Abel Lassalle Casanave

DOS FUNDAMENTOS À FILOSOFIA DA ARITMÉTICA

(Uma interpretação do Programa de Hilbert)

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Carlos Alberto Lungarzo

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 16/10/95.

Titulares

Prof. Dr. Carlos Alberto Lungarzo (orientador)[UNICAMP]
Prof. Dr. Cosme Damião Bastos Massi [UNESP]
Prof. Dr. Elias Humberto Alves [UNESP]
Prof. Dr. Michael Beaumont Wrigley [UNICAMP]
Prof. Dr. Paulo Roberto Margutti Pinto [UFMG]

Suplentes

Prof. Dr. Sílvio Seno Chibeni (UNICAMP)
Prof. Dr. Carlos Gustavo González (CNPq)

UNICAMP

outubro de 1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

L336f

Lassalle Casanave, Abel.

Dos fundamentos à filosofia da aritmética (uma interpretação do Programa de Hilbert) / Abel Lassalle Casanave. - - Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Carlos Alberto Lungarzo.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Teoria do conhecimento. 2. Formalismo (Filosofia). 3. Programa de Hilbert. I. Lungarzo, Carlos Alberto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

A Carolina,

a quien suelo reencontrar

en las miradas de algunos niños.

Agradecimentos

Este trabalho teria mais imperfeições das muitas que tem, não fosse as sugestões que fizeram alguns de seus leitores em diferentes etapas de sua elaboração.

Com o Prof. Jose Aleixandre Durri Guerzoni (UNICAMP-Brasil) conversei em muitas oportunidades sobre os assuntos aqui tratados, mas lamentavelmente o mesmo não chegou a ler uma versão completa do trabalho. Um primeiro projeto do mesmo foi lido pelo Prof. Gottfried Gabriel (Konstanz-Alemanha), sugerindo-me então a investigação preliminar que constitue agora a primeira parte do trabalho, dedicada a temas de filosofia moderna. Sobre esta primeira parte recebi numerosas observações e correções por parte da Profa. Beatriz von Bilderling (UBA-Argentina), a quem muito devo em relação aos mencionados temas.

Versões subseqüêntes foram objeto de comentários por parte dos Profs. José Seoane (Universidad de la República- Uruguai), Wagner Sanz (UCPel-Brasil), Carlos Gonzalez (UNICAMP-Brasil) e Jorge Alberto Molina (UCPel-Brasil). Os dois últimos, em particular, ajudaram-me a sanar minhas deficiências tanto com a lingua alemã quanto em questões de ordem técnica em lógica matemática.

O Prof. Cosme Massi (UNESP- Brasil) leu uma primeira versão preliminar integral. Uma versão mais elaborada foi objeto de numerosas críticas por parte do Prof. Paulo Margutti (UFMG- Brasil), que em muito melhoraram tanto a estrutura quanto o conteúdo do trabalho. As observações dos dois últimos mencionados levaram-me a introduzir a noção de "formalismo metodológico" para caraterizar o formalismo hilbertiano. Devo acrescentar também as sugestões que recebi por parte do Prof. Michel Wrigley (UNICAMP-Brasil).

Outrossim, Helena Esser dos Reis (UCPel-Brasil) e, especialmente, Oscar Brizolara (UCPel-Brasil) fizeram o possivel (e o impossível) para melhorar o português do presente texto.

Ao meu amigo e orientador Prof. Carlos A. Lungarzo (UNICAMP-Brasil) devo mais coisas que as que possa lembrar. Prefiro então lembrar a paciência e o afeto da sua esposa, Cristina O'Connor, quem suportou estoicamente tantos anos ver-nos girando sobre o mesmo assunto. Mas, se de estoicismo se trata, impossível não lembrar também, e em primeiro lugar, a minha esposa Carlota M. Ibertis.

Por último, fizeram possivel este trabalho uma Bolsa de Doutorado (1988-1992) do CNPq e a carga horária dedicada à pesquisa concedida pela Universidade Católica de Pelotas (UCPel) desde 1993 até hoje.

ÍNDICE

Introdução

Quem examina a literatura existente sobre o "Programa de Hilbert", no que diz respeito ao substrato filosófico do programa, não pode deixar de sentir um certo incômodo frente a uma verdadeira anarquia de interpretações. Provém essa anarquia da "coisa mesma"? Por certo, este fenômeno é uma experiência comum a qualquer estudante de filosofia. Porém, existem certas coincidências, às vezes muito genéricas, que indicam limites aos esforços interpretativos. No caso que consideramos, no entanto, parece inevitável tirar como conclusão que a filosofia é um cardápio onde escolhemos os pratos a degustar. E um cardápio bem variado. Kant e Leibniz entre os autores; operacionalismo, formalismo, positivismo, instrumentalismo, platonismo entre os "ismos".

Tal variedade lembra uma técnica de critica literária sugerida num conto fantástico: atribuir as obras de um autor a outro, digamos, atribuir "Don Quijote" a Esquilo. Acaso interpretar não seja nada mais do que praticar cientes essa técnica. Desta perspectiva, pode então não ser menos arbitrário atribuir as tragédias de Esquilo a um trágico grego do século V ou, no caso que nos ocupa, atribuir os textos de Hilbert a um grande matemático, possivelmente o último em fazer contribuições significativas aos ramos mais importantes de sua disciplina. Optamos, no entanto, por essa arbitrariedade. O objetivo de Hilbert era a defesa de um *factum*: a matemática tal qual ela se desenvolveu no século XIX e que hoje denominamos clássica.

Mas, então, devemos concluir que para o próprio Hilbert a filosofia é um cardápio? Sem dúvida há passagens nos textos de Hilbert, eventualmente isolados de contexto, que sugerem as múltiplas interpretações que mencionamos. Poderiamos concluir que a multiplicidade de interpretações é possível porque Hilbert tira daqui e dali conceitos filosóficos sem outro interesse que uma justificativa acidental de seu trabalho em fundamentos da matemática. A origem dessas interpretações não estará então num "pecado cardinal" -a gula filosófica- de Hilbert?

Uma resposta afirmativa à última pergunta, eventualmente a correta, carece de interesse. Tal resposta, da nossa perspectiva, não esgota, nem sequer aponta, ao problema que achamos relevante: podemos encontrar uma tese, digamos, genuinamente filosófica, que Hilbert tenha defendido, embora não articuladamente, como exigiriamos de um filósofo? Essa tese -caso ela exista- não deve procurar-se, segundo achamos, nem nas referências a filósofos que o próprio Hilbert faz, nem num discutível "espírito filosófico" da época.

O fio condutor que nos levará à tese procurada é, segundo nos parece, que para Hilbert em princípio só há um conceito legítimo -um conceito *intersubjetivo*- de intuição que é condição de possibilidade para a *fundamentação* do conhecimento científico: a percepção. Ora, a ênfase posta na percepção só pode ser compreendida se contraposta a uma instância rival de fundamentação da matemática, genericamente chamada *intuição*. O leitor informado pode objetar que a tese caraterística do pensamento de Hilbert é que a fundamentação de uma teoria matemática é sua consistência. Porém, enquanto que a significação que Hilbert atribui à prova de consistência sofre importantes alterações no percurso de seu pensamento, a nota de *intersubjetividade* que Hilbert atribui à percepção permanece constante. Paralelamente, é constante também a nota de *subjetividade* que Hilbert atribui a qualquer *outro* conceito de intuição que não seja a percepção.

A mencionada ênfase na percepção, sem dúvida, é parte de uma discussão mais geral que envolve a questão da consistência. A percepção como condição de possibilidade para a fundamentação da matemática é um aspecto da oposição entre intuição e formalismo. Nosso ponto de partida será o exame do conceito de intuição, procurando mostrar que a discussão contemporânea sobre os fundamentos retoma tópicos da filosofia moderna continental. Com efeito, a "gigantomachia sobre os fundamentos", cujo ponto extremo chega por volta da década dos 20, é alheia tanto ao "linguistic turn", quanto a assinalar o caráter de ciência quase-empírica de tipo hipotético-dedutivo à matemática, quanto a uma concepção coerentista da verdade.

A Parte I, *Intuição e definição em Descartes, Leibniz e Kant*, está dedicada a expor os antecedentes históricos do conceito de intuição no período que vai de Descartes a Kant, atendendo fundamentalmente à relação entre intuição -levando em conta as diversas notas que são atribuídas a esse conceito- e verdade matemática. Nesta Parte I, que contém dois capítulos, nosso interesse centra-se, por um lado, na determinação das funções atribuídas por Descartes e Kant à intuição em relação à matemática; pelo outro, na crítica leibniziana à intuição cartesiana. Duas funções, em princípio diferentes, são particularmente relevantes para o nosso trabalho. No Capítulo 1, *A crítica de Leibniz à intuição cartesiana*, tratamos da primeira delas, isto é, a função atribuída por Descartes à intuição de servir como instância de justificação de enunciados gerais. No Capítulo 2, *O construtivismo kantiano*, tratamos da segunda função, atribuída por Kant à intuição; a saber, a função de servir como instância que permite afirmar a existência de um objeto que corresponda a um conceito matemático.

O exame do conceito de intuição em Descartes e Kant parece-nos apontar na direção de um dilema que enfrenta toda variante de construtivismo: ou um conceito de intuição que dê conta dos enlaces entre conceitos - que dê conta em particular de afirmações gerais - ou um conceito de intuição que dê conta apenas do caráter não-vazio de um conceito. Ora, se o exame em torno de Descartes e Kant é feito em função do caráter epistemologicamente obscuro que para Hilbert tem o conceito de intuição, o exame das concepções de Leibniz pretende mostrar que Hilbert retoma alguns temas do pensamento leibniziano.

No Capítulo 1 da Parte I dedicamo-nos então a examinar que temas da filosofia de Leibniz, enlaçados com a crítica deste a Descartes, reaparecem em Hilbert. Em primeiro lugar, Leibniz critica o recurso exclusivo à intuição por parte de Descartes como contrário à intersubjetividade caraterística da ciência. Em segundo lugar, Leibniz assinala que deve ser oposta à intuição uma instância formal intersubjetiva: a definição e a demonstração de possibilidade do definido. O terceiro tema "Possível implica existente" é a conseqüência ontológica atribuída à demonstração de possibilidade do definido. Além disso, Leibniz leva a um primeiro plano a questão da importância do uso do formalismo na matemática. Aqui aparecem, tanto um quarto quanto um quinto tema leibniziano: o da *characteristica universalis* em geral, e como, em particular, o formalismo permite lidar com o infinito através do finito.

Na Parte II, *O Programa de Hilbert*, examinamos em que medida podemos aproximar o pensamento de Hilbert ao de Leibniz e Kant. Também examinamos se o pensamento de Hilbert pode ser associado com posturas relacionadas com o empirismo lógico e com o instrumentalismo que aparecem nos anos 20. A Parte II contém três capítulos. Os Capítulos 3 e 4 estão dedicados essencialmente a examinar a conexão com Leibniz e o Capítulo 5 a conexão com o empirismo lógico e o instrumentalismo. Além disso, examinamos no Capítulo 4 em que medida, como algumas interpretações pretendem, podemos aproximar o pensamento de Hilbert ao de Kant.

No Capitulo 3, *Temas leibnizianos no Programa de Hilbert*, não pretendemos postular uma influência direta de Leibniz sobre Hilbert, senão mostrar que Hilbert procede, na sua critica a uma fundamentação da matemática na intuição, de maneira semelhante a como Leibniz procede na sua crítica à intuição cartesiana. Naturalmente, a primeira coisa que pode pensar o leitor é que nos referimos à tese hilbertiana "Consistência implica existência" e a relacionamos com "Possível implica existente". Mas não será nesta associação costumeira que nós insistiremos. Muito pelo contrário, deveremos mostrar que os outros temas leibnizianos que indicamos são os que subsistem em Hilbert, *inclusive* quando na evolução do seu pensamento abandona a tese leibniziana "Consistência implica existência".

Tais temas leibnizianos principalmente são: a crítica à intuição como subjetiva e, portanto, como inadequada para a fundamentação da matemática; a substituição da intuição, no âmbito dos fundamentos, não já pelas definições de Leibniz, senão pelo sistema de axiomas e sua prova de consistência, com ou sem a implicação ontológica "Consistência implica existência"; os diversos aspectos da função do simbolismo, seja o "tratamento do infinito através do finito" via sistema de axiomas, seja a "visualização" da não-contradição via o simbolismo e a conseqüente importância fundacional da percepção.

Adiantamos também no Capítulo 3 uma distinção que achamos fundamental e que percorrerá o resto do trabalho: a distinção entre a matemática como ciência e a matemática quando considerada como objeto da metamatemática. A distinção entre matemática propriamente dita (a matemática formalizada) e metamatemática é de Hilbert, mas nós formulamos essa distinção de maneira tal que quando no contexto metamatemático formulamos uma afirmação sobre a matemática, levemos sempre em conta que se trata de uma afirmação determinada pela perspectiva de estudo, isto é, o que é suficiente entender por matemática quando o objetivo é uma prova de consistência. O que importa num programa de fundamentos como o hilbertiano é, segundo achamos, que podemos entender por número de forma tal que a intersubjetividade do ponto de partida seja universalmente aceita. Portanto, não devemos confundir teses cuja função é metodológica com teses filosóficas substantivas em relação à matemática. Para destacar este aspecto servimo-nos da mencionada distinção entre matemática propriamente dita e metamatemática.

O Capítulo 4, *Formalismo e conteúdo no Programa de Hilbert*, pretende, em primeiro lugar, mostrar que não podemos falar de Hilbert como um *formalista extremo*, isto é, como se a matemática fosse um "operar cego" com símbolos, da mesma maneira que não podemos fazê-lo no caso de Leibniz. Ora, na medida em que o formalismo substitui a intuição, a percepção adquire então uma papel fundacional manifesto: os objetos da percepção são, neste contexto, os símbolos. Mas na evolução do pensamento de Hilbert a percepção vai adquirir um novo papel na sua função de substituir como instância de fundamentação à intuição construtivista.

No Capítulo 4, além de salientar como permanecem os temas leibnizianos indicados no capitulo anterior, desenvolvemos a maneira como se realiza a mencionada substituição da intuição pela percepção. Na determinação do chamado "ponto de vista finito", a percepção aparece com uma função metodológica diferente da atribuída nos primeiros escritos: determina a parte de aritmética que é aceitável do "ponto de vista finito". Desta perspectiva, examinamos no Capítulo 4 se esse novo papel aproxima o pensamento de Hilbert ao de Kant. Nossa conclusão é que tal aproximação resulta em assinalar que há dificuldades na proposta de Hilbert em relação à função atribuída por ele à percepção, dificuldades semelhantes às que encontramos quando examinamos a função atribuída por Kant à intuição.

Mas, no Capítulo 4, tratamos também da aparição de um conceito kantiano em Hilbert, isto é, do conceito de "idéia da razão". Porém, não se trata de detectar um kantismo hilbertiano. Com efeito, um tema presente no pensamento de Kant, a seqüência intuição - conceitos - idéias, nos fornece elementos para tratá-lo em analogia com uma seqüência que aparece em Hilbert, isto é, a seqüência percepção - conceitos finitários - conceitos transfinitos. Poderíamos dizer então que o que resgatamos como kantiano em Hilbert é este aspecto da "teoria dos conceitos" de Kant.

Ora, destacávamos no inicio que a significação atribuída por Hilbert à prova de consistência não permanece constante, a diferença da nota de intersubjetividade constantemente atribuída à percepção. Em particular, face à maneira em que se pretende proceder na mencionada prova, é necessário considerar dentro do sistema formal que parte representa a matemática aceitável "do ponto de vista finito", isto é, justificada pela percepção, e que parte não. Considerada como tese substantiva acerca da matemática, conduz a uma interpretação que qualificamos de formalista moderada: há uma parte da matemática que tem significado, aquela justificada pela percepção, e outra que não tem significado. A leitura hoje mais freqüente do Programa de Hilbert é uma variante de interpretação formalista moderada: a interpretação instrumentalista.

Na linha de considerar que Hilbert é um formalista moderado, a parte da matemática chamada de "ideal" é concebida como um mero *device*, sem conteúdo semântico, cuja função *instrumental* é deduzir enunciados matemáticos verdadeiros do ponto de vista finito. Procedemos no Capitulo 5, *As interpretações instrumentalistas do Programa de Hilbert*, a examinar interpretações que atribuem a Hilbert o tipo de empirismo associado com o positivismo lógico, o operacionalismo de Bridgman e o instrumentalismo. Salientamos algumas coincidências (metodológicas), mas não deixamos de perceber divergências que fazem suspeitas tais interpretações. No Capítulo 5 pretendemos mostrar que a visão geral que tem Hilbert do conhecimento científico não permite uma leitura de sua obra na qual os conceitos matemáticos sejam meros instrumentos arbitrários. Outrossim, utilizamos também este capitulo para insistir naquilo que denominamos temas leibnizianos no Programa de Hilbert.

Na *Conclusão*, sintetizamos as razões que nos levam a pensar que o pensamento de Hilbert partilha tendências gerais do pensamento de Leibniz, excluído naturalmente o logicismo deste último. Parece-nos que, no que toca à justificativa filosófica do programa de fundamentação, encontramos em Leibniz o "espirito" filosófico do Programa de Hilbert. Esgota isto a questão? Achamos que não. Se encontramos, da "teoria do formalismo" leibniziana, um eco no pensamento de Hilbert, encontramos nele também um aspecto da "teoria dos conceitos" de Kant. Encontramos os aspectos acima assinalados, em ambos os casos, como não poderia ser de outra maneira, com substanciais modificações, eventualmente inaceitáveis no caso específico de Kant.

Para finalizar, esperamos que o leitor ache em nosso trabalho senão uma filosofia hilbertiana da matemática, pelo menos uma maneira diferente de enfrentar o problema que sugira uma nova leitura em relação aos "ismos" aludidos no início desta introdução. Não achará uma filosofia hilbertiana da matemática porque ela não existe. No máximo, encontrará os princípios que, segundo achamos, deveriam informar uma tal filosofia.

Parte I

Intuição e definição em Descartes, Leibniz e Kant

Capitulo 1
A crítica de Leibniz à intuição cartesiana

1.0. Apresentação

Uma objeção central que pode ser feita ao conceito de intuição é sua obscuridade epistemológica. Parte desse caráter obscuro depende de uma certa ambigüidade em relação àquilo de que ela pretende dar conta, isto é, se efetivamente as notas que são atribuídas à intuição são conseqüentes com o resultado em geral pretendido: a aprioridade e a necessidade que a tradição filosófica concede às verdades matemáticas. O construtivismo matemático usa (e abusa) do conceito de intuição, conceito cujas raizes podem ser encontradas seja em Descartes, seja em Kant, ou, mais contemporaneamente, em Husserl. A Seção 1.1. do presente capítulo é dedicada ao exame das raízes cartesianas do conceito de intuição no construtivismo contemporâneo, enquanto que o Capitulo 2 é dedicado ao exame das suas raízes kantianas.

Dois aspectos nos interessa destacar em relação ao conceito de intuição. O primeiro é a relação que existe entre intuição e afirmações universais, no sentido em que a intuição opera como instância de justificação de tais afirmações. Este aspecto da intuição será o que destacaremos em Descartes. O segundo aspecto é a relação que existe entre a intuição e a existência de objetos matemáticos. Este aspecto será aquele que destacaremos em Kant. O ponto que é relevante para nossos fins é que os *dois* conceitos de intuição têm seu papel numa filosofia da matemática construtivista. Mas, o que nós procuramos não é uma elucidação desses conceitos *qua* faculdades, senão precisamente as notas que em relação à matemática lhe são atribuidas e se elas são tais que, pelo exame interno, resultam suficientes para dar conta do que se pretende, isto é, determinar a natureza da matemática.

Na Seção 1.2. intentamos mostrar em que medida Leibniz pode ser considerado um precursor de Hilbert. Procuramos salientar, na peculiar maneira em que Leibniz realiza a crítica à intuição cartesiana, temas que percorrem, segundo nos parece, o pensamento de Hilbert. Por um lado, tais temas leibnizianos estão relacionados com a crítica de Leibniz a Descartes no sentido seguinte: a intuição é uma instância *subjetiva* que deve dar lugar, na teoria do conhecimento, a uma instância *intersubjetiva*. Por outro lado, falamos também de temas leibnizianos em relação ao papel atribuido por Leibniz em geral ao formalismo. São estes temas os que delatam não uma influência direta de Leibniz sobre Hilbert, senão uma *forma mentis* comum para enfrentar um inimigo também comum: restrições construtivas entendidas como expressão de pontos de vista subjetivos de fundamentar a matemática.

Ora bem, o objetivo a alcançar nesta discussão histórica preliminar é salientar que temas da filosofia moderna continental aparecem, *mutatis mutandis*, na discussão contemporânea sobre os fundamentos da matemática. Atribuimos a nossas afirmações o caráter de conjecturas plausíveis, eventualmente insuficientemente documentadas. Mas entendemos que o tratamento dado a estas questões é suficiente para o objetivo mencionado. Além disso, por razões de ordem expositiva, decidimos antecipar, neste capítulo e no seguinte, conexões entre os autores aqui considerados e a problemática central do nosso trabalho, cujo tratamento sistemático será feito nos capítulos da Parte II. Acaso tal decisão resulte em reiterações não necessárias, que esperamos o leitor saiba desculpar em beneficio de fazer as mencionadas conexões o mais evidentes possíveis.

1.1. O construtivismo cartesiano

Como é bem conhecido, Descartes dá uma significação distinta da tradicional ao termo "idéia". Na tradição o termo alude a uma entidade supra-temporal e supra-espacial, na linha das formas platônicas, e não a um "modo do nosso pensamento". No contexto da distinção entre "coisa pensante" e "coisa extensa", as idéias, e não as coisas, resultam ser o "objeto imediato do nosso pensamento"[1]. Assim, aparece como problema a resolver a relação entre nossas idéias e as coisas, onde as primeiras representam as segundas.

As idéias, segundo já dissemos, são modos do nosso pensamento; não podemos distingui-las, na terminologia de Descartes, pela sua realidade formal: modos do pensamento são tanto a idéia de Deus, de

[1] Mas também é possível interpretar que as idéias são para Descartes "o ato do pensamento" ou "uma disposicionalidade". Para um exame da evolução do conceito de idéia no periodo que nos ocupa, veja-se McRae, R. " 'Idea' as a Philosophical Term in the Seventheenh Century".

vermelho ou de casa. Porém, quanto ao representado por elas, quanto a sua realidade objetiva[2], sim podemos distingui-las: idéia de substância infinita no primeiro caso, de acidente no segundo, de substância finita no terceiro. Sob essas condições, que podemos dizer, em particular, sobre as idéias matemáticas?

Na *Quinta Meditação*, Descartes equipara enquanto verdades de uma mesma ordem a afirmação "Deus existe" com o teorema geométrico "A soma dos ângulos internos de um triângulo somam 180°". A demonstração da existência de Deus parte da intuição da idéia de um ser perfeito, idéia que implica a existência do "ideado". Porém, que acontece com afirmações do tipo "Os triângulos existem" ou "Os centauros existem"? Em ambos os casos não deduzimos a existência de tais entidades, embora tenhamos as idéias correspondentes. A resposta cartesiana consiste em afirmar que no caso de Deus essência e existência são inseparáveis, de forma tal que fica assegurado o objeto do que depois virá a ser conhecido como teologia racional.

No entanto, o que assegura o objeto da geometria? Devem existir triângulos ou números, em algum sentido da palavra "existir", para termos verdades matemáticas? Descartes evita sistematicamente afirmar se os triângulos ou os objetos matemáticos em geral existem ou não na natureza[3]. Ora, se não há números ou triângulos na natureza, cria então a matemática um universo de ficção? Descobrimos relações matemáticas ou as inventamos? Responder a estas perguntas em Descartes tem a dificuldade adicional da sua teoria da livre criação divina das "verdades necessárias", mas no que segue não precisaremos considerar este aspecto.

Ora, partindo do fato de termos idéias matemáticas, poderíamos pensar que, por exemplo, "Os triângulos existem" é uma afirmação verdadeira se há no mínimo um triângulo. Mas também podemos pensar que "Os triângulos existem" deve ser entendida como "A triangularidade existe", onde a última palavra exigiria uma interpretação diferente, isto é, existência de universais (reificados ou não), e não de objetos que "correspondam" a uma idéia. Ora, o objeto das matemáticas, segundo o estabelecido na *Quinta Meditação*[4], são "essências", "formas", "naturezas" que correspondem a cada idéia matemática.

---

[2] Para a definição de "realidade objetiva", veja-se *Resposta às Segundas Objeções*

[3] Na *Primeira Meditação*, # 8, por exemplo, a geometria e a aritmética procedem em relação às "coisas" de que tratam "sem cuidarem muito se elas existem ou não na natureza". Na *Quinta Meditação*, # 5, as idéias aritméticas e geométricas "não podem ser consideradas um puro nada, embora talvez elas não tenham nenhuma existência fora do meu pensamento".

[4] Cfr. *Quinta Meditação*, # 5. Baseado na argumentação desenvolvida por Descartes nesta *Meditação*, Arnaud infere que as idéias são "o ato do pensamento" e não seu "objeto imediato". Cfr. R. McRae, *Op. cit.*

Às idéias inatas, como são as idéias matemáticas, correspondem, se podemos generalizar, essências. Ora, nas idéias matemáticas, diferentemente da idéia de Deus, sim podemos separar a essência da existência. As afirmações geométricas, então, podem ser entendidas "neutralmente" assim: se houvesse tais e tais objetos geométricos - no sentido de existência de um objeto - teriam tais e tais propriedades, isto é, aquelas que pertencem a sua essência.

No entanto, a pergunta pela existência das entidades geométricas era respondida na tradição histórica precedente a Descartes - na geometria de Euclides em particular - de maneira diferente. No caso do triângulo, por exemplo, podemos supor que existem três pontos num plano. Podemos também supor que entre quaisquer dois pontos podemos traçar uma linha reta. Finalmente, unindo os três pontos por retas, temos uma figura de três ângulos, e isto quer dizer que os triângulos existem: podemos construí-los.

A existência dos pontos, das retas e dos circulos é afirmada na axiomática de Euclides. Em relação aos pontos, Euclides dá uma definição e assume a *existência* dos mesmos. No que diz respeito a retas e círculos, os três primeiros postulados - axiomas na terminologia moderna - permitem a) traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto (Postulado 1); b) prolongar uma linha reta em qualquer direção (Postulado 2); c) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio (Postulado 3). De maneira implícita, os postulados implicam, além da *existência* de linhas retas e circulos, que a linha reta produzida e a linha reta prolongada são *únicas*.

Os primeiros três postulados são usualmente chamados de "postulados de *construção*", pois afirmam a possibilidade de certas construções e sua legitimidade. Os dois restantes postulados têm um caráter um tanto diferente. Um deles (Postulado 4) afirma que todos os ângulos retos são iguais; o postulado das paralelas (Postulado 5) afirma que se uma reta corta duas retas de forma tal que faz os ângulos internos de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram do lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos[5] .

Dizer neste contexto que uma entidade geométrica existe é, caso não seja sua existência assumida, construí-la a partir dos postulados. O Livro I dos *Elementos* de Euclides mostra claramente como as construções são meios de provar a existência de entidades matemáticas previamente definidas. Ora, do ponto de vista matemático, os meios de construção permitidos são restrições que devemos aceitar: não existem mais

[5] Cfr. Th. Heath. *A History of Greek Mathematics*, Vol. I, ch. XI.

objetos matemáticos que os construídos a partir deles. Por outra parte, do ponto de vista ontológico, o problema se reduz à existência das entidades fundamentais.

Por certo, pontos, retas e círculos não são menos problemáticos que os triângulos. Não temos, em princípio, tais entidades na natureza como não temos centauros. Mas a existência de objetos que correspondam às idéias matemáticas não é para Descartes um problema central. O que sim é relevante para Descartes é a origem das idéias matemáticas. Uma idéia como a de centauro ou inclusive alguma idéia de um objeto sensível poderia ser produzida por nós[6]. Ora, ainda que se pudesse pensar que a idéia de triângulo possa vir dos sentidos, não poderia acontecer o mesmo, segundo Descartes, com idéias mais complexas como a de um miriágono[7]: as idéias geométricas são inatas, nossas capacidades nos permitem, a partir delas, fazer geometria.

Nas *Regras*[8], onde temos o exame mais detalhado sobre a natureza da matemática, Descartes trata precisamente das capacidades que se precisam para fazer matemática: intuição de idéias e dedução[9]. Por certo, a mudança do significado da palavra idéia é acompanhada por uma mudança do significado da palavra intuição: não se trata do dado pela percepção senão de "uma representação que é o resultado da inteligência pura e atenta, representação tão fácil e tão distinta que não subsiste dúvida nenhuma sobre o que aí se compreende"[10]. A intuição de idéias - a inspeção simples da mente das *Meditações* - é, então, a condição de possibilidade do preceito metódico de evidência, isto é, "não receber jamais coisa alguma por verdadeira que eu não a conhecesse evidentemente como tal"[11].

Ora, embora Descartes elimine algumas restrições que os geômetras gregos impunham para considerar adequadas certas soluções para problemas geométricos, a referência às nossas capacidades impõe limites para a admissão de entidades matemáticas. Já vimos que nos *Elementos* apenas se admitem retas e círculos, isto é, construções com régua e compasso. Descartes reduz o papel do desenho na geometria através da consideração das expressões analíticas das curvas[12], que são introduzidas para evitar a fadiga com desenhos. O problema

[6] Na *Sexta Meditação*, Descartes rejeitará essa hipótese provisória.
[7] Cfr. *Quinta Meditação*, # 6.
[8] *Règles pour la direction de l'esprit*, doravante citado *Regras*.
[9] Cfr. Regra III.
[10] Cfr. Regra III.
[11] Cfr. *Discours de la Méthode*, doravante citado *Discurso do Método*, Seconde Partie, p. 586.
[12] A geometria cartesiana pode ser considerada *tanto* um tratamento algébrico da geometria *quanto* um esclarecimento da álgebra pela geometria.

tratado é simplificado algebricamente e depois é resolvido geometricamente. Porém, as expressões analíticas têm como correlatos idéias clara e distintamente intuídas.

Com efeito, aceitar certas curvas como legítimas, e não outras, repousa sobre certas condições, por exemplo, o fato de poder determinar o comprimento das curvas em questão. Para reconhecer apenas como legítimas aquelas linhas que satisfaçam tal condição, Descartes introduz um axioma adicional aos euclidianos: "E não é necessário nada mais do que supor para traçar todas as linhas curvas que eu pretendo aqui introduzir, senão que duas ou mais linhas possam ser movidas uma pela outra, e que suas intersecções determinem outras"[13].

A mencionada condição, a determinação do comprimento de uma linha para sua aceitação, tem a ver justamente com a capacidade de intuição. A "exatidão do raciocínio", caraterística da matemática, vem garantida pela clareza e distinção da intuição, que tem seu correlato no axioma acrescentado por Descartes. A rejeição das chamadas "curvas transcendentes" por inexatas não tem relação com questões de "existência", senão com nossa incapacidade de conhecê-las. Com efeito, as curvas transcendentes são geradas por dois movimentos independentes, dos quais não se pode medir exatamente a relação, como no caso de π, isto é, da relação entre o diâmetro e a circunferência.

Um outro exemplo deste ponto de vista é o tratamento de Descartes da questão do infinito atual nos *Princípios da filosofia*, onde essa noção não é descartada como contraditória, senão simplesmente ininteligível para nós enquanto entes finitos: o aparentemente infinito é considerado como indeterminado ou indefinido[14]. Em carta a Mersenne, Descartes rejeita como argumento contra o infinito atual que aceitar o infinito atual implicaria aceitar um infinito maior do que outro e que, pelo fato de isto ser absurdo, então o infinito atual não existe. Sem encontrar argumentos para achar tal fato absurdo escreve:

"E além disso, que razão nós temos para julgar se um infinito pode ser maior do que outro ou não, visto que ele deixaria de ser infinito se nós pudéssemos compreendê-lo."[15]

Da mesma maneira, então, que com as chamadas curvas transcendentes, a rejeição do conceito de infinito atual se relaciona com nossas capacidades cognitivas, e não em considerações ontológicas sobre a natureza

[13] Cfr. *The Geometry*, p. 42.
[14] Cfr. *Princípios da Filosofia*, artigos 26-27.
[15] Resposta a Mersenne do 15 de abril de 1630, p. 262.

dessas entidades. Nosso conhecimento geométrico baseia-se na intuição das idéias geométricas: a capacidade cognitiva fundamental. O caráter de "simples" que tais idéias têm permite a clareza e a distinção da intuição. A certeza que advém da intuição é possível por serem as idéias geométricas inatas: nela nada é admitido que possa ser posto em dúvida pela experiência[16]. Ora, além da intuição, a outra capacidade que se requer na matemática é a dedução: a matemática procede por dedução a partir do dado pela intuição.

Que a dedução opera a partir do dado pela intuição quer dizer: a) que a intuição é também uma instância para a justificação de afirmações; b) que justifica também os raciocínios corretos: "Ora, esta evidência e esta certeza da intuição não são apenas requisitos para as enunciações simples, senão também para toda espécie de marcha discursiva."[17] Por "marcha discursiva" aqui devemos entender dedução. Porém, o papel da dedução é em certa medida trivializado por Descartes: ninguém erra numa dedução.

Ora, devemos discriminar nas *Regras*, embora Descartes não o faça explicitamente, no mínimo dois sentidos diferentes de dedução como marcha discursiva: a) dedução como "conseqüência imediata" de uma ou mais premissas; b) dedução como "demonstração", isto é, como uma cadeia cujo último elo é a afirmação a ser demonstrada. Quando Descartes diz que a dedução "pode faltar caso não seja vista, mas não pode jamais ser mal feita por um entendimento dotado de razão"[18] está-se referindo a conseqüências imediatas de uma ou várias afirmações.

No primeiro sentido de dedução, a intuição opera como fundamento do raciocínio correto, isto é, capta a correção do mesmo. E a captação da correção de um raciocínio é ainda mais certa que a própria intuição de idéias, no sentido acima mencionado de que ninguém erra numa dedução, entendida como "a inferência pura e simples de uma coisa a partir da outra"[19]. Neste primeiro sentido podemos dizer que a dedução se reduz a uma forma da intuição, como mostra a passagem que segue imediatamente à última citada: "Com efeito, seja, por exemplo, o resultado seguinte: 2 e 2 fazem tanto quanto 3 e 1; é necessário *ver intuitivamente* /nossos grifos/ não somente que 2 e 2 fazem 4 e que 3 e 1 fazem igualmente 4, senão também que de estas duas proposições se conclui necessariamente essa terceira."[20]

[16] Cfr. Regra II.
[17] Regra III.
[18] Cfr. Regra II.
[19] Cfr. Regra II.
[20] Regra III.

Mas no parágrafo imediatamente posterior Descartes se apressa a distinguir, da nossa perspectiva, entre marcha discursiva como "conseqüência imediata" e "demonstração". No segundo sentido, aquele de demonstração, a evidência da afirmação demonstrada, que decorre da demonstração, é problemática: mesmo que cada elo seja evidente, o resultado, ainda que conhecimento certo, como tal não é evidente por si próprio:

"Pode-se perguntar porque, além da intuição, acrescentamos aqui um outro modo de conhecimento, aquele que se faz por *dedução*, a qual nós entendemos como sendo tudo aquilo que se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza. Foi necessário proceder assim, porque para a maior parte das coisas que são objeto de um conhecimento certo, ainda que não sendo por elas mesmas evidentes, é suficiente que sejam deduzidas a partir de princípios verdadeiros e já conhecidos."[21]

Em tal caso, uma evidência que se aproxime da evidência da intuição se obtém percorrendo a demonstração de forma tal que, com o auxílio da memória, a demonstração seja vista, na medida do possível, como uma unidade. A passagem citada continua dizendo como se deduz a partir de princípios verdadeiros e já conhecidos:

"por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que de cada termo prenda uma intuição clara: não é de outro modo que sabemos que o último elo de uma comprida cadeia está unido ao primeiro: ainda que nós não vejamos de uma olhada só o conjunto de elos intermediários do qual depende esta união, é suficiente que os tenhamos examinado um após outro e que nos lembremos que do primeiro ao último cada um deles está unido a seus vizinhos imediatos."[22]

Isto é, cada união entre elos, obtida por conseqüência imediata e fundamentada na intuição, é evidente. O conhecimento da afirmação demonstrada depende da correção "passo a passo" da cadeia, mas isto não implica que a cadeia mesma seja "objeto da intuição", no sentido de reduzir-se à mesma. Este segundo sentido de dedução, isto é, demonstração, é para nós irredutível à intuição. Não podemos coincidir com A. Raggio em que "a dedução é, pois, para Descartes uma forma especial da intuição; uma cadeia de intuições elementares unificada por um ato da memória"[23]. A passagem citada por Raggio em apoio de sua posição, quando citada na íntegra, nos parece que mostra precisamente que essa unificação, que justificaria falar da demonstração

[21] Regra III.
[22] Regra III.
[23] Raggio, A. R. "La filosofia matemática de Kant", p. 14.

como uma forma especial da intuição, não é em geral possível. Raggio cita o que vem imediatamente após a última passagem:

"Distinguimos aqui a intuição intelectual da dedução certa, em que numa se concebe uma sorte de movimento ou sucessão e não na outra /até aqui o citado por Raggio/, e porque, por outra parte, para a dedução não há necessidade, como para a intuição, de uma evidência atual, senão que, de certa maneira, toma emprestada da memória sua certeza."[24]

Para nós, a evidência atual como nota da intuição aparece no reconhecimento de conseqüências imediatas ou raciocínios corretos, e desaparece quando se trata de uma cadeia demonstrativa, ainda que numa conseqüência imediata também possamos falar de um "movimento" das premissas à conclusão. A passagem continua como segue:

"Do anterior se segue que pode ser dito das proposições que se concluem imediatamente a partir de primeiros princípios que se as conhece, segundo o ponto de vista do qual se coloque, tanto pela intuição, quanto pela dedução; mas que os primeiros princípios eles mesmos não são conhecidos senão pela intuição, enquanto que as conclusões longínquas não poderiam sê-lo senão pela dedução."[25]

Uma afirmação, então, cujo conhecimento é o resultado de uma dedução no sentido de demonstração, carece da evidência pontual das afirmações intuídas "diretamente", o que mostra, de outra maneira, que a demonstração é irredutível a uma forma da intuição. Além da intuição de idéias, a intuição garante a correção das inferências, mas o conhecimento precisa do complemento da demonstração, irredutível a uma forma da intuição. Mas vemos também que a intuição opera na justificação de afirmações gerais ou princípios, isto é, de estruturas que envolvem algum tipo de enlace entre idéias, sejam essas afirmações consideradas usualmente como princípios ou não.

Assim, o fato de na base da geometria cartesiana estar a intuição de idéias na forma descrita tem por conseqüência uma relativização da axiomática. Com efeito, quando analisamos a concepção clássica do método axiomático vemos que justamente Descartes discute ponto a ponto seus pressupostos. Em primeiro lugar, não aparece como objetivo fixar axiomas com a pretensão de definitivos. A passagem que citamos da *Geometria*

---

[24] Regra III.

[25] Regra III.

introduz um axioma necessário *apenas* para os problemas que se pretendem resolver. O autêntico ponto de partida é a consideração de idéias e seus enlaces: daí obteremos, se for o caso, os axiomas. Justificamos, então, a introdução de axiomas também pela intuição, num contexto diferente de operação. Em geral, é suficiente que uma afirmação seja clara e distintamente intuída para ser o ponto de partida de uma demonstração, seja ou não concebida como axioma.

Em segundo lugar, naturalmente, está a crítica ao papel das figuras auxiliares numa demonstração na geometria clássica. Em terceiro lugar, as definições - às quais Descartes atribui apenas o papel de indicar o significado de uma palavra - são substituídas pela intuição no primeiro plano que destacamos: a captação imediata de uma idéia. Tal captação dá conta da existência matemática, isto é, substitui, em princípio, tanto as definições que incorporam uma suposição de existência quanto aquelas nas quais se deve provar a existência do definido. Axiomas, definições e figuras auxiliares são, como é bem conhecido, três elementos fundamentais da concepção geométrica clássica. Trataremos a seguir de um quarto elemento, que implica uma discussão mais detalhada sobre a natureza da lógica.

O quarto elemento da concepção clássica do método axiomático é a demonstração como cadeia dedutiva e já destacamos que cada conseqüência imediata é justificada pela intuição. A análise de Raggio, que continuaremos a examinar, está dirigida a mostrar que Descartes antecipa teses em filosofia da matemática que genericamente podemos denominar *construtivistas*, por oposição a teses que também genericamente podemos denominar *formalistas*, associadas com o pensamento de Leibniz, das quais trataremos na seção seguinte.

Em particular, a oposição entre formalistas e construtivistas se reflete em conceitos diferentes de dedução, um conceito clássico e outro construtivista. Vejamos como descreve Raggio esta diferença:

"Dados os enunciados P1, P2,...,PN e C, segundo a concepção clássica da dedução -utilizada implicitamente desde os gregos e que Bolzano formulou pela primeira vez de maneira rigorosa- C é dedutível dos Pi quando, dado uma análise lógica dos enunciados, é impossível encontrar circunstâncias que fazam os Pi verdadeiros e C falso. Para o construtivismo, no entanto, C é dedutível de ditas premissas se é o último elo de uma cadeia de operações que aplicadas aos Pi produzem C."[26]

[26] Raggio, A.R. *Op. cit.*, p. 14.

A oposição se reflete entre uma noção *abstrata ou formal* de dedução como a clássica e uma *intuitiva* como a construtivista. No primeiro caso, a justificação da noção clássica remete a uma totalidade infinita de possíveis circunstâncias que vinculam as premissas e a conclusão no que diz respeito à preservação da verdade como nota característica de uma dedução. No segundo caso, a noção construtiva recorre a operações especificas e justificadas por si mesmas. Com esta distinção, Raggio procede a examinar o conceito cartesiano de demonstração como um conceito construtivo ao qual atribui, entre outras, a nota de ser uma série discreta[27], que é a que nos interessa.

Aqui discreto é oposto a denso, no seguinte sentido: o "movimento" ao qual se refere Descartes na dedução de B a partir de A não admitiria passos intermédios. Assim, argumenta Raggio, o conceito cartesiano de dedução não pode ser o conceito clássico, pois se $A \rightarrow B$ é logicamente válido (ou, o que é o mesmo, B é inferido corretamente de A), A não é uma contradição e B não é logicamente válido, então classicamente existe C tal que $A \rightarrow C$ e $C \rightarrow B$ são logicamente válidos. Isto é, do ponto de vista clássico vale o teorema de interpolação, o que implica a existência do passo intermédio possível e, portanto, o caráter denso, e não discreto, das cadeias dedutivas.

Com efeito, se B se deduz de A, existe C (o interpolante) tal que C se deduz de A e B se deduz de C; portanto, não há conexões dedutivas mínimas pois "sempre podem ser interpoladas entre a premissa e a conclusão duas conexões dedutivas menores através do enunciado interpolante."[28] Descartes, conclui Raggio, concebe as cadeias dedutivas à maneira construtiva, onde por discreto se entende: "se uma construção formulada mediante uma regra se aplica a um objeto para produzir outro, este processo, não como processo físico, porém sim como aplicação de dita regra, é indivisível."[29]

Raggio não critica a Descartes, obviamente, por ter desconhecido o teorema de interpolação, senão que conclui a partir de uma afirmação falsa de Descartes, aquela relativa ao caráter discreto da dedução, uma dificuldade na caraterização cartesiana das cadeias dedutivas. Mas, Descartes sim devia conhecer contra-exemplos fáceis de sua afirmação, se ele pretendia postular o que Raggio pretende: a saber, que há conexões mínimas.

---

[27] Cfr. A. R. Raggio. *Op. cit.*, pp. 14-15.
[28] Raggio, A.R., "La filosofia de la matemática de Kant", p. 15.
[29] *Ibid.*, p. 15.

Um exemplo fácil, que usa elementos triviais da silogística, é o seguinte: Sejam A e B, "Todos os homens são mortais e Alguns gregos são homens" e "Alguns homens são gregos" respectivamente. Do ponto de vista da dedução clássica A implica B, mas pela silogística sabemos do interpolante "Alguns gregos são mortais", seja C, tal que A → C (o silogismo Darii) e C → B (por conversão simples). Este tipo de exemplo - pode haver algum mais feliz - Descartes dificilmente ignoraria, o qual nos faz pensar que ele não está pensando em conexões dedutivas mínimas no sentido que Raggio sugere.

O que Raggio traduz como cadeia dedutiva discreta, segundo nos parece, se encontra na Regra VI, onde Descartes emprega a expressão "deduzido diretamente". Mas, precisamente, o que deve entender-se, conforme nos parece, está relacionado com o conceito construtivista que assinala Raggio, sem atribuir a Descartes o mencionado caráter discreto das cadeias dedutivas: a passagem dedutiva correta de A para B é um ato da intuição único, contínuo e indivisível *qua* processo de conhecimento. E então podemos olhar a crítica de Descartes à silogística também desta perspectiva: o formalismo silogístico "disseca" nexos que são para a intuição indivisíveis, como são os nexos dedutivos.

Em seu clássico livro, O. Hamelin sintetiza as críticas de Descartes à silogística: a) a silogística é um mecanismo não-inteligente; b) pressupõe a verdade no lugar de descobri-la. Para Hamelin, o que critica Descartes do silogismo é, segundo entendemos, o formalismo implícito na interpretação "em extensão" do silogismo, oposta a interpretação "em compreensão" no seguinte sentido: "O silogismo em compreensão já não permite extrair conseqüências sem atender ao sentido dos termos, e Descartes na verdade nada falou contra o silogismo assim entendido."[30]

Em relação à segunda objeção, limita-se a que Descartes simplesmente indicaria que é inútil raciocinar com regras, pois a operação dedutiva é intuitiva e procede por si própria, sem recurso a regras. Nisto, para Hamelin, haveria por parte de Descartes um descuido, na medida em que se confia excessivamente na intuição, sem atender a que leis se ajusta uma dedução quando é correta, com faz Aristóteles[31]. Para nós, esta critica de Descartes aponta para um conceito de dedução mais amplo que o de inferência dedutiva a partir de premissas, isto é, ao problema do método.

---

[30] Hamelin, O. *El sistema de Descartes*, p. 99.
[31] *Ibid.*, p. 99-102.

Com efeito, vemos que decorre da concepção da lógica de Descartes que é necessária uma instância da qual a lógica é complementar: o método. Para Descartes, a lógica serve para explicar o já conhecido, mas não para adquirir conhecimento. Que para ter conhecimento devemos raciocinar dedutivamente de maneira correta é uma exigência que obviamente Descartes aceita, trate-se da silogística ou não. O que não aceita é que, digamos, dada uma afirmação a demonstrar e os axiomas de Euclides, simplesmente se trate então de raciocinar corretamente seguindo regras.

Em geral, axiomas ou não de por meio, aquilo do qual se necessita é de um método para achar as premissas da solução de um problema, premissas que se fundamentem na intuição. Nesse método, segundo acreditamos, o caminho dedutivo ulterior de premissas a conclusão aparece para Descartes como mais ou menos implícito, mas não como produto de seguir cegamente regras de inferência, silogísticas ou não, senão de que cada passo dedutivo seja acompanhado pela intuição. Mas nós aqui deteremos nosso exame, pois envolve questões que excedem o âmbito de nossos objetivos: a) qual é o conceito geral de "dedução" cartesiano; b) se, por um lado, deve procurar-se um método de análise e um método de síntese independentes em Descartes ou se, por outro lado, deve-se falar de análise e síntese como complementares e nunca independentes. Em qualquer dos dois casos, o problema chamado da "direção da análise", exige a consideração do conceito cartesiano de dedução.

Mas, o que nós interessa aqui destacar é, por assim dizer, em que medida podemos pensar Descartes como um precursor do construtivismo contemporâneo. No mínimo, no sentido em que as criticas que Leibniz lhe dirige, são semelhantes às que Hilbert dirigira aos partidários da matemática construtiva. Nós acreditamos, por outro lado, que o papel da intuição em Descartes, tal e como nós o consideramos, permite extrair uma série de conclusões que mostram que Descartes antecipa o construtivismo contemporâneo, num sentido mais profundo que aquele em que o faz Kant.

Se temos razão em que há em Descartes uma crítica implícita à axiomática, podemos ver a crítica à silogística como um espelho da crítica à axiomática, unificadas sob o aspecto de uma crítica ao formalismo. Com efeito, que existem formas de raciocínio diferentes é obvio: qual o objeto de "axiomatizá-las", se se nos permite a analogia entre axiomática e redução de silogismos à primeira figura? Ora, falávamos acima que, na nossa interpretação, a axiomática é irrelevante no sentido de fixar axiomas "definitivos", os quais exauririam *todos* os princípios que podemos aceitar pela intuição. Para nós, precisamente, a crítica de Descartes à lógica contém esse matiz anti-formalista: a silogística e, em geral, qualquer intento de fixar dessa maneira seja a lógica seja a matemática supõe um objetivo, poderíamos dizer, em princípio inatingível: formalizar todos os procedimentos construtivos, desconhecendo a "textura aberta" da intuição. Por certo, os temas destacados nos últimos parágrafos encontram-se freqüentemente na literatura construtivista.

Ora, quando consideramos que um raciocínio *deve* vir acompanhado da intuição correspondente, então não apenas podemos rejeitar um "uso operativo" por regras formais, senão que podemos dar um passo ulterior: perguntarmo-nos se uma dada regra formal *sempre pode* ser acompanhada pela intuição, ou se, pelo contrário, existem casos em que a intuição *não pode justificar* uma tal regra. Como é conhecido, o intuicionismo chega a essa conclusão e rejeita o uso de, por exemplo, o princípio de terceiro excluído.

Todas estas considerações se reduzem, do ponto de vista filosófico, a indicar limites para o conhecimento humano, via o reconhecimento dos limites de nossa intuição, claramente declarados na *Quarta Meditação*. Observe-se, indiretamente, as conseqüências que tem nossa análise para a interpretação geral da filosofia de Descartes, na medida em que seu "racionalismo", não pode ser sem mais assimilado a projetos como a *characteristica universalis* leibniziana. Mais do que racionalismo, então, um construtivismo que atende à mencionada "textura aberta" da intuição. Em particular, são os limites de nossa capacidade intuitiva que exigem o recurso a demonstração em relação à matemática. E exigem também a instância complementar do método, no sentido fundamental que Descartes dá a essa palavra: procedimento para obter verdades.

Podemos concluir então, em função do dito, que a axiomática é, no fundo, um método de exposição, sem dúvidas o ideal, porém que não tem relevância do ponto de vista que mais interessa a Descartes: obter conhecimento. Mas devemos salientar que deve evitar-se uma identificação, favorecida por uma passagem das *Respostas às segundas objeções*, entre dedução logicamente válida, ainda que fundada na intuição, e dedução axiomática: não devemos esquecer que o conhecimento matemático se funda *também*, e não menos fundamentalmente, na dedução, sempre e quando que acompanhada pela intuição. Uma postura filosófica que, com toda justiça, podemos, em resumo, qualificar de construtivista.

1.2. Leibniz precursor de Hilbert

A concepção cartesiana da matemática se baseia centralmente na geometria, mas considerações semelhantes Descartes faz sobre a aritmética. Em particular, as observações de Descartes sobre a natureza da aritmética podem ser olhadas como ilustrando o caso metódico limite: os problemas considerados são resolvidos pelo exame de um número finito de casos, cada um dos quais se reduzem à intuição das idéias dos números naturais e das operações elementares entre eles. Porém, é evidente o pouco interesse que Descartes tem pela aritmética, possivelmente herança de sua formação em geometria clássica.

Do ponto de vista histórico, no entanto, o século XVII apresenta uma grande novidade: a aritmética chega a ter o mesmo *status* de disciplina fundamental que a geometria. Mas a aritmética não era uma ciência axiomática durante os séculos XVII e XVIII: seu método era o cálculo, cujos fundamentos ficavam na escuridão. Ora, independentemente do valor que outorguemos à axiomática no desenvolvimento da aritmética, o século XVII já assiste às primeiras tentativas de fornecer uma apresentação axiomática da mesma. Para essa transformação iniciar-se, temos que chegar a uma concepção que Leibniz implicitamente enuncia: calcular é demonstrar.

Em Leibniz temos, com efeito, o germe da axiomatização da aritmética. O exame do tratamento de Leibniz das fórmulas da igualdade numérica, para seguir a expressão de Kant, pode servir-nos como fio condutor das críticas que dirige a Descartes. Vejamos esta clássica passagem dos *Novos ensaios*[32] :

"Não é uma verdade de todo imediata que dois mais dois são quatro, suposto que *quatro* significa três mais um. Por conseguinte, pode-se demonstrar tal verdade, eis de que maneira:

Definições: 1) *Dois* é um mais um.

2) *Três* é dois mais um.

3) *Quatro* é três mais um.

Axioma: Colocando coisas iguais em lugar de coisas iguais a igualdade permanece.

Demonstração : 2 e 2 é 2 e 1 e 1 (def. 1)........... 2 + 2

2 e 1 e 1 é 3 e 1 (def. 2)......... 2 + 1 + 1

3 e 1 é 4 (def. 3)...................... 3 + 1

---

[32] *Noveaux Essays*, L. IV, ch. VII, #10, p. 394, doravante citado *Nuevos ensaios*.

Então (pelo axioma)..................... 4

2 e 2 é 4, como se queria demonstrar."

Anteriormente à passagem citada, Leibniz qualifica como verdades de razão às verdades geométricas e aritméticas. Leibniz pretende aplicar um critério para reconhecê-las como tais: redução das mesmas a idênticas e definições. No caso, Leibniz trata das verdades aritméticas, ficando como projeto um tratamento semelhante das verdades geométricas. Temos que considerar, então, em que consiste essa redução, que são as idênticas e qual a concepção de definição.

Grosso modo, podemos aceitar que por idênticas Leibniz entende o que hoje chamaríamos de leis lógicas, estabelecendo como critério para determiná-las um tipo de redução, isto é, sua dedução por meio de definições a partir de duas idênticas primitivas: o princípio de identidade e o princípio de não contradição. Assim sendo, a passagem citada pretende deduzir as fórmulas da igualdade numérica usando, em primeiro lugar, uma idêntica que versa sobre a igualdade. Desta forma, se estabelecem as verdades matemáticas como verdades necessárias, isto é, afirmações verdadeiras em todo mundo possível. Por certo, a crítica que se dirige a Leibniz de que as idênticas primitivas não seriam suficientes para levar a cabo seu projeto de redução[33], ainda que correta, não nos parece afetar fundamentalmente seu programa.

Com efeito, o ponto mais problemático da concepção de Leibniz parece ser o conceito de definição, e não se, além do princípio de identidade e não-contradição, devem ser adicionadas outras leis lógicas. O problema da teoria da definição de Leibniz consiste em resolver o dilema das definições não serem verdades e, no entanto, que qualquer demonstração, que Leibniz chega a afirmar não ser outra coisa senão "cadeias de definições", precisa delas. Daí que Leibniz deva fornecer uma resposta à teoria da definição de Hobbes, para quem as definições são arbitrárias[34]. Com efeito, da concepção de Hobbes e dos pressupostos de Leibniz, se concluiria que toda verdade, enquanto deduzida através de definições, seria também arbitrária:

"A. Alguns homens muito versados consideram que a verdade surge do arbítrio humano e dos nomes, ou seja, dos caracteres. B. Esta opinião é muito paradoxal. A. No entanto, a provam assim. É a definição o princípio da demonstração? B. Confesso-o, pois algumas proposições podem também demonstrar-se somente

[33] Cfr., por exemplo, Pap, A. *Semántica y verdad necesaria*, cap. I.

[34] A resposta de Leibniz a encontramos, por exemplo, em *Sobre la síntesis y el análisis universal, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar* e no *Diálogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras*.

por meio de definições unidas entre si. A. Portanto, a verdade de tais afirmações depende das definições. B. Admito-o. A. Porém, as definições dependem de nosso arbítrio. B. Como assim? A. Não percebes que está no arbítrio dos matemáticos usar a palavra 'elipse' para que signifique certa figura? E que esteve no arbítrio dos latinos impor à palavra 'círculo' o significado que exprime a definição? B. E depois quê? Podemos ter pensamentos sem palavras. A. Porém, não sem outros signos. Trata, eu te peço, de ver se podes estabelecer algum cálculo aritmético sem signos numéricos. B. Muito me turvas, pois não considerava que os signos ou caracteres fossem tão necessários para o raciocínio. A. Portanto, as verdades aritméticas supõem alguns signos ou caracteres. B. Deve ser reconhecido. A. Portanto, dependem do arbítrio humano."[35]

Ora, pode-se pensar, como aponta Dascal[36], que Hobbes - um dos "homens versados" - apresenta para Leibniz dois problemas diferentes com sua tese da arbitrariedade da definição. Por uma lado, que definir consiste em pôr nomes a um conceito e que a escolha é arbitrária, como mostra a passagem de Leibniz acima citada. Por outro, que as notas que constituem a definição de um conceito são também de escolha arbitrária. O segundo problema teria como resposta a teoria da definição real e nominal; o primeiro, uma concepção de natureza semiótica, mais precisamente, sintática.

Em relação ao segundo problema, Leibniz distingue, seguindo a terminologia medieval, entre definições nominais e reais, porém dando um significado distinto a esses termos. Por um lado, para Leibniz uma definição nominal consiste em dar apenas as notas suficientes para um objeto "cair" sobre um conceito, mas tal definição ainda deixa a dúvida se o definido é possível. Por outro lado, as definições reais fornecem as condições necessárias e suficientes, no sentido de que a definição mesma permite conhecer a possibilidade do definido[37], isto é, a não-contradição.

A definição de uma idéia é resultado de uma análise, na qual se chega aos componentes da mesma. Leibniz vai modificar tanto a concepção de idéia de Descartes quanto a terminologia cartesiana. A idéia no sentido leibniziano não é um "ato do pensamento" senão uma disposicionalidade[38]. Entendida a idéia como ato, por oposição a disposicionalidade ou potência, Leibniz fala de noção ou conceito. Desta forma, Leibniz

---

[35] Leibniz, G.W. *Diálogo sobre la conexión entre las cosas y la palabras*, p. 173.
[36] Cfr. Dascal, M. *Leibniz. Language, Signs and Thougts*, ch. 4.
[37] Cfr. *Discurso de Metafísica*, # 25.
[38] Cfr ¿Qué es idea?

pode falar de idéias mesmo que não sejam atualizadas pelo pensamento, inclusive de idéias que eventualmente nunca sejam atualizadas. Numa definição, então, faz-se uma análise conceptual, no sentido que Leibniz dá a esta palavra. Por certo, há textos nos quais Leibniz usa o termo idéia na linha do sentido platônico original.

Leibniz vai entender por *realidade* da idéia a possibilidade lógica e por *realidade objetiva* a existência do aludido por ela. Assim, reais são para Leibniz tanto a idéia de centauro quanto a de vermelho, e não a de círculo quadrado. No entanto, a primeira delas não tem realidade objetiva. A teoria das definições reais e nominais visa, então, impor condições às definições explicativas e semânticas; basicamente, a não-contradição ou a possibilidade lógica. Seguindo a terminologia de Dascal, esta concepção de Leibniz teria uma orientação semântica, e estaria dirigida a responder o primeiro problema apresentado por Hobbes. Neste contexto, em que se fala de *possibilidades* ou *essências*, parece Leibniz estar usando o termo "idéia" no sentido tradicional acima aludido.

A resposta ao primeiro problema, isto é, que a escolha dos nomes para um conceito é arbitrária, exige uma solução diferente. Trata-se de um caso especial da "teoria das expressões"[39]. Em geral, A "exprime" B se há uma semelhança (uma analogia estrutural diz Dascal) entre A e B, de forma tal que da estrutura de A podemos chegar a conhecer as propriedades de B. Ora, as formas de exprimir uma idéia são múltiplas: algumas fundadas na natureza e outras parcialmente sobre o arbítrio humano, o que quer dizer não *completamente* arbitrárias.

No entanto, apesar do caráter convencional ou por instituição de certas expressões, da mesma forma que na matemática diferentes notações conduzem a resultados idênticos, diferentes definições, *agora entendidas como expressões sintáticas de uma idéia,* exprimem algo idêntico, a saber, a mesma idéia. Tal multiplicidade de expressões não é caótica, senão que entre elas existe a mencionada analogia estrutural[40], analogia entre as próprias definições e o expressado por elas. A esta concepção de definição Dascal denomina "semioticamente orientada", entendida como uma antecipação das chamadas definições sintáticas.

Leibniz, com efeito, escapa à dificuldade apresentada por Hobbes mediante a mencionada "analogia estrutural":

[39] Para este ponto, veja-se Mugnai, M. "Idee, espressioni delle idee, pensieri e caratteri in Leibniz".
[40] Cfr. ¿Que es idea?

"Ainda que os caracteres sejam arbitrários, seu emprego e conexão tem, no entanto, algo que não é arbitrário, a saber, certa proporção entre os caracteres e as coisas, e também nas relações entre os diversos caracteres que exprimem as mesmas coisas. E esta proporção e relação é o fundamento da verdade. Com efeito, esta proporção ou relação faz com que, embora empreguemos estes ou outros caracteres, o resultado seja sempre o mesmo, ou bem algo equivalente, ou algo que corresponda proporcionalmente."[41]

Se atendemos a natureza da teoria da expressão, vemos que também as definições reais, que Dascal sugere como antecipação das definições semânticas, são também expressões de idéias, e não apenas as que denomina semioticamente orientadas. Ora, o conceito leibniziano de "expressão" deve ser, como adverte G. Lebrun[42], dissociado de "representação imitativa", conceito este último associado com os conceitos de "idéia-quadro", "idéia-imagem" ou "idéia-espelho", que têm uma raiz, sequer como metáfora, em Descartes. Terminologias como a de "analogia estrutural" de Dascal ou "invariantes" de Lebrun são escolhidas para salientar que não se trata de alguma forma de cópia de um original. Como o próprio Leibniz diz, as formas de exprimir são variadas:

"as medidas de uma máquina exprimem a máquina mesma, a projeção da coisa sobre o plano exprime o sólido, o discurso exprime pensamentos e verdades, as cifras exprimem números, a equação algébrica exprime círculos ou outras figuras."[43]

Com estas distinções podemos ver em que consiste a crítica de Leibniz a Descartes no que diz respeito à definição. A discussão com Descartes percorre caminhos diferentes da discussão com Hobbes[44] e diz respeito à importância metodológica da definição. Com efeito, enquanto que para Descartes as definições em geral e as definições matemáticas em particular são irrelevantes, pois seu ponto de partida é a intuição de idéias, para Leibniz as definições são justamente o ponto de partida que, entre outras coisas, garante a intersubjetividade do conhecimento.

Este problema se insere no contexto da crítica leibniziana ao preceito metódico de evidência. Um exemplo claro desta diferença o temos na análise que Leibniz faz do argumento ontológico na sua versão

---

[41] Leibniz, G.W. *Diálogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras*, p. 176.
[42] Cfr. G. Lebrun. "A noção de semelhança de Descartes a Leibniz", pp. 47-49.
[43] *Qué es idea?*, p. 178-179.
[44] Para uma discussão detalhada sobre este ponto, veja-se Belaval, Y. *Leibniz critique de Descartes*, ch. III.

cartesiana. Para Descartes é suficiente reconhecer que temos a intuição da idéia de um ser perfeito para daí deduzir sua existência. Para Leibniz, pelo contrário, isto peca de "subjetivismo":

"E não é suficiente que Descartes recorra à experiência e que alegue que experimenta em si próprio em forma clara e distinta algo semelhante, pois tal coisa é anular a demonstração e não resolvê-la, a menos que mostre de que modo outros podem aceder à mesma experiência."[45]

Justamente, o acesso à intersubjetividade, por oposição à subjetividade da intuição, dá-se por meio das definições. A variante que Leibniz previamente a essa passagem oferece do argumento ontológico parte de uma definição de Deus como "sujeito de todas as perfeições", para em seguida demonstrar que tal objeto é possível. Logo, após demonstrada a possibilidade do definido, como entre as perfeições encontra-se a existência, segue-se que Deus existe.

O interesse deste breve *excursus* pela teologia racional está em que esta crítica tem seu contraponto na matemática. Com efeito, Leibniz verá nas deficiências da concepção cartesiana da definição um empecilho para o desenvolvimento da própria matemática de Descartes. Com efeito, e levando em conta a importante função que progressivamente adquirem o tipo de curvas banidas por Descartes na matematização da física, entende-se, porque Leibniz afirma ter sido uma concepção errada da definição uma dificuldade para o desenvolvimento matemático de Descartes.

O segundo aspecto onde podemos ver os "defeitos" que a concepção de Descartes tem para Leibniz relaciona a intersubjetividade da definição, o papel do simbolismo e a introdução de novos conceitos matemáticos banidos pela intuição cartesiana. A perspectiva de Leibniz implica eliminar a restrição, embora parcialmente, à intuição clara e distinta das idéias matemáticas, para centrar-se na possibilidade, isto é, a não-contradição, de tais idéias. Plasticamente: possível implica existente.

Da perspectiva de Leibniz, uma definição assegura a intersubjetividade do conhecimento, via demonstração de que o objeto desse pretendido conhecimento existe: deve provar-se a não-contradição do definido. Naturalmente, o critério proposto por Leibniz introduz um relaxamento das condições restritivas de existência de entidades matemáticas. Ora, ainda que pelo visto até agora pareça que "existe" deve ser entendido no sentido de realidade da idéia e não de realidade objetiva, Leibniz privilegia, diríamos

---

[45] *El Ser perfectisimo existe*, p. 150

metodologicamente, as definições reais no sentido de definições genéticas, isto é, que mostram pela sua própria estrutura, dando uma regra de construção, a existência do definido[46].

Para Leibniz nossa faculdade de pensar é tal que "ainda que a idéia de círculo não seja igual ao círculo, dela, no entanto, podem ser obtidas verdades que a experiência confirmará no verdadeiro círculo."[47] Não trataremos aqui o que seja "o verdadeiro círculo" do ponto de vista "ontológico", entre outras coisas porque nos parece que o assunto partilha de dificuldades semelhantes às assinaladas em relação à posição dúbia de Descartes em relação à existência de objetos geométricos na natureza, se é que esta é uma questão que possa ser levada a sério. Mas o que nos interessa são duas questões que se acham relacionadas com as idéias e suas expressões. A primeira delas tem a ver com o papel das figuras geométricas numa demonstração, entendidas as figuras também como expressão de idéias ou caracteres, mais que como realidade objetiva das idéias geométricas. A segunda tem a ver com as equações da geometria analítica, que aceitamos como definições, e portanto expressões, e sua realidade objetiva no sentido seguinte: como se aplica o critério "Possível implica existente" quando estamos em presença de uma equação arbitrária.

Falávamos acima que Leibniz privilegiava metodologicamente as definições reais no sentido de definições genéticas que mostram, pela sua estrutura, a possibilidade do definido. Uma definição que não satisfaz esta condição é a seguinte: uma curva na qual dado um segmento qualquer e um ponto dentro dele seja tal que as linhas que unem o ponto com os extremos do segmento determinem sempre o mesmo ângulo. Uma definição genética da mesma "entidade" é a seguinte: figura descrita pelo movimento de uma reta num plano em torno de um extremo imóvel. Nos dois casos definimos círculo, só que para Leibniz a última definição, a definição de Euclides, faz manifesto que a figura é possível e então é conveniente ter definições que incluam a geração da coisa[48]. Ora, também podemos definir círculo - gostaríamos de dizer sintaticamente - via sua expressão analítica: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, onde a e b são as coordenadas do centro *A* e *r* representa o comprimento do raio.

Já sabemos que, independentemente das diferenças que existam entre estas definições, há para Leibniz uma invariante ou analogia estrutural que se conserva. Além disso, podemos também dizer que a segunda

[46] Cfr. *Sobre la síntesis y el análisis universales, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar*.
[47] *Qué es idea?*, p. 179.
[48] Cfr. *Sobre la síntesis y el análisis, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar*, pp. 196-197.

definição garante a realidade objetiva da idéia de círculo, no sentido de fornecermos um objeto que corresponda à idéia. Mas o que nos interessa perguntarmo-nos - a primeira das questões listadas acima - é que justifica, por assim dizer, o caminho inverso que vai de um círculo (ou de uma figura em geral) especifico à idéia de circulo, no sentido de provar afirmações universais partindo do círculo concreto. Isto é, partindo de uma expressão que é - permita-se-nos a terminologia de Kant - uma representação singular.

Deve-se naturalmente observar algum cuidado quando utilizamos o termo "representação singular" aplicado a Leibniz, na medida em que é costumeiro afirmar que Leibniz teria suprimido a distinção entre sensibilidade e entendimento, distinção recuperada por Kant. Mas G. Lebrun nos ensina que acaso não seja esta a maneira correta de entender o problema. O que está por trás disto para Lebrun é que a idéia sensível é tão expressiva quanto a clara e distinta. Como sabemos, nos dois casos, "exprimir" não é "espelhar", mas a idéia sensível é tão representativa quanto à clara e distinta[49].

Se aplicamos estas reflexões ao caso que nos ocupa, vemos que a "idéia sensível" de círculo exprime, desde uma perspectiva diferente, a idéia de circulo: não é um signo convencional pelo fato de ser sensível. Escreve Lebrun:

"Se o sensível é da mesma natureza que o inteligível, é porque *nenhum signo, no limite, é signo por instituição*; ou melhor, é porque desaparece a fronteira entre signos naturais e signos de instituição, substitutos que mostram e substitutos que dissimulam a razão de sua relação com a coisa."[50]

Assim, o que nos garante que partindo de um círculo concreto possamos deduzir propriedades universais dos círculos ou, o que vem a ser o mesmo, propriedades da idéia de círculo, é justamente que a idéia sensível de circulo exprime, a seu modo, a idéia de círculo. Isto, naturalmente, na medida em que não utilizemos nenhuma caracteristica determinada do circulo concreto (seu raio específico, por exemplo) para estabelecer propriedades acerca de todos os círculos. Em última instância, e à diferença de Descartes, não se trataria de um mero apoio sensível ou da imaginação para nossa intuição intelectual limitada.

A análise do círculo, então, ou a de qualquer figura desenhada, deve ser vista como parte de uma problemática mais geral que envolve os chamados *caracteres* ou signos. Para Leibniz, como vimos, os

---

[49] Cfr. G. Lebrun. "A noção de "semelhança" de Descartes a Leibniz", p.53.
[50] *Ibid.*, p. 53-54.

caracteres são necessários para o exercício do raciocínio, não exteriores a ele. Enquanto expressões, não é condição necessária que os caracteres tenham "semelhanças imitativas" com o exprimido. Encontramos relacionadas esta última consideração com as anteriores num escrito já citado de Leibniz:

"B. Para mim existe aquí este inconveniente: advirto que nunca poderei conhecer, descobrir, provar, sem me servir de palavras ou sem outros signos presentes ao meu espírito. A. Inclusive se não houvesse caracteres nunca pensaríamos com distinção em algo nem seríamos capazes de raciocínio. B. Porém, quando olhamos as figuras geométricas amiúde extraímos verdades delas mediante uma meditação rigorosa. A. Assim é, porém, para considerar a estas figuras como caracteres, deve saber-se que nem o círculo desenhado no papel é um verdadeiro círculo nem que isso é necessário, pois é suficiente que nós o tenhamos por um círculo. B. Porém, tem certa semelhança com o círculo e esta semelhança não é, certamente, arbitrária."

Em resumo, uma figura enquanto representação singular permite-nos obter verdades sobre uma idéia geométrica na medida em que se trata de uma expressão não completamente arbitrária desta, expressão suficiente no que diz respeito a uma semelhança "não-imitativa", porém tão representativa quanto uma representação sem elementos sensíveis ou puramente intelectual.

A segunda questão é um aspecto de como o critério "Possível implica existente" redunda em práticas matemáticas não-prescriptivas. Assinalamos que Descartes tinha banido as curvas não-algébricas em função de sua fundamentação na intuição clara e distinta da aceitabilidade de entidades geométricas. Com sua concepção do primado da definição e seu critério de aceitabilidade sendo a consistência do definido, Leibniz justifica a introdução das curvas transcendentes. Mas, como se relacionam expressões analíticas e "desenhos"? Esta é a segunda questão que levantamos acima. A resposta é fornecida nos *Ensaios* e é conseqüência "natural" dos supostos da teoria das expressões: dada qualquer curva podemos obter sua expressão analítica e, reciprocamente, dada qualquer expressão analítica (não-contraditória) temos a curva correspondente. No capítulo seguinte veremos como pode entender-se a posição de Kant como não muito diferente da de Leibniz, no que diz respeito às conseqüências matemáticas. E veremos como também um aspecto da filosofia kantiana da matemática reproduz a posição de Leibniz em relação ao valor das idéias sensíveis.

Há um outro aspecto que relaciona caracteres, definições e teoria da expressão que gostaríamos de remarcar. Trata-se agora do conceito de infinito atual, que vimos também banido por Descartes em função do primado da intuição. Podemos ver neste caso um exemplo da importância dos caracteres e das definições em Leibniz, como notas de seu *formalismo* por oposição ao *intuicionismo* cartesiano, para seguir as categorias de Y. Belaval. Escreve Belaval:

"Com efeito, a possibilidade da idéia não é mais que por conseqüência a possibilidade de um conteúdo do pensamento; por princípio, ela é a possibilidade de um ato do pensamento. Com a descoberta da série $\pi/4$ Leibniz descobria que uma definição, num número finito de palavras, podia determinar um infinito; e, como escreve Cassirer, a definição genética ia encontrar sua realização no infinitesimal."[51]

Lembramos que a rejeição cartesiana das curvas transcendentes devia-se ao fato de que elas são geradas por dois movimentos independentes, de forma tal que não podemos construir mais que por pontos discretos e por aproximação. A propósito deste problema, J. Vuillemin escreve:

"Porém, Leibniz salienta que a aproximação é suscetível de duas formas diferentes. Ou bem, a cada progresso realizado, devem-se recomeçar todos os cálculos, como acontece na aproximação de π por Arquimedes ou Ludolph, quando se escreve a série

$$\pi = 3{,}14159.....$$

ou bem, ao contrário, a série das aproximações é regrada por uma lei que fornece ao espírito, além de tal ou tal determinação particular, a ligação que as integra ao conjunto no qual elas figuram, como é o caso para a aproximação regrada, e então exata num sentido novo, de $\pi/4$ de Leibniz, quando ele demonstra:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7....$$"[52]

O fato destacável é justamente que há um meio de tratar o infinito através do finito, isto é, através de um número finito de caracteres contidos na definição. A definição permite exprimir o infinito. Desta maneira, o infinito adquire sua carta de cidadania matemática via a possibilidade de tratá-lo através do finito. Um tratamento leibniziano semelhante encontramos para o conceito de "infinitamente pequeno". Quando Leibniz introduz o cálculo com infinitésimos, fornece regras formais para o tratamento das novas entidades, sem considerações "ontológicas"[53]. Em outro texto, no entanto, escreve que os conceitos do infinitamente grande ou do infinitamente pequeno "são de utilidade apenas nos cálculos, da mesma forma que as raizes imaginárias

---

[51] Belaval, Y. *Leibniz critique de Descartes*, p. 169.
[52] Vuillemin, J. *La Philosophie de L'Algebre*, pp. 29-30.
[53] Cfr. De Gandt, F. "Newton: La justification des infinitments petits et l'intuition du mouvement".

na álgebra"[54], onde parece estar defendendo teses de natureza "instrumentalista", no sentido de que, mesmo possíveis, os infinitésimos não existem, como as raizes imaginárias, ainda que os utilizemos nos cálculos.

Ora, vemos então como os três temas leibnizianos, a crítica à intuição como subjetiva, a definição de idéias como instância intersubjetiva, a possibilidade que na matemática implica existência, se relacionam com outros temas que podemos referir em geral à problemática da *characteristica universalis* leibniziana. Mas o ponto de partida de Leibniz, segundo achamos importante destacar, não parece ser outro que a necessidade do simbolismo para o exercício do pensamento. Como caso particular, que a partir do finito (o simbolismo), possamos tratar do infinito.

Uma relação adicional é sugerida por Dascal: nessa linguagem ideal uma definição tem seu lugar enquanto combinatória de signos ou caracteres. Ora, via a decomposição dos sinais que corresponderiam a uma definição, teríamos uma *visualização* da contradição ou não-contradição do definido. Vuillemin faz uma sugestão semelhante a de Dascal, via uma comparação com o conceito de "multiplicidade definida" de Husserl: uma enumeração finita dos conceitos e proposições de uma ciência de maneira tal que determinam univoca e completamente todos os seus teoremas. A diferença com Husserl estaria em que não haveria para Leibniz uma enumeração finita e as definições genéticas substituiriam então a decorrente impossibilidade de demonstração, por visualização, quando envolvida uma infinidade de notas.

Ora, parece que a fundamentação última das definições sintáticas via analogia estrutural seria a própria idéia, à qual, em último termo, referiria um símbolo *qua* expressão. E isto permitiria operar apenas com os símbolos, sem atender ao significado, como quando calculamos. O "pensamento cego", produto de seguir regras combinatórias - a *characteristica universalis* -, sem considerar os significados dos símbolos, estaria justificado na medida em que sempre podemos recuperar esses significados.

Por certo, o paralelismo entre, poderíamos dizer, o aspecto semântico ou o significado e o aspecto sintático, convenientemente traduzido, é um problema central da filosofia da matemática contemporânea. Com efeito, até que ponto a consideração dos sinais, e não do significado por eles, permite obter demonstrações que consideremos também significativas, e não mera combinatória de sinais desprovida de significado?

---

54 Novos ensaios, L II, cap. XVII.

Naturalmente, isto depende do conceito de significado neste contexto. Em particular, se depende ou não, visto de outra perspectiva, da intuição.

Ora, não podemos coincidir com F. De Gandt quando escreve que Leibniz "é apaixonado pelos sistemas de sinais e busca transformar as demonstrações matemáticas (inclusive as geométricas) num cálculo cego."[55], na medida em que esta afirmação implique o hobbesiano "Demonstrar é calcular". Para nós, o formalismo de Leibniz não deve ser nunca completamente separado da idéia de expressão e, portanto, não devemos confundir sua utilidade (o que tem de cego) com um fim em si mesmo.

1.3. Recapitulação

No presente capítulo examinamos esquematicamente o conceito de intuição em Descartes e a critica leibniziana ao construtivismo cartesiano. Em Descartes, o conceito de intuição perde seu significado originário de percepção. Entendida como tendo por objeto as idéias, a intuição resulta ser a instância de justificação da matemática. Leibniz opõe ao primado da intuição, o primado da definição e da prova de possibilidade do definido, primado fundado na intersubjetividade da definição, face o caráter subjetivo da intuição.

Ora, sem pretender postular um "intuicionismo cartesiano", que aproximaria o pensamento de Descartes às teses de Brouwer e o intuicionismo, podemos afirmar que as notas do conceito cartesiano de intuição são, por assim dizer, condição de possibilidade da maneira construtivista de ver a lógica e a matemática. Em particular, destacamos que a nossa análise implica a existência de uma crítica subjacente por parte de Descartes à axiomática. E associamos essa crítica implícita ao método axiomático com a crítica explícita de Descartes à silogística. Este matiz antiformalista que encontramos em Descartes o encontramos também no construtivismo contemporâneo.

Há, então, aspectos da oposição destacada por Belaval entre Descartes e Leibniz nos termos de intuicionismo vs. formalismo que reaparecerão na discussão contemporânea sobre os fundamentos da matemática. Em particular, é parte substancial de nosso trabalho - e até onde nós sabemos de tratamento sistemático original - destacar como nas concepções de D. Hilbert encontramos temas do pensamento de Leibniz, no sentido de um modo de proceder semelhante face os mesmos problemas. Ora, isto não implica não

[55] Cfr. F. De Gandt, *op. cit.*, p. 149-150.

reconhecer as notórias diferenças que possamos achar entre ambos. Em particular, no que diz respeito à redução leibniziana da matemática à lógica.

Ora, é usual, quando as idéias de Hilbert são relacionadas com as de Leibniz, lembrar a tese leibniziana "Possível implica existente" e associá-la com a tese hilbertiana "Consistência implica existência". Esta associação é legítima, porém de alcance circunscrito aos primeiros escritos de Hilbert sobre fundamentos. No Capítulo 3 interessa-nos mostrar como os temas leibnizianos que destacamos no presente capítulo, profundamente interligados no pensamento de Leibniz, são progressivamente independentizados e reformulados por Hilbert. Em particular, como subjetividade da intuição, definição e possibilidade do definido, possibilidade provada via a *characteristica* e tratamento do infinito via formalismo, se independentizam do primeiro, isto é, da tese "Possível implica existente".

Capítulo 2
A intuição kantiana e o construtivismo

2.0. Apresentação

O presente capítulo é dedicado ao exame das raízes kantianas do conceito de intuição no construtivismo contemporâneo. Em particular, em Kant nos interessa a relação que existe entre intuição e existência, no sentido em que corresponda usar este termo, de objetos matemáticos. O conceito de intuição kantiano atende fundamentalmente a esta questão, mas Kant pretende também justificar pela intuição enunciados gerais. Ora, como assinalamos no capítulo anterior, os dois conceitos de intuição têm seu papel numa filosofia da matemática construtivista, mas as notas que Kant atribui à intuição são, no mínimo, incompatíveis para dar conta de *ambas* necessidades.

A Seção 2.1. examina a relação entre esquemas e definições, seguindo como fio condutor a concepção kantiana da intuição como *representação singular*. A Seção 2.2. examina, por um lado, em que medida podemos conceber a Kant como um precursor do construtivismo contemporâneo, quando a intuição é concebida como representação singular. Mas, por outro lado, mostramos como Kant atribui à intuição um papel, aquele de servir como instância de enlace (síntese) universal de conceitos, que não pode ser reduzido à intuição como representação singular. Com efeito, como intentaremos mostrar, seguindo a Bolzano, para os objetivos de Kant seu conceito de intuição como representação singular é insuficiente. Por certo, o problema para nós não é elucidar a natureza da intuição kantiana, senão se as notas atribuídas à intuição são suficientes para dar conta da natureza da matemática. Neste ponto nossa conclusão é negativa.

Ora, parte do nosso trabalho neste capítulo será mostrar que no que diz respeito à aceitabilidade de novos conceitos e métodos matemáticos, a posição de Kant não difere essencialmente da de Leibniz. O distintivo em Kant é a rejeição do logicismo leibniziano, mas no que toca a admissibilidade de conceitos e métodos não encontraremos nenhuma diferença essencial. Assim, pretendemos indiretamente indicar os limites que uma interpretação construtivista de Kant deve considerar.

Como fizemos no capitulo anterior, atribuimos a nossas afirmações o caráter de conjecturas plausiveis, eventualmente insuficientemente documentadas. De novo, nosso objetivo é salientar os temas da filosofia moderna continental que reaparecem, mais ou menos modificados, na discussão contemporânea sobre os fundamentos da matemática. Em relação a este fim, o tratamento dado a estas questões parece-nos satisfatório.

2.1. Definição, intuição e esquema

Na concepção de Leibniz, como vimos, as verdades matemáticas são verdades de razão ou, na terminologia atual, verdades analíticas. Sabemos do papel essencial que as definições têm para o projeto leibniziano de redução da matemática à lógica. E sabemos também que as definições são entendidas como uma instância intersubjetiva oposta à intuição cartesiana. O papel que Leibniz assinala à intuição é função da impossibilidade formal de definir tudo. Se uma definição é o resultado de uma análise completa, o conhecimento intuitivo terá lugar na apreciação das notas simples que constituem o resultado da análise.

Ora, um dos tópicos centrais da filosofia kantiana é a rejeição do logicismo leibniziano. Basicamente, Kant rejeita a identificação entre, por um lado, a priori (necessário) e analítico e, pelo outro, a posteriori e sintético[56]. As verdades matemáticas, portanto, não resultam da análise dos conceitos envolvidos e/ou do principio de não-contradição. As verdades matemáticas são juizos sintéticos a priori.

Nos juizos matemáticos achamos, segundo Kant, necessidade e universalidade estrita, carateristicas que indicam a presença de juizos a priori, por oposição aos juizos empíricos ou sintéticos a posteriori. Este pressuposto, e o pressuposto da necessidade da intuição -palavra a qual Kant devolve a nota de *representação singular* ou *individual*- como fundamento do conhecimento, levam naturalmente à idéia de uma intuição pura, distinta da empirica: espaço e tempo.

Que função tem neste contexto a intuição e as definições? Na *Lógica*[57], Kant distingue entre definições nominais e reais. Uma definição é *nominal*, quando estipulamos arbitrariamente um significado para uma

[56] Para uma leitura que resgate como distinção kantiana fundamental não a oposição "analítico - sintético" senão "construtivo - não-construtivo", cfr. Raggio, A. "La filosofia matemática de Kant".
[57] Kant, I. Lógica, # 106.

palavra dada; uma definição é *real*, quando demonstra a possibilidade do objeto. Mas para Kant, real neste contexto significa mais do que possibilidade lógica, significa a possibilidade de construção, isto é, as definições devem ser genéticas ou, na terminologia atual, construtivas.

Na *Crítica*[58], a teoria da definição está mais elaborada. A explicação do significado da palavra é chamada por Kant *designação*, distinguindo-a de uma definição: designações não são definições, pois não se trata do "conceito da coisa". Isto coincide parcialmente com a caraterização de definição nominal que aparece na *Lógica*. Porém, para entender a concepção kantiana de definição, temos que distinguir entre conceitos dados e conceitos não-dados.

Entre os conceitos *dados* temos os conceitos empíricos, que não podem ser definidos senão *explicados*. No caso do conceito "água", por exemplo, podemos dar sua designação, sua definição nominal, mas, para fins científicos, precisamos dar sua explicação. Além dos conceitos empíricos, temos conceitos dados a priori, que também não podem ser definidos senão *expostos*. Por exemplo, os conceitos filosóficos como substância, causa, etc. A exposição de um conceito filosófico - à diferença dos conceitos empíricos e matemáticos - é resultado da análise.

Por certo, Kant perfeitamente poderia subscrever à crítica que A. Pap dirige a Leibniz no sentido de que a prova de não-contradição de uma definição, no sentido leibniziano, depende de uma "análise completa", fato do qual não podemos ter certeza plena[59]. Assim, podemos pôr em dúvida que o conceito de juízo analítico dependa, como afirma Pap, do conceito de definição, porque num caso como "Todo corpo é extenso" não podemos justamente dar uma definição de corpo.

Com efeito, podemos definir aqueles conceitos que são *arbitrariamente* pensados, entre outros, os conceitos matemáticos[60]. Kant explicitamente diz que enquanto as exposições provêm da análise, as definições, próprias da matemática, são sintéticas[61]. Podemos examinar o que resulta da concepção de Kant quando examinamos, por exemplo, a definição de "triângulo" como "figura de três ângulos", e dissolver uma aparente contradição apontada por Pap na teoria kantiana da definição.

---

[58] Kant, I. *Crítica da Razão Pura*. Abreviamos, como de costume, CRP.
[59] Cfr. CRP, B 756.
[60] Para todas estas distinções veja-se CRP, B756 = B758.
[61] É no mínimo curioso que Pap ignore essa distinção feita também no #105 da *Lógica*.

Observa Pap[62], seguindo as afirmações de Kant na *Lógica*, que se definimos "elipsóide" como "sólido gerado pela rotação de uma elipse sobre qualquer um dos seus eixos" e se definimos "elipse" como "curva fechada cujos pontos são tais que a soma de suas distâncias a partir de dois pontos determinados é constante", então, se "elipsóide" não tem um uso precedente e acaba de ser inventada como uma abreviatura do *definiens*, a definição é nominal. Mas, por outra parte, podemos presumir que esta definição é real, pois podemos construir a elipsóide seguindo as instruções contidas na definição. Portanto, a definição de elipsóide é simultaneamente nominal e real. É isto um erro ou um descaso no ensino por parte de Kant?

Em primeiro lugar, é claro que se interrogados pelo significado da palavra "triângulo" respondemos com a afirmação acima, então se trata de uma definição nominal, de uma designação, como diz Kant[63]. Porém, enquanto geômetras, a situação muda, da mesma forma que no caso do conceito empírico "água". Com efeito, enquanto ciência, a geometria ignora a origem prévia do conceito "triângulo" na linguagem quotidiana. Não se trata da análise correta de um conceito pré-analiticamente dado: "Na matemática não possuímos qualquer conceito anterior à definição, pois aquele é primeiramente dado mediante esta última"[64].

Ora, pouco importa que se trate de um termo já usado na linguagem quotidiana como triângulo ou outro termo como elipsóide ou quadratriz: enquanto conceitos científicos eles são "produzidos" originariamente pela definição. Desta perspectiva desaparece a "contradição" indicada por Pap, embora ainda restem algumas dificuldades por resolver. Com efeito, ainda que "figura de três ângulos" seja uma síntese arbitrária, não podemos dizer que seja uma definição real, no sentido de mostrar a possibilidade do definido: teríamos que demonstrar não apenas que o conceito é logicamente possível senão também construí-lo, de forma semelhante à sugerida na Seção 1.1. do capítulo anterior.

Ora, intuição e definição aparecem então obviamente relacionadas. Por tratar-se de conhecimento, os conceitos matemáticos, que são introduzidos pelas definições, devem vir acompanhados das intuições que provam que eles são não-vazios (realidade objetiva também para Kant). A matemática é conhecimento "por

---

62 Cfr. A. Pap. *Semántica y verdad necesaria*, p. 48-49.

63 Kant suspeita que a discussão de conceitos fundamentais de uma disciplina como a matemática faria-a semelhante à filosofia no que diz respeito as discussões estéreis sobre o significado dos termos, mas é difícil compatibilizar a idéia de indefinível com a tese kantiana de que as definições encabeçam as afirmações sobre seus objetos.

64 CRP, B 759.

construção de conceitos", onde por tal construção deve entender-se "apresentar a priori a intuição que corresponde ao conceito."[65]

Kant diz[66] que o matemático "sem nada poder fazer com o simples conceito se apressa em consultar a intuição na qual considera *in concreto* o conceito, não empiricamente, mas sim tão-somente numa intuição que representou a priori, isto é, construiu, e na qual aquilo que segue das condições universais da construção também tem que valer universalmente para o objeto do conceito construído". Um exemplo adequado é a definição de elipsóide que consideramos acima: a definição indica a construção da elipsóide, temos não apenas sua "possibilidade lógica" senão também sua "existência", como distinta da não-contradição.

Para estes tópicos um texto fundamental é a *Resposta a Eberhardt*. Eberhardt defende, citando Apolônio, uma postura de corte leibniziano e Kant contra-argumenta[67] com o exemplo do próprio Apolônio: este constrói um cone e depois obtém por outra construção a parábola, para logo demonstrar suas propriedades. Desta forma, prova-se a realidade objetiva do conceito "parábola". Justamente, porque para Kant o primeiro problema que enfrenta um matemático é saber se os conceitos com os quais trata são não-vazios.

Na intuição pura ou formas da intuição espaço e tempo é onde construímos os conceitos matemáticos. Em geral, a intuição que corresponde a um conceito é uma construção, que pode ser empírica ou pura. Neste último caso, chama-se esquemática. Kant, para referir-se à realidade objetiva de triângulo, usa a expressão "esquema do triângulo". Um esquema é "um método universal para prover imagens a um conceito"[68] O problema imediato seria saber que meios temos para produzir tais imagens. Ora, a teoria do esquematismo, neste contexto, parece cumprir então a função das definições construtivas ou genéticas. Em lugar de esquemas, então, poderíamos falar de definições construtivas, as quais garantem a realidade objetiva de um conceito.

Ora, se insistimos num construtivismo de corte tradicional, pode-se perceber que existe uma certa tensão entre o elemento conceptual da matemática e seu elemento intuitivo, tensão que podemos ver refletida numa definição que estabelece apenas a possibilidade do definido, sem fornecer instruções para realizar uma

---

65 CRP, A 713 = B 741.
66 CRP, B 744.
67 Cfr. *Resposta a Eberhardt*, p. 26-27.
68 A 140 = B 179.

construção. Parte dessa tensão poderia desaparecer estabelecendo como norma que toda definição deve ser construtiva. Na *Lógica*, #106, Kant declara que todas as definições matemáticas são genéticas, isto é, definições que dão um conceito de forma tal que o objeto pode ser exibido a priori *in concreto*.

Porém, a primeira edição da *Crítica* incluía uma nota de rodapé de conteúdo semelhante, retirada na segunda edição, evidentemente porque tal proposta é impraticável: não é possível definir *todo* conceito. Isto nos leva a considerar que há conceitos geométricos primitivos para os quais não há definição construtiva. Ora, cabe perguntar-se se podemos definir, *sem nenhum elemento sensível*, conceitos puros que esquematizados seriam os conceitos geométricos primitivos. Ou leva esta pergunta a analogia entre o esquematismo dos conceitos puros do entendimento e o esquematismo matemático longe demais? Podemos resumir estas considerações na pergunta seguinte: que tipo de conceitos são os conceitos geométricos? Intentaremos respondê-la quando tratemos do mesmo problema em relação aos conceitos aritméticos.

As considerações precedentes baseiam-se na concepção da geometria como ciência axiomática. Existe um tratamento paralelo da aritmética? Leibniz, segundo já mostramos, oferecia uma demonstração a partir de leis lógicas e definições, portanto, as verdades aritméticas seriam verdades de razão ou, na terminologia de Kant, juízos analíticos, se entendemos que aqui se trata de definições no sentido de nominais. Na *Crítica*, Kant declara que as verdades da igualdade numérica são não apenas sintéticas a priori senão também indemonstráveis[69]. A conseqüência que Kant tira da indemonstrabilidade das fórmulas da igualdade numérica é que a aritmética não é axiomática, pois há infinitas fórmulas numéricas verdadeiras e não pode haver infinitos axiomas.

Neste ponto Kant não faz mais do que seguir opiniões comuns na época. Ora, já alguns de seus contemporâneos sugeriram que fórmulas do tipo "$x + (y + z) = (x + y) + z$", a chamada lei de associatividade da soma, podiam ser consideradas como axiomas aritméticos. Por certo, nem sempre Kant pensou que as fórmulas da igualdade numérica eram indemonstráveis. M. Capozzi informa que Kant fornece uma demonstração (datada entre 1762-1764) de "$8 + 4 = 12$"[70] de tipo leibniziano. Ora, é também em 1764 que

[69] Cfr. A 164 = B 204.
[70] Cfr. Capozzi, M. "Kant on mathematical definition".

Kant apresenta sua idéia de uma geometria geral, isto é, uma geometria de qualquer número de dimensões[71].

Portanto, não parece adequado tirar outra conclusão senão que Kant abandona *ambas* concepções em algum momento, e não que para Kant a aritmética suporia, inclusive na *Crítica*, uma matemática geral.

Um penetrante crítico de Kant, B. Bolzano, fornecerá uma demonstração das fórmulas da igualdade numéricas, corrigindo um defeito na demonstração de Leibniz citada no capítulo anterior. Bolzano mostra que a partir da mencionada lei de associatividade deduzimos tais fórmulas, com definições como as de Leibniz[72]. A necessidade da fórmula universal encontra-se, e isto não foi percebido por Leibniz, na passagem de $2 + (1 + 1)$ a $(2 + 1) + 1$. Ora, do ponto de vista dedutivo a demonstração é inobjetável. Porém, o que se trata é apenas de fornecer uma demonstração a partir de axiomas mais ou menos arbitrários? É claro que a "lei de associatividade" não carateriza as propriedades dos números naturais. Em poucas palavras: temos que distinguir entre demonstração como mera cadeia de fórmulas e demonstração, digamos, com valor fundacional.

Além da aritmética carecer para Kant de axiomas, não temos também definições dos números, essenciais à proposta de redução da aritmética à lógica de Leibniz. Do ponto de vista formal, então, não é a ausência de um princípio de intercâmbio definicional, fundamental para qualquer critério de analiticidade, o que impede a Kant reconhecer como analíticas as fórmulas da igualdade numérica. Trata-se, justamente, da ausência de definições. A diferença de Leibniz, para quem, por exemplo, "$2 + 1 = 3$" não era uma verdade senão uma definição, para Kant se trata de uma verdade que depende da intuição pura.

Kant, no entanto, é extremamente instável no que diz respeito as relações entre aritmética e intuição. Existem passagens que permitem sustentar que o conceito de número[73] é: a) puramente discursivo[74]; b) precisa da intuição do espaço e do tempo[75]; c) precisa apenas da intuição do tempo[76]. Podemos aqui seguir a Lorenzen[77], o qual sugere que para Kant os números são gerados por uma regra $\Rightarrow$ que opera assim: a regra

---

[71] Pensamientos sobre la estimación verdadera de las fuerzas naturales. In: Martin, G. Kant. *Ontologia y Epistemologia*.

[72] Cfr. Bolzano, Bernard. *Sur la doctrine Kantienne de la construction des conceptes par les intuitions*, # 8.

[73] Para uma discussão das diferentes posições de Kant em relação ao conceito de número, cfr. Couturat, Louis. *La filosofia de las matemáticas en Kant*.

[74] Carta a Schultz. In: Torreti, R. Manuel Kant. *Estudio sobre los fundamentos de la filosofia critica*, p. 187, n. 269.

[75] Cfr. A 724 = B 752. Também na *Dissertatio*, cap. 12.

[76] Fundamentalmente, na *Doutrina do Esquematismo*, cfr. B 182.

[77] Lorenzen, Paul. *Pensamiento metódico*, p. 43

⇒ aplicada a | dá por resultado ||, aplicada a este último dá |||, e assim sucessivamente. Através desta regra de construção, que é o *esquema* ao qual chamamos número, damos na intuição um objeto conforme ao conceito puro de magnitude.

Kant sublinha a importância de dispor da regra e não da construção efetiva do objeto, que pode ser completamente irrelevante. Assim, trata-se da possibilidade de construir o número "1000" através da regra, e não de sua construção efetiva mesma. Isto é importante na medida em que se pretende não associar construção com o meramente imaginável. Por outra parte, as configurações espaciais podem mudar, por pontos, por exemplo, e neste sentido os números não dependem de uma representação espacial, senão basicamente da sucessão temporal.

Poderíamos, então, dizer que cada regra de forma semelhante produz imagens, e que aquilo que permite reconhecer cada regra como tal, é o número entendido como esquema do conceito puro da magnitude. Ora, aqui o número aparece como "esquema do conceito puro da magnitude", mas em princípio não se trata especificamente de um conceito, senão do título que agrupa as categorias da quantidade: unidade, multiplicidade, totalidade.

Da mesma forma que distinguimos entre o conceito de triângulo e seu esquema, temos que distinguir o que poderíamos chamar o conceito de número (conceito puro da magnitude) e o número como esquema. Assim, aparentemente teríamos aqui a oportunidade novamente de distinguir entre a definição não-construtiva e o esquema como definição construtiva correspondente. Mas que devemos entender aqui por definição não-construtiva? Na verdade, aqui estamos frente a um problema semelhante ao levantado em relação aos conceitos primitivos da geometria, pois a todas luzes o conceito primitivo da aritmética é o número.

Em outra passagem da *Crítica*, a categoria de totalidade está relacionada com o conceito de número, e não o título das categorias da quantidade. Kant diz, numa espécie de prova de independência da categoria de totalidade das categorias de unidade e pluralidade, que na representação de número estão envolvidas as três, enquanto que na representação de infinito apenas as duas primeiras. Esta observação é interessante porque daria uma sugestão para a definição não-construtiva de número, na linha de considerar o conceito de número como conceito puro. Mas, à diferença da geometria, aqui, no mínimo, teríamos a partir de que definir, a saber, os conceitos incluídos no título da quantidade.

Se assim fosse, a regra $\Rightarrow$ (ou aquilo que permite reconhecê-la como regra) seria a definição construtiva de número. Ora, na matemática trata-se apenas de conceitos puros *depois* esquematizados ou, se assim podemos falar, de conceitos sensíveis puros? Porém, como já dissemos, não parece haver outro conceito puro senão o de número na aritmética. Mas para Kant temos "o conceito puro da magnitude", do qual o número é seu esquema[78]. No entanto, lemos na já mencionada carta a Schultz: "A ciência do número é, não obstante a sucessão que toda construção de uma magnitude requer, uma síntese puramente intelectual, que representamos em pensamentos". Aqui temos uma afirmação que pode ser interpretada como não sendo necessário o momento intuitivo na aritmética.

Independentemente desta questão, no que diz respeito a aritmética, podemos conjecturar em que sentido os conceitos aritméticos, além de número, são construídos para Kant. A regra $\Rightarrow$ é uma construção que nos permite introduzir os números como sucessores: exceto o número 1, todos os outros são sucessores de algum outro. Kant exige também a construção das operações, propriedades e relações entre números. À operação sucessor acrescentamos uma nova construção para a soma entre números. A idéia de Kant era que somar dois números é adicionar uma a uma as unidades do segundo ao primeiro. Podemos então introduzir a soma usando a regra $\Rightarrow$ como segue: somar m a n é aplicar m-vezes a regra $\Rightarrow$ a n. Desta forma, poderíamos dizer, "temporizamos" o conceito de soma.

Por certo, embora não tenha explicitamente formulado uma regra de construção para soma, Kant não aceitaria tal regra como uma demonstração: por um lado, geramos pela regra de soma "7 + 5", por outro, geramos pela regra de sucessor "12", e finalmente verificamos na intuição a igualdade. Podemos generalizar e entender que o caráter construtivo da aritmética se refletiria no fato de que qualquer relação ou propriedade relativa aos números deveria ser introduzida por procedimentos semelhantes.

Finalmente, perguntamo-nos qual seria o conceito geométrico puro análogo ao de número. Por certo, Kant não parece pensar que há algo assim como "um conceito puro da magnitude contínua". Ora, se o nosso raciocínio é correto, teríamos aqui uma assimetria entre aritmética e geometria. Na aritmética teríamos conceitos puros que seriam esquematizados. Na geometria, por outro lado, teríamos conceitos sensíveis puros.

---

[78] Este parece ser um aspecto da complexa discussão sobre a distinção entre esquemas, categorias puras e categorias esquematizadas. Cfr. Bilderling, Beatriz von. "Categorias puras y categorias esquematizadas".

Esta visão, por outro lado, seria conseqüente com a prioridade tradicionalmente atribuída à aritmética em relação à geometria.

A expressão "conceito sensível puro" - por certo, expressão utilizada pelo próprio Kant - atende simplesmente a ressaltar a irredutibilidade da geometria, à diferença da aritmética, ao molde de conceito puro, por um lado, e esquema desse conceito, por outro. Se queremos falar ainda de esquematismo como definição construtiva dos conceitos geométricos, temos então que distinguir entre os conceitos primitivos geométricos e os conceitos que podemos definir a partir deles. No segundo caso, podemos pensar que se trata de uma regra de construção de um conceito geométrico, no sentido tradicional da palavra.

No primeiro caso, podemos falar de esquematismo num sentido diferente, aquele que tem propriamente para as categorias. Suponhamos que um conceito primitivo geométrico seja o de linha. Pois bem, Kant nos diz que o traçado da linha supõe o tempo e, neste sentido, poderíamos falar de esquematização dos conceitos geométricos primitivos. Esquematizados os primitivos neste sentido, *a fortiori* seriam esquematizados os definidos também no mesmo sentido. (Diga-se de passagem, que nós não possamos representar o tempo senão através da linha não quer dizer que o espaço tenha prioridade com respeito ao tempo, como decorre do fato de que a própria linha pressupõe o tempo.)

Ora, cabe assinalar que o problema para o qual não encontramos uma solução satisfatória, isto é, o *status* dos conceitos geométricos, pode ser olhado de uma perspectiva, digamos, *abstraccionista*. Desta perspectiva os conceitos geométricos seriam abstraídos dos dados da sensibilidade. Uma primeira objeção é que isso seria insuficiente, na medida em que, para seguir o exemplo de Descartes, o conceito de miriágono não poderíamos evidentemente pensá-lo como abstraído. Ora, poderíamos pensar que os abstraídos seriam certos conceitos geométricos primitivos e depois, por um procedimento complementar, construídos os mais complexos.

Porém, a objeção que achamos mais importante é que o conceito geral de construção kantiano pareceria um tanto circular: se as figuras são *nossos recortes* no espaço único da intuição - e isso vale também para os conceitos geométricos primitivos -, se vamos do conceito a sua imagem, qual então a necessidade desse processo, se podemos partir dos dados da sensibilidade para obter os conceitos? Que justificaria este processo que seria de ida e volta? Ora, ao que parece, para Kant nós aplicamos aos dados sensíveis os conceitos geométricos num sentido equiparável a como aplicamos as categorias, sentido que implica que não abstraímos as categorias nem os conceitos matemáticos dos dados da sensibilidade.

2.2. Os limites do construtivismo kantiano

Examinamos na seção anterior algumas questões relativas aos conceitos geométricos e aritméticos em função do conceito kantiano de intuição como representação singular. Neste contexto, os esquemas aparecem como definições construtivas, isto é, como definições que provam, via construção, que um conceito matemático é não-vazio. Ora, a concepção da aritmética de Kant, tal qual ele a apresenta na *Crítica*, é por demais estreita[79]. Com efeito, enunciados simples, como aquele, por exemplo, que estabelece que a soma dos n primeiros números naturais é igual a n vezes $n + 1$ dividido por 2, não são considerados. Também não há lugar para enunciados do tipo existencial, como o teorema de Euclides sobre existência de números primos. O problema que aqui se introduz é o problema dos enunciados gerais, sejam universais, sejam existenciais.

Com efeito, no primeiro caso trata-se de provar um enunciado para qualquer n e não para um número finito deles. Como demonstrar enunciados universais na aritmética? No segundo caso, devemos demonstrar que para qualquer número natural, existe um primo maior. Neste caso combinamos quantificadores universais e existenciais. Sob que condições demonstramos um enunciado desta natureza? O problema que devemos tratar é em que medida a forma da intuição, espacial ou temporal, tem um papel na demonstração de enunciados desta natureza, sejam aritméticos ou geométricos.

Kant, como é bem conhecido, distingue duas faculdades claramente separadas, sensibilidade e entendimento. A primeira como a faculdade das representações singulares ou intuições e a segunda como a das representações gerais ou conceitos. Ora, ainda que para Kant espaço e tempo sejam formas da sensibilidade, é conveniente não esquecer a herança de Leibniz que se encontra na concepção kantiana do espaço e do tempo, cuja breve consideração permitir-nos-á depois perguntarmo-nos se existem: a) essenciais diferenças entre os métodos e conceitos matemáticos aceitos por um e outro; b) qual o papel do conceito kantiano de intuição na demonstração de enunciados gerais. No que segue, restringir-nos-emos ao espaço, mas considerações semelhantes podem ser feitas em relação ao tempo.

---

[79] Para uma análise da concepção kantiana de número além da aritmética, cfr. Silva, J.J. da. *O predicativismo de Hermann Weyl*, cap. 2.

G. Martin assinala que a dívida de Kant para com Leibniz é dupla. Em primeiro lugar, o caráter *ideal* do espaço, isto é, como em Leibniz, o espaço não é um ente real senão um ente ideal. Separa-se, naturalmente, ao afirmar que o espaço é relativo à nossa forma de conhecer. Escreve Martin:

"Tanto Leibniz como ele afirmam a validade objetiva da geometria euclidiana. Para o primeiro, esta baseia-se no pensar divino, para o segundo, no humano. Portanto, a idealidade transcendental do espaço euclidiano funda-se no fato de que seu ser consiste no seu ser pensado por Deus - segundo Leibniz - ou pelo homem - segundo Kant. Precisamente isto, e não outra coisa, quer expressar Kant com sua tese da idealidade do espaço."[80]

Além da idealidade, Martin assinala como dívida de Kant a tese do caráter *fenomênico* do espaço, isto é, o espaço como forma dos fenômenos externos. Ora, Martin nos informa que o espaço é simultaneamente forma dos fenômenos e forma de nossa intuição sensível. Conclui-se então que o espaço físico e o espaço matemático são de caráter euclidiano. Mas isto mostra que, independentemente das concepções filosóficas respectivas, Kant e Leibniz admitem que o único espaço é o espaço tridimensional euclidiano. O que cabe perguntar-se é se o caráter construtivo que Kant atribui à matemática conduz a algum tipo de restrição no que diz respeito a conceitos e métodos geométricos que o diferencie, pelas suas conseqüências matemáticas, de Leibniz.

Resumamos o que temos até agora. *More* as intuições puras do espaço e do tempo, o esquema de um conceito, como vimos na seção anterior, garante a existência no sentido seguinte: um esquema é um método para prover imagens a um conceito. As conhecidas dificuldades envolvidas no conceito kantiano de intuição são comentadas por grandes estudiosos de Kant como Martin, os quais indicam como saída considerar que o papel da intuição em Kant pode ser mais claramente entendido se o vemos da perspectiva do construtivismo matemático contemporâneo. Em seu fundamental livro de crítica kantiana acima mencionado, G. Martin, por exemplo, escreve:

"Ao intentar de este modo compreender as afirmações de Kant sobre o caráter construtivo da matemática, não esquecemos que estamos utilizando conceitos que ele conheceu apenas de maneira imprecisa. No entanto, como os mesmos intuicionistas reconhecem sua afinidade com as teses kantianas, parece-nos

[80] Martin, G. Kant. Ontologia e Epistemologia, p. 47.

possível interpretar a Kant baseando-nos nas idéias atuais. Por conseguinte, a tese kantiana sobre o caráter intuitivo da matemática significa sua limitação àqueles objetos que são construtíveis."[81]

Ora, quais são os objetos construtíveis para Kant? Por exemplo, na já mencionada *Resposta a Eberhardt*, Kant entende que a equação "$ax = y^2$" *define* a curva que denominamos parábola e a qual é *construída* através de secções cônicas. Mais ainda, Kant aceita as demonstrações de propriedades da parábola baseadas apenas na sua definição, e não na sua construção[82]. Pareceria então que podemos dispor não apenas de definições construtivas e não-construtivas, senão também obter verdades matemáticas sem o recurso à intuição. Porém, não seria isto conhecimento *por conceitos* e não *por construção de conceitos*? Não, dirá Kant, pois os matemáticos sabem a partir da definição que é possível a construção esquemática. No entanto, quais as caraterísticas que uma definição desse tipo deve ter para garantir tal saber?

Vemos que, como em Leibniz, a expressão analítica é uma definição. Ora, a insistência de Kant na construção nos leva talvez a uma procura mais "construtiva" que a do próprio Kant como, por exemplo, buscar estabelecer, como é o caso de Descartes, qual o critério de admissibilidade de curvas e, correspondentemente, de suas expressões analíticas. Na verdade, é possível que o construtivismo kantiano seja tão otimista que, no que diz respeito a este ponto, coincida com o "formalista" Leibniz.

Com efeito, independentemente do caráter analítico que Leibniz atribui à geometria, Leibniz e Kant coincidem em que por geometria se entende a geometria euclidiana, embora possamos detectar em Kant uma preferência, como vimos num texto citado anteriormente, pela tradicional geometria sintética clássica. Mas se pensamos no caráter único do espaço e no fato de que nós fazemos recortes nesse espaço único - as figuras geométricas - podemos pensar que qualquer recorte postulado, o qual apenas seja não-contraditório, é construção.

Em conseqüência, neste sentido bem pouco construtivo de construção, podemos garantir que os matemáticos sabem, a partir da expressão analítica, que é possível a construção esquemática. Mas isto leva-nos, em última instância, ao pressuposto leibniziano que destacamos no capítulo anterior: para qualquer curva desenhada temos sua expressão analítica correspondente e a recíproca. No fundo, é pelo caráter único do

---

[81] Martin, G. Kant. Ontología y epistemología, p. 33.
[82] Cfr. *Resposta a Eberhardt*, p.29.

espaço que para Kant não há possibilidade de definir um conceito geométrico para o qual não exista construção.

Um exemplo de que o "construtivismo" é *sui generis* o encontramos no tratamento de π, que, como já vimos, Descartes bania como entidade geométrica porque as relações entre circunferência e diâmetro eram "inexatas". Em Leibniz encontrávamos que, via a expressão do infinito através do finito, π tem seu lugar na matemática por meio da definição $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7..$ Vejamos em relação a este problema o que escreve Kant:

"Por acaso ouviu-se já alguma vez que devido por assim dizer a uma ignorância necessária das condições, fez-se passar por inseguro qual é com precisão em números racionais ou irracionais a relação do diâmetro com o círculo? Visto que tal relação não pode ser dada congruentemente pelos números racionais e que pelos irracionais ainda não foi encontrada, então se julga que pelo menos a impossibilidade de tal solução possa ser conhecida com segurança, e Lambert forneceu uma prova a respeito."[83]

Vemos então que não apenas não há nenhuma restrição construtiva em relação a π, senão que inclusive aceita-se a demonstração de sua irracionalidade por Lambert. Lembrando a rejeição cartesiana de π por tratar-se de uma "relação inexata", é interessante comparar esta passagem de Kant com um construtivista como Kronecker. Referindo-se à prova de Lindemann da transcendência de π, Kronecker diz que se trata de "um esforço malgasto, já que o número não existe." [84]

A diferença com Leibniz encontra-se no tratamento do conceito de infinito atual, mas não no fato de ele não ser consistente *in abstrato*. Como a matemática está subsumida sob as condições da sensibilidade, *in concreto*, então o conceito de infinito atual não pode ter cabida nela. Porém, importa destacar que o conceito de infinito atual não é para Kant contraditório, mesmo na *Crítica*, pois precisa-se dele no âmbito do conhecimento prático[85] .

Como é bem conhecido, o problema do infinito é tratado na *Crítica* em relação à chamada Cosmologia Racional. Sucintamente, poderíamos dizer que, da mesma maneira que na matemática, o infinito atual é banido

---

[83] CRP B 508- B 509.

[84] Citado por Smorynski, C. "Hilbert's Programme", p. 12.

[85] Para as nuanças do pensamento de Kant em torno do problema do infinito, Cfr. W. Rod. "Le problème de l'infini dans le développement de la pensée critique de Kant".

da metafísica como conhecimento teórico da razão, ainda que reapareça indiretamente na *Crítica* como "idéia da razão". Ora, como escreve Wolfang Röd:

"Isto monstra, que não apenas a matemática intuitiva que rejeitava, após Brouwer, o conceito de infinito atual, podia referir-se a Kant, senão também Cantor, quem punha, acima de tudo, a Leibniz por testemunha. Kant não recusa definitivamente o conceito de infinito atual, ele simplesmente nega que possamos conhecer uma coisa atualmente infinita; enquanto que simples idéia da razão, o infinito atual tem também um papel na sua filosofia." [86]

Em resumo, até aqui consideramos a intuição do ponto de vista de ser uma representação singular, destinada a ser o *locus* de existência de objetos que correspondam a um conceito matemático. Em particular, um conceito matemático que envolva o infinito atual fica automaticamente excluído. Mas o papel da intuição não se restringe ao problema da existência de objetos correspondentes aos conceitos envolvidos, senão que a intuição é necessária, segundo Kant, para as sínteses entre conceitos, por exemplo, na demonstração de que a soma dos ângulos internos de *todo* triângulo é igual a 180°. Vemos então que, mesmo aceitando um conceito de existência como construtibilidade em Kant, a passagem via intuição à justificativa de enunciados gerais é em princípio discutível. Lemos como o próprio Martin incorre inadvertidamente nessa *metábasis*:

"A intuição não é, portanto, uma fonte adicional de conhecimento para a matemática - os matemáticos objetaram com razão essa tese - senão uma instância que reduz o âmbito maior de existência lógica - o não-contraditório - ao menor de existência matemática - o construtível. *Daí que [nossos grifos] neste segundo aspecto, os juízos da geometria sejam sintéticos a priori, pois podemos construí-los na intuição pura.*"[87]

Ora, Martin deduz, inadequadamente ao nosso ver, que da construtibilidade dos conceitos via intuição como representação singular, podemos justificar os enunciados geométricos *gerais* também com esse conceito de intuição como representação singular. Para nós, seguindo a Bolzano, essa passagem não está justificada com as premissas de Kant. Com efeito, a intuição aparece envolvida nas provas de afirmações universais e, mesmo que Kant não tenha considerado o problema, a resposta vale tanto para a geometria quanto para a aritmética. O problema não se apresenta quando consideramos apenas equações numéricas - onde na

---

[86] Röd, W. *Op. cit.*, p. 168.
[87] Martin, G. *Op. cit.*, p. 35.

"verificação" de tais equações pela intuição conserva-se o caráter de representação singular da intuição. Porém, quando consideramos enunciados universais, achamo-nos na mesma situação da geometria.

Neste segundo papel da intuição é que incidirá, ao nosso ver, a certeira crítica de Bolzano: o fundamento da necessidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180° é a intuição individual do desenho ou o que há de universal nele? Com efeito, perguntará Bolzano[88], como a intuição, que por definição é de um objeto individual, puro ou não, pode garantir que o que vale para ele vale para todos os outros? A consideração da universalidade na aritmética obriga a uma reflexão semelhante: precisamos da intuição de um número *p* arbitrário, como de um triângulo arbitrário, para afirmar algo sobre todos os números? Kant não se faz esta pergunta, pois, como vimos, ele se restringe aos juízos singulares.

No entanto, o leitor de Kant objetará que ele fala de esquemas, métodos universais para fornecer imagens a um conceito, e insistirá na palavra universal. Porém, responde isto a objeção de Bolzano? Não, a intuição é a intuição de uma imagem e, por conseguinte, uma representação singular. Portanto, quando envolvida a palavra "todos", e tratando-se de universalidade irrestrita, ou estendemos o conceito de intuição de maneira que parece contrária ao espírito da filosofia kantiana, ou admitimos que esse tipo de sínteses, se acaso se trata de sínteses, ficam ainda por explicar.

Com efeito, existem dois problemas que devemos diferenciar. O primeiro tem a ver com a necessidade de um conceito não ser vazio, fato que provamos através da regra de construção *na* forma da intuição. O segundo é se, e isto parece exigir uma consideração distinta da mera forma da intuição, precisamos da intuição pura de uma forma análoga à intuição empírica para justificar um enlace (síntese) de conceitos. No segundo caso, estamos na mira de Bolzano: como passar do triângulo individual a todos os triângulos?

A intuição empírica, obviamente, não permite essa passagem com necessidade no contexto dos juízos sintéticos a posteriori, e se respondemos que a justificamos, pois o procedimento de construção é a garantia, então devemos conceder, como pensa Bolzano, que tal procedimento de construção exprime o universal no conceito de triângulo, e que a intuição é supérflua para o estabelecimento da afirmação em questão. Justamente -e isto é para nós o ponto forte da argumentação de Bolzano - porque, segundo Kant, a intuição, seja pura ou empírica, é uma representação singular.

---

[88] Cfr. Bolzano, B. *Op. cit.*, # 7.

Ora, assinalávamos no capítulo anterior que Kant podia ter uma dívida insuspeita com o pensamento de Leibniz em relação ao problema de em que medida uma demonstração podia ser tal que, partindo de uma representação singular como a de um círculo, pudesse ser obtida uma verdade universal. Essa dívida a achamos justamente onde Kant insere a distinção entre sensibilidade e entendimento: via o esquematismo dos conceitos matemáticos pretende recuperar - para nós, sem sucesso - o que Leibniz obtém - com sucesso em relação a suas premissas - via a teoria das expressões: que a representação singular é um acesso ao universal.

O que talvez poderíamos encontrar em Kant como antecedente do construtivismo é uma concepção de demonstração de enunciados existenciais que decorre da afirmação de que a existência não é um predicado. Com efeito, podemos pensar que é conseqüente com seu conceito de intuição como representação singular que um enunciado que afirme a existência de um objeto com uma certa propriedade, deve ser demonstrado de forma tal que na demonstração se estabeleça a maneira em que o objeto com a mencionada propriedade se constrói. Assim, uma demonstração de existência não poderia, por exemplo, partir da afirmação de que todos os objetos possuem uma certa propriedade, deduzir desta afirmação uma contradição e concluir, então, que existe um objeto que não tem tal propriedade. Assim, uma demonstração de existência deste tipo não nos dá um método para construir o objeto com a mencionada propriedade.

Mas rejeitar uma demonstração desse tipo é rejeitar o uso de terceiro excluído: todos os objetos têm uma certa propriedade ou existe um que não a tem. Cabe pensar que Kant aceitaria limitar a validade das leis lógicas? Acreditamos que a resposta é negativa: as leis lógicas são válidas "por meros conceitos". Como ciência, a lógica é analítica e seu papel, do ponto de vista de seu uso nas matemáticas, é servir como "cadeia do método". Ora, olhada de uma perspectiva diferente da dicotomia analítico e sintético - seguindo uma idéia de A. Raggio - podemos pensar a lógica como forma do pensar sem determinação temporal, por oposição à forma do pensar, com determinação temporal no sentido seguinte:

"enquanto os conceitos lógicos como conceitos sincategoremáticos possuem apenas esquemas temporais e referências objetivas dependentes, os conceitos categoremáticos possuem esquemas temporais e referências objetivas independentes." [89]

---

[89] Raggio, A.R. "Consideraciones sobre la concepción kantiana de la lógica formal".

Mas esta maneira de enfrentar o problema sugere para nós de que maneira podemos fazer de Kant um construtivista conseqüente. Não há, no entanto, nenhum elemento que faça suspeitar que Kant poderia pôr em dúvida a validade irrestrita das leis lógicas, ponto no qual coincide com Leibniz novamente. Em particular, e à diferença dos argumentos transcendentais, na matemática as provas *apagógicas* - para seguir a denominação de Kant -, como a do tipo sugerido acima, "possuem o seu lugar próprio"[90].

Por certo, Kant afirma que a lógica é válida "segundo meros conceitos". Porém, por exemplo, o princípio "Non entis nulla sunt praedicata" impõe pré-requisitos para sua aplicação: o conceito do sujeito não deve ser vazio. Desta forma, a primeira das antinomias da razão não prova que, por exemplo, o princípio de terceiro excluído não é válido - não haveria nesse caso nem sequer aparência de antinomia - senão que, justamente, pelo mundo ser um *non-entis*, os predicados finito é infinito aplicados a mundo dão duas afirmações *falsas*, o qual explica a *aparente* violação do princípio de terceiro excluído.

Este último aspecto, o caráter subjacente da lógica clássica admitida como sendo de validade irrestrita, permite ver outro aspecto dos limites do construtivismo kantiano. Assinalamos no capítulo anterior que não pretendíamos encontrar teses técnicas de caráter construtivista em Descartes, mas sim pretendíamos encontrar nele o "espírito" do construtivismo contemporâneo. Independentemente de que aqui e ali encontremos teses kantianas que sugiram analogias com o construtivismo, acreditamos que em Kant não encontramos precisamente aquele "espírito".

Com efeito, vimos que em Descartes encontrávamos, senão uma rejeição "intuicionista" de terceiro excluído, uma implícita admissão da possibilidade de examinar a validade irrestrita do mencionado princípio. Assinalávamos que a rejeição de terceiro excluído é uma das notas caraterísticas do intuicionismo. Escreve ao respeito Brouwer:

"/.../ a questão da validade do princípio de terceiro excluído é equivalente à questão de *se podem existir problemas matemáticos insolúveis*. Não há traço de uma prova para a convicção, q qual alguma vez já foi proposta, de que não existe nenhum problema matemático insolúvel."[91]

---

[90] CRP, B 820.
[91] Citado por Smorynski, C. *Op. cit.*, p. 14.

Dentro deste espírito construtivista encontramos, por certo, a Descartes. Confrontado com o problema do infinito e a aplicação de terceiro excluído, Descartes responde que, em último termo, esse problema está além de nossas capacidades para resolvê-lo. Resposta semelhante encontramos no que diz respeito à relação entre o diâmetro e a circunferência: *ignorabimus*. Por outro lado, a convicção mencionada por Brouwer acima, como veremos enunciada de maneira um tanto diferente, é de Hilbert: todo problema matemático ou bem se resolve ou bem se prova que os métodos que se consideram adequados para resolvê-lo são insuficientes.

Qual das duas atitudes é mais próxima à de Kant? Numa passagem supracitada em relação a π parece-nos que encontramos uma posição que se aproxima, neste aspecto, a Hilbert. Repetimos a citação parcialmente para comodidade do leitor:

"Visto que tal relação não pode ser dada congruentemente pelos números racionais e que pelos irracionais ainda não foi encontrada, então julga-se que pelo menos a impossibilidade de tal solução possa ser conhecida com segurança, e Lambert forneceu uma prova a respeito."

Tomadas literalmente, então, há afirmações de Kant que, sob supostos diferentes, conduzem a restrições de tipo construtivo; em particular, aquelas que se relacionam com a intuição como representação singular e com a existência de objetos matemáticos garantida por definições construtivas. Inclusive, como assinalamos, podemos reconhecer que as demonstrações de afirmações existenciais como sujeitas a restrição de indicar o "método de construção" do objeto em questão encontraria, sob a mesma hipótese de ter supostos diferentes, apoio na obra de Kant.

Destacávamos que a intuição, enquanto representação singular, no entanto, não dá conta dos enunciados universais. Quando se trata de enunciados desta classe, parece que nos aproximamos mais da intuição de idéias cartesiana do que da forma da intuição de Kant, num eclecticismo no mínimo discutível. Olhado desta perspectiva, acreditamos que o construtivismo contemporâneo abandona o conceito kantiano de intuição como representação singular. Uma confirmação implícita da última afirmação encontramo-la na análise de A. Raggio das diferenças entre o intuicionismo e o finitismo de Hilbert. Com efeito, para Raggio o intuicionismo parte, à diferença do finitismo, da atividade do sujeito de conhecimento:

"Não apenas de sua capacidade transcendental de gerar tempo, *senão também* /nossos grifos/ *de sua capacidade noética de gerar e captar sentidos de enunciados e demonstrações*."[92]

Ora, independentemente de até que ponto e com que modificações o construtivismo contemporâneo encontra em Kant suas raizes, em nossa análise procuramos mostrar que, do ponto de vista matemático, não há diferenças substantivas entre Kant e Leibniz. Podemos sintetizar nossa visão dizendo que Kant substitui a "teoria do formalismo" leibniziano pela sua "teoria da construção dos conceitos", mas que os resultados matemáticos coincidem em um e outro caso.

Um caso confirmatório de nossa tese encontramos, um tanto paradoxalmente, no tratamento do infinito. Com efeito, a "construção de π" de Kant é no âmbito dos conceitos a "definição (expressão através do finito) de π" de Leibniz no âmbito do formalismo. Independentemente da questão da existência do infinito atual, Leibniz exige sua expressão através do finito como condição gnosiológica relativa a nossa finitude. Deixando de lado as diferenças relativas às respectivas teorias dos conceitos de ambos autores, talvez não se trate mais do que pontos de vista que, em último termo, podem serem olhados como complementares.

2.3. Recapitulação

A diferença radical que existe entre os conceitos cartesiano e kantiano de intuição é posta de manifesto de maneira singela quando notamos que no caso de Descartes, como mostramos no capítulo anterior, a intuição permite justificar enlaces entre conceitos cujo produto são afirmações matemáticas, enquanto que em Kant a intuição, como representação singular, permite mostrar que um conceito matemático é não-vazio.

Com efeito, a intuição, seja pura ou empírica, é entendida por Kant como representação singular. Porém, além do papel de instância de prova de existência dos objetos matemáticos e de instância de justificação de juízos singulares ou existenciais, Kant afirma que a intuição desempenha um papel fundamental na prova de enunciados universais, tese que é no mínimo discutível. Kant também atribui, sem dúvida num contexto diferente do cartesiano, à intuição a função de garantir enlaces entre conceitos. Seguindo a Bolzano, achamos que tal pretensão é inconseqüente com as próprias premissas de Kant.

---

[92] Raggio, A.R. "El cincuentenario de los *Grundlagen der Mathematik* de Hilbert e Bernays", p. 204.

A crítica de Bolzano, o qual assinala que, enquanto representação singular, a intuição não permite fundamentar a pretendida universalidade irrestrita das afirmações matemáticas, permite pôr de manifesto a dificuldade que toda variante de construtivismo deve enfrentar: aceitar mostrar através da intuição, *qua* faculdade de representações singulares, apenas que um conceito é não-vazio, ou aceitar *outro* conceito de intuição que capte generalidades, no sentido de enlace de conceitos.

Nos capítulos 3 e 4 pretendemos essencialmente apresentar a *forma mentis* leibniziana subjacente ao Programa de Hilbert. Mostraremos como o ponto de partida de Hilbert é uma crítica aos intentos de justificação da matemática na intuição, entendidos por ele como subjetivistas. Em particular, insistiremos em que subjaz ao Programa de Hilbert uma concepção na qual o formalismo não é de natureza completamente arbitrária - concepção que examinamos já no caso de Leibniz - e que opera como "condição de possibilidade" do programa hilbertiano de fundamentação da matemática.

Ora, há interpretações do Programa de Hilbert que procuram estabelecer sua filiação kantiana, e às quais nós faremos referência especialmente no Capítulo 4. Em primeiro lugar, examinaremos essas interpretações na medida em que elas procuram associar o "ponto de vista finito" hilbertiano com a intuição como representação singular. O novo papel atribuído à percepção do ponto de vista dos fundamentos nos escritos dos anos 20 parece aproximar o pensamento de Hilbert ao de Kant. Em segundo lugar, examinaremos as interpretações que aproximam Hilbert a Kant, mas da perspectiva da "teoria dos conceitos" deste último, um aspecto que nos parece mais relevante que o anterior.

Em último termo, nossa interpretação do Programa de Hilbert repousa num certo caráter complementar que podemos encontrar entre as teses de Leibniz e Kant. Por uma lado, encontramos em Leibniz, como contrapartida fundacional oposta à intuição, uma "teoria do formalismo" - ausente de todo em Kant - e ponto fundamental para um exame do Programa de Hilbert. Por outro lado, encontramos em Kant uma "teoria dos conceitos" que serve de apoio para a concepção hilbertiana da aritmética, mas sem a noção de "construção" na intuição pura.

Parte II

O Programa de Hilbert

Capítulo 3
Temas leibnizianos no Programa de Hilbert

3.0. Apresentação

O presente capítulo é dedicado a mostrar como encontramos no projeto hilbertiano de fundamentação da matemática temas da filosofia de Leibniz que tratamos no Capítulo 1. Em primeiro lugar, encontramos a tese leibniziana "Possível implica existente", não como tese fundamental, mas sim como tese que nos permite distinguir dois períodos no formalismo hilbertiano, marcados sucessivamente pela presença e ausência da mencionada tese. Neste capítulo, mostramos como os restantes temas da filosofia de Leibniz, destacados no Capítulo 1, aparecem nos primeiros escritos de Hilbert. No capítulo seguinte, mostramos como esses temas subsistem independentemente do abandono de "Possível implica existente".

Na Seção 3.1. examinamos a relação entre o critério "Consistência implica existência" e a visão hilbertiana da história da matemática como progressiva e de estrutura aberta. Neste contexto, "Consistência implica existência" aparece claramente mais como critério natural para evitar práticas matemáticas restritivas que como critério "ontológico". Como contrapartida fundacional da intuição, temos em Hilbert, em lugar das definições leibnizianas, o conceito central de sistema axiomático.

Na Seção 3.2. tratamos do *novum* hilbertiano que implica o papel fundacional do sistema axiomático. Remetemo-nos essencialmente a *Pensamento axiomático*, texto que consideramos um ponto de inflexão entre os mencionados dois períodos do formalismo de Hilbert. Os sistemas axiomáticos também são examinados nesta seção no que diz respeito à prática da própria matemática e na sua relação com a história desta. Este caráter "bifronte" do sistema de axiomas, em relação à prática matemática por um lado, e aos fundamentos da mesma por outro, não é acidental; reflete um aspecto do pensamento de Hilbert que nos parece não suficientemente considerado pelos estudiosos do tema.

Esse aspecto é introduzido na Seção 3.3. deste capítulo e, mais que uma tese a provar, trata-se de um instrumento interpretativo cuja eficácia decorrerá, segundo nos parece, do conjunto do trabalho. Brevemente, consiste em distinguir entre a matemática como ela é na prática usual e a matemática como objeto da metamatemática. Em particular, o caráter bifronte do sistema de axiomas acima mencionado, parece-nos, reflete essa distinção. Em geral, obriga-nos a refletir sobre a questão seguinte: se as afirmações feitas em função do programa de fundamentação da matemática - quando a matemática é tomada como objeto da metamatemática - são também, sem mais, afirmações sobre a própria matemática.

No entanto, o objetivo central da Seção 3.3. é examinar os temas leibnizianos do Programa de Hilbert nos trabalhos escritos por volta de 1900 que, convenientemente traduzidos, são os seguintes: a) subjetividade da intuição; b) intersubjetividade do sistema de axiomas e da demonstração de consistência dos mesmos; c) papel do formalismo na fundamentação da matemática; d) decorrente importância da percepção; e) tratamento do infinito através do finito. Os itens mencionados têm a ver especialmente com a constituição de uma nova disciplina matemática, a metamatemática, destinada a fornecer uma fundamentação definitiva à própria matemática, mas a qual encontramos apenas em germe neste período do pensamento de Hilbert. A Seção 3.4. apresenta as primeiras reações face ao projeto hilbertiano de fundamentação da matemática.

3.1. Consistência = existência

Na Parte I, mostramos indiretamente que a discussão sobre qual é a instância adequada de justificação da matemática redunda na aceitação ou não de novos instrumentos de trabalho matemático. Tanto Descartes quanto Leibniz foram sensíveis à necessidade de fundamentar suas descobertas de forma tal que a introdução de novos instrumentos decorresse da instância escolhida. E foram também sensíveis às dificuldades que uma instância excessivamente estreita acarreta para o desenvolvimento da matemática.

O século XIX também não é alheio a polêmicas como as referidas acerca da legitimidade ou não da introdução de conceitos matemáticos. Para Gauss, o infinito atual é uma "maneira de falar", como já Leibniz tinha dito dos infinitésimos. Weierstrass havia conseguido eliminar da fundamentação da análise a referência a "quantidades infinitamente pequenas", dando início a um processo conhecido como aritmetização da análise. Justamente, esta idéia de aritmetizar é conseqüente com uma transformação que subverte, por assim dizer, a visão clássica sobre a ordem relativa de importância entre geometria e aritmética. Falávamos que no século XVII a aritmética chega a adquirir o mesmo *status* de disciplina fundamental que a geometria. O século XIX dá um passo adiante: sagra a aritmética como "a rainha da matemática".

Mas se na aritmética parece em princípio possível limitar-se ao infinito potencial, a teoria de conjuntos de Cantor, para D. Hilbert "a mais maravilhosa flor do espírito matemático", introduz no cerne do pensamento matemático o infinito atual. De fato, segundo Hilbert, de uma maneira oculta, o infinito atual opera inclusive na aritmetização da análise de Weierstrass. Ora, face às inovações desta natureza, particularmente a teoria dos cardinais transfinitos de Cantor, surge a oposição de matemáticos de perfil construtivista, principalmente Kronecker, que consideram tais inovações como carentes de sentido. Temos o germe da "*gigantomachia sobre os fundamentos*", cujo capítulo final se escreverá por volta de 1930.

Um dos gigantes é David Hilbert, o matemático mais importante da sua geração. Nele encontramos uma reflexão sobre a história da matemática em relação à introdução de novos instrumentos matemáticos. Ora, nada mais alheio às idéias de Hilbert sobre o desenvolvimento da matemática do que fraturas revolucionárias no seu percurso. O essencial do processo de desenvolvimento da matemática, segundo lemos em *Os problemas da matemática*, conferência escrita em 1900, acha-se na introdução de novos métodos para a resolução de antigos problemas, métodos que eventualmente complementam ou generalizam os já existentes[93]. O pesquisador, ao intentar resolver um problema, "acha novos métodos e novos pontos de vista, onde descobre um horizonte mais vasto e livre."[94]. E também nada mais alheio ao pensamento de Hilbert do que a idéia de um "sistema total da matemática", pois as teorias matemáticas vão evoluindo, principalmente pela adição de novos métodos de resolução de problemas.

Para Hilbert, o percurso histórico de uma disciplina matemática tem suas origens na "experiência", pois os primeiros problemas de qualquer teoria matemática surgem de problemas de natureza prática. A solução matemática desses problemas é, no entanto, um produto de natureza racional, sem componentes empíricos.

[93] Cfr. Hilbert, D. *Matematische Probleme*, doravante citado *Os problemas da matemática*.
[94] Cfr. *Os problemas da matemática*., p. 291: "Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont."

Com esse produto racional a experiência é, por assim dizer, conceptualizada, e então promove novos problemas. Desta forma, experiência e razão alimentam-se uma a outra. Porém, a matemática é independente da experiência, sua gênese não explica seu estado desenvolvido.

Independentemente das questões práticas que lhe deram origem, a matemática se propõe problemas de maneira autônoma, isto é, problemas de natureza racional, sem relação com a experiência[95]. Esses problemas são os que dão origem a novos métodos de prova, caso os meios conhecidos resultem insuficientes para sua resolução. Essa insuficiência pode ser reconhecida na prática, quando introduzimos métodos face aos fracassos anteriores, sem ter ainda uma justificativa teórica da necessidade de tal introdução.

Porém, num estágio suficientemente avançado de uma disciplina reconhecemos duas possibilidades: ou bem o problema é resolvido ou bem se demonstra sua insolubilidade com os meios propostos para resolvê-lo. Neste caso, o matemático terá uma justificativa teórica para introduzir novos métodos de resolução. E a condição mais geral que deve satisfazer a resolução de um problema matemático é o estabelecimento de um número finito de hipóteses e proceder através de um número também finito de deduções, entendida esta última condição por Hilbert como uma necessidade de nosso entendimento[96].

A ambígua expressão "métodos" pode ser substituída, no caso de disciplinas suficientemente desenvolvidas, pelo conceito de "sistema de axiomas", no qual os métodos são apresentados. Por certo, uma demonstração axiomática satisfaz às "necessidades do entendimento" acima mencionadas. Ora, um sistema de axiomas expressa o grau de desenvolvimento de uma teoria matemática precisamente no momento histórico em que eles são fornecidos, e não uma teoria definitiva, no sentido de que a partir dos axiomas dados *todas* as

---

95 Cfr. *Os problemas da matemática.*, p. 293: "Bei der Weiterentwicklung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbständigkeit bewusst; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äussere Anregung allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklischter Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund."

96 Cfr. *Ibid.*, p. 293: "Wir erötern noch kurz, welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind: ich meine vor allem die, dass es gelingt, die Richtigkeit der Antwort durch eine endliche Anzahl von Schlüssen darzutun, und zwar auf Grund einer endlichen Anzahl von Voraussetzungen, welche in der Problemstellung liegen, und die jedesmal genau zu formulieren sind. Diese Forderung der logischen Deduktion mittels einer endlichen Anzahl von Schlüssen ist nichts anderes als die Forderung der Strenge in der Beweisführung. In der Tat, die Forderung der Strenge, die in der Mathematik bekanntlich von sprichwörtlicher Bedeutung geworden ist, entspricht einem allgemeinen philosophischen Bedürfnis unseres Verstandes, und anderseits kommt durch ihre Erfüllung allein erst der gedankliche Inhalt und die Fruchtbarkeit des Problems zur vollen Geltung."

questões possíveis possam ser decididas por sim ou por não a partir deles, isto é, que para qualquer afirmação formulada na linguagem da teoria ou ela ou sua negação seja teorema. Em termos técnicos, não se trata de completude sintática, senão de que os axiomas permitam deduzir os enunciados que *na prática* têm sido reconhecidos como verdadeiros[97].

Essa é a maneira correta de entender a axiomática, por exemplo, nos *Fundamentos da Geometria*. A "regra fundamental" é tratar de ver se um problema pode ser resolvido com meios limitados: a regra fundamental é um guia geral e natural. Em geral, quando uma questão é apresentada, o conhecimento é satisfatório quando ou resolvemos completamente a questão ou demonstramos a impossibilidade de resolução com os meios propostos[98].

Mas, embora a idéia de um sistema axiomático sintaticamente completo, que seria entendido como uma teoria matemática definitiva sobre um domínio, não corresponda à visão de Hilbert sobre a natureza da matemática, o *focus imaginarius* da resolubilidade em princípio de todo problema matemático é uma tese defendida por Hilbert em toda a evolução de seu pensamento. Tal tese implica a preferência por posturas filosóficas permissivas, no que diz respeito à aceitação de novos métodos de prova, e não proscritivas. A impossibilidade de demonstração de uma determinada questão matemática com meios limitados relaciona-se, obviamente, com este ponto, na medida em que uma descoberta dessa natureza é causa de descobertas novas, produto da introdução de novos métodos de prova.

Assim, o critério de consistência como condição necessária e suficiente para a introdução de novos métodos para resolver problemas aparece como o mais permissivo possível. Natural então a volta a Leibniz: na matemática, consistência implica existência. A existência matemática é, então, ausência de contradição, não apenas das definições, como para Leibniz, senão dos axiomas em questão. Nos primeiros escritos de Hilbert sobre fundamentos, esta postura permite afirmar, por exemplo, a existência de conjuntos infinitos como o contínuo real, se provada a consistência dos axiomas correspondentes[99]. Ora, esta "volta a Leibniz" origina-se,

---

[97] Para um exame da concepção da história da matemática de Hilbert, com o qual coincidimos em linhas gerais, cfr. V. M. Abrusci, "Per uma caratterizzazione del programma hilbertiano".

[98] Cfr. Hilbert, D. *Foundations of* Geometry, doravante citado Os *fundamentos da geometria*, p. 106.

[99] Cfr. *Os problemas da matemática*, p. 300-301: "Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriffe existiert mathematisch nicht. So existiert z. B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, dass die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche

justamente, na necessidade de contrapor uma instância formal ao recurso, por parte de grandes matemáticos como Kronecker, à intuição, recurso que implicava a rejeição de conceitos matemáticos introduzidos no século XIX.

Nos seus primeiros escritos, a prova de consistência fornece, para Hilbert, significação definida e conteúdo à afirmação de existência do infinito[100] e, em geral, de qualquer conceito matemático. Vemos claramente então o caráter permissivo do critério de consistência, chamado por Hilbert de *princípio criativo*: o critério permite-nos introduzir novos instrumentos matemáticos com apenas a restrição de evitar a contradição[101].

Falávamos acima que a procura de um critério permissivo decorria da concepção progressiva que Hilbert tem do desenvolvimento da matemática. Ora, a expressão mais clara desse caráter progressivo encontra-se naquelas teorias que alcançam um grau de desenvolvimento tal que permite sua axiomatização, pois a adição de novos métodos de prova aparece imediatamente como a adição de novos axiomas. Escreve Hilbert em *Os fundamentos da lógica e da aritmética*: "uma proposição adicional é correta tão logo quanto reconhecemos que nenhuma contradição resulta se é adicionada como axioma às proposições previamente encontradas corretas"[102].

Concluímos do parágrafo anterior que consistência e verdade matemática ("correção" na passagem acima citada) são identificadas. Ora, devemos então adicionar como tese subjacente à "Consistência implica existência" a tese "Significado = existência". Porém, como já assinalamos, os sistemas axiomáticos que

führen können, so sage ich, dass damit die mathematische Existenz des Begriffes, z. B. einer Zahl oder einer Funktion, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist. In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen in der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Kontinuums."

100 Cfr. Hilbert, D. *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, doravante citado *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, p. 256: "Was insbesondere den Begriff des Unendlichen **u** anbetrifft, so erscheint durch die oben angedeutete Darlegung die Behauptung der Existenz des Unendlichen **u** gerechtfertigt; denn sie erhält jetzt eine bestimmte Bedeutung und einen später stets anzuwendenden Inhalt."

101 *Ibid.*, p. 258: "In I. kommt das schöpferische Prinzip zum Ausdruck, das uns im freiesten Gebrauch zu immer neuen Begriffsbildungen berechtigt mit der einzigen Beschränkung der Vermeidung eines Widerspruches"

102 *Ibid.*, p. 257: "Auf einem bestimmten Standpunkt in der Entwicklung der Theorie angelangt, darf ich eine weitere Aussage als richtig bezeichnen, sobald erkannt worden ist, dass sie, als Axiom zu den bisher als richtig befundenen Aussagen hinzugefügt, keinen Widerspruch ergibt, d.h. zu Folgerungen führt, die gegenüber einer gewissen Verteilung der Dinge in die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden sämtlich richtige Aussagen sind."

interessam a Hilbert correspondem a teorias historicamente importantes, e não a sistemas de axiomas arbitrários. Por certo, o conceito de sistema axiomático de Hilbert já não responde ao conceito clássico; em particular, porque sua visão dos sistemas de axiomas está orientada à necessidade da prova de consistência dos mesmos.

Ora, vimos que em Leibniz encontramos esta necessidade de prova de consistência das definições. Justamente, as definições substituem os axiomas matemáticos na medida em que axiomas e teoremas matemáticos são deduzidos a partir de definições e leis lógicas. Natural então achar em Hilbert uma análise do método axiomático, como encontramos em Leibniz uma análise das definições. Trataremos disto na seção seguinte.

3.2. Axiomática hilbertiana e definições leibnizianas

O exame mais detalhado do "método axiomático", ainda no período que poderíamos chamar de pré-história do Programa, o encontramos em *Pensamento Axiomático*[103], escrito em 1917. Neste trabalho, o método axiomático aparece como método geral da ciência. Por certo, outra coincidência metodológica, *mutatis mutandis*, com o pensamento de Leibniz. Com efeito, Leibniz assinalava um papel semelhante às definições e à prova de possibilidade do definido na sua teoria do conhecimento. Ora, como método geral da ciência pode-se dizer que o método axiomático pertence à lógica, isto é, subjaz a qualquer ciência ou, no mínimo, a qualquer ciência suficientemente desenvolvida.

Em *Pensamento Axiomático* uma teoria científica é considerada como um entrelaçado de conceitos, de forma tal que a cada objeto do domínio da teoria corresponde um conceito do entrelaçado e a cada fato entre objetos correspondem relações lógicas entre conceitos[104]. Ora, observa-se então que umas poucas afirmações -os axiomas- subjazem ao entrelaçado todo, o qual pode ser construído a partir delas, mais dedução[105].

---

103 Hilbert, D. *Axiomatische Denken*. Doravante citado *Pensamento axiomático*.

104 Cfr. *Pensamento axiomático*, p. 146: "Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, dass diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, dass dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes."

105 *Ibid.*, p. 147: "Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, dass der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde

Destacávamos na seção anterior que a essência do progresso matemático encontra-se na introdução de novos métodos de prova *úteis* para a resolução de problemas e que numa teoria suficientemente desenvolvida isso redundava na aceitação de novos axiomas. Além da utilidade, outro critério rege a avaliação de um novo instrumento: sua simplicidade. Ora, simples não deve ser entendido no sentido de evidente, senão no sentido de que sua introdução estrutura a teoria, do ponto de vista *dedutivo*, de maneira mais simples. Em lugar do tradicional critério de evidência para os axiomas temos, então, um critério de simplicidade dedutiva.

Ora, nada melhor que ver no próprio trabalho de Hilbert que deve entender-se por simplicidade. J. Diudonné[106] caracteriza o trabalho matemático de Hilbert como notável pela hharmonia entre os fins perseguidos e a desconcertante simplicidade para alcançá-los. Em geral, os métodos de Hilbert não resultam do aperfeiçoamento de métodos de seus predecessores, senão do retorno à origem da questão tratada. O que é simplicidade vê-se claramente na seguinte descrição:

"Esta peculiaridade aparece já nos trabalhos de Hilbert sobre TEORIA DAS INVARIANTES. Nascida uns quarenta anos antes, era por essa época um dos ramos mais "na moda" das matemáticas. Porém, a abundante literatura que lhe era dedicada caraterizava-se sobretudo por ser uma massa amorfa de cálculos intermináveis, de onde surgiam com muito esforço algumas idéias gerais, muito insuficientes, segundo parecia, para permitir estabelecer as leis universais cuja existência se suspeitava, mas cuja validade só se sabia demonstrar mediante raciocínios sumamente trabalhosos em cada caso particular. Compreende-se, portanto, a surpresa despertada no mundo científico quando em 1888 Hilbert demonstrou estes teoremas gerais em poucas páginas e quase sem cálculo..."[107].

O conceito de simplicidade está então relacionado com a estruturação dedutiva de um domínio de conhecimento. Indiretamente podemos ver que, quando se pretende que com a axiomática Hilbert reduziria a demonstração a uma sorte de cálculo mecânico, deve-se suspeitar que tal afirmação não é de todo correta. Com efeito, como diz Dieudonné, Hilbert "ensinou aos matemáticos a *pensar axiomaticamente*, isto é, a tratar

---

liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen."

[106] Dieudonné, J. "David Hilbert (1862-1943)".

[107] *Ibid.*, pp. 314-315.

de reduzir cada teoria a seu esquema lógico mais estrito, desembaraçada da técnica contingente do cálculo"[108].

Justamente, reduzir uma teoria a seu esquema lógico mais estrito produz, de outra perspectiva, um aprofundamento da mesma no sentido em que axiomas aparentemente fundamentais resultam passíveis de ser deduzidos de outros princípios, que então passam a ser considerados como axiomas. A nova estruturação teórica decorrente deve satisfazer aos critérios mencionados acima e, em particular, àquele da simplicidade dedutiva. Do dito decorre evidentemente uma relativização do conceito de axioma, de forma tal que não permite afirmar que o mero estabelecimento dos mesmos constitua então uma fundamentação última[109]. É necessário o exame do método axiomático mesmo para uma autêntica tarefa de fundamentação[110].

Dado um sistema de axiomas, é suficiente para Hilbert que ele satisfaça a duas condições: independência e consistência[111]. Em primeiro lugar, o sistema de axiomas deve permitir examinar a teoria da perspectiva da dependência ou independência dos seus enunciados, no sentido de dedutibilidade relativa. No que diz respeito à independência, é claro que para Hilbert não se trata de uma questão de elegância - como também se pode entender esta condição - senão que a independência fornece um esclarecimento da estrutura da teoria, pois permite estabelecer claramente o entrelaçado de conceitos e suas respectivas relações. Referindo-se aos *Fundamentos da Geometria*, mas com considerações perfeitamente aplicáveis a *Pensamento axiomático*, escreve H. Sinaceur:

"Analisar quer dizer explicitar que conceitos e que relações são admitidas como primitivas, separar os enunciados admitidos (os axiomas) dos enunciados demonstrados (os teoremas), determinar o rol assumido

---

108 *Ibid.*, p. 318.

109 *Pensamento axiomático*, p. 147-148: "In der Tat machte sich in den einzelnen Wissensgebieten das Bedürfnis geltend, die genannten, als Axiome angesehen und zugrunde gelegten Sätze selbst zu begründen./.../ Aber die kritische Prüfung dieser "Beweise" lässt erkennen, dass sie nicht an sich Beweise sind, sondern im Grunde nur die Zurückfürung auf gewisse tiefer liegende Sätze ermöglichen, die nunmehr ihrerseits an Stelle der zu Beweisenden Sätze als neue Axiome anzusehen sind."

110 *Ibid.*, p. 148: "Das Verfahren der axiomatischen Methode, wie es hierin ausgesprochen liegt, kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich, wie eine solche ja bei jedem Gebäude nötig wird in dem Masse, als man dasselbe ausbaut, höher führt und dennoch für seine Sicherheit bürgen will."

111 *Ibid.*, p. 148: "Soll die Theorie eines wissensgebietes, d.h. das sie darstellende Fachwerk der Begriffe, ihrem Zwecke, nämlich der Orientierung und Ordnung dienen, so muss es vornehmlich gewissen zwei Anforderungen genügen: *erstens* soll es einen Überblick über die *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* der Sätze der Theorie und *zweitens* eine Gewähr der *Widerspruchslosigkeit* aller Sätze der Theorie bieten. Insbesondere sind die Axiome einer jeden Theorie nach diesen beiden Gesichtspunkten zu prüfen."

por um axioma na demonstração de tal teorema: ele é, em função de outros axiomas aceitos simultaneamente, eliminável ou indispensável?"[112]

Por certo, a ausência do critério de evidência não implica a procura de sistemas de axiomas independentes, porém anti-intuitivos, senão uma exposição dos conceitos fundamentais da teoria como ela é formulada *na prática*. E podemos coincidir com Sinaceur que "a finalidade /da axiomática/ não é *estabelecer* tal teorema, senão determinar de que conjuntos *minimais* de enunciados prévios ele depende logicamente."[113].

A segunda condição a que deve satisfazer um sistema de axiomas, naturalmente, é a não-contradição. Esta segunda condição é a tarefa específica de um programa de fundamentação da matemática. Ora, dado o sistema de axiomas, o problema de sua consistência pode, às vezes, ser examinado via redução do problema à consistência de outra teoria. Neste caso temos um prova de consistência *relativa*.

Assim, a consistência de uma teoria física pode ser provada, mostrando que não há contradição nela, *se* a teoria dos números reais é consistente. Da mesma forma, é provada a consistência relativa da geometria à teoria dos reais. Por outra parte, no que diz respeito à questão da consistência dos reais, ela pode em princípio ser reduzida à questão da consistência da teoria dos naturais e da teoria dos conjuntos, através das quais pode ser a teoria dos reais desenvolvida. (Neste ponto há uma modificação em relação a *Os problemas da matemática*, onde Hilbert indica como objetivo imediato a prova direta de consistência dos reais.) Ora, o processo de redução não pode levar a um *regressus ad infinitum*: a teoria dos naturais e a teoria dos conjuntos não admitem provas de consistência relativa[114].

---

112 Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: Le finitisme", p. 254.

113 Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", p. 255.

114 *Pensamento axiomático.*, p. 153: "Haben wir beispielsweise bei Entwicklung der Galoisschen Gruppentheorie den Satz von der *Wurzelexistenz* oder in der Theorie der Primzahlen den Satz von der *Realität der Nullstellen* der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ als Axiom betrachtet, so läuft jedesmal der Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems eben darauf hinaus, den Satz von der Wurzelexistens bzw. den Riemannschen Satz über die Funktion $\zeta(s)$ mit den Mitteln der Analysis zu beweisen -und damit erst ist die Vollendung der Theorie gesichert.

Auch die Frage der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems für die *reellen Zahlen* lasst sich, durch Benutzung mengentheoretischer Begriffe, auf die nämliche Frage für die ganzen Zahlen zurückführen: dies ist das Verdienst der Theorien der Irrationalzahlen von WEIRSTRASS und DEDEKIND.

Nur in zwei Fällen nämlich, wenn es sich um die Axiome der *ganzen Zahlen* selbst und wenn es sich um die Begründung der *Mengenlhere* handelt, ist dieser Weg der Zürückführung auf ein anderes spezielleres Wissensgebiet offenbar nicht gangbar, weil es ausser der Logik überhaupt keine Disziplin mehr gibt, auf die alsdann eine Berufung möglich wäre."

A aparição de contradições na teoria dos conjuntos de Cantor, mesmo que já em 1908 Zermelo tivesse apresentado uma versão de tal teoria onde as contradições *conhecidas* não são em princípio dedutíveis, permite mostrar a utilidade do método axiomático, na medida em que não se trata apenas de mostrar que aquelas contradições não são possíveis, senão que nenhuma contradição pode ser deduzida. Neste sentido é que podemos falar de uma fundamentação última de uma teoria *dada*, e não numa teoria definitiva.

Porém, não se deve pensar que a motivação do programa de Hilbert encontra-se na descoberta dos chamados "paradoxos da teoria de conjuntos"; em particular, do "Paradoxo de Russell". Com efeito, os paradoxos são uma motivação adicional, pois Hilbert considerava que eles eram produto do uso de conceitos sem as devidas precauções, um fato não inusual na história da matemática. Por outra parte, deve ser dito que os paradoxos na teoria dos conjuntos, que surgem por volta de 1900, têm diferente impacto.

Em particular, o paradoxo de Russell tem um efeito considerável sobre o programa logicista de Frege. Este último desenvolveu um programa de redução da matemática à lógica com ecos leibnizianos. Em primeiro lugar, Frege retoma a idéia de Leibniz de que as verdades aritméticas são analíticas, rejeitando, por outro lado, o caráter de analítico para as verdades geométricas. Frege introduz um conceito de verdade analítica também de cunho leibniziano: uma verdade é analítica se tem uma prova a partir de leis lógicas e definições[115].

Com vistas a obter uma fundamentação da aritmética sem nenhum recurso intuitivo, Frege introduz um formalismo destinado a apresentar as inferências lógicas necessárias para as demonstrações matemáticas. O interesse no formalismo reside, justamente, em que substitui a intuição a fim de obter rigor. Frege apresenta então um sistema axiomático para a lógica que não tem por finalidade reconhecer como verdadeiras as leis lógicas demonstradas, senão ressaltar as relações entre tais leis[116]. Com efeito, as leis lógicas nem admitem nem precisam de demonstração[117].

Ora, central para esse programa de redução da matemática à lógica era definir os conceitos aritméticos em termos de conceitos lógicos e deduzir, então, os axiomas da aritmética a partir da lógica e de tais definições. Como conceito lógico fundamental, aparecia o conceito de conjunto. Sem pretender expressar

115 Cfr. Frege, G. *Los fundamentos de la aritmética*, # 3.
116 Cfr. Frege, G. *Conceptografia*, p. 8.
117 Cfr. Frege, G. *Los fundamentos de la aritmética*, # 3.

exatamente o pensamento de Frege, podemos dizer que ele afirmava que toda propriedade determina um conjunto. Desta afirmação deduz-se, como é bem conhecido, uma contradição.

Diversas soluções para evitar esta contradição forem propostas. Podemos dizer que as duas principais consistem em, por um lado, determinar como sem sentido a expressão que conduz ao paradoxo, isto é, "**R** pertence a **R**", a qual impede a reconstrução do mesmo. Tal é basicamente a solução proposta por Russell via a chamada teoria de tipos. O problema da solução de Russell consiste em que para a fundamentação da teoria de números devem ser adicionados axiomas - em particular, o Axioma do Infinito - que, do ponto de vista filosófico, dificilmente podem ser aceitos como pertencentes à lógica e, portanto, que permitam afirmar que a aritmética seja então redutível à lógica. Naturalmente, para um programa de redução, este ponto é essencial, independentemente de que a solução proposta seja tecnicamente satisfatória.

A segunda solução consiste em restringir o axioma de existência de conjuntos, solução proposta por Zermelo. A idéia de Zermelo foi estabelecer a existência de alguns conjuntos por meio de axiomas correspondentes e, via outros axiomas, caraterizou operações que, a partir de conjuntos dados, permitem obter novos conjuntos. Finalmente, o chamado *Axioma de compreensão* estabelece que para qualquer conjunto **A**, existe um conjunto **B** tal que um elemento pertence a **B**, se e somente se, o elemento pertence a **A** e satisfaz uma propriedade determinada. Ora, entre as propriedades encontra-se "**R** não pertence a **R**", mas a forma do axioma não permite deduzir o paradoxo de Russell, usando o mesmo esquema de prova[118].

Naturalmente, o fato de não obter contradições por um caminho já conhecido não implica que no desenvolvimento ulterior da teoria elas não voltem a aparecer. Porém, não haveria outra disciplina senão a lógica que permitisse uma demonstração de consistência relativa, tanto da teoria dos números naturais quanto da teoria de conjuntos. Escreve Hilbert:

[118] Mencionamos acima que na "teoria de tipos" a expressão "R pertence a R" é considerada sem sentido e, conseqüentemente, também "R não pertence a R". Não é isto o que acontece na teoria de Zermelo. Nas versões ulteriores da teoria de conjuntos, inspiradas nas idéias de Zermelo, adiciona-se, por razões de ordem matemática, o chamado *Axioma de regularidade*: para qualquer x, x não pertence a x. Isto é, "x pertence a x" é considerada "falsa", e não sem sentido.

"Porém, devido a que a prova de ausência de não contradição é uma tarefa iniludível então parece necessário axiomatizar a lógica mesma e provar que a teoria dos números naturais como a teoria dos conjuntos são partes da lógica."[119]

Uma primeira leitura desta passagem pareceria indicar que Hilbert em 1917 mostra-se favorável ao programa logicista de redução da aritmética à lógica. A evidência em favor da irredutibilidade da aritmética à lógica como tese característica do pensamento de Hilbert é tanta, nos escritos anteriores quanto posteriores a *Pensamento axiomático*, que a passagem citada tem passado quase desapercebida pelos comentaristas. Independentemente dessa evidência, há duas observações que podemos fazer.

Em primeiro lugar, podemos dizer que Hilbert está analisando o desenvolvimento do problema, desenvolvimento que implica a axiomatização da lógica porque ela é também uma teoria que, em última instância, também estaria sujeita à questão da sua consistência. Em segundo lugar, da impossibilidade de uma prova relativa de consistência decorre que na prova *absoluta* de consistência o único critério é de natureza lógica: impossibilidade de deduzir uma afirmação e sua negação. Aparentemente, aqui enfrentaríamos uma circularidade: o critério de fundamentação da lógica seria ele próprio lógico. No entanto, devemos distinguir entre a lógica como teoria, que deve ser provada como não-contraditória, e a lógica num sentido, diríamos, informal, que não precisa de tal prova.

A lógica, por outra parte, relaciona-se com o problema da consistência da teoria de números e da de conjuntos através de uma série de questões correlacionadas que envolvem inclusive problemas gerais de teoria do conhecimento. Hilbert destaca em *Pensamento axiomático* as seguintes questões: a) a solubilidade em princípio de todo problema matemático; b) a questão do controle ulterior dos resultados de uma pesquisa matemática; c) a questão da simplicidade das demonstrações matemáticas; d) a questão da relação entre conteúdo e formalismo em matemática; e) a decidibilidade de cada pergunta matemática através de um número finito de operações[120].

---

[119] *Pensamento axiomático*, p. 153: "Da aber die Prüfung der Widerspruchslosigkeit eine unabweisbare Aufgabe ist, so scheint es nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und nachzuweisen, dass Zahlentheorie sowie Mengenlhere nur Teile der Logik sind."

[120] *Pensamento axiomático*, p. 153: "Bei näherer Überlegung erkennen wir nämlich bald, dass die Frage der Widerspruchslosigkeit bei den ganzen Zahlen und Mengen nicht eine für sich alleinstehende ist, sondern einem grossen Bereiche schwierigster erkenntnistheoretischer Fragen von spezifisch mathematischer Färbung angehört: ich nenne, um diesen Bereich von Fragen kurz zu charakterisieren, das Problem der prinzipiellen

Das cinco questões numeradas, Hilbert apenas trata em *Pensamento Axiomático* da questão da decidibilidade de um problema matemático através de um número finito de operações. Esta questão está relacionada com as demonstrações de afirmações existenciais, demonstrações que nem sempre permitem exibir o objeto que afirmamos existir com uma determinada propriedade. Hilbert lembra um ponto especialmente traumático de sua carreira profissional quando, jovem matemático, apresentou seu primeiro grande resultado sobre a teoria das invariantes mencionada acima por Dieudonné, resultado que foi qualificado nos seguintes termos: "Isso não é matemática, é teologia."[121]

Tratava-se, precisamente, de uma demonstração de existência sem exibição do objeto, diríamos, um argumento ontológico. Hilbert procurou então uma demonstração "não-teológica" e a achou; mas, como ele destaca, essa demonstração exige a consideração de princípios inteiramente diferentes dos que ele tinha usado na demonstração anterior. Portanto, a primeira demonstração não tem nada de teológica, senão que reflete os limites dos princípios usados e, por outra parte, é um indício para a procura de métodos que permitam a exibição do objeto.

Mas, a consideração de que métodos de prova diferentes permitem resolver de maneira diferente o mesmo problema mostra, então, que o exame da questão da decidibilidade num número finito de operações implica o exame da natureza das demonstrações matemáticas, entendido como o exame do instrumento que o matemático usa *qua* cientista[122]. Aqui temos o germe da teoria da prova hilbertiana e, para V.M. Abrusci, inclusive o germe do Programa de Hilbert[123].

Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage, das Problem der nachträglichen *Kontrollierbarkeit* des Resultates einer mathematischen Untersuchung, ferner die Frage nach einem *Kriterium für die Einfachheit* von mathematischen Beweisen, die Frage nach dem Verhältnis zwischen *Inhaltlichkeit und Formalismus* in Mathematik und Logik und endlich das Problem des *Entscheidbarkeit* einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen."

121 Gordan, P. "Über einen Satz von Hilbert". *Mathematische Annalen*, 42: 131-35. Citado em Abrusci, V.M. " ' Proof ', ' Theory ' and ' Foundations ' in Hilbert's Mathematical Work from 1885 to 1900".

122 *Pensamento axiomático*, p. 155: "Alle solchen prinzipiellen Fragen, wie ich sie vorhin charakterisierte und unter denen die eben behandelte Frage nach der Entscheidbarkeit durch endlich viele Operationen nur die letztgenannte war, scheinen mir ein wichtiges, neu zu erschliessendes Forschungsfeld zu bilden, und zur Eroberung dieses Feldes müssen wir -das ist meine Überzeugung- den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muss und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert."

123 Cfr. V.M. Abrusci, " 'Proof', 'Theory' and 'Foundations' in Hilbert's Mathematical Work from 1885 to 1900 ".

Por outra parte, é significativo que em *Pensamento Axiomático* não há referência a "Consistência implica existência" que, segundo já dissemos, resulta ser o critério de existência em *Os problemas da matemática*. É verdade que Hilbert é um pouco ambíguo nas suas afirmações, mas a seguinte passagem de *Os problemas da matemática*, parece implicar que Hilbert está pensando "existência" não como "existência do conceito":

"Na verdade, o conjunto de todos os números reais, isto é, o contínuo, não é /.../ a totalidade de todos os desenvolvimentos possíveis em frações decimais ou a totalidade de todas as leis possíveis segundo as quais podem proceder todos os elementos de uma série fundamental, senão um sistema de *entes* /nossos grifos/ nos quais as relações mútuas são regidas pelos axiomas estabelecidos e para os quais são verdadeiros todos os fatos, e apenas eles, que podem seguir-se dos axiomas por meio de um número finito de conseqüências lógicas."[124]

Mas em *Pensamento Axiomático* é notória a ausência de referência à consistência como critério de existência: um indício de que Hilbert está revisando um critério, digamos, de natureza filosófica, mas não está revisando a tese de que a consistência de uma teoria é o critério de aceitação *qua* teoria matemática. Em *Pensamento axiomático*, Hilbert parece estar pensando que o domínio de uma teoria está dado[125] e que uma teoria ordena os fatos geométricos, aritméticos ou físicos.

Ora, esquecendo as críticas epistemológicas contemporâneas a este tipo de concepção, parece em princípio aceitável que os fatos físicos são dados. Porém, quais seriam os fatos geométricos ou aritméticos? No caso da geometria devemos levar em conta que Hilbert subscreve à tese já para a época geralmente aceita de que a geometria é, no fundo, um ramo da física[126]. Com efeito, a diversidade de geometrias, outro fato fundamental no desenvolvimento da matemática no século XIX, é olhada como tratando-se de diferentes

---

124 *Os problemas da matemática*, p. 301: "Freilich der Inbegriff der reellen Zahlen, d.h. das Kontinuum ist bei der eben gekennzeichneten Auffassung nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Dezimalbruchentwicklungen oder die Gesamtheit aller möglichen Gesetze, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch die aufgestellten Axiome geregelt werden, und für welche alle und nur diejenigen Tatsachen wahr sind, die durch eine endliche Anzahl logischer Schlüsse aus den Axiomen gefolgert werden können."

125 *Pensamento axiomático*, p. 146: "So ordnen sich die geometrischen Tatsachen zu einer Geometrie, die arthmetischen Tatsachen zu einer Zahlentheorie, die statischen, mechanischen, elektrodynamischen Tatsachen zu einer Theorie der Statik, Mechanik, Elektrodynamik oder die Tatsachen aus der Physik der Gase zu einer Gastheorie."

126 *Ibid.*, p. 149: "Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinne gerade so der Bestätigung durch das Experiment wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinne."

sistemas axiomáticos consistentes que versam sobre o espaço físico, um dos quais, além de consistente, é verdadeiro. Portanto, haveria tais fatos geométricos, num sentido suficientemente amplo da palavra. A pergunta que fica aberta é: que são os números e quais são os fatos aritméticos? Voltaremos sobre esse ponto nos capítulos seguintes.

Mas para os nossos fins imediatos o que importa destacar é, além da importância da axiomática para a própria prática matemática, o papel fundacional que o sistema de axiomas passa a ter, papel que reconhecemos como factível de atribuir à *characteristica* leibniziana em relação às definições. Com efeito, quando já não temos como reduzir o problema de consistência de uma teoria como consistência *relativa*, então necessitamos *formalizar* o sistema de axiomas, como praticado usualmente, à *seqüências de símbolos*, com a finalidade de visualizar, por assim dizer, sua consistência. Precisa-se, então, demonstrar que uma certa seqüência de símbolos não é produzida pelas regras com as quais operamos com os símbolos do sistema formal. A axiomática, agora formal, *como objeto da prova de consistência* é o *novum* introduzido por Hilbert ao qual nos referimos no final da seção precedente.

3.3. Formalismo, percepção e intersubjetividade

Apesar de em princípio detectar uma mudança de posição em *Pensamento axiomático* em relação aos primeiros escritos, temos uma constante que percorre a obra de Hilbert: uma discussão sobre o caráter intersubjetivo da matemática e em que instância isto pode ser fundado. O que se procura é uma instância intersubjetiva que elimine a referência a alguma faculdade epistemologicamente suspeita - intuição dos construtivistas - como critério de aceitação de métodos matemáticos. Já anunciamos na Seção 3.1. que aceitar o critério "Consistência implica existência" é conseqüente com práticas matemáticas liberais e não proscritivas. E na seção 3.2. anunciamos que, independentemente desta tese, a prova de consistência absoluta implica uma visão da axiomática, via sua formalização completa, na qual um sistema de axiomas aparece, em função de tal prova, como objeto a estudar.

Há então uma outra coincidência com Leibniz, para nós mais profunda, que vai além de "Possível implica existente", e que está de acordo em linhas gerais com o espírito da crítica daquele a Descartes. Se Leibniz rejeita o ver claro e distinto cartesiano, Hilbert rejeita o recurso a qualquer *Urintuition*, remetendo ao sistema de axiomas e à prova de consistência, de forma semelhante a como Leibniz remete à definição e à prova da possibilidade do definido. Em ambos os casos, o que está por trás é o problema da *intersubjetividade* do conhecimento científico.

Com efeito, a discussão entre os construtivistas sobre que métodos devem ser aceitos mostra, para Hilbert, que a chamada intuição não é uma instância intersubjetiva, senão uma questão de opinião. Portanto, não há lugar para ela na fundamentação de uma disciplina. Já nos *Fundamentos da geometria* aparece o problema do subjetivismo relacionado com a chamada regra fundamental que mencionamos na seção anterior, segundo a qual os princípios da possibilidade de uma prova devem ser discutidos, mas não a partir de um pretendido requerimento de "pureza" de métodos de prova. Escreve Hilbert:

"Esse requerimento não é basicamente outra coisa que uma *forma subjetiva* /nossos grifos/ da regra fundamental aqui seguida."[127]

O problema do subjetivismo aparece também em *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, onde Hilbert critica a distinção cantoriana entre classes consistentes e inconsistentes, por não fornecer um critério objetivo para tal distinção: "Devo caraterizar sua concepção sobre esse ponto como uma que ainda deixa lugar para um juízo *subjetivo* e então não se alcança nenhuma certeza objetiva."[128] Hilbert, justamente, em princípio vai entender que o único conceito legítimo de intuição que pode ter lugar na fundamentação de uma ciência é a intuição perceptual, modelo de intersubjetividade.

Hilbert reconhece, em primeiro lugar, a importância "pragmática" da intuição perceptual na tarefa matemática: o matemático precisa de desenhos em geometria e de cifras em aritmética, neste último caso na linha do "pensamento cego" de Leibniz. Porém, tanto no caso dos desenhos quanto das cifras, é necessário o tratamento axiomático, entendido como o tratamento rigoroso que justifica o recurso intuitivo.

Vimos no Capitulo 1 como a fundamentação última do cálculo aritmético para Leibniz encontrava-se justamente em sua redução a uma demonstração a partir de leis lógicas e definições. Para Hilbert, se os desenhos constituem um método de demonstração adequado é porque se tem um conhecimento dos axiomas

---

127 *Os fundamentos da geometria*, p. 107.

128 *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, p. 249: "Indem er aber, meiner Meinung nach, für diese Unterscheidung kein scharfes Kriterium aufstellt, muss ich seine Auffassung über diesen Punkt als eine solche bezeichnen, die dem *subjektiven* Ermessen noch Spielraum lasst und daher keine objektive Sicherheit gewährt."

que legitimam o uso das figuras; se confiamos nos algoritmos para fazer cálculos mecanicamente, é porque a aplicação desses algoritmos repousa sobre os axiomas aritméticos. Por certo, não temos associada com a intuição geométrica nenhuma variante de uma "teoria da expressão", na medida em que parte da tarefa matemática do século XIX consiste em dissociar geometria e intuição "sensível". Mas, sem essas duas formas de recorrer à intuição, não seria possível o desenvolvimento da matemática[129].

Porém, o papel da percepção vai adquirir um matiz fundacional em função da mencionada rejeição hilbertiana de faculdades epistemologicamente suspeitas como a intuição. Com efeito, a prova de consistência de um sistema de axiomas reduz-se a mostrar que uma certa seqüência de sinais, isto é, objetos da percepção, não pode ser produzida dentro do sistema. Aqui encontramos a concepção novíssima do método axiomático *que decorre da função fundacional assinalada ao sistema de axiomas*.

Com efeito, o sistema de axiomas é concebido como um sistema de produção de seqüências de sinais desprovidos de significado com a finalidade, e apenas com a findalidade, da prova de consistência, isto é, da prova de que uma certa seqüência de sinais não é produzida pelo sistema. Se lembramos a sugestão de Dascal sobre o valor indireto da *characteristica* leibniziana, então encontramos um outro tema leibniziano em Hilbert.

A prova de consistência aparece como objetivo principal de uma nova ciência, a *metamatemática*, cuja função é fundamentar de uma maneira definitiva a confiabilidade da própria matemática. Para a constituição dessa ciência os sistemas axiomáticos usuais, expressados numa linguagem técnica mais ou menos informal, devem ser formalizados. Um formalismo consiste em especificar uma linguagem, indicando os símbolos que pertencem ao mesmo, distribuí-los em diversas classes diferenciadas, especificar as seqüências de sinais que são bem-formadas e indicar as regras que permitem passar de expressões bem formadas a outras expressões bem-

---

129 *Os problemas da matemática*, p. 295-296: "Die Arithmetichen Zeichen sind geschriebene Figuren, und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln, und kein Mathematiker könnte diese gezeichneten Formeln entbehren, so wenig wie ihm beim Rechnen etwa das Formieren und Auflösen der Klammern oder die Verwendung anderer analytischer Zeichen entbehrlich sind.
Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenges Beweismittel setzt die genaue Kenntnis und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zugrunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmässigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addieren zweier Zahlen die Ziffern nicht unrichtig unter einander setzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln, d.h. die Axiome der Arithmetik, das richtige Operieren mit den Ziffern bestimmmen, so wird das Operieren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfung bestimmt."

formadas. Num sistema axiomático, além disso, estabelece-se que fórmulas são os pontos de partida, isto é, os axiomas. As fórmulas que são obtidas a partir deles, através das regras, são os teoremas do sistema.

A percepção é então a condição de possibilidade da metamatemática, mas não cabe ao matemático, obviamente, o estudo da percepção do ponto de vista de seu caráter intersubjetivo. Em particular, quando se trata de fundamentos, percebe-se também como uma constante na obra de Hilbert a intenção de reduzir ao mínimo o papel da filosofia na fundamentação das ciências em geral e da matemática em particular. Com efeito, a tarefa de fundamentação é uma tarefa matemática, não filosófica. Podemos dizer, em última instância, que a tarefa da filosofia, neste contexto, seria fundamentar as caraterísticas intersubjetivas da percepção.

Ora, por ser a fundamentação da matemática uma empresa matemática, e não filosófica, não se trata de *que* são os números, senão de substituir essa pergunta por outra: que podemos *entender por* número de forma tal que seja suficiente para justificar a matemática? Nos trabalhos de 1900, sob a hipótese "Consistência implica existência", os entes matemáticos são aqueles que satisfazem os axiomas. Em *Pensamento axiomático* não se tratava dessa questão, mas é significativo o fato de não aparecer tal hipótese explicitamente formulada. Embora o próprio Hilbert pareça às vezes pretender responder à pergunta pelo *que* dos números, acreditamos que metodologicamente é conveniente entender que justamente não se trata de responder a essa pergunta via o programa de fundamentação. Nos capítulos seguintes tentaremos tornar plausível este ponto de vista.

Independentemente de que sejam os números, a tarefa de fundamentação, enquanto matemática, exige determinar os métodos legítimos para fornecer provas de consistência. Na já mencionada conferência de 1900, *Os problemas da matemática*, Hilbert apresenta como problema a prova de consistência da aritmética, entendendo como aritmética a teoria dos números reais, sem indicar de maneira precisa qual a forma em que tal prova poderia ser levada a cabo. Apenas indica que uma prova indireta está fora de cogitação. Com efeito, enquanto que a consistência da geometria, por exemplo, pode ser indiretamente provada construindo um domínio de números reais que satisfazem relações análogas aos axiomas geométricos, esse tipo de prova para a própria teoria de reais não pode ser apresentada.

Porém, em *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, conferência escrita quatro anos depois de *Os problemas da matemática*, Hilbert considera que o primeiro a ser provado é a consistência da teoria dos números naturais, e qualifica como *dogmática* a concepção que postula que os naturais são *dados* e, portanto, não são objeto de fundamentação[130]. Ora, a tarefa de fundamentação tem um caráter progressivo, isto é, antes de proceder a provar a consistência da teoria dos números naturais, começamos por provar a consistência de fragmentos da mesma.

O modelo de prova de consistência proposto nesta conferência segue o esquema: i) os axiomas, considerados como seqüências de sinais, têm uma certa propriedade; ii) deles só podem obter-se fórmulas (teoremas) com a mesma propriedade em questão; iii) a fórmula que representa que 1 é sucessor de outro número não tem essa propriedade. Provados i), ii) segue-se por iii) que a teoria é consistente. Com efeito, chamamos uma equação homogênea se seus termos contêm o mesmo número de símbolos. Os axiomas são homogêneos e as regras preservam a homogeneidade, isto é, os teoremas também são homogêneos. São então satisfeitas as condições i) e ii). Porém, a fórmula que expressa que 1 é sucessor de algum número, o que contradiz um dos axiomas do fragmento da aritmética considerado, não é homogênea. Portanto, não é derivável, isto é, o sistema é consistente.

No esquema de demonstração de consistência proposto por Hilbert podemos destacar alguns detalhes. Em primeiro lugar, que a demonstração está dirigida a provar que *uma* certa fórmula não é teorema e não que não possa deduzir-se uma fórmula e sua negação. Naturalmente, do ponto de vista lógico usual, trata-se de duas definições de consistência equivalentes. Mas a preocupação de Hilbert não é demonstrar a consistência de sistemas formais abstratos, senão de sistemas formais que incluam como teoremas sentenças reconhecidas como verdadeiras, e excluam as falsas.

Em segundo lugar, aparece como problema o método usado na prova. A idéia é que axiomas e teoremas, entendidos como objetos da percepção, têm uma propriedade perceptualmente reconhecível, chamada de homogeneidade. Ora, os axiomas são "átomos" a partir dos quais geramos os teoremas via o uso das regras de transformação. *Se* os axiomas têm a propriedade e *se*, supondo que se até um certo ponto n da cadeia dedutiva a fórmula em questão tem a propriedade, então no passo seguinte (o passo $n + 1$) as regras preservam a

---

130 *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, p. 248: " L. Kronecker hat bekanntlich in dem Begriff der ganzen Zahl das eigentliche Fundament der Arithmetik urblickt; er bildete sich die Auffassung, dass die ganze Zahl, und zwar als Allgemeinbegrif (Parameterwert), direkt und unmittelbar da sei; dadurch wurde er verhindert zu erkennen, dass der Begriff der ganzen Zahl einer Begründung und fähig ist. Insofern möchte ich ihn als *Dogmatiker* bezeichnen: er nimmt die ganze Zahl mit ihren wesentlichen Eigenschaften als Dogma hin und blickt nicht weiter rückwärts."

propriedade, *então* podemos concluir que todas as fórmulas do sistema, axiomas e teoremas, têm a propriedade.

Vemos então como aparecem combinadas as instâncias intersubjetivas às quais fazíamos referência, baseadas na recusa à intuição como instância subjetiva. Por um lado, o sistema de axiomas e a prova de consistência como instância rival da intuição, instância entendida como subjetiva. Pelo outro, a percepção como único conceito de intuição intersubjetivo que manifestamente subjaz ao programa hilbertiano de fundamentação da matemática via formalização. Ora, fica claro também que a finalidade do formalismo nos trabalhos escritos por volta de 1900 restringe-se a ser condição de possibilidade da prova de consistência.

Com efeito, não se trata de que a matemática seja um operar cego com símbolos, senão que na *fundamentação da matemática* procede-se *como se* a matemática fosse um tal operar cego com símbolos. A redução da matemática a seqüências de sinais desprovidos de significado num sistema formal é feita aos fins metamatemáticos, e em princípio nada diz, segundo achamos, a respeito da relação entre a matemática e o seu objeto. Porém, deve ser destacado que em *Pensamento axiomático* a formalização aparece, diferentemente dos primeiros escritos, como um instrumento cujo objetivo parece ir além de condição de possibilidade da prova de consistência. Com efeito, os sistemas formais são entendidos como o objeto de estudo *matemático* das próprias provas matemáticas, uma idéia que não encontramos no logicismo, onde a formalização é pensada só como condição de possibilidade do rigor na matemática.

Ora, há uma conexão mais profunda com o pensamento de Leibniz, sobre a qual nos chamou indiretamente a atenção H. Sinaceur. Relaciona-se com as notas que Hilbert denomina "necessárias do pensamento", às quais nos referimos na Seção 3.1. Nos capítulos seguintes veremos que o sistema formal "exprime" a natureza de nosso pensamento. Por outro lado, Sinaceur informa-nos que a idéia leibniziana de tratamento do infinito através do finito já se encontra num escrito de 1900, *Sobre o conceito de número*, onde Hilbert escreve que se trata de ganhar "sobre o solo do finito, o livre trato e domínio pleno acerca do transfinito"[131]. Em conclusão, vemos que encontramos todos os temas leibnizianos, com maior ou menor ênfase, na pré-história do Programa de Hilbert. Voltaremos a todos eles no capítulo seguinte.

---

[131] In H. Sinaceur. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", p. 253.

3.4. F. Klein e H. Poincaré críticos de Hilbert

Como toda obra pioneira, os primeiros trabalhos de Hilbert apresentam problemas, alguns dos quais já foram detectados pelos seus contemporâneos. Outros problemas são destacados pela crítica atual. No que segue, trataremos fundamentalmente das primeiras reações face o programa hilbertiano de fundamentação da matemática. Porém, trataremos em primeiro lugar da relação entre a lógica e a aritmética, de maneira tal que antecipemos uma problemática que será relevante para os capítulos ulteriores.

Uma peculiaridade dos primeiros trabalhos sobre fundamentos de Hilbert é que, mesmo achando necessário o desenvolvimento simultâneo da lógica e da aritmética, aquela praticamente não é considerada. Porém, como diz Smorynski, essa não é uma objeção importante, pois, da mesma forma que apenas consideramos o fragmento da aritmética que contém somente a operação sucessor, o espírito do trabalho é tal que sugere sucessivas extensões, tanto lógicas quanto propriamente matemáticas: "Devemos observar que, quando um novo objeto de pensamento é adicionado e tomado como primitivo, os axiomas previamente assumidos aplicam-se a uma classe maior de objetos ou devem ser convenientemente modificados."[132]

Por certo, Hilbert não tinha por volta de 1900 uma concepção clara do que entender por lógica. Porém, podemos pensar que para Hilbert o problema não é adicionar novos métodos de raciocínio, senão novos princípios de prova propriamente matemáticos. Com efeito, Hilbert está pensando a lógica da perspectiva do usuário matemático, isto é, dedução informal a partir de premissas[133], e não na sua reconstrução axiomática, cuja necessidade reconhecerá explicitamente, como já vimos, em *Pensamento axiomático*. Ora, tanto em 1917 quanto em 1900, a adição de novos métodos ou princípios aparece como a adição de novos axiomas.

Portanto, é da conjunção entre lógica e princípios de prova que decorre a necessidade de considerar indiretamente a lógica. Por exemplo, se provamos para um fragmento da aritmética sua consistência, então aparece o problema de ver se adicionar os modos usuais de inferência levam ou não a uma contradição[134].

---

[132] *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, p. 257-258: "Auch ist in gehöriger Weise zu berücksichtigen, dass durch die Zufügung und Zugrundelegung eines neuen Gedankendinges die bisherigen Axiome eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren bzw. einer sinngemässen Abänderung zu unterwerfen sind."

[133] Para este capítulo e em geral tem sido fudamental a leitura do artigo " 'Proof', 'Theory', and 'Foundations'. Hilbert's Mathematical Work from 1885 to 1900", de V.M. Abrusci.

[134] *Os fundamentos da lógica e da aritmética*, p. 260: "Die Frage nach der Möglichkeit dieser Verteilung ist wesentlich gleichbedeutend mit der Frage, ob die Folgerungen, die man aus den Axiomen durch Spezialisierung und Verbindung in dem früher erläuterten Sinne gewinnen kann, zu einem Widerspruch führen oder nicht, wenn man noch die bekannten logischen Sclussweisen..."

Além disso, Hilbert destaca que "na exposição tradicional das leis da lógica são usadas algumas noções aritméticas, por exemplo, a de conjunto e, em alguma medida, também a de número. De modo tal que nos encontramos num círculo, e por isso um desenvolvimento parcialmente simultâneo das leis da lógica e da aritmética é requerido se os paradoxos devem ser evitados"[135].

Como mostra a última passagem, é difícil concordar com Smorynski que Hilbert incluía na lógica a noção de conjunto[136]. Já em 1904, Hilbert tem a concepção de que a *conjunção* entre conceitos matemáticos e lógica é o problema. Por exemplo, se aceitamos como princípio que um conjunto é definido quando e somente quando é determinado para todo objeto se o objeto é subsumido sob um conceito ou não, sem restringir o alcance da palavra "todo", então aparecem paradoxos como os de Russell e Cantor.

Ora, como temos visto, o trabalho de Zermelo parece basicamente aceitar este diagnóstico. Se usamos um conceito abstrato como o de conjunto, em conjunção com um uso irrestrito de terceiro excluído com quantificador universal, *então* se produz o paradoxo. A axiomática de Zermelo, justamente, evita a reconstrução dos paradoxos limitando os conjuntos a serem aceitos. Como veremos, Hilbert apresentará em trabalhos posteriores uma versão mais precisa de *qual* é a causa dessa conjunção ser problemática.

É interessante mostrar, por outro lado, a recepção das idéias de Hilbert por seus contemporâneos. Felix Klein, numa obra de 1908[137], analisa as diversas posturas em torno do problema de fundamentar o conceito de número, entre elas a de Hilbert, como apresentada na conferência de 1904. Klein faz três observações sobre a proposta de Hilbert. A primeira, que Hilbert propõe um programa de pesquisa. A segunda, que as pesquisas de natureza puramente lógica não podem ser levadas completamente a seu término sem reter um mínimo de intuição, por exemplo, para reconhecer os símbolos pela sua forma. A terceira, que a consistência da teoria formal de números não implica poder mostrar de maneira puramente lógica que a ela correspondem os objetos que têm significação intuitivamente clara.

---

135 *Ibid.*, p. 131: "Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, dass bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl insbesondere als Anzahl, bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle, und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich."

136 Cfr. Smorynski, C. "Hilbert's Programme", p. 10. Por outra parte, a noção de conjunto aparece aqui relacionada à aritmética, à diferença de *Pensamento Axiomático*, onde aparecem claramente diferenciadas a teoria dos naturais e a teoria de conjuntos.

137 Cfr. Klein, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Parte Primeira.

Com relação à primeira observação, ela é verdadeira num duplo sentido. No primeiro, porque Hilbert, como vimos, apresenta suas idéias como um programa a ser levado a cabo. No segundo, mais profundo, porque "Hilbert viu \...\ os fundamentos como empresa inacabável"[138], pelo fato, entre outras coisas, da matemática ser inacabável. Justamente, como já mostramos, o procedimento sugerido por Hilbert implica provas de consistência para teorias sucessivamente obtidas pela adição de axiomas às anteriormente provadas consistentes.

Em relação à segunda observação, Hilbert concede o ponto, implicitamente nos trabalhos por volta de 1900, e explicitamente em *Os fundamentos da matemática*: "E na matemática, em especial, aquilo que consideramos são os signos concretos mesmos, cuja figura, segundo a concepção que temos adotado, é imediatamente clara e reconhecível."[139] Justamente, a intuição perceptual, enquanto intersubjetiva, é indispensável, segundo concluímos na seção anterior.

No que diz respeito à terceira observação, é relevante considerar que entende Klein por "intuitivo". Klein afirma que as regras de cálculo são resultados imediatos e necessários da percepção, onde por percepção deve entender-se a "percepção interna" ou intuição[140], a saber, um conceito de intuição de raiz kantiana. Por exemplo, ele representa o produto entre números como um retângulo de pontos, mostrando que "2.3 = 3.2". Porém, isto mostra apenas "2.3 = 3.2", e não a lei "a.b = b.a", como Klein pretende. Vemos então como Klein exemplifica o problema que encontramos em Kant seguindo como fio condutor as críticas de Bolzano. O conceito de intuição que Klein utiliza para justificar a afirmação "2.3 = 3.2" não é o mesmo que utiliza para justificar "a.b = b.a", a saber, um conceito de intuição justifica afirmações singulares e *outro* justifica afirmações gerais.

Ora, sem considerar o último ponto, o próprio Klein aceita que a intuição não poderia ser utilizada com números suficientemente grandes, afirmando que, nesse caso, recorre-se a um princípio matemático, o chamado princípio de indução, que nos leva além dos limites da intuição. O princípio de indução, por outro lado, é

---

138 Smorynski, C. "Hilbert's Programme".
139 *Os fundamentos da matemática*, p. 290: "Und insbesondere in der Mathematik sin Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist."
140 Cfr. Klein, F. *Op. cit.* Parte Primeira.

considerado por Klein uma verdade intuitiva. A segurança da matemática repousa então sobre a intuição, na acepção mais geral desta palavra.

Justamente, como já assinalamos, o problema está em dar um significado preciso a esse conceito para fins fundacionais e este, para Hilbert, não é outro que a percepção. Hilbert não rejeita o *aproach*, digamos, genético, aos conceitos numéricos, como o esquema de Kant para a apresentação dos números naturais ou os desenvolvimentos decimais para reais. Porém, como fica claro num texto acima citado, por volta de 1900, para os fins fundacionais esses "objetos" não são os que "correspondem" aos axiomas, senão os entes que satisfazem as relações por eles estabelecidas.

No entanto, a crítica mais importante que o trabalho recebeu foi a de H. Poincaré, quem percebeu que há implícito no esquema de prova proposto, justamente, o princípio de indução: a matemática então fundamentaria a matemática. Com efeito, o método que Hilbert propõe para a prova encobre (ou é uma generalização do) o mencionado princípio, que usualmente é assim enunciado: Se o 0 (ou o 1) tem uma certa propriedade e se, suposto que um natural qualquer tem a propriedade, então seu sucessor (o $n + 1$) a tem, então todos os números têm essa propriedade. Nas apresentações axiomáticas usuais da aritmética, a chamada aritmética de Peano, o mencionado princípio é listado como um axioma.

No esquema de prova de Hilbert temos, em lugar de 0 ou 1, como elementos iniciais os axiomas. A propriedade é a homogeneidade e os "sucessores" são as fórmulas que resultam da aplicação das regras de transformação. Como as regras preservam as propriedades e os axiomas têm a propriedade, então todas as fórmulas que pertencem ao sistema, axiomas e teoremas, têm essa propriedade. Por outro lado, como a fórmula que expressa que 1 é o sucessor de algum número não tem essa propriedade, então o sistema é consistente.

Mas para Poincaré no princípio de indução reside a própria essência da matemática, o que a distingue da lógica e da ciência empírica. Ora, para Poincaré não se trata de introduzir como axioma o princípio de indução, senão que o princípio de indução é a forma própria do raciocínio matemático, isto é, face aos raciocínios estudados pela lógica, temos na matemática uma forma de raciocínio que não pode ser reduzida à primeira.

Uma demonstração como a de Leibniz de "2 + 2 = 4" não é para Poincaré uma autêntica demonstração, senão apenas uma verificação. Nela se supõe definido o número 1 e a operação x + 1 (a operação sucessor), que consiste em acrescentar a unidade a um número dado. Define-se também 2, 3, 4 à maneira leibniziana e, para evitar o uso da lei de associatividade, define-se também a operação $x + 2$ como $(x + 1) + 1$. Assim, temos pela última definição que "$2 + 2 = (2 + 1) + 1$" e a demonstração segue como já conhecemos. Nesta verificação simplesmente aproximamos duas definições puramente convencionais e constatamos sua identidade, sem nada aprender.

Mais interessante é a definição de "$x + (y + 1)$", um exemplo de definição matemática, distinta também das definições da lógica. É uma definição "por recursão", que nos permite conhecer o valor de quaisquer somandos: "$x + (y + 1) = (x + y) + 1$". Em lugar de "$y + 1$" vamos usar a notação hoje mais usual " y' " para referirmos ao sucessor de y. A idéia é definir a soma entre dois números quaisquer indicando: a) o resultado de somar o elemento inicial a qualquer número; b) o resultado de somar a qualquer número um sucessor. Como qualquer número natural é ou inicial ou sucessor, a operação é caracterizada exaustivamente. Então definimos : a) $x + 0 = x$; b) $x + y' = (x + y)'$.

Com esta definição por recursão podemos começar estudar as propriedades elementares da soma, como a já mencionada lei de associatividade. Na demonstração dessa lei usamos o princípio de indução. Por exemplo, se pretendemos demonstrar "$x + (y + z) = (x + y) + z$", a primeira premissa do raciocínio indutivo é "$x + (y + 0) = (x + y) + 0$", que reconhecemos como verdadeira pela definição acima. Com efeito, por a), "$x + (y + 0) = x + y$". Também, por a), "$x + y = (x + y) + 0$". Por transitividade, "$x + (y + 0) = (x + y) + 0$".

A segunda premissa a estabelecer é: " $x + (y + z') = (x + y) + z'$ *se* $x + (y + z) = (x + y) + z$ ". Ora, temos então que:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$, pela chamada hipótese indutiva.

2. $(x + (y + z))' = ((x + y) + z)'$, aplicando sucessor a ambos membros.

3. $(x + (y + z))' = x + (y + z)' = x + (y + z')$, por b) da definição.

4. $((x + y) + z)' = (x + y) + z'$, por b) da definição. Logo,

5. $x + (y + z') = (x + y) + z'$.

A seqüência 1-5 estabelece a segunda premissa do raciocínio indutivo, concluindo então a lei de associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Mas, qual o fundamento do princípio de indução? Já vimos que Klein o declara um princípio intuitivo evidente. Escreve Poincaré que o princípio de indução completa "não passa da afirmação do poder do espírito que se sabe capaz de conceber a repetição indefinida de um mesmo ato, desde que esse ato tenha sido possível uma vez. O espírito tem uma intuição direta dessa sua capacidade e, para ele, a experiência não pode ser senão uma ocasião para se utilizar dela e, desse modo, de fazer-se ciente da sua existência."[141] O principio de indução não define os números naturais, escreve Poincaré opondo-se a Russell, senão que sobre tudo o que pode ser definido por recursão podemos raciocinar por recursão, isto é, usando indução.

A irredutibilidade do princípio de indução fica evidente para Poincaré no intento de Hilbert de fundamentação da matemática: o método de Hilbert para demonstrar a consistência do fragmento da aritmética considerado pressupõe a validade do princípio de indução, trate-se de números ou de símbolos. A resposta a esta crítica de que a matemática fundamentaria a matemática na medida em que para provar a consistência da aritmética usariamos o princípio aritmético de indução, embora nem sempre explicitamente formulada por Hilbert, consiste em distinguir entre um uso metamatemático da indução, que teria a propriedade de ser mais simples, e o uso da indução na aritmética de Peano.

Essa simplicidade estaria justificada pelas propriedades envolvidas no uso de indução, que seriam propriedades de sinais, decidíveis através da percepção. Porém, achamos que talvez Poincaré, indiretamente, também argumentou que a indução não é justificada pelo recurso às propriedades perceptíveis dos sinais. Com efeito, inclusive aceitando a distinção entre propriedades simples e complexas, aparece como problema se a validade do princípio de indução pode ser justificada apenas pelo recurso à percepção como representação singular.

A resistência de Hilbert à necessidade de aceitar a indução, as tentativas para reduzir a indução ao dado na percepção e, mais geralmente, a consideração dos quantificadores como símbolos transfinitos, são aspectos que se explicam por sua rejeição, do ponto de vista fundacional, àquilo que não é intuição no sentido de percepção, isto é, seguindo a Kant, porque a intuição fornece representações singulares. Por esta razão, qualquer afirmação que contenha a palavra "todos" e não seja redutível a uma conjunção de um número finito de conjuntivos resulta em princípio problemática..

141 Poincaré, H. *A Ciência e a Hipótese*, p. 28.

Por certo, não deixa de ser paradoxal que o mais ferrenho crítico contemporâneo do construtivismo esbarre na mesma dificuldade que destacamos já em Kant: como justificar através de representações singulares, como as fornecidas pela percepção, afirmações gerais. Em seus escritos, Hilbert manteve constante a tese de que a percepção era o único conceito de intuição que não transformava a ciência em matéria de opinião. Porém, do ponto de vista metamatemático, Hilbert terá que responder, se reinterpretamos a objeção de Poincaré, a uma variante da questão levantada por Bolzano: em que forma a intuição perceptual permite justificar que *todas* as deduções, entendidas como seqüências de sinais desprovidas significado, não conduzem a uma contradição?

Além disso, em função do dito na seção anterior, poderia objetar-se que sem a tese "Consistência implica existência", ausente em *Pensamento axiomático,* o critério de consistência perde sua base de sustentação. Porém, devemos lembrar que em Leibniz encontramos também a idéia de que certos conceitos -embora inexistentes matematicamente- eram úteis nos cálculos. Com efeito, como vimos no capítulo anterior, os conceitos de infinitamente grande e infinitamente pequeno são de utilidade nos cálculos geométricos, e as raízes imaginárias são de utilidade na álgebra.

Vimos então que Leibniz antecipava teses de natureza instrumentalista em relação à introdução de conceitos matemáticos, distinguindo entre aquilo que existe e aquilo que é apenas um instrumento para o cálculo. Com modificações convenientes este será, para alguns intérpretes, o caminho que seguirá Hilbert, caminho que o obrigará, em particular, a reconsiderar as relações entre formalismo e conteúdo.

3.5. Recapitulação

Na seção 3.1. do capítulo destacamos a relação que existe entre a visão hilbertiana do progresso matemático e a tese leibniziana "Possível implica existente". O escrito de Hilbert que nos parece marcar o ponto de inflexão entre os primeiros e últimos escritos é *Pensamento axiomático*, examinado na Seção 3.2., na medida em que implicitamente se abandona a tese "Consistência implica existência". Nessa seção consideramos o papel que a axiomática vai adquirir face ao programa hilbertiano de fundamentação da matemática. Como intentaremos mostrar no capítulo seguinte, embora a tese leibniziana "Possível implica existente" seja abandonada, o sistema de axiomas e sua demonstração de consistência continuam a ser a instância intersubjetiva de fundamentação da matemática oposta à intuição.

Na Seção 3.3. examinamos os escritos anteriores a *Pensamento axiomático*, mostrando como os restantes temas leibnizianos adquirem uma primeira forma. Neste contexto aparece a questão do valor fundacional da percepção e o primeiro papel atribuído a ela na ciência destinada a fundamentar de maneira definitiva a matemática, isto é, a metamatemática. A Seção 3.4. está dedicada a expor as críticas que Hilbert recebeu de alguns dos seus contemporâneos, com vistas a antecipar os problemas que serão tratados no capítulo seguinte.

Neste Capítulo 3, incluímos uma distinção que achamos fundamental: deve-se distinguir entre a matemática como ciência e a matemática quando é considerada como objeto da ciência destinada a fundamentá-la, isto é, a metamatemática. Com efeito, *como objeto da metamatemática*, a matemática é completamente formalizada e concebida como um sistema de produção de sinais desprovidos de significado. A finalidade da formalização completa é, naturalmente, a prova de consistência do sistema formal em questão. Mas, como veremos no capítulo seguinte, isso não implica que *a matemática* seja um sistema de produção de sinais desprovidos de significado. Este enfoque, que até onde sabemos é original, permite-nos, segundo nos parece, explicar a multiplicidade de nuanças no percurso do pensamento de Hilbert. A distinção entre "matemática propriamente dita" e metamatemática é de Hilbert, mas nós a olhamos da seguinte perspectiva: a redução da matemática a um sistema formal é uma tese metodológica, e não uma tese filosófica substantiva acerca da natureza da matemática.

Capítulo 4
Formalismo e conteúdo no Programa de Hilbert

4.0. Apresentação

As quatro seções principais deste capítulo giram em torno do problema das relações entre formalismo e conteúdo. Estes termos são, às vezes, olhados como antitéticos. Por um lado, entende-se por formalista uma posição que identifica a matemática como a ciência que estuda simplesmente sistemas formais, desprovidos de qualquer significado. Denominamos tal posição de *formalismo extremo*. Por outro lado, a expressão "conteúdo" aponta a reconhecer a matemática como uma atividade justificada pelo significado. Tal significado é, em geral, associado com a instância denominada intuição.

Porém, como mostramos no capítulo anterior, para Hilbert a intuição é subjetiva. Nos primeiros escritos, a significação da matemática aparece não como resultado da intuição subjetiva, senão como resultado de duas teses, uma explícita e outra implícita: a primeira, "Consistência implica existência"; a segunda, "Existência = significado". O abandono da primeira obriga a reconsiderar as relações entre formalismo e conteúdo, mas não concebidos como pares antitéticos. Na Seção 4.1. rejeitamos a interpretação de Hilbert como um formalista extremo e indicamos qual a instância Hilbert que julga adequada para substituir a intuição, isto é, a percepção.

Hilbert atribui à percepção, como instância intersubjetiva, o papel de delimitar a parte da aritmética a ser julgada com conteúdo com vistas à *fundamentação* da aritmética na sua totalidade, transformada em sistema formal. Dentro do sistema formal da aritmética, certas expressões representam essa parte com conteúdo e outras aparecem, *desta perspectiva*, como carentes de significado. Assim, Hilbert poderia ser qualificado como partidário de um *formalismo moderado*. A análise hilbertiana, por outro lado, não se restringe à linguagem própria da aritmética senão que inclusive atinge o âmbito da lógica. A Seção 4.2. expõe como Hilbert procede e que dificuldades podem ser assinaladas.

O novo papel atribuído à percepção nos escritos de 1920 sugerem múltiplas interpretações. Algumas orientam-se a postular uma variante de fundamentação da matemática de corte empirista. O capítulo seguinte tratará dessas interpretações. Outras interpretações orientam-se a relacionar o pensamento de Hilbert com o de Kant, via uma comparação com a fundamentação kantiana da aritmética na intuição entendida como representação singular. Trataremos destas interpretações na Seção 4.3., mas nossa conclusão será negativa. Para nós, trata-se da aparição reformulada de temas leibnizianos que brevemente consideramos no capítulo anterior: caráter não completamente arbitrário do formalismo e tratamento do infinito através do finito. No entanto, tratamos na Seção 4.3. de um tema kantiano, a seqüência intuição-conceitos-idéias, que alguns estudiosos salientam como prova de uma filiação kantiana do Programa de Hilbert.

Ora, embora ausente a tese "Consistência implica existência", a consistência de uma teoria é condição *sine qua non* para a admissibilidade de uma teoria matemática. Mas esta distinção entre uma parte com conteúdo e outra sem conteúdo orienta (ou é orientada por) uma nova forma de provar a consistência: se uma teoria sem conteúdo, embora ela contenha "representadas" como teoremas afirmações com conteúdo, deduz uma fórmula verdadeira do ponto de vista do conteúdo, essa fórmula pode ser demonstrada por meios restritos àqueles com conteúdo. Em particular, se a teoria não deduz "0 = 1", então a teoria é consistente.

A Seção 4.4. inclui a maneira de ver o Programa de Hilbert como um programa de eliminação. Na mesma seção apresentamos também a resposta clássica às objeções de Poincaré à metamatemática hilbertiana.

4.1. Consistência ≠ existência

No capítulo anterior destacávamos que em *Pensamento axiomático* Hilbert não coloca o problema da consistência de um sistema axiomático em termos da tese "Consistência implica existência". Destacávamos também uma mudança no que diz respeito à consideração do papel do formalismo, que aparece como condição de possibilidade de uma disciplina cujo objeto é o estudo das demonstrações matemáticas, e não apenas a demonstração de consistência de uma teoria dada.

Ora, a expressão "formalismo" tem uma multiplicidade de significados que exige algum esclarecimento. Em primeiro lugar, quando se contrapõe, por exemplo, o intuicionismo cartesiano ao formalismo leibniziano, formalismo aqui é entendido no sentido de que o critério de consistência lógica - formal - é condição necessária e suficiente para a aceitabilidade de um conceito, e não sua intuição. Neste sentido, não há referência a uma linguagem artificial, sentido no qual fala-se freqüentemente de formalização.

A *characteristica universalis* leibniziana pode ser considera uma primeira tentativa de estabelecer um formalismo no último sentido mencionado. Leibniz idealizava para a *characteristica* a função de permitir decidir sobre a verdade de qualquer afirmação sem discussão, pelo recurso a operações combinatórias. Deste ideal de uma mecânica decisória poderiam repetir-se as palavras de Descartes sobre Lullio, que serve mais "para falar sem juízo de coisas ignoradas do que para aprendê-las"[142]. O qualificativo de "formalista", eventualmente com matiz pejorativo, aparece neste contexto: um formalista transforma, por exemplo, a matemática numa atividade sem conteúdo e a reduz ao operar de um "pensamento cego". Em que consistiria esse conteúdo? No caso de Descartes, por exemplo, no dado na intuição clara e distinta.

Mas, deve ser destacado que considerar a matemática da perspectiva dos sistemas formais não quer dizer que a matemática seja igual ao jogo de xadrez. O que é a matemática para a metamatemática é o que é igual ou semelhante ao jogo de xadrez. H. Weyl é quem, interpretando as idéias de Hilbert, propôs a mencionada comparação: a matemática formalizada de Hilbert é um "formula-game", um jogo sem sentido. Num artigo posterior[143], Weyl formula a interpretação que faz de Hilbert um "formalista", isto é, que Hilbert tenta salvar a matemática clássica pela formalização, onde em lugar dos resultados intuitivos temos um jogo com fórmulas regido por regras.

R.L. Goodstein desenvolve[144] a comparação entre xadrez e matemática que nos permitirá esclarecer este ponto. No sistema formal que desenvolveremos para a aritmética, consideraremos como símbolos primitivos "0", "+" e " ' " por sucessor. Chamamos os termos 0, 0', 0'', ... de *numerais*, que denotamos 0, 1, 2, ... da maneira usual. Na metáfora enxadrística, aos numerais correspondem as peças do xadrez e às operações aritméticas correspondem as regras do xadrez. Segundo Goodstein, se tentássemos definir as entidades do

---

142 *Discurso do Método*, Segunda parte, p. 585.
143 Cfr. H. Weyl. *Coments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics.*
144 Goodstein, R.L. *Recursive Number Theory.*

jogo, estaríamos nas mesmas dificuldades de definir número, isto é, as entidades aritméticas. O rei do xadrez não é a peça de forma característica à qual nós chamamos de rei, da mesma maneira que um numeral não é um número. O que faz de uma peça o rei não é sua figura senão seus movimentos.

Ora, que é o rei mesmo? O que são os números? O que são os fatos aritméticos dos quais fala Hilbert em *Pensamento axiomático*? O rei, para Goodstein, é uma das *partes* que as peças jogam no jogo, como o Rei Lear é uma *parte* no drama de Shakespeare; por outro lado, o ator que faz o rei é rei pelas ações que ele faz e pelo que ele diz na tragédia. Em resumo:

"Vemos, primeiro, que para entender o significado dos números devemos olhar o jogo que os números jogam, isto é, a aritmética. Os números um, dois, três, etc., são os caracteres /acrescentamos: no sentido literário/ no jogo da aritmética, as peças que jogam esses caracteres são os numerais, e o que faz de um sinal o numeral de um número particular é a parte que ele joga, ou, como podemos dizer com palavras mais adequadas para o contexto, o que constitui um sinal o sinal de um número particular são as *regras de transformação* do sinal. Segue-se, então, que o OBJETO[145] DE NOSSO ESTUDO NÃO É O NÚMERO MESMO SENÃO AS REGRAS DE TRANSFORMAÇÃO DOS SINAIS NUMÉRICOS..."[146]

A proposta de Goodstein consiste em considerar que os números são o jogo que os números jogam, os caracteres da obra teatral da aritmética. O jogo precisa de peças de uma forma determinada, a obra de atores, a aritmética de numerais. Se a resposta à pergunta pelo "que" do rei do xadrez é quais são os movimentos da peça que "representa" o rei, se o Rei Lear é as falas do ator na obra, então os números são as regras de transformação estabelecidas para os numerais. E a mesma resposta vale para a soma e os restantes conceitos matemáticos. Quando a matemática é entendida como o estudo de tais regras de transformação, então temos a posição que denominamos de *formalismo extremo*: a matemática é a ciência dos sistemas formais desprovidos de significado, independentemente do matiz, diríamos oxoniano, da posição de Goodstein.

Mas Leibniz - e, logo veremos, Hilbert - não pode ser qualificado de formalista no sentido que chamamos de *extremo* como aquele descrito acima. Reflitamos, por exemplo, sobre a natureza do algoritmo da soma, quando calculamos a soma de dois números. Suponhamos que somar, como atividade com conteúdo

[145] Maiúsculos no original.
[146] Goodstein, R.L. *Op. cit.*, pp. 5-6.

(intuitiva), como uma atividade na qual damos conta do que fazemos, seja acrescentar uma a uma as unidades do segundo número ao primeiro, sendo tal "acrescentar uma a uma as unidades" uma operação primitiva, dotada de conteúdo de maneira, digamos, imediata.

Tal procedimento com conteúdo é notoriamente impraticável quando os números somados são muito grandes. Recorremos então ao cálculo: somamos dezenas, centenas, etc. da maneira habitual. O cálculo é feito mecanicamente, sem atender ao conteúdo da operação somar. Mas, deixando de lado a impraticabilidade empírica quando se trata de números muito grandes, podemos dizer que em princípio é possível somar quaisquer números "conteudisticamente". O cálculo substitui apenas o processo com conteúdo, seja pela impraticabilidade empírica, seja porque mesmo praticável não poderíamos avançar em matemática sem seu recurso. Generalizando, como faz Leibniz, estendemos este modelo a quaisquer domínio: temos a *characteristica universalis*.

Mas o que justifica substituir o procedimento com conteúdo pelo cálculo? Como justificar que os resultados são em cada caso iguais e *em que sentido iguais*? Na tradição geométrica antiga discriminava-se entre *teoremata* e *problemata*, entre problemas a resolver e afirmações a demonstrar, embora já Platão afirmasse que as questões geométricas deviam ser todas reduzidas a afirmações a demonstrar. Devemos olhar aos cálculos aritméticos como *problemata* irredutíveis à linguagem assertiva? Justamente vimos que a proposta leibniziana consistia em considerar que calcular é demonstrar e, conseqüentemente, o problema de calcular é olhado como uma afirmação a demonstrar, afirmação que consiste na igualdade entre dois termos. Nesta redução de problemata a teoremata consiste para Leibniz, segundo mostramos, a justificação do cálculo.

A demonstração de "$2 + 2 = 4$" de Leibniz omitia a consideração da afirmação universal "$x + (y + z) = (x + y) + z$", necessária para justificar a igualdade "$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$". Observávamos, no entanto, que o mero fato de acrescentar essa afirmação como premissa, como fez Bolzano, não resolvia as questões envolvidas, na medida em que não se tratava apenas de indicar premissas arbitrárias para proceder então à dedução da equação. O formalismo, se não for do tipo que temos chamado de extremo, exigiria uma justificação.

Tal justificativa pode consistir em não incluir como axioma a lei de associatividade senão outra(s) lei(s) que, por assim dizer, refletissem procedimentos com conteúdo. Vimos no capítulo anterior como o princípio de indução aparecia no cerne da discussão, sob o suposto comum de que constitui um princípio aritmético essencial. Mas vimos também que da perspectiva metamatemática restringimo-nos a sistemas de produção de sinais desprovidos de significado.

Com o intuito de esclarecer em que sentido podemos qualificar a Hilbert de formalista, nesta seção e na seguinte descreveremos um sistema formal para a aritmética. Consideremos como primitivos, 0, ' e +. Os seguintes axiomas refletiriam os procedimentos com conteúdo da soma:

1. $x + 0 = x$

2. $x + y' = (x + y)'$

O formalismo que acabamos de apresentar permite dar conta das equações numéricas elementares. Faltam ainda estabelecer axiomas para sucessor, de forma tal que eliminemos qualquer referência a intuição. São eles:

3. $\neg (x' = 0)$.

4. $x' = y' \supset x = y$.

A introdução do último axioma obriga incluir os símbolos lógicos chamados de negação e condicional. Os quantificadores universais, e os restantes símbolos lógicos, junto com axiomas e regras de inferência para a "lógica subjacente" podem ser introduzidos da mesma maneira, seguindo como fio condutor a perspectiva da qual Hilbert concebe o problema da lógica. Como logo veremos, a distinção entre formalismo e conteúdo atingirá também o plano da lógica.

Naturalmente, com este formalismo, mesmo com as limitações mencionadas, podemos "pensar cegamente" e obter por uma seqüência de operações simbólicas qualquer equação numérica verdadeira sem atender ao conteúdo. Para números grandes, as dificuldades seriam igualmente notórias, mas é suficiente para os fins teóricos de reduzir o cálculo a uma demonstração, de forma tal que o formalismo descreva "no papel" os processos com conteúdo de soma e produto. Caso sempre assim se procedesse, os partidários da intuição pouco teriam a objetar. Como escreve Brouwer:

"No dominio dos conjuntos finitos no qual os axiomas formalistas têm uma interpretação completamente clara para os intuicionistas, sem reservas concordamos com eles, *as duas tendências diferem apenas no* *método não em resultados* /grifos nossos/; isso chega a ser inteiramente diferente no domínio dos conjuntos infinitos ou transfinitos."[147]

Ora, que devemos entender por "domínio infinito" quando Hilbert abandona a tese "Consistência implica existência"? Sabemos que nos primeiros escritos de Hilbert a consistência da teoria de cardinais transfinitos, por exemplo, implica a existência de tais objetos. Mas em *Sobre o infinito*, escrito em 1925, percebe-se a notória ausência, tal como que em *Pensamento axiomático*, da mencionada tese. Ora, a razão última para o abandono da tese "Consistência implica existência" é, segundo achamos, a visão de Hilbert da evolução na ciência física a partir de 1900. Hilbert escreve:

"Se voltamos à nossa tarefa, esclarecer a essência do infinito, devemos considerar de imediato qual o significado contentual que convém ao infinito na realidade; em primeiro lugar, veremos o que nos ensina, sobretudo, a fisica."[148]

O que nos parece decisivo para o abandono da tese "Consistência implica existência" é precisamente a leitura de Hilbert da nova concepção do universo que surge após 1900, com a aparição da teoria da relatividade e a mecânica quântica: um retorno do universo aberto ao universo fechado, no caso da primeira; a não divisibilidade infinita nem sequer da energia, no caso da última. Esta é a visão de Hilbert, claramente exposta em *Sobre o infinito*, em relação às mencionadas contribuições cientificas no que diz respeito às relações entre infinito e a realidade. Em relação ao pensamento escreve:

"Vimos previamente que o infinito não se encontra em nenhum lugar na realidade, enquanto recorremos à experiência, à observação ou a qualquer tipo de ciência. Pode, então, ser o pensamento sobre as coisas tão diferente dos eventos com as coisas e proceder de maneira tão diferente e tão separado de toda realidade? Não é claro, pelo contrário, que nós, quando acreditamos conhecer a realidade do infinito em algum sentido, apenas deixamo-nos influir pela circunstância de que, de fato, na realidade achamos dimensões exorbitantes, tanto no grande quanto no pequeno?"[149]

---

[147] *Apud* C. Smorynski, "Hilbert's Programme", p. 12.

[148] *Sobre o infinito*, p. 265: "Wenn wir uns nun dieser Aufgabe, das Wesen des Unendlichen aufzuklären, zuwenden, so müssen wir uns in aller Kürze vergegenwärtigen, welche inhaltliche Bedeutung dem Unendlichen in der Wircklichkeit zukommt; wir sehen zunächst, was wir aus der Physik hierüber erfahren."

[149] *Sobre o infinito*, p. 274: "Vorhin haben wir gesehen, dass in der Wirklichkeit das Unendliche nirgends zu finden ist, was für Erfahrungen und Beobachtungen und welcherlei Wissenschaft wir auch heranziehen. Soolte nun das Denken über die Dinge so unähnlich den Geschehnissen mit den Dingen sein und so andersartig vor

Aqui encontramos, segundo nos parece, a razão pela qual abandona-se a tese "Consistência implica existência": uma espécie de hharmonia preestabelecida entre pensamento e realidade, tema sobre o qual Hilbert volta recorrentemente. E, como esperamos mostrar no capítulo seguinte, nas discussões sobre a natureza dos conceitos das novas teorias científicas também acharemos elementos para examinar o Programa de Hilbert de uma perspectiva diferente. A diferença substancial que encontramos entre o primeiro e o segundo periodo do pensamento de Hilbert aparece no exame dos conceitos matemáticos, exame que implicará uma distinção entre conceitos finitários e conceitos transfinitos. Os conceitos transfinitos envolvem, num sentido a examinar, a consideração do infinito, mas que o infinito esteja envolvido no uso de certos conceitos não implicará que existam totalidades infinitas.

Mas que no abandono da tese "Consistência implica existência", então, conviria insistir no abandono da tese implícita "Existência = sentido" como uma característica central do pensamento maduro de Hilbert. Com efeito, discutindo objeções em relação à introdução de novos conceitos (adotar novas medidas para resolver problemas), Hilbert escreve:

"Neste sentido, apareceu recentemente algo assim como o seguinte: se inclusive se obtém a introdução de um conceito sem perigo /adição nossa: adotada uma nova medida/, é dizer, sem contradição (isto não apenas seria uma possibilidade senão que além disso poderia ser provado), ainda com isto não se teria estabelecido a justificação da mesma. Acaso não é esta uma objeção semelhante à que esteve vigente em seu tempo, contra os números complexos imaginários, quando se dizia: podemos usá-los livremente sem contradição, porém sua introdução não está ainda, por esse motivo, justificada, pois os números imaginários não existem? Não, se a questão de uma medida deve ter algum sentido, além da prova de consistência, este só pode ser se ela foi acompanhada de seu correspondente êxito."[150]

---

sich gehen, so abseiting von aller Wirklichkeit? Ist es nicht vielmehr klar, dass wir uns, wenn wir die Realität des Unendlichen in irgendeinem Sinne zu erkennen glaubten, nur haben durch den Umstand dazu verleiten lassen, dass wir tatsächlich in der Wirklichkeit so oft so ungeheure Dimensionen im Grossen und im Kleinen antreffen?

[150] *Sobre o infinito*, p. 264: "So wird neuerdings etwa dies ausgeführt: Wenn auch die Einführung eines Begriffes ohne Gefahr, d.h. ohne Widersprüche zu erhalten, möglich sei und dies erwiesen werden könne, so stehe damit noch nicht ihre Berechtitung fest. Ist dies nicht genau der Einwand, den man seinerzeit gegen die komplex-imaginären Zahlen geltend machte, indem man sagte: freilich könne man zwar durch sie keine Widersprüche erhalten; aber ihre Einfürung sei dennoch nicht berechtigt; denn die imaginären Grössen existieren doch nicht? Nein, wenn über den Nachweis des Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der

Mas, então, que devemos entender por "infinito"? Ou melhor, que devemos entender por conceitos matemáticos transfinitos? Em resumo, um tipo de conceito que Hilbert denomina, seguindo a Kant, "idéia da razão". Voltaremos depois sobre este ponto, mas por enquanto interessa-nos ressaltar que se trata de conceitos para os quais não temos "referência", fato que não implica declará-los sem-sentido. Escreve Hilbert em *Conhecimento da natureza e lógica*:

"Com respeito ao conceito "infinito" devemos lembrar que para nós "infinito" não tem nenhuma referência intuitiva e sem uma investigação mais exaustiva não tem nenhum sentido."[151]

E acrescenta: "o que é infinito é uma abstração enorme (...), abstração que pode ser levada a cabo apenas através do uso consciente ou inconsciente do método axiomático."[152]

O que uma prova de consistência fornece nos escritos dos anos 20, então, não é a existência de objetos matemáticos. A prova de consistência é condição de possibilidade de um conceito enquanto consistente. Mas conceitos que não têm referência não por isso são qualificados como sem-sentido. Não é casual, por certo, que Hilbert use os termos fregeanos "Sinn" e "Bedeutung", para precisamente distinguir entre os conceitos *com sentido*, aqueles que têm referência daqueles que não a têm. Mas, que devemos entender por "referência" de um conceito matemático neste contexto?

Detectada a mudança na teoria do significado de Hilbert, a ausência do critério "Sentido = existência" implica uma modificação na concepção da matemática. Operada esta modificação, resulta no mínimo ambíguo quais vem a ser os objetos desta ciência. Mais ainda, se a matemática tem objetos. Em algumas passagens |, | |, | | |, ... parecem ser os objetos que os numerais denotam e, neste sentido, os objetos da aritmética. Em outros, tal seqüência é simplesmente uma notação do tipo 0', 0'', 0''',..., isto é, *são* os numerais, e não os objetos pelos numerais denotados.

Berechtigung zu einer Massnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Massnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist."

[151] Hilbert, D. *Naturerkennen und Logik*, doravante citado, *Conhecimento da natureza e lógica*, p. 380: "Was den Begriff "Unendliche" betrifft, so müssen wir uns klarmachen, dass "Unendliche" keine anschauliche Bedeutung und ohne nähere Untersuchung überhaupt keinen Sinn hat."

[152] *Ibid.*, p. 380: "Wenn auch in der Wircklichkeit Fälle von sehr grossen Zahlen oft vorkommen, z. B. die Entfernungen der Sterne in Kilometern oder die Anzahl der wesentlich verschiedenen möglichen Schachspiele, so ist doch die Endlosigkeit oder die Unendlichkeit, weil sie eben die Negation eines überall herrschenden Zustandes ist, eine ungeheuerliche Abstraktion -ausführbar nur durch die bewusste oder unbewusste Anwendung der axiomatischen Methode."

Ora, parece-nos evidente que em geral as interpretações de Hilbert de fato partem de uma das duas seguintes teses: a) os objetos da matemática são os sinais, entendidos como a ontologia correspondente, b) os "objetos" da matemática são os símbolos matemáticos, no sentido em que dissemos, por exemplo, que um número é uma cifra. O problema reside em que temos textos de Hilbert que permitem justificar uma ou outra tese, teses que têm conseqüências que remetem seja a uma interpretação que denominamos de tipo *formalista extrema*, seja a uma interpretação de tipo *formalista moderada*.

Por *formalismo moderado*[153] concebemos uma posição que declara que o sistema formal inclui uma parte da matemática entendida como significativa e outra sem-significado. Para nós, essa posição confunde, da mesma maneira que o formalismo extremo, afirmações feitas da perspectiva da metamatemática com afirmações filosóficas substantivas. A mais relevante interpretação formalista moderada é a interpretação *instrumentalista*, da qual trataremos no capítulo seguinte. Mas no restante deste capítulo não insistiremos essencialmente neste ponto, senão que apresentaremos a base comum que sustenta tanto a interpretação instrumentalista quanto a nossa.

Ora, o primeiro problema que encontra qualquer interpretação de tipo formalista moderada é determinar quando o formalismo responde a exigências intuitivas ou de significação, o que remete à pergunta de como determinar o que é admitido como intuitivo ou não. Mas já nos primeiros escritos, como vimos no capítulo anterior, o recurso à intuição redunda em subjetivismo para Hilbert, *quando* não se entende por intuição a percepção. Especificamente contra os intuicionistas escreve em *Os fundamentos da matemática* de 1927:

"Pois, depois de tudo, é parte da tarefa da ciência libertar-nos da arbitrariedade, do sentimento e preconceitos, e protegernos do subjetivismo que se sente nos pontos de vista de Kronecker e, segundo me parece, encontra sua culminação no intuicionismo."[154]

Como vemos, independentemente da nossa distinção de períodos dentro do formalismo hilbertiano, a objeção à intuição como subjetiva é permanente. Daí sua inadequação para uma fundamentação da matemática.

---

153 A expressão é de Prawitz. Cfr. "Philosophical aspects of proof theory".

154 Hilbert, D. *Os fundamentos da matemática*, p. 306: "Wenn irgendwo eine Gesamtheit von Beobachtungen und Erscheinungen verdient, zum Gegenstand einer ernsten und gründlichen Forschung gemacht zu werden, so ist es diese hier -liegt es doch in der Aufgabe der Wissenschaft, uns von Willkür, Gefühl und Gewöhnung freizumachen und vor dem Subjektivismus zu bewahren, der sich schon in den Anschauungen Kroneckers bemerkbar gemacht hat und der, wie mir scheint, in dem Intuitionismus seinen Gipfelpunkt erreicht."

Da perspectiva de Hilbert, então, o que interessa é substituir qualquer referência à intuição que não seja percepção. Por isso deve começar sua análise da matemática já da raiz, examinando a série natural, suas operações elementares, a introdução de variáveis, e assim sucessivamente. Esse exame deverá indicar que parte da matemática pode ser justificada na percepção e qual não. E requererá então justificar qual o papel da parte que não é redutível à percepção. Outrossim, vimos nesta seção como reaparecem os temas leibnizianos "subjetividade da intuição" e "intersubjetividade do sistema axiomático".

4.2. A percepção e o finitismo

A pergunta sobre qual parte da aritmética responde ao dado na percepção se insere numa tese sobre a natureza do conhecimento em geral -não apenas o matemático- que Hilbert denomina o "ponto de vista finito". Em que consiste tal ponto de vista? Em *Sobre o infinito*, Hilbert estabelece que as condições mais gerais para a possibilidade do pensamento, da compreensão e da comunicação científica são as seguintes: i) os objetos serem dados, reconhecíveis como iguais ou diferentes, ii) poder sempre reconhecer se um objeto dado tem uma propriedade ou se entre vários dá-se uma relação. Se um juízo -um pensamento- envolve exclusivamente uma referência a tais objetos, então ele é aceitável do ponto de vista finito. Decorrente disso, um juízo finitário não deve envolver, num sentido que estamos obrigados a esclarecer logo, totalidades infinitas. Até que ponto a aritmética se adequa ao ponto de vista finito?

Os objetos da aritmética são os sinais (numerais) |, | |, | | |,.... . Que duas seqüências de sinais sejam reconhecíveis como iguais ou diferentes é produto da percepção, satisfazendo então o primeiro dos requisito destacados por Hilbert para a possibilidade do conhecimento científico. Mas quando os numerais são assim entendidos, que acontece com os restantes símbolos? Que acontece, por exemplo, com a soma? Reemitimos a soma de dois números a "reunir" os numerais numa operação física de justapor as seqüências respectivas. Porque esta assimetria de tratamento? Porque se apenas se trata de símbolos apelamos a operação de justaposição?

O caráter decididamente convencional de "+" obriga a recorrer à operação física de justaposição, não porque os símbolos sejam o objeto da matemática, senão porque o que se pretende é uma instância de justificação intersubjetiva de *certos conceitos* aritméticos. De fato, como diz Goodstein, nem os numerais são os números nem somar é justapor barras.

Como propriedades e relações entre os sinais, além da igualdade e da diferença, que satisfazem os requisitos que Hilbert assinala para a possibilidade do conhecimento científico, podemos indicar "ser primo", "maior que", "dividir a", etc. Uma relação como "maior que" é um bom exemplo de relação reconhecível de maneira imediata: "3 > 2" é um juízo finitário verdadeiro, pois | | é parte de | | |. No entanto, "2 > 3" é falso, pois | | | não é parte de | |. Mas Hilbert não aplica a estes juízos a expressão "verdadeiros" senão "corretos".

Os juízos finitários do tipo considerado sobre tais objetos não são demonstrados, senão que são considerados evidentes de maneira imediata. A verdade ou falsidade de tais juízos é fundamentada de maneira imediata pela percepção, da qual decorre a evidência mencionada. A verdade ou falsidade se predica primariamente dos juízos (pensamentos) e não das entidades lingüísticas que os expressam[155]. Mas, como destacamos no capítulo anterior, o sistema formal para Hilbert não é de todo arbitrário: reflete aspectos essenciais de nosso pensamento.

Ora, deve ser destacado então que, em contraposição aos intuicionistas, os "números" não são gerados por uma regra, os números aparecem aqui como *dados*[156] e não construídos *na* forma da intuição ou *pela* intuição. Tal ponto de partida está destinado, justamente, a evitar qualquer referência à intuição que não seja perceptual, referência costumeira quando envolvido o conceito de construção. Se, por outro lado, lembramos que a intuição à qual reemitem os construtivistas implica concebê-la como uma faculdade ativa de conhecimento, é natural um ponto de partida que insista na passividade da percepção.

Após, considerados os juízos aritméticos de natureza mais elementar, Hilbert examina até que ponto os juízos aritméticos mais complexos são conformes ao ponto de vista finito, isto é, justificados na percepção. Os exemplos que destacamos pertencem àquilo que poderíamos chamar o *núcleo* do ponto de vista finito, mas eles

[155] Hilbert não partilha com Brouwer a concepção clássica da linguagem como mero instrumento de expressão. Uma concepção diferente do papel da linguagem dentro do construtivismo a achamos na postura predicativista de Poincaré e Weyl. Cfr. Silva, J. J. da. *O predicativismo de Hermann Weyl*, caps. 1-3.

[156] Uma exceção relevante teríamos em H. Weyl, que entende a totalidade dos naturais como dada, via um conceito de intuição de pretendido cunho fenomenológico. Se Hilbert tivesse podido adotar esse conceito de intuição teria parcialmente resolvido alguns problemas. Porém, para Hilbert seria claro que a "riqueza" desse conceito de intuição é a custa da subjetividade do ponto de partida: para Weyl sim, para Poincaré e Brouwer não. Cfr. Silva, J.J. da. *op. cit.*, cap. 3, # 3.8.

não esgotam o âmbito dos enunciados que para Hilbert são justificados na percepção. O fato relevante é que a verdade destes juízos está fundada num sentido razoavelmente claro de intuição, isto é, a percepção.

Observemos também que a nota característica da percepção é a de ser uma representação singular. Quando intentemos aproximar o pensamento de Hilbert ao de Kant, será esta nota da percepção como representação singular, o caráter de a priori de certos conceitos matemáticos (os finitários) com contrapartida na intuição (sem o recurso à forma da intuição a priori) e os conceitos que Hilbert denomina, seguindo a Kant, "idéias da razão", os que guiarão essa aproximação, *considerando as significativas diferenças* que devem ressaltar-se.

Como fundados então na percepção como representação singular temos juízos elementares, isto é, juízos singulares, cuja verdade ou falsidade é evidente de maneira imediata. Um juízo que também satisfaz para Hilbert às restrições finitárias, mas que não pertence ao núcleo, é o expressado pela sentença: "se a e b são *numerais* dados, então a+b = b+a". O recurso à forma condicional é para não interpretar que se trata do quantificador universal usual, isto é, classicamente concebido, que para Hilbert envolveria a consideração de uma totalidade infinita.

Observe-se que se trata de estender a noção "finitário" além dos juízos singulares, isto é, além do sentido onde, para Hilbert, a palavra intuição tem um significado claro. Do ponto de vista formal isto se traduz na necessidade de dar uma interpretação das variáveis de indivíduo e da universalidade, de forma tal que possa ser reemetida à percepção. E observe-se também que agora estamos em princípio face à mesma dificuldade que Bolzano assinalou em relação a intuição kantiana: como a percepção, entanto que representação singular, pode dar conta de uma afirmação universal.

Em *Sobre o infinito* não temos uma justificativa dessa extensão, senão um critério para distinguir os juízos que pertencem ao núcleo daqueles que não pertencem. Supondo que a percepção é suficiente para aceitar juízos do tipo "se a, b são dados, a + b = b + a" como finitários, então há juízos finitários problemáticos e juízos finitários não problemáticos. O critério consiste em que os juízos que pertencem ao núcleo, os juízos finitários não problemáticos, são fechados pelas operações da lógica proposicional.

Com efeito, os juízos do núcleo podem ser negados e sua negação ainda pertence ao núcleo; são, Portanto, finitários. A conjunção, a disjunção, o condicional de duas afirmações que pertencem ao núcleo, pertencem também ao núcleo. Basicamente, isto quer dizer que dentro do núcleo os conetivos se comportam como as funções de verdade usuais: os enunciados do núcleo são enunciados finitários não problemáticos. Assim, todas as leis lógicas clássicas do cálculo proposicional são válidas dentro do núcleo.

As leis lógicas clássicas podem ser apresentadas num sistema formal -não o faremos- assumindo, por exemplo, como símbolos lógicos "$\rightarrow$", "$\neg$", "&", "$\vee$", "( )", "(E)", "=" para o condicional, a negação, a conjunção, a disjunção, os quantificadores universal e existencial, e a igualdade respectivamente, além das variáveis de indivíduo. Ora, na concepção tradicional, as leis lógicas são concebidas como independentes do domínio de aplicação. Mas, como precisamente está em discussão, entre outras coisas, sua validade irrestrita, não podemos simplesmente dar por suposta tal validade, entendendo o sistema formal da lógica de predicados de primeira ordem como descrevendo a "lógica subjacente".

Porém, se consideramos que os enunciados finitários do núcleo são verificados da forma acima assinalada, vemos que uma equação numérica A é verdadeira se os numerais de cada lado "coincidem", caso contrário, é falsa. Isto permite introduzir $\neg A$ veritativo-funcionalmente. E se duas afirmações A e B pertencem ao núcleo, o valor de verdade da conjunção, disjunção e condicional resulta simplesmente da verificação da verdade de cada uma delas. A introdução de afirmações que envolvem variáveis é justamente a questão problemática, questão que mostrará os limites "conteudísticos" da lógica clássica.

Com efeito, a negação da lei de comutatividade, lei que *não* pertence ao núcleo, não é finitária: envolve, segundo Hilbert, a consideração de uma totalidade infinita. A falsidade do juízo dependeria da consideração de um conjunto infinito de objetos: estaríamos frente a uma quantificação existencial sem limite superior, isto é, não poderíamos interpretar (rescrever) a fórmula como uma disjunção de um número finito de disjuntos. Ora, de maneira análoga, uma fórmula universal do tipo considerada, mesmo sem os quantificadores universais prefixados, também não pode ser escrita como uma conjunção finita de equações; logo, também não seria finitária. Qual então o argumento para reconhecer generalizações finitárias?

Como pode ser visto, a negação da lei de comutatividade, *qua* afirmação, não é finitária, pois seu exame implicaria o exame de infinitos numerais. De fato, nem poderíamos qualificá-la de afirmação: do ponto de vista finito carece de sentido. A lei de comutatividade é um enunciado finitário problemático, justamente devido à incapacidade de ser negado do ponto de vista finito, isto é, não ser fechado pelas conetivas proposicionais.

Neste ponto é que o formalismo abandona os limites da percepção e não respeita restrições "conteudísticas". Com efeito, as regras de formação de fórmulas nos permitem negar qualquer afirmação.

Que acontece com as afirmações existenciais? Consideremos, por exemplo, o teorema de existência de primos, enunciado assim: "Para cada número, existe um primo maior". Porque esta afirmação não é finitária? Na demonstração do teorema de existência de primos prova-se que dado um número p, limitamos entre $p + 1$ e $p! + 1$ os casos a considerar, de forma tal que "existe um primo maior" quer dizer " p + 1 ou p + 2 ou p + 3 ou ... ou p! + 1 é primo". Logo, se trata de um disjunção de um número finito de disjuntos, a diferença do caso da negação de comutatividade, que seria, se assim podemos falar, uma "disjunção" infinita.

Ora, a afirmação "Dado um p existe um número primo $> p$ e $\leq$ que $p! + 1$", implica, segundo Hilbert, a "passagem ao infinito" contida em "Para qualquer primo, existe um maior", quando esta afirmação é considerada sem conexão com a sua demonstração. No caso da demonstração fornecida nós indicamos um limite para a afirmação de existência, porém cabe pensar o caso de uma demonstração que provasse essa afirmação mas que não indicasse um limite para achar o primo maior. Em geral, quando se trata de um enunciado existencial, poderíamos pensar que dar uma interpretação finitariamente aceitável do mesmo, reside justamente em aceitar sua introdução se e somente se um procedimento semelhante ao da prova de Euclides fosse fornecido. Mas Hilbert prefere entendê-las como afirmações sem sentido sem pretender dar uma tal interpretação. Sobre as razões que levam a Hilbert a tal posição voltaremos adiante.

Uma vez descritos os juízos finitários, resta considerar qual a função do raciocínio na teoria finitária de números. A partir do exemplo anterior fica claro que uma demonstração que faça uso de terceiro excluído não pode ser aceita, isto é, não podemos utilizar o principio "Para qualquer numeral, ou ele tem uma certa propriedade ou existe um que não a tem". O principio de terceiro excluído supõe para sua aplicação legítima do ponto de vista finito que as afirmações são fechadas pela negação, o qual, segundo mostramos, em geral não ocorre.

Porém, os axiomas e regras do cálculo de predicados, permitem deduzir dentro do sistema formal a fórmula "$(x)(y)(z)\ (x + (y + z) = (x + y) + z)) \vee (Ex)(Ey)(Ez) \neg\ (x + (y + z) = ((x + y) + z))$", isto é, nos permitem deduzir uma fórmula sem contrapartida conteudística. Ora, Hilbert nos diz que uma lei como a de comutatividade ou associatividade afirma que os numerais de um lado e do outro da igualdade coincidem, se os numerais são dados. E nos diz que isso pode ser provado por uma raciocínio com conteúdo.

Poderíamos então supor que se trata de indução, não da indução completa tal qual ela é formalizada na teoria formal de números, senão uma indução de caráter mais simples, simplicidade relacionada com a estrutura lógica da propriedade em questão. No sistema formal, como reconhece Hilbert, não aparecem tais restrições na formulação do princípio de indução:

$$5.\ A(0)\ \&\ (x)\ (A(x) \supset A(x')) \supset A(x).$$

Porém, em *Nova fundamentação da matemática* Hilbert rejeita que se trate do uso de indução senão num procedimento que repousa sobre a composição e decomposição de numerais, e que é em essência diferente do princípio de indução em teoria formal de números [157].

Ora, qual é a solução ao problema do significado das expressões com quantificadores, cujo uso "implica", para Hilbert, o infinito? Em *Sobre o infinito* Hilbert parece aderir a uma tese difícil de compreender, que nós parece mais uma concessão ao "modo de falar" intuicionista: o *uso* dos quantificadores tem implicações ontológicas acerca do infinito que o uso de variáveis livres não tem. Ora, se nós afirmamos "x + y = y + x", diríamos que para reconhecer a afirmação como aritmeticamente verdadeira nos comprometemos com o infinito potencial: se dois numerais quaisquer nos são fornecidos, verificamos a equação. Para Hilbert, ligar as variáveis com os quantificadores nos comprometeria com o infinito atual.

Seja como for, a solução de Hilbert é drástica: as expressões com quantificadores (não limitados) carecem de sentido. No entanto, achamos que esta afirmação deve ser modalizada: a quantificação carece de sentido do ponto de vista finito, e não *simpliciter*. Hilbert descreve a situação afirmando que aos enunciados *reais* -conformes ao ponto de vista finito- adicionamos enunciados *ideais* -que carecem de sentido do ponto de vista finito. Um exemplo de um tal enunciado ideal é o princípio de terceiro excluído: todo objeto tem uma certa propriedade ou existe um objeto que não a tem: $(x)\ P(x) \vee (Ex)\ \neg P(x)$.

---

[157] Cfr. *Neubegründung der Mathematik*, doravante citado *Novos fundamentos da matemática*, p. 164: "Und was insbesondere den soeben ausgeführten Beweis für **a** + **b** = **b** + **a** betrifft, so ist dieser Beweis, wie ich noch besonders hervoheben möchte, ebenso ledglich ein auf dem Auf- und Abbau der Zahlzeichen beruhendes Verfahren und seinem Wesen nach verschieden von demjenigen Prinzip, welches als Prinzip der vollständigen Induktion oder Schluss von **n** auf **n** + **1** in der höheren Arithmetik eine so hervorragende Rolle spielt. Letzteres Prinzip ist vielmehr, wie wir später erkennen werden, ein weitertragendes formales, einer höheren Stufe angehöriges Prinzip, das seinerseits eines Beweises bedürftig und fähig ist."

A rejeição do uso do princípio de terceiro excluído em matemática é uma tese caraterística do chamado intuicionismo matemático, uma variante de construtivismo. Ora, vemos que Hilbert não adota a postura de tentar estabelecer quais leis lógicas clássicas valem do ponto de vista finito, para então restringir-se apenas a seu uso na matemática: "assim, devemos *somar os enunciados ideais aos enunciados reais*, para preservar as regras formais simples da lógica aristotélica"[158]. Porém, a existência deste tipo de reflexão mostra que não se concebe a lógica, à maneira positivista, como disciplina analitica subjacente. Voltaremos sobre este ponto no Capítulo 5.

Em resumo, temos então que as operações lógicas, que tinham sua significação assegurada na medida em que elas se aplicavam quando o resultado ficava dentro dos limites do núcleo, são declaradas carentes de sentido. Por conseqüência, em lugar da preservação da verdade que carateriza o conceito de raciocinio válido, temos a noção de regra sintática que permite passar de certas seqüências de sinais sem significado a outras seqüências de sinais sem significado. E no lugar da aritmética "conteudística" temos o *sistema formal* da aritmética, onde inclusive os enunciados reais, pertençam ao núcleo ou não, não são já considerados da perspectiva de sua significação.

4.3. Um tema kantiano

O intuito desta seção é mostrar, por um lado, que está por trás desta redução de fragmentos da aritmética à percepção como tendo conteúdo *deste ponto de vista*. Em particular, se podemos então associar o pensamento de Hilbert ao de Kant.

Na Seção 4.1 indicamos que o propósito de Hilbert era substituir pela percepção qualquer referência a intuição a fim de caraterizar a parte da aritmética com conteúdo. Fizemos referência, em particular, ao fato de que era natural pôr ênfase na passividade da percepção por oposição à intuição construtivista como uma faculdade ativa de conhecimento matemático. Já de inicio, Hilbert salienta que partimos das seqüência de barras como dadas, isto é, dos numerais. A pergunta que cabe agora responder é a de se os numerais devem ser entendidos como a "realidade objetiva" dos conceitos numéricos ou como contrapartida no formalismo de tais

158 *Sobre o infinito*, p. 280: "so haben wir hier *zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren*, und die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten."

conceitos. A terceira opção a descartamos na Seção 4.1., isto é, que os símbolos sejam, por assim falar, os próprios conceitos numéricos.

Ora, se olhamos o procedimento de Hilbert dificilmente possamos negar um aspecto "construtivo" na série das barras |, | |, | | |. Para H. Sinaceur se trata de uma "construção intuitiva e não uma construção na intuição. A intuição é sensível, perceptiva e visual, e não pura."[159]. Coincidimos no espírito da distinção de Sinaceur entre construção intuitiva e construção na (forma da) intuição; também coincidimos em que se trata da percepção e que não há lugar para este aspecto do a priori kantiano. Mas, não coincidimos de que se trate simplesmente da construção do número inteiro como cifra (numeral). Para H. Sinaceur "há uma construção intuitiva do número inteiro como cifra; é dizer, como objeto de uma teoria formal."[160].

Mas, ainda que sem admitir um apriorismo kantiano em Hilbert, alguns intérpretes procuram em Kant as raízes do finitismo hilbertiano. Entre eles S. Körner no seu livro *The Philosophy of Mathematics. An introduction*. Para Körner, Kant antecipa tanto o intuicionismo quanto o finitismo, na medida em que aquele procura a fonte de auto-evidência e conteúdo da matemática na percepção. Körner destaca também a rejeição kantiana ao logicismo leibniziano como uma nota compartida pelo intuicionismo e finitismo[161]. Mas especificamente, em relação à percepção, Körner destaca da seguinte maneira as relações entre Kant, Hilbert e Brouwer da seguinte maneira:

"Hilbert comparte essa posição fundamental com Brouwer e sua escola tanto quanto com Kant. Se a matemática deve ser restringida -inteiramente e sem qualificação- à descrição de objetos concretos de uma certa classe, e às relações lógicas entre tais descrições, então nenhuma inconsistência pode aparecer nela: descrições precisas de objetos concretos são sempre mutuamente incompatíveis. Em particular, não há antinomias com as quais preocuparmos, geradas pela noção de infinito atual; e isto pela mais simples das razões, é dizer, porque o conceito de infinito atual não descreve nenhum objeto concreto."[162]

A diferença entre intuicionistas e finitistas para Körner se encontra, naturalmente, em que tal posição fundamental não implica para os segundos o abandono da matemática transfinita, senão que se trata da

[159] Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", p. 260.
[160] Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", p. 260.
[161] Cfr. S. Körner. The Philosophy of Mathematics. An Introduction, cap. IV.
[162] Körner, S. *Op. cit.*, p. 73.

"reconciliação da matemática transfinita com a matemática concebida, a maneira de Kant, como concernente a objetos concretos."[163]. Além, então, de Hilbert ser devedor de Kant no que diz respeito à mencionada posição fundamental -o ponto de vista finito-, para Körner Hilbert deve também a Kant a maneira de reconciliar a matemática com conteúdo com a matemática transfinita; o recurso às "idéias da razão" kantianas, cujo emprego aparece para Körner apenas como próprio da filosofia prática de Kant[164].

Podemos verter as afirmações de Körner dentro das categorias que utilizamos neste trabalho observando que Körner destaca dos aspectos do pensamento de Hilbert em relação ao de Kant. Em primeiro lugar, o papel da percepção como *representação singular*. Notamos na seção anterior que deste ponto de vista podemos achar em Hilbert as mesmas dificuldades que encontramos em Kant no que diz respeito a justificação dos enunciados universais. Em segundo lugar, Körner destaca como influência kantiana o aspecto que denominamos como a "teoria do conceito" de Kant.

O que nos parece ausente da análise de Körner é um tratamento mais adequado do problema da justificação do formalismo. Mas o que nos interessa ver agora é como deve ser entendido o papel da percepção. Para Körner, do ponto de vista do formalista cabem três possibilidades, das quais duas são descartadas e a terceira é empirista. Para o formalista, escreve Körner, somente três posições são possíveis:

"(a) os enunciados da matemática pura são lógicos, (b) eles são sintéticos a priori no sentido de Kant, (b) eles são empíricos; /.../ a primeira possibilidade se demonstrou inválida e a segunda deve ser descartada como obscura e como inadequada à variedade dos diferentes sistemas matemáticos. Modesta, porém silenciosamente, se declara que os enunciados da matemática pura são empíricos"[165]

Que os enunciados matemáticos não são para Hilbert enunciados lógicos pode ser lido entrelinhas na seção anterior, mas voltaremos sobre esse ponto no Capítulo 5. Que eles não são sintéticos a priori no sentido de Kant o veremos no capítulo seguinte, assim como que (alguns) (d)eles são a priori (necessários) e informativos sobre a realidade. O que aqui nos importa é ver se há argumentos para concebê-los como empíricos. Körner não fornece argumentos para sua conclusão, indicando que a postura formalista tem, em função de tal conclusão, um certo ar paradoxal. Fundamentalmente este problema se relaciona com a

163 *Ibid.*, p. 73.
164 *Ibid. p.* p. 73.
165 *Ibid.*, p. 98.

interpretação que devemos dar dos numerais como objetos da percepção. Examinaremos o problema seguindo argumentos de H. Sinaceur e V.M. Abrusci.

O ponto é da maior importância e de difícil solução. Recapitulemos o que sabemos até agora. Em primeiro lugar, devemos distinguir uma parte da aritmética que podemos considerar justificada pela percepção. Como natural contrapartida, reconhecemos que existe uma parte da aritmética a determinar que não admite tal justificação. O sistema formal da aritmética contém como teoremas e axiomas ambas as partes. O objetivo do Programa de Hilbert é demonstrar a consistência do sistema formal e desta maneira assegurar definitivamente a confiabilidade da aritmética, para depois proceder a fornecer provas de consistência da análise e da teoria de conjuntos. A consistência do sistema formal da aritmética, por outro lado, não implica a existência da totalidade infinita dos números naturais.

Para H Sinaceur, Hilbert procede a dar conta da intuição dos números naturais em termos empiristas, pouco acorde com a maneira de proceder kantiana. Da nossa perspectiva, esse "dar conta" da intuição de número consiste na verdade em "substituir" pela percepção tal intuição. Escreve Sinaceur[166]:

"A intuição aritmética ("anterior a todo pensamento" e *a fortiori* a todo análise, que é pensamento um crítico) se exerce sobre um dado a um mesmo tempo *imediato* e irredutível, sobre os objetos concretos, sobre as configurações finitas: séries finitas de simbolos: 1, 11, 1111, 1111111, por exemplo (que servem para compor expressões mais complexas com a ajuda dos símbolos da adição, da igualdade e da desigualdade)."

No entanto, em que sentido são, como diz Sinaceur, as barras objetos de uma teoria formal? Para nós, o ponto é que precisamente o que Hilbert faz é em cada caso "eliminar" os símbolos de "+", "<", "=" etc. e fornecer uma contrapartida perceptual na qual fundar de maneira intersubjetiva inatacável a verdade de fórmulas numéricas elementais. Quando estamos interessados em reconhecer a parte da aritmética justificada pela percepção estamos em presença dos numerais como objetos dados na percepção entanto que contrapartidas dos conceitos numéricos, substituindo desta maneira qualquer referência a uma "intuição aritmética" pela percepção. Como entender o procedimento hilbertiano no que diz respeito à enunciados de natureza mais complexa e em relação à demonstrações?

---

166 Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", p. 260.

Para Abrusci, por exemplo, nos escritos dos 20 temos uma extensão do finitismo original -que Abrusci caracteriza também de empirista- resultado da análise hilbertiana do paralelismo entre o sistema formal da aritmética e a parte com conteúdo da mesma. Escreve Abrusci:

"Descrito este paralelismo, Hilbert procede a caracterizar as propriedades e os procedimentos inferênciais numéricos aceitáveis como seguros pela sua evidência intuitiva: propriedades como "maior que" e "menor que", operações como somar, procedimentos inferênciais reconduzíveis a *Aufbau* (composição) e Abbau (decomposição) dos sinais numéricos."[167]

Em relação ao conceito de demonstração, escreve Sinaceur:

"As demonstrações aritméticas contentuais consistem em simples composições e decomposições de suas combinações. As cifras não têm por elas mesmas significação, ao contrário dos símbolos da adição, da igualdade, da desigualdade e da diferença que a tem. As fórmulas obtidas por composição finita de cifras concretas sem significação e dos símbolos significativos acima mencionados têm conteúdo."[168]

Para nós, as demonstrações contentuais consistem para Hilbert, efetivamente, em composições e decomposição das combinações de sinais. O que provamos por estes meios são enunciados que contém cifras e símbolos aritméticos aos quais previamente fornecimos uma contrapartida perceptual. E a prova se faz por composição e decomposição de barras na medida em que o raciocínio deve estar justificado também na percepção, sequer de maneira indireta.

Abrusci qualifica de tom fenomenológico aspectos das idéias de Hilbert nos anos 20, mas também nos diz sobre a influenza no programa concepções filosóficas, "kantianas em especial, que permeavam o ambiente matemático alemão na época de Hilbert"[169]. Ora, segundo Abrusci, podemos também dizer que para Hilbert o matemático é, digamos, ingenuamente platônico, mas pode criticamente reformular sua posição como *platônico moderado*: "para empreender a exploração de um âmbito de conhecimento, *serve e é útil* acreditar que as coisas estão segundo certas relações e que a cada proposição derivada corresponda uma relação entre as coisas"[170].

---

[167] Abrusci, V.M. *Ibid.*, p. 330-331.
[168] Sinaceur, H. *Op. cit.*, p. 262.
[169] Abrusci, V. M. "Per uma caratterizzazione del programma hilbertiano", p. 315.
[170] Abrusci, V.M. *Ibid.*, p. 319.

Tal multiplicidade de influências, por mais que as consideremos diacrónica e não sincronicamente, é evidentemente insustentável. Mas, o que Abrusci considera como próprio de uma influência fenomenológico nos permitiu considerar o difícil problema que estamos tratando como um exemplo mais da presença de um tema leibniziano, já destacado no capítulo anterior, no Programa de Hilbert. Escreve Abrusci:

"Esta teoria *concreta elementar* dos números é sugestivamente desenvolvida por Hilbert no interior de uma teoria dos sinais /.../, de entonação fenomenológica: sinais são os números e sinais são os objetos formais da teoria formalizada."[171]

Justamente, nos parece que aqui nos aproximamos a uma resposta à questão que estamos tratando que mostra, senão uma concepção do formalismo à maneira leibniziana da teoria da expressão, uma concepção do formalismo segundo a qual não é de natureza completamente arbitrária. Com efeito, o formalismo "expressa a técnica de nosso pensamento", ponto que será relevante na crítica que no capítulo seguinte dirigiremos as interpretações instrumentalistas do Programa de Hilbert. Os sinais numéricos, como contrapartida perceptual dos conceitos numéricos, exprimem em certa medida tais conceitos, e isto não quer dizer que os números são sinais.

Ora, no que diz respeito ao platonismo moderado do qual fala Abrusci -seguindo, segundo nos parece, idéias de Bernays- achamos que não é necessário assumir uma espécie de platonismo do "como se", pois na verdade do que se trata, na aritmética no mínimo, é de estender métodos e conceitos de confiabilidade plena no âmbito do finito ao infinito potencial, da possibilidade de *extrapolar* procedimentos aceitáveis no finito ao âmbito do infinito potencial. Este aspecto do pensamento de Hilbert é o que poderíamos denominar de raízes kantianas: à teoria do conceitos de Kant, mas não as teses específicas de Kant relativas a tal teoria.

Justamente, o que intentamos destacar em Hilbert é uma crescente preocupação pela natureza do formalismo e sua relação com o pensamento, de maneira tal que não encontremos em Hilbert nem formalismo estrito nem formalismo metodológico. Um formalismo que, insistimos, comparte a *forma mentis* do formalismo leibniziano. Em particular, vemos como o formalismo aparece nos escritos dos anos 20, de maneira manifesta e não implícita como nos escritos de 1900, como um tratamento do infinito através do finito, isto é, via o sistema de axiomas. Escreve Sinaceur:

171 Cfr. V.M. Abrusci. "Per uma caraterizzazione del programma hilbertiano", p. 331.

"Este acesso indireto tem aqui de remarcável que seus meios são, *a primeira vista*, finitos: os axiomas são em número finito e um teorema é obtido a partir de axiomas por um número finito de inferências. A axiomatização não abandona o terreno do finito para descrever conjuntos extensivamente infinitos."[172]

Tanto Abrusci como Sinaceur reemitem esta idéia a Kronecker. Para Abrusci nos escritos dos anos 20 "vem aceito como intuitivamente dado o conceito de número inteiro e seu uso como valor de parâmetro, resultando então englobada na metamatemática hilbertiana a posição de Kronecker"[173]. Para Sinaceur se trata de um formalismo construtivista. Mas nos achamos que tais soluções são inaceitáveis na medida em que nada se justifica desta maneira. Com efeito, restringirmos a um formalismo construtivo a fins de demonstrar a consistência de uma teoria não justifica a teoria no plano em que o construtivismo coloca a questão, isto é, dos "objetos mesmos".

Para o formalismo encontrar uma justificação esse aspecto construtivo deve ser fundamentado numa posição filosófica que nos encontramos, na suas linhas gerais, no pensamento de Leibniz. Com efeito, é pelo fato do formalismo ser "expressão de nosso pensamento" que uma prova de consistência do mesmo pode justificar-se face às objeções construtivistas. Uma prova de consistência, por mais construtiva que seja, não seria uma justificação da matemática, porque a matemática não é produzir seqüências de símbolos num sistema formal. Mas uma prova de consistência de um formalismo vira significativa se o formalismo é expressão de nosso pensamento, no sentido em que reflete a "técnica de nosso pensamento". Já assinalamos que o pensamento procede de maneira finita e neste sentido o formalismo o reflete.

Vimos que para certos conceitos -os finitários- podemos oferecer uma contrapartida perceptual assim como de demonstrações de enunciados universais que envolvam conceitos finitários. A questão é que nem toda a matemática é finitária. Resta então afirmar que a matemática transfinita é um operar simbólico sem relação com processos do pensamento significativos? Não expressaremos através do formalismo outro aspecto de nosso pensamento que seja não menos essencial para a constituição da matemático? Como contrapartida de formalismo, Hilbert distingue, segundo achamos, entre os conceitos matemáticos tipos diferentes, seguindo

[172] Sinaceur, H. *Op. cit.*, p. 253.
[173] Abrusci, V.M. *Op. cit.*, p. 330.

uma "teoria kantiana dos conceitos", ponto no qual podemos coincidir com Körner, ainda que com algumas reservas.

Com efeito, Hilbert tenta em *Sobre o infinito* justificar os conceitos transfinitos via uma associação às "idéias da razão" kantianas[174]. Tal associação é discutível, mas em alguns aspectos ela não é de todo inapropriada. Com efeito, se na visão de Hilbert os aspectos transfinitos da matemática contém um elemento heurístico, esse aspecto heurístico Kant também atribui às idéias da razão. E este valor heurístico Kant atribui às idéias inclusive no âmbito do conhecimento teórico, e não apenas no prático, como afirma Körner. No entanto, é evidente que para Kant a função heurística das idéias da razão, pela natureza mesma de tais idéias, como indo além das condições da sensibilidade, impede que sejam usadas numa demonstração, isto é, na obtenção de conhecimento teórico.

Se pensamos na idéia de mundo, que parece a mais próxima da problemática que nos ocupa, se trata de um conceito que para Kant envolve uma contradição quando tal conceito é subsumido, por assim dizer, nas condições de nossa sensibilidade. Como a matemática também está condicionada pelas condições de nossa sensibilidade, então o conceito de infinito atual é banido dela. Ora, além de sua utilidade heurística, como já dissemos, não é possível utilizar esse conceito nos limites de nossa sensibilidade, pois onde ele esteja envolvido, está envolvida uma contradição. Mas, por hipótese, o Programa de Hilbert, mesmo independizado da implicação ontológica "Consistência implica existência", supõe que tais conceitos não levam a contradição. Portanto, a concepção kantiana pode ser reformulada, sem dúvida de maneira inaceitável para Kant, de forma tal que permitam *obter* conhecimento teórico -não apenas guia heurística- e não restringir as idéias ao conhecimento prático.

Nós já vimos que podemos introduzir conceitos transfinitos se provamos que não são contraditórios. Mesmo assim, a mera consistência é insuficiente, se Kant é lido construtivamente, para justificar a introdução de um conceito matemático. No entanto, a seguinte passagem de *Os Progressos da metafísica* apontam a uma

---

174 Num artigo recente, "Hilbert's Formalism", M. Detlefsen sugere um trascendentalismo hilbertiano em função do uso hilbertiano do conceito de "idéia da razão". Mas não varia essencialmente sua interpretação instrumentalista, que estudaremos no capítulo seguinte. Com efeito, quem agora é instrumentalista é o próprio Kant.

justificação de tais conceitos a cujo espírito Hilbert, sem dúvida com uma modificação essencial, poderia subscrever:

"Representar-se um conceito puro do entendimento como pensável num objeto da experiência possível chama-se procura-lhe a realidade objetiva e, em geral, exibi-lo. Quando isto não pode ser feito, o conceito é vazio, isto é, não é suficiente para nenhum conhecimento. Este ato, quando confere a realidade objetiva ao conceito mediante a intuição correspondente ao mesmo, de modo que é exibido em forma imediata, chama-se esquematismo; porém, se o conceito não pode ser exibido imediatamente, senão apenas pelas suas conseqüências (indiretamente), podemos chamar tal ato a simbolização do conceito. O esquematismo tem lugar no caso dos conceitos do sensível, a simbolização é um auxilio para conceitos do supra-sensível, que desta maneira não são propriamente exibidos, nem podem ser dados em nenhuma experiência, porém no entanto pertencem necessariamente a um conhecimento, ainda que se trate de um conhecimento meramente possivel como conhecimento prático"[175]

Não pretendemos, por certo, procurar apoio em Kant para as idéias de Hilbert. Mostramos que o finitismo de Hilbert partilha uma dificuldade da filosofia kantiana da matemática, isto é, que a insistência na percepção como representação singular não permite dar conta das afirmações finitárias universais, da mesma maneira que a intuição pura kantiana. Assinalamos que só de maneira indireta poderíamos falar de uma justificativa na percepção desses enunciados ou de provas dos mesmos através de composição e decomposição. Com efeito, a justificação da composição e decomposição excede o marco da percepção como representação singular, ainda que num sentido indireto possamos falar de justificação na percepção.

Mas o que importa ressaltar é que para certos conceitos, os conceitos finitários, no estudo metamatemático fornecemos uma contrapartida na percepção com os sinais numéricos entendidos como não completamente arbitrários. Esses sinais numéricos serão os objetos da teoria formal, que inclui conceitos aos quais não pode fornecer-se uma contrapartida semelhante e então, deste ponto de vista, carecem de sentido. Mesmo assim, o sistema formal não é também completamente arbitrário: expressa a natureza de nosso pensamento; em particular, nos permite um tratamento do infinito (potencial) através do finito. E esse trato

[175] Kant, M. *Los progresos de la metafisica*, p. 37

com o infinito só pode ser levado a cabo com as precauções necessárias: prova de consistência do sistema formal. Voltaremos sobre este ponto no capítulo seguinte.

4.4. A reformulação do Programa

Nos trabalhos produzidos por volta de 1925 a importância da percepção é, como vimos, evidente. Mas uma série de considerações sobre a natureza do infinito indicam uma mudança de posição. Com efeito, vimos que Hilbert entende que o infinito não existe, mesmo que a consistência da teoria formal que o "implica" seja demonstrada. Porém, a consistência continua a ser critério suficiente para a introdução de conceitos matemáticos. Se de um conceito introduzido se prova a não contradição, a única justificativa *adicional* seria, como já vimos, o êxito alcançado com a introdução do conceito em questão.

Ora, dissemos que os enunciados reais estariam representados no sistema formal. Em particular, os enunciados do núcleo, as equações numéricas elementares, cuja correção determinamos pela percepção, aparecem na teoria formal como resultado de uma demonstração. Nesta perspectiva, o programa poderia ser enunciado assim: Seja TI uma teoria ideal, vamos chamá-la assim para simplificar, e seja A uma fórmula do núcleo, isto é, uma fórmula cuja correção pode verificar-se "mecanicamente". Então:

(I) Se TI deduz A, então A é correta.

Mas, se em 1900 a prova de consistência tinha como objeto uma "prova de existência", sob o suposto implícito "sentido = existência", temos agora, por volta de 1925, um programa de eliminação do infinito na matemática, paralelo a uma nova forma de tentar obter provas de consistência. Mesmo que qualificados sem sentido, os conceitos transfinitos, apesar do fato desses conceitos não ter referência, não devem ser por isso abandonados, tese que parece implícita em 1900. A concepção dos conceitos transfinitos como rodeios faria então jus ao aspecto heurístico das idéias kantianas e mostraria -se esta é a correta versão do Programa de Hilbert e fosse realizável- que o conhecimento finitário obtido não dependeria do uso das idéias da razão, na medida em que tais rodeios são elimináveis.

No entanto, devido ao fato de que a matemática se desenvolveu usando conceitos transfinitos, agora a fundamentação definitiva da matemática deve passar pela eliminação desses conceitos: se o uso de conceitos finitários, isto é, perceptivelmente justificáveis, não leva a contradição, as contradições só podem provir dos conceitos transfinitos. Sua eliminação mostrará, indiretamente, que as teorias que contém esses conceitos são legítimas. Por outra parte, os conceitos envolvidos em tal prova de eliminação-consistência, os conceitos metamatemáticos, deverão ser finitários[176].

Portanto, com vistas à fundamentação definitiva da confiabilidade da matemática, a prova de consistência adotaria a forma de uma prova de eliminabilidade. Ora, como se supõe que a teoria ideal representa, no sentido acima destacado, a parte real da matemática, então ela representa em particular as sentenças verdadeiras. Podemos então eludir a referência à verdade e formular o programa em termos diferentes. Justamente, a terminologia "enunciado ideal" foi propositadamente escolhida por Hilbert: reemite aos elementos ideais em geometria. A eliminabilidade neste contexto geométrico quer dizer: a adição de elementos ideais não cria novas relações no antigo domínio. Qual a maneira de traduzir isto ao problema que nos ocupa?

A forma mais rude de expressar a eliminabilidade é a seguinte: Seja TI ideal, seja TF uma teoria que contenha apenas enunciados finitários e raciocínios finitários, *seja A uma fórmula que pertença ao núcleo*. Então, dizemos que os elementos ideais são elimináveis quando:

(I I) se TI deduz A então TF deduz A.

A idéia subjacente é que as demonstrações de expressões finitárias através dos enunciados ideais é um "rodeio" que pode ser evitado. Ora, eliminabilidade implica consistência de uma forma obvia. Dado que desejamos que a teoria formal represente apenas equações numéricas corretas, basta provar apenas que a fórmula "0 = 1" não é teorema do sistema formal, para obter esse resultado. A demonstrar a indemonstrabilidade de "0 = 1" se reduz então a questão de demonstrar a consistência da teoria formal. A fórmula "0 = 1" é uma fórmula finitária, se fosse deduzível na teoria ideal então seria deduzível na teoria finitária, o qual não é possível. Logo, a teoria ideal é consistente.

Ora, concebido como programa de conservação, cabe perguntar-se se trata-se apenas de conservação em relação às do núcleo ou se trata-se de conservação em relação a um conjunto de fórmulas mais amplo, que chamamos finitárias. Dito de outra maneira, conservação em relação apenas as fórmulas do núcleo (reais não-problemáticas) ou conservação também das afirmações que embora finitárias não pertencem ao núcleo (reais

---

176 Marcus Giaquinto, "Hilbert's Philosophy of Mathematics"., 2, tenta demonstrar que este programa de eliminabilidade tem suas raizes em Cantor. Independentemente da validade da proposta, baseada numa citação certamente sugestiva de Cantor, é evidente que não há rastos desta influência de Cantor nos trabalhos de 1900.

problemáticas). Caso assim for, o programa seria assim enunciado: Seja TI uma teoria ideal, seja TF uma teoria finitária, *seja A uma fórmula finitária*, então:

(I I I) Se TI deduz A, então TF deduz A.

As versões **(I I)** e **(I I I)** partilham uma série de supostos comuns, eventualmente discutiveis, além de ser manifestamente diferentes em relação à natureza da conservação em questão. Em primeiro lugar, que se trata de um programa de conservação. Em segundo lugar, aparece como suposto a possibilidade de formalizar a que denominamos teoria finitária e dai que uma certa formalização carateriza os métodos finitisticamente aceitáveis. Em particular, que pode ser claramente determinado, isto é sintaticamente, as fórmulas em relação as quais se relaciona a conservação. Se isso pode parecer mais ou menos obvio nas fórmulas que dissemos pertencentes ao núcleo, não resulta tão claro em relação as chamadas fórmulas finitárias gerais e no caso dos raciocínios finatariamente aceitáveis.

O próprio Hilbert não é muito claro no que diz respeito ao segundo suposto[177] e é matéria de discussão o primeiro. Ora, nestes pontos, que envolvem dificuldades técnicas substanciais que não resultam, segundo achamos, significativas para nosso trabalho, preferimos manter uma postura o mais neutra possível. Desta maneira, podemos expor as interpretações atendendo minimamente as especificidades técnicas sobre as questões de *fundamentos*, e centrar-nos na questão, para nós independente, que denominamos *justificação semântica.*

O ponto é relevante na medida em que diferentes decisões em torno destes assuntos levam a diferentes conclusões em relação ao fracasso ou não do Programa de Hilbert no que diz respeito ao teorema de Gödel. Como nosso trabalho é relativamente independente de tal avaliação nos parece a decisão adequada. Da perspectiva por nós adotada o máximo que podemos dizer é que para os fins metamatemáticos um fragmento dos métodos finitariamente aceitáveis, entendido em princípio como suficiente para a prova de consistência, é formalizado e incorporado, por assim dizer, à metamatemática. Com esta postura neutra pode perfeitamente entender-se que Hilbert pretenda uma prova de consistência do fragmento finitário formalizado *qua* sistema formal, com métodos justificados na percepção, isto é, consistentes *per se*.

[177] Cfr. C. Smorynski, *op. cit.*, pp. 26-27.

Por completude, faremos uma breve exposição das divergências em relação ao impacto do Teorema de Gödel sobre o Programa de Hilbert de dois destacados intérpretes: C. Smorynski e M. Detlefsen. Mas primeiro faremos uma exposição da resposta clássica às objeções de Poincaré à metamatemática hilbertiana assinaladas no Capitulo 3. A metamatemática hilbertiana, como assinala von Neumann[178], supõe: a) a enumeração de todos os símbolos usados em lógica e matemática; b) a caracterização do conjunto de fórmulas da linguagem da teoria formal; c) a caracterização dos procedimentos demonstrativos da matemática clássica. Essa foi a tarefa realizada pelo logicismo. Mas a justificativa do instrumental matemático que a demonstração de consistência requer já não é matemática. Não se trata, nesse caso, de dar uma prova de consistência, senão de dar uma instância de evidência imediata, isto é, novamente, a percepção.

Por certo, é quando Hilbert põe ênfase na tarefa dos fundamentos quando aparecem nos escritos de Hilbert as passagens que sugerem interpretações do tipo da que chamamos formalismo extremo. Um exemplo disto temos num artigo publicado em 1931, *A fundamentação da teoria elementar de números*, onde Hilbert escreve[179]:

"O pensamento fundamental da minha teoria da demonstração é o seguinte:

Tudo aquilo que se relaciona com a matemática no sentido vigente até agora é fortemente formalizável, de tal modo que a própria matemática ou a matemática em sentido estrito consiste em fórmulas. Estas fórmulas se diferenciam das fórmulas usuais da matemática apenas em que ademais dos sinais usuais elas contém os sinais lógicos, especialmente aquele para "se segue" ($\rightarrow$) e aquele para "não" ($\neg$). Certas fórmulas que servem como fundamento do edificio formal da matemática são chamadas de axiomas. Uma demonstração é uma

---

178 Neumann, J. von. *The formalist Foundations of Mathematics*, p. 52-53.

179 Hilbert, D. *Die Grundlagen der elementaren Zahlenlhere*, doravante citado *Os fundamentos da teoria elementar de números*, p. 192: "Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:
Alles, was im bisheringen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so dass die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engenerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, dass ausser den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für "folgt" ($\rightarrow$) und für "nicht" ($\neg$), darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Fundament des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss; er besteht aus Schlüssen, wo jede der Prämissen entweder Axiom ist oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel oder einem Axiom entsteht. An Stelle des inhaltlichen Schliessens tritt in der Beweistheorie ein ausseres Handeln nach Regeln, nämlich der Gebrauch des Schlusschemas und der Einsetzung. Eine Formel soll beweisbar heissen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist."

figura que, como tal, deve manifestar-se a nós evidentemente; consiste em conclusões onde cada uma das premissas ou é um axioma ou coincide com a fórmula final de uma conclusão que aparece anteriormente na demonstração, isto é, se origina pela substituição em uma tal fórmula final ou por substituição num axioma. No lugar das conclusões "contentuais" aparece na teoria da demonstração um procedimento externo segundo regras, a saber, o uso de esquemas de inferência e o uso de substituição. Uma fórmula deve chamar-se demonstrável quando ela ou é um axioma ou é a fórmula final de uma demonstração."

Em relação aos enunciados reais, na melhor das hipóteses, podemos dizer que eles são "representados" dentro do sistema formal. Naturalmente, e em relação aos elementos ideais, a introdução de tais elementos deve satisfazer uma exigência: prova de não-contradição. Escreve Hilbert:

"Em certo modo, uma nova matemática corresponde à matemática propriamente formalizada, a metamatemática, a qual serve para fazer mais segura aquela, e na qual, em contraposição às conclusões formais da própria matemática, aparecem conclusões com conteúdo, porém apenas para provar a ausência de contradição dos axiomas."[180]

Assim, podemos pensar que a matemática clássica carece de significado, quando examinada da rígida perspectiva finitária. Parte do interesse nos sistemas formais se deve ao fato de que, sendo sua estrutura sintática completamente determinada, é possível, em princípio, examinar se podemos deduzir dele uma contradição. O sistema formal é um objeto sobre o qual podemos raciocinar finitariamente. Se é o caso de não ser contraditório, *a fortiori* a teoria que usualmente se formula na matemática numa linguagem semi-formalizada, e que aparece formalizada na teoria ideal, fica também justificada.

Por certo, a metamatemática é também matemática. Ora, como o que está em jogo na discussão é que os construtivistas declaram que partes da chamada matemática clássica é desprovida de significado, então uma ciência destinada à fundamentação da matemática clássica deve ser imune à critica de falta de significação. Decorre das hipóteses até aqui sugeridas que os métodos usados numa prova de consistência devem ter a nota

---

[180] *Os fundamentos da teoria elementar de números.*, p. 192: "Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissemassen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der -im Gegensatz zu den rein formalen Schlussweisen der eigentlichen Mathematik- das inhaltliche Schliessen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome."

de intersubjetividade. Isto implica que devem ser métodos que, de alguma maneira, resultem, então, também justificados na percepção. O problema é dar uma caracterização precisa de quais os limites dessa justificação.

Isto nos leva à resposta de Hilbert à objeção levantada por Poincaré, com a qual fechamos o capítulo anterior. A prova de consistência exige o uso de indução, como afirmava Poincaré, da perspectiva metamatemática, mas sobre objetos e propriedades finitárias, isto é, sobre as fórmulas. Portanto, devemos restringir nossas induções de forma tal que elas tenham *a mesma segurança* que as induções em teoria finitária de números, e isto é possível pela natureza das estruturas sintáticas envolvidas. Coincidimos com Sinaceur quando escreve:

"Assim, o princípio de indução completa é um princípio formal da aritmética superior, completamente distinto das composições ou decomposições contentuais da aritmética intuitiva. Quando Hilbert fala de reduzir os meios de demonstração da não contradição da aritmética àqueles da aritmética elementar, é necessário então compreender que o uso de indução completa, da mesma maneira que, naturalmente, as regras relativas aos quantificadores, são excluídos"[181]

Ora, o que está por trás disso é usar indução como uma regra de generalização convenientemente restrita, de forma tal que a inclusão da expressão "todos" possa ser interpretável como redutível à percepção. Naturalmente, este último ponto deve ser não, digamos, provado, mas no mínimo justificado. Por certo, Hilbert insiste em que aqueles procedimentos baseados na composição e decomposição não são equivalentes ao princípio de indução, mas não parece ser o caso de tratar-se de princípios diferentes, senão de um princípio de uso restrito a propriedades perceptivelmente decidíveis.

Uma possível justificação deste princípio de indução restrito consiste então em afirmar que se os objetos são dados conforme ao ponto de vista finito e se uma propriedade sobre esses objetos é decidível, isto é, se podemos mecanicamente reconhecer se um objeto tem ou não a propriedade, então podemos afirmar que qualquer objeto tem a propriedade se o primeiro elemento tem a propriedade e se o fato de um elemento possuir a propriedade faz com que o "seguinte" também tenha a propriedade. Se tal coisa acontece, dado qualquer objeto, podemos sem indução estabelecer que tem a propriedade em questão por um número finito de passos de aplicações de *modus ponens*. Logo, tratar-se-ia de uma prova finitária.

[181] Sinaceur, H., *op. cit.*, p. 262.

Porém, o problema aqui é justificar que o "raciocinio indutivo" pode ser fundado *apenas* na percepção. De fato, enfrentamos um problema semelhante àquele que já enfrentamos com os enunciados universais acima considerados ou àquele relativo ao procedimento de composição e decomposição. Ora, do ponto de vista metamatemático, a critica de Poincaré insistiria no caráter sintético a priori do principio de indução, na linha da universalidade estrita que aparece na matemática, como não fundável na percepção: considerar os sinais como objetos em lugar de números não modifica substancialmente a questão.

4.5. Recapitulação

A nota de intesubjetividade atribuida à percepção por Hilbert é uma nota essencial para a compreensão do seu programa. Com efeito, a tese do primado fundacional da percepção permanece inalterada - deslocada a planos diversos porém complementares - no decorrer dos mais de 30 anos nos quais Hilbert apresentou suas idéias sobre fundamentação da matemática. Esses deslocamentos vêm acompanhados de mudanças na forma na qual a prova de consistência das teorias matemáticas relevantes era pensada ser levada a cabo.

Nos escritos dos anos vinte - como vimos neste capítulo - a prova de consistência de um sistema formal, contrapartida formalizada da teoria matemática "informal" que é utilizada usualmente por um matemático, pretende aparentemente mostrar que a referência ao infinito pode ser eliminada quando tal referência está envolvida na prova de uma afirmação das chamadas finitárias, isto é, afirmações que não envolvem referência a uma totalidade infinita de objetos. Ora, essa eliminação é necessária devido ao fato, segundo Hilbert, de que o infinito não existe. Vemos, então, como se abandona a tese "Consistência implica existência", mas a consistência continua a ser o teste de admissibilidade de uma teoria matemática.

A parte finitária da aritmética é reconhecida como tal em função da sua justificação pela percepção. Com efeito, em lugar da intuição como garantia do conteúdo da matemática, Hilbert vai colocar a percepção com a mesma função. Mas, seguindo nossa distinção entre a matemática como ciência e a matemática como objeto da metamatemática, isto não implica, em especial, afirmar que a chamada aritmética finitária trata de "marcas sobre o papel", senão que podemos, para fins fundacionais, operar tal redução.

No entanto, podemos dizer que no sistema formal da aritmética uma parte de formalismo representa a parte da aritmética que tem justificação na percepção, identificando, do ponto de vista fundacional, justificação na percepção e significado. Qual a significação da parte do formalismo para a qual não pode fornecer-se uma justificação semelhante? Nos primeiros escritos não é um problema que fórmulas ou regras de transformação do formalismo representam uma parte significativa da matemática e que fórmulas não têm significado. Com efeito, como vimos no capítulo anterior, a tese "Consistência implica existência" é acompanhada pela tese "Existência = sentido". Nos últimos escritos abandona-se a primeira, aceita-se a segunda para fins fundacionais, mas deve-se fornecer uma justificativa daquela parte do formalismo que envolve "referência ao infinito". Sugerimos que tal justificação pode ser procurada na "analogia", no sentido de que temos outros conceitos além dos finitários, os conceitos transfinitos, lidos como "idéias da razão", que são parte constitutiva da matemática, ainda que sem contrapartida na percepção. Mas salientamos que dificilmente a interpretação que dá Hilbert desse conceito kantiano possa implicar encontrar em Kant o *backround* filosófico do Programa de Hilbert.

Destacamos também que o sistema formal, mesmo quando considerado da perspectiva dos fundamentos, não é de natureza completamente arbitrária, na medida em que ele reflete a natureza de nosso pensamento. Por esta razão, uma prova de consistência pode ser admitida como uma resposta às críticas construtivistas. Em particular, no que diz respeito ao infinito, o formalismo permite-nos tratar com ele através do finito, isto é, através do sistema formal que expressa as extrapolações que realizamos de métodos aceitáveis no domínio do finito para o infinito. Em resumo, por um lado, podemos dizer que surge do tratado neste capítulo a permanência dos temas leibnizianos considerados no capítulo anterior, convenientemente modificados uma vez que a tese leibniziana "Possível implica existente" é abandonada. Mas, por outro lado, podemos encontrar também um eco da teoria kantiana dos conceitos, se consideramos a presença em Hilbert da seqüência percepção - conceitos finitários - conceitos transfinitos, associada com a seqüência intuição - conceitos- idéias de Kant. Em particular, da mesma maneira que Kant faz repousar as idéias da razão sobre a analogia, em Hilbert os conceitos transfinitos parecem surgir como resultado de extrapolações analógicas, extrapolações que só uma prova de consistência poderia fundamentar.

Capítulo 5
As interpretações instrumentalistas do Programa de Hilbert

5.0. Apresentação

As interpretações que neste capítulo centralmente trataremos poderiam ser classificadas como formalistas moderadas. Do nosso ponto de vista, tais interpretações identificam, de maneira apressada, teses que devem ser olhadas da perspectiva da metamatemática com teses sobre a própria matemática. Na Seção 5.1 tratamos da possibilidade de relacionar o pensamento de Hilbert com o empirismo lógico, à maneira de preparação das seguintes seções. Na Seção 5.2. tratamos da interpretação operacionalista de Hilbert, fornecida por M. Giaquinto. Na Seção 5.3. examinam-se duas interpretações instrumentalistas, uma de C. Smorynski e outra de M. Detlefsen. Embora o operacionalismo e o instrumentalismo sejam posturas próximas, preferimos tratá-las separadamente, pois nos autores que consideramos nesta seção não há nenhuma referência explícita a Bridgman, nem a sua forma de instrumentalismo. Nossa pretensão é mostrar que ambos autores concluem apressadamente, ainda que por caminhos diferentes, que a "significação" da matemática transfinita é instrumental, no sentido de os enunciados transfinitos serem apenas instrumentos para deduzir enunciados corretos do ponto de vista do conteúdo.

Mas as interpretações consideradas neste capítulo compartilham também, segundo nos parece, uma visão da história da filosofia um tanto distorcida. Tal distorção provém de atribuir ao positivismo lógico e/ou posturas relacionadas uma difusão no ambiente intelectual alemão da época que dista da verdade histórica. Na Seção 5.4. esquematicamente pretendemos mostrar que, além dos matizes de natureza instrumentalista que os três intérpretes considerados neste capítulo levam a primeiro plano, é necessário lembrar outras problemáticas de muito maior difusão para a época. Tais problemáticas parecem-nos confirmar, de outra perspectiva, que a questão central para Hilbert é a maneira de evitar posturas em relação à matemática que ele entende como subjetivistas.

5.1. Hilbert e o empirismo lógico

Se na literatura cada escritor cria seus precursores, com os filósofos ou com as concepções filosóficos acontece algo semelhante. O empirismo lógico não é uma excepção. No seu célebre manifesto, assinado por Carnap, Neurath e Hahn, como precursores do Círculo de Viena são citados, entre muitos outros, Epicuro e Mill, Leibniz e Spencer, Feuerbach e Poincaré, Marx e Hilbert. Ora, na sua coletânea sobre o empirismo lógico, adverte-nos Ayer que tal variedade não deve causar alarmes, pois os autores mencionados são incluídos por algum aspecto de sua obra, e não pela obra tomada em conjunto. Marx, por exemplo, é incluído pelo seu acesso científico ao estudo da história, e não pelo seu materialismo dialético. Hilbert é incluído pelos seus trabalhos em axiomática. Ayer não nos diz, por certo, se há algum aspecto da obra de Hilbert pelo qual não possamos considerá-lo um precursor[182].

A mencionada advertência de Ayer é ignorada na literatura recente sobre o *backround* filosófico do Programa de Hilbert. Pretende-se que Hilbert não seja já apenas um precursor do empirismo lógico no sentido acima mencionado, senão que sua obra toda está envolvida no espírito do Círculo de Viena e/ou posturas mais ou menos afins, como o operacionalismo ou o instrumentalismo. Nos limitaremos nesta seção a discutir se a "filosofia subjacente" ao Programa de Hilbert pode ser olhada como conseqüente com as posturas do empirismo lógico, deixando para as seções 5.2. e 5.3. o exame das interpretações operacionalista e/ou instrumentalista.

O empirismo lógico teve entre seus objetivos principais a rejeição do conceito de juízo sintético a priori. Nada mais natural então que socavar a base mesma desse conceito, isto é, a concepção da matemática como conhecimento sintético a priori. Tal estratégia, por uma lado, encontra sua expressão positiva no "dogma" do empirismo: as verdades analíticas são a priori e, reciprocamente, as verdades a priori são analíticas. Não há, portanto, lugar para os juízos sintéticos a priori kantianos. Por outro lado, como escreve Hempel, o empirismo lógico acrescenta o "critério empirista do significado cognoscitivo", segundo o qual "concede-se significado

[182] Cfr. A. Ayer (org). El positivismo lògico, p. 10.

cognoscitivo somente às orações para as quais -a menos que sejam analíticas ou contraditórias- seja concebível uma prova empírica"[183]. Como subproduto temos que, admitido que nenhuma oração com conteúdo fatual - a saber, com significado empírico- pode ser necessáriamente verdadeira, a necessidade das verdades lógicas e matemáticas implica que elas não têm conteúdo fatual[184].

Ora, tais teses são para nós as que precisamente fazem discutível relacionar o pensamento de Hilbert com o empirismo lógico. Em primeiro lugar, porque para Hilbert as verdades matemáticas são irredutíveis tanto à lógica quanto a "verdades pelo significado dos termos envolvidos". Em outras palavras, não são analíticas nos dois sentidos usuais deste termo. Em segundo lugar, porque para Hilbert há verdades matemáticas que têm conteúdo fatual (informativas) e que, simultaneamente, são necessárias. Trataremos separadamente destas duas questões a seguir.

Comecemos por ressaltar que, a diferença do empirismo lógico, e de Frege e Russell inclusive, tanto para os intuicionistas quanto para Hilbert a lógica não é "gnosiologicamente indiferente": a lógica deve ser fundamentada no seu domínio de aplicação. Ora, para Hilbert não se trata de abandonar a lógica clássica, como pretende o intuicionismo, senão de oferecer uma justificação de natureza, digamos, gnosiológica. Em geral, o conhecimento matemático exige extrapolações. Para o caso que nos ocupa, a extrapolação consiste nos enunciados que constituem o que denominamos lógica clássica. Assim, como vimos no capítulo anterior, da perspectiva da metamatemática as leis lógicas clássica são entendidas como enunciados ideais e são sistematizadas, como a teoria matemática de que se trate, num sistema formal. A lógica clássica, enquanto parte constitutiva, e não apenas subjacente de uma teoria matemática, está sujeita também à demonstração de consistência. Uma prova de consistência fornece, então, uma fundamentação das diferentes extrapolações constitutivas da matemática clássica.

Por que esta inversão da visão tradicional da lógica como disciplina subjacente? Segundo vimos no Capítulo 3, já em 1904 Hilbert considerava que o problema que depois virá ser chamado de "o problema dos fundamentos" não está na lógica senão no seu uso indiscriminado sobre conceitos abstratos arbitrários. Na medida em que a lógica restringe-se ao âmbito circunscrito do "ponto de vista finito", como vimos no Capítulo

---

183 Hempel, C. *Problemas y cambios de en el criterio empirista de significado*, p.115.
184 Cfr. A. Ayer. Lenguage, verdad y lógica, cap. IV.

4, ela não é problemática. Hilbert obtém nos anos 20 então uma justificação indireta de porque a conjunção entre conceitos matemáticos e lógica é problemática e, conseqüentemente, porque é necessário desenvolver a lógica juntamente com a matemática. Como a matemática clássica é essencialmente transfinita e, em particular, incorpora entre seus procedimentos as extrapolações que denominamos leis lógicas clássicas -perfeitamente confiáveis no âmbito do finito, mas não quando extrapoladas ao infinito- então também as leis lógicas, em conjunção com a teoria matemática de que se trate, devem ser submetidas à prova de não contradição.

Com efeito, a lógica, diz Hilbert, não nos traz problemas no trato com objetos ou eventos do mundo real, assim como em geral ela não nos traz problemas dentro dos limites do chamado "ponto de vista finito". Nesta aplicação restringida, a lógica, ou melhor, o raciocínio lógico contentual, não conduz ao erro. Escreve Hilbert em *Sobre o infinito*: "Pois somente conduz-nos ao erro quando o utilizamos com formações conceituais arbitrárias abstratas, pois aplicamos o raciocínio contentual inclusive de maneira inadmissível, isto é, não consideramos, evidentemente, as condições necessárias para a aplicação do raciocínio lógico contentual." [185].

Assim, os paradoxos na teoria de conjuntos são causados por falta de precaução e a solução de Zermelo, como já dissemos, mostra como os paradoxos podem ser em princípio evitados adotando medidas adequadas, via restrições de existência na axiomática, *sem* modificar a chamada lógica clássica. O problema, então, para Hilbert, é justificar as leis lógicas clássicas, as quais carecem de significado do ponto de vista finito, mas não porque as mesmas sejam causa de paradoxos: os paradoxos são causados pelo uso de conceitos "arbitrariamente abstratos", sem as precauções necessárias. Em relação a confiabilidade da lógica escreve Hilbert em *Sobre o infinito*:

" Já Kant ensinou - e, por certo, constitui uma parte significativa de sua teoria - que a matemática dispõe de um conteúdo assegurado independentemente de toda lógica e por isso nunca pode ser fundamentada pela lógica só, e por isso também os esforzos de Frege e de Dedekind deviam fracasar. Ainda mais, algo dado na representação é como precondição para a utilização de raciocínios lógicos e para o funcionamento das operações lógicas: certos objetos concretos extra-lógicos que estão presentes evidentemente como vivência

[185] Hilbert, D. *Sobre o infinito*, p. 275: "Getäuscht hat es nur dann, wenn wir beliebige abstrakte Begriffsbildungen hinnahmen; wir haben dann das inhaltliche Schliessen eben unzulässig angewandt, d.h. wir haben offenbar notwendige Vorbedingungen für die Anwendung inhaltlichen logischen Schliessens nicht berücksichtigt."

imediata, previamente a todo pensamento. Para que o raciocínio lógico seja confiável, esses objetos devem deixar-se ver, de um relance só, completamente em todas as suas partes; e suas manifestações, suas diferenças, sua seriação recíproca ou sua concatenação, são dadas imediata e evidentemente, ao mesmo tempo que os objetos, como algo que não se deixa mais reduzir a alguma outra coisa ou que nem precisa de uma tal redução." [186]

A primeira frase do texto citado mostra, de maneira contundente, que a matemática para Hilbert não é analítica num dos principais sentidos que tem o conceito de analítico, isto é, o conceito fregueano de dedução a partir de leis lógicas e definições. Podemos, seguindo Pap, distinguir dois conceitos de analítico: aquelas verdades que são *estritamente analíticas* e aquelas verdades que são *amplamente analíticas*. O conceito de analítico que até agora temos usado é o estrito: além das leis lógicas, verdades que são deduzíveis de leis lógicas, seja *diretamente* por substituição das variáveis ligadas de uma lei lógica por constantes descritivas, seja *indiretamente* por definições eliminativas adequadas, isto é, definições que permitam a eliminação de termo definido. Denominamos às primeiras *logicamente verdadeiras*, às segundas *definicionalmente verdadeiros*[187].

A afirmação constante da irreducibilidade dos axiomas matemáticos à lógica parece-nos suficiente para descartar que, para Hilbert, a matemática seja analítica, no sentido de estritamente analítico.

O segundo conceito de analítico, que não é equivalente com o anterior, é usado freqüentemente pelo positivismo lógico. Seguindo Pap, o denominamos amplamente analítico: verdadeiro em função do significado dos termos envolvidos. Neste segundo significado de "analítico" não há referência às leis lógicas, de forma tal que são amplamente analíticas: a) as leis lógicas, b) as verdades a priori que nem são leis lógicas nem podem ser deduzidas de leis lógicas com a ajuda de definições eliminativas adequadas. Obviamente, neste segundo

---

[186] Hilbert, D. *Sobre o infinito*, p. 275: "Schon Kant hat gelehrt -und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre-, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern mussten. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, ausserlogische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schliessen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen, und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf."

[187] Cfr. Pap, A. *Semántica y verdad necesaria*, cap. V, pp. 140-141.

conceito de analítico é irrelevante se o programa logicista de redução da matemática à lógica pode ou não ser levado a cabo.

Ora, o ponto de partida do empirismo lógico é essencialmente diferente ao de Hilbert. Com efeito, em primeiro lugar é lingüístico, enquanto que para Hilbert se trata de conceitos, isto é, o ponto de partida é o pensamento. Em particular, deve-se resistir à tendência de interpretar que os conceitos de que fala Hilbert sejam o *significado* de termos da linguagem. Em segundo lugar, há no empirismo lógico uma análise prévia da linguagem em termos de símbolos lógicos e símbolos extra-lógicos ou descritivos tal que, se uma ou várias afirmações têm significado, então o significado é preservado se a partir das mesmas são construídas outras afirmações pela aplicação de símbolos lógicos.

Em Hilbert encontramos um procedimento implícito de análise diferente, porque seu objetivo é diferente. Hilbert pretende substituir a apelação a uma instância de fundamentação de métodos e conceitos matemáticos que entende como subjetiva -a intuição dos construtivistas- por uma instância entendida como intersubjetiva, a saber, a percepção. A confiabilidade da lógica, como vimos na passagem citada, repousa em geral sobre objetos extra-lógicos, dados na percepção. Mas, antes de tratar a questão da confiabilidade da lógica, Hilbert introduz os conceitos e afirmações que se circunscrevem ao ponto de vista finito, isto é, os conceitos e afirmações cuja confiabilidade é garantida também através da instância intersubjetiva da percepção. Assim, é claro que os conceitos matemáticos finitários não são para Hilbert o significado de termos como "2", "3", "5" e "+" de maneira tal que se trate, como para Hahn, de "que significamos o mesmo com "2 mais 3" que com "5", voltando aos significados de "2", "3", "5", "+", e fazendo transformações tautológicas até que vemos precisamente que "2 + 3" significa o mesmo que "5"."[188].

Com efeito, a estratégia de Hilbert é primeiro circunscrever conceitos e afirmações finitárias que não contêm operações lógicas; d*epois* examinar se o uso das operações lógicas levam-nos além do "ponto de vista finito", isto é, além daquilo cuja confiabilidade pode ser garantida pela percepção. Assim, por exemplo, como mostramos no capítulo anterior, uma afirmação matemática A pode ter significado (=confiabilidade), e não tê-

[188] Hahn, H., *Logik, Mathematik und Naturerkennen*, doravante citado *Lógica, Matemática e Conhecimento da natureza*, p. 158: "Dass wir aber mit 2 + 3 dasselbe meinen wie mit 5, das bringen wir uns zum Bewusstsein, indem wir darauf zurückgehen, was wir mit 2, mit 3, mit 5, mit + meinen, und solange tautologisch umformem, bis wir eben sehen, dass wir mit 2 + 3 dasselbe meinen wie mit 5."

lo sua negação. Esta conclusão já é inaceitável para um empirista lógico, na medida em que, dada a distinção entre símbolos lógicos e extra-lógicos, se uma afirmação tem significado, então também sua negação tem significado. Em geral, o significado é "fechado" pelas operações lógicas.

Ora, do fato de que uma afirmação **A** possa ter significado e não tê-lo sua negação decorre que $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ carece de significado. Logo, afirmar que uma lei lógica é uma afirmação verdadeira pelo significado dos termos envolvidos, analítico em sentido amplo, seria um absurdo, pois no exemplo considerado nem sequer tem significado. Podemos então, em princípio, descartar que a concepção da matemática de Hilbert possa ser qualificada de analítica no segundo dos sentidos mencionados, pois há afirmações matemáticas que têm sentido, mas não sua negação. Em particular, decorre do anterior que há casos em que uma lei lógica carece de significado

Examinemos agora a segunda questão. Assinalamos acima que para o empirismo lógico qualquer oração com conteúdo fatual não pode ser necessariamente verdadeira e que as verdades lógicas e matemáticas carecem de conteúdo fatual. Por exemplo, num artigo já citado, Hahn escreve: "A lógica não trata, em modo algum, da totalidade dos objetos, não trata de objetos em absoluto, senão *unicamente da maneira em que falamos acerca dos* objetos; a lógica surge com a linguagem. A certeza e validade universal, ou, melhor dito, a irrefutabilidade da proposição lógica deriva precisamente do fato de que não diz nada sobre nenhum objeto"[189]. Uma análise semelhante faz Hahn da matemática: "As proposições da matemática são da mesma classe que as proposições da lógica: são tautológicas, nada dizem em absoluto acerca de objetos, senão que se referem apenas à maneira em que queremos falar deles."[190]

Com efeito, para o empirismo lógico os enunciados lógicos e matemáticos nada dizem acerca da realidade e todo enunciado acerca da realidade é uma hipótese que nunca pode ser considerada completamente certa. A necessidade dos enunciados lógicos e matemáticos é possível, precisamente, por eles carecerem de referência à realidade. Mas a leitura de *Conhecimento da natureza e lógica* mostra manifestamente que Hilbert

---

189 Hahn, H. *op. cit.*, p.150: "die Logik handelt keineswegs von sämtlichen Gegenständen, sie handelt überhaupt nicht von irgendwelchen Gegenständen, sondern *sie handelt nur von der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen*; die Logik entsteht erst durch die Sprache. Und gerade daraus, dass ein Satz der Logik überhaupt nichts über irgendwelche Gegenstände aussagt, fliesst seine Sicherheit und Allgemeingültigkeit oder, besser gesagt, seine Unwiderleglichkeit."

190 *Ibid.*, p. 158: "Die Sätze der Mathematik sind von ganz derselben Art, wie die Sätze der Logik: sie sind tautologisch, sie sagen gar nichts über die Gegenstände aus, von denen wir sprechen wollen, sondern sie handeln nur von der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen wollen."

rejeita explicitamente esta tese central do empirismo lógico: a impossibilidade de um conhecimento a priori sobre a realidade. Ora, não por acaso citamos como exemplo da postura do empirismo lógico o artigo *Lógica, matemática e conhecimento da natureza* de H. Hahn . Ainda que não o possamos provar de maneira concludente, acreditamos que o artigo de Hahn é (parcialmente) uma réplica a *Conhecimento da natureza e lógica* de Hilbert, e não simplesmente pela óbvia semelhança dos títulos.

Ambos artigos começam levantando o problema das relações entre pensamento e experiência. Em relação às descobertas científicas recentes (para os anos 30) Hilbert escreve: "E ali, a teoria e a praxe, o pensamento e a experiência, mostram-se entrelaçados profundamente. Às vezes, toma a dianteira a teoria; outras, o experimento." [191] Lemos na (conjectural) réplica de Hahn: "Deste modo, acaso a concepção habitual seja, em termos gerais, a seguinte: não temos mais do que duas fontes de conhecimento, as quais concebemos como contrapostas, para compreender "o mundo", "a realidade" da qual "formamos parte" nós mesmos: a *experiência*, ou a *observação*, por um lado, e o *pensamento* pelo outro." [192]

Para Hahn o fracasso do racionalismo e do empirismo levou progressivamente a aceitar duas fontes de conhecimento legítimas: "O *pensamento* apreende as leis mais gerais de todo ser, tal como as encontramos formuladas, por exemplo, na lógica e na matemática; a *observação* proporciona os detalhes para rechear esse marco." [193] Mas este hiperdimensionamento do pensamento é inaceitável: "A idéia de que o pensamento é um instrumento para apreender algo mais acerca do mundo que aquilo que é observado, para adquirir o conhecimento de algo que tenha validade absoluta sempre e em todo lugar do universo, um instrumento para captar as leis gerais de todo ser, parece-nos completamente misteriosa." [194]

Justamente, esta concepção inaceitável para um empirista lógico é a que aceita Hilbert em *Conhecimento da natureza e lógica*. Hilbert apresenta exatamente um *dualismo* entre pensamento e experiência, cuja

[191] Hilbert, D. *Conhecimento da natureza e lógica*, p. 378-379: "Und darin zeigen sich beständig Theorie und Praxis, Denken und Erfharung aufs innigste verschlugen. Bald eilt die Theorie, bald das Experiment voraus"
[192] Hahn, H. *op. cit.*, p. 142: "Die übliche Auffassung ist nun wohl, ganz schematisch gesprochen, die: wir haben eben zwei Erkenntnisquellen, durch die wir "die Welt", "die Realität", in die wir "hineingestellt" sind, der wir "gegenübergestellt" sind, erfassen: die *Erfahrung*, die *Beobachtung* einerseits, das *Denken* andererseits"
[193] *Ibid.*, p. 147: "Das *Denken* erfasst die allgemeinsten Gesetze alles Seins, wie sie etwa in Logik und Mathematik niedergelegt sind; die *Beobachtung* füllt diesen Rahmen im einzelnen aus."
[194] *Ibid.*, p. 149: "Die Auffassung, wir hätten im Denken ein Mittel zur Hand, mehr über die Welt zu wissen, als beobachtet wurde, etwas zu wissen, was immer und überall in der Welt unbedingte Geltung haben muss, ein Mittel, allgemeine Gesetze alles Seins zu erfassen, scheint uns durchaus mysteriös."

coincidência deve explicar-se. Um primeiro aspecto a salientar desta coincidência tem a ver com o infinito: "Dissemos: o infinito não está em nenhuma parte realizado; não está à nossa disposição na natureza nem pode ser admitido com fundamento em nosso pensamento sem precaução especial. Aqui vejo eu um paralelismo muito importante entre pensamento e natureza, entre teoria e experiência."[195] Em outras palavras, pemsamento e realidade são finitos.

Outro aspecto a destacar desta coincidência é o paralelismo seguinte: "nosso pensamento procede da unidade e procura a unidade; observamos a unidade dos elementos na matéria e constatamos em toda parte a unidade das leis da natureza"[196]. Mas isto não implica, por exemplo, que possamos obter apenas através do pensamento todo o saber físico: "Em contraposição a Hegel, reconhecemos que as leis do universo não podem ser obtidas de nenhum outro modo senão que através da experiência." [197] Ora, após apresentar o problema do pensamento e a experiência em termos de um dualismo - cuja coincidência é assimilada à hharmonia preestabelecida - e negado que possamos obter apenas através do pensamento o saber físico Hilbert escreve: "Quem a pesar disto queira negar que as leis do universo procedam da experiência deve afirmar que, além da dedução e a experiência, há uma terceira fonte de conhecimento." [198]

O que devemos entender por tal terceira fonte de conhecimento? Hilbert entende, justamente, que o pensamento finito é uma terceira fonte de conhecimento, a parte da teoria kantiana do a priori que fica quando de tal teoria são eliminados seus resíduos antropológicos. Escreve Hilbert:

"De fato, há filósofos - e Kant é o representante clássico desse ponto de vista - que têm afirmado que além da lógica e da experiência temos um conhecimento a priori exato sobre a realidade. Admito que já na construção do entrelaçado teórico são necessários pontos de vista a priori e que estes estão sempre subjacentes à realização de nosso conhecimento. Creio que o conhecimento matemático, em última instância, repousa

---

[195] Hilbert, D. *Conheciemento da natureza e lógica*, p. 381: "Wir sahen: das Unendliche ist nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden noch als Grundlage in unserem Denken ohne besondere Vorkehrungen zulässig. Hierin schon erblicke ich einem wichtigen Parallelismus von Natur und Denken, eine grundlegende Übereinstimmung zwischen Erfharung und Theorie."

[196] *Ibid.*, p. 381: "unser Denken geht auf Einheit aus und sucht Einheit zu bilden; wir beobachten die Einheit des Stoffes in der Materie, und wir konstatieren überall die Einheit der Naturgesetze."

[197] *Ibid.*, p. 382: "Im Gegensatz zu HEGEL erkennen wir, dass die Weltgesetze auf keine andere Weise zu gewinnen sind als aus der Erfahrung."

[198] *Ibid.*, p. 382: "Wer trotzdem leugnen will, dass die Weltgesetze aus der Erfahrung stammen, muss behaupten, dass es ausser der Deduktion und ausser Erfahrung noch eine dritte Erkenntnisquelle gibt."

sobre uma classe de conhecimento intuitivo desse tipo e que precisamos para a construção da teoria de números um conhecimento intuitivo a priori exato." [199]

Não fossem suficientes os argumentos que desenvolvemos para diferenciar o pensamento de Hilbert do empirismo lógico, esta constatação seria por si só suficiente: há um conhecimento necessário com conteúdo fatual. Através das passagens citadas, vemos manifestamente que se trata de duas posições antagônicas em relação ao pensamento e a observação. Escreve Hahn na primeira seção de seu artigo:

"De onde obtém nosso pensamento essa espécie de poder executivo para obrigar a uma observação a ter este e não outro resultado? Por que o que obriga ao nosso pensamento vai compelir também o curso da natureza?. *Haveria* /nossos grifos/ *necessariamente que acreditar em alguma milagrosa hharmonia preestabelecida, entre o curso de nosso pensamento e o curso do universo, idéia que é profundamente mística e, em definitiva, teologizante.*" [200]

Justamente, "teologizante" tem que parecer a um empirista lógico a postulada coincidência entre pensamento e natureza que propõe Hilbert. E finaliza Hahn a primeira seção da seguinte maneira: "Não há maneira de sair desta situação /adição nossa: o recurso à harmonia preestabelecida/ senão é voltando ao ponto de vista puramente *empírico*, à opinião de que a observação é a *única* fonte de conhecimento dos fatos; enquanto aos fatos, não há conhecimento *a priori*, *não há um* a priori *"material"*."[201]

A continuação de negar a existência de um a priori "material", Hahn desenvolve, nas seções segunda e terceira do seu artigo, sua concepção da lógica e a matemática como analíticas em sentido amplo, à qual

---

199 *Conhecimento da natureza e lógica.*, p. 383: "Es haben in der Tat Philosophen -und KANT ist der klassische Vertreter diesses Standpunktes -behauptet, dass wir ausser der Logik und der Erfahrung noch a priori gewisse Erkenntnisse über die Wirklichkeit haben. Nun gebe ich zu, dass schon zum Aufbau der teoretischen Fachwerke gewisse apriorische Einsichten nötig sind und dass stets dem Zustandekommen unserer Erkenntnisse solche zugrunde liegen. Ich glaube, dass auch die matematische Erkenntnis letzen Endes auf einer Art solcher anschaulicher Einsicht beruht."

200 Hahn, H. *op. cit.*, p. 149: "Woher sollte unser Denken eine Exekutivgewalt nehmen, durch die es eine Beobachtung zwänge, so und nicht anders auszugehen? Warum sollte das, was für unser Denken zwingend ist, auch für den Ablauf der Welt zwingend sein? Es bliebe nur übrig, an eine wundersame präestabilierte Harmonie zwischen dem Ablauf unseres Denkens und dem Ablauf der Welt zu glauben, eine Vorstellung, die reichlich mystisch und in letzter Linie theologisierend ist."

201 *Ibid.*, p. 149: "Aus dieser Situation zeigt sich kein anderer Ausweg als Rückkehr zu einem rein *empiristischen* Standpunkt. Rückkehr zur Auffassung, dass die einzige Quelle eines Wissens über Tatsachen die Beobachtung ist: Es gibt kein Wissen a priori über Tatsächliches, *es gibt kein 'materiales' a priori.*"

fizemos referência. Ora, depois de Hahn expor uma concepção da matemática e a lógica *diametralmente oposta* a que acabamos de ver em Hilbert, na seção final das dedicadas à lógica e à matemática escreve:

"Não! Nosso pensamento formal não pode captar realidade alguma, o pensamento formal não nos pode informar acerca de acontecimento nenhum do mundo, só pode transformar tautologicamente o dito." [202]

Ora, Hilbert reconhece, como vimos, a existência de uma terceira fonte de conhecimento, a qual permite um conhecimento do mundo porque o mundo, como tem mostrado a pesquisa científica, é de natureza "finita". A coicincidência entre pensamento finito e mundo finito permite obter a partir do pensamento conhecimento que não precisa agora do auxílio da experiência. Isto é uma forma do a priori "material" negado por Hahn e uma apelação explícita a ideias que qualifica de teologizantes e místicas. Ora, Hilbert parece pensar que há um elemento formal comum entre o pensamento e a realidade, e que por esta razão a matemática é justamente a ponte que os une.

Hilbert recorre claramente a uma hipótese *ad hoc* para explicar as relações entre matemática e realidade, uma harmonia preestabelecida que, nos esclarece, é diferente da postulada por Leibniz. Por certo, não é nem na harmonia preestabelecida nem no tema "Possível implica existente" que encontraremos um eco do pensamento de Leibniz em Hilbert, senão, como vimos nos capítulos precedentes, nas relações que para ambos autores existem entre pensamento, formalismo e intersubjetividade.

A referência a Kant é enganosa, pois é claro que sem o conceito de intuição pura não cabe falar de sínteses a priori e, portanto, afirmar que o pensamento finito é sintético a priori (entendido como conhecimento (não analítico) a priori (necessário) da realidade) é simplesmente uma (má) metáfora, no sentido de verdades sobre a realidade que podem obter-se através de tal terceira fonte de conhecimento. Em última instância, o que podemos dizer é que Hilbert força uma interpretação de Kant na qual a intuição não é o *locus* que possibilita o enlace de conceitos num juízo sintético a priori, senão uma terceira fonte de conhecimento, que não é mais que uma maneira diferente de afirmar a irredutibilidade da matemática seja à lógica seja à verdade pelo significado dos termos envolvidos. Uma posição que, ainda que com matizes diferentes, Hilbert compartilhava com Kronecker e Poincaré.

---

[202] Hahn, H. *op. cit.*, p. 160: "Nein! Keinerlei Realität kann unser Denken erfassen, von keiner Tatsache der Welt kann uns das Denken Kunde bringen, es bezieht sich nur auf die Art, wie wir über die Welt sprechen, es kann nur Gesagtes tautologisch unformen."

Mas, o que nos parece mais importante é que estas afirmações de Hilbert nos deveriam alertar não apenas sobre a procedência de interpretações que pretendam relacioná-lo com o empirismo lógico, senão também sobre a procedência daquelas interpretações que o pretendem relacionar com o operacionalismo e/ou o instrumentalismo. Trataremos da interpretação operacionalista na seção seguinte.

5.2. Uma interpretação operacionalista

Hilbert, então, atribui à matemática e à lógica notas que fazem suspeitas, segundo nos parece, as interpretações que procuram no empirismo lógico o *backround* filosófico do programa hilbertiano. E fazem também suspeitas as interpretações que atribuem a Hilbert teses de natureza operacionalista ou instrumentalista. Ora, se aceitamos a validade da distinção entre analítico-apriori e sintético-a posteriori, no sentido de que a teoria do conhecimento deve optar entre distinguir ciências analíticas e sintéticas *ou* considerar que *todas* as ciências são sintéticas, então o Programa de Hilbert deveria ser olhado como uma variante de "empirismo" mais ou menos radical.

Com efeito, decorre da segunda opção uma interpretação *instrumentalista* da concepção hilbertiana da matemática. Ora, o instrumentalismo pode ser entendido em dois sentidos relacionados: a) num sentido a verdade matemática aparece em conexão com a eficácia da matemática na física; b) noutro sentido, os conceitos matemáticos são instrumentos criados com a finalidade de manipular a experiência, no caso, a experiência matemática, entendida como experiência relativa, por exemplo, a seqüências de sinais.

No que diz respeito ao primeiro sentido de instrumentalismo, A. R. Raggio[203] atribui a M. Detlefsen o seguinte argumento: como é possível mostrar por métodos finitários a consistência de segmentos iniciais finitos da aritmética, da análise e da teoria de conjuntos, e como em qualquer aplicação física apenas utilizam-se um número finito de teoremas, então o ponto de vista finito estaria justificado. Tal argumento corresponde ao primeiro sentido de instrumentalismo que nos destacamos acima. Ora, a leitura de *Conhecimento da natureza e lógica* é também instrutiva em relação a importância que Hilbert assinala à relação entre matemática e física.

Como em *Pensamento axiomático*, Hilbert destaca em *Conhecimento da natureza e lógica* a importância dessa relação. Porém, a sua aplicação na física não justifica à matemática. Não há, sem dúvidas,

[203] Cfr. Raggio, A. "El cincuentenario de los *Grundlagen der Mathematik* de Hilbert e Bernays", p. 207.

instrumentalismo em Hilbert no sentido da justificação da matemática pelas suas aplicações na ciência natural. Muito pelo contrário, como vimos no Capítulo 3, a primeira é condição de possibilidade da segunda: a consistência como critério de aceitabilidade de uma teoria vale para as ciências em geral. Em particular, a consistência de uma teoria física é provada mediante uma prova de consistência relativa.

No segundo sentido de instrumentalismo, às vezes fala-se, por exemplo, de operacionalismo *à la* Bridgman em Hilbert. Marcus Giaquinto indica, sem desenvolver, os possíveis pontos de contato entre Hilbert e Bridgman[204]. Mas, antes de examinar as teses de Giaquinto parece-nos conveniente apresentar as características do pensamento de Bridgman em contraponto com o exame realizado no capítulo anterior das idéias de Hilbert.

A concepção do significado de Bridgman, como exposta em *A natureza da teoria física*[205], estabelece como condição que um conceito seja caraterizado através das operações levadas a cabo quando o conceito é utilizado. Na concepção do significado de Bridgman, o significado operacional dos conceitos envolvidos numa afirmação, *inclusive* os conceitos lógicos, determina o significado operacional da própria afirmação. Isto marca uma diferença importante entre o empirismo de Bridgman e o empirismo lógico, se associamos o conceito de "significado operacional" com o conceito de "verificação" ou "significação empírica" do empirismo lógico.

Com efeito, como assinalamos na seção anterior, temos no empirismo lógico uma análise prévia dos termos da linguagem que distingue entre termos lógicos e extra-lógicos, de maneira tal que é apenas às afirmações em que aparecem essencialmente termos extra-lógicos às quais se aplica o critério de significação empírica. As afirmações em que os termos extra-lógicos ocorrem vacuamente não têm conteúdo fatual e o critério de verificação ou de significação empírica não é, por hipótese, aplicável.

Para Bridgman, quando se trata de um conceito físico como tempo ou comprimento, o que devemos fazer é examinar as operações de medir o tempo com relógios ou medir comprimentos com uma régua. Dado este contexto, em contraposição ao empirismo, examina-se *depois* qual o significado operacional da lógica. Qual é o significado operacional dos conceitos lógicos? Examine-se, por exemplo, o uso em física do princípio de terceiro excluído[206]. Concebido operacionalmente, tal princípio estabelece que, dado um objeto, certas

---

204 Giaquinto, M. "Hilbert's Philosophy of Mathematics".
205 Bridgman, P.W. *La naturaleza de la teoría física.*
206 Cfr. Bridgman, P.W. *Op. cit.*, cap. IV.

operações permitem determinar se o objeto tem a propriedade A; se não tem a propriedade, então há outras operações para determinar $\sim A$.

Ora, a afirmação $A \vee \sim A$, segundo Bridgman, só pode ser correta se existe uma relação entre as operações utilizadas para verificar A e as operações utilizadas para verificar $\sim A$. A relação mais simples que poderia existir entre tais operações seria que, por exemplo, a determinação de $\sim A$ consistisse meramente em observar o fracasso da determinação de A. Porém, situações operacionalmente elementares mostram que essas relações simples não se dão nas afirmações que envolvem processos físicos. Determinar, por exemplo, se uma maça é verde ou não é verde seria, por causa da imprecisão de instrumentos e falhas do observador, um tal exemplo elementar. Isto descarta como sem significado operacional no âmbito físico o princípio de terceiro excluído.

Bridgman examina então se o princípio vale no âmbito do que pensamos ou falamos, isto é, segundo Bridgman, no âmbito em que os "objetos" não apresentam contornos difusos. Considere-se, diz Bridgman, as afirmações em geral e examine-se sob que condições o conceito de verdade pode sempre ser aplicado de forma tal que toda afirmação seja verdadeira ou falsa. Se a afirmação é uma afirmação universal, um contra-exemplo mostra que tal afirmação é falsa. Se o enunciado é universal e sobre um conjunto finito de objetos, não achar um contra-exemplo permite sua determinação como verdadeiro.

Porém, tratando-se de um conjunto infinito, o conceito "verdadeiro" perde o significado operacional primitivo acima descrito. Com efeito, se o conjunto é tal que sua definição exclui qualquer objeto que seja um contra-exemplo da afirmação universal, então terceiro excluído se aplica. Ora, um conjunto assim definido pode ser finito ou infinito. Logo, para conjuntos finitos, "verdadeiro" tem dois significados operacionais diferentes porém equivalentes, enquanto que para conjuntos infinitos tem apenas um significado operacional.

Uma afirmação do tipo "Existe no desenvolvimento decimal de π a seqüência 0123456789" apresenta problemas semelhantes. Se alguém apresenta tal seqüência, diríamos que a afirmação é verdadeira. Por outro lado, se alguém apresenta uma demonstração de que supor a existência da seqüência leva a contradição diríamos que a afirmação é falsa. Ora, como não se conhecem procedimentos que resultem em uma das duas opções, dizer que a afirmação sobre a existência da mencionada seqüência é verdadeira ou falsa carece de sentido. Portanto, ambos argumentos permitem concluir que o princípio de terceiro excluído carece de significado operacional.

Vemos então, em primeiro lugar, que a análise de Bridgman comparte com os intuicionistas e Hilbert o que podemos denominar rejeição do caráter de disciplina subjacente a-problemática da lógica. Por caminhos diferentes aos de Hilbert, chegamos então ao seguinte: as leis lógicas clássicas não admitem em geral uma interpretação operacional. Nisto Hilbert coincidiria com Bridgman, se traduzimos "sentido operacional" por "sentido do ponto de vista finito". Hilbert, como vimos no capítulo anterior, coincidiria também com Bridgman, sob a mesma tradução, em que não é possível oferecer uma interpretação operacional a *todos* os conceitos de uma teoria; em particular, aos conceitos lógicos.

Com efeito, Bridgman destaca que não podemos exigir que *todo* conceito físico seja caraterizado através de operações físicas. No entanto, quando apenas usamos conceitos assim caraterizados, não haverá necessidade de ulterior retificação de tais conceitos[207]. Ora, como dissemos, Hilbert também não pensava, assim como Bridgman em relação aos conceitos físicos, que a todos os conceitos matemáticos possa (e deva-se) fornecer-se uma interpretação operacional. Para Hilbert, mesmo na física, apenas algumas conseqüências das hipóteses -os chamados enunciados observacionais na terminologia da época- podem ser verificadas.

No entanto, enquanto que Bridgman está disposto a abandonar a lógica clássica[208], Hilbert, como vimos no capitulo anterior, intenta conservá-la. Ora, para Bridgman a lógica e a matemática são ciências experimentais. Num escrito posterior, lemos inclusive que aplicar aos fatos o termo "auto-consistentes" é uma generalização sem fundamento: "tudo o que podemos assegurar é que nenhuma experiência no passado tem sido auto-contraditória, porém, não temos nenhuma certeza absoluta sobre o futuro."[209]. Em *Sobre o infinito*, Hilbert qualifica uma afirmação desse tipo como uma necedade: afirmações podem ser contraditórias, não os fatos[210].

---

[207] Cfr. Bridgman, P.W. *Op. cit.*, cap. II.

[208] Não fica claro porque Bridgman não aplica o mesmo critério para a lógica que para a física, no sentido de conceder que nem todo termo pode ter significado operacional.

[209] Cfr. Bridgman, P.W. "A Physicist's Second Reaction To MengenLehre", p. 107.

[210] *Sobre o infinito*, p. 265: "Ein anderer Autor scheint Widersprüche -Gespenstern gleich- auch dann zu erblicken, wenn überhaupt niemand etwas behauptet hat, nämlich in der konkreten Sinnenwelt selbst, deren "widerspruchsfreies Funktionieren" als eine besondere Voraussetzung angesehen wird. Ich habe allerdings geglaubt, dass nur Aussagen und Annahmen, soweit sie durch Schlüsse auf Aussagen führen, einander

Com estas observações, que utilizaremos a continuação, podemos agora considerar as teses específicas de Giaquinto que interessam para o nosso trabalho. São elas: a) que o Programa de Hilbert era uma resposta a crise nos fundamentos da matemática; b) que a crença na realizabilidade do seu programa não era irracional em função do apogeu do positivismo no período.

No que diz respeito à primeira tese, podemos coincidir com Giaquinto em que o Programa de Hilbert não é uma reação ao intuicionismo de Brouwer e, em algum sentido, também podemos coincidir em que o Programa era uma reação à incerteza epistemológica acerca do infinito "acredite-se ou não na doutrina ontológica de que os conjuntos infinitos e números não existem"[211]. Os paradoxos, acrescenta Giaquinto a seguir, aumentam essa incerteza e a distinção cantoriana entre totalidades consistentes e inconsistentes aparecia como insuficiente. O Programa de Hilbert, afirma Giaquinto, é a resposta ao desafio de uma nova fundamentação da análise sem o recurso a totalidades infinitas[212].

Ora, vimos no Capítulo 3, que a crítica de Hilbert à mencionada distinção cantoriana se fundamentava no caráter subjetivo de tal distinção. Sabe-se também que Hilbert tinha conhecimento de paradoxos na teoria de conjuntos, comunicada pelo próprio Cantor, antes de tornar-se público o Paradoxo de Russell. Sabemos também que para Hilbert a questão não era excessivamente relevante, na medida em que considerava um episódio comum na história da ciência o uso de conceitos sem as devidas precauções. Tomadas as devidas precauções - a axiomática de Zermelo no caso dos paradoxos da teoria de conjuntos - o problema parcialmente desaparecia. E desapareceria completamente se um prova de consistência da teoria de conjuntos fosse fornecida.

Naturalmente, tudo isto pode ser examinado da perspectiva de eliminar a "incerteza epistemológica" em relação à teoria dos conjuntos e a análise. Mas a questão é como proceder. Para Giaquinto, trata-se de provar a consistência da análise e da teoria de conjuntos, via uma justificação instrumentalista que reduz os enunciados fundamentais das mencionadas teorias a seqüências de símbolos sem significado, cuja função é deduzir afirmações verdadeiras do ponto de vista do conteúdo. Por certo, caso seja este o procedimento para justificar

---

widersprechen könnten, und mir erscheint die Auffassung, als könnten die Tatsachen und Ereignisse selbst miteinander in Widerspruch geraten, als das Musterbeispiel einer Gedankenlosigkeit."

211 Giaquinto, M. "Hilbert's Program", p. 121.

212 *Ibid.*, p. 121.

"uma sinfonia do infinito" (a análise) e "a mais admirável flor do intelecto matemático e em geral uma das mais altas realizações da atividade humana puramente racional" (a teoria dos conjuntos) tratar-se-ia de uma vitória verdadeiramente pírrica.

Porém, ainda que não possa ser dito que o Programa de Hilbert é uma reação ao intuicionismo de Brouwer por razões meramente históricas, sim pode pensar-se que o intuicionismo tem antecedentes em matemáticos tão significativos quanto Kronecker ou Poincaré. Já indicamos, por exemplo, como Hilbert viu em Brouwer e o intuicionismo uma atitude semelhante à do primeiro. Tal atitude é para Hilbert um subjetivismo que adquire formas diferentes. Para nós, o problema não reside em nenhuma incerteza epistemológica, precisamente porque Hilbert não partilhava dela. A questão, como sugerimos no capítulo anterior, é que porque o infinito não se "realiza", coisa que para Hilbert é demonstrado pela pesquisa científica, então aparece como problema referirmos a ele como existente no mesmo sentido em que Hilbert pensava em 1900.

Ora, Giaquinto está pensando nos escritos de 1920-30, onde acaso possamos falar com propriedade de um Programa, na medida em que nos escritos de 1900 não há maiores indicações de como proceder tecnicamente. Mas do que se trata é do *backround* filosófico. E já nos escritos de 1900 aparece a questão do subjetivismo. Em 1900 a resposta a esse subjetivismo em relação à introdução de novos métodos e conceitos matemáticos é a prova de consistência com as teses associadas "Consistência = existência" e "Existência = sentido". Nos anos 20 a resposta ao subjetivismo deve ser diferente porque, por um lado, o conhecimento científico mostra, para Hilbert, que na natureza não há nada infinito. Por outro lado, porque para Hilbert pensamento e realidade participam, como vimos na seção anterior, de uma sorte de harmonia preestabelecida. E, por certo, porque a questão relevante é dar conta da matemática clássica, não ser conseqüente com teses ontológicas sobre a natureza das entidades matemáticas.

Ora, dissemos acima que talvez com propriedade só podemos falar de um Programa de Hilbert nos escritos dos anos 20. Hilbert divide, para Giaquinto, as sentenças matemáticas em sentenças com conteúdo (com significado) e sentenças sem conteúdo (sem significado). Por um lado, as que são decidíveis num número finito de passos tem conteúdo; pelo outro, qualquer esquema universal cujas instâncias são todas finitariamente decidíveis tem conteúdo -as proposições finitárias gerais de Smorynski. As sentenças mencionadas são as sentenças reais; as restantes são seqüências de símbolos sem significado. Entre as seqüências de símbolos sem significado encontramos, entre outras, as leis lógicas clássicas.

Tais seqüências de símbolos sem significado são "proposições ideais". Com estes supostos, Giaquinto enuncia sua visão do programa como um programa de redução ou de eliminação:

"A essência do programa era encontrar um modo de substituir toda prova de uma proposição real por uma prova de tal proposição que fosse puramente finitária (não contendo nenhuma proposição ideal). Dado que não há prova finitária de "0 = 1", isso assegura que essa proposição não pode ser derivada no sistema e então que o sistema é consistente."[213]

No espírito filosófico da época[214] encontra Giaquinto uma justificativa do Programa de Hilbert entendido como um programa de redução. A distinção entre proposições reais como significativas e as ideais como não significativas a encontra no positivismo lógico: as únicas verdades são aquelas que podem ser verificadas por observação. Conseqüentemente, isto levou a programas de redução que pretendiam mostrar que as partes puramente teoréticas ou não-observacionais de uma ciência particular são em última instância elimináveis em favor de sentenças sobre operações e regularidades naquilo que pode ser observado. O operacionalismo de Bridgman é, para Giaquinto, a expressão mais clara deste ressurgimento do empirismo.

Mas, para Giaquinto, Hilbert na verdade resistiu os excessos do *revival* empirista. Vimos que tanto Hilbert com Bridgman não demandam que todos os termos de um enunciado tenham interpretação operacional, e nisto baseia-se Giaquinto para afirmar que Hilbert resistiu o mencionado *revival*. Os intuicionistas seriam, na sua visão, aqueles que exagerariam na demanda "empirista" de que toda sentença de toda teoria matemática deveria ter interpretação construtiva. Desta perspectiva, segundo achamos, caberia ainda dizer então que seria apenas na metamatemática onde encontraria lugar o mencionado *revival*, na medida em que todo método metamatemático tem que ter interpretação na percepção.

Por certo, exigir que cada enunciado isolado de uma teoria seja verificável não é, para Hilbert, uma exigência racional[215]. Mas o fato de não ser verificável neste sentido não implica, por certo, que o enunciado

[213] Giaquinto, M. "Hilbert's Philosophy of Mathematics", p. 123.
[214] Cfr. *Ibid.*, pp. 126-127.
[215] Cfr. Hilbert, D. *Os fundamentos da matemática*, p. 305: "Die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, allgemein aufzustellen, ist keineswegs vernünftig;"

careça de sentido, a menos que postulemos o que está em discussão: a atribuição de uma teoria empirista do significado a Hilbert, mas uma teoria ainda mais radical que aquela do empirismo lógico. Com efeito, as verdades lógicas e matemáticas também seriam examinadas sob o crivo do critério de significação empírica. Mas, para nós, a perspectiva da qual Hilbert vê o problema é diferente, isto é, a percepção como garantia para a intersubjetividade da pesquisa sobre fundamentos. Isto traduz-se numa restrição metodológica de que entender como provido de conteúdo com vistas à prova de consistência. Em outras palavras, uma teoria "empirista" do significado, no melhor dos casos, no que diz respeito à matemática quando olhada da perspectiva da metamatemática.

Com efeito, o que interessa no exame do ponto de vista finito da lógica ou de um fragmento da aritmética é *mostrar* sua correção de maneira direta na percepção, e não, como pensa Bridgman, porque a matemática ou a lógica sejam ciências experimentais[216]. A coincidência, verdadeiramente muito superficial, é que da mesma forma que para Bridgman os termos operacionalmente definidos asseguram-nos contra o erro, a consideração do aspecto finitário na lógica e na aritmética tem a mesma função do ponto de vista da discussão sobre fundamentos.

Em resumo, quando postulamos seja uma influência direta de um autor, seja uma influência indireta do "espírito da época", devemos fazer "recortes" das influências mencionadas de forma tal que as posições ficam desfiguradas. No caso do empirismo lógico, temos que esquecer a dicotomia fundamental entre analítico e sintético, a priori e a posteriori ou empírico. No caso de Bridgman, temos que insistir no critério verificacionista do significado, o qual não se aplica, por definição, às verdades lógicas e matemáticas no caso do empirismo lógico e que, se aplicado conseqüentemente a tais verdades então conduz a concebê-las como da mesma natureza que as verdades empíricas. Mais ainda, devemos lembrar que nas primeiras versões do critério empirista do significado, contra a própria hipótese de Giaquinto, as generalizações finitárias não teriam elas mesmas significado. Com efeito, como é bem conhecido, as primeiras versões do mencionado critério forem consideradas inaceitáveis por implicar precisamente que os enunciados universais careciam de significado[217].

216 Cfr. Bridgman, P.W. *La naturaleza de la teoría física*, caps. IV-V.
217 Cfr. C. Hempel. "Problemas y cambios en el criterio empirista de significado".

Em relação à Bridgman, então, temos que esquecer que seu operacionalismo implica: a) o abandono simples da lógica clássica, não apenas de princípios intuicionisticamente inaceitáveis senão também do princípio de não-contradição; b) reconhecer a matemática como uma disciplina sujeita às mesmas restrições, do ponto de vista de um empirista, que qualquer ciência empírica, no que diz respeito notadamente à verdade e exatidão.

Portanto, acreditamos haver mostrado já do ponto de partida, independentemente das dificuldades assinaladas acima, que a interpretação operacionalista do Programa de Hilbert padece de sérias inconsistências. Como veremos na seção final, isto não é de surpreender: os intérpretes que aproximam o pensamento de Hilbert seja ao empirismo lógico, seja ao operacionalismo seja ao instrumentalismo em geral parecem desconhecer manifestamente o contexto filosófico da época. Mas, em primeiro lugar, examinaremos na seção seguinte a interpretação instrumentalista.

5.3. As interpretações instrumentalistas

Existem interpretações do Programa de Hilbert que poderíamos resumir assim: aceita a dicotomia teórico-observacional, os termos teóricos permitem obter, através das hipóteses nas quais aparecem, "conseqüências observacionais", independentemente de que tipo de experiência se fale, independentemente de se há ou não há eliminação ou redução dos "termos teóricos". Em qualquer caso, os axiomas da teoria de que se trate são entendidos como instrumentos para deduzir conseqüências observacionais.

Assim, no caso da aritmética, os termos teóricos viriam a ser, entre outros, os operadores lógicos, que aparecem tanto nas leis lógicas quanto nos axiomas da aritmética, isto é, nas "hipóteses teóricas". Teríamos que adicionar também as técnicas de definição. Entre os "termos observacionais" caberia indicar " + ", " = ". Nesta interpretação cabe perguntar-se se os enunciados observacionais viriam a ser apenas os enunciados do núcleo, que são os únicos passíveis de verificação imediata, ou se devemos também incluir proposições finitárias gerais ou, na terminologia de Giaquinto, esquemas universais.

A primeira interpretação instrumentalista da qual trataremos nesta seção é exposta por C. Smorynski em seu artigo já citado "Hilbert's Programme". Smorynski toma como ponto de partida a distinção entre "matemática propriamente dita" e metamatemática. A primeira - teoria de números, análise, teoria de conjuntos- é abstrata, transfinita e não tem nenhum conteúdo empírico; sua validade consiste apenas na sua não-contraditoriedade. A metamatemática é matemática intuitiva e contentual: estudo combinatório de signos e suas combinações. A matemática propriamente dita é substituída por um sistema formal com axiomas e regras de inferência e a consistência desse sistema formal deve ser provada metamatematicamente. Giaquinto, como vemos, segue a Smorynski neste ponto, mas Smorynski insiste mais no caráter instrumentalista da "matemática propriamente dita".

Para Smorynski, o estudo dos trabalhos de Hilbert revela que só tardiamente vê-se com clareza que o programa redunda na conservação, isto é, como vimos no capítulo anterior, numa versão do Programa de Hilbert da seguinte natureza: Seja TI uma teoria ideal da aritmética, seja TF a teoria finitária, seja A uma proposição finitária geral. Então:

Se TI deduz A, então TF deduz A.

Como entre as fórmulas finitárias encontra-se aquela que expressa a consistência da teoria e ela é indecidível, para Smorynski o Primeiro Teorema de Incompletude acaba com o Programa de Hilbert. Por oposição a Smorynski, Detlefsen rejeita esta aproximação ao Programa de Hilbert via condições de conservação. Ora, Detlefsen[218], da mesma maneira que Smorynski, defende uma interpretação do Programa de Hilbert também instrumentalista, fundada na distinção epistemológica da época entre observacional e teórico, em paralelo com a distinção entre proposições reais e ideais.

Uma característica, ao nosso ver surpreendente, da interpretação de Smorynski é justapor à interpretação instrumentalista a tese "Consistência implica existência", inclusive nos anos 20. Acreditamos ter mostrado no capítulo anterior, pelo contrário, que esta tese é abandonada no primeiro sentido que ela tinha, isto é, que a prova de consistência de uma teoria que "envolvesse" o infinito provava a existência de domínios com infinitos elementos (infinito atual). Aduzimos que tal mudança resulta da visão de Hilbert dos resultados científicos mais significativos de início de século. Ora, se queremos conservar tal tese devemos recorre a um conceito de existência diferente, isto é, existência de um certo tipo de conceito análogos, nas palavras de Hilbert, às idéias da razão kantiana.

---

218 Cfr. Detlefsen, M. "On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem".

No entanto, segundo Smorynski, para Hilbert a consistência de uma teoria implica a existência dos objetos da teoria. Para Brouwer, por outro lado, os objetos são construídos e uma teoria consistente, porém falsa, não prova nenhuma verdade. Sob estes supostos, segue um argumento de Brouwer que pretende mostrar que da consistência da lei de terceiro excluído não pode ser deduzida sua verdade *sem assumir* de antemão a verdade de uma afirmação equivalente, isto é, a lei de dupla negação. Com efeito, para Brouwer trata-se de deduzir da negação da negação de terceiro excluído, que Brouwer aceita, a verdade de terceiro excluido.

A solução de Smorynski é conseqüente com sua leitura instrumentalista. Hilbert não precisa provar que os enunciados transfinitos como terceiro excluído são verdadeiros, senão meramente consistentes. Isso é suficiente para os fins de instrumento dedutivo. Mas acreditamos que tal resposta é conseqüência também de aceitar, sem aduzir provas, da permanência da tese "Consistência implica existência". Em parte, por certo, devido a uma certa tendência de Hilbert a aparentemente aceitar teses dos oponentes que não parecem necessárias a sua proposta.

Com efeito, já assinalamos que Hilbert, sem nenhum fundamento aparente, aceita que o uso de quantificadores universais envolve uma "referência ao infinito (atual)". Ora, também aparentemente aceita, sem maior justificação: a) por um lado, que o princípio de terceiro excluído - na "lógica subjacente" - implica "referência ao infinito (atual)"; b) pelo outro, que o mencionado princípio é equivalente a resolubilidade em princípio de todo problema matemático - uma afirmação também de Brouwer.

Na verdade, sem o uso de princípio de terceiro excluído não podemos resolver *alguns* problemas, o que não equivale a que possamos resolvê-los todos. O ideal hilbertiano de complexão teórica em princípio conduz então a aceitar terceiro excluido, via prova de consistência. Mas do que se trata não é de se existe ou não o infinito atual - coisa que Hilbert não afirma nos escritos dos 20 ser resultado da prova de consistência - senão de se deve-se ou não aceitar como método de prova tal princípio, sem as implicações ontológicas que lhe são atribuídas.

A diferença com os construtivistas, no caso da aritmética, deve-se então procurar nas diferentes concepções gnosiológicas e não na ontologia, embora Brouwer queira levar a discussão ao plano ontológico. Justamente, o que resolve a prova de consistência é uma parte do problema: que um conceito para ter sentido deve ser consistente. A outra parte, a justificação semântica, deve procurar-se por uma via independente, uma vez que as teses "Consistência =implica existência" e "Sentido = existência" são independizadas.

Seja como for, instrumental é para Smorynski a concepção hilbertiana da matemática, "uma ciência teorética abstrata sujeita a controle numérico da mesma maneira que a física é uma ciência teorética abstrata sujeita a controle experimental."[219] Smorynski atribui a Weyl esta concepção da matemática como ciência teorética à qual ele próprio subscreve como "a única filosofia da matemática moderna, clássica, infinitária" e onde "a matemática transfinita é significativa apenas como meio de derivar, digamos, proposições finitárias gerais"[220].

A referência a Weyl é relevante, justamente no que diz respeito ao suposto espírito filosófico da época. Mas, o que não destaca Smorynski é que essa declaração de Weyl, associada com sua conversão aos pontos de vista de Hilbert, é vivenciada como um fracasso. O fracasso em questão é o da fenomenologia, essa sim, direta ou indiretamente, uma concepção mais difundida para a época na Europa Central que o positivismo lógico. Por certo, ao procurar em Weyl, e não em Bridgman ou o empirismo lógico o *backround* filosófico do Programa de Hilbert, a interpretação de Smorynski não é suscetível, em princípio, das críticas que enunciamos na seção anterior.

Smorynski afirma que se trata de derivar por meio da matemática transfinita as por ele chamadas proposições finitárias gerais. Para Smorynski a distinção fundamental não é a dicotomia proposições ideais, por um lado, e proposições finitárias, pelo outro. Propõe em lugar desta dicotomia uma tricotomia: proposições reais, proposições finitárias gerais, proposições ideais. À primeira classe correspondem aquelas que caraterizamos como pertencentes ao núcleo do ponto de vista finito. Seguindo a Smorynski, são combinações proposicionais de equações que envolvem funções primitivas recursivas e numerais fixos. Portanto, são afirmações verificáveis por computação direta da aritmética recursiva primitiva.

As proposições da segunda classe são aquelas que nós caraterizamos como, embora finitárias, não pertencendo ao núcleo. São afirmações da forma "Para todo numeral n, $n + 1 = 1 + n$". Com este suposto, Smorynski enuncia o por que de incluir as proposições finitárias gerais como deriváveis tanto na teoria ideal

219 Smorynski, C. "Hilbert's Programme", p. 39.
220 *Ibid.*, p. 55.

quanto na teoria finitária. Os argumentos que interessam ao nosso propósito são os seguintes: i) não é possível considerar uma ciência que não proponha leis universais, ii) a afirmação de consistência, que deve ser demonstrada finitariamente, é uma proposição finitária geral.

Examinaremos i) e ii) seguindo como fio condutor as críticas de M. Detlefsen. No que diz respeito a i), já vimos que na versão instrumentalista de Smorynski a matemática transfinita deriva não apenas os enunciados que ele chama reais senão também os finitários gerais. Em particular, a afirmação de consistência é uma proposição finitária geral e, da sua não-conservação, Smorynski deduz a impossibilidade de levar a cabo o Programa de Hilbert, já a partir de o Primeiro Teorema de Incompletude. Detlefsen, no entanto, objeta esta visão do Programa de Hilbert como um programa de conservação, mas para os nossos fins isto é irrelevante, na medida em que independentemente das conseqüências atribuídas ao Teorema de Gödel, ambos intérpretes consideram que à filosofia da matemática subjacente ao Programa de Hilbert é o instrumentalismo.

Ora, em relação à necessidade de introduzir o conceito de proposição finitária geral, Detlefsen objeta, em primeiro lugar, os argumentos com os quais Smorynski pretende substituir a "velha dicotomia" pela "nova tricotomia". Especificamente, Detlefsen opõe a dicotomia entre proposições reais e ideais à tricotomia proposta por Smorynski entre proposições reais, finitárias gerais e ideais. Afirma Detlefsen que a distinção entre proposições reais e finitárias gerais, na verdade, corresponde a uma subdivisão das proposições reais em problemáticas e não-problemáticas. Neste ponto estamos inclinados a coincidir com Detlefsen em que se trata de uma dicotomia.

(Nós falamos em proposições que pertencem ao núcleo do ponto de vista finito e proposições que, embora finitárias, não pertencem ao núcleo por não serem fechadas pelas operações lógicas, com especial referência à negação. Corresponde a distinção entre reais e finitárias gerais de Smorynski por um lado e a subdivisão nas reais de Detlefsen pelo outro. Não falamos, por outra parte, se tal distinção correspondia a uma dicotomia fundamental ou a uma tricotomia fundamental.)

Para Detlefsen, a distinção entre matemática ideal e real espelha a distinção entre observação e teoria na ciência natural. Da mesma maneira que nenhuma teoria científica pode admitir como conseqüências enunciados cuja falsidade pode ser estabelecida por meios observacionais, nenhuma teoria ideal pode ter conseqüências cuja falsidade pode ser estabelecida por meios finitários, isto é, reais.

Em primeiro lugar, cabe coincidir com Detlefsen que há um argumento de Smorynski para aceitar como parte de uma tricotomia os enunciados finitários gerais que é incorreto: não é verdade que para Hilbert a distinção entre generalizações universais como significativas e generalizações existenciais (não limitadas) se deve a que as primeiras são conjunções infinitas e as segundas não. (Por certo, lembramos ao leitor que não utilizamos esse argumento no capítulo anterior.) Como assinala Detlefsen, o bom senso é suficiente para entender que não pode argumentar-se que Hilbert viu as generalizações finitárias como conjunções infinitas, pois o conceito mesmo de "conjunção infinita" é um paradigma de não-finitariedade.

Para Detlefsen, os enunciados reais classificam-se em problemáticos e não-problemáticos. Uma proposição à qual não pode ser aplicada todas as operações da lógica clássica sem gerar uma proposição não finitária é uma proposição problemática. Como Detlefsen assinala, e assim procedemos no capítulo anterior, a questão das afirmações universais e existenciais deve ser tratada de maneira diferente.

Por um lado, no que diz respeito as afirmações universais, as leis da lógica clássica proposicional -sendo terceiro excluído o caso mais significativo- não se aplicam irrestritamente. Por outro lado, no que diz respeito às afirmações existenciais, elas implicam generalizações existenciais não limitadas (via regra de generalização existencial no cálculo de predicados), como vimos no exemplo do teorema de existência de primos no capítulo anterior. Mas, segundo Detlefsen, isto não implica separar as generalizações finitárias das generalizações ideais.

O argumento de Detlefsen consiste em destacar, em primeiro lugar, que a diferença entre enunciados finitários gerais e generalizações universais ideais não resulta apenas de que nas primeiras apenas numerais ou outros termos finitariamente bem definidos podem substituir as variáveis e que nas últimas admite-se substituição por termos não-finitariamente bem definidos. No capítulo anterior, resgatamos esta diferença entre enunciados finitários gerais e enunciados ideais, mas apontamos que devia considerar-se que *tipo de demonstração* fornecia-se de uma afirmação para qualificá-la como finitária ou não. Detlefsen indica que o critério fundamental é se uma fórmula aparece considerada como uma regra de um procedimento formal ou se é considerado o conteúdo da proposição expressada pela fórmula.

A questão para Detlefsen é o que é que governa o uso de uma fórmula ou proposição, isto é, se é a regra de algum procedimento formal ou se é a consideração do conteúdo da proposição expressada pela fórmula. O uso de uma fórmula ideal não está guiado pelo conteúdo que a fórmula, assumida alguma semântica, pudesse vir a expressar. Por outro lado, o uso de uma fórmula finitária esta guiado pela consideração do conteúdo da proposição que, interpretada finitariamente, a fórmula expressa. Em resumo:

"Segue-se disso que o que determina se uma fórmula como "1 + x = x + 1" é finitária ou ideal, sob um específico esquema de interpretação, expressa uma proposição finitária ou uma proposição-esquema. Não se as substituições para as variáveis da fórmula são restritas à classe dos termos finitariamente bem definidos. Mais geralmente, se o uso da fórmula é governado pelas regras de um "procedimento de demonstração" formal, ou por considerações do conteúdo da proposição que expressa."[221]

Acreditamos que a crítica de Detlefsen a Smorynski no que diz respeito aos pontos até agora tratados é essencialmente correta. Ora, Smorynski argumenta que a introdução dos enunciados finitários gerais deve-se a que toda ciência genuína deve ter leis. Para Detlefsen, e coincidimos com ele, o essencial para a matemática não são as leis contentuais senão o uso de métodos ideais. Mas entendemos que Smorynski aponta a uma questão relevante, aquela que diz respeito à concepção de ciência de Hilbert. Com o que não coincidimos é com a pretendida fundamentação instrumentalista seja a de Smorynski, seja a de Detlefsen.

Podemos aceitar que, do ponto de vista da metamatemática, concebemos a matemática ideal como constrita pela parte contentual num modo semelhante àquele pelo qual os dados observacionais constringem uma teoria empírica. Isto é o mesmo que dizer que da mesma maneira que uma teoria empírica não pode ter conseqüências observacionais falsas, a matemática não pode conter enunciados falsos do ponto de vista do conteúdo. Como subentendemos que contém os verdadeiros, então o problema reduz-se a provar consistência.

Mas para Detlefsen, como para Giaquinto e Smorynski, do que se trata, é *da* matemática, e não de um expediente metodológico para provar consistência. Em particular, Detlefsen escreve:

"Hilbert parece haver visto as teorias científicas naturais e a matemática ideal instrumentalmente."[222]

---

[221] Detlefsen, M., "On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem", p. 355.
[222] Detlefsen, M., "On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem", p. 347.

Ora, devemos destacar que tanto Giaquinto quanto Smorynski e Detlefsen citam, em apoio de sua interpretação instrumentalista, sempre o mesmo *locus* e, nós suspeitamos, o único. Apresentamos a citação na íntegra a continuação, mas dividido em duas partes consecutivas. Escreve Hilbert :

"Este *formula-game* permite-nos expressar o inteiro pensamento-conteúdo da ciência matemática de maneira uniforme e desenvolvê-lo em tal modo que, ao mesmo tempo, as interconexões entre proposições singulares e fatos chega a ser clara."[223]

O seguinte fragmento é citado pelos três autores, com uma ou outra alteração:

"Fazer o requerimento universal de que cada fórmula individual seja interpretável por si própria é em modo algum racional; pelo contrário, uma teoria pela sua verdadeira natureza é tal que não necessitamos cair na intuição ou significado no meio do argumento. O que o físico demanda de uma teoria precisamente é que proposições particulares sejam derivadas de leis da natureza ou hipóteses só por inferências, daqui na base de um puro *formula-game*, sem considerações estranhas sendo aduzidas. Apenas certas combinações e conseqüências de leis físicas podem ser testadas por experimento -justamente como na minha teoria da prova apenas proposições reais são diretamente capazes de verificação." [224]

Após citada a passagem anterior Detlefsen escreve:

"Para Hilbert, então, as sentenças ideais não têm qualquer *status* semântico ou justificativo genuíno por se próprio. Elas não expressam proposições, senão que são parte de um aparato formal calculatório (o sistema de demonstrações ideais de derivações) cujo propósito é a derivação conveniente e eficiente de sentenças (a saber, sentenças reais) que têm status semântico e epistémico."[225]

---

223 *Os fundamentos da matemática*, p. 305: "Dieses Formelspiel gestattet, den gesamten Gedankeninhalt der mathematischen Wissenschaft einheitlich auszudrücken und derart zu entwickeln, dass zugleich die Zusammenhänge der einzelnen Sätze und Tatsachen deutlich werden."

224 Cfr. Hilbert, D. *Os fundamentos da matemática*, p. 305: "Die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, allgemein aufzustellen, ist keineswegs vernünftig; im Gegenteil entspricht es dem Wesen einer Theorie, dass man in einer Entwicklung nicht nötig hat, zwischendurch noch auf die Anschauung oder Bedeutung zurückzugreifen. Der Physiker verlangt gerade von einer Theorie, dass ohne Heranziehung anderweitiger Bedingungen aus den Naturgesetzen oder Hypothesen die besonderen Sätze allein durch Schlüsse, also auf Grund eines reinen Formelspiele, abgeleitet werden. Nur gewisse Kombinationen und Folgerungen der physikalischen Gesetze können durch das Experiment kontrolliert werden -so wie in meiner Beweistheorie nur die realen Aussagen unmittelbar einer Verifikation fähig sind."

225 Detlefsen, M. "On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem", p. 347.

Smorynski, como vimos, relaciona o instrumentalismo de Hilbert via Weyl. Para Weyl, segundo Smorynski, uma ciência teorética é uma ciência instrumentalmente concebida:

"Weyl assinalou que Hilbert estava propondo uma reinterpretação radical do significado da matemática, com efeito - embora Weyl não diz isso explicitamente - tornando o assunto numa ciência teóretica."[226]

Giaquinto relaciona a passagem com o retorno ao empirismo:

"os únicos fatos são fatos observáveis, as teorias da física que incorporam alusões ao que não pode ser observado são simplesmente instrumentos mais ou menos eficazes para guiar a escolha e desenho de experimentos e deduzir hipóteses testáveis. A visão de Hilbert de sua teoria da prova estava em todo com essa filosofia e ele estava ciente do paralelismo entre instrumentalismo em física e sua própria visão."[227]

Insistimos, apenas uma passagem e muita inferência sem justificar, conduzem estes autores a postular o instrumentalismo como tese filosófica substantiva acerca da matemática e não, como pensamos nós, como tese metodológica em função dos objetivos da metamatemática ou teoria da prova. É esta a *única* interpretação que admite a passagem? Achamos que não. Resiste esta interpretação instrumentalista uma análise da visão *explícita* que Hilbert tem da ciência natural. Achamos também que não.

Smorynski diz-nos que Weyl não diz, numa palestra em defesa do intuicionismo, que Hilbert era um pouco injusto com Brouwer quando afirma que é irracional requerer universalmente que uma teoria necessita cair na intuição no meio de um argumento. Injusto com Brouwer? A frase está dirigida precisamente a Weyl -e note-se, por certo, o matiz cartesiano da passagem- quem escreve em *O contínuo*:

"Na ciência, aquilo que se pode demonstrar não deve ser aceito sem demonstração; assim começa o famoso ensaio de Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen?*). Esta afirmação, que é certamente característica do modo de pensar da maior parte dos matemáticos, exprime todavia um princípio errôneo. *Como se aquele* /sublinhado nosso/ *complexo de raciocínios pudesse, na sua mediatez produzir qualquer "crença", sem que nos assegurássemos da correção de todo e qualquer passo numa intuição imediata*!"[228]

Aquilo então que tem primariamente em mente Hilbert é uma crítica ao intuicionismo, e parece-nos que a última passagem mostra que especificamente uma crítica a Weyl. Ora, está ciente Hilbert de um paralelismo

[226] Smorynski, C. "Hilbert's Programme", p. 44.
[227] Giaquinto, M., "Hilbert's Philosophy of Mathematics", p. 126.
[228] Citado in Silva, J.J. *Sobre o predicativismo de Hermann Weyl*, p. 88.

entre instrumentalismo em física e instrumentalismo na matemática? Hilbert está discutindo na passagem a crítica, que ele entende provém de Brouwer, de que a matemática degenera num jogo. Na verdade, ele aceita o termo *formula-game*, mas procura uma, digamos, inversão de valoração: o *formula-game* permite-nos *expressar* a matemática de uma maneira uniforme que revela interconexões entre sentenças individuais e fatos.

Mas, do que estamos falando é de expressar a matemática: a teoria de números, a análise, a teoria de conjuntos. Concluída a comparação com a física - voltaremos enseguida - diz-nos que, da mesma maneira que na física apenas alguns enunciados podem ser testados por observação, *na sua teoria da prova* apenas enunciados reais são diretamente suscetíveis de verificação. O que quer dizer *na sua teoria da prova*? Não estamos falando da teoria de números, da análise, da teoria de conjuntos?

Em *Sobre o infinito*, apresenta como uma espécie de hierarquia a seqüência seguinte: primeiro, os enunciados do núcleo (reais não problemáticos); depois, os que não pertencem ao núcleo (reais problemáticos); finalmente, os enunciados ideais, cuja introdução tem como conseqüência que as leis lógicas clássicas tenham validade irrestrita. Enquanto que os enunciados ideais não expressam afirmações finitárias, não significam nada. Não podemos aplicar contentualmente as leis lógicas como aos enunciados finitários. A lógica torna-se problemática: é necessário formalizar as operações lógicas e as provas matemáticas. Depois de formalizada a lógica, notadamente apenas os axiomas lógicos do cálculo de predicados são qualificados de axiomas transfinitos. Em continuação introduzem-se os axiomas de Peano. Escreve Hilbert então:

"Podemos realizar, de esta maneira, nossa teoria da prova, e construir o sistema de fórmulas demonstráveis, isto é, a ciência matemática."[229]

O que quer dizer isto? Que com este modo de entender as coisas podemos proceder a provar a consistência. Achamos então que retrata-se formalmente um processo que corresponde a "evolução" de uma teoria matemática, um processo de abstração crescente, que devemos fundamentar via prova de consistência. A única instância intersubjetiva à qual podemos recorrer é a percepção; portanto, entenderemos para os fins da teoria da prova que só enunciados finitários são significativos. Devemos entender também que os que não são significativos do ponto de vista finito, simplesmente carecem de significado, exceto o dito instrumental?

[229] *Sobre o infinito*, p. 286: "Auf diese Weise sind wir imstande, unsere Beweistheorie durchzuführen und das System der beweisbaren Formeln, d.h. die mathematische Wissenschaft aufzubauen."

Como vimos, os intérpretes assim o afirmam. Como Hilbert afirma que apenas enunciados singulares são testáveis como conseqüência das leis físicas, assim para a aritmética são testáveis sejam os reais não-problemáticos, sejam os reais problemáticos. *E como Hilbert é instrumentalista* (premissa, não conclusão) então está dizendo que na matemática temos instrumentos cuja única função (com notas pragmáticas) é deduzir enunciados com significado, da mesma maneira que na física ele pensa, *porque é instrumentalista* (premissa, não conclusão), que as hipóteses teóricas são instrumentos que usamos para simplesmente deduzir conseqüências observacionais.

Ora, acreditamos que é "sadia doutrina instrumentalista" que o caráter instrumental dos conceitos teóricos implica que carece de sentido afirmar, por exemplo, "Os elétrons existem". Sim, por certo, porque "elétron" é um instrumento para manipular convenientemente a experiência, incluído nas hipóteses teóricas, relacionado com o observável via regras de correspondência ou definições operacionais ou definições coordenativas ou orações redutivas, segundo a preferência terminológica, e não um objeto de, digamos, a realidade.

Na verdade, não se trata apenas de terminologia, pois dependendo *qual* teoria empirista do significado, refletida na terminologia escolhida, conduz automaticamente a atribuir significado aos enunciados ideais que a interpretação instrumentalista afirma simplesmente não ter. Por exemplo, que tivesse conseqüências observacionais poderia ser condição de significação empírica. Mais ainda, a palavra "realidade" é suspeita, assim como a relação entre "sentenças" e "fatos". Lembremos o "solipsismo" de Bridgman, o "solipsismo metodológico" de Carnap, lembremos também que a concepção de "enunciado protocolar" de Neurath conduz a uma teoria coerentista da verdade, etc.

Ora, analisemos o "instrumentalismo' de Hilbert em física. Escreve Hilbert:

"É sabido que a matéria está composta de pequenos blocos, os *átomos*, e que da combinação e união destes se produz tuda a diversidade da matéria microscópica."[230]

A matéria é composta por átomos? Logo, os átomos existem? O instrumentalista responderá que, não habituado ao modo formal de falar, está falando no modo material. Mas, na verdade, o que diz é que temos um

---

[230] *Sobre o infinito*, p. 266: "Bekanntlich ist alle Materie aus kleinen Bausteinen, den *Atomen* zusammengesetzt, durch deren Kombination und Verbindung die ganze Mannigfaltigkeit der makroskopischen Stoffe entsteht."

instrumento conceptual "átomo" e o argumento continua nas linhas já vistas. Lamentavelmente, a confusão entre modo formal e material de falar continua:

"a eletricidade era considerada como um fluido (...) agora também se provou que está composta de um núcleo positivo e *elétrons* negativos."[231]

A matéria esta composta de átomos, a eletricidade está composta de elétrons. Escreve Hilbert:

"Além da matéria e da eletricidade há ainda na física outra entidade real, para a qual vale a lei de conservação, a saber, a energia. Como foi estabelecido na atualidade, agora nem a energia mesma permite a divisibilidade infinita de maneira absoluta e ilimitada; Planck descobriu os *quanta de energia*."[232]

Dificilmente podemos falar aqui de instrumentalismo ou de uma confusão entre o modo formal (adequado) e o modo material (inadequado) de falar. Matéria, eletricidade e energia são entidades reais compostas por outras entidades reais, átomos, elétrons e quantas: "em qualquer campo em que os métodos da física tem sido suficientemente refinados, nos topamos com um limite a divisibilidade, *que* /nossos grifos/ *não baseia-se na insuficiência da investigação, senão na natureza da coisa*."[233]

Simplesmente, esta posição não é nem pode, sob nenhum conceito minimamente consistente de instrumentalismo, ser assim qualificada. Se o leitor ainda tem dúvidas, citemos o instrumentalista Bridgman, referindo-se às "coisas":

"Nós não temos experiência direta de coisas; pois as coisas são apenas elaborações nossas, cuja função é expressar a semelhança entre aspectos de nossa experiência atual imediata e aspectos de nossa experiência passada."[234]

Acreditamos que esta maneira de ver estes problemas delata, com efeito, um instrumentalismo conseqüente. Ora, nada mais diferente do que a postura de Hilbert, que examinamos no capítulo anterior, como

---

[231] *Ibid.*, p. 266: "Während bis dahin die Elektrizität als ein Fluidum galt und das Vorbild eines kontinuierlich wirkenden Agens war, so erwies sich, jetzt auch sie aufgebaut aus positiven Kernen und negativen *Elektronen*."

[232] *Ibid.*, p. 266: "Ausser Materie und Elektrizität gibt es in der Physik noch ein anderes Reales, für das ebenfalls das Gesetz der Erhaltung gilt, nämlich die Energie. Nun, selbst die Energie lässt, wie heute feststeth, die unendliche Zerteilung nicht schlecthin und uneingeshränkt zu; Planck entdeckte die *Energiequanten*."

[233] *Ibid.*, p. 265: "Aber überall, wo man die Methoden der Forschung in der Physik der Materie genügend verfeinerte, stiess man auf Grenzen für die Teilbarkeit, die nicht an der Unzulänglichkeit unserer Versuche, sondern in der Natur der Sache liegen,"

[234] Bridgman, P.W. La naturaleza de la teoria fisica, p. 49.

precondições para a lógica: *objetos* concretos extra-lógicos *dados* na vivência imediata, *anterior a todo pensamento*, objetos dados em todas suas partes, suas diferenças, sua seriação recíproca. E Hilbert salienta:

"Esta é a concepção filosófica fundamental que eu tenho como exigência tanto para a matemática *como* /nossos grifos/ *em geral para todo pensamento, compreensão e comunicação científicos.*"[235]

As citações poderiam multiplicar-se, mas não acreditamos que seja necessário. É absolutamente evidente que isto não é instrumentalismo em nenhum sentido conceptualmente legítimo da noção. Daí, a premissa das interpretações instrumentalistas ser falsa. Todas elas supõem, numa ou outra variante, um instrumentalismo em relação à física que Hilbert dista de possuir. Na verdade, é o extremo oposto. E a razão deste na verdade *anti-instrumentalismo* é para nós muito simples: o instrumentalismo é para Hilbert subjetivismo. Na seguinte seção esquematicamente mostraremos que o tipo de discussão filosófica mais difundida na época envolve esta questão de forma tal que, para Hilbert, irracionalidade e subjetivismo aparecem relacionados.

5.4. Algumas observações sobre o contexto histórico

Examinamos nas últimas seções interpretações do Programa de Hilbert que repousam de maneira implícita, da nossa perspectiva, de uma visão distorcida do período filosófico de entre-guerra. Nessa visão, atribui-se ao positivismo lógico e posições relacionadas mais ou menos estreitamente uma preeminência no quadro filosófico europeu que dista da verdade histórica de forma gritante.

Assim, lemos em Giaquinto que a confiança de Hilbert na realizabilidade do seu programa está fundada no "apogeu do positivismo no período"[236], que seu programa "era contemporâneo do apogeu do empirismo na filosofia da ciência"[237], que se tratava de "uma perspectiva que era amplamente aceita na comunidade científica de seu tempo"[238]. Detlefsen, embora não indique influências específicas de tipo empirista, ainda que seu enfoque geral assim as supunha, afirma que Hilbert "parece ver tanto a ciência natural quanto a matemática instrumentalmente."[239]

---

235 *Sobre o infinito*, p. 275: "Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist."

236 Giaquinto, M. "Hilbert's Philosophy of Mathematics", p. 119.

237 *Ibid.*, p. 126.

238 *Ibid.*, p. 127.

239 Detlefsen, M. "On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem", p. 343.

Ora, neste quadro do espírito filosófico da época há algo errado. Com efeito, no caso que diz especificamente ao positivismo lógico é um fato suficientemente conhecido. Se pensamos, como Abrusci, na fenomenologia, são muito mais representativas do espírito filosófico da época -e da época em geral- as derivações de cunho existencialista, que careciam, para dizer o mínimo, das preocupações gnosiológicas de Husserl.

Estes fatos são suficientemente conhecidos para qualquer pessoa que tenha estudado história da filosofia, sem confundir a importância histórica atribuída a certos movimentos filosóficos - atribuição feita em geral *a posteriori* - com a relevância, medida em termos de difusão, para a época. Mas estas considerações não são suficientes, sem dúvida, para o nosso propósito: olhar a concepção hilbertiana da matemática de um prisma diferente daquele de sua associação com o positivismo lógico e semelhantes.

No entanto, a leitura de um artigo de P. Forman[240], leitura realizada no período de conclusão deste trabalho, permite-nos, em alguma medida, confirmar nosso ponto de vista e, simultaneamente, abrir novas perspectivas. Não precisamos, por certo, subscrever a tese central do artigo mencionado: a influência do "meio ambiente" na aparição da mecânica quântica entre 1918 e 1927. O que nos interessa é a descrição, fartamente documentada, em relação às atitudes dos físicos em torno do problema da causalidade que, por razões que logo veremos, interessam da perspectiva da filosofia da matemática.

Forman resume, baseado nas contribuições de historiadores do período, o quadro geral do mundo intelectual da República de Weimar nos termos seguintes: "rejeição da razão como instrumento epistemológico, por ser inseparável do positivismo-mecanicismo-materialismo e, sendo fundamentalmente desintegradora, por ser incapaz de satisfazer à "fome de completude", glorificação da "vida", da intuição, da experiência não mediada e não analisada, com a apreensão imediata de valores, e não a dissecção de nexos causais."[241]

A expressão filosófica correspondente à última descrição - um tanto verborrágica mas adequada - a encontra Forman naquilo que denomina "filosofia da vida". Citando Th. Litt, a "filosofia da vida" não se carateriza tanto por ser uma escola ou um sistema determinado senão em termos daquilo ao qual se opunha:

---

[240] Cfr. Forman, P. "A Cultura de Weimar, a Causalidade e a Teoria Quântica, 1918-1927".
[241] In P. Forman *Op. cit.*, p. 16.

"Por um lado, (...) o mecanismo e o determinismo da explicação causal, que calcula tudo de antemão, torna tudo comparável, a tudo dissolve em elementos -por outro lado, (...) o racionalismo e formalismo de uma sistematização lógica que deduz tudo, classifica tudo, submete tudo a conceitos."[242]

Ora, podemos confirmar por uma via independente esse "espírito da época" no campo das matemáticas e da física e relacioná-lo com o pensamento de Hilbert. Mas previamente precisamos uma citação de um outro representante da por Forman chamada "filosofia da vida", E. Spengler, cujo livro clássico sintomaticamente chama-se *A decadência de Ocidente*. Escreve Spengler:

"Para quem as empregue instintivamente, as palavras "tempo" e "destino" tocam a própria vida em sua profundeza maior -a vida como um todo, que não deve ser separada da experiência vivida. Por outro lado, a física, a razão, *precisam* separá-las. O experiencialmente vivido em si mesmo, divorciado do ato vivo do observador e transformado em objeto, morto, inorgânico, rígido, é a Natureza como mecanismo, ou seja, algo a ser exaurido matematicamente (...) Esse é o eterno embaraço de toda a física como expressão de uma alma. Toda a física consiste na abordagem do problema do movimento, sobre o qual repousa o problema da própria vida, não como se algum dia pudesse ser resolvido, mas mesmo apesar de ser insolúvel."[243]

A citação nos é útil, por um lado, para reconhecer certas palavras chaves e temas que reiteram os das citações anteriores: exaltação da vida, do tempo, do movimento por oposição a física, a matemática, a causalidade, a razão. Ora, na Seção 5.2. examinamos as idéias de Hilbert em contraponto com o pensamento de Bridgman. Podemos encontrar em Bridgman a mesma oposição assinalada Spengler, só que com um espírito inteiramente diferente, no sentido de um típico "otimismo" anglosaxon face ao "inevitável".

O exame das idéias de Bridgman em relação a esta oposição nos permitirá agora mostrar um aspecto das concepções de Bridgman que diferem de Hilbert de maneira muito significativa, aspecto que diz respeito também à questão que tratamos na seção anterior em relação ao instrumentalismo. Tratando da questão da experiência e da linguagem, escreve Bridgman:

"Uma distinção radical entre a experiência e a linguagem surge do fato de que este último separa do marco vivente da realidade pequenos feixes e os "congela" e, ao fazê-lo, origina algo muito distinto da

---

242 In Forman, *Op. cit.* p. 18.
243 In P. Forman. *Op. cit.*, P. 31.

experiência, embora seja isso muito útil. Isto significa que entre a linguagem e a *atividade*, propriedade fundamental da experiência, existe um divórcio absoluto."[244]

Em relação ao pensamento e a experiência escreve:

"Esta separação da experiência total em pequenos elementos suscetíveis de serem reconhecidos parece-me a ferramenta primordial do pensamento verbal auto-consciente, seja que chegue ou não à etapa verbal na qual os feixes de elementos podem serem associados a um substantivo, um verbo ou outra função gramatical. Deste ponto de vista, o pensamento mesmo não pode ter a mesma estrutura que a experiência, e não devemos esperar que dita atividade da mente tenha completo êxito ao encarar todos os aspectos da mesma."[245]

O aspecto instrumental atribuído à linguagem e o pensamento deriva, como vemos, de uma análise da experiência na qual a "realidade" nos aparece. As notas que Bridgman atribui à experiência direta são:

"Em primeiro lugar, a experiência direta apenas abarca o que se acha na minha consciência: impressões sensoriais de diversas classes e várias espécies de fenômenos mentais e absolutamente nada mais. No material contido na experiência direta distingo porções do mesmo que descrevo como externas a mim mesmo e porções que me fazem dizer que se trata de experiência interna."[246]

Importa então destacar no caso da experiência "que se trata de algo dinâmico e não estático, é dizer, de algo em fluxo contínuo"[247]. Resumindo, podemos dizer que no *contínuo* da experiência *distinguimos* algo externo e interno e, no que diz respeito ao externo, os objetos são uma *elaboração nossa*, separando no contínuo "pequenos feixes". Podemos ler "spenglerianamente" a descrição de Bridgman como uma "confissão": face à experiência, o pensamento e a linguagem e, como caso particular, a física, realiza uma separação; essa experiência é "congelada" e transformada em objeto a ser "exaurido matematicamente". Portanto, parece-nos suficientemente claro que o ponto de partida, isto é, a análise da experiência, é absolutamente diferente em Hilbert e Bridgman. Com efeito, para Hilbert os *objetos são dados*, anteriores ao pensamento, junto com propriedades que podemos decidir se os objetos as possuem ou não. Tudo isto entendido como precondições do conhecimento racional.

---

244 Bridgman, P. W. La naturaleza de la teoría física, p. 55-56.
245 *Ibid.*, p. 58.
246 *Ibid.*, p. 42.
247 *Ibid.*, p. 44.

Em relação à matemática, podemos ler a seguinte passagem de Weyl como uma tentativa de conciliar -a través do intuicionismo- os opostos "experiência-matemática". Lemos em Weyl que o objetivo de seu livro *O contínuo* é:

"compreender matematicamente, segundo o seu conteúdo formulável em conhecimento "exato", a continuidade dada para nós numa intuição imediata (em particular no tempo que flui e no movimento)."[248]

Observemos as "coincidências formais" que existem entre Spengler, Bridgman e Weyl, mesmo tratando-se de assuntos muito diferentes e posturas também muito diferentes. Em todos os casos temos algum tipo de experiência cuja relação com a linguagem em geral, e o formalismo matemático em particular, é problemática. Em Bridgman e Weyl (ou Brouwer) encontramos, ainda que a partir de posições manifestamente diferentes, uma coincidência em relação às leis lógicas clássicas como inadequadas face a essa experiência e, portanto, injustificáveis. Em Hilbert, pelo contrário, vimos que a experiência perceptual é discreta e, ainda que do ponto de vista finito as leis lógicas clássicas sejam carentes de significado, nem por isso são injustificáveis. Em geral, lidas "spenglerianamente", as teses de Hilbert representariam, nas palavras de Litt citadas acima, "o racionalismo e o formalismo de uma sistematização lógica que deduz tudo, classifica tudo, submete tudo a conceitos."

Ora, na citação de Spengler acima fazem também aparição temas da filosofia de Bergson, outro representante da "filosofia da vida" para Forman. Em relação à matemática, independentemente dos autores citados por Forman, lemos, por exemplo, que J. Ullmo descreve a filosofia de Bergson como uma revolução no campo filosófico, cujas conseqüências para a matemática são assim caraterizadas: "Ficou assim em evidência que o crédito das matemáticas quebrantou-se por este inversão da perspectiva filosófica.(...) todos estavam de acordo que eram a grande obra da razão humana, sua manifestação mais perfeita e a ferramenta escolhida. Desprezar a ferramenta era humilhar o operário. Também a razão foi proclamada impotente por toda uma escola. Pretendeu-se primeiro antepor-lhe a intuição, depois o instinto, logo muitas outras coisas."[249]

O tema do trabalho de Forman é a física e poderiam se repetir citações de físicos destacados de teor semelhante às criticadas por Ullmo em relação à matemática, pouco importando para os nossos fins se tais

---

[248] In Silva, J.J. da. *Op. cit.*, p. 80.
[249] Ullmo, J. "Las matemáticas, son por naturaleza impotentes para explicar el devenir real?", pp. 392-393. In. F. Le Lionnais et alii. Las grandes corrientes del pensamiento matemático.

declarações tinham por objetivo adequar-se a um ambiente intelectual hostil ou são manifestações, digamos, honestas. Em relação à física, o que não cabe dúvida é que, em perspectiva histórica, a discussão que enfrentou os físicos entre causalistas e não-causalistas, entre leis deterministas e estatísticas, era vista em termos mais genéricos como a oposição entre razão e algum outro tipo de experiência, chame-se ela como se chame, inacessível à primeira.

Ora, Forman informa-nos que entre a abundante bibliografia consultada só conhece dos apelações decididas em favor do primeiro termo da mencionada oposição, *pelo seu caráter excepcional*. Uma delas corresponde a Hilbert, na já mencionada conferencia *Conhecimento da natureza e lógica*:

"Quem experimente a verdade dessas formas generosas de pensar e de conceber o mundo que se reflete nessas palavras de Jacobi não sucumbe ao ceticismo reacionário e infrutífero; não acreditará nos que hoje, com pretensão filosófica e tom superior, profetizam a decadência da cultura e não cairá no 'ignorabimus'."[250]

Informa-nos também Forman que H. Weyl, comentando esta sentença diz: "nossos contemporâneos não gostam de ouvir esse tipo de coisas; vêem nela racionalismo estreito ou presunção humana e, com um torrente de palavras confusas, apelam à 'vida', ou à 'verdade existencial' mais profunda, ou à 'finitude' do homem para justificar o repúdio à razão."[251]. (Por certo, palavras confusas semelhantes podem ler-se no próprio Weyl, sem o repúdio a razão.)

Ora, impossível não ler na citação de Hilbert, embora o tom possa-nos parecer hoje um tanto anacrônico e ingênuo, uma referência a Spengler. Em primeiro lugar, porque em Spengler encontramos esse tom profético superior que anuncia a decadência da cultura, ao qual se refere Hilbert. Em segundo lugar, porque *Conhecimento da natureza e lógica* apresenta uma tese de continuidade no desenvolvimento da física, que Spengler nega ao falar de uma física apolínea clássica inconmensuravel com a física faústica contemporánea. Em terceiro lugar, pela ênfase de Hilbert em ressaltar as descobertas científicas de seu período, ênfase contraposta ao quadro de decadência científica que Spengler pinta.

---

[250] *Conhecimento da natureza e lógica*, p. 387: "Wer die Warheit der grosszügigen Denkweise und Weltanschauung, die aus diesen Worten JACOBIS hervorleuchtet, empfindet, der verfällt nicht rückschrittlicher und unfruchtbarer Zweifelsucht; der wird nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegenem Tone den Kulturuntergang prophezein und sich in dem Ignorabimus gefallen."
[251] Citado in P. Forman. *Op. cit.*, p. 37.

Uma confirmação adicional a nossa conjectura a encontramos na inusitada afirmação de Hilbert que vimos na Seção 5.1 sobre a existência para Hilbert de resíduos antropomórficos na teoria kantiana do a priori. Justamente, Spengler critica a Kant por haver pretendido "eliminar resíduos antropomórficos", operação para Spengler impossível, na medida em que a ciência é expressão de formas históricas - leia-se: inevitavelmente antropomórficas - que seguem um curso semelhante ao dos organismos. Pelo contrário, para Hilbert podemos desprender-nos desses resíduos antropomórficos que existem em Kant, restando como a priori aquilo que subjaz ao conhecimento puro matemático: "Na teoria kantiana do a priori ainda ficam resíduos antropomórficos, dos quais deve liberar-se e, depois de termos despreendido deles, ficar só aqueles que pertecem àquele ponto de vista que subjaz ao conhecimento puro matemático: trata-se, em essência, do ponto de vista finito, caraterizado por mim em diferentes artigos."[252]

Se lembramos que no "assalto" à racionalidade que carateriza o período a matemática e seu formalismo apareciam como uma das máximas expressões dessa racionalidade contestada, então entendemos como uma toma de posição contrária de Hilbert quando escreve:

"O instrumento que faz a mediação entre a teoria e a praxe, entre pensamento e observação, é a matemática; ela edifica as pontes que as unem e as forma de maneira cada vez mais forte. Disto provém que a totalidade de nossa cultura contemporânea, enquanto ela descansa sobre a penetração conceptual e o uso da natureza, encontre seu fundamento na matemática."[253]

Ora, impossível também não ler uma crítica em dois frontes: por um lado, ao movimento intuicionista e sua rejeição, via os limites da intuição, a métodos matemáticos; por outro, aos físicos não-causalistas, que entendiam haver limites para o conhecimento do mundo: "Não há 'ignorabimus' para o matemático e, em minha

[252] Hilbert, D. *Conhecimento da natureza e lógica*, p. 385: "In der Kantschen Apriori-Theorie sind noch antrhopomorphe Schlaken enthalten, von denen sie befreit werden muss und nach deren Entfernung nur diejenige apriorische Einstellung übrigbleibt, die auch der rein mathematischen Erkenntnis zugrunde liegt: es ist im wesentlichen die von mir verschiedenen Abhandlungen charakterisierte finite Einstellung."

[253] *Ibid.*, p. 385: "Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Diensbarmachung der Natur beruth, ihre Grundlage in der Mathematik findet."

opinião, igualmente não o há para a ciência natural."[254] O próprio Weyl, podemos acrescentar, reunia precisamente as notas de intuicionista e não-causalista.

Não é, portanto, o contexto de um suposto positivismo ou empirismo "amplamente aceito pela comunidade científica da época" o que devemos procurar em Hilbert, senão uma particular resposta por oposição a certas posições entendidas por Hilbert como subjetivistas, céticas, relativistas. Em soma, notas que para Hilbert caraterizam a irracionalidade. Essa apelação de Hilbert à racionalidade pode hoje parecer um tanto caricaturesca, mas talvez devem também ser historicamente situadas e então eventualmente olhadas mais favoravelmente.

Seja como for, pode-se insistir que os pontos de vista defendidos por Hilbert são conseqüentes com o positivismo (lógico ou não). Neste caso, no mínimo, deveria especificar-se o como de tal influência, o qual não parece tarefa nada fácil. Mais prometedor, no entanto, parece ser examinar o problema da perspectiva implicitamente sugerida acima. Tal perspectiva parece-nos adiantada por A. d'Abro, que inclui no seu livro sobre a história da mecânica quântica um capítulo sobre as controvérsias em torno dos fundamentos da matemática, livro ao qual não conseguimos aceder, mas do qual temos uma referência em Forman. Escreve d'Abro:

"Pode até ser dito que a física moderna está testemunhando a mesma crise que estivemos discutindo na matemática: os teóricos quânticos ocupam a posição dos intuicionistas, enquanto que Einstein e Planck assumem a dos formalistas."[255]

Por certo, Hilbert encontra-se decididamente entre os causalistas, como o testemunha a seguinte passagem que basicamente é uma declaração de princípios:

"Salientamos, então, a existência na ciência atual de um ponto de vista que sobressai amplamente sobre as antigas perguntas e antigos objetivos de nossa ciência: é o caso que a ciência atual não apenas nos ensina a determinar, no sentido da mecânica clássica, os movimentos futuros e fenômenos esperados a partir dos dados

[254] *Ibid.*, p. 387: "Für den Mathematiker gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auf für die Naturwissenschaft überhaupt nicht."
[255] Citado in P. Forman. *Op. cit.*, pp. 66-67.

do presente, senão que também mostra que a composição presente da matéria sobre a terra e no universo não é aleatória ou arbitrária, senão que se segue de acordo com leis físicas."[256]

Ora, não pretendemos negar aqui e ali matizes de tipo empirista ou operacionalista, porque também os podemos encontrar em posições tão diferentes quanto as de um Einstein ou um Heisemberg. O que sim nos parece é que esse instrumentalismo ou operacionalismo não deve ser entendido numa formulação extrema que implique reconhecer para os enunciados fundamentais de uma teoria um papel de natureza puramente dedutiva, sem nenhum conteúdo semântico, ainda que para os fins da metamatemática seja suficiente considerar uma teoria matemática à maneira instrumentalista.

Por certo, também não pretendemos que a esquemática apresentação histórica que desenvolvemos nesta seção seja um argumento contra interpretações de tal natureza instrumentalista. Trata-se, outrossim, de proceder como face àquele desenho em que se vêem ou duas caras confrontes ou uma taça. Não há argumentos para provar que há duas caras confrontes e não - ou também - uma taça, somente podemos indicar como dirigir o olhar para ver, no lugar das caras, uma taça. Uma instrução -no nosso caso, uma sugestão- e não um argumento. Por certo também, tal mudança de perspectiva não implica necessariamente coincidir com as nossas conclusões.

5.5. Recapitulação

O presente capítulo tratou das interpretações que aproximam o Programa de Hilbert ao empirismo lógico ou a posturas operacionalistas ou instrumentalistas. Na Seção 5.1. mostramos que o espírito e a letra das concepções de Hilbert sobre a natureza do conhecimento matemático são incompatíveis com o empirismo lógico: o caráter não-analítico da matemática e o caráter de a matemática ser informativa sobre a realidade. Na Seção 5.2. mostramos que as coincidências que possamos achar entre Bridgman e Hilbert são, do ponto de vista filosófico, menos significativas que suas diferenças. Fundamentalmente, que para Bridgman a lógica e a

[256] *Conhecimento da natureza e lógica*, p. 382: "Wir bemerken dann in der heutigen Wissenschaft einen Gesichtspunkt, der weit über die älteren Fragestellungen und Ziele unserer Wissenschaft hinausgeht: es ist der Umstand, dass die heutige Wissenschaft nicht bloss im Sinne der klassischen Mechanik aus Daten der Gegenwart die künftigen Bewegungen und zu erwartenden Erscheinungen vorauszubestimmen lehrt, sondern sie zeigt auch, dass gerade die gegenwärtigen tatsächlichen Zustände der Materie auf der Erde und im Weltall nicht zufällig oder willkürlich sind, sondern aus den physikalischen Gesetzen folgen."

matemática são assimiladas a ciências empíricas, assimilação que não podemos nem remotamente encontrar em Hilbert.

Na Seção 5.3. examinamos interpretações que insistem mais especificamente no instrumentalismo. Documentamos, ao nosso parecer exaustivamente, que a concepção hilbertiana da física não responde a nenhum conceito de instrumentalismo usual. Quase poderíamos dizer que está implícita na análise da experiência de Hilbert uma recusa ao intrumentalismo. Em particular, destacamos que um instrumentalismo conseqüente não pode implicar que termos teóricos, para nossos fins identificados com não-observacionais, sejam "instrumentos" e, simultaneamente, denotem entidades reais, como pensa Hilbert.

Na Seção 5.4. sugerimos que todas essas interpretações partem de uma visão distorcida da problemática filosófica de entre-guerra. Reforçamos nossos argumentos para diferenciar a posição de Bridgman da de Hilbert. Com efeito, a análise da experiência do primeiro supõe pontos de partida manifestamente opostos aos do segundo: fluxo contínuo da consciência no solipsismo de primeiro; objetos discretos dados pela percepção anteriores ao pensamento no segundo. Concluímos que resultaria mais interessante enfocar o estudo do Programa de Hilbert em relação à polêmica razão-intuição vista: a) em primeiro lugar, sob a perspectiva geral da crise de confiança na racionalidade, associada a termos como "mecanicismo" e "formalismo", isso sim próprio da época; b) em segundo lugar, e como caso particular em conexão com o anterior, sob a perspectiva da polêmica nos fundamentos da física entre causalistas e não-causalistas. Esse enfoque está fora de nosso alcance, mas apresentamos, ao nosso parecer, elementos suficientes para confirmar nossa hipótese de que a preocupação central de Hilbert encontra-se na fundamentação intersubjetiva da matemática, por oposição a posturas que ele entende como subjetivistas.

Conclusão

No percurso de nosso trabalho desenvolvemos uma interpretação que procura encontrar o antecedente filosófico do Programa de Hilbert em Leibniz, no sentido de Hilbert desenvolver: a) uma crítica à proposta de fundamentação da matemática na intuição semelhante à de Leibniz em relação a Descartes; b) uma contraproposta na qual a formalização adquire um *status* na fundamentação da matemática cujo espírito encontramos também em Leibniz.

No que diz respeito ao primeiro ponto, na vasta literatura que examinamos em torno do Programa de Hilbert não encontramos referência ao que nos parece o seu ponto de partida fundamental: a crítica à intuição dos construtivistas como *subjetiva*, crítica que encontramos desde os *Fundamentos da Geometria* até os escritos de fins da década dos 20. Com efeito, em Hilbert é permanente a recriminação de *subjetivismo* aos que ele entende como aderindo a critérios subjetivos na fundamentação da matemática. Em geral, os matemáticos de postura *construtivista*; em particular, os matemáticos *intuicionistas*. Por certo, um ponto de partida simples que parece muito mais adequado que outras hipóteses interpretativas que procuram encontrar em concepções filosóficas elaboradas a "filosofia subjacente" ao Programa de Hilbert.

O ponto de partida mencionado careceria de interesse se nos limitássemos apenas a destacá-lo, mas a partir dessa constatação desenvolvemos, a partir do Capítulo 3, uma interpretação sistemática do formalismo hilbertiano. Um formalismo que reproduz, ao nosso ver, as "linhas mestras" que segue Leibniz na sua crítica a Descartes. A originalidade de nossa interpretação repousa sobre um tratamento sistemático dos temas leibnizianos sobre os quais chamamos a atenção no Capítulo 1 e que nos parecem, à diferença de "Consistência implica existência", percorrer a obra inteira de Hilbert. Pretendemos haver mostrado que em Leibniz e Hilbert achamos uma *forma mentis* comum para reagir face um inimigo comum: a aceitação de novos conceitos e métodos de prova matemáticos em função de uma instância considerada *subjetiva*, a saber, a intuição.

A crítica de Leibniz, como vimos, tinha como ponto de partida a objeção do caráter não-intersubjetivo da intuição cartesiana, por oposição ao caráter intersubjetivo da definição. Ora, da mesma maneira que Leibniz rejeita fazer repousar a aceitabilidade de conceitos e métodos matemáticos sobre a instância subjetiva da intuição, encontramos em Hilbert uma rejeição semelhante, mas o lugar das definições de Leibniz é ocupado pelos sistemas de axiomas. Em particular, salientamos que a importância atribuída por Leibniz e Hilbert às definições e aos sistemas axiomáticos excedia o âmbito da matemática. Em ambos os casos, definir e axiomatizar são instâncias fundamentais da teoria do conhecimento em geral, e não apenas do conhecimento matemático.

Se em Leibniz, então, encontramos que as definições e a prova de possibilidade do definido é a instância *intersubjetiva* oposta à intuição cartesiana, no caso de Hilbert encontramos como instância semelhante o sistema axiomático e a prova de consistência. Ora, além destes dois temas, reaparece em Hilbert, em conexão com os anteriores, um aspecto da *characteristica universalis* leibniziana: o formalismo como instância onde a consistência de uma teoria matemática pode ser provada.

Definição e sistema de axiomas, na medida em que são intersubjetivos, exigem satisfazer uma condição minimal: prova de não-contradição (possibilidade) do definido em Leibniz, prova de não-contradição (consistência) do sistema de axiomas em Hilbert. Assinalamos que à *characteristica universalis* podia então atribuir-se uma função fundacional, na medida em que a não-contradição (possibilidade) do definido apareceria como resultado das propriedades combinatórias dos símbolos (*characteres*). Vimos como em Hilbert progressivamente as teorias matemáticas fundamentais são completamente formalizadas e finalmente apresentadas num *sistema formal*, onde a prova de consistência reside em demonstrar que uma certa seqüência de símbolos não é teorema do sistema.

Mas em conexão com o formalismo aparece um quarto tema leibniziano: a relação entre o simbolismo e o simbolizado não é inteiramente arbitrária. Com efeito, os sistemas de símbolos não são *completamente arbitrários* tanto para Leibniz quanto para Hilbert. No caso de Leibniz, vimos como sua teoria das definições podia ser olhada sob o prisma da teoria da expressão: ainda que convencionais, as diferentes definições guardam para Leibniz uma relação estrutural não apenas entre elas senão com o definido, isto é, as idéias. Como caso particular, há uma relação estrutural entre a idéia atualizada (conceito) no âmbito do pensamento e seu correspondente sintático na *characteristica*. No caso de Hilbert, o sistema formal reflete a natureza do nosso pensar. Não se trata então de que a matemática seja um operar com símbolos dentro de um sistema formal, senão que o sistema formal reproduz o suficiente da natureza de nosso pensamento para que seja justificado afirmar que uma prova de consistência é garantia de conceitos e métodos matemáticos.

Em Hilbert encontramos, então, que o formalismo reflete a "técnica de nosso pensamento", pensamento que tem como condição proceder a partir de um número finito de premissas por um número finito de conseqüências lógicas. Neste sentido, como insiste Hilbert, o sistema formal não é um jogo: exprime a natureza de nosso pensamento. O formalismo conserva - repetimos - as notas essenciais do pensamento, de maneira tal que é uma instância intersubjetiva adequada para fundamentar a matemática, ciência cuja verdade não por ser assim fundamentada se encontra - lembrando a crítica de Brouwer - no papel.

Mas, face à consideração do infinito, encontramos outra íntima conexão entre Leibniz e Hilbert, que decorre da relação não completamente arbitrária entre pensamento e formalismo. Com efeito, encontramos a exigência do tratamento do infinito através do finito, isto é, através do formalismo. No caso de Leibniz, vimos que a definição "construtiva" de $\pi/4$ nos permitia a expressão do infinito e seu conseqüente tratamento matemático. No caso de Hilbert, o sistema de axiomas (formal ou não), permite-nos exatamente o mesmo: o "passo ao infinito". Mas a confiança com que podemos tratar com o infinito repousa sobre a consistência do sistema (agora) formal de que se trate. Mas, que quer dizer "tratar com o infinito"?

A tese "Consistência implica existência" no sentido em que uma prova de consistência implica a existência do infinito atual aparece somente nos primeiros escritos de Hilbert. Este fato permitiu-nos periodizar, por assim dizer, o formalismo hilbertiano, sendo *Pensamento axiomático* o escrito que podemos considerar como ponto de inflexão entre os períodos que distinguimos. Em *Pensamento axiomático*, não há referência a "Consistência implica existência", critério explícito em *Os problemas da matemática* e *Os fundamentos da lógica e da aritmética*. Ora, ainda que a prova de consistência de teorias matemáticas relevantes, e não de sistemas axiomáticos arbitrários, fosse o objetivo do programa de fundamentação hilbertiano, notamos precisamente esta modificação progressiva no pensamento de Hilbert em torno da significação atribuída à prova de consistência.

Com efeito, enquanto que nos primeiros escritos entende-se que o resultado da prova de consistência de uma teoria que "envolve" o infinito é a prova de existência do infinito atual, em escritos posteriores a tese "Consistência implica existência" é revisada: o infinito atual não existe e simultaneamente - como nos primeiros escritos - a prova de consistência é o teste último de aceitação de uma teoria matemática. Como já indicamos, os restantes temas leibnizianos, no entanto, persistem nos trabalhos posteriores.

Que a prova de consistência de uma teoria matemática é *conditio sine qua non* para aceitar conceitos e métodos matemáticos é, então, um ponto em que Hilbert não mudará seu pensamento, apenas mudará seu critério ontológico. A consistência de uma teoria não prova a existência do infinito *atual*, pois o infinito *atual* não existe nem na realidade nem no pensamento. O infinito aparece como uma *criação* do pensamento, criação na qual o pensamento vai além dos limites que lhe são próprios, isto é, o finito. Ora, independentemente da tese "Consistência implica existência", podemos pensar que tanto para Leibniz quanto para Hilbert, o pensamento, quando em relação ao infinito, só pode proceder através do finito. Em particular, na medida em que expressamos o pensamento através do formalismo.

Justamente, o tema leibniziano costumeiramente destacado, "Consistência implica existência", não é o tema essencial da filosofia de Leibniz que encontramos em Hilbert. O essencial encontra-se na procura de intersubjetividade e no papel do formalismo, tanto como uma instância dessa intersubjetividade, quanto como expressão não-arbitrária de nosso pensamento. Em Hilbert, a percepção aparece então no cerne da discussão sobre os fundamentos, como única instância intuitiva da qual cabe predicar a *intersubjetividade*, nota associada com a cientificidade. Ora, na primeira etapa do pensamento de Hilbert, a percepção pode ser entendida apenas como auxiliar do critério "Consistência implica existência", da mesma maneira que podemos atribuir à percepção um caráter fundacional como auxiliar da "visualização" do caráter não-contraditório de uma definição em Leibniz.

As teorias matemáticas são então consideradas do ponto de vista puramente sintático, isto é, como seqüências de sinais cujo significado é irrelevante. Mostrar que uma seqüência de símbolos não pode ser gerada a partir de outras seqüências de símbolos é provar a consistência da teoria. Na segunda etapa, a percepção continua a ser uma instância intersubjetiva auxiliar em relação à prova de consistência da teoria formal, mas Hilbert, para responder às objeções de Poincaré, deve justificar "na percepção" os métodos que permitem operar sobre seqüências de símbolos. Conseqüentemente, os raciocínios envolvidos na prova de consistência, prova que opera sobre sinais, têm sua legitimidade garantida na medida em que sejam justificados na percepção. Este é um aspecto da importância fundacional da percepção, decorrente de sua intersubjetividade, que não se esgota na metamatemática.

Com efeito, na segunda etapa, o papel da percepção aparece num novo plano: é propriamente a garantia de consistência (não-formal) e significação da matemática finitária, ficando como não-significativos, do ponto de vista finito, os conceitos transfinitos, justamente por não poder ser fornecida a intuição perceptual correspondente. Na mencionada segunda etapa, temos um processo que parte do dado na percepção como representação singular, as barras e operações entre barras. Este aspecto relaciona-se com o mencionado abandono da tese "Consistência implica existência": a consistência da teoria formal de números não prova a existência do conjunto infinito atual dos números naturais. À diferença da primeira etapa, onde o finito "chega ao ser" depois do infinito, temos como ponto de partida o finito.

Mas o finito é considerado "em progresso", isto é, o infinito potencial. O problema dos conceitos transfinitos não é um problema que envolva a existência do infinito atual, no mínimo na aritmética. Trata-se do problema de extrapolar ao infinito potencial conceitos e métodos cuja significação e consistência são "imediatas" no âmbito do finito. Se tratássemos de dar significação a um caso de terceiro excluído de igual maneira que no âmbito do finito, teríamos que percorrer *todos* os números naturais, uma tarefa irrealizável. Mas aceitar terceiro excluído entre nossas leis lógicas não implica assumir a existência da totalidade dos números naturais. Implica apenas que podemos tratar o infinito potencial de maneira semelhante à qual tratamos os conjuntos finitos, *se nos asseguramos a consistência desta extrapolação*.

Ora, o sistema formal reflete tanto a parte real da matemática quanto a parte ideal, isto é, as extrapolações que vão além do justificável na percepção. O ponto é menos declarar carente de sentido a matemática clássica, senão melhor falar de que a matemática clássica excede o âmbito daquilo que tem sentido do ponto de vista finito, isto é, carência de sentido relativa e não absoluta. Em particular, a discussão atinge o plano da lógica: em lugar da visão da lógica como disciplina subjacente não-problemática, a lógica clássica e sua legitimidade é um problema a ser resolvido também pela prova de consistência.

Resumindo, mostramos que a percepção é então a precondição para a intersubjetividade da ciência, mas não apenas no plano do reconhecimento de métodos de prova metamatemáticos, com vistas à prova de consistência, senão também como justificação *tanto* de alguns conceitos matemáticos *quanto* das operações lógicas, justificação necessária em função da nova maneira de tratar o problema da consistência. Esta perspectiva, implícita talvez nos primeiros trabalhos, é da máxima importância, *porque* Hilbert modificou substancialmente sua concepção do significado, na medida em que, nos escritos dos anos 20, significado é associado com existência, *apenas* do ponto de vista fundacional.

Assinalávamos que esta inversão de perspectiva em relação à lógica redundava na dúvida sobre a legitimidade de associar a Hilbert com o empirismo lógico. Em geral, esta inversão envolve a questão das categorias associadas analítico-a priori e sintético-a posteriori. Como é bem conhecido, para o empirismo lógico toda verdade analítica é a priori e toda verdade a priori é analítica. Examinamos, sem pretensão de ser exaustivos, as dificuldades de aplicar os critérios de analítico usuais dentro do empirismo lógico ao caso de Hilbert. Por certo, esta diferença de enfoque em relação à lógica marca também uma diferença óbvia entre o pensamento de Hilbert e a redução logicista de Leibniz. Com efeito, a matemática para Hilbert não é redutível a nenhuma instância em geral nem, em particular, à lógica.

Naturalmente, isto não descarta necessariamente *outro* conceito de analítico que coincida extensionalmente com a priori. Ora, se analítico é tomado simplesmente como sinônimo de a priori, então a discussão é apenas sobre palavras. Mas do que se trata no empirismo lógico é de atribuir às expressões "analítico" e "a priori" dois significados *independentes* e, então, mostrar que são extensionalmente equivalentes, *sem permitir* a possibilidade de admitir enunciados a priori (necessários) e "informativos" sobre a realidade. Como vimos no Capítulo 5, Hilbert admite tal tipo de enunciados. Ora, chamá-los de sintéticos a priori e, conseqüentemente, denunciar um kantismo hilbertiano só é viável como metáfora. Com efeito, o kantismo neste caso se reduziria a afirmar a irredutibilidade da matemática à lógica ou à "verdade pelo significado dos termos envolvidos".

Em relação já a um empirismo não necessariamente próprio do empirismo lógico, aparecem interpretações do formalismo hilbertiano que qualificamos de *formalistas moderadas* por oposição às *formalistas extremas*. Nos escritos de 1920, faz-se manifesta a mudança na teoria do significado acima mencionada e aparece também claro o novo papel, conforme assinalávamos, que tinha a consideração do formalismo: estudo das provas matemáticas. Como caso particular, esse estudo forneceria uma prova de que não há prova de "0 = 1" na aritmética transfinita. Como teoria do significado, retornaríamos a idéias leibnizianas: certos conceitos são, em lugar de instrumentos para o cálculo, instrumentos para provas. Mas a interpretação instrumentalista assinala que os "instrumentos" não têm nenhuma significação semântica.

Apontamos no Capítulo 5 algumas inconseqüências da interpretação instrumentalista de Detlefsen. Em primeiro lugar, indicamos que a distinção teórico-observacional não está associada, sem mais, à distinção sem sentido - sentido. De fato, introduz-se o conceito de conseqüência observacional para considerar *com significação empírica* os enunciados teóricos precisamente *por ter* conseqüências observacionais, independentemente de que os conceitos teóricos sejam ou não concebidos como instrumentos. Mas, ao outorgar sentido aos enunciados teóricos via o fato de ter conseqüências observacionais, mesmo dentro de posturas instrumentalistas, também se entende que se pode predicar deles não apenas significação senão também verdade. O pretendido aparelho categorial que suportaria a interpretação de Detlefsen é, portanto, discutível.

Além disso, parece-nos que há um suposto mais sutil acriticamente aceito por Detlefsen: uma identificação entre significado e condições semânticas de verdade estilo Tarski. Parece-nos que este suposto implícito leva a Detlefsen a conceber o Programa de Hilbert como instrumentalista, na medida em que não podemos aplicar-lhe o critério tarskiano de verdade sem inconseqüências. Justamente, o ponto é que esse critério não é por princípio aplicável ao caso de que tratamos. Com efeito, parte-se de objetos perceptíveis e dos conceitos que podemos justificar na percepção, para logo introduzir conceitos que não têm essa contrapartida. Em nenhum momento cabe falar de um domínio de objetos como um *conjunto* e que os conceitos sejam interpretados como *subconjuntos* do domínio. Qual a razão para depois concluir que no sistema formal os enunciados "teóricos" careceriam de significado por não respeitar, em última instância, a chamada definição semântica de verdade?

Ora, a interpretação instrumentalista pretende associar ao Programa de Hilbert teses características da filosofia da física da época. Como nestas interpretações postula-se um instrumentalismo hilbertiano em matemática por analogia de um (putativo) instrumentalismo hilbertiano em física, parece-nos que fornecemos no Capítulo 5 os elementos para pôr em dúvida a adequação dessa interpretação.

Com efeito, acreditamos ter documentado suficientemente que nada mais longe do pensamento de Hilbert em física que acreditar que os conceitos teóricos são instrumentos para manipular a experiência. Em primeiro lugar, porque Hilbert é manifestamente claro: aos conceito teóricos correspondem *entidades reais*. Em segundo lugar, mais importante nos parece ter destacado que, à diferença do empirismo lógico ou do instrumentalismo em geral, o ponto de partida de Hilbert é diferente já de raiz: uma análise da experiência que pressupõe o discreto anterior a todo pensamento, e não um fluxo contínuo na consciência.

Em terceiro lugar, salientamos que talvez seja de mais proveito examinar o pensamento de Hilbert em relação ao contexto filosófico considerando a problemática "razão - intuição". Num ambiente crítico à primeira, e de exaltação da segunda, que Hilbert deve ter entendido como manifestação de *subjetivismo*, destacamos uma coincidência entre causalistas e formalistas, respectivamente não-causalistas e intuicionistas. Essa coincidência aparece manifesta quando consideramos que tanto os não-causalistas quanto os intuicionistas representam, para Hilbert, a concessão ao *ignorabimus*. E o *ignorabimus* é para Hilbert um aspecto relacionado com relativismo, subjetivismo, irracionalidade.

Este caminho, que apenas sugerimos, de examinar o Programa de Hilbert e a discussão sobre os fundamentos da matemática em relação ao problema dos fundamentos da física parece-nos mais promissor do que aquele sugerido por uma versão distorcida da história da filosofia que atribui ao positivismo lógico e a concepções relacionadas uma predominância filosófica para a época que estavam muito longe de tê-la. Parece-nos que as interpretações que pretendem apoiar-se no contexto histórico, sequer indiretamente, deveriam enfocar sua atenção nos aspectos do período por nós assinalados, e não em reconstruções de duvidoso valor histórico.

Em relação ao tipo de instrumentalismo considerado por Detlefsen e Giaquinto parece-nos que também ignoram o contexto histórico-filosófico que é necessário considerar. Com efeito, mostramos como para o empirismo lógico as teses de Hilbert sobre a natureza da matemática são heréticas, e não duvidamos que vale para Hilbert a recíproca. Em particular, se temos razão ao pensar que o artigo de Hahn é um réplica a *Conhecimento da natureza e lógica*, podemos assinalar o interessante paralelismo seguinte: o artigo "Positivismo e realismo" de Schlick é uma resposta a um artigo de M. Planck onde se rejeita o positivismo como instrumentalista, acusação que, por certo, Schlick também rejeita. Ora, o que nos interessa ressaltar que se trata, em ambos os casos, de destacados representantes da "velha guarda" científica, causalistas e decididamente *anti-instrumentalistas*. Insistimos, portanto, que o contexto histórico-filosófico do Programa de Hilbert não é adequadamente compreendido por tais intérpretes.

Mas a incorreção da interpretação instrumentalista repousa para nós sobre um outro suposto que compartilha com a interpretação formalista extrema. Com efeito, devemos levar permanentemente em conta os contextos nos quais as afirmações de Hilbert adquirem seu sentido próprio; em especial, devemos distinguir entre as teorias matemáticas na prática usual da ciência e essas mesmas teorias olhadas da perspectiva dos fundamentos. Esta distinção levou-nos a qualificar a posição de Hilbert como *formalismo metodológico*.

Entendemos que a interpretação instrumentalista confunde, da nossa perspectiva, teses relativas à tarefa de fundamentos com teses substantivas relativas à filosofia da matemática. Porém, se não cabe atribuir a Hilbert a posição que denominamos formalismo metodológico, então talvez deva-se conceder que a única justificativa do formalismo é instrumental ou operacional. Ora, o que denominamos formalismo metodológico, por oposição ao formalismo extremo e moderado, permite distinguir duas questões independentes, ainda que relacionadas. Por um lado, a questão dos fundamentos, o tema próprio do programa de fundamentação. Por outro lado, a questão da justificação semântica da denominada parte ideal. A relação que vige entre ambas questões é óbvia: o resultado positivo sobre os fundamentos - a prova de consistência - aparece no Programa de Hilbert como condição prévia para aquilo que denominamos justificação semântica.

Pelo dito, vemos por que afirmamos que podemos examinar qual a justificativa semântica dos aspectos transfinitos da matemática e simultaneamente afirmar que o sistema formal é um recurso metodológico para a prova de consistência, recurso justificado na medida em que o sistema formal reflete "a técnica de nosso pensamento". Ora, parece que a questão da justificação semântica envolve a matemática como ciência, e não a matemática como objeto da metamatemática. Por certo, não pretendemos negar esta dificuldade: progressivamente faz-se mais sutil a distinção entre matemática como ciência e matemática como objeto da metamatemática, especialmente devido ao fato de que para Hilbert toda a matemática é completamente formalizável. No entanto, achamos que a distinção pode e deve ser mantida.

Com efeito, se queremos procurar uma posição filosófica em Hilbert podemos deixar de lado a identificação entre matemática e sistema formal, na medida em que a oposição fundamental entre intuição e formalismo opera já na linguagem semi-formalizada usual dos matemáticos. O problema é, para citar um exemplo, usar o "Axioma da escolha", seja apresentado na linguagem semi-formalizada de Zermelo, seja nos sofisticados sistemas formais da teoria de conjuntos. Em uma ou outra apresentação caberia a objeção de "formalismo", no sentido de um operar cego com sinais sem significado.

Ora, a resposta à pergunta pela significação do formalismo não deve ser procurada no instrumentalismo, ainda que para fins metamatemáticos possamos contentarmo-nos com entender o formalismo como mero *device* para realizar provas. Esta maneira de ver a matemática é um aspecto daquilo que denominamos formalismo metodológico. Tanto as interpretações formalista extrema quanto moderada obtêm, apressadamente ao nosso ver, a partir das afirmações de Hilbert relativas à matemática, *da perspectiva da teoria da prova*, conclusões que dizem respeito à *própria* matemática, especialmente em relação à questão do significado. É da perspectiva da teoria da prova que pode entender-se que a matemática (parcial ou totalmente) carece de significado, visto ser suficiente este ponto de partida em função do objetivo da demonstração de consistência. Com efeito, trata-se de um ponto de partida metodológico, e não uma tese substantiva em filosofia da matemática.

Esta maneira inusual que desenvolvemos para tratar a "filosofia subjacente" ao Programa de Hilbert permite-nos levantar, então, a questão da *justificação semântica* da matemática propriamente dita, independentemente da *fundamentação da matemática*, via teoria da prova. O problema que denominamos justificação semântica surge naturalmente quando Hilbert abandona a tese "Consistência implica existência" e se, como pensamos, a matemática não é para Hilbert uma "jogo de fórmulas" na qual algumas fórmulas têm significado e outras carecem dele, sendo estas últimas meros instrumentos demonstrativos.

Vimos que na matemática, transformada em sistema formal, declaramos todas as fórmulas sem sentido e na metamatemática restringimos os meios de prova aos métodos finitários. Vimos, além disso, que a prova de consistência tem uma significação diferente nos trabalhos por volta de 1920, na medida em que nela se procura, talvez de maneira não completamente ciente, uma prova de eliminação dos conceitos transfinitos, isto é, uma maneira de mostrar que o recurso ao formalismo, no sentido do formalismo não ter uma contrapartida "conteudística" ponto a ponto, é inessencial no seguinte sentido: os resultados que obtemos com esse formalismo sobre a parte real da matemática poderiam ser obtidos sem ele.

Porém, cabe levantar a seguinte questão: embora não pertencentes à parte real da matemática, há resultados que são usualmente entendidos como matematicamente significativos. Ora, é a matemática o estudo das regras de transformação de um formalismo, seja que consideremos esse formalismo como total ou parcialmente desprovido de significado? Em outros termos, aceitar conceitos matemáticos para os quais se carece da contrapartida perceptual correspondente redunda num formalismo extremo ou num formalismo moderado, como o sugerido pelas interpretações instrumentalistas?

Na nossa interpretação nem identificamos os números com os numerais nem entendemos que os objetos da matemática sejam as barras como denotação dos numerais. Justamente, quando Hilbert está já certo de que seu programa será exitoso, que apenas faltam questões de detalhe por resolver, expõe uma visão da matemática em que percepção, a priori e formalismo estão relacionados de uma maneira peculiar, maneira que não naufraga nem no empirismo, nem no operacionalismo, nem no platonismo, nem no apriorismo da sensibilidade kantiano.

Nossa proposta de interpretação consiste, em primeiro lugar, em conceber o papel da percepção como garantia de intersubjetividade da parte real da aritmética, um *terminus ad quem* podemos reconduzir certos *conceitos* matemáticos, de forma tal que não caiba dúvida nenhuma sobre sua legitimidade. O primado fundacional da percepção não resulta necessariamente numa tese de natureza ontológica sobre *o que* dos números naturais no sentido em que diríamos que os números são objetos da percepção, "marcas sobre o papel" ou algum outro "objeto" da experiência perceptual.

Mas a matemática não se esgota em conceitos com contrapartida perceptual, senão que admite conceitos sem contrapartida na percepção. Para estes conceitos não há contrapartida conteudística, seu *locus* de justificação é a analogia e seu *locus* de fundamentação a consistência do formalismo que "expressa" tal analogia.

O problema que enfrentamos é que, ainda que a consistência de uma teoria matemática seja uma condição necessária - e para os fins da fundamentação da matemática suficiente -, exige-se uma justificação dos conceitos transfinitos além da consistência, pois, como assinalamos, Hilbert na década do 20: a) já não partilha "Consistência implica existência"; b) descartamos também que se trate de simplesmente considerar a matemática como um sistema de regras de produção de símbolos carentes de sentido, ponto de vista adotado em função das necessidades de fundamentação; c) uma filiação direta com o positivismo lógico ou o instrumentalismo e afins é, no mínimo, discutível.

Tal justificação encontra-se numa postura de natureza mais gnosiológica do que ontológica: a consistência implica que certas extrapolações são legítimas para a produção de conhecimento. No caso da aritmética, porém, não se trata de conceitos que tenham a periculosidade dos conceitos da teoria de conjuntos: não há nenhuma suspeita sobre a consistência da mesma e dos métodos clássicos de inferência. O que sim podemos dizer é que no caso de existir algum problema, ele estaria localizado no uso dos quantificadores, das leis lógicas clássicas, e na formulação do princípio de indução, na medida em que as fórmulas consideradas podem ter qualquer grau de complexidade. Por certo, a prova da consistência da teoria de números aponta simplesmente a constatar esse fato fora de dúvidas. Dai a confiança na possibilidade de uma tal prova.

Ora, acreditamos que a visão da ciência atribuída a Hilbert nas interpretações instrumentalistas não parece adequar-se aos pontos de vista de Hilbert. Uma ciência é um entrelaçado de conceitos e que a ciência começa com intuições é correto, mas continua com conceitos e acaba em idéias. Esta célebre sentença de Kant inicia os *Fundamentos de Geometria* e sua escolha não é casual: não há ciência se reconhecemos como verdadeiras sentenças elementares isoladas ou, se aceitamos a interpretação instrumentalista, se ficamos no dado pela percepção e consideramos o resto instrumento.

Para Hilbert temos ciência, em particular matemática, quando essas sentenças isoladas aparecem numa teoria, organizadas de forma dedutiva. Para tal, são necessários a expressão da generalidade e os métodos de prova que permitem introduzi-las. Mas disto não decorre que se trate de dar uma interpretação puramente dedutiva - formal - dos axiomas e regras de dedução, ainda que para fins de fundamentação, na matemática ou na física, seja suficiente considerar uma teoria apenas desta perspectiva.

Numa teoria, a questão é estabelecer que propriedades e relações se dão entre os conceitos. Restringindo-nos à aritmética, então percebemos que o problema dos conceitos, umas vez que por tais entendemos conceitos "decidíveis", isto é, com contrapartida perceptual, resolve-se no problema da introdução da generalidade. E como método fundamental de prova aparece a indução "mais simples" de que fala Hilbert. Por outro lado, sabemos que a matemática não se esgota no aceitável do ponto de vista finito. Ora, qual então a concepção de conhecimento que subjaz ao Programa de Hilbert?

Falávamos no Capítulo 4 da dificuldade de justificar na percepção as afirmações gerais e o raciocínio indutivo, justificação que a percepção *qua* representação singular não pode fornecer. Pareceria, portanto, que o finitismo, entendido como construtivismo radical, tem que reconhecer uma outra fonte, além da percepção, para o conhecimento matemático. Ora, em *Conhecimento da natureza e lógica* Hilbert examina os problemas da teoria do conhecimento a partir das categorias clássicas experiência e pensamento e, como vimos no Capítulo 5, Hilbert admite a existência de uma tal terceira fonte do conhecimento.

Como conciliar as teses de *Conhecimento da natureza e lógica* com a maneira em que Hilbert desenvolve sua tarefa metamatemática de fundamentação? De novo, o problema está no contexto em que Hilbert considera o problema. Por um lado, não se trata de como caraterizar conceitos através de como são (ou devem ser) usados na matemática, senão de interpretá-los para garantir seu uso fundacional, isto é, com fins metamatemáticos. De fato, em *Conhecimento da natureza e lógica*, qualquer referência à percepção de cunho empirista é inexistente: o pensamento matemático aparece na sua tradicional independência da experiência. Qual a relação então entre percepção e pensamento finito?

Ora, achamos que a posição de Hilbert resulta melhor caraterizada como segue: não construímos os números, porém eles não resultam ser agora simplesmente dados, senão que podemos constatar o a priori matemático na percepção. H. Sinaceur parece apontar ao mesmo que nós quando diferencia a *construção na forma da intuição* kantiana do que ele chama de *construção intuitiva* em Hilbert: do ponto de vista fundacional, dado o pensamento finitário, podemos chegar à percepção como um *terminus ad quem*, a uma instância que deve ser por todos aceita.

O conhecimento que fornece a teoria finitária de números, então, é um conhecimento a priori, de natureza conceptual, que *pode* ser constatado na percepção, mas que não *requer* a percepção para seu estabelecimento. Logo, a distinção entre construtivistas e finitistas não consiste apenas no fato dos primeiros considerar a atividade do sujeito de conhecimento que constrói os objetos matemáticos e os segundos assumir um sujeito passivo para o qual os objetos têm que ser dados na percepção. A diferença se encontra mais no tipo de provas que um e outro admitem, em função das diferentes concepções gnosiológicas, e não, em última instância, ontológicas.

Justamente, a aritmética de Peano, apresentada como sistema formal no Capítulo 4, não faz restrições nem sobre a aplicabilidade das leis lógicas nem sobre o alcance do princípio de indução: após os conceitos vêm as idéias. Ora, se as restrições mencionadas no âmbito dos conceitos estão justificadas direta ou indiretamente na percepção, resta a justificação das idéias, conceitos que carecem de constatação, sequer num sentido indireto, na percepção.

Hilbert atribui aos conceitos matemáticos o tradicional caráter de a priori. A percepção permite, no caso de certos conceitos, constatar intersubjetivamente seus enlaces. Mas a matemática não se reduz a tais conceitos e seus enlaces - não se reduz ao pensamento finito - senão que procede por extrapolação analógica, extrapolação à qual não pode ser fornecida contrapartida na percepção. Embora justificadas, - diríamos, do ponto de vista semântico - *per analogiam*, o teste último é sua fundamentação, isto é, sua consistência. O resultado dessa extrapolação, por outro lado, aparece, como não poderia ser de outra maneira, na linguagem e não em processos "com conteúdo". No entanto, os conceitos transfinitos não são usados apenas para demonstrar resultados finitários, e os resultados não finitários não são entendidos por um matemático clássico como sem significado. Como então conservar a significação da matemática clássica como conhecimento teórico que envolve idéias da razão?

Na nossa análise caracterizamos a Hilbert como um formalista metodológico, no sentido de que apenas da perspectiva da metamatemática há uma parte da matemática com significado, a parte real, e outra que carece de significado. Mas quando pensamos na matemática propriamente dita, independentemente do problema da fundamentação, a analogia complementa os processos com conteúdo que caracterizam a parte real da matemática.. Deste ponto de vista, o a priori conceptual, constatado na intuição perceptual, é complementado pelas idéias. De outra perspectiva, pelo formalismo. Quando nossos conceitos são extrapolados além das condições nas quais a percepção, sequer de maneira indireta, permite constatá-los, só temos uma contrapartida simbólica desses conceitos. Faz isto da matemática um jogo, uma atividade à qual não pode ser assinalado *nenhum* significado? Achamos que não, que do que se trata é que Hilbert tem levado a primeiro plano o componente *analógico* da atividade matemática, componente relevante no estabelecimento de novos princípios de prova.

Com efeito, o formalismo reflete também nosso pensamento, pensamento que não deve ser reduzido aos chamados processos com conteúdo. Para nós, deve separar-se o âmbito que denominamos de justificação semântica do âmbito dos fundamentos, separação que exige como precondição conceber o formalismo de Hilbert como metodológico. Concebido como formalismo metodológico, não se traduzem as afirmações de Hilbert sobre a matemática da perspectiva da metamatemática diretamente como afirmações de natureza filosófica sobre a própria matemática, o qual nos dá a possibilidade de perguntarm-nos pela implícita "teoria do significado", se assim podemos falar, de Hilbert.

Na interpretação de Hilbert, os conceitos transfinitos (lidos como "idéias da razão") redundam numa complementação de natureza heurística dos conceitos finitários, isto é, aqueles que são suscetíveis de serem constatados na percepção. O caráter a priori dos conceitos finitários foi também destacado por nós, mas a natureza desse a priori fica sem explicar. As referências a Kant no Capítulo 4 pretendem mostrar apenas como opera uma espécie de hierarquia que vai da intuição até as idéias passando pelos conceitos, hierarquia a qual Hilbert dá uma estrutura diferente.

Com efeito, em primeiro lugar, podemos afirmar que o apriorismo hilbertiano exclui a intuição pura kantiana. Certamente, acreditamos haver mostrado com suficiente clareza que a percepção da qual fala Hilbert é a percepção no sentido usual da palavra, destacadamente a percepção visual, o que não quer dizer que se trata de uma percepção "desqualificada", no sentido de simples "dados sensíveis". Ora, depende a aritmética, sequer para sua aplicação, da estrutura dos objetos do mundo no sentido de serem - além de "finitos" - tais que a percepção permita discriminá-los em sua identidade e diferença, determinar se possuem ou não certas propriedades de maneira efetiva, etc.? Algumas das passagens indicadas nos últimos dois capítulos assim parecem indicá-lo, mas achamos que também é possível reinterpretar as idéias de Hilbert.

Com efeito, embora neguemos a possibilidade de atribuir a Hilbert formas da sensibilidade no sentido kantiano, achamos compatível considerar que as por ele chamadas "condições do conhecimento em geral" - as notas características do "ponto de vista finito" - podem ser entendidas como condições da percepção em geral, não apenas da visão. Em outras palavras: tratar-se-ia para Hilbert de uma exigência do conhecimento que a percepção, seja qual for, apresente-nos objetos nas condições acima mencionadas, e não uma tese ontológica sobre a natureza dos objetos mesmos ou uma hharmonia preestabelecida entre pensamento e realidade.

Ora, o problema que nos parece de mais difícil solução é a questão da aprioridade dos conceitos aritméticos, que não deve ser tratado de forma tal que resulte numa "ontologia formal", e sua relação com a percepção. Pensamos que uma saída para este problema pode passar pelo exame, por assim dizer, das mencionadas condições da percepção em geral, sem as formas da sensibilidade kantiana. Supostas essas (putativas) condições da sensibilidade caberia falar da aprioridade dos conceitos e operações aritméticas. A constatação do a priori na percepção, necessária para os fins metamatemáticos, ocorreria nas condições efetivas de nossa percepção, com o que evitaríamos um círculo vicioso manifesto.

Se esta conjectura - de caráter exploratório e não conclusivo - é viável, então parece-nos que nos permite falar de constatação na percepção efetiva - e não em geral - da aritmética finitária. Por certo, não pretendemos afirmar que a constatação na percepção da qual falamos acima proceda de maneira semelhante ao esquematismo kantiano. Trata-se - insistimos - de considerar a seqüência intuições - conceitos - idéias kantiana em analogia com a seqüência percepção - conceitos finitários - conceitos transfinitos hilbertiana.

Como já sabemos, a aritmética não se restringe apenas à aritmética finitária: após os conceitos, as idéias. Para justificar os conceitos transfinitos recorre Hilbert, como vimos, ao conceito kantiano de idéia da razão. O que nos chamou a atenção é que Kant faz repousar, por assim dizer, a significação das idéias na analogia, significação de alcance limitado, no caso de Kant, ao conhecimento prático. O formalismo é a contrapartida da extrapolação analógica, que na concepção de Hilbert viria em última instância a ser indispensável no conhecimento teórico, tese que, naturalmente, Kant não aceitaria. Os processos analógicos de nosso pensamento conduzem à extrapolação que chamamos de leis lógicas clássicas; conduzem às definições impredicativas como extrapolação de um procedimento perfeitamente legítimo no âmbito do finito; conduzem ao axioma da escolha, quando concebido por analogia como uma "conjunção infinita".

Mas o que serve de base para essa analogia é justamente o uso legítimo no âmbito dos conceitos com constatação na percepção, e sua única justificativa ulterior só poderia ser a prova de consistência por métodos finitários. Tal justificação poderia ser definitiva, caso o Programa de Hilbert pudesse ser levado a cabo na versão mais estrita. Como isso não pode ser feito, a justificação última é, digamos, sempre problemática, embora alcancemos progressivamente maior confiabilidade, do ponto de vista metamatemático, através de provas de consistência que reduzam ao mínimo o arsenal usado na prova.

Mas, em último termo, devemos ou não insistir numa filiação kantiana do Programa de Hilbert? Ou devemos procurar, como nós achamos, uma *forma mentis* leibniziana? Inclinamo-nos pela segunda das opções. O que em Hilbert podemos achar de kantiano é sua teoria dos conceitos, no sentido de reconhecer conceitos que vão além do dado da percepção, e não que todo conceito matemático seja legítimo apenas se é construído. Se temos razão numa afirmação à qual atribuímos o caráter exploratório acima, inclusive poderíamos pensar que há algo da idéia de "argumento transcendental" na maneira de Hilbert conceber a aprioridade e aplicação dos conceitos numéricos, isto é, que sua natureza é "derivada" das condições da sensibilidade satisfeitas pelo que se adequa ao "ponto de vista finito". Mas o que nos parece fundamental é a contrapartida leibniziana que atribui ao formalismo uma natureza não completamente arbitrária, uma "teoria" sobre o formalismo que não se encontra em Kant, e sobre a qual desenvolvemos nossa interpretação.

Por outro lado, se e até que ponto os resultados de limitação sobre formalismos tornam inaceitável uma justificação por extrapolação analógica é a segunda questão a tratar. Em princípio, o que parece afetar é a questão da segurança que podemos ter em relação às mencionadas extrapolações, e não contra o fato de realizá-las. Sem dúvida, há no sentido de "refutação do ceticismo" um fracasso do Programa de Hilbert, mas isso não é decisivo, segundo achamos, na concepção da matemática que atribuímos a Hilbert como resultado de nossa interpretação.

O impacto dos resultados de limitação não são, segundo nos parece, um obstáculo que resulte no abandono completo da concepção filosófica subjacente que atribuímos ao Programa de Hilbert, concepção que vai adequando-se à natureza dos resultados científicos obtidos, direito que ninguém pode negar a não ser que se acredite numa *philosophia perennis*. *Perennes* são as questões e neste sentido temos procurado através da obra de um grande matemático (e não de um filósofo) as respostas implícitas àquelas questões.

O resultado dessa procura não consiste numa filosofia hilbertiana da aritmética senão nos princípios que deveriam informar uma tal filosofia, atendendo inclusive ao fato da necessária reformulação em função dos resultados teóricos obtidos na pesquisa sobre fundamentos. Em primeiro lugar, a natureza do a priori característico da aritmética. Em segundo lugar, a relação entre a priori e percepção, entendida a última como garantia da evidência intersubjetiva. Em terceiro lugar, que os sinais não estão apenas no princípio na matemática, como escreveu Hilbert, senão também, e tão fundamentalmente, no fim.

Que em Hilbert não achemos uma elaboração destes "princípios" é perfeitamente excusável. Trata-se menos de uma dívida de Hilbert com a filosofia do que uma dívida da filosofia para com Hilbert. Se essa dívida é legítima, já é matéria de (outra) discussão.

Bibliografia

Abrusci, V.M. " ' Proof ', ' Theory ' and ' Foundations ' in Hibert's Mathematical Work from 1885 to 1900". In Maria Luisa Dalla Chiara (ed), Italian Studies in the Philosophy of Science, 453-491. D. Reidel P. Co.1980.

——— "Per uma caratterizzazione del programma hilbertiano". *Rivista di Filosofia*. Volume LXVI, fasciolo III, ottobre 1975.

Ayer, A.J. Lenguaje, verda y lógica. 2da. ed. Barcelona. Martinez Roca. 1971. 184 p.

Belaval, Y. Leibniz critique de Descartes. Paris. Gallimard. 556p.

Bernays, P. On Platonism in Mathematics. In: Bencerraf, Paul e Putnam, Hilary (eds.): Philosophy of Mathematics, New Jersey, Prentice-Hall, 1964, pp. 274-286.

——— Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration. In: Gonseth, Ferdinand (org): Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathematiques. Zurich, S.A. Leeman frères & Cie., 1941, p.144-161.

——— Mathematics as a domain of theoretical science and also of mental experience. In: Rose H. E. e Shepherdson, J. C. (eds). Logic Colloquium Proceedings, Bristol, 1973, p. 1-5.

Bilderling, B. von. "Categorias puras y categorías esquematizadas". *Revista de Filosofia*. Buenos Aires. II(1): 67-79, 1987.

Bolzano, B. Sur la doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions. (*Appendice* des *Contributions à une exposition mieux fondée des mathématiques* (1810)). *Philosophie*, Paris, 27: 2-12, 1990.

Bridgman, P.W. "A Physicist's Second Reaction To Mengenlhere". *Scripta Mathematica*, II: 101-117, II: 224-234, 1934.

——— La naturaleza de la teoría fisica. Buenos Aires. Ibero-Americana. 1948. 187p.

——— The Logic of Modern Physics. New York. The MacMillan Co. 1946. 228p.

Capozzi, M. "Kant on mathematical definition". In: Dalla Chiara, Maria Luisa (ed). Italian Studies in the Philosophy of Sciences, Reidel, 1980, 423-452.

Couturat, L. La filosofia de la matemática de Kant. México. Universidad Autónoma de México. 1960. 127p.

Dascal, M. Language, Signs and Thougths. A Collection of Essays. John Benjamins P. Co. Amsterdam-Philadelphia. 1987.

Descartes, R. Les règles pour la direction de l'ésprit. In: Descartes. Oeuvres philosophiques. Paris. Garnier. 1963. 829p.

--------- Le discours de la méthode. In: Descartes. Oeuvres philosophiques. Paris. Garnier. 1963. 829p.

--------- Meditações. Objeções e respostas. In: Descartes. São Paulo. Abril Cultural (Coleção Os Pensadores). 1963. 336p.

--------- The Geometry. New York. Dover. 1954.

Detlefsen, M. Hilbert's Program. An Essay on Mathematical Instrumentalism. Dordrecht. Reidel. 1986. 186p.

---------- "On Interpreting Gödel's Second Theorem". *Journal of Philosophical Logic*. 8: 297-313, 1979.

---------- "On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel's First Incompleteness Theorem". *Journal of Philosophical Logic*. 19: 343-377, 1990.

--------- "Hilbert's Formalism". *Revue Internationale de Philosophie*. 186 (4): 285-304, 1993.

Forman, P. "A Cultura de Weimar, a causalidade e a Teoria Quântica, 1918-1927". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*. Sup. 2. 1983. pp. 98.

Gandt, F. De. Newton: La justification des infiniment petits et l'intuition du movement. In: Mannoyeur, F. (org): Infini des mathématiciens, infini de philosophes. Paris. Belin. 1992. pp. 147-157.

Giaquinto, M. "Hilbert's Philosophy of Mathematics". *British Journal of Philosophy of Science*. 34: 119-132, 1983.

Hahn, H. Logik, Mathematik und Naturerkennen. In: Hahn, H. Empirismus, Logik, Mathematik. Frankfurt, Surhkamp, 1988. (Utlizamos também a tradução espanhola "Lógica, matemática y conocimiento de la naturaleza". In: Ayer, A.J. (comp): El positivismo lógico. México. FCE. 1965. pp. 153-167.)

Hamelin, O. El sistema de Descartes. Buenos Aires. Losada. 1949. pp. 398.

Hempel, C. "Problemas y cambios en el criterio empirista de significado". In: Ayer, A.J. (comp): El positivismo lógico. México. FCE. 1965. pp 115-136.

Hilbert, D. Foundations of Geometry. Open Court. La Salle. 1980. 226p. (Translated by L. Unger from the 10th Edition. Revised and Enlarged by P. Bernays)

---------- Mathematische Probleme, 1900. In *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, New York. Chelsea. 1965.

---------- Axiomatisches Denken, 1917. In *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, New York. Chelsea. 1965.

---------- Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, 1904. In Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie, Anhang VII. (Utilizamos também a tradução inglesa "Foundations of Logic and Arithmetic". In J. van Heijenoort (ed): From Frege to Gödel. Harvard University Press. Cambridge. 1967.

---------- Über das Unendliche, 1925. In Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie, Anhang VIII. (Utilizamos também a tradução inglesa "On the Infinite". In J. van Heijenoort (ed): From Frege to Gödel. Harvard University Press. Cambridge. 1967. Também a tradução inédita ao espanhol de Carlos Gonzalez.)

---------- Die Grundlagen der Mathematik, 1927. In Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie, Anhang IX. (Utilizamos também a tradução inglesa "The Foundations of Mathematics". In J. van Heijenoort (ed): From Frege to Gödel. Harvard University Press. Cambridge. 1967.)

---------- Naturerkennen und Logik, 1930. In *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, New York. Chelsea. 1965.

---------- Die Grundlegung der elementaren Zahlenlhere, 1931. In *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, New York. Chelsea. 1965.

KANT, M. Prolegómenos a toda metafisica futura que pueda presentarse como ciencia. Buenos Aires. Charcas, 1984. 217p.

---------- Por que no es inutil una nueva crítica de la razón pura. Buenos Aires. Aguilar. 1960. 123p.

---------- Crítica da razão pura. São Paulo. Abril Cultural. 1980. 415p.

---------- Los progresos de la metafisica. Buenos Aires. EUDEBA. 1989. 172p.

---------- Lógica. Rio de Janeiro. Tempo Brasileiro. 1992. 182p.

Kitcher, Ph. "Hilbert's Epistemology", *Philosophy of Science*, 43: 99-115, 1976.

Klein, F. Elementary Mathematics. From an advanced Standpoint. New York. Dover Publications. X + 274p.

Körner, S. The Philosophy of Mathematics. An Introduction. New York. Harper & Brothers. 1960. pp.198.

Kreisel, G. Wath have we learn from Hilbert's Second Problem? In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, v. 28, 1976, p. 93-130.

--------- Hilbert's Program. In: Bencerraf, Paul e Putnam, Hilary (eds.): Philosophy of Mathematics, New Jersey, Prentice-Hall, 1964, pp. 157-180.

Leibniz, G.W. Demostración de las proposiciones primarias. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- El ser perfectísimo existe. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Todo posible exige existir. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Qué es idea? In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Discurso de metafisica. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Verdades necesarias y contingentes. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Verdades primeras.

--------- Sobre la síntesis y el análisis universal o sea sobre el arte de inventar y de juzgar. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

--------- Diálogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras. In E. de Olaso (ed): G.W. Leibniz. Escritos filosóficos. Buenos Aires. Charcas. 1982. 666p.

Lorenzen, P. Pensamiento metódico. Buenos Aires. Sur. 1973. 146p.

Martin, G. Kant. Ontologia y epistemologia. Universidad Nacional de Córdoba. 1961.

McRae, R. " "Idea" as a philosophical term in the Seventeenth Century", *Journal of the History of Ideas*, 26: 175-190, 1965.

Magnard, P. La pensée moderne a l'épreuve de l'infini. In: Mannoyeur, F. (org): Infini des mathématiciens, infini de philosophes. Paris. Belin. 1992. pp. 131-145.

Molina, J. A. "Definiciones impredicativas". *Revista de Filosofia*. Buenos Aires. II(1): 43-66, 1987.

Monnoyeur, F. L infini et l indefini dans la théorie cartesienne de la connaissance. In: Mannoyeur, F. (org): Infini des mathématiciens, infini de philosophes. Paris. Belin. 1992. PP. 83-94.

Mugnai, M. "Idee, espressioni delle idee, pensieri e *caratteri* in Leibniz", *Rivista de Filosofia*. 64 (3): 219-231, 1973.

Neumann, J. von. The Formalist Foundations of Mathematics. In: Bencerraf, Paul e Putnam, Hilary (eds.): Philosophy of Mathematics, New Jersey, Prentice-Hall, 1964, pp. 50-54.

Pap, A. Semántica y verdad necesaria. México. Fondo de Cultura Económica. 1970. 483p.

Prawitz, D. Philosophical aspects of proof theory. In Floistad (ed): Contemporary Philosophy, vol. 1, p. 235-277. 1986.

Raggio, A. R. "El cinquentenario de los *Grundlagen der Mathematik* de Hilbert y Bernays", *Revista Latinoamericana de Filosofia*. Buenos Aires, XVI (2): 197-211, 1990.

——— "Consideraciones sobre la concepción kantiana de la lógica formal", Universidad Nacional de Córdoba. s/d.

——— "La filosofia matemática de Kant", *Manuscrito*. Campinas, II (1): 7-18, 1978.

——— "The 50th anniversary of Gentzen's Thesis". In: Contemporary Readings in Mathematics.1980. 69: 93-97.

——— "A noção de *Construção* em Kant". *Cadernos da UnB*, pp. 51-53. 1981.

Reid, C. Hilbert. New York. Springer. 1970. 300p.

Resnik, M. D. "On the Philosophical Significance of Consistency Proofs", *Journal of Philosophical Logic*, 3: 133-147, 1974.

Robinson, A. Formalism 64. In: Bar-Hillel, Yehoshua (ed). Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam. North Holland. p. 228-246.

——— Concerning progress in philosophy of mathematics. In: Logic Colloquium 73. Amsterdam. North Holland. 1975.

Röd, W. Le problème de l'infini dans le développment de la pensée critique de Kant. In: Mannoyeur, F. (org): Infini des mathématiciens, infini de philosophes. Paris. Belin. 1992. pp. 159-174.

Schlick, M. "Positivismo y realismo". In: Ayer, A.J. (comp): El positivismo lógico. México. FCE. 1965. pp. 88-114.

Silva, J. J. da. Sobre o predicativismo em Hermann Weyl. Campinas, 1989. 234p. (Coleção CLE,6)

Sinaceur, H. "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", *Revue Internationale de Philosophie*, 186(4): 251-284, 1993.

-------- Le fini et l'infini. In: Mannoyeur, F. (org): Infini des mathématiciens, infini de philosophes. Paris. Belin. 1992. pp. 195-199.

Smorynski, C. "Hilbert's Program". *C W I Quarterly*, 1: 3-59, 1988.

Tait, W. "Finitism". *Journal of Philosophy*. 78(9): 524-546. 1981.

Torreti, R. Manuel Kant. Estudio sobre los fundamentos de la filosofia crítica. Buenos Aires. Editorial Charcas. 1980. 605p.

Vuillemin, J. La philosophie de l'algebre. Tome Premier. Paris. PUF. 1993. 582p.

Webb, J. Ch. Mechanism, mentalism, and metamathematics. Dordrecht. Reidel. 1980. 277p.

Weyl, H. Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics. In J. van Heijenoort (ed): From Frege to Gödel. Harvard University Press. Cambridge. 1967, pp. 480-483.

--------- Mathematics and Logic. pp.2-13

--------- Philosophy of Mathematics and Natural Science. Princeton. Princeton University Press. 1949. pp