_ω.

Até aí Raggio, em [61], desenvolve o sistema $CG_n, 1 \leq n \leq \omega$. A aplicação da prova de Eliminação do Corte apresenta dificuldades, tendo em vista a restrição intuicionista imposta à regra $\rightarrow\supset$ que "prevents the application of Gentzen proof (cf. [4] 3.232.1)" (p. 362). Da mesma forma, a regra NEA'', que contém uma introdução de negação no antecedente, condicionada, apresenta dificuldades para a aplicação desta prova. A partir daí, porque C_n, $1 \leq n \leq \omega$, não tem matrizes características finitas (veja-se [4]), Raggio conjectura que C_n e CG_n são indecidíveis.

Tabela 1.1: Matrizes para C_ω

A	$\neg A$
1	4
2	2
3	1
4	1

	$A \supset B$	B 1	2	3	4
A	1	1	2	3	4
	2	1	1	3	4
	3	1	2	3	4
	4	1	1	1	1

	$A \vee B$	B 1	2	3	4
A	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2
	3	1	2	3	3
	4	1	2	3	4

	$A \& B$	B 1	2	3	4
A	1	1	2	3	4
	2	2	2	3	4
	3	3	3	3	4
	4	4	4	4	4

Raggio não explicita as dificuldades que encontrou no desenvolvimento da prova de Gentzen, a partir do caso 3.232.1, nem as dificuldades correspondentes à introdução condicionada de negação no antecedente (NEA'').

No entanto, são estas dificuldades e o "incômodo" da restrição intuicionista sobre a regra $\rightarrow\supset$ que o levam à construção do sistema WG_n, $1 \leq n \leq \omega$.

A referência de Raggio "cf. [4] 3.232.1" remete a "'*Untersuchungen ueber das logische Schliessen*', *Math. Zeitschrift*, Bd. 39, p. 176/210, 405/431", aqui referido a partir de [39], especificamente ao caso da prova do "Hauptsatz" para derivações do sistema LJ, quando a ordem (ρ) do *mix* é maior que 2 e a ordem direita maior que 1. A regra *mix* tem a seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Lambda, D \quad D, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Lambda^*, \Theta} mix,$$

onde Δ^* e Λ^* são como Δ e Λ após a eliminação de todas as ocorrências de D. Neste texto, p. 89 e seguintes, Gentzen define "ordem"[12], da seguinte maneira:

> Chamaremos a *ordem* da derivação a soma de sua ordem sobre a esquerda e sua ordem sobre a direita. Estes dois termos são definidos como segue:
>
> A *ordem esquerda* é o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho tal que o mais baixo destes seqüentes é o seqüente superior esquerdo do mix e cada um dos seqüentes contém a fórmula mix no *conseqüente*.
>
> A *ordem direita* é (correspondentemente) o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho tal que o mais baixo destes seqüentes é o seqüente superior direito do mix e cada um dos seqüentes contém a fórmula mix no *antecedente*[13].

[12]Rank.

[13]"We shall call the *rank* of the derivation the sum of its rank on the left and its rank on the right. These two terms are defined as follows:

The *left rank* is the largest number of consecutive sequents in a path sothat the lowest of these sequents is the *left-hand* upper sequent of the mix and each of the sequents contains the mix formula in the *succedent*.

The *right rank* is (correspondingly) the largest number of consecutive sequents in a path so that the lowest of these sequents is the *right-hand* upper sequent of the mix and each of the sequents contains the mix formula in the *antecedent*." ([39], p. 89-90).

A observação geral de Gentzen sobre esta prova, em [39], é que

> Para transformar uma derivação LJ em uma derivação LJ *sem cortes*, aplicamos *exatamente os mesmos procedimentos* como para derivações LK. (...) Temos somente que nos convencer que, em todo passo de transformação, uma derivação LJ torna-se outra derivação LJ, i. e., que o D-seqüente da derivação transformada não contém mais que uma S-fórmula no conseqüente, dado que este é o caso anterior[14] (p. 101).

Gentzen passa, então, a examinar cada passo de transformação a partir deste ponto de vista. As transformações iniciais correspondentes a 3.10 não oferecem problema, assim como os casos de ordem igual a 2 (3.11). O cuidado é somente não introduzir seqüentes com mais de uma fórmula no conseqüente.

Os casos 3.232 correspondem aos casos 3.12 da demonstração de LK. Isto é, aos casos em que a ordem é maior que 2. Em 3.232.1, ordem direita maior que 1, Gentzen faz a seguinte observação:

> **3.232.1.** Para os casos 3.121 vale geralmente que Σ^* é vazio, pois em $\Pi \rightarrow \Sigma$, Σ deve conter somente *uma* fórmula, e esta fórmula deve ser igual a $\mathcal{M}$[15] (p. 102).

Ora, no caso de CG_ω, a observação de Raggio deve fazer referência, obviamente, ao que corresponde aos casos de aplicação da regra FES' ($\rightarrow\supset$) na derivação do seqüente direito do *mix*, quando a ordem direita do *mix* é igual ou maior que 2.

Como observa Gentzen:

[14] "In order to transform an LJ-derivation into an LJ-derivation *without cuts*, we applay *exactly the same procedure* as for LK-derivations. (...) We have only to convince ourselves that with every transformation step an LJ-derivation becomes another LJ-derivation, i.e., that the D-sequent of the transformed derivation do not contain more than one S-formula in the succedent, given that this was the case before" ([39], p. 101).

[15] "**3.232.1.** For the cases 3.121 it holds generally that Σ^* is empty, since in $\Pi \rightarrow \Sigma$, Σ must contain only *one* formula, and that formula must be igual to $\mathcal{M}$" ([39], p. 102).

Nos casos 3.111, 3.113.1, 3.113.31, 3.113.35 e 3.113.36, somente ocorrem, em cada conseqüente do seqüente de uma nova derivação, aquelas fórmulas que já tinham ocorrido no conseqüente do seqüente da derivação orignal[16] (p. 102).

A dificuldade explicitamente citada em [61], 3.232.1, corresponde à ordem do *mix* maior que 2, com ordem direita maior que 1, i.e., na derivação da premissa direita do *mix* há uma aplicação de $\supset\rightarrow$ (FES') que ocorre acima do seqüente em referência.

Aí, não estão garantidas as condições de aplicação de $\rightarrow\supset$ (FES') após uma permutação que transforme, por exemplo, a prova Π, seguinte, na prova Π', que a segue:

Π :

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma_1 \rightarrow A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \rightarrow A, \Delta}\,est \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma_1', A, C \rightarrow D\end{matrix}}{\Gamma_1', A \rightarrow C \supset D}\rightarrow\supset (FES')}{\Gamma', A \rightarrow \Delta'}\,est}{\Gamma, \Gamma' \rightarrow \Delta, \Delta'}\,corte.
$$

Π' :

$$
\begin{matrix}
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma_1 \rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma_1', A, C \rightarrow D\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_1', C \rightarrow \Delta, D}\,corte.\\
\Sigma_3
\end{matrix}
$$

Observe-se que em Σ_3 não há mais condições de aplicação de $\rightarrow\supset$ (FES'), se Δ não é vazia. As outras regras, que não têm a restrição desta, não são afetadas.

Assim, levar adiante a prova da Eliminação do Corte para CG_ω mostra que é necessário tratar particularmente os casos em que a fórmula do corte é negada e em que há aplicação da regra $\rightarrow\supset$ na subderivação que gera a premissa direita do Corte. Esta é a motivação para o sistema MCG_ω que se

[16] "In the cases 3.111, 3.113.1, 3.113.31, 3.113.35 and 3.113.36, only such formulae occur in each succedent of the sequent of a new derivation as had already occurred in the succedent of the sequent of the original derivation." ([39], p. 102).

apresenta mais adiante. A solução apresentada — tratar particularmente os casos de fórmula do *corte* negada — corresponde a uma forma de flexibilização da idéia de eliminação do *corte* que se prende, estreitamente, à manutenção do princípio de subfórmula, mais do que a evitar o "desaparecimento" de fórmulas usadas em uma derivação. A quebra da "simetria" provocada pelas regras de negação e condicional não compromete os resultados.

1.2.4 Justificativa e descrição de WG_n, $1 \leq n \leq \omega$.

As dificuldades de aplicação da prova do corte (*Hauptsatz*) a CG_n, $1 \leq n \leq \omega$, decorrentes da restrição intuicionista imposta à regra $\rightarrow\supset$ (FES') e não presente nas outras regras, que, segundo Raggio em [61], impede a aplicação da prova de Gentzen; o fato de NEA'' conter uma introdução condicionada de negação no antecedente, o que não ocorre com NEA ("Precisely this difference raises difficulties to the application of Gentzen's proof" (p. 362)); e o fato de C_n, $1 \leq n \leq \omega$, não ter matrizes características finitas, o que leva Raggio a conjeturar que C_n e CG_n são indecidíveis, levam à construção da hierarquia WG_n, $1 \leq n \leq \omega$.

Assim, partindo da mesma formulação fundamental de Gentzen, LK, Raggio constrói WG_n, $1 \leq n \leq \omega$ como segue:

WG_ω difere de LK somente na regra seguinte:

$$\text{em vez de } NEA,\ WG_\omega \text{ tem } NEA'\text{: } \neg\neg\rightarrow \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\neg\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta}$$

e, contando com a definição:

$$(A^{[1]} = A\&\neg A \text{ e } A^{[n+1]} = A^{[n]}\&\neg A^{[n]})$$

WG_n, $1 \leq n < \omega$, contém:

$$\text{todas as regras de } WG_\omega \text{ e } NEA'''\text{: } \neg^{[n]}\rightarrow \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A^{[n]}}{\neg A^{[n]}, \Gamma \rightarrow \Theta}.$$

Apresentando, portanto, as alterações necessárias dos casos 3.113.35 e 3.121.22, da prova original de [38], Raggio prova o Teorema de Eliminação do Corte para estes sistemas e apresenta as principais propriedades dedutivas de WG_n, $1 \leq n \leq \omega$, das quais seguem-se as que se referem a WG_ω:

1. WG_n, $1 \leq n \leq \omega$, é decidível e tem a propriedade de subfórmula;
2. WG_ω não é finitamente trivializável[17];
3. em WG_ω, $\rightarrow \neg(A \& \neg A)$ e $\rightarrow A \supset (\neg A \supset B)$ não são dedutíveis;
4. WG_ω é uma extensão própria de CG_ω. Em WG_ω não são dedutíveis:

   $\neg(B \& \neg B), A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A$

   e

   $\neg(A \& \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg\neg A)$.

Duas outras hierarquias são referidas, ainda: WG'_n, $1 \leq n \leq \omega$, criada pela adição de NES':

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg\neg A}\ NES'$$

e WGI_n, $1 \leq n \leq \omega$, que difere de WG_n por ter NES' no lugar de NEA' e impor a restrição intuicionista de conseqüente com fórmula única.

Estes sistemas não são analisados em [61], mas de WG_ω pode-se dizer, *prima facie,* que não é equivalente a C_ω, pois a regra FES, cuja inadmissibilidade em CG_ω, que é equivalente a C_ω, foi demonstrada, permite provar

$$\rightarrow (C \supset (A \vee B)) \supset (A \vee (C \supset B))$$

[17]Um sistema não trivial S é finitamente trivializável se existe uma fórmula (não um esquema) F, tal que o sistema obtido de S pela adição de F, como novo postulado, é trivial ([4], p. 14).

que não vale em C_ω.

Por outro lado, o sistema NCG_ω, que se cria e apresenta adiante, embora tenha a restrição intuicionista de fórmula única no conseqüente, define de outra maneira a negação, não se confundindo, portanto, com WGI_ω.

Resta somente uma observação de caráter geral, já apresentada: hoje, é claro que as propriedades de C_n, $1 \leq n < \omega$, não se estendem, em geral a C_ω. Assim, trata-se, a seguir, de discutir formulações para C_ω, sem levar em consideração suas relações com os cálculos C_n, $1 \leq n < \omega$.

Capítulo 2

C_ω em Cálculo de Seqüentes

2.1 Cálculo de seqüentes e decidibilidade

A relação entre decidibilidade e o teorema da eliminação do corte é clara desde Gentzen. Já a "Seção IV – Algumas aplicações do *Hauptsatz*" de [39] mostra três aplicações da eliminação do corte:

1. a consistência da lógica de predicados clássica e intuicionista;
2. a solução do problema da decisão para a lógica proposicional intuicionista; e
3. uma nova prova da não derivabilidade da lei do terceiro excluído na lógica intuicionista.

Obviamente, estas três soluções centram-se no princípio da subfórmula, i. e., somente subfórmulas das fórmulas do seqüente final de uma derivação ocorrem nesta derivação. E mais, como não há corte, nenhuma fórmula é eliminada, isto é, nenhuma fórmula desaparece no processo de derivação do seqüente final. Assim, no processo heurístico de decisão, na busca pelas (sub)fórmulas que compõem uma dada fórmula sob teste, todas as fórmulas sugeridas pelo processo de sua decomposição em componentes mínimos podem ser encontradas. Logo, há um procedimento de decisão, há uma computação, que permite caracterizá-la como demonstrável ou não demonstrável no sistema em questão.

É nesta direção que, sem considerar que a "restrição intuicionista" impõe alguma limitação descabida a C_ω, continua-se a análise que Raggio fez deste sistema a partir de CG_ω, no sentido de mostrar que sua tentativa, historicamente bem situada, pode ser desenvolvida com técnicas que, posteriormente, foram apresentadas.

Assim, reapresenta-se esse sistema substituindo-se a regra *corte* pela regra *mix* e prova-se o correspondente teorema de eliminação do corte. Atenção especial deve ser dada ao tratamento que se apresenta para a negação e como as dificuldades originais de Raggio são superadas usando-se uma sugestão de Schellinx em [64].

2.1.1 O Sistema MCG_ω e a Eliminação do Corte

Pretende-se mostrar, aqui, que o cálculo CG_ω é adequado ao que se propõe, desde que se possa controlar com precisão os casos problemáticos decorrentes da restrição intuicionista imposta sobre a regra de introdução de condicional no conseqüente e o comportamento das fórmulas negadas. Isto implica em "flexibilizar" ou ampliar a idéia de prova normal, tratando a negação de modo especial. O princípio de subfórmula, fundamental, é preservado.

O desenvolvimento de CG_ω é apresentado, a seguir, a partir do sistema MCG_ω, qual seja, o sistema que difere de CG_ω por ter, no lugar da regra do corte, a seguinte regra:

$$mix\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, M \qquad M, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta^*, \Lambda}$$

onde Δ^* e Θ^* são iguais a Δ e Θ, respectivamente, exceto por não conterem ocorrências de M. M é a **fórmula mix** e o **grau do mix** é igual ao grau de M.

Atente-se para o fato de que esta notação é essencialmente ambígua, tendo em vista que definida para todos as formas de fórmulas *mix*. Somente o contexto de aplicação deixa claro, em qualquer caso, a que fórmula que está sendo omitida se refere *.

Teorema 2.1 *CG_ω é equivalente a MCG_ω.*

Demonstração. É óbvio que todas as fórmulas da forma M, ausentes em Δ^* e Θ^* podem ser introduzidas por atenuação, assim como, por contração, obtém-se a situação adequada para aplicação do corte que gera Δ^* e Θ^*. □

As definições seguintes estabelecem as condições para que se possa controlar a origem das fórmulas que ocorrem em uma derivação. Isto é particularmente importante para o estudo da negação e de como o princípio de subfórmula é preservado nas situações de aplicação das regras de negação.

Definição 2.2 *Uma ocorrência de uma fórmula A está* **imediatamente vinculada** *a uma ocorrência de uma fórmula B, se A e B têm a mesma forma e:*

1. *A é a enésima fórmula de Γ (ou de Δ, ou de Θ, ou de Λ) no seqüente superior de uma regra e B é a enésima fórmula de Γ (ou de Δ, ou de Θ, ou de Λ) no seqüente inferior desta regra; ou*

2. *A é premissa de uma aplicação de contração e B é a fórmula principal desta contração; ou*

3. *A é a premissa $D(E)$ de uma aplicação de permutação e B é a fórmula principal $D(E)$ desta permutação.*

Definição 2.3 *A* **seqüência** *(de fórmulas)* **vinculada** *a B numa prova Π é uma seqüência B_1, B_2, ..., B_n de fórmulas de Π, tal que:*

1. *B_n é B;*

2. *cada B_{i+1} está imediatamente vinculado a B_i;*

3. *B_1 ocorre em um seqüente inicial ou é a fórmula principal de uma regra de inferência operacional ou de uma atenuação. O tipo de ocorrência de B_1 determina a* **origem** *da seqüência vinculada a B.*

Definição 2.4 *O conjunto de todas as seqüências vinculadas a B é denominado* **grupo de vinculação** *(associado a) de B.*

Definição 2.5 *A* **seqüência vinculada esquerda** *(***direita***) de um mix é uma seqüência vinculada à fórmula do mix que ocorre no conseqüente (antecedente) do seqüente superior deste mix.*

Definição 2.6 *Uma aplicação do mix é um* **mix negado operacional** *se e somente se a fórmula mix desta aplicação é da forma $\neg C$ e pelo menos uma das seqüências vinculadas a $\neg C$ tem origem em uma aplicação da regra $\rightarrow \neg$.*

A definição seguinte, *definição de prova normal,* é uma das definições cruciais destes desenvolvimentos. Observe-se que ela é bastante permissiva, no sentido em que admite a ocorrência de *mix* negado operacional. Obviamente, esta flexibilização se dá para permitir um controle particular do comportamento das negações, especialmente no que diz respeito à preservação do princípio de subfórmula.

Definição 2.7 Π *é uma* **prova normal,** *em* MCG_ω, *se e somente se não há aplicação de mix em* Π, *ou todas as aplicações do mix são de mix negado operacional.*

Lema 2.8 *Toda fórmula de uma seqüência vinculada esquerda (direita) de um mix é conseqüente (antecedente) em algum seqüente anterior ao seqüente superior esquerdo (direito) do mix, na prova dada.*

Lema 2.9 *Toda seqüência vinculada esquerda (direita) de um mix ramifica a partir do seqüente superior de uma aplicação da regra de contração, se a fórmula principal desta regra pertence a esta seqüência.*

Demonstração. Imediatas, a partir das definições. □

A seguir, o lema principal de eliminação do *mix*. Estabelece a hipótese da indução que permite a eliminação de toda aplicação do *mix*.

Definição 2.10 *Uma seqüência de seqüentes,* $S_1, S_2, ..., S_n$, *é um* **caminho determinado pelo seqüente** S_n *em uma derivação* Π, *se e somente se:*

1. S_1 *é um seqüente inicial de* Π;

2. $S_i, 1 \leq i < n$, *é uma premissa de uma regra de inferência e* $S_{i+1}, 1 \leq i \leq n$, *(o seqüente seguinte do caminho) é a conclusão desta regra; e*

3. S_n *é o seqüente final da seqüência.*

Definição 2.11 *Um caminho* $S_1, S_2, ..., S_n$, *é um* **caminho principal** *em uma derivação* Π, *se e somente se:*

1. $S_1, S_2, ..., S_n$ *um caminho determinado por* S_n *em* Π; *e*

2. S_n é o seqüente final de Π.

Definição 2.12 *Chama-se de* **ordem esquerda** *(***direita***) de um mix o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho determinado pelo seqüente superior esquerdo (direito) do mix e cada um dos seqüentes contém a fórmula do mix no conseqüente (antecedente).*

Definição 2.13 *Chama-se* **ordem do** *mix a soma de sua ordem esquerda com sua ordem direita.*

Para dar conta das dificuldades determinadas pela restrição intuicionista imposta à regra $\rightarrow\supset$ no processo de eliminação do *mix* é necessário levar em conta os seguintes resultados preliminares, conforme a sugestão de Schellinx em [64].

Lema 2.14 *Se Π é uma derivação sem mix de $\Gamma \rightarrow \Delta, A\&B$, em MCG_ω, então existem derivações, sem mix, Π^1 e Π^2 de $\Gamma \rightarrow \Delta, A$ e $\Gamma \rightarrow \Delta, B$, respectivamente.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$. Se $l(\Pi) = 1$, $\Gamma \rightarrow \Delta, A\&B$, é um seqüente inicial. Logo, existem as derivações, sem *mix*, seguintes:

$$\frac{A \rightarrow A}{A\&B \rightarrow A}\& \rightarrow$$

e

$$\frac{B \rightarrow B}{A\&B \rightarrow B}\& \rightarrow$$

Suponha que, para provas Π de comprimento $l(\Pi) = n$, vale o Lema. Seja $l(\Pi) > n$ da forma

$$\dfrac{est\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1 \\ \Sigma_1 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, A\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2, A} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2 \\ \Sigma_2 \\ \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2, B\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2, B}est}{\begin{matrix}\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2, A\&B \\ \Sigma_3 \\ \Gamma \rightarrow \Delta, A\&B\end{matrix}} \rightarrow \&,$$

pela hipótese da indução, existem as provas Π^1 e Π^2 seguintes:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ est\cfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\\ \Sigma_3'\\ \Gamma \rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}\,est$$

e

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ est\cfrac{\Gamma_2 \rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\\ \Sigma_3'\\ \Gamma \rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \rightarrow \Delta, B}\,est,$$

sem *mix*, onde Σ_3' é correta, tendo em vista que $A\&B$ é fórmula lateral em Σ_3.

Corolário 2.15 *Se* Π *é uma derivação sem mix de* $\Gamma \rightarrow \Delta, A\&B$*, em* MCG_ω*, então* Π *pode ser transformada em uma derivação* Π'*, sem mix, de* $\Gamma \rightarrow \Delta, A\&B$*, tal que* $r(\Pi)$ *é* $\rightarrow \&$.

Demonstração. Conseqüência imediata do Lema 2.14. □

Lema 2.16 *Se* Π *é uma derivação sem mix de* $A\&B, \Gamma \rightarrow \Delta$*, em* MCG_ω*, então existem derivações, sem mix,* Π^1 *e* Π^2 *de* $A, \Gamma \rightarrow \Delta$ *e* $B, \Gamma \rightarrow \Delta$*, respectivamente.*

Demonstração. Analogamente ao caso anterior, se $l(\Pi) = 1$, Π^1 e Π^2 são

$$est\frac{A \rightarrow A}{A, B \rightarrow A}$$

e

$$est\frac{B \rightarrow B}{A, B \rightarrow B}$$

e, se $l(\Pi) > n$, Π é, onde $i = 1$ ou 2:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to \Delta_1\\ \Sigma_1\\ A_i, \Gamma_1 \to \Delta_1\end{array}}{\begin{array}{c}A_1 \& A_2, \Gamma_1 \to \Delta_1\\ \Sigma_2\\ A_1 \& A_2, \Gamma \to \Delta\end{array}} \& \to .$$

Pela hipótese da indução, existem Π^i da forma:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to \Delta_1\end{array}}{A_i, \Gamma \to \Delta}est,$$

com $i = 1$ e 2, respectivamente.

Corolário 2.17 *Se Π é uma derivação sem mix de $A\&B, \Gamma \to \Delta$, em MCG_ω, então Π pode ser transformada em uma derivação Π', sem mix, de $A\&B, \Gamma \to \Delta$, tal que $r(\Pi)$ é $\& \to$.*

Demonstração. Conseqüência do Lema 2.16. □

De maneira semelhante se estabelecem os lemas e corolários seguintes.

Lema 2.18 *Se Π é uma derivação sem mix de $A \vee B, \Gamma \to \Delta$, em MCG_ω, então existem derivações, sem mix, Π^1 e Π^2 de $A, \Gamma \to \Delta$ e $B, \Gamma \to \Delta$, respectivamente.*

Corolário 2.19 *Se Π é uma derivação sem mix de $A \vee B, \Gamma \to \Delta$, em MCG_ω, então Π pode ser transformada em uma derivação Π', sem mix, de $A \vee B, \Gamma \to \Delta$, tal que $r(\Pi)$ é $\vee \to$.*

Lema 2.20 *Se Π é uma derivação sem mix de $\Gamma \to \Delta, A \vee B$, em MCG_ω, então existem derivações, sem mix, Π^1 e Π^2 de $\Gamma \to \Delta, A$ e $\Gamma \to \Delta, B$, respectivamente.*

Corolário 2.21 *Se Π é uma derivação sem mix de $\Gamma \to \Delta, A \vee B$, em MCG_ω, então Π pode ser transformada em uma derivação Π', sem mix, de $\Gamma \to \Delta, A \vee B$, tal que $r(\Pi)$ é $\to \vee$.*

Lema 2.22 *Se* Π *é uma derivação sem mix de* $A \supset B, \Gamma \to \Delta$, *em* MCG_ω, *então existem derivações, sem mix,* Π^1 *e* Π^2 *de* $\Gamma \to \Delta, A$ *e* $\Gamma \to \Delta, B$, *respectivamente.*

Corolário 2.23 *Se* Π *é uma derivação sem mix de* $A \supset B, \Gamma \to \Delta$, *em* MCG_ω, *então* Π *pode ser transformada em uma derivação* Π', *sem mix, de* $A \supset B, \Gamma \to \Delta$, *tal que* $r(\Pi)$ *é* $\supset\to$.

Demonstrações. Semelhantes às anteriores.

Estas propriedades das provas sem *mix* não valem para as provas de $\Gamma \to A \supset B$, que contêm aplicações de $\to\supset$, por conta da restrição de fórmula única no conseqüente. Assim, a prova do lema seguinte, afasta-se da prova padrão de Gentzen para dar conta desta peculiaridade.

Lema 2.24 *Toda prova* Π, *em* MCG_ω, *cuja última regra é a única aplicação do mix nesta prova, e este mix não é um mix negado operacional, pode ser transformada em uma prova* Π', *do mesmo seqüente final, sem mix.*

Demonstração. Aplica-se a prova de Eliminação do Mix de Gentzen ([39]), com as alterações sugeridas por Schellinx em [64], com o intuito de mostrar que, tratando separamente os casos relativos à negação e controlando o comportamento de $\to\supset$ na derivação do seqüente direito do *mix*, tudo o demais corre sem dificuldades.

Demonstração por indução sobre a ordem do *mix*, n, com indução subsidiária sobre o grau de *mix*, m.

1) BASE. $n = 2$ (A ordem mínima de um mix é igual à soma da ordem esquerda mínima, que é 1, com a ordem direita mínima, que, também, é 1).

1.1) Base da indução subsidiária. $m = 1$. I. e., a fórmula *mix*, M, é atômica (e só ocorre como premissa do *mix*).

1.1.1) A premissa esquerda do *mix* é um seqüente inicial. Portanto, Π é:

$$\dfrac{M \to M \qquad \begin{matrix}\Sigma \\ M, \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{M, \Theta^* \to \Lambda}\, mix,$$

que se transforma em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ M, \Theta \rightarrow \Lambda\end{array}}{M, \Theta^* \rightarrow \Lambda}est,$$

sem *mix*.

1.1.2) A premissa direita do *mix* é um seqüente inicial e Π assume a forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow \Delta, M\end{array} \qquad M \rightarrow M}{\Gamma \rightarrow \Delta^*, M}mix$$

cuja transformação é óbvia:

$$est\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow \Delta, M\end{array}}{\Gamma \rightarrow \Delta^*, M}.$$

1.1.3) Nem a premissa esquerda do *mix*, nem a direita são seqüentes iniciais. Logo a fórmula M é introduzida por atenuação.

1.1.3.1) M é introduzida no seqüente esquerdo, por atenuação. Π toma a forma:

$$\dfrac{\rightarrow at\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \rightarrow \Delta, M} \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ M, \Theta \rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}mix,$$

que pode ser transformada em:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}est,$$

sem *mix*.

1.1.3.2) M é introduzida no seqüente direito do *mix*, por atenuação. Π é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta, M\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{M, \Theta \to \Lambda}\, at \to}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\, mix,$$

que, obviamente, se transforma em:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\, est.$$

É dispensável a apresentação detalhada dos casos claramente implícitos nas situações descritas.

1.2) Passo indutivo da indução subsidiária. $m > 1$. A fórmula do *mix*, M, é uma fórmula qualquer e ocorre somente nas premissas do *mix*.

Há 3 casos a examinar.

1.2.1) Se M ocorre um um seqüente inicial, ou

1.2.2) M é introduzida por atenuação, opera-se como nos casos anteriores.

1.2.3) M é introduzida por uma regra operacional.

1.2.3.1) M é $A_1 \& A_2$. Π é (para $i = 1, 2$):

$$\dfrac{\& \to \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta, A_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ \Gamma \to \Delta, A_2\end{matrix}}{\Gamma \to \Delta, A_1 \& A_2} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_i\\ A_i, \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{A_1 \& A_2, \Theta \to \Lambda} \to \&}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\, mix.$$

Ora, pela hipótese da indução, qualquer das provas Σ_i' $(i = 1, 2)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \to \Delta, A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_i\\ A_i, \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\, mix,$$

pode ser transformada em uma prova sem *mix*.

1.2.3.2) M é $A_1 \vee A_2$. Π é:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \rightarrow \Delta, A_i\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2}{\rightarrow \vee} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A_1, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ A_2, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix}}{A_1 \vee A_2, \Theta \rightarrow \Lambda}{\vee \rightarrow}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}\,mix,$$

para i = 1, 2.

Pela hipótese da indução, qualquer das provas (para $i = 1, 2$):

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \rightarrow \Delta, A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_i\\ A_i, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}\,mix$$

pode ser transformada em uma prova sem *mix*, do mesmo seqüente final.

1.2.3.3) M é $A \supset B$. Portanto, Π é da forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A, \Gamma \rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow A \supset B}{\rightarrow \supset} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \Theta \rightarrow \Lambda, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3\\ B, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix}}{A \supset B, \Theta \rightarrow \Lambda}{\supset \rightarrow}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Lambda}\,mix.$$

Pela hipótese da indução, a prova Σ seguinte:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \Theta \rightarrow \Lambda, A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A, \Gamma \rightarrow B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3\\ B, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix}}{A, \Gamma, \Theta^* \rightarrow \Lambda}\,mix}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Lambda}\,mix$$

pode ser transformada em uma prova sem *mix*, do mesmo seqüente final, pois as aplicações de *mix* indicadas têm fórmula *mix* de grau menor.

1.2.3.4) Se M é $\neg\neg A$, pelo fato de não haver regras de introdução de dupla negação no conseqüente, cai-se no caso 1.2.1 ou no caso 1.2.2.

1.2.3.5) Se M é $\neg A$, ocorre um *mix* negado operacional, que será tratado posteriormente.

Assim, estabelece-se a base da indução. Isto é: se a ordem do *mix* é 2, o *mix* é eliminável.

2)PASSO INDUTIVO. $n > 2$. Isto é: a ordem do *mix* é maior que 2.

2.1) Base da indução subsidiária. $m = 1$, ou seja, M, a fórmula *mix*, é atômica.

2.1.1) A ordem direita do *mix* é maior que 1 e a esquerda igual a 1. I. e., a fórmula *mix*, M, da premissa direita do *mix* ocorre no seqüente superior de uma regra de inferência que contém M no antecedente de pelo menos uma de suas premissas.

2.1.1.1) Suponha que M ocorre no antecedente da premissa esquerda do *mix*. Então, o seqüente esquerdo *mix* é um seqüente inicial e Π é da forma:

$$\dfrac{M \rightarrow M \qquad \begin{matrix} \Pi_1 \\ M, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1 \\ \Pi_2 \\ M, \Theta \rightarrow \Lambda \end{matrix}}{M, \Theta^* \rightarrow \Lambda}\, mix,$$

de onde se obtém Π', sem *mix*, da seguinte maneira:

$$\dfrac{\begin{matrix} \Pi_1 \\ M, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1 \\ \Pi_2 \\ M, \Theta \rightarrow \Lambda \end{matrix}}{M, \Theta^* \rightarrow \Lambda}\, est$$

2.1.1.2) M é introduzido no conseqüente da premissa esquerda do *mix* por atenuação. Isto é, Π é da forma:

$$
\dfrac{\to at\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix}}{\Gamma \to \Delta, M} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ M, \Theta_1 \to \Lambda_1\\ \Sigma_2\\ M, \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^* \Lambda} mix.
$$

Seja Π' a prova, sem *mix*:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda} est
$$

2.1.2) Se a ordem direita do *mix* é igual a 1 e a ordem esquerda é maior que 1, procede-se semelhantemente.

2.1.3) A ordem direita e a ordem esquerda do *mix* são maiores que 1.

2.1.3.1) M, fórmula atômica, é introduzida por $\to at$. Π é:

$$
\dfrac{\begin{matrix} at \to \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma_1 \to \Delta_1, M} \\ \Pi_2 \\ \Gamma \to \Delta, M \end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ M, \Theta_1 \to \Lambda_1\\ \Sigma_2\\ M, \Theta \to \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda} mix,
$$

que pode ser transformada em:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda} est,
$$

sem *mix*, como desejado.

2.1.3.2) Se M é introduzida através de $at \to$, procede-se semelhantemente.

2.1.3.3) M advém de um seqüente incial, à esquerda. Assim, Π é como:

$$
\dfrac{\begin{array}{c} M \rightarrow M \\ \Pi_1 \\ M, \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, M \\ \Pi_2 \\ \Gamma \rightarrow \Delta, M \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Sigma_1 \\ M, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1 \\ \Sigma_2 \\ M, \Theta \rightarrow \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}\, mix,
$$

que pode ser transformada em:

$$
\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ M, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1 \\ \Sigma_2 \\ \dfrac{M, \Theta \rightarrow \Lambda}{M, \Gamma_1, \Theta^* \rightarrow \Delta_1^*, \Lambda}\, est \\ \Pi_2^* \\ \Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda \end{array}
$$

onde Π_2^* indica a derivação Π_2 com a supressão das ocorrências de M no conseqüente de seus seqüentes. As demais subderivações indicadas mantêm a integridade das regras aplicadas na derivação original.

2.1.3.4) Se M advém de um seqüente incial, à direita, o procedimento é semelhante.

Está estabelecida a base da indução subsidiária.

2.2) Passo indutivo da indução subsidiária. $m > 1$. I. e.: agora, ocorrem no *mix* premissas introduzidas por regras operacionais.

Casos preliminares: se M é introduzida por atenuação ou ocorre em um seqüente inicial, aplica-se uma das soluções anteriores.

2.2.1) A ordem esquerda do *mix* é igual a 1 e a ordem direita, maior que 1. Aqui surgem os casos problemáticos de aplicação de $\rightarrow\supset$. A técnica utilizada para eliminação do *mix* é, essencialmente, a permutação da ordem de aplicação das regras operacionais e *mix*, o que pode afetar as condições originais das aplicações, que porventura existam, de $\rightarrow\supset$. Procede-se dando atenção às observações de Schellinx em [64], p. 540 e seguintes, e considerando que a simples aplicação de $\rightarrow at$ para introduzir fórmulas da forma $C \supset D$ não leva, necessariamente, ao resultado desejado.

2.2.1.1) M é da forma $A_1\&A_2$. Π, então, é:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\Pi_1 \qquad\qquad \Pi_2 \\ \to\& \dfrac{\Gamma \to \Delta, A_1 \quad \Gamma \to \Delta, A_2}{\Gamma \to \Delta, A_1\&A_2}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\Sigma_i \\ \dfrac{A_i, \Theta_1 \to \Lambda_1}{A_1\&A_2, \Theta_1 \to \Lambda_1}\&\to \\ \Sigma' \\ A_1\&A_2, \Theta \to \Lambda\end{array}
}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\,mix.
$$

Esta prova pode ser transformada na prova seguinte:

$$
\begin{array}{c}
\Pi_1 \qquad\qquad \Sigma_1 \\
mix\dfrac{\Gamma \to \Delta, A_1 \quad A_1, \Theta_1 \to \Lambda_1}{\Gamma, \Theta_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1} \\
\Sigma'^* \\
\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda
\end{array},
$$

na qual a aplicação do *mix* pode ser eliminada pela hipótese da indução.

Qualquer aplicação de $\to\supset$ em Π_i ou Σ_i $(i = 1, 2)$ é preservada nesta tranformação. No entanto, aplicações desta regra em Σ' podem estar comprometidas (em Σ'^*), exceto se Δ^* é uma seqüência vazia. A solução mais genérica, se a introdução por $\to$ *at* da fórmula da forma $C \supset D$ sobre a qual se conjectura não é a melhor solução, é transformar a prova Π em:

$$
\begin{array}{c}
mix\dfrac{
\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \Gamma \to \Delta, A_1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \dfrac{A_1, \Theta_1 \to \Lambda_1}{A_1, \Theta_1' \to \Lambda_1'}\to\supset \\ \Sigma'' \\ A_1, \Theta_1'' \to \Lambda_1''\end{array}
}{\Gamma, \Theta_1'^* \to \Delta^*, \Lambda_1'} \\
\Sigma'^* \\
\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda
\end{array},
$$

onde Σ'' contém todas as aplicações de $\rightarrow\supset$ que são necessárias para atender as transformações anteriores e satisfazendo todas as restrições. A aplicação de *mix* é eliminável, pela hipótese da indução. Observe-se que as aplicações indicadas de $\rightarrow\supset$ não alteram o grau do *mix*, sobre o qual se faz a indução.

2.2.1.2) Se M é $A_1 \vee A_2$, Π tem a forma, onde $i = 1, 2$:

$$\dfrac{\rightarrow\vee\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \rightarrow \Delta, A_i\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A_1, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ A_2, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1\end{matrix}}{A_1 \vee A_2, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1}\vee\rightarrow\\ \Sigma_3\\ A_1 \vee A_2, \Theta \rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}mix.$$

Seja Σ a seguinte prova, onde $i = 1, 2$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \rightarrow \Delta, A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_i\\ A_i, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1\end{matrix}}{\Gamma, \Theta_1^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda_1}mix}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}est.$$

Pela hipótese da indução, esta prova se transforma em prova sem *mix*.

Semelhantemente ao caso anterior, se na prova da premissa direita do *mix*, em Σ_3, há aplicação de $\rightarrow\supset$ que pode ser impedida em Σ, reescreva-se esta prova da sequinte maneira:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \rightarrow \Delta, A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_i\\ \dfrac{A_i, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1}{A_i, \Theta_1' \rightarrow \Lambda_1'}\\ \Sigma''\\ A_i, \Theta_1'' \rightarrow \Lambda_1''\end{matrix}}{\Gamma, \Theta_1'^* \rightarrow \Delta'^*, \Lambda_1'}mix}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}est,$$

que se transforma, pela hipótese da indução, na prova sem *mix* procurada, uma vez que as aplicações de $\rightarrow\supset$ não afetam a medida da indução adotada.

2.2.1.3) Se M é $A \supset B$, supondo que Π é:

$$\cfrac{\rightarrow\supset \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A, \Gamma \rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ B, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1\end{matrix}}{A \supset B, \Gamma_1, \Theta_1 \rightarrow \Delta_1, \Lambda_1} \supset\rightarrow \\ \Sigma_3 \\ A \supset B, \Gamma, \Theta \rightarrow \Delta, \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda} mix,$$

obtém-se uma prova sem *mix* do mesmo seqüente final, da seguinte maneira:

$$\begin{matrix}\cfrac{mix\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_1 \\ A, \Gamma \rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma^* \rightarrow \Delta_1^*, B} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ B, \Theta_1 \rightarrow \Lambda_1\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma^*, \Theta_1^* \rightarrow \Delta_1^*, \Lambda_1} mix, \\ \Sigma_3^* \\ \Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda\end{matrix}$$

pois as aplicações de *mix* indicadas são elimináveis, pela hipótese da indução. Observe-se que a peculiaridade da regra $\rightarrow\supset$, se aplicada em Σ_3, supondo obviamente que Δ_1 e Λ_1 são conformes às condições de aplicação desta regra, não exige tratamento específico. Δ_1 ou Λ_1 é vazia (mas não os dois, por força do Teorema 1.20), condição que persiste em Δ_1^*, Λ_1.

Os casos seguintes, que envolvem negação, não são simétricos no sentido em que não há uma regra de introdução de dupla negação ($\neg\neg A$) no conseqüente de um seqüente qualquer, assim como não há regra para a introdução de $\neg A$ no antecedente de um seqüente. São explicitados para mostrar que caem nos casos preliminares em que uma das premissas do *mix* é introduzida por atenuação, ou advém de um seqüente inicial.

2.2.1.4) Se M é da forma $\neg\neg A$, e $\neg\neg A$ não é conseqüência de uma aplicação de $\rightarrow \neg$, Π toma a forma:

$$
\dfrac{\to at\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta\end{array}}{\Gamma \to \Delta, \neg\neg A} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \neg\neg A, \Theta_1 \to \Lambda_1\\ \Sigma_2\\ \neg\neg A, \Theta \to \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}mix,
$$

que se tranforma em

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \to \Delta\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}est,
$$

sem *mix*, como desejado. Ou Π assume a forma:

$$
\dfrac{\neg\neg A \to \neg\neg A \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \neg\neg A, \Theta_1 \to \Lambda_1\\ \Sigma_2\\ \neg\neg A, \Theta \to \Lambda\end{array}}{\neg\neg A, \Theta^* \to \Lambda}mix,
$$

e se transforma em

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \neg\neg A, \Theta_1 \to \Lambda_1\\ \Sigma_2\\ \neg\neg A, \Theta \to \Lambda\end{array}}{\neg\neg A, \Theta^* \to \Lambda}est
$$

sem *mix*, como esperado.

2.2.1.5) Se a fórmula do *mix* é como $\neg A$, trata-se de um *mix* negado operacional, que será tratado posteriormente.

2.2.2) A ordem direita do *mix* é 1 e a esquerda, maior que 1. I. e., a fórmula M à esquerda, ocorre no seqüente inferior de uma regra de inferência qualquer que contém M no conseqüente de seu seqüente superior. Então, Π é da forma:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, M\\ \Pi_2\\ \Gamma \rightarrow \Delta, M\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \cfrac{\Theta \rightarrow \Lambda}{M, \Theta \rightarrow \Lambda}R\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda}mix.$$

Semelhantemente ao apresentado em 2.2.1, prova-se que há uma derivação sem *mix* de $\Gamma, \Theta^* \rightarrow \Delta^*, \Lambda$.

2.2.3) A ordem direita do *mix* é maior que 1 e sua ordem esquerda é, também, maior que 1. A combinação adequada de soluções já apresentadas prova o desejado.

Uma observação final sobre a aplicação das regras de contração e permutação. A hipótese da indução, em qualquer caso sob análise, permite a eliminação do *mix*, se se antecede sua aplicação à aplicação destas regras, pois a fórmula do *mix* já ocorre em suas premissas.

Assim, examinados todos os casos, toda prova Π cuja última regra aplicada, $r(\Pi)$, é a única aplicação de *mix*, transforma-se em uma prova sem *mix*. □

O lema seguinte estabelece as condições de preservação das subfórmulas nos casos de *mix* negado operacional. O fato do sistema não dispor de regra operacional que permita a introdução de negação no antecedente de um seqüente qualquer é que garante que a origem de fórmulas desta forma é sempre um seqüente inicial, com o comprometimento da ocorrência da negação, também, em seu conseqüente, ou uma atenuação. Neste último caso, a ocorrência de *mix* pode ser facilmente eliminada, como já demonstrado para situações mais gerais.

Lema 2.25 *Se Π é uma prova de $\neg C$, $\Gamma \rightarrow \Delta$, e pelo menos uma das seqüências vinculadas a $\neg C$ tem origem em seqüente inicial, então $\neg C$ é subfórmula de alguma fórmula de Γ ou de Δ.*

Demonstração. Indução sobre o comprimento de Π.

BASE. $l(\Pi) = 1$. Neste caso, Π é o seqüente inicial $\neg C \rightarrow \neg C$, e o Lema vale.

PASSO DE INDUÇÃO. $l(\Pi) > 1$.

CASO 1. Suponha que haja pelo menos uma seqüência vinculada a $\neg C$ que tem origem em seqüente inicial e Π não contém *mix* negado operacional. Logo, Π não contém *mix* e, é claro, pela simples inspeção das regras, que $\neg C$ é subfórmula de alguma fórmula de Δ.

CASO 2. Suponha que haja pelo menos uma seqüência vinculada a $\neg C$ que tem origem em seqüente inicial e a última regra aplicada em Π é um *mix* negado operacional. Ora, pela Definição 2.6, a aplicação de $\rightarrow \neg$ gera uma fórmula $\neg C$, no conseqüente do seqüente esquerdo do *mix*, que é a fórmula esquerda do *mix*. Resta, no conseqüente do seqüente direito a fórmula $\neg C$ vinculada ao seqüente inicial da hipótese do Lema. Logo, $\neg C$ é subfórmula de alguma fórmula de Δ.

CASO 3. Nas condições anteriores, com um número qualquer de aplicações de *mix* negado operacional, obtém-se o resultado desejado aplicando a hipótese da indução sobre a prova da premissa direita do último *mix* negado operacional. □

Teorema 2.26 *Toda prova Π em MCG_ω pode ser transformada em uma prova normal Π' do mesmo seqüente final.*

Demonstração. A partir da aplicação reiterada do Lema 2.24. □

Corolário 2.27 *(Princípio de Subfórmula) Todas as fórmulas que ocorrem em uma prova normal Π são subfórmulas das fórmulas do seqüente final de Π.*

Demonstração. Por inspeção das regras de inferência, observa-se que não pode haver eliminação de qualquer fórmula introduzida em uma prova, se não se aplica *mix*. O Lema 2.25. dá conta das aplicações de *mix* negado operacional. □

Corolário 2.28 *Em MCG_ω não há prova de $\rightarrow \neg A$.*

Demonstração. Suponha que há uma prova normal Π, de $\rightarrow \neg A$. Indução sobre o comprimento $l(\Pi)$. Se $l(\Pi) = 1$, como não há seqüente inicial da forma $\rightarrow \neg A$, não há a prova Π.

Passo de Indução. Se $l(\Pi) > 1$, há dois casos.

CASO 1. Π não contém *mix*, $\rightarrow \neg A$ é obtida de $A \rightarrow$, por $\rightarrow \neg$. Ora, de acordo com o Teorema 1.20, não há prova de $A \rightarrow$, em MCG_ω. Logo, não há prova de $\rightarrow \neg A$.

CASO 2. Π contém pelo menos um *mix* negado operacional. Ora, pela hiótese da indução, não há como se obter a premissa sobre a qual aplicar a regra $\rightarrow \neg$. Portanto, não há prova de $\rightarrow \neg A$. □

Corolário 2.29 *MCG_ω é consistente.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Corolário 2.28. □

Corolário 2.30 *MCG_ω é decidível.*

Demonstração. Aplica-se a demonstração usual, por exemplo, de [39]. □

2.2 O Sistema NCG_ω

Apresenta-se, agora, o sistema NCG_ω. Inspirado no sistema WGI_ω, de Raggio (v. [61]), há nele uma diferença fundamental no modo de tratar a negação. A regra *neg*, embora aparentemente estranha, apenas contém uma formulação da Lei do Terceiro Excluído, quebrando assim, as restrições intuicionistas impostas nas outras regras pela exigência de conseqüente composto por somente uma fórmula.

Valem, com as adaptações óbvias, as definições já apresentadas e que só serão repetidas para chamar atenção para detalhes ou introduzir alterações menos claras.

Definição 2.31 *Expressões da forma $\Gamma \rightarrow C$, onde Γ é uma seqüência finita de fórmulas e C é uma fórmula, são* **seqüentes**.

Definição 2.32 *Seqüentes da forma $A \rightarrow A$, onde A é uma fórmula qualquer, são* **seqüentes iniciais**.

As **regras de inferência** de NCG_ω são:

1. Regras Estruturais:

   (a) atenuação:

   $$\frac{\Gamma \to C}{D, \Gamma \to C} at \to;$$

   (b) contração:

   $$\frac{D, D, \Gamma \to C}{D, \Gamma \to C} cont \to;$$

   (c) permutação:

   $$\frac{\Gamma, D, E, \Delta \to C}{\Gamma, E, D, \Delta \to C} perm \to .$$

2. Mix:

   $$mix \; \frac{\Gamma \to D \qquad D, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta^* \to C}.$$

3. Regras Operacionais:

   (a) do antecedente:

   i. conjunção:

   $$\frac{A, \Gamma \to C}{A\&B, \Gamma \to C} \& \to, \qquad \frac{B, \Gamma \to C}{A\&B, \Gamma \to C} \& \to;$$

   ii. disjunção:

   $$\frac{A, \Gamma \to C \qquad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C} \vee \to;$$

   iii. condicional:

   $$\frac{\Gamma \to A \qquad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C} \supset\to;$$

   iv. dupla negação:

   $$\frac{A, \Gamma \to C}{\neg\neg A, \Gamma \to C} \neg\neg \to;$$

   (b) do conseqüente:

i. conjunção:

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to B}{\Gamma \to A\&B} \to \&;$$

ii. disjunção:

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B} \to \vee, \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B} \to \vee;$$

iii. condicional:

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B} \to\supset .$$

4. Neg:

$$\frac{A, \Gamma \to C \qquad \neg A, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta \to C} \; neg.$$

Na regra *mix*, D é a **fórmula** *mix* e Δ^* é igual a Δ, exceto por não conter ocorrências de D. O **grau** de uma aplicação do *mix* é igual ao grau de D. O **grau de uma prova** Π, $g(\Pi)$ é o grau do *mix* de maior grau que nela ocorre e 0 (zero), se Π não contém *mix*. Se $g(\Pi) = 0$, Π é **normal**.

Quando necessário, **"est"** indicará a aplicação de regras estruturais na combinação e número de vezes exigidos para a obtenção do seqüente indicado.

Atente-se para a ambigüidade da notação Δ^*, cujo significado preciso só ficará bem esclarecido em cada contexto de ocorrência.

Teorema 2.33 *Em NCG_ω, não há prova de $\Gamma \to$.*

Demonstração. $\Gamma \to$ não tem a forma de um seqüente. □

Corolário 2.34 *Em NCG_ω não há prova de $\to$.*

2.2.1 Equivalência entre NCG_ω e CG_ω

O lema seguinte apresenta resultados preliminares que facilitarão provas que serão desenvolvidas adiante. Aí estão as propriedades de comutatividade, associatividade e idempotência da disjunção e da conjunção.

Lema 2.35 *Em NCG_ω, valem:*

1. $\Gamma \to A \vee B$ *se e somente se* $\Gamma \to B \vee A$*;*
2. $\Gamma \to A \vee A$ *se e somente se* $\Gamma \to A$;
3. $\Gamma \to A\&B$ *se e somente se* $\Gamma \to B\&A$*;*
4. $\Gamma \to A\&A$ *se e somente se* $\Gamma \to A$;
5. $\Gamma \to (A \vee B) \vee C$ *se e somente se* $\Gamma \to A \vee (B \vee C)$;
6. $\Gamma \to (A\&B)\&C$ *se e somente se* $\Gamma \to A\&(B\&C)$.

Demonstração. Valem as demonstrações usuais da lógica positiva intuicionista, como a seguir apresentadas:

1.a) $\Gamma \to A \vee B$ então $\Gamma \to B \vee A$:

$$\dfrac{\Gamma \to A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \vee B, A \to A}\,at\to}{A \vee B, A \to B \vee A}\to\vee \qquad \dfrac{\dfrac{B \to B}{A \vee B, B \to B}\,at\to}{A \vee B, B \to B \vee A}\to\vee}{A \vee B, A \vee B \to B \vee A}\vee\to}{\Gamma \to B \vee A}\,mix$$

1.b) $\Gamma \to B \vee A$ então $\Gamma \to A \vee B$. Trivial.

2.a) $\Gamma \to A \vee A$ então $\Gamma \to A$:

$$\dfrac{\Gamma \to A \vee A \qquad \dfrac{A \to A \quad A \to A}{A \vee A \to A}\vee\to}{\Gamma \to A}\,mix$$

2.b) $\Gamma \to A$ então $\Gamma \to A \vee A$:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow A \qquad \dfrac{A \rightarrow A}{A \rightarrow A \vee A}\rightarrow \vee}{\Gamma \rightarrow A \vee A}mix$$

3.a) $\Gamma \rightarrow A\&B$ então $\Gamma \rightarrow B\&A$:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow A\&B \qquad \dfrac{\&\rightarrow \dfrac{B \rightarrow B}{A\&B \rightarrow B} \qquad \dfrac{A \rightarrow A}{A\&B \rightarrow A}\& \rightarrow}{A\&B \rightarrow B\&A}\rightarrow \&}{\Gamma \rightarrow B\&A}mix$$

3.b) $\Gamma \rightarrow B\&A$ então $\Gamma \rightarrow A\&B$. Trivial.

4.a) $\Gamma \rightarrow A\&A$ então $\Gamma \rightarrow A$:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow A\&A \qquad \dfrac{A \rightarrow A}{A\&A \rightarrow A}\& \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A}mix$$

4.b) $\Gamma \rightarrow A$ então $\Gamma \rightarrow A\&A$:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow A \qquad \dfrac{A \rightarrow A \qquad A \rightarrow A}{A \rightarrow A\&A}\rightarrow \&}{\Gamma \rightarrow A\&A}mix$$

5.a) $\Gamma \rightarrow (A \vee B) \vee C$ então $\Gamma \rightarrow A \vee (B \vee C)$:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow (A \vee B) \vee C \qquad \vee \rightarrow \dfrac{\vee \rightarrow \dfrac{\rightarrow \vee \dfrac{A \rightarrow A}{A \rightarrow A \vee (B \vee C)} \qquad \dfrac{\dfrac{B \rightarrow B}{B \rightarrow B \vee C}\rightarrow \vee}{B \rightarrow A \vee (B \vee C)}}{A \vee B \rightarrow A \vee (B \vee C)} \qquad \dfrac{\dfrac{C \rightarrow C}{C \rightarrow B \vee C}}{C \rightarrow A \vee (B \vee C)}}{(A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)}}{\Gamma \rightarrow A \vee (B \vee C)}$$

5.b) $\Gamma \rightarrow A \vee (B \vee C)$ então $\Gamma \rightarrow (A \vee B) \vee C$:

$$
\dfrac{\Gamma \to A \vee (B \vee C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A \vee B}\,{\scriptstyle \to\vee}}{A \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle \to\vee} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to A \vee B}\,{\scriptstyle \to\vee}}{B \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle \to\vee} \quad \dfrac{C \to C}{C \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle \to\vee}}{B \vee C \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle \vee\to}}{A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle \vee\to}}{\Gamma \to (A \vee B) \vee C}\,{\scriptstyle mix}
$$

6.a) $\Gamma \to (A\&B)\&C$ então $\Gamma \to A\&(B\&C)$:

$$
\dfrac{\Gamma \to (A\&B)\&C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A\&B \to A}\,{\scriptstyle \&\to}}{(A\&B)\&C \to A}\,{\scriptstyle \&\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{A\&B \to B}}{(A\&B)\&C \to B} \quad \dfrac{C \to C}{(A\&B)\&C \to C}\,{\scriptstyle \&\to}}{(A\&B)\&C \to B\&C}\,{\scriptstyle \&\to}}{(A\&B)\&C \to A\&(B\&C)}\,{\scriptstyle \to\&}}{\Gamma \to A\&(B\&C)}\,{\scriptstyle mix}
$$

6.b) $\Gamma \to A\&(B\&C)$ então $\Gamma \to (A\&B)\&C$:

$$
\dfrac{\Gamma \to A\&(B\&C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A\&(B\&C) \to A}\,{\scriptstyle \&\to} \quad \dfrac{\dfrac{B \to B}{B\&C \to B}\,{\scriptstyle \&\to}}{A\&(B\&C) \to B}}{A\&(B\&C) \to A\&B} \qquad \dfrac{\dfrac{C \to C}{B\&C \to C}\,{\scriptstyle \&\to}}{A\&(B\&C) \to C}\,{\scriptstyle \&\to}}{A\&(B\&C) \to (A\&B)\&C}\,{\scriptstyle \to\&}}{\Gamma \to (A\&B)\&C}\,{\scriptstyle mix} \quad \square
$$

Uma prova direta de que NCG_ω é equivalente a C_ω, obtém-se com a facilidade com que se provou a equivalência deste cálculo a CG_ω. Apenas para marcar as relações históricas com a formulação de Raggio em [61], apresenta-se uma prova com contornos menos diretos. Prova-se a equivalência de NCG_ω com CG_ω em primeiro lugar. O interessante é a apresentação das tranformações de seqüências de fórmulas no conseqüente dos seqüentes de CG_ω em uma única fórmula, da forma de uma disjunção, em NCG_ω.

Teorema 2.36 *Seja* Π *uma prova em* CG_ω, *de* $\Gamma \to A_1, A_2, \ldots\ A_n$. *Então,* Π *pode ser transformada em uma prova* Π' *de* $\Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ *em* NCG_ω.

Demonstração. Indução sobre o comprimento de Π.

BASE. Se $l(\Pi) = 1$, como os seqüentes iniciais de CG_ω são seqüentes iniciais de NCG_ω, vale o Teorema.

PASSO INDUTIVO. Se $l(\Pi) = n > 1$, há sete casos a considerar:

CASO 1. Se $r(\Pi)$ é uma regra estrutural do antecedente, $\& \to$, ou $\neg\neg \to$, a demonstração é trivial, pois a hipótese da indução garante que as premissas destas regras de CG_ω se transformam em premissas das regras correspondentes de NCG_ω, permitindo a obtenção do seqüente $\Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, em NCG_ω, pela aplicação das mesmas regras.

CASO 2. Se $r(\Pi)$ é uma regra estrutural do conseqüente, há três subcasos:

2.1. $r(\Pi)$ é $\to at$. Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n\end{matrix}}{\Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n, B} \to at.$$

Pela hipótese da indução,

$$\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n.\end{matrix}$$

Logo, Π' é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n\end{matrix}}{\Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \vee B} \to \vee.$$

2.2. $r(\Pi)$ é $\to perm$. Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n, C, D\end{matrix}}{\Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n, D, C} \to perm.$$

Pela hipótese da indução,

$$\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \to A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \vee (C \vee D).\end{matrix}$$

Logo, Π' é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \cup\Delta \vee (C \vee D)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\cup\Delta \to \cup\Delta}{\cup\Delta \to \cup\Delta \vee (D \vee C)}\vee\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{C \to C}{C \to D \vee C}\qquad \dfrac{D \to D}{D \to D \vee C}\to\vee}{C \vee D \to D \vee C}\vee\to}{C \vee D \to \cup\Delta \vee (D \vee C)}\to\vee}{\cup\Delta \vee (C \vee D) \to \cup\Delta \vee (D \vee C)}\vee\to}{\Gamma \to \cup\Delta \vee (D \vee C)}\mathit{mix}$$

onde $\cup\Delta$ representa a disjunção das fórmulas de Δ (no caso, $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$).

2.3. $r(\Pi)$ é $\to$ *cont.* Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n, B, B\end{matrix}}{\Gamma \to A_1, A_2, ..., A_n, B}\to \mathit{perm.}$$

Pela hipótese da indução,

$$\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \cup\Delta \vee (B \vee B).\end{matrix}$$

Logo, Π' é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \cup\Delta \vee (B \vee B)\end{matrix} \qquad \dfrac{\to\vee\dfrac{\cup\Delta \to \cup\Delta}{\cup\Delta \to \cup\Delta \vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{B \to B \qquad B \to B}{B \vee B \to B}\vee\to}{B \vee B \to \cup\Delta \vee B}\to\vee}{\cup\Delta \vee (B \vee B) \to \cup\Delta \vee B}\vee\to}{\Gamma \to \cup\Delta \vee B}\mathit{mix}$$

CASO 3. $r(\Pi)$ é $\supset\to$. Sendo Π da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to \Theta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ B, \Delta \to \Lambda\end{matrix}}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

pela hipótese da indução, as provas das premissas de $\supset\!\rightarrow$ transformam-se, em NCG_ω, em:

$$\begin{array}{c} \Pi_1' \\ \Gamma \rightarrow \cup\Theta \vee A \end{array}$$

e

$$\begin{array}{c} \Pi_2' \\ B, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \end{array}$$

onde $\cup\Theta$ e $\cup\Lambda$ representam a disjunção das fórmulas de Θ e de Λ, respectivamente.

Seja Σ a seguinte prova, em NCG_ω :

$$\dfrac{est\dfrac{\rightarrow\vee\dfrac{\cup\Theta \rightarrow \cup\Theta}{\cup\Theta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta}}{\cup\Theta, A \supset B, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta} \qquad \dfrac{\dfrac{A \rightarrow A \quad \begin{array}{c}\Pi_2' \\ B, \Delta \rightarrow \cup\Lambda\end{array}}{A \supset B, A, \Delta \rightarrow \cup\Lambda}\supset\rightarrow}{A \supset B, A, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta}\rightarrow\vee}{\cup\Theta \vee A, A \supset B, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta}\vee\rightarrow$$

A prova esperada, Π', em NCG_ω, é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1' \\ \Gamma \rightarrow \cup\Theta \vee A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma \\ \cup\Theta \vee A, A \supset B, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta\end{array}}{A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \cup\Lambda \vee \cup\Theta}mix.$$

CASO 4. $r(\Pi)$ é $\vee\rightarrow$. Se Π é da forma

$$\vee\rightarrow\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ A,\Gamma\rightarrow\Lambda & B,\Gamma\rightarrow\Lambda\end{array}}{A\vee B,\Gamma\rightarrow\Lambda}$$

pela hipótese da indução, existem as seguintes provas, em NCG_ω :

$$\begin{array}{c}\Pi_1'\\ A,\Gamma\rightarrow\cup\Lambda\end{array}\quad\text{e}\quad\begin{array}{c}\Pi_2'\\ B,\Gamma\rightarrow\cup\Lambda\end{array}$$

sobre cujos seqüentes finais aplica-se a regra $\vee\rightarrow$ de NCG_ω, obtendo-se o desejado.

CASO 5. Se $r(\Pi)$ é uma regra de conseqüente diferente de $\rightarrow\&$, e de $\rightarrow\neg$, o resultado segue imediatamente da hipótese da indução, pela utilização conveniente de $\rightarrow\vee$, sendo trivial no caso de $\rightarrow\supset$.

CASO 6. $r(\Pi)$ é $\rightarrow\&$. Π é da forma:

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ \Gamma_1\rightarrow\Delta_1,A & \Gamma_2\rightarrow\Delta_2,B\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2\rightarrow\Delta_1,\Delta_2,A\&B}$$

Pela hipótese da indução, as provas das premissas transformam-se, em NCG_ω,em:

$$\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Gamma_1\rightarrow A\vee\cup\Delta_1\end{array}\quad\text{e}\quad\begin{array}{c}\Pi_2'\\ \Gamma_2\rightarrow B\vee\cup\Delta_2\end{array}$$

Sejam as seguintes provas em NCG_ω :

Σ :

$$\cfrac{\cfrac{\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2\rightarrow\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2}{\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2\rightarrow\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2\vee A\&B}\rightarrow\vee}{\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2,B\rightarrow\cup\Delta_1\vee\cup\Delta_2\vee A\&B}est,$$

Σ_1 :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{B, A \to A}\,at \to}{A, B \to A}\,perm \to \qquad \dfrac{B \to B}{A, B \to B}\,at \to}{A, B \to A\&B}\,\to \&}{A, B \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,\to \vee \qquad \Sigma}{\dfrac{A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, B \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}{B, A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,est}\,\vee \to
$$

Σ_2 :

$$
\dfrac{\dfrac{\Sigma_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2}{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,\to \vee}{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,est}{B \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,\vee \to}{A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, B \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,est
$$

Σ_3 :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 \\ \Gamma_1 \to A \vee \cup\Delta_1\end{matrix}}{\Gamma_1 \to A \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2}\,\to \vee \qquad \Sigma_2}{\Gamma_1, B \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,mix}{B \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, \Gamma_1 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}\,est
$$

Π' é, portanto, a prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_2'}{\Gamma_2 \to B \vee \cup\Delta_1}}{\Gamma_2 \to B \vee \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2}\to\vee \qquad \Sigma_3}{\Gamma_2, \Gamma_1 \to \cup\Delta_2 \vee A\&B}mix}{\dfrac{\Gamma_2, \Gamma_1 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee A\&B}est.}\to\vee$$

CASO 7. $r(\Pi)$ é $\to\neg$. A forma de Π é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma, A \to \Delta\end{array}}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\to\neg$$

Ora, pela hipótese da indução, em NCG_ω, tem-se:

$$\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Gamma, A \to \cup\Delta\end{array}$$

Π' é então

$$\dfrac{\to\vee\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Gamma, A \to \cup\Delta\end{array}}{\Gamma, A \to \cup\Delta \vee \neg A} \qquad \dfrac{\neg A \to \neg A}{\neg A \to \cup\Delta \vee \neg A}\to\vee}{\Gamma \to \cup\Delta \vee \neg A}neg$$

CASO 8. $r(\Pi)$ é corte. Π é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to \Delta_1, C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ C, \Gamma_2 \to \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}corte$$

Pela hipótese da indução, em NCG_ω, obtém-se:

$$\begin{array}{c} \Pi_1' \\ \Gamma_1 \to \cup\Delta_1 \vee C \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \Pi_2' \\ C, \Gamma_2 \to \cup\Delta_2 \end{array}$$

Sejam Σ_1 :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1' \\ \Gamma_1 \to \cup\Delta_1 \vee C\end{array}}{\Gamma_1 \to \cup\Delta_2 \vee \cup\Delta_1 \vee C} \to \vee}{\Gamma_1 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee C} \text{ Lema 2.35, 1}$$

e Σ_2 :

$$\dfrac{est\dfrac{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2}{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2, \Gamma_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2' \\ C, \Gamma_2 \to \cup\Delta_2\end{array}}{C, \Gamma_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2} \to \vee}{\cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2 \vee C, \Gamma_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2} \vee \to$$

Como desejado, Π' é a prova:

$$\dfrac{\Sigma_1 \qquad \Sigma_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \cup\Delta_1 \vee \cup\Delta_2} mix \ \square$$

Corolário 2.37 *Se há prova de $\to A$, em CG_ω, então há uma prova de $\to A$, em NCG_ω*

Demonstração. Caso particular do Teorema 2.36. $\square$

Teorema 2.38 *Se Π é uma prova em NCG_ω de $\Gamma \to C$, então Π pode ser transformada em uma prova Π', em CG_ω, de $\Gamma \to C$.*

Demonstração. Todas as regras de NCG_ω , exceto *neg* e *mix*, são regras de CG_ω. Portanto, se em Π não há aplicação de *neg* nem de *mix*, Π é Π'.

Por outro lado, toda prova em NCG_ω da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A, \Gamma_1 \rightarrow C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \neg A, \Gamma_2 \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C}\,neg$$

pode ser transformada em CG_ω, em

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A, \Gamma_1 \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1 \rightarrow C, \neg A}\rightarrow\neg \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \neg A, \Gamma_2 \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C}\,corte.$$

As provas em NCG_ω da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow D\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ D, \Delta \rightarrow C\end{array}}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow C}\,mix$$

podem ser transformadas, em CG_ω, em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma \rightarrow D\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ D, \Delta \rightarrow C\end{array}}{D, \Delta^* \rightarrow C}\,est}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow C}\,corte. \ \square$$

Corolário 2.39 *Se há prova de* $\rightarrow A$, *em* NCG_ω, *então há uma prova de* $\rightarrow A$, *em* CG_ω.

Demonstração. Caso particular do Teorema 2.38. $\square$

Corolário 2.40 *$\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$, em CG_ω, se e somente se $\vdash \Gamma \rightarrow \cup\Delta$, em NCG_ω.*

Demonstração. Conseqüência dos Teoremas 2.36 e 2.38. □

Corolário 2.41 *$\vdash \rightarrow \Delta$, em CG_ω, se e somente se $\vdash \rightarrow \cup\Delta$, em NCG_ω.*

Demonstração. Conseqüência dos Corolários anteriores. □

Corolário 2.42 *NCG_ω é equivalente a C_ω.*

Demonstração. Conseqüência dos Corolários anteriores e do Teorema 1.22. □

2.2.2 Eliminação do Mix

Definição 2.43 *Uma seqüência de seqüentes , $S_1, S_2, ..., S_n$, é um* **caminho determinado por** *S_n em uma derivação Π se e somente se:*

1. *S_1 é um seqüente inicial de Π;*
2. *$S_i, 1 \leq i < n$, é uma premissa de uma regra de inferência cuja conclusão, $S_{i+1}, 1 \leq i \leq n$, é o seqüente seguinte do caminho; e*
3. *S_n é o seqüente final da seqüência.*

Definição 2.44 *Uma seqüência de seqüentes , $S_1, S_2, ..., S_n$, é um* **caminho principal** *em uma derivação Π se e somente se:*

1. *$S_1, S_2, ..., S_n$ um caminho de Π determinado por S_n; e*
2. *S_n é o seqüente final de Π.*

Definição 2.45 *Chama-se de* **ordem esquerda** *(***direita***) de um mix o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho determinado pelo seqüente superior esquerdo (direito) do mix e cada um dos seqüentes contém a fórmula do mix no conseqüente (antecedente).*

Definição 2.46 *Chama-se* **ordem do** *mix a soma de sua ordem esquerda com sua ordem direita.*

Lema 2.47 *Todo mix de fórmula negada com ordem esquerda igual a 1 tem como seqüente superior esquerdo um seqüente inicial.*

Demonstração. A inspeção das regras de NCG_ω deixa claro que não há como introduzir negação no conseqüente de qualquer seqüente, tendo em vista o resultado expresso no Teorema 2.33. □

Lema 2.48 *Seja* Π *uma prova em* NCG_ω *tal que* $r(\Pi)$ *é mix e esta é a única aplicação do mix em* Π. *Então,* Π *pode ser transformada em uma prova* Π', *do mesmo seqüente final, sem aplicação do mix.*

Demonstração. Indução sobre a ordem do *mix*, n, com indução subsidiária sobre o grau de *mix*, m.

BASE. $n = 2$ (A ordem mínima de um mix é igual à soma da ordem esquerda mínima, que é 1, com a ordem direita mínima que, também, é 1).

1) $m = 1$. I. e., a fórmula *mix*, M, é atômica (e só ocorre como premissa do *mix*).

Há somente 2 situações a examinar:

1.1) A premissa esquerda do *mix* contém M em um seqüente inicial. Portanto, Π é:

$$\dfrac{M \to M \qquad \begin{array}{c}\Pi_1 \\ M, \Delta \to C\end{array}}{M, \Delta^* \to C}\,mix,$$

que se transforma em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ M, \Delta \to C\end{array}}{M, \Delta^* \to C}\,est,$$

sem *mix*.

1.2) A premissa direita do *mix* contém M em um seqüente inicial. Logo, Π é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to M\end{matrix} \qquad M \to M}{\Gamma \to M}\,mix,$$

cuja transformação é óbvia.

Observação: Como não há $\to at$, M só pode ocorrer na premissa esquerda de um *mix* de ordem 2 em um seqüente inicial. Não há, portanto, um terceiro caso em que nenhuma das premissas do *mix* ocorre em um seqüente inicial.

2) $m > 1$. A fórmula do *mix*, M, é uma fórmula qualquer e ocorre somente nas premissas do *mix*.

Há 2 casos a examinar.

2.1) M ocorre um um seqüente inicial. Como nos casos 1.1 e 1.2, faz-se a eliminação do *mix*.

2.2) Nenhuma premissa do *mix* é um seqüente inicial. Isto é, M é introduzida por $at \to$ ou por uma regra operacional.

2.2.1) Se M é introduzida por $at \to$ na premissa direita do *mix*, Π toma a forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to M\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \Delta \to C\end{matrix}}{M, \Delta \to C}\,at \to}{\Gamma, \Delta^* \to C}\,mix,$$

que se transforma em

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \Delta \to C\end{matrix}}{\Gamma, \Delta^* \to C}\,est$$

sem *mix*. (Obviamente, como $n = 2$, Δ é igual a Δ^*, o que garante a correção de $r(\Pi)$.)

2.2.2) Se M é introduzida, na duas premissas do *mix*, por alguma regra operacional, há 3 casos a examinar.

2.2.2.1) M é $A_1 \& A_2$. Π é (para $i = 1, 2$):

$$\dfrac{\& \rightarrow \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \rightarrow A_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \Gamma_1 \rightarrow A_2\end{matrix}}{\Gamma_1 \rightarrow A_1 \& A_2} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_i \\ A_i, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{A_1 \& A_2, \Gamma_2 \rightarrow C} \rightarrow \&}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix$$

Ora, pela hipótese da indução, qualquer das provas Σ_i' ($i = 1$ *ou* 2):

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i \\ \Gamma_1 \rightarrow A_i\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_i \\ A_i, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix$$

pode ser transformada em uma prova sem *mix*.

2.2.2.2) M é $A_1 \vee A_2$. Π é:

$$\dfrac{\rightarrow \vee \dfrac{\begin{matrix}\Pi_i \\ \Gamma_1 \rightarrow A_i\end{matrix}}{\Gamma_1 \rightarrow A_1 \vee A_2} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ A_1, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ A_2, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{A_1 \vee A_2, \Gamma_2 \rightarrow C} \vee \rightarrow}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix,$$

para $i = 1, 2$.

Pela hipótese da indução, qualquer das provas (para $i = 1, 2$)

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_i \\ \Gamma_1 \rightarrow A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_i \\ A_i, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix$$

pode ser transformada em uma prova sem *mix*, do mesmo seqüente final.

2.2.2.3) M é $A \supset B$. Portanto, Π é da forma:

$$\dfrac{\to\supset\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A,\Gamma \to B\end{array}}{\Gamma \to A \supset B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ \Delta_1 \to A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_3\\ B,\Delta_2 \to C\end{array}}{A \supset B, \Delta_1, \Delta_2 \to C}\supset\to}{\Gamma, \Delta_1^*, \Delta_2^* \to C}\,mix.$$

Pela hipótese da indução, a prova Σ_1 seguinte:

$$mix\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A,\Gamma \to B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_3\\ B,\Delta_2 \to C\end{array}}{A,\Gamma,\Delta_2^* \to C},$$

pode ser transformada em uma prova Σ_2 com o mesmo seqüente final e sem *mix*. Portanto, a prova Σ_3 :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ \Delta_1 \to A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ A,\Gamma,\Delta_2^* \to C\end{array}}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2^* \to C}\,mix}{\Gamma, \Delta_1^*, \Delta_2^* \to C}\,est$$

com fórmula *mix* de grau menor, pela hipótese da indução, pode ser transformada em uma prova Π' sem *mix*. Leve-se em conta que $A \supset B$ não ocorre em Δ_1.

Assim, estabelece-se a base da indução.

PASSO INDUTIVO. $n > 2$ e $m \geq 2$.

1) A ordem direita do *mix* é maior que 1 e a esquerda igual a 1. I. e., a fórmula *mix*, M, da premissa direita do *mix* ocorre no seqüente superior de

uma regra de inferência que contém M no antecedente de pelo menos uma de suas premissas.

1.1) Se M ocorre, também, no antecedente do seqüente esquerdo do *mix* e Π é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ M, \Gamma_1 \rightarrow M\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{M, \Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix,$$

obtém-se Π', sem *mix*, da seguinte maneira:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{M, \Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} est.$$

1.2) Se M não ocorre no antecedente da premissa esquerda do *mix*, há 3 casos a analisar:

1.2.1) Se a forma de Π é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \rightarrow M\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{M, \Delta, \Gamma_2' \rightarrow C} R}{\Gamma_1, \Delta^*, \Gamma_2'^* \rightarrow C} mix,$$

onde R é uma regra estrutural (*cont* $\rightarrow$, *per* $\rightarrow$, ou *at* $\rightarrow$) e Δ é vazia ou é a fórmula principal de R, a prova Σ:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \rightarrow M\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \rightarrow C\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C} mix}{\Gamma_1, \Delta^*, \Gamma_2'^* \rightarrow C} est,$$

pela hipótese da indução, pode ter este *mix* eliminado, gerando a prova Π' desejada.

1.2.2) Se a forma de Π é:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \to C\end{matrix}}{M, \Delta, \Gamma_2' \to C_1}R}{\Gamma_1, \Delta^*, \Gamma_2'^* \to C_1}mix,$$

onde C_1 é C ou a fórmula principal de R; e R é uma regra operacional de uma premissa ($\& \to, \neg\neg \to, \to \vee$ ou $\to\supset$), e Δ é vazio ou é a fórmula principal de R, considere-se a prova Σ seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \to C\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to C}mix}{\Delta, \Gamma_2'^*, \Gamma_1 \to C_1}R}{\Gamma_1, \Delta^*, \Gamma_2'^* \to C_1}est.$$

Esta prova, pela hipótese da indução, transforma-se na prova desejada Π', sem *mix*.

1.2.3)) Seja o seqüente direito do *mix* gerado por uma regra operacional R, com 2 premissas.

1.2.3.1) Se R é $\to \&$, então Π assume a forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ M, \Gamma_2 \to A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3\\ M, \Gamma_2 \to B\end{matrix}}{M, \Gamma_2 \to A\&B}\to\&}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to A\&B}mix.$$

Esta prova pode ser transformada na prova seguinte:

$$\cfrac{mix\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ M, \Gamma_2 \to A\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to A} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ M, \Gamma_2 \to B\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to B}mix}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to A\&B} \to \&$$

na qual as aplicações do *mix* podem ser eliminadas, aplicando-se a hipótese da indução.

1.2.3.2) Se R é $\vee \to, \Pi$ tem a forma:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \quad \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ A, M, \Gamma_2 \to C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ B, M, \Gamma_2 \to C\end{matrix}}{A \vee B, M, \Gamma_2 \to C}\vee \to}{M, A \vee B, \Gamma_2 \to C}est}{\Gamma_1, \{A \vee B\}^*, \Gamma_2^* \to C}mix$$

onde $\{A \vee B\}^*$ é $A \vee B$, se M é diferente de $A \vee B$, ou não ocorre em Π, se M é $A \vee B$.

Seja Σ_1 a seguinte prova:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \quad \cfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ A, M, \Gamma_2 \to C\end{matrix}}{M, A, \Gamma_2 \to C}est}{\Gamma_1, A, \Gamma_2^* \to C}mix}{A, \Gamma_1, \Gamma_2^* \to C}est$$

e seja Σ_2 uma prova semelhante a Σ_1, mas que contém B no lugar de A. Pela hipótese da indução, estas provas se transformam em provas sem *mix*.

Seja Σ a prova:

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ A, \Gamma_1, \Gamma_2^* \to C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ B, \Gamma_1, \Gamma_2^* \to C\end{matrix}}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2^* \to C}\vee \to .$$

Se M é diferente de $A \vee B$, por transformações estruturais, obtém-se Π' com seqüente final igual a

$$\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2^* \to C.$$

Se M é $A \vee B$, construa-se Σ' da seguinte maneira:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma \\ A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2^* \to C\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_1^*, \Gamma_2^* \to C}\,mix}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to C}\,est.$$

Σ' transforma-se na prova Π' desejada, sem *mix*, pois a ordem do *mix* indicado é menor que a do *mix* original e pode ser eliminado pela hipótese da indução.

1.2.3.3) Se R é $\supset\!\to$, obtém-se o resultado desejado de maneira análoga ao caso anterior.

2) A ordem direita do *mix* é 1 e a esquerda, maior que 1. I. e., a fórmula M à esquerda, ocorre no seqüente inferior de uma regra de inferência qualquer que contém M no conseqüente de seu seqüente superior. Então, Π é da forma:

$$\dfrac{R\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma_1 \to M^\dagger\end{matrix}}{\Gamma_1', \Delta \to M} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ M, \Gamma_2 \to C\end{matrix}}{\Gamma_1', \Delta, \Gamma_2^* \to C}\,mix$$

($\dagger$ marca uma ocorrência particular de uma fórmula) e M não pode ocorrer no antecedente de nenhum seqüente de Π_2, exceto em

$$M, \Gamma_2 \rightarrow C.$$

Ora, qualquer que seja a regra R, $M^\dagger$ não é afetada por ela. Portanto, seja Σ a prova

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Gamma_1' \rightarrow M^\dagger & M, \Gamma_2 \rightarrow C \end{array}}{\Gamma_1', \Gamma_2^* \rightarrow C} mix,$$

cujo *mix* tem ordem menor que o original e, por isso, pela hipótese da indução, pode ser transformada em uma prova Σ', sem *mix*, de

$$\Gamma_1', \Gamma_2^* \rightarrow C$$

Assim,

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Sigma' \\ \Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow C \end{array}}{\Gamma_1, \Delta, \Gamma_2^* \rightarrow C} R$$

é a prova sem *mix* em que se transforma Π.

3) Se a ordem direita e a ordem esquerda do *mix* são maiores que 1, aplicam-se os procedimentos descritos para os casos anteriores.

Estes são todos os casos. Portanto, toda prova Π cuja $r(\Pi)$ é a única aplicação de *mix*, transforma-se em uma prova sem *mix*. □

Teorema 2.49 *Toda prova Π, em NCG_ω, pode ser transformada em uma prova normal do mesmo seqüente final.*

Demonstração. Pela aplicação reiterada do Lema 2.24 a cada subprova de Π cuja $r(\Pi)$ seja *mix*. □

Corolário 2.50 *Toda prova normal, sem neg, só contém fórmulas que são subfórmulas das fórmulas de seu seqüente final.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$. Se $l(\Pi) = 1$, é trivial. Se $l(\Pi) > 1$, seja Π a prova

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to C\end{matrix}}{\Delta \to C'}R$$

Pela hipótese da indução,

$$\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \to C\end{matrix}$$

atende ao Corolário. Se R é *at* $\to$, *cont* $\to$, *per* $\to$, $\& \to$, $\to \vee$, $\to \supset$ ou $\neg\neg \to$, a simples inspeção das regras mostra que suas premissas contêm somente subfórmulas de suas conclusões.

Se Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma_1 \to A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \Gamma_2 \to B\end{matrix}}{\Delta, \Gamma_1', \Gamma_2' \to C}R$$

e R é $\to \&$, $\vee \to$ *ou* $\supset\to$, também a inspeção das regras mostra que as premissas contêm, somente, subfórmulas de suas conclusões, sendo o demais garantido pela hipótese da indução. □

Lema 2.51 *Seja uma prova normal da forma*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A, \Gamma_1 \rightarrow C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \neg A, \Gamma_2 \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C}\,neg$$

com esta única aplicação de neg. Então:

I) *se todas as seqüências vinculadas a $\neg A$ têm origem em at $\rightarrow$, então existe uma prova, sem neg, de $\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C$;*

II) *Se pelo menos uma das seqüências vinculadas a $\neg A$ tem origem em um seqüente inicial, então $\neg A$ é subfórmula de C ou de Γ_2; e*

III) *Se pelo menos uma seqüência vinculada a $\neg A$ tem origem operacional, existe uma prova de $\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C$ tal que todas as seqüências vinculadas às premissas de neg têm origem em at $\rightarrow$ ou em seqüente inicial.*

Demonstração. I) Eliminando-se todas as aplicações de $at \rightarrow$ que introduziram $\neg A$ em Π_2, obtém-se a prova normal

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2'\\ \Gamma_2' \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C}\,est$$

sem neg, onde Π_2' e Γ_2' diferem de Π_2 e Γ_2, respectivamente, por não conterem $\neg A$.

II) Neste caso, considere-se a prova Π_2

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A, \Gamma_1 \rightarrow C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg A \rightarrow \neg A\\ \Pi_2\\ \neg A, \Gamma_2 \rightarrow C\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow C}\,neg,$$

podendo haver outras seqüências vinculadas a $\neg A$ de qualquer origem. Pela hipótese do Lema, a derivação Σ seguinte:

$$\begin{array}{c} \neg A \to \neg A \\ \Pi_2 \\ \neg A, \Gamma_2 \to C \end{array}$$

é normal e não contém aplicação de *neg*.

Se $l(\Sigma) = 1$, trivialmente, $\neg A$ é subfórmula de C, Se $l(\Sigma) > 1$, e em Π_2 não há aplicação de $\supset\to$, a ocorrência de $\neg A$ no conseqüente de $\neg A \to \neg A$ é subfórmula de C. Por outro lado, se em Π_2 há aplicação de $\supset\to$, esta ocorrência de $\neg A$ passa a figurar como subfórmula de uma fórmula de Γ_2.

III) Indução sobre o grau de A. Se $g(A) = 1$, não se aplica o Lema. Se $g(A) > 1$, e A não é da forma $\neg B$, não há seqüência vinculada a $\neg A$ que tenha origem operacional. Por outro lado, se A é da forma $\neg B$, $\neg A$ tem seqüência vinculada de origem operacional, e Π toma a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ \neg B, \Gamma_1 \to C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Pi_2 \\ \dfrac{B, \Gamma_3 \to D}{\neg\neg B, \Gamma_3 \to D}\neg\neg\to \\ \Pi_3 \\ \neg\neg B, \Gamma_2 \to C \end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to C} neg,$$

que pode ser transformada em Σ':

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Pi_2 \\ B, \Gamma_3 \to D \\ \Pi_3' \\ B, \Gamma_2 \to C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \neg B, \Gamma_1 \to C \end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to C} neg,$$

A derivação Π_3' difere de Π_3 somente por não conter $\neg\neg B$. Continua uma derivação correta, pois já não continha aplicação de qualquer regra sobre $\neg\neg B$ que não possa ser aplicada a B.

Como há redução do grau de A, pela redução do número de seqüências vinculadas a $\neg A$ de origem operacional, pela hipótese da indução esta derivação Σ' pode ser transformada na prova desejada, com as seqüências vinculadas a $\neg A$ com origem em $at \rightarrow$ ou em seqüente inicial. □

Definição 2.52 *Chama-se* **neg operacional** *uma aplicação de neg com pelo menos uma premissa com seqüência vinculada de origem operacional que é conclusão de* $\neg\neg \rightarrow$.

Corolário 2.53 *Todo neg operacional se transforma em uma aplicação de neg cujas premissas só têm seqüências vinculadas com origem em seqüente inicial.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Lema 2.51. □

Corolário 2.54 *Toda prova normal* Π, *cujas aplicações de neg têm premissas com seqüências vinculadas de origem em seqüente inicial, só contém subfórmulas das fórmulas de seu seqüente final.*

Demonstração. Imediata, a partir do Corolário 2.50 e do Lema 2.51. □

Corolário 2.55 *Em* NCG_ω *não há prova de* $\rightarrow \neg A$.

Demonstração. Suponha que há uma prova normal de $\rightarrow \neg A$. Nesta prova, pelos Corolários 2.54 e 2.50, só ocorrem subfórmulas de A e de $\neg A$. Ora, como não há prova de $A \rightarrow \neg A$, e de $A \rightarrow$, não há prova de $\rightarrow \neg A$. □

Corolário 2.56 NCG_ω *é consistente.*

Demonstração. Imediata. □

2.2.3 Decidibilidade

Conforme sugerido por Gentzen, em [39], p. 103-105, pode-se definir um procedimento de decisão para NCG_ω, haja vista os resultados obtidos de eliminação do corte (*mix*, no caso) e preservação do princípio de subfórmula.

Assim, definindo-se como em [39] seqüente reduzido e prova reduzida, em NCG_ω, demonstra-se que toda prova de um seqüente reduzido se transforma em uma prova reduzida deste mesmo seqüente e que o procedimento descrito na página 105 de [39] é adequado para NCG_ω.

Aseguir, um esboço desta adaptação.

Definição 2.57 Γ_r *é uma* **seqüência** *(de fórmulas)* **reduzida** *se e somente se nenhuma fórmula ocorre mais de 3 vezes em* Γ.

Definição 2.58 $\Gamma_r \rightarrow C$ *é uma* **instância de redução** *de* $\Gamma \rightarrow C$ *se e somente se é obtida de* $\Gamma \rightarrow C$ *pela eliminação de fórmulas que ocorram em* Γ *mais de uma vez.*

Definição 2.59 $\Gamma_r \rightarrow C$ *é um* **seqüente reduzido**.

Definição 2.60 Π_r *é uma* **prova reduzida** *se e somente se todos os seqüentes de* Π *são seqüentes reduzidos.*

Corolário 2.61 *Todo seqüente inicial é um seqüente reduzido.*

Corolário 2.62 *Todo seqüente da forma* $\rightarrow C$ *é um seqüente reduzido.*

Corolário 2.63 *Toda instância de redução de* $\Gamma \rightarrow C$ *é um seqüente reduzido.*

Corolário 2.64 *A partir de uma instância de redução qualquer de* $\Gamma \rightarrow C$ *derivam-se todas as outras instâncias de redução de* $\Gamma \rightarrow C$*, pela aplicação de regras estruturais, apenas, ocorrendo somente seqüentes reduzidos nestas derivações.*

Demonstração. Todos estes Corolários seguem-se facilmente das definições. □

Corolário 2.65 *A partir de uma instância de redução qualquer $\Gamma_r \rightarrow C$, obtém-se $\Gamma \rightarrow C$ pela aplicação de regras estruturais, apenas e vice-versa, de $\Gamma \rightarrow C$ obtém-se $\Gamma_r \rightarrow C$.*

Demonstração. De $\Gamma_r \rightarrow C$ obtém-se $\Gamma \rightarrow C$ restaurando, por *at* $\rightarrow$ e *per* $\rightarrow$, as fórmulas eliminadas de Γ. De $\Gamma \rightarrow C$ obtém-se $\Gamma_r \rightarrow C$, por *cont* $\rightarrow$ e *per* $\rightarrow$, reduzindo-se convenientemente, as ocorrências múltiplas da mesma fórmula em Γ. □

Corolário 2.66 *Toda prova reduzida Π_r é uma prova em NCG_ω.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi_r)$.

Se $l(\Pi_r) = 1$, a definição de prova reduzida e o Corolário 2.61 oferecem, imediatamente, o desejado.

Se $l(\Pi_r) = n > 1$, pela hipótese da indução obtém-se que as provas reduzidas das premissas de $r(\Pi_r)$ são provas em NCG_ω. Logo, como a aplicação das regras de NCG_ω sobre seqüentes já provados gera uma prova em NCG_ω, Π_r é uma prova em NCG_ω. □

Lema 2.67 *Toda prova de um seqüente reduzido pode ser transformada em uma prova reduzida do mesmo seqüente.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$, sendo Π uma prova dada de um seqüente reduzido qualquer.

Se $l(\Pi) = 1$, Π é uma prova reduzida, por força do Corolário 2.61 e da Definição de prova reduzida.

Se $l(\Pi) = n > 1$, pela hipótese da indução, a(s) premissa(s) de $r(\Pi)$ tem (têm) prova(s) reduzida(s). Tomem-se as instâncias de redução destas premissas cujos antecedentes não contenham fórmulas com mais de uma ocorrência. Por força do Corolário 2.64, mantêm-se as condições de aplicação de $r(\Pi)$ e, obviamente, a conclusão desta regra será um seqüente reduzido (o seqüente final de Π). □

Corolário 2.68 *Todo teorema de NCG_ω tem prova reduzida.*

Demonstração. Segue do Corolário 2.62 e do Lema 2.67. □

Lema 2.69 *Toda prova reduzida contém somente subfórmulas das fórmulas de seu seqüente final.*

Demonstração. Segue-se do Corolário 2.66, do Teorema de Eliminação do *mix* e do Princípio de Subfórmula. □

Lema 2.70 *Seja $\Gamma_r \rightarrow C$ uma instância de redução de $\Gamma \rightarrow C$, e sejam:*

1. *A o conjunto de todos os seqüentes reduzidos cujas fórmulas são subfórmulas de Γ_r ou de C;*
2. *D o subconjunto de A que contém todos os seqüentes iniciais de A;*
3. *S_1, S_2, ..., S_n uma enumeração qualquer, fixa, dos elementos de $A \cup D$;*
4. *$T_0 = D$;*
5. *$T_{i+1} = T_i \cup \{S_j\}$, se S_j, para todo $i \leq j \leq n$, é conclusão de uma regra de inferência cuja(s) premissa(s) está (estão) em T_i; se esta condição não se dá, $T_{i+1} = T_i (0 \leq i \leq n)$;*
6. *$T = \cup_{i=n}^{i=0} T_i$.*

Então,

a) A é finito;

b) todo seqüente de T tem prova em NCG_ω;

c) se $\Gamma_r \rightarrow C$ pertence a T, então $\Gamma \rightarrow C$ tem prova em NCG_ω;

d) se $\Gamma_r \rightarrow C$ não pertence a T, então $\Gamma \rightarrow C$ não tem prova em NCG_ω.

Demonstração. a) Trivial. Fórmulas, subfórmulas e seqüências do tipo Γ_r e de C são, todas, combinações finitas de símbolos da linguagem definida e isto é decidível.

b) Pela definição de prova, todo elemento de T_0 tem prova. Suponha que todos os elementos de T_i têm prova. Ora, qualquer seqüente S_j só é adicionado a T_i, para formar T_{i+1}, se é conclusão de uma aplicação de uma regra cuja(s) premissa(s) está (estão) em T_i, i. e., tem (têm) prova. Tudo isto é decidível. Logo, todo elemento de T_{i+1} tem prova. Daí segue que todo elemento de T tem prova em NCG_ω.

c) Ora, como $S_1, S_2, ..., S_n$ contém todos os seqüentes reduzidos cujas fórmulas são subfórmulas de Γ_r ou de C, esta enumeração contém $\Gamma_r \rightarrow C$

(v. Definição de subfórmula) e, portanto, $\Gamma_r \rightarrow C$ é incluído em T e, por b), tem prova. Logo, $\Gamma \rightarrow C$ tem prova, pelo Corolário 2.65.

d) Se $\Gamma_r \rightarrow C$ é um dos seqüentes de $S_1, S_2, ..., S_n$ que não pertence a T, $\Gamma_r \rightarrow C$ não é conclusão de regra de inferência que tenha suas premissas em algum T_i. Logo, não é conseqüência de nenhum conjunto de seqüentes formado a partir de suas subfórmulas. Portanto, não pode ser construída, para $\Gamma_r \rightarrow C$, uma prova normal ou que contenha somente aplicação de *mix* negado operacional. Por força do teorema da eliminação do corte, não há prova de $\Gamma_r \rightarrow C$ e, portanto, de $\Gamma \rightarrow C$. □

Teorema 2.71 *O cálculo NCG_ω é decidível.*

Demonstração. Conseqüência do Lema 2.70. □

Capítulo 3

C_ω em Dedução Natural

Apresenta-se, neste capítulo, uma formulação de C_ω em Dedução Natural. Após uma breve discussão das idéias fundamentais de Raggio, em [63], introduz-se e desenvolve-se a formulação apresentada por E. H. Alves ([2]), demonstrando-se um Teorema de Normalização Forte.

A Dedução Natural, apresentada por Jaśkowski e por Gentzen na década de 30, desenvolve-se no contexto das discussões sobre o Programa de Hilbert. Duas características marcantes fazem-na instrumento privilegiado de análise das provas matemáticas. Primeiro, as regras de inferência dos sistemas de Dedução Natural correspondem, muito aproximamente, aos procedimentos comuns de inferência encontrados no raciocínio intuitivo. Isto permite que a formalização, nestes sistemas, de raciocínios matemáticos desenvolvidos informalmente, preserve a estrutura fundamental destas provas informais, facilitando a explicação dos conceitos dedutivos aí utilizados. Segundo, as regras de inferência estabelecidas se aproximam bastante da interpretação pretendida dos símbolos lógicos, oferecendo instrumental que permite o desenvolvimento direto, sob certos aspectos a definir, normal, das provas.

É esta última característica, que levou ao desenvolvimento das idéias de Dedução em Forma Normal, e de normalização forte, que motiva a formulação do sistema C_ω em dedução natural. Persegue-se a Normalização Forte. Isto é: adotando, além das reduções operacionais, reduções permutativas (v. [53] e [54]), estabelece-se um critério de normalização que permite o controle das derivações normais de NNC_ω e, embora não seja um mérito particular da formulação adotada, prova-se um Teorema de Normalização Forte, utilizando a técnica desenvolvida por Girard, em [40], conforme aplicada por L. C. P. D. Pereira, em [54], e C. D. B. Massi em [51].

Sobre Derivações em Forma Normal, ou Eliminação do Corte em Dedução Natural, são conhecidos três tipos de resultados, quais sejam:

1. Teoremas de Forma Normal: toda derivação do sistema tem uma forma normal,

2. Teoremas de Normalização: pode-se obter, efetivamente, a forma normal de qualquer derivação do sistema, depois de uma seqüência finita de reduções, e

3. Teoremas de Normalização Forte.

Pode-se dizer que estes Teoremas são hierarquizáveis, isto é, podem ser postos em ordem crescente de complexidade, embora tenham variado bastante as técnicas pelas quais são obtidos estes resultados. As demonstrações da Normalização Forte podem ser classificadas em dois grupos distintos: as provas sintáticas e as provas semânticas. Estas provam que, se uma derivação dada tem uma certa propriedade, seja P, então esta derivação é fortemente normalizável. Exemplos destas propriedades são a validade forte de Prawitz ([56]), a convertibilidade de Tait, e a computabilidade de Martin-Löf (cf. [1], p. 7). As provas sintáticas, como a que aqui se apresenta,

> evitam o passo indireto representado pela definição da propriedade P. Em Pereira[1974], Girard[1987] e Massi[1989] obtém-se normalização forte, sintaticamente, através de um mapeamento das seqüências de redução em um sistema formal auxiliar, que satisfaz normalização forte. [1], p. 7.

Uma aproximação grosseira e informal destes resultados permite explicá-los mais ou menos assim: primeiro, afirma-se que toda derivação tem uma forma normal; depois, mostra-se a maneira de obter, através de transformações chamadas "reduções", a forma normal de uma derivação; e, por fim, mostra-se que qualquer das possíveis direções de transformação (seqüências de redução) indicadas no segundo passo é finita e obtém-se, sempre, um mesmo resultado final, isto é, há uma forma normal única para cada derivação.

Segue-se o caminho acima delineado e demonstra-se que NNC_ω é fortemente normalizável.

3.1 NNC_ω : Caracterização

A primeira formulação de C_ω em Dedução Natural data de 1976. E. H. Alves, em [2], apresenta o conjunto de regras aqui adotado sem, no entanto, analizá-lo e dele obter os resultados que enseja. A. Raggio ([63]), desprezando a regra $\neg_1$ (aqui chamada **neg**) e postulando axiomas da forma $A \vee \neg A$, mostra que a formulação por ele denominada NC^*_ω é equivalente a C^*_ω e prova um Teorema de Normalização, a indemonstrabilidade de negações[1] e que C_ω não é finitamente trivializável[2].

Retomando a formulação de [2], que passa a ser chamada de NNC_ω, para destacar a relação com o NC_ω de [63], obtém-se aqueles mesmos resultados, a partir da demonstração da equivalência entre C_ω e NNC_ω, com a vantagem adicional de (1) explicitar melhor propriedades particulares da negação ($\neg$) que não se destacam em NC_ω e (2) não admitir axioma de qualquer forma, o que parece mais conveniente à idéia de dedução **natural**.

3.1.1 Linguagem e Regras de Inferência

A linguagem subjacente a NNC_ω contém um conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais e os conectivos "&", "$\vee$", "$\supset$" e "$\neg$ ". As definições de fórmula e subfórmula, e as convenções de notação são as usuais (adota-se o estabelecido em [55], com as restrições, óbvias, para um cálculo proposicional).

As **derivações** em NNC_ω são escritas na forma de **árvores**, em cujas extremidades superiores ocorrem fórmulas chamadas **suposições** (ou fórmulas de topo, ou hipóteses). As outras fórmulas destas árvores são obtidas, cada uma, por uma aplicação de uma **regra de inferência**, a partir de pelo menos uma fórmula que a antecede na derivação. Por simplicidade, diz-se que as premissas de uma aplicação de uma regra de inferência antecedem, estão

[1]Resultado devido ao Prof. Antônio Mário Sette, em [65].

[2]De acordo com [16].

antes, ou estão acima de sua conclusão. Da mesma maneira, a conclusão da aplicação de uma regra está abaixo, ou depois, ou segue, sua(s) premissa(s).

Uma **suposição é aberta** em uma derivação, se não é **eliminada** (ou descarregada, ou fechada) por uma aplicação de uma regra de inferência.

Uma derivação é a derivação de sua **fórmula final** e, dada uma fórmula qualquer em uma derivação, a **subderivação determinada por esta fórmula** é a derivação formada pelas fórmulas que estão acima desta fórmula dada. Toda subderivação determinada por uma fórmula diferente da fórmula final de Π, é uma **subderivação própria** de Π.

Letras latinas maiúsculas, com ou sem índices inferiores ou superiores, representam fórmulas; derivações e subderivações são representadas pelas letras gregas Π e Σ, com ou sem índices inferiores ou superiores. Outras letras gregas maiúsculas representam conjuntos ou seqüências de fórmulas, conforme indicado.

A seguir, mais algumas convenções de notação, que são as usuais.

Usa-se

$$\begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array}$$

para denotar uma derivação cuja fórmula final é A, e

$$\frac{\Pi_1, \Pi_2 \cdots \Pi_n}{A}$$

para denotar uma derivação de A cujas **subderivações imediatas**, isto é, as derivações das premissas da regra de inferência que permite gerar A, são Π_1, Π_2, ..., Π_n, com $n = 1, 2$ ou 3.

A **última regra de inferência aplicada em** Π é denotada por $r(\Pi)$. E para indicar que Γ é o conjunto das suposições de Π, escreve-se

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\end{array}$$

$\Gamma \vdash A$ denota uma derivação de A a partir do conjunto Γ de suposições (abertas), e $\vdash A$, obviamente, a derivação de A a partir de um conjunto Γ, no qual todas as fórmulas foram fechadas (ou descarregadas).

As **regras de inferência** de NNC_ω são das formas seguintes, onde as **suposições fechadas** estão escritas entre colchetes ([,]):

	de introdução	de eliminação
conjunção	$\&I\ \dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \& A_2}$	$\&E\ \dfrac{A_1 \& A_2}{A_i}\ (i = 1, 2)$
disjunção	$\vee I\ \dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\ (i = 1, 2)$	$\vee E\ \dfrac{A_1 \vee A_2 \quad \begin{matrix}[A_1] \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_2] \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix}}{C}$
condicional	$\supset I\ \dfrac{\begin{matrix}[A_1] \\ \Pi_1 \\ A_2\end{matrix}}{A_1 \supset A_2}$	$\supset E\ \dfrac{A_1 \quad A_1 \supset A_2}{A_2}$
negação		$\neg\neg E\ \dfrac{\neg\neg A}{A}$

$$neg\ \frac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg A] \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix}}{C}$$

As regras que permitem a introdução (eliminação) de símbolos lógicos são identificadas por I (E) e são referidas, simplificadamente, como **regras de introdução (eliminação)**. Da mesma maneira, uma aplicação de uma regra de introdução (eliminação) é, de forma simplificada, uma introdução (eliminação).

Na regra $\vee E$ as premissas (da forma de) C são, a partir da esquerda, a primeira e a segunda **premissas menores**, assim como A_1 em $\supset E$ é

premissa menor. Outras premissas são **premissas maiores**.

A ocorrência de fórmulas entre colchetes indica a aplicação de uma regra, em uma derivação, que permite a **eliminação** daquela **suposição**.

Uma observação das regras da negação mostra que:

1. não há uma regra de introdução de negação. Isto significa que toda negação só pode ser introduzida através de uma suposição;
2. a regra *neg* corresponde à admissão do princípio do terceiro excluído.

Definição 3.1 *O* **comprimento de uma derivação** Π, *denotado por* $l(\Pi)$, *é igual a 1, se* Π *é uma fórmula; se* Π *é*

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2 \cdots \Pi_n}{A}$$

então $l(\Pi) = l(\Pi_1) + l(\Pi_2) + \ldots + l(\Pi_n) + 1$.

3.1.2 Equivalência entre C_ω e NNC_ω.

Assume-se a formulação de C_ω apresentada em [2], assim como algumas definições e propriedades comuns, já estabelecidas, tais como: as definições de prova e comprimento de prova, a validade do Teorema da Dedução, a demonstrabilidade de formas de fórmulas comuns à lógica positiva intuicionista, cujas provas são conhecidas.

Lema 3.2 *Se* $\Gamma \vdash A$, *em* C_ω, *então* $\Gamma \vdash A$, *em* NNC_ω.

Demonstração. Seja C_ω o sistema definido nas páginas 16 e seguintes, com as propriedades lá apresentadas. Indução sobre as deduções de A a partir de Γ, em C_ω.

1) Se $A \in \Gamma$,

$$A$$

é uma dedução de A, a partir de Γ, em NNC_ω.

2) Se A é um Postulado de C_ω, exceto o Postulado 3 (que é regra), A é demonstrável em NNC_ω, como a seguir:

Postulado 1. $A \supset (B \supset A)$:

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B \supset A}\supset I}{A \supset (B \supset A)}\supset I.$$

Postulado 2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\supset E\dfrac{[A] \quad [A \supset B]}{B} \quad \dfrac{[A] \quad [A \supset (B \supset C)]}{B \supset C}\supset E}{C}}{A \supset C}\supset\rightarrow}{(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}\supset\rightarrow}{(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))}\supset I$$

Postulados 4 e 5. $(A_1 \& A_2) \supset A_i$ $(i = 1, 2)$:

$$\dfrac{\dfrac{[A_1 \& A_2]}{A_i}\& E}{(A_1 \& A_2) \supset A_i}\supset I.$$

Postulado 6. $A \supset (B \supset (A \& B))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad [B]}{A \& B}\& I}{B \supset (A \& B)}\supset I}{A \supset (B \supset (A \& B))}\supset I\,.$$

Postulados 7 e 8. $A_i \supset (A_1 \vee A_2)$, $(i = 1, 2)$:

$$\dfrac{\dfrac{[A_i]}{A_1 \vee A_2}\vee I}{A_i \supset (A_1 \vee A_2)}\supset I\,.$$

Postulado 9. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \vee B] \qquad \dfrac{[A]\;[A \supset C]}{C}\supset E \qquad \dfrac{[B]\;[B \supset C]}{C}\supset E}{C}\vee E}{(A \vee B) \supset C}\supset I}{(B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)}\supset I}{(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))}\supset I\,.$$

Postulado 10. $A \vee \neg A$:

$$\dfrac{\vee I\,\dfrac{[A]}{A \vee \neg A} \qquad \dfrac{[\neg A]}{A \vee \neg A}\vee I}{A \vee \neg A}neg.$$

Postulado 11. $\neg\neg A \supset A$:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]}{A}\neg\neg E}{\neg\neg A \supset A}\supset I.$$

3) Se A é conseqüência de A_i e $A_i \supset A$ $(i < n)$, pelo Postulado 3, demonstra-se por indução sobre $l(\Pi)$. A base é uma aplicação trivial de $\supset E$ e, pela hipótese da indução, há, em NNC_ω, deduções Π_1 e Π_2 de $\Gamma_1 \vdash A_i$ e $\Gamma_2 \vdash A_i \supset A$, respectivamente. Seja a derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \vdots \\ A_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \vdots \\ A_i \supset A\end{matrix}}{A} \supset E$$

que é uma dedução de A a partir de Γ (Γ igual a Γ_1, Γ_2). Logo, se $\Gamma \vdash A$, em C_ω, então $\Gamma \vdash A$, em NNC_ω. □

Corolário 3.3 *Se $\vdash A$, em C_ω, então $\vdash A$, em NNC_ω.*

Demonstração. Caso especial do Lema. □

Lema 3.4 *Se $\Gamma \vdash A$, em NNC_ω, então $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A$, em C_ω, onde $\wedge\wedge\Gamma$ é a conjunção das fórmulas de Γ.*

Demonstração. Indução sobre o comprimento, $l(\Pi)$, da derivação Π de $\Gamma \vdash A$.

BASE. $l(\Pi) = 1$. Isto é, Π é A. Da maneira usual, prova-se, em C_ω, $\vdash A \supset A$.

PASSO INDUTIVO. $l(\Pi) = n > 1$. I. e., A é obtida de Γ por alguma regra de NNC_ω.

Caso 1. $r(\Pi)$ é $\&I$ e A é da forma $A_1 \& A_2$. Pela hipótese da indução, $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset A_1$ e $\vdash \wedge\wedge\Gamma_2 \supset A_2$, em C_ω. Logo (Post. abrevia Postulado),

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset A_1$
2. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_2 \supset A_2$
3. $\wedge\wedge\Gamma_1 \& \wedge\wedge\Gamma_2$ Hip.
4. $(\wedge\wedge\Gamma_1 \& \wedge\wedge\Gamma_2) \supset \wedge\wedge\Gamma_1$ Post. 4
5. $(\wedge\wedge\Gamma_1 \& \wedge\wedge\Gamma_2) \supset \wedge\wedge\Gamma_2$ Post. 5
6. $\wedge\wedge\Gamma_1$ 3, 4/ Post. 3
7. $\wedge\wedge\Gamma_2$ 3, 5/ Post. 3
8. A_1 1, 6/ Post. 3

9. A_2 $\quad$ 2, 7/ Post. 3

10. $A_1 \supset (A_2 \supset (A_1 \& A_2))$ $\quad$ Post. 6

11. $A_2 \supset (A_1 \& A_2)$ $\quad$ 8, 10/Post. 3

12. $(A_1 \& A_2)$ $\quad$ 9, 11/Post. 3.

Pelo Teorema da Dedução, $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_1 \& \wedge\wedge\Gamma_2) \supset (A_1 \& A_2)$, i.e., $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A$.

Caso 2. $r(\Pi)$ é $\& E$ e A é A_i, $i = 1, 2$. Pela hipótese da indução, $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \& A_2)$, em C_ω. Logo:

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \& A_2)$

2. $(A_1 \& A_2) \supset A_i$ $\quad$ Post. 4

3. $(\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \& A_2)) \supset ((\wedge\wedge\Gamma \supset ((A_1 \& A_2) \supset A_i)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A_i))$
   Post. 2

4. $(\wedge\wedge\Gamma \supset ((A_1 \& A_2) \supset A_i)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A_i))$ $\quad$ 1, 3/ Post. 3

5. $((A_1 \& A_2) \supset A_i) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset ((A_1 \& A_2) \supset A_i))$ $\quad$ Post. 1

6. $\wedge\wedge\Gamma \supset ((A_1 \& A_2) \supset A_i)$ $\quad$ 2, 5/Post. 3

7. $\wedge\wedge\Gamma \supset A_i$ $\quad$ 4, 6/ Post. 3.

Caso 3. $r(\Pi)$ é $\vee I$ e A é $A_1 \vee A_2$. Pela hipótese da indução, em C_ω, $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_i$ $(i = 1, 2)$.

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_i$

2. $A_i \supset (A_1 \vee A_2)$ $\quad$ Post. 7 ou 8

3. $(\wedge\wedge\Gamma \supset A_i) \supset ((\wedge\wedge\Gamma \supset (A_i \supset (A_1 \vee A_2))) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \vee A_2)))$
   Post. 2

4. $(\wedge\wedge\Gamma \supset (A_i \supset (A_1 \vee A_2))) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \vee A_2)))$ $\quad$ 1, 3/Post 3

5. $(A_i \supset (A_1 \vee A_2)) \supset (\wedge \wedge \Gamma \supset (A_i \supset (A_1 \vee A_2)))$ Post. 1

6. $\wedge \wedge \Gamma \supset (A_i \supset (A_1 \vee A_2))$ 2, 5/Post. 3

7. $\wedge \wedge \Gamma \supset (A_1 \vee A_2)$ 4, 6/Post. 3.

Caso 4. $r(\Pi)$ é $\vee E$. Sendo Π

$$\frac{\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & [C]\,,\Gamma_2 & [D],\Gamma_3 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ C \vee D & A & A \end{array}}{A}$$

pela hipótese da indução, tem-se que: $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset (C \vee D)$, $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_2 \& C) \supset A$ e $\vdash (\wedge \wedge \Gamma_3 \& D) \supset A$, em C_ω. Daí obtém-se:

1. $\vdash \wedge \wedge \Gamma_1 \supset (C \vee D)$

2. $\vdash (\wedge \wedge \Gamma_2 \& C) \supset A$

3. $\vdash (\wedge \wedge \Gamma_3 \& D) \supset A$

4. $\wedge \wedge \Gamma_1 \vdash C \vee D$ 1/Teor. da Dedução

5. $\wedge \wedge \Gamma_2 \vdash C \supset A$ 2/Teor. da Dedução

6. $\wedge \wedge \Gamma_3 \vdash D \supset A$ 3/Teor. da Dedução

7. $\vdash (C \supset A) \supset ((D \supset A) \supset ((C \vee D) \supset A))$ Post. 9

8. $\wedge \wedge \Gamma_2 \vdash (D \supset A) \supset ((C \vee D) \supset A)$ 5, 7/Post. 3 e Teor. da Dedução

9. $\wedge \wedge \Gamma_2, \wedge \wedge \Gamma_3 \vdash (C \vee D) \supset A$ 6, 8/Post. 3 e Teor. da Dedução

10. $\wedge \wedge \Gamma_1, \wedge \wedge \Gamma_2, \wedge \wedge \Gamma_3 \vdash A$ 4, 9/Post. 3 e Teor. da Dedução

11. $\wedge \wedge \Gamma_1, \wedge \wedge \Gamma_2 \vdash \wedge \wedge \Gamma_3 \supset A$ 10/Teor. da Dedução

12. $\wedge \wedge \Gamma_1 \vdash \wedge \wedge \Gamma_2 \supset (\wedge \wedge \Gamma_3 \supset A)$ 11/Teor. da Dedução

13. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset (\wedge\wedge\Gamma_2 \supset (\wedge\wedge\Gamma_3 \supset A))$ 12/Teor. da Dedução

14. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset ((\wedge\wedge\Gamma_2 \& \wedge\wedge\Gamma_3) \supset A)$ 13/Teor. da Dedução

15. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_1 \& (\wedge\wedge\Gamma_2 \& \wedge\wedge\Gamma_3)) \supset A$ 14/Teor. da Dedução

16. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A$ de 15, pois a conjunção de todas as suposições abertas de Π é $\wedge\wedge\Gamma$.

Caso 5. $r(\Pi)$ é $\supset I$. A é $A_1 \supset A_2$. Pela hipótese da indução, em C_ω, $\wedge\wedge\Gamma \supset A_2$. Portanto,

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_2$

2. $\vdash A_2 \supset (A_1 \supset A_2)$ Post. 1

3. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset A_2) \supset ((\wedge\wedge\Gamma \supset (A_2 \supset (A_1 \supset A_2))) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)))$ Post. 2

4. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_2 \supset (A_1 \supset A_2))) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2))$ 1, 3/Post. 3

5. $\vdash (A_2 \supset (A_1 \supset A_2)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_2 \supset (A_1 \supset A_2)))$ Post. 1

6. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_2 \supset (A_1 \supset A_2))$ 2, 5/Post. 3

7. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)$ 4, 6/Post. 3.

Caso 6. $r(\Pi)$ é $\supset E$, e A é A_2. Pela hipótese da indução, em C_ω, $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_1$ e $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)$. Logo,

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_1$

2. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)$

3. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset A_1) \supset ((\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A_2))$ Post. 2

4. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset (A_1 \supset A_2)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A_2)$ 1, 3/Post. 3

5. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A_2$ 2, 4/Post. 3.

Caso 7. $r(\Pi)$ é $\neg\neg E$. Pela hipótese da indução, em C_ω, $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset \neg\neg A$. Logo,

1. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset \neg\neg A$

2. $\vdash \neg\neg A \supset A$ Post. 11

3. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset \neg\neg A) \supset ((\wedge\wedge\Gamma \supset (\neg\neg A \supset A)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A))$ Post. 2

4. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma \supset (\neg\neg A \supset A)) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset A)$ 1, 3/Post. 3

5. $\vdash (\neg\neg A \supset A) \supset (\wedge\wedge\Gamma \supset (\neg\neg A \supset A))$ Post. 1

6. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset (\neg\neg A \supset A)$ 2, 5/Post. 3

7. $\vdash \wedge\wedge\Gamma \supset A$ 4, 6/Post. 3.

Caso 8. $r(\Pi)$ é *neg* e Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}[B] \\ \Pi_1 \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg B] \\ \Pi_2 \\ A\end{matrix}}{A}\,{\scriptstyle neg}\ .$$

Pela hipótese da indução, tem-se: $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_1 \& B) \supset A$ e $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_2 \& \neg B) \supset A$, em C_ω.

Ora, daí obtém-se:

1. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_1 \& B) \supset A$

2. $\vdash (\wedge\wedge\Gamma_2 \& \neg B) \supset A$

3. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_1 \supset (B \supset A)$ 1/Teor. da Dedução

4. $\vdash \wedge\wedge\Gamma_2 \supset (\neg B \supset A)$ 2/Teor. da Dedução

5. $\wedge\wedge\Gamma_1 \vdash B \supset A$ 3/Teor. da Dedução

6. $\wedge\wedge\Gamma_2 \vdash \neg B \supset A$ 4/Teor. da Dedução

7. $\vdash (B \supset A) \supset ((\neg B \supset A) \supset ((B \vee \neg B) \supset A))$ Post. 9

8. $\bigwedge\bigwedge\Gamma_1 \vdash (\neg B \supset A) \supset ((B \vee \neg B) \supset A)$ 5, 7/Post. 3 e Teor. da Dedução

9. $\bigwedge\bigwedge\Gamma_1, \bigwedge\bigwedge\Gamma_2 \vdash (B \vee \neg B) \supset A$ 6, 8/Post. 3 e Teor. da Dedução

10. $\vdash B \vee \neg B$ Post. 10

11. $\bigwedge\bigwedge\Gamma_1, \bigwedge\bigwedge\Gamma_2 \vdash A$ 9, 10/Post. 3 e Teor. da Dedução

12. $\bigwedge\bigwedge\Gamma_1 \vdash \bigwedge\bigwedge\Gamma_2 \supset A$ 11/Teor. da Dedução

13. $\vdash \bigwedge\bigwedge\Gamma_1 \supset (\bigwedge\bigwedge\Gamma_2 \supset A)$ 12/Teor. da Dedução

14. $\vdash (\bigwedge\bigwedge\Gamma_1 \& \bigwedge\bigwedge\Gamma_2) \supset A$ 13/Teor. da Dedução

15. $\vdash \bigwedge\bigwedge\Gamma \supset A$ pois, $\bigwedge\bigwedge\Gamma$ é a conjunção de todas as suposições abertas de Π. $\square$

Corolário 3.5 $\vdash A$, *em* NNC_ω, *então* $\vdash A$, *em* C_ω.

Demonstração. Conseqüência imediata do Lema. $\square$

Teorema 3.6 $\Gamma \vdash A$, *em* C_ω, *se e somente se* $\Gamma \vdash A$, *em* NNC_ω.

Demonstração. Imediata, a partir dos Lemas 3.2 e 3.4. $\square$

Corolário 3.7 $\vdash A$, *em* C_ω, *se e somente se* $\vdash A$, *em* NNC_ω.

Demonstração. Imediata, a partir dos Corolários 3.3 e 3.5. $\square$

3.2 Derivações Normais em NNC_ω

3.2.1 Definições

As definições seguintes esclarecem a terminologia e caracterizam situações que permitem estabelecer um teorema de normalização para NNC_ω. A definição de derivação normal não se afasta da usual, embora o tratamento dispensado à negação exija cuidados especiais. O que se prepara são os passos para reduzir o grau de qualquer derivação que contenha pelo menos um segmento máximo a uma derivação de grau zero da mesma fórmula final.

Definição 3.8 *$g(A)$ denota o* **grau da fórmula** *A e*

1. *se A é uma fórmula atômica, $g(A) = 1$;*

2. *se A é $\neg B$, $g(A) = g(B) + 1$;*

3. *se A é $B\&C$, $B \vee C$, ou $B \supset C$, $g(A) = g(B) + g(C) + 1$.*

Definição 3.9 *Uma* **linha** *em uma derivação Π é uma seqüência de fórmulas de Π, A_1, A_2, ..., A_n, tal que:*

1. *A_1 é uma fórmula inicial de Π;*

2. *A_i ocorre imediatamente acima de A_{i+1}, para $1 < i < n$; e*

3. *A_n é a fórmula final de Π.*

Definição 3.10 *Um* **segmento**, *σ, em uma derivação Π, é uma seqüência A_1, A_2, ..., A_n de ocorrências consecutivas da mesma fórmula em uma linha de Π, tal que:*

1. *A_1 não é conseqüência de uma aplicação de $\vee E$ ou de neg;*

2. *A_i, para cada $i < n$, se A_i é uma premissa de neg ou uma premissa menor de uma aplicação de $\vee E$, então A_{i+1} é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de A_i; e*

3. A_n *não é uma premissa de neg, nem uma premissa menor de uma aplicação de* $\vee E$.

Definição 3.11 *O* **grau de um segmento** σ, $g(\sigma)$, *é igual ao grau da fórmula que ocorre em* σ.

Definição 3.12 σ *é um* **segmento máximo** *em uma derivação* Π, *se e somente se:*

1. σ *começa com a conclusão de uma introdução e termina com a premissa maior de uma eliminação; ou*

2. σ *contém uma fórmula* A_i *que é conclusão de uma* $\vee E$ *e uma fórmula* A_j, $(i < j)$ *que é premissa maior de uma eliminação; ou*

3. σ *contém uma fórmula* A_i *que é conclusão de uma aplicação de neg e uma fórmula* A_j, $(i < j)$ *que é premissa maior de uma eliminação.*

Observe-se que estas definições de segmento e segmento máximo especificam casos de ocorrência da regra *neg*, que se pode considerar a regra característica deste sistema.

Definição 3.13 $g(\Pi)$ *denota o* **grau da derivação** Π, *e*

1. *se* Π *não contém segmento máximo,* $g(\Pi) = 0$; *e*

2. *se* Π *contém os segmentos máximos* $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, $g(\Pi) = \max(g(\sigma_i))$, *para* $1 \leq i \leq n$.

Definição 3.14 Π *é uma* **derivação normal** *se e somente se* $g(\Pi) = 0$.

Definição 3.15 Π *é uma* **derivação crítica** *se e somente se:*

1. *a fórmula final de* Π *é obtida por eliminação; e*

2. *a premissa maior desta eliminação é fórmula de um segmento máximo; e*

3. toda subderivação própria de Π *tem grau estritamente menor que* $g(\Pi)$.

Definição 3.16 Π' *é uma* **redução da derivação** Π *se e somente se* Π *contém uma subderivação da forma de uma das derivações* Σ_i *(para* $i = 1$*, 2, ..., 6) seguintes e* Π' *difere de* Π *por conter no lugar de* Σ_i *a subderivação* Σ_i' *correspondente. (Diz-se, também,* Π *reduz-se a* Π'*, cuja notação será* $\Pi \Longrightarrow \Pi'$.)

1. &-redução:

$$\Sigma_1 : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2\\ A_1 & A_2\end{matrix}}{A_1\&A_2}\,\&I}{A_i}\,\&E \qquad \Longrightarrow \quad \Sigma_1' : \begin{matrix}\Pi_i\\ A_i\end{matrix} \quad (i = 1 \text{ ou}2).$$

2. $\vee$*-redução:*

$$\Sigma_2 : \quad \dfrac{\vee I\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_3\\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2} \quad \begin{matrix}[A_1]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_2]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E \qquad \Longrightarrow \quad \Sigma_2' : \begin{matrix}\Pi_3\\ A_i\\ \Pi_i\\ C\end{matrix} \quad (i = 1 \text{ ou}2).$$

3. $\supset$*-redução:*

$$\Sigma_3 : \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}\supset I}{B}\supset E \qquad \Longrightarrow \quad \Sigma_3' : \begin{matrix}\Pi_1\\ [A]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}\,.$$

4. $\vee E$*-redução:*

$$\Sigma_4 : \quad \dfrac{\vee E\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_3\\ A_1 \vee A_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_1]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_2]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \begin{matrix}\Pi_4\\ D\end{matrix}}{E}\,ELIM \qquad \Longrightarrow$$

$$\Sigma_4' : \dfrac{\begin{matrix}\Pi_3 \\ A_1 \vee A_2\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A_1] \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_4 \\ D\end{matrix}}{E} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A_2] \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_4 \\ D\end{matrix}}{E}\, ELIM}{E} \vee E\,.$$

5. *neg-redução:*

$$\Sigma_5 : \dfrac{neg\, \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A] \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix}}{C} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ D\end{matrix}}{E}\, ELIM \qquad \Longrightarrow$$

$$\Sigma_5' : \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ D\end{matrix}}{E} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ D\end{matrix}}{E}\, ELIM}{E}\, neg\,.$$

6. *$\vee E$ (redundante)-redução*[3]*:*

$$\Sigma_6 : \dfrac{\begin{matrix}\Pi_3 \\ A_1 \vee A_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}A_1 \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}A_2 \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix}}{C} \vee E \Longrightarrow \Sigma_6' : \begin{matrix}A_i \\ \Pi_i \\ C\end{matrix} (i = 1 \text{ ou } 2).$$

Definição 3.17 *Uma* **seqüência de redução** *de* Π *é uma seqüência de derivações* Π_1, Π_2, ..., Π_n, *tal que* Π_1 *é* Π *e, para* $i < n$, $\Pi_i \Longrightarrow \Pi_{i+1}$.

Definição 3.18 Π *é* **normalizável** *se* Π *pertence a uma seqüência de redução* Π_1, Π_2, ..., Π_n, *n é finito* e Π_n *é normal.*

[3]Obs.: Este é o caso de aplicação de $\vee E$ sem eliminação de hipóteses.

Definição 3.19 *Uma seqüência de fórmulas* $A_1, A_2, ..., A_n$ *é um* **caminho**, π*, numa derivação* Π*, se e somente se:*

1. A_1 *é uma fórmula inicial de* Π *que não foi descarregada por uma aplicação de* $\vee E$*: e*

2. A_i*, para cada* $i < n$*, não é a premissa menor de uma aplicação de* $\supset E$ *e:*

   (a) *ou* A_i *não é a premissa maior de uma aplicação de* $\vee E$ *e* A_{i+1} *é a ocorrência da fórmula imediatamente abaixo de* A_i*, ou*

   (b) A_i *é a premissa maior de uma aplicação de* $\vee E$ *e* A_{i+1} *é uma suposição fechada por esta aplicação de* $\vee E$*, em* Π*; e*

3. A_n *é a premissa menor de uma aplicação de* $\supset E$*, ou a fórmula final de* Π*, ou a premissa maior de uma aplicação de* $\vee E$ *que não descarrega suposições.*

Definição 3.20 *Um* **caminho principal** *de* Π *é um caminho que contém a fórmula final de* Π.

3.2.2 Reduções

Aqui se preparam as reduções, i. e., como são transformadas as derivações que contêm ocorrências de segmentos máximos (fórmulas máximas, corte, redundâncias, em outras terminologias). O objetivo é preparar a prova dos primeiros resultados fundamentais: a normalização e a validade do princípio de subfórmula.

Lema 3.21 *Sejam*

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} A \\ \Pi_2 \end{array}$$

derivações de graus k e m, respectivamente, e $g(A) = n$. Então a derivação Σ seguinte:

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \\ [A] \\ \Pi_2 \end{array}$$

é tal que $g(\Sigma) \leq \max(k, m, n)$.

Demonstração. O grau de Σ é igual ao grau do segmento máximo de maior grau que ocorre em Σ, se esta derivação não é normal. Ora, qualquer segmento máximo que ocorra em Σ ou contém A ou é segmento máximo das subderivações Π_1 ou Π_2. Portanto, $g(\Sigma) = \max(g(\Pi_1), g(\Pi_2), g(A))$. Se $k = m = 0$ e A não é fórmula de um segmento máximo de Σ, $g(\Sigma) = 0$, i.e., $g(\Sigma) < \max(g(\Pi_1), g(\Pi_2), g(A))$. Logo, $g(\Sigma) \leq \max(k, m, n)$. □

Lema 3.22 *Se* Π *reduz-se a* Π'*, então* $g(\Pi') \leq g(\Pi)$.

Demonstração. Indução sobre $g(\Pi)$, aplicando-se as reduções da Definição 3.16 e o Lema 3.21. Quando a redução gerar novo segmento máximo, verifique-se que o grau deste segmento é menor que o do segmento reduzido, seja aquele um novo segmento máximo ou um já presente na primeira derivação. □

Lema 3.23 *(Crítico) Se* Π *é uma derivação crítica e* $g(\Pi) = n$*, então existe uma derivação* Π' *tal que* Π *reduz-se a* Π' *e* $g(\Pi') < n$.

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$.

Se $l(\Pi) = 1$, não há derivação crítica. Se $l(\Pi) = m > 1$, há 3 casos a examinar.

CASO 1. O segmento máximo de maior grau que ocorre em Π contém a conclusão de uma introdução. Portanto, Π' tem a forma de uma das $\Sigma_i'(i = 1, 2, 3)$ da Definição 3.16. Usando-se a Definição 3.15 e o Lema 3.22, prova-se que $g(\Pi') < n$.

CASO 2. O segmento máximo de maior grau de Π contém a conclusão de uma $\vee E$. Logo, sendo Π como Σ_4 (da Definição 3.16), considere-se a redução Σ_4'. Ora, pelo Lema 3.22, $g(\Sigma_4') \leq n = g(\Pi)$. Portanto, se $g(\Sigma_4') < n$, faça-se Π' igual a Σ_4'. Por outro lado, se $g(\Sigma_4') = n$, há 2 subcasos a considerar.

Subcaso 1. Nas suas duas ocorrências em Σ'_4, C é fórmula de um segmento máximo.

Ora,

$$ELIM\frac{\begin{array}{c}[A_1]\\ \Pi_1\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array}}{E} \qquad \text{e} \qquad \frac{\begin{array}{c}[A_2]\\ \Pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array}}{E}LIM$$

são derivações críticas e cada uma é de comprimento menor que Π. Pode-se, portanto, aplicar a hipótese de indução a estas derivações, obtendo-se reduções de grau menor que $g(\Pi)$. Sejam Σ' e Σ'' estas reduções das derivações à esquerda e à direita, respectivamente.

Faça-se Π' igual a

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_3\\ A_1 \vee A_2\end{array} \quad \Sigma' \quad \Sigma''}{E} \vee E$$

Subcaso 2. A ocorrência de C mais à esquerda (ou mais à direita) é fórmula de um segmento máximo de Σ'_4. Como as derivações

$$ELIM\frac{\begin{array}{c}A_i\\ \Pi_i\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array}}{E} \quad (i = 1, 2)$$

são derivações críticas de comprimento menor que $l(\Pi)$, pela hipótese da indução, estas derivações reduzem-se a derivações Σ' e Σ'' de grau menor que $g(\Sigma'_4)$. Logo, pode-se fazer Π' igual a

$$\frac{A_1 \vee A_2 \quad \begin{array}{c}\Sigma'\\ E\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}A_2\\ \Pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ D\end{array}}{E}ELIM}{E} \vee E$$

ou igual a

$$\dfrac{A_1 \vee A_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ \Pi_1 \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Pi_4 \\ D \end{matrix}}{E}ELIM \qquad \begin{matrix} \Sigma'' \\ E \end{matrix}}{E} \vee E$$

ambas de grau menor que $g(\Pi)$.

CASO 3. O segmento máximo de maior grau de Π é conclusão de uma *neg*. Logo, sendo Π como Σ_5 da Definição 3.16, considere-se a redução Σ_5'.

Subcaso 1. Suponha que C, nas suas duas ocorrências, é fórmula de um segmento máximo. Sejam as derivações:

$$\Sigma_1'' : \dfrac{\begin{matrix} [A] \\ \Pi_1 \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Sigma \\ D \end{matrix}}{E}ELIM \qquad \text{e} \qquad \Sigma_2'' : \dfrac{\begin{matrix} [\neg A] \\ \Pi_2 \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Sigma \\ D \end{matrix}}{E}ELIM$$

que são derivações críticas de comprimento menor que $l(\Pi)$. Logo, pela hipótese da indução, para $i = 1, 2$, existem Π_i' tais que Σ_i'' reduzem-se a Π_i' e $g(\Pi_i') < g(\Sigma_i'') = n$.

Seja Π' a derivação

$$\dfrac{\Pi_1' \qquad \Pi_2'}{E}$$

que é claramente, uma redução de Π. Ora, como E não é fórmula de segmento máximo, $g(\Pi') < n$.

Subcaso 2. Suponha que o C à esquerda (ou à direita) de Σ_5' é fórmula de um segmento máximo. Assim, $\Sigma_i''(i = 1,\ 2)$ é derivação crítica e, como $l(\Sigma_i'') < l(\Pi)$, pela hipótese da indução, existe Π_i' à qual se reduz Σ_i'' e $g(\Pi_i') < g(\Sigma_i'') = n$. Portanto, a derivação

$$\dfrac{\Pi_1' \qquad \Sigma_2''}{E} \qquad \text{ou a derivação} \qquad \dfrac{\Sigma_1'' \qquad \Pi_2'}{E}$$

é a derivação Π' procurada, que é uma redução de Π, tal que $g(\Pi') < g(\Pi) < n$.

Subcaso 3. C não é fórmula de segmento máximo em Σ'_5. Pela hipótese da indução, as derivações Σ''_i, para $i = 1, 2$, são tais que $g(\Sigma''_i) < g(\Pi)$. Logo, sendo Π' a derivação

$$\frac{\Sigma''_1 \qquad \Sigma''_2}{E},$$

$g(\Pi') < n$. $\square$

Lema 3.24 *(Principal) Dada uma derivação* Π *de grau* n*, existe uma derivação, sem suposições adicionais e com a mesma fórmula final,* Π'*, tal que* Π *se reduz a* Π' *e* $g(\Pi') < n$*.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$.

Se $l(\Pi) = 1$, não é redutível.

Se $l(\Pi) = n > 1$, há 2 casos:

CASO 1. A última regra de Π é uma introdução, ou *neg*.

Sendo Π da forma

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{A}$$

pela hipótese da indução, temos que $\Pi_i (i = 1, 2)$ se reduz a Π'_i e $g(\Pi'_i) < n$.

Sendo Π' a derivação

$$\frac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{A}$$

à qual reduz-se Π, temos que $g(\Pi') = \max(g(\Pi'_i)) < n$, pois A não ocorre em um segmento máximo.

CASO 2. A última regra de Π é uma eliminação.

Seja a derivação Π seguinte:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\Pi_1 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A & B & C\end{array}}{D}$$

Pela hipótese da indução, para cada uma das Π_1 e $\Sigma_i (i = 1, 2)$ existe uma derivação correspondente Π'_1, Σ'_i, às quais aquelas se reduzem, de grau menor que n. Seja Σ a derivação:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\Pi'_1 & \Sigma'_1 & \Sigma'_2 \\ A & B & C\end{array}}{D}$$

à qual se reduz Π e, pelo Lema 3.22, é tal que $g(\Sigma) \leq n$.

Se $g(\Sigma) < n$, faz-se Π' igual a Σ e obtém-se o desejado.

Se $g(\Sigma) = n$, Σ é uma derivação crítica (tendo A, que ocorre em um segmento máximo, como premissa maior de uma eliminação). Logo, pelo Lema 3.23, existe uma derivação Π' à qual se reduz Σ e $g(\Pi') < n$. Portanto, Π reduz-se Π' e $g(\Pi') < n$. □

3.2.3 Normalização

Teorema 3.25 *Toda derivação Π de NNC_ω reduz-se a uma derivação normal Π', sem novas suposições e com a mesma fórmula final.*

Demonstração. Indução sobre $g(\Pi)$.

Se $g(\Pi) = 0$, Π é normal.

Se $g(\Pi) = n > 0$, pelo Lema 3.24, existe uma derivação Σ tal que $g(\Sigma) < n$ e Π reduz-se a Σ. Pela hipótese da indução, existe uma derivação normal Π' à qual se reduz Σ. Logo, Π reduz-se a Π', que é normal. □

Teorema 3.26 *(Forma das Derivações Normais) Sejam Π uma derivação normal em NNC_ω, π um caminho em Π e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ a seqüência dos segmentos de π. Então, há um segmento σ_i, chamado o* **segmento mínimo** *de π, que separa duas partes (que podem ser vazias) de π, chamadas a E-parte e a I-parte de π, com as propriedades:*

1. *para $j < i$(E-parte), σ_j contém a premissa maior de uma aplicação de uma regra de eliminação ou de uma premissa de neg; e*

2. *σ_i, desde que $i \neq n$, contém a premissa de uma aplicação de uma regra de introdução;*

3. *para cada $\sigma_k(i < k < n)$ (I-parte), σ_k contém a premissa de uma aplicação de uma regra de introdução.*

Demonstração. Como Π é normal, nenhum caminho de Π contém um segmento máximo. Daí segue-se que em todo caminho π de Π :

1. toda aplicação de eliminação precede qualquer aplicação de introdução;

2. nenhuma aplicação de $\vee E$ ou de *neg* é seguida de eliminação.

Portanto, se há um segmento σ_i que é o primeiro segmento que inicia com a conclusão de $\&E$, ou de $\supset E$, com premissa de *neg*, ou premissa menor de $\vee E$, e termina com a premissa de uma introdução, abaixo dele (i.e., seguindo-o) não há eliminações. Logo, σ_i é o segmento mínimo de π e: acima dele (i.e., precedendo-o) há uma E-parte que só contém eliminações ou *neg* (ou é vazia) e abaixo dele (i.e., seguindo-o), há uma I-parte que só contém introduções (ou é vazia). □

Corolário 3.27 *Todo caminho de uma derivação normal é tal que:*

1. *na E-parte, a fórmula que ocorre em um segmento σ_{j+1} é subfórmula da que ocorre em σ_j;*

2. *na I-parte, a fórmula que ocorre em um segmento σ_j é subfórmula da que ocorre em σ_{j+1}.*

Demonstração.

1. E-parte. A simples inspeção de *neg* e das regras de eliminação é suficiente para para mostrar o resultado desejado, exceto no caso de $\vee E$, o que é garantido pelo item 2 da Definição 3.17.

2. I-parte. Imediata, a partir do exame das regras de introdução. □

Corolário 3.28 *(Princípio de Subfórmula) Toda fórmula de uma derivação normal de A a partir de Γ, é uma subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ.*

Demonstração. A usual. □

Corolário 3.29 *Toda derivação normal que termina em eliminação, tem somente premissas de eliminações em qualquer caminho principal.*

Demonstração. Decorre facilmente do item 1 do Teorema 3.26. □

Lema 3.30 *Toda derivação normal, Π, que termina em eliminação, é aberta no caminho principal e sua conclusão é subfórmula da fórmula inicial deste caminho.*

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$.
BASE. $l(\Pi) = 1$. Trivial. Toda fórmula é subfórmula de si mesma.
PASSO INDUTIVO. $l(\Pi) = n > 1$. Há quatro casos a considerar.
CASO 1. $r(\Pi)$ é $\&E$. Pela hipótese da indução, a subderivação determinada pela premissa desta aplicação de $\&E$ é aberta em um caminho principal cuja fórmula final é subfórmula de sua fórmula inicial. Como $\&E$ não descarrega hipóteses e a conclusão de uma $\&E$ é subfórmula de sua premissa, Π é aberta em um caminho principal e sua fórmula final é subfórmula da fórmula inical deste caminho.
CASO 2. $r(\Pi)$ é $\supset E$. Pela hipótese da indução, a subderivação determinada pela premissa maior desta aplicação de $\supset E$ é aberta em um caminho principal e essa premissa é subfórmula da fórmula inicial deste caminho. Como a conclusão de toda $\supset E$ é subfórmula de sua premissa maior e esta regra não descarrega hipóteses, Π satisfaz as condições do Lema.
CASO 3. $r(\Pi)$ é $\neg\neg E$. Segue da hipótese da indução, como nos casos anteriores.
CASO 4. $r(\Pi)$ é $\vee E$. Seja Π a derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \Pi_1 \\ A \vee B \end{matrix} \quad \begin{matrix} [A] \\ \Pi_2 \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [B] \\ \Pi_3 \\ C \end{matrix}}{C} \vee E$$

Pela hipótese da indução, as subderivações determinadas pelas premissas desta aplicação, indicada, de $\vee E$ satisfazem as condições do Lema.

Subcaso 1. O caminho principal de Π contém a hipótese descarregada A. Pela hipótese da indução, C é subfórmula de A. Uma vez que A é subfórmula de $A \vee B$, C é subfórmula da fórmula inicial do caminho principal de Π que contém $A \vee B$, e essa fórmula não é uma hipótese descarregada.

Subcaso 2. O caminho principal de Π não contém a hipótese decarregada A. Logo, contém a hipótese B, e tudo se passa como no subcaso anterior. □

3.2.4 Estudo da Negação

Aqui são destacadas as principais características do comportamento de $\neg$. O objetivo principal é mostrar que, apesar de sua definição anômala, a manipulação apropriada da negação garante a preservação do princípio de subfórmula.

Corolário 3.31 *Toda derivação normal de fórmula negada que termina em eliminação é aberta em um caminho principal e sua conclusão é subfórmula da fórmula inicial deste caminho.*

Demonstração. Conseqüência óbvia do Lema 3.30. □

Lema 3.32 *Toda derivação normal de fórmula negada termina com neg ou com eliminação.*

Demonstração. Não há regra de introdução de negação. □

Lema 3.33 *Toda derivação normal de fórmula negada tem no caminho principal somente premissas de eliminações.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Lema 3.30 e do Teorema 3.26. □

Lema 3.34 *Seja* Π *uma derivação normal de uma fórmula negada, tal que* $r(\Pi) = neg$. *Então,* Π *tem um caminho aberto e sua conclusão é subfórmula da fórmula inicial deste caminho.*

Demonstração. Há três casos a analisar, considerando a forma geral de Π

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1 \\ \neg C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg A] \\ \Pi_2 \\ \neg C\end{matrix}}{\neg C}\, neg.$$

CASO 1. Suponha que A é C. Π toma a forma

$$\dfrac{\begin{matrix}[C] \\ \Pi_1 \\ \neg C\end{matrix} \quad \neg C}{\neg C}\, neg\ .$$

Pelos Lemas 3.32 e 3.30, a subderivação

$$\begin{matrix}C \\ \Pi_1 \\ \neg C\end{matrix}$$

é aberta em um caminho principal e sua conclusão é subfórmula da fórmula inicial deste caminho. Ora, como $\neg C$ não é subfórmula de C, há um caminho principal aberto, cuja fórmula inicial é diferente de C. Esta mesma fórmula, que não é descarregada pela aplicação de *neg* indicada, pertence a um caminho que é aberto em Π, conforme o Lema.

CASO 2. Suponha que A é $\neg C$. Π assume a forma:

$$\dfrac{\neg C \qquad \begin{matrix}[\neg\neg C] \\ \Pi_2 \\ \neg C\end{matrix}}{\neg C}\, neg.$$

Pelos Lemas 3.32 e 3.30, a subderivação

$$\begin{array}{c} \neg\neg C \\ \Pi_2 \\ \neg C \end{array}$$

é aberta em um caminho principal e sua conclusão é subfórmula da fórmula inicial deste caminho. Ora, como neste caminho só há premissas de eliminações e $\neg\neg C$ só pode ser premissa de $\neg\neg E$, gerando C, fórmula da qual $\neg C$ não é subfórmula (o que é imposto pelo Corolário 3.27, 1), há uma fórmula aberta diferente de $\neg\neg C$ que é fórmula inicial de um caminho principal desta subderivação, da qual $\neg C$ é subfórmula e que não é, portanto, descarregada pela aplicação de *neg* indicada em Π.

CASO 3. Suponha que A e $\neg A$ são diferentes de $\neg C$. Pelos Lemas 3.32 e 3.30, Π_1 e Π_2 têm, cada uma, um caminho principal aberto e $\neg C$ é subfórmula da fórmula inicial de cada um destes caminhos. Se as fórmulas iniciais destes caminhos são diferentes de A e de $\neg A$, segue-se o Lema, e não há outro caso. Contrariamente, suponha que as fórmulas iniciais destes caminhos são, precisamente, A e $\neg A$. Como $\neg C$ é subfórmula de A e de $\neg A$ (Corolário 3.27) e $\neg C$ é gerada por eliminação (Lema 3.32), vê-se, facilmente, que de A ou de $\neg A$ (daquela fórmula que for antecedida por $2n+1$ ocorrências de $\neg$, para $n \geq 0$) não se pode gerar $\neg C$, pois toda eliminação de $\neg$ é somente feita aos pares, pela regra $\neg\neg E$. Portanto, vale o Lema. □

Teorema 3.35 *Toda derivação normal de $\neg A$ é aberta e $\neg A$ é subfórmula desta hipótese não eliminada.*

Demonstração. Imediata, a partir dos Lemas 3.32, 3.30 e 3.34. □

Corolário 3.36 *Nenhuma fórmula da forma $\neg A$ é teorema de NNC_ω.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.35 e da Definição de Teorema. □

Corolário 3.37 $\neg(A\&\neg A)$ *não é teorema de NNC_ω.*

Corolário 3.38 *NNC_ω é consistente.*

Demonstrações. Seguem-se diretamente do apresentado. □

3.3 Normalização Forte em NNC_ω

Procede-se de acordo com a técnica apresentada em [40], conforme aplicada em [54] e [51], que serão referidos, quando necessário, para evitar desenvolvimentos longos e não originais.

É a seguinte a estrutura da prova de Normalização Forte de NNC_ω que será apresentada:

1. descrição do sistema dedutivo NNC_ω^{aum} - NNC_ω aumentado - e de uma relação binária entre derivações — $\Longrightarrow_{aum}$ — que será chamada *redução aumentada*, tal que:

    1.1) se $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$,

    1.2) NNC_ω^{aum} é normalizável, e

    1.3) NNC_ω^{aum} tem a propriedade Church-Rosser;

2. prova da propriedade 1.1;

3. indicação das provas das propriedades 1.2 e 1.3;

4. prova do Teorema de Normalização Forte para NNC_ω^{aum};

5. definição de um mapeamento de NNC_ω em NNC_ω^{aum}; e

6. prova do Teorema de Normalização Forte para NNC_ω.

3.3.1 NNC_ω^{aum} - Caracterização

A linguagem subjacente a NNC_ω^{aum} é a mesma de NNC_ω. O cálculo NNC_ω^{aum} tem regras de inferência das mesmas formas que as de NNC_ω (e tudo o que diz respeito às derivações de NNC_ω se aplica a NNC_ω^{aum}), mais as seguintes formas de **axiomas**, onde A é uma fórmula qualquer e B é uma fórmula atômica (i. e., uma variável proposicional):

$$1)\ A \supset (B \supset B)$$
$$2)\ B \supset B,$$

que ocorrem nas derivações como:

$$\dfrac{}{A \supset (B \supset B)}Ax$$

ou

$$\dfrac{}{B \supset B}Ax.$$

Observe-se que estes axiomas são, claramente, fórmulas demonstráveis em NNC_ω, portanto em NNC_ω^{aum}.

Definição 3.39 *Seja B uma fórmula atômica. Define-se:*
Π_{AB} *como a derivação*

$$\dfrac{A \qquad \dfrac{}{A \supset (B \supset B)}Ax}{B \supset B} \supset E;$$

Π_B *como a derivação*

$$\dfrac{}{B \supset B}Ax.$$

Definição 3.40 *Os* **aumentos** α_{AB} *e* α_B *são os seguintes:*

1. *se B é uma fórmula atômica, α_{AB} é:*

$$\dfrac{\supset E\dfrac{\supset E\dfrac{B \qquad \begin{matrix} A \\ \Pi_{AB} \\ B \supset B \end{matrix}}{B} \qquad \begin{matrix} A \\ \Pi_{AB} \\ B \supset B \end{matrix}}{B} \qquad \begin{matrix} A \\ \Pi_{AB} \\ B \supset B \end{matrix}}{B} \supset E$$

α_B *é:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \quad \begin{matrix}\Pi_B \\ B \supset B\end{matrix}}{B}\supset E \qquad \begin{matrix}\Pi_B \\ B \supset B\end{matrix}}{B}\supset E \qquad \begin{matrix}\Pi_B \\ B \supset B\end{matrix}}{B}\supset E$$

Adota-se a seguinte notação, para α_{AB} *e* α_B :

α_{AB} :

$$\begin{matrix} B \quad A \\ \vdots(\alpha_{AB}) \\ B \end{matrix};$$

α_B :

$$\begin{matrix} B \\ \vdots(\alpha_{B}) \\ B \end{matrix}.$$

2. se B *é* $C\&D$, α_{AB} *é:*

$$\cfrac{\begin{matrix} \cfrac{C\&D}{C}\&E \quad A \\ \vdots\ (\alpha_{AC}) \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cfrac{C\&D}{D}\&E \quad A \\ \vdots\ (\alpha_{AD}) \\ D \end{matrix}}{C\&D}\&I$$

e α_B *é:*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{C\&D}{C}\,{\scriptstyle \&E} \\ \vdots\ (\alpha_C) \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{C\&D}{D}\,{\scriptstyle \&E} \\ \vdots\ (\alpha_D) \\ D\end{array}}{C\&D}\,{\scriptstyle \&I}\ .$$

3. se B é $C \vee D$, α_{AB} é:

$$\dfrac{C \vee D \qquad \begin{array}{c} C \quad A \\ \vdots\ (\alpha_{AC}) \\ \dfrac{C}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee I}\end{array} \qquad \begin{array}{c} D \quad A \\ \vdots\ (\alpha_{AD}) \\ \dfrac{D}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee I}\end{array}}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee E}\ .$$

e α_B é:

$$\dfrac{C \vee D \qquad \begin{array}{c} C \\ \vdots\ (\alpha_{C}) \\ \dfrac{C}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee I}\end{array} \qquad \begin{array}{c} D \\ \vdots\ (\alpha_{D}) \\ \dfrac{D}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee I}\end{array}}{C \vee D}\,{\scriptstyle \vee E}$$

4. se B é $C \supset B$, α_{AB} é:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{C \qquad C \supset D}{D}\,{\scriptstyle \supset E} \quad A \\ \vdots(\alpha_{AD}) \\ D\end{array}}{C \supset D}\,{\scriptstyle \supset I}$$

e α_B é:

$$
\supset E \frac{C \quad C \supset D}{D}
$$

$$
\vdots (\alpha_D)
$$

$$
\supset I \frac{D}{C \supset D} .
$$

De maneira análoga à que se utilizou pra NNC_ω, definem-se segmento, segmento máximo, grau de uma derivação e derivação normal.

Observe-se que todos os aumentos correspondem a acrescentar a uma derivação uma subderivação de comprimento igual $l(\alpha_{AB})$ ou igual a $l(\alpha_B)$, que, mais adiante, serão apresentados detalhadamente.

Definição 3.41 *Uma derivação Π_{AB} (ou Π_B) é uma* **aumentação imediata** *de Π se e somente se Π_{AB} (ou Π_B) é obtida de Π por substituição de algumas ocorrências de fórmulas B, em Π, por α_{AB} (ou α_B)*

Definição 3.42 *Uma derivação Π^* é uma* **aumentação** *de Π ($\Pi \longmapsto \Pi^*$) se existe uma seqüência $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n$ $(n \geq 1)$, tal que:*

1. Π_1 *é* Π;
2. Π_{i+1} *é uma aumentação imediata de* Π_i, *para* $1 \leq i \leq n$;
3. Π_n *é* Π^*.

Definição 3.43 *Uma ocorrência de A em Π é uma* **boa-fórmula para aumentação** *se:*

1. *A é fórmula atômica; ou*
2. *A é uma fórmula inicial de Π que não é premissa maior de uma eliminação; ou*
3. *A é conseqüência de $\&E$, $\supset E$ ou $\neg\neg E$ e não é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma eliminação.*

Lema 3.44 *Toda derivação Π que não contém aplicação de $\vee E$ ou de neg tem uma boa-fórmula para aumentação.*

Demonstração. Indução sobre o número de aplicações de regras de introdução.

BASE. Não há aplicação de introdução em Π. Logo, Π é da forma A e, neste caso, A é boa-fórmula para aumentação de acordo com o item 2 da definição; ou Π é da forma

$$\frac{\Pi_1}{A} * E$$

onde $*$ é $\&, \supset$ ou $\neg\neg$, caso em que A é boa-fórmula para aumentação, de acordo com o item 3 da Definição 3.43.

PASSO INDUTIVO. Se há qualquer aplicação de introdução e $r(\Pi)$ é uma eliminação, como no caso anterior, há uma boa-fórmula para aumentação. Se Π termina em introdução, i. e., Π é da forma

$$\frac{\Pi_1}{A} * I$$

onde $*$ é $\&, \supset$ ou $\vee$, pela hipótese da indução, há, em Π_1, uma boa-fórmula para aumentação, C. Se C é uma boa-fórmula para aumentação em Π_1, pela mesma razão, esta fórmula é uma boa-fórmula para aumentação de Π, também. □

Corolário 3.45 *Toda derivação* Π *tem uma boa-fórmula para aumentação.*

Dmonstração. Se Π não tem aplicação de $\vee E$ ou de neg, alcança-se o resultado pelo Lema 3.44. Se Π contém aplicações de $\vee E$ ou de neg, escolha-se a subderivação determinada pela conclusão da primeira aplicação de $\vee E$ ou de neg que não contenha ocorrência de $\vee E$ ou de neg na derivação de sua premissa (menor, no caso de $\vee E$) da esquerda. Esta derivação, pelo Lema 3.44, contém uma boa-fórmula para aumentação desta derivação, que, vê-se imediatamente, é uma boa-fórmula para aumentação de Π. □

3.3.2 Normalização Forte em NNC_ω^{aum}

Definição 3.46 *Π' é uma* **redução aumentada** *de Π ($\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$) se pelo menos uma subderivação de Π da forma Σ_i seguinte é substituída pela derivação Σ'_i correspondente* $(1 \leq i \leq 9)$*:*

1. *&-redução aumentada:*

$$\Sigma_1 : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A & B\end{array}}{A\&B}\,\&I}{A}\,\&E \quad \Longrightarrow_{aum} \Sigma'_1 : \quad \begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A & B \\ & \vdots(\alpha_{BA}) \\ & A\end{array} ;$$

$$\Sigma_2 : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A & B\end{array}}{A\&B}\,\&I}{B}\,\&E \quad \Longrightarrow_{aum} \Sigma'_2 : \quad \begin{array}{cc}\Pi_2 & \Pi_1 \\ B & A \\ & \vdots(\alpha_{AB}) \\ & B\end{array} .$$

2. *$\vee$-redução aumentada:*

$$\Sigma_3 : \quad \dfrac{\vee I\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad \begin{array}{c}[A] \\ \Pi_2 \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B] \\ \Pi_3 \\ C\end{array}}{C}\,\vee E \quad \Longrightarrow_{aum}$$

$$\Sigma'_3 : \quad \begin{array}{cc}\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} & \dfrac{\begin{array}{c}[B] \\ \Pi_3 \\ C\end{array}}{B \supset C}\supset I \\ \vdots(\alpha_{BA}) & \\ [A] & \\ \Pi_2 & \\ C. & \end{array}$$

$$\Sigma_4: \quad \dfrac{\vee I\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ B\end{matrix}}{A\vee B} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E \quad \Longrightarrow_{aum}$$

$$\Sigma_4': \quad \begin{matrix}\Pi_1\\ B\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{A\supset C}\supset I$$

$$\begin{matrix}\vdots(\alpha_{AB})\\ [B]\\ \Pi_2\\ C.\end{matrix}$$

3. $\supset$*-redução aumentada:*

$$\Sigma_5: \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\supset I}{B}\supset E \quad \Longrightarrow_{aum} \Sigma_5': \quad \begin{matrix}\Pi_1\\ A\\ \Pi_2 & \Pi_1\\ B & A\\ \vdots(\alpha_{AB})\\ B\end{matrix}\ .$$

4. $\vee E$*-redução aumentada:*

$$\Sigma_6: \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E \qquad \begin{matrix}\Pi_4\\ D\end{matrix}}{E}\,ELIM \quad \Longrightarrow_{aum}$$

$$\Sigma'_6 : \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi_4\\ D\end{matrix}}{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi_4\\ D\end{matrix}}{E}\,{\scriptstyle ELIM}}{E}\,{\scriptstyle \vee E} .$$

5. *neg-redução aumentada:*

$$\Sigma_7 : \quad \dfrac{{\scriptstyle neg}\,\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \begin{matrix}\Pi_3\\ D\end{matrix}}{E}\,{\scriptstyle ELIM} \qquad \Longrightarrow_{aum}$$

$$\Sigma'_7 : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi_3\\ D\end{matrix}}{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi_3\\ D\end{matrix}}{E}\,{\scriptstyle ELIM}}{E}\,{\scriptstyle neg} .$$

6. $\vee$-*redução aumentada (sem fechamento de hipótese):*

$$\Sigma_8 : \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}A\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\,{\scriptstyle \vee E} \qquad \Longrightarrow_{aum}$$

$$
\Sigma_8' : \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \Pi_4 \\ D \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \end{array}
&
\dfrac{\begin{array}{c} [B] \\ \Pi_3 \\ C \end{array}}{B \supset C}\,{\supset}I
\end{array}
\\
\vdots(\alpha_{BA}) \\
A
\end{array}
\\
\vdots\,(\alpha_{AD}) \\
D \\
\Pi_5 \\
C
\end{array}
$$

onde

$$
\begin{array}{c} A \\ \Pi_2 \\ C \end{array}
\quad \text{é} \quad
\begin{array}{c} A \\ \Pi_4 \\ D \\ \Pi_5 \\ C \end{array}
$$

e D é a primeira boa-fórmula para aumentação em Σ_8.

$$
\Sigma_9 : \quad
\dfrac{
{\vee}I\,\dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \end{array}}{A \vee B}
\qquad
\begin{array}{c} [A] \\ \Pi_2 \\ C \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} B \\ \Pi_3 \\ C \end{array}
}{C}\,{\vee}E
\quad \Longrightarrow_{aum}
$$

$$
\Sigma_9' : \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \Pi_4 \\ D \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Pi_1 \\ B \end{array}
&
\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \Pi_3 \\ C \end{array}}{A \supset C}\,{\supset}I
\end{array}
\\
\vdots(\alpha_{AB}) \\
B
\end{array}
\\
\vdots\,(\alpha_{AD}) \\
D \\
\Pi_5 \\
C
\end{array}
$$

onde

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ B & & \Pi_4 \\ \Pi_3 & \text{é} & D \\ C & & \Pi_5 \\ & & C \end{array}$$

e D é a primeira boa-fórmula para aumentação em Σ_9.

Observe-se que toda redução aumentada, enquanto elimina um segmento máximo, introduz na derivação em questão uma aumentação, o que redunda em aumento do comprimento da derivação original, ao mesmo tempo que reduz seu grau.

Lema 3.47 *Se $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$, então $l(\Pi) < l(\Pi')$.*

Demonstração. Ora, conforme a Definição 3.46, toda eliminação de segmento máximo em uma subderivação $\Sigma_i (1 \leq i \leq 9)$ leva ao acréscimo, em Σ'_i, de um aumento α_{AB} ou α_B, onde se vê, claramente, o incremento do comprimento da subderivação resultante, inclusive nos caos de $\vee E$ e de *neg*. Veja-se que os comprimentos de α_{AB} e de α_B, de acordo com a 3.40, são acrescentados ao comprimento das derivações em que são incluídos. □

Como valem as definições correspondentes, de maneira análoga à aplicada em NNC_ω, provam-se os seguintes resultados em NNC_ω^{aum} .

Lema 3.48 *Se*

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} A \\ \Pi_2 \end{array}$$

são derivações de graus k e m, respectivamente, e $g(A) = n$, então a derivação Σ :

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \\ [A] \\ \Pi_2 \end{array}$$

é tal que $g(\Sigma) \leq max\ (k, m, n)$.

Demonstação. De forma análoga à demonstração do Lema 3.21 de NNC_ω, o grau de Σ, $g(\Sigma)$, é igual ao grau do segmento máximo de maior grau que ocorre na derivação Σ, se esta derivação não é normal. Ora, qualquer segmento máximo que ocorra em Σ ou contém A ou é segmento máximo das subderivações Π_1 ou Π_2. Portanto, $g(\Sigma) = \max(g(\Pi_1), g(\Pi_2), g(A))$. Se $k = m = 0$ e A não é fórmula de um segmento máximo de Σ, $g(\Sigma) = 0$, i.e. $g(\Sigma) < \max(g(\Pi_1), g(\Pi_2), g(A))$. Logo, $g(\Sigma) \leq (k, m, n)$. □

Lema 3.49 *Se* $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$, *então* $g(\Pi') \leq g(\Pi)$.

Demonstação. Indução sobre $g(\Pi)$. Se $g(\Pi) = 0$, i.e., Π não contém segmento máximo, $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$ e $g(\Pi') = g(\Pi)$.

Se $g(\Pi) \geq 1$, como os aumentos, de acordo com a Definição 3.40, não geram segmentos máximos, a aplicação dos procedimentos de redução da Definição 3.46 ao segmento máximo de maior grau de Σ, por força do Lema 3.48, reduz o valor de $g(\Sigma)$. □

Lema 3.50 *Se* Π *é uma derivação crítica e* $g(\Pi) = n$, *então existe uma derivação* Π' *tal que* $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$ *e* $g(\Pi') < n$.

Demonstração. Indução sobre $l(\Pi)$, da mesma forma que a do Lema 3.23, tendo em vista que as aumentações, conforme a Definição 3.42 e as reduções aumentadas, de acordo com a Definição 3.46, não geram novos segmentos máximos. □

Lema 3.51 *Se* $g(\Pi) = n$, *então existe uma derivação, sem suposições adicionais e com a mesma fórmula final,* Π', *tal que* $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$ *e* $g(\Pi') < n$.

Demonstração. Aqui, repete-se uma demonstração análoga à do Lema correspondente de NNC_ω, o Lema 3.24.

Indução sobre $l(\Pi)$.

Se $l(\Pi) = 1$, não é redutível.

Se $l(\Pi) = n > 1$, há 2 casos:

CASO 1. A última regra de Π é uma introdução, ou *neg*.

Sendo Π da forma

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{A}$$

pela hipótese da indução, tem-se que há reduções aumentadas $\Pi_i'(i = 1, 2)$ para Π_i e $g(\Pi_i') < n$.

Sendo Π' a derivação

$$\frac{\Pi_1' \quad \Pi_2'}{A}$$

à qual reduz-se Π, tem-se que $g(\Pi') = \max(g(\Pi_i')) < n$, pois A não ocorre em um segmento máximo.

CASO 2. A última regra de Π é uma eliminação.

Seja a derivação Π seguinte:

$$\frac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A & B & C\end{matrix}}{D}.$$

Pela hipótese da indução, para cada uma das Π_1 e $\Sigma_i(i = 1, 2)$ existe uma redução aumentada correspondente Π_1', Σ_i', às quais aquelas se reduzem, de grau menor que n. Seja Σ a derivação:

$$\frac{\begin{matrix}\Pi_1' & \Sigma_1' & \Sigma_2' \\ A & B & C\end{matrix}}{D}$$

à qual se reduz Π e, pelo Lema 3.49, é tal que $g(\Sigma) \leq n$.

Se $g(\Sigma) < n$, faz-se Π' igual a Σ e obtém-se o desejado.

Se $g(\Sigma) = n$, Σ é uma derivação crítica (tendo A, que ocorre em um segmento máximo, como premissa maior de uma eliminação). Logo, pelo Lema 3.48, existe uma derivação Π' à qual se reduz Σ e $g(\Pi') < n$. Portanto, Π reduz-se Π' e $g(\Pi') < n$. □

Dispondo-se destes resultados, de maneira análoga ao já provado para NNC_ω obtém-se:

Teorema 3.52 *Toda derivação de NNC_ω^{aum} reduz-se a uma derivação normal Π', com a mesma fórmula final.*

Lema 3.53 *(Church-Rosser) Se* $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'$ *e* $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi''$ *, então há uma derivação* Π''' *tal que* $\Pi' \Longrightarrow_{aum} \Pi'''$ *e* $\Pi'' \Longrightarrow_{aum} \Pi'''$*.*

Demonstração. Análoga à demonstração usual (v. [40] e [51]), tendo em vista que as reduções definidas são as usuais, aplicando-se a *neg* o desenvolvimento comum. □

Lema 3.54 *Se* Π *é uma derivação qualquer de* NNC_ω^{aum}*, qualquer seqüência de redução de* Π *termina em uma mesma derivação normal* Σ_n*.*

Demonstração. Suponha que em NNC_ω^{aum} há uma derivação Π que dá origem a uma seqüência de reduções infinita

$$(S) \qquad \Pi = \Pi_1 \Longrightarrow_{aum} \Pi_2 \Longrightarrow_{aum} \cdots \Longrightarrow_{aum} \Pi_n \Longrightarrow_{aum} \Pi_{n+1} \Longrightarrow_{aum} \cdots$$

Por outro lado, por força do Teorema 3.52, há uma seqüência de reduções finita com origem em Π, que termina em uma derivação normal Σ_n, seja,

$$(N) \qquad \Pi = \Sigma_1 \Longrightarrow_{aum} \Sigma_2 \Longrightarrow_{aum} \cdots \Longrightarrow_{aum} \Sigma_n.$$

De acordo com o Lema 3.47, obtém-se que

$$(I) \qquad l\,(\Pi) < l\,(\Sigma_n)$$

e que se pode encontrar em (S) uma derivação Π_j tal que

$$(II) \qquad l\,(\Sigma_n) < l(\Pi_j).$$

Ora, o Teorema 3.52, outra vez, garante que há uma derivação Π'_j normal que é uma redução aumentada de Π_j e, obviamente, de Π. Pelo Lema 3.47, tem-se que

$$(III) \qquad l(\Pi_j) < l(\Pi'_j).$$

Portanto,

$$(IV) \qquad l\,(\Sigma_n) < l(\Pi'_j).$$

Ora, o Lema 3.53, porque $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Pi'_k$ e $\Pi \Longrightarrow_{aum} \Sigma_n$ e, mais, Π'_k e Σ_n são normais, impõe que Σ_n e Π'_j sejam a mesma derivação. E isto é frontalmente contrário a (IV). □

Corolário 3.55 *NNC_ω^{aum} é fortemente normalizável.*

Demonstração. Aplicação imediata do Lema 3.54. □

3.3.3 Normalização Forte em NNC_ω

Lema 3.56 *(Mapeamento). Sejam Π e Π' derivações em NNC_ω e Σ e Σ^* derivações em NNC_ω^{aum} . Se $\Pi \Longrightarrow \Pi'$ e $\Pi \longmapsto \Sigma$, então existe uma derivação Σ^* tal que $\Pi' \longmapsto \Sigma^*$ e $\Sigma \Longrightarrow_{aum} \Sigma^*$. (Ver a Definição 3.42 sobre o símbolo $\longmapsto$).*

Demonstração. Indução sobre o comprimento de Π. Detalhes não explicitados (casos 2, 3 e 4, por exemplo) são como em [51], páginas 50 e seguintes.

BASE. Se $l(\Pi) = 1$, então $g(\Pi) = 0$ e Π' é Π. Logo, a aumentação Σ, de Π, feita a partir de uma boa fórmula para aumentação F, é uma aumentação Σ^* de Π' feita a partir desta mesma fórmula F.

PASSO INDUTIVO. Se $l(\Pi) = n$ e $g(\Pi) = 0$, tudo se passa como na Base. Se $g(\Pi) = n$, Π assume uma das formas $\Sigma_i, i = 1, ..., 5$ da Definição 3.16.

1) Seja Π da forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A\&B}\,\&I}{A}\,\&E ,$$

e Π', obtido pela Definição 3.16 (&-redução), da forma

$$\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} .$$

1.1) Se Σ é

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi'_1 & \Pi'_2\end{array}}{A\&B}\,\&I}{A}\,\&E ,$$

onde Π'_1 e Π'_2 são aumentações de

$$\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A\end{array} \text{ e } \begin{array}{c}\Pi_2 \\ B\end{array} ,$$

respectivamente, de acordo com a Definição 3.42, Σ^* será

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Pi'_1 & \Pi'_2 \\ A & B\end{array} \\ \vdots(\alpha_{BA}) \\ A\end{array}$$

conforme a Definição 3.46 (&-redução aumentada). Assim, tem-se que $\Pi \mapsto \Sigma \Longrightarrow_{aum} \Sigma^*$ e que $\Pi \Longrightarrow \Pi' \mapsto \Sigma^*$, garantidos pelas Definições 3.40 e 3.42.

1.2) Se Σ é

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi'_1 & \Pi'_2\end{array}}{A\&B} \quad \dfrac{\Pi_3}{D} \\ \vdots\,(\alpha_{D(A\&B)}) \\ A\&B\end{array}}{A}\,\&E$$

onde Π'_1 e Π'_2 são as aumentações já referidas, pela Definição 3.40, 2, obtém-se uma aumentação imediata Σ_1 da forma

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{A\&B}}{A} \qquad \dfrac{\Pi_3}{D} \\
\vdots\,(\alpha_{DA}) \\
A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{A\&B}}{B} \qquad \dfrac{\Pi_3}{D} \\
\vdots\,(\alpha_{DB}) \\
B
\end{array}
}{\dfrac{A\&B}{A}}
$$

que se reduz a Σ^* da forma seguinte:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\Pi'_1 \qquad \Pi'_2 \\
\vdots\,(\alpha_{BA}) \\
A
\end{array}
\quad \dfrac{\Pi_3}{D} \\
\vdots\,(\alpha_{DA}) \\
A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{A\&B}}{B} \qquad \dfrac{\Pi_3}{D} \\
\vdots\,(\alpha_{DB}) \\
B
\end{array} \\
\vdots(\alpha_{BA}) \\
A
\end{array}
\; .
$$

A Definição 3.46 garante que $\Sigma \Longrightarrow_{aum} \Sigma^*$ (pois $\Sigma \Longrightarrow_{aum} \Sigma_1 \Longrightarrow_{aum} \Sigma^*$) e a Definição 3.42 mostra que $\Pi' \mapsto \Sigma^*$.

1.3) Se Σ_1 é uma aumentação de Π e Σ é da forma

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ A\end{array} \quad \dfrac{\Pi_3}{C} \\
\vdots\,(\alpha_{CA}) \\
A
\end{array}
$$

opera-se semelhantemente a 1.2, de acordo com a Definição 3.40, obtendo-se Σ'_1 de Σ_1 pela hipótese da indução.

Os casos 1.4 e 1.5 se desenvolvem semelhantemente a 1.2 e 1.3 e correspondem à aplicação do aumento α_B no lugar de α_{AB}.

2) Se Π é

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A\&B}}{B},$$

tudo se passa como em 1.

3) Se Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \supset B}}{B}$$

aplica-se o mesmo tipo de prova do caso 1.

4) Se Π é

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}$$

e Π' é obtida por $\vee$-redução de acordo com a Definição 3.46, assim como todas as variações deste caso, as demonstrações seguem, passo a passo, as provas de [51]. Da mesma maneira, aplicam-se os procedimentos de [51] aos casos de $\vee E$-redução.

5) Se Π é

$$\dfrac{neg\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{C} \qquad \Pi_3}{E} ELIM$$

a definição de neg-redução permite gerar uma derivação Π' da forma

$$\dfrac{ELIM\,\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\end{matrix} \qquad \Pi_3}{E} \qquad ELIM\,\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \qquad \Pi_3}{E}}{E}\,neg$$

5.1) (caso geral). Se Σ é

$$\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{C} \qquad \Pi'_3}{E}$$

onde Π'_1 , Π'_2 e Π'_3 são aumentações de $\begin{matrix}\Pi_1\\ C\end{matrix}$, $\begin{matrix}\Pi_2\\ C\end{matrix}$, Π_3 , respectivamente, Σ_8, da Definição 3.46, toma a forma

$$\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_3}{E} \qquad \dfrac{\Pi'_2 \qquad \Pi'_3}{E}}{E}$$

Ora, esta redução aumentada Σ_8 (cf. Definição 3.46) de Σ_1 é, claramente, uma aumentação de Π'.

5.2) (C é $C\&D$ e Π_3 é vazia) Se Π é

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\&D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\&D\end{matrix}}{C\&D}}{C}$$

e Π' é

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ C\&D\end{matrix}}{C} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_2\\ C\&D\end{matrix}}{C}}{C}$$

a derivação Σ passa a ser

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \quad \Pi'_2}{C\&D}}{C} \quad \dfrac{\Pi_4}{E} \\ \vdots\,(\alpha_{EC}) \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \quad \Pi'_2}{C\&D}}{D} \quad \dfrac{\Pi_4}{E} \\ \vdots\,(\alpha_{ED}) \\ D\end{array}}{\dfrac{C\&D}{C}}$$

onde Π'_1 e Π'_2 são aumentações de Π_1 e Π_2.

Σ^* é, então,

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi'_1}{C\&D}}{C} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi'_2}{C\&D}}{C}}{C} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\Pi_4}{E} \\ \vdots\,(\alpha_{EC}) \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Pi'_1 \quad \Pi'_2}{C\&D}}{D} \quad \dfrac{\Pi_4}{E} \\ \vdots\,(\alpha_{ED}) \\ D\end{array} \\ \vdots\,(\alpha_{DC}) \\ C \end{array}$$

5.3) (C é $D \supset E$) Se Π é

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3 \\ D\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \Pi_1 \\ D \supset E\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg A] \\ \Pi_2 \\ D \supset E\end{array}}{D \supset E}}{E}$$

e Π' toma a forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array}\qquad\begin{array}{c}[A]\\ \Pi_1\\ D\supset E\end{array}}{E}\qquad\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3\\ D\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\neg A]\\ \Pi_2\\ D\supset E\end{array}}{E}}{E}$$

há uma derivação Σ, que é uma aumentação de Π e tem a forma seguinte, onde Π_1' , Π_2' e Π_3' são as aumentações já referidas:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3'\\ D\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\Pi_1'\quad\Pi_2'}{D\supset E}\qquad\begin{array}{c}\Pi_4\\ F\end{array}\\ \vdots\,(\alpha_{F(D\supset E)})\\ D\supset E\end{array}}{E}\;.$$

Seja Σ_1 a seguinte aumentação de Σ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3'\\ D\end{array}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[D]\quad\dfrac{\Pi_1'\quad\Pi_2'}{D\supset E}}{E}\qquad\begin{array}{c}\Pi_4\\ F\end{array}\\ \vdots\,(\alpha_{FE})\\ E\end{array}}{D\supset E}}{E}\;.$$

Esta derivação tem uma redução aumentada Σ_2 , seja:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_3'\\ D\end{array}\quad\dfrac{\Pi_1'\quad\Pi_2'}{D\supset E}}{E}\qquad\begin{array}{c}\Pi_4\\ F\end{array}\\ \vdots\,(\alpha_{FE})\\ E\end{array}\qquad\begin{array}{c}\Pi_3'\\ D\end{array}\\ \vdots\,(\alpha_{DE})\\ E\end{array}$$

que, por sua vez reduz-se a Σ^*, com a seguinte forma:

$$\cfrac{\cfrac{\Pi_3' \quad \Pi_1'}{E} \qquad \cfrac{\Pi_3' \quad \Pi_2'}{E}}{E} \qquad \begin{array}{c} \Pi_4 \\ F \\ \vdots\,(\alpha_{FE}) \\ E \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Pi_3' \\ D \\ \vdots\,(\alpha_{DE}) \\ E \end{array}$$

que é uma redução aumentada de Σ , enquanto é uma aumentação de Π' .

5.4) (C é $C \vee D$) Sendo Π da forma

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Pi_1 \\ C \vee D\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg A]\\ \Pi_2 \\ C \vee D\end{array}}{C \vee D}\,neg \qquad \begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3 \\ E\end{array} \qquad \begin{array}{c}[D]\\ \Pi_4 \\ E\end{array}}{E}\,\vee E$$

por *neg*-redução, obtém-se Π' da forma

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Pi_1 \\ C \vee D\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3 \\ E\end{array} \quad \begin{array}{c}[D]\\ \Pi_4 \\ E\end{array}}{E} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \Pi_2 \\ C \vee D\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3 \\ E\end{array} \quad \begin{array}{c}[D]\\ \Pi_4 \\ E\end{array}}{E}}{E} \quad .$$

Sendo Π_1' , Π_2' , Π_3' e Π_4' aumentações de $\begin{array}{c}\Pi_1\\ C \vee D\end{array}$, $\begin{array}{c}\Pi_2\\ C \vee D\end{array}$, $\begin{array}{c}\Pi_3\\ E\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Pi_4\\ E\end{array}$, respectivamente, obtém-se uma aumentação Σ de Π , da seguinte forma:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Pi'_1 \qquad \Pi'_2}{C \vee D}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c} [C] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ C \end{array}}{C \vee D}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c} [D] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FD}) \\ D \end{array}}{C \vee D}
}{C \vee D}
\qquad \Pi'_3 \qquad \Pi'_4
}{E}
.
$$

A seguinte aumentação Σ' , de Σ , é permitida pela Definição 3.40:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Pi'_1}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} \overset{\Pi_5}{[C]\ F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ C \end{array}}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} \overset{\Pi_5}{[D]\ F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ D \end{array}}{C \vee D}
}{C \vee D}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\Pi'_2}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} \overset{\Pi_5}{[C]\ F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ C \end{array}}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} \overset{\Pi_5}{[D]\ F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ D \end{array}}{C \vee D}
}{C \vee D}
}{C \vee D}
\qquad \Pi'_3 \quad \Pi_4
}{E}
$$

Seja Σ^* a derivação

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Pi'_1}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} [C] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ C \end{array}}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} [D] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FD}) \\ D \end{array}}{C \vee D}
}{C \vee D}
\qquad \Pi'_3
}{E}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Pi'_2}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} [C] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FC}) \\ C \end{array}}{C \vee D}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c} [D] \quad \overset{\Pi_5}{F} \\ \vdots\,(\alpha_{FD}) \\ D \end{array}}{C \vee D}
}{C \vee D}
\qquad \Pi'_4
}{E}
}{E}
$$

Obviamente, Σ^*, que é uma redução aumentada de Σ , é uma aumentação de Π' .

Estes são todos os caos possíveis. Portanto,

$$\Pi \Longrightarrow \Pi' \longmapsto \Sigma^*$$

e

$$\Pi \longmapsto \Sigma \Longrightarrow \Sigma^*. \ \Box$$

Teorema 3.57 *NNC_ω é fortemente normalizável.*

Demonstração. Qualquer seqüência de redução de NNC_ω pode ser correlacionada conforme o Lema 3.56 (Mapeamento), com uma seqüência de reduções de NNC_ω^{aum} . Pelo Corolário 3.55, segue-se que NNC_ω é fortemente normalizável. $\Box$

Considerações Finais

Nestas considerações finais são retomadas algumas questões relativas aos resultados alcançados, que podem ser assim agrupados: 1) os que decorrem imediatamente da análise do trabalho de Raggio de 1968 [61]; 2) o que foi obtido através do desenvolvimento do sistema NCG_ω; e 3) o que se alcançou com o desenvolvimento de C_ω em Dedução Natural.

Primeiro, sobre a análise da proposta de Raggio, em [61], para provar a decidibiidade de C_ω através de sua formulação em cálculo de seqüentes, pode-se dizer que obter uma demonstração da eliminação do *mix* para o sistema (proposto por Raggio) que foi chamado MCG_ω, deixa bem claro que suas intuições eram corretas. De fato, controlando particularmente o comportamento da negação e tratando com o cuidado devido as regras $\neg\neg\rightarrow$ e $\rightarrow\neg$ mostra-se a preservação do princípio de subfórmula, garantindo uma das principais conseqüências da eliminação do *mix*. Se se considerar a origem da formulação de Raggio, em [61], fica bem claro que isto devia ser esperado. Ressalte-se, portanto, que aquelas limitações, de natureza histórica, ou do paradigma, como apresentadas, são uma justificativa razoável para que o desenvolvimento destes resultados tenha sido adiado até agora. As diferenças fundamentais entre $C_n, 1 \leq n < \omega$, e C_ω, que têm sido destacadas por trabalhos mais recentes, de fato, dificultam o desenvolvimento de "solução única" para a hierarquia $C_n, 1 \leq n \leq \omega$.

O que se obtém em MCG_ω sobre a negação, e muito mais explicitamente em NCG_ω, permite destacar suas características específicas.

A apresentação da negação em NCG_ω é uma de suas notas fundamentais. A regra *neg* apresenta a inclusão explícita das propriedades do princípio do terceiro excluído, garantindo a introdução dos elementos que superam a restrição intuicionista presente nas outras regras. Assim, esta formulação de C_ω em cálculo se seqüentes recupera uma de suas características básicas, que é conter os esquemas e regras da lógica clássica que são compatíveis com a não validade do princípio da não-contradição na forma $\neg(A\&\neg A)$ e com o fato que de duas premissas contraditórias não se deduz uma fórmula qualquer.

Como esta negação não tem as características do $\bot$, quer visto clássica ou intuicionisticamente, o desenvolvimento de seu estudo levando em conta, por exemplo, idéias apresentadas em [37] pode melhor esclarecer o funcionamento deste operador, bem definido em C_ω, tanto que apresentado através de regras operacionais próprias, contribuindo, inclusive, na investigação da semântica que lhe dê o significado intuitivo tão buscado.

Os resultados obtidos através da formulação de C_ω em dedução natural são expressivos por si mesmos. Chame-se a atenção para a relação entre NNC_ω e NCG_ω. As regras de introdução e eliminação de operadores lógicos de NNC_ω, exceto negação, guardam com as regras de NCG_ω a mesma relação que se encontra na parte positiva do cálculo intuicionista entre as formulações em cálculo de seqüentes e dedução natural. Quanto à persistência desta relação entre as regras "*neg*" de NNC_ω e NCG_ω, é visual. A forma destas regras, nos dois cálculos, permite ver, literalmente, como elas se ralacionam na hora de definir a transformação das derivações de NNC_ω em NCG_ω e vice versa.

Além disto, provar um teorema de normalização forte para NNC_ω utilizando técnicas desenvolvidas para a análise do cálculo intuicionista se, por um lado, mostra o alcance destas técnicas, por outro reduz a estranheza de C_ω.

Estender estes resultados para C_ω^* e aplicar técnicas semelhantes para obter os resultados correspondentes de $C_n, 1 \leq n < \omega$, são as investigações imediatas que se impõem.

Questões ainda não solucionadas como:

1. o estudo do cálculo que resulta da adição de alguma forma da *reductio ad absurdum*, como axioma a C_ω;
2. e, até, o estudo das características mais fundamentais de uma Teoria de Conjuntos paraconsistente desenvolvida sobre C_ω,

podem ser discutidas utilizando os recursos aqui empregados que, ressalte-se, são de natureza sintática.

Alguns estudos de natureza semântica que têm se desenvolvido recentemente podem receber contribuição dos resultados aqui alcançados, de natureza complementar e mesmo, para esclarecimento de questões não resolvidas. Por exemplo, a exploração adicional destes sistemas através de sua tradução em algum dos sistemas duais do intuicionismo, por exemplo, utilizando as técnicas aplicadas por Queiroz em [58]. De maneira similar, a discussão de problemas como a construção de semânticas de Kripke para C_ω, desenvolvendo o trabalho de Baaz ([6]), ou a busca de uma semântica "mais intuitiva" para C_ω.

Bibliografia

[1] ALVES, D. D. P. *Normalização forte via ordinal natural*, 1999. Tese de doutorado, São Paulo, Universidade Estadual de Campinas-SP.

[2] ALVES, E. H. *Lógica e inconsistência: um estudo dos cálculos* $C_n, 1 \leq n < \omega$, 1976. Diss. mestrado, São Paulo, Universidade de São Paulo.

[3] ALVES, E. H., MOURA, J. E. On some higher-order paraconsistent predicate calculi. In: Brazilian Conference on Mathematical Logic, 1., 1976, Campinas-SP. Editors ARRUDA, A. I., DA COSTA, N. C. A., CHUAQUI, R. New York: Marcel Dekker, 1977. p. 1–8.

[4] ARRUDA, A. I. A survey of paraconsistent logic. In: Simpósio Latinoamericano de Lógica Matemática, 197? *Mathematical logic in latin america.* Editors ARRUDA, A. I., DA COSTA, N. C. A., CHUAQUI, R. Amsterdam: North-Holland, 1980. p. 1–41.

[5] ARRUDA, A. I. *Vasiliev e a lógica paraconsistente.* Campinas-SP: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1990.

[6] BAAZ, M. Kripke-type semantics for da costa's paraconsistent logic c_ω. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 27, n. 4, p. 523–527, 1986.

[7] BÉZIAU, J.-Y. Calcul des sequents pour logique non-aletique. *Logique & Analyse*, Bruxelas, v. 125-126, p. 143–155, 1989.

[8] BÉZIAU, J.-Y. Nouveaux resultats et nouveau regard sur la logique paraconsistante C1. *Logique & Analyse*, Bruxelas, v. 141-142, p. 45–58, 1993.

[9] BÉZIAU, J.-Y. *La logique paraconsistante.* Paris: Masson, 1997. p. 237–255.

[10] BUSCHSBAUM, A. R. V., PEQUENO, T. H. C. *Uma família de lógicas paraconsistentes e/ou paracompletas com semânticas recursivas.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1993.

[11] BUSS, S. R. (Ed.). *Handbook of proof theory.* Amsterdam: Elsevier, 1998.

[12] CARNIELLI, W., DE ALMEIDA, J. M. Limits for paraconsistent calculi. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. to appear, 200?

[13] DA COSTA, N. C. A. Notas sobre o conceito de contradição. *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, Curitiba-Paraná, v. 1, p. 6–8, 1958.

[14] DA COSTA, N. C. A. Observações sobre o conceito de existência em matemática. *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, Curitiba-Paraná, v. 2, p. 16–19, 1959.

[15] DA COSTA, N. C. A. Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *C.R. Acad. Sc. Paris*, Paris, v. 257, p. 3790–3792, 1963.

[16] DA COSTA, N. C. A. *Sistemas formais inconsistentes.* Rio de Janeiro: NEPEC, 1963. Tese de Professor Catedrático de Análise Matemática e Análise Superior.

[17] DA COSTA, N. C. A. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 15, p. 497–509, 1974.

[18] DA COSTA, N. C. A. Remarques sur les calculs $C_n, C_n^*, C_n^=$ et D_n. *C. R. Acad. Sc. Paris*, Paris, v. 278, p. 819–821, 1974.

[19] DA COSTA, N. C. A., ABE, J. M., DA SILVA FILHO, J. I., MUROLO, A. C., LEITE, C. F. S. *Lógica paraconsistente aplicada.* São Paulo: Atlas, 1999.

[20] DA COSTA, N. C. A., ABE, J. M., SUBRAHMANIAN, V. S. *Remarks on annotated logic.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1991.

[21] DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J.-Y., BUENO, O. A. S. Aspects of paraconsistent logic. *Bull. of the IGPL*, Londres, v. 6, p. 597–614, 1995.

[22] DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J.-Y., BUENO, O. A. S. Topics in paraconsistent logic. *Philosophical Alternatives*, v. to appear, 199?

[23] DA COSTA, N. C. A., HENSCHEN, L. J., LU, J. J., SUBRAHMANIAN, V. S. *Automatic theorem proving in paraconsistent logics: Theory and implementation.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1990.

[24] DA COSTA, N. C. A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logic in the 80s. *Journal of Non-Classical Logic*, Campinas-SP, v. 6, 1989.

[25] DA COSTA, N. C. A., DE A. PRADO, J. P., ABE, J. M., ÁVILA, B. C., RILLO, M. *Paralog: Um Prolog paraconsistente baseado em lógica anotada.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1995.

[26] DA COSTA, N. C. A., SUBRAHMANIAN, V. S. *Paraconsistent logics as a formalism for reasoning about inconsistent knowledge bases.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1989.

[27] DA COSTA, N. C. A., SUBRAHMANIAN, V. S., VAGO, C. *The paraconsistent logics PT.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1989.

[28] DA SILVA, F. S. C., ABE, J. M., RILLO, M. *Paraconsistent theories of knowledge in AI and robotics.* São Paulo: Instituto de Estudos Avançados-USP, 1994.

[29] DE ALMEIDA, J. M. *Semânticas de traduções possíveis*, 1999. Diss. mestrado, Campinas-SP, UNICAMP.

[30] DE CASTRO, M. A. *O método de dedução natural aplicado às lógicas proposicionais paraconsistentes C_n*, 1998. Diss. mestrado, São Paulo, UNICAMP.

[31] DE CASTRO, M. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Analytical tableaux to da Costa's hierarchy of propositional paraconsistent logics $C_n(1 \leq n < \omega)$. *to appear*, 1999.

[32] DE CASTRO, M. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Natural deduction for paraconsistent logic. *to appear*, 1999.

[33] D'OTTAVIANO, I. M. F. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *Journal of Non-Classical Logic*, Campinas-SP, v. 7, p. 89–152, 1990.

[34] D'OTTAVIANO, I. M. L. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: Século XIX: O nascimento da ciência contemporânea. *Século XIX: O nascimento da ciência contemporânea.* Editor ÉVORA, F. R. R. Campinas: UNICAMP-Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1992. p. 65–93.

[35] D'OTTAVIANO, I. M. L. The intelectual development of Andrés Raggio. In: Brazilian Conference on Mathematical Logic, 10., 1993, Itatiaia - RJ. *Logic, sets and information.* Editors CARNIELLI, W. A., D.PEREIRA, L. C. P. Campinas: UNICAMP, 1995. p. 1–24.

[36] FIDEL, M. M. The decidability of the calculi C_n. *Reports on Mathematical Logic*, Cracóvia-Polônia, v. 8, p. 31–40, 1977.

[37] GABBAY, D. M., WANSING, H. (Eds.). *What is negation?* Dordrecht-Holland: Kluwwer Academic Publishers, 1999.

[38] GENTZEN, G. Untersuchungen ueber das logische Schiliessen. *Math. Zeitschrift*, Berlim, v. 39, p. 176–210, 405–431, 1935.

[39] GENTZEN, G. Investigations into logical deduction. In: Colected papers of G. Gentzen. Editor SZABO, G. Amsterdam: North-Holland, 1969. p. 69–131.

[40] GIRARD, J.-Y. *Proof theory and logical complexity, vol. 1.* Nápoles-Itália: Bibliopolis, 1987.

[41] HEUSSLER, H. E. *Prova automática de teoremas em dedução natural: uma abordagem abstrata*, 1990. Tese de doutorado, Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro.

[42] JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, Polônia, v. 24, p. 143–157, 1969.

[43] KLEENE, S. C. *Introduction to metamathematics.* New York: D. Van Nostrand Company, 1972.

[44] KRAUSE, D., ABE, J. M. A obra de N. C. A. da Costa em lógica. *Theoria, Segunda Época*, v. 7, p. 347–386, 1992.

[45] KREISEL, G. A survey of proof theory. *Journal of Symbolic Logic*, Champaign-IL, USA, v. 33, n. 3, 1968.

[46] KRIESEL, G. A survey of proof theory II. In: Scandinavian Logic Symposium, 2., 1971. *Scandinavian logic symposium.* Editor FENSTAD, J. E. Amsterdam: North-Holland, 1972. p. 109–170.

[47] KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas.* 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 1997.

[48] LOPARIC, A. Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels. *C. R. Acad. Sc. Paris*, Paris, v. 284, Série A, p. 835–838, 1977.

[49] ŁUKASIEWICZ, J. On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics*, Washington-DC, USA, v. 24, p. 485–509, 1971.

[50] MARCONI, D. A decision-method for the calculus C_1. In: Brazilian Conference on Mathematical Logic, 3. *Brazilian conference on mathematical logic.* São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980. p. 211–223.

[51] MASSI, C. D. B. *Normalização e normalização forte para a lógica clássica de primeira ordem*, 1988. Diss. mestrado, Campinas-SP, UNICAMP.

[52] MASSI, C. D. B. *Provas de normalização para a lógica clássica*, 1990. Tese de doutorado, Campinas-SP, UNICAMP.

[53] PEREIRA, L. C. P. D. *On the estimation of the length of normal derivations.* Stockholm: Akademilitteratur, 1982.

[54] PEREIRA, L. C. P. D. Normalização forte para a lógica intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas-SP, v. 7, p. 103–118, 1984.

[55] PRAWITZ, D. *Natural deduction. A proof-theoretical study.* Uppsala: Almquist & Wiksell, 1965.

[56] PRAWITZ, D. Ideas and results in proof theory. In: Scandinavian Logic Symposium, 2., 1971. *Second scandinavian logic symposium.* Editor FENSTAD, J. E. Amsterdam: North-Holland, 1972. p. 235–308.

[57] PRAWITZ, D. *The philosophical position of proof theory.* Baltimore-USA: John Hopkins Press, 1972.

[58] QUEIROZ, G. S. *Sobre a dualidade entre intuicionismo e paraconsistência*, 1999. Tese de doutorado, Campinas-SP, Universidade Estadual de Campinas-SP.

[59] RAGGIO, A. Direct consistency proof of Gentzen's system of natural deduction. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 5, p. 27–30, 1964.

[60] RAGGIO, A. Gentzen's hauptsatz for the systems NI and NK. *Logique & Analyse*, Bruxelas, v. 30, p. 91–100, 1965.

[61] RAGGIO, A. Propositional sequence-calculi for inconsistent systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 9, p. 359–366, 1968.

[62] RAGGIO, A. A simple proof of Herbrand's Theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 15, p. 487–488, 1974.

[63] RAGGIO, A. A proof-theoretical analysis of da Costa's C_ω. In: Brazilian Conference on Mathematical Logic, 1., 1976, Campinas-SP. Editors ARRUDA, A. I., DA COSTA, N. C. A., CHUAQUI, R. Nova Iorque: M. Dekker, 1978. p. 233–240.

[64] SCHELLINX, H. Some syntactical observations on linear logic. *J. Logic Computat.*, Oxford, v. 1, n. 4, p. 537–559, 1991.

[65] SETTE, A. M. A. On the propositional calculus P_1. *Mathematica Japonica*, Osaka, Japão, v. 18, p. 173–180, 1973.

[66] SLATER, B. H. Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical Logic*, Holanda, v. 24, p. 451–454, 1995.

[67] Studia logica. Polônia: , 1984. v. 43.

[68] SUPPE, F. *The structure of scientific theories*. Urbana-IL, USA: University of Illinois Press, 1974.

[69] URBAS, I. Paraconsistency and the C-systems of da Costa. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Notre Dame-IN, USA, v. 30, p. 583–597, 1989.